# Técnicas de óptica coherente y método de elementos finitos aplicados al estudio de los desplazamientos de un prisma sometido a carga parcial

Kaufmann, Guillermo H.

1978

Tesis presentada para obtener el grado de Doctor en Ciencias Físicas de la Universidad de Buenos Aires

TECNICAS DE OPTICA COHERENTE Y METODO DE ELEMENTOS FINITOS APLICADOS AL ESTUDIO DE LOS DESPLAZAMIENTOS DE UN PRISMA SOMETIDO A CARGA PARCIAL

Guillermo H. Kaufmann



Tesis presentada en la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales de la Universidad de Buenos Aires, para obtener el título de Doctor en Ciencias Físicas

Julio 1978

a Carolina

## AGRADECIMIENTOS

Al Ing. R.J. [illegible], quien me propuso el tema de investigación y guió su desarrollo.

Al Dr. S. Idelsohn, por su asesoramiento en el cálculo por elementos finitos y asistencia con el trabajo de computación.

Al personal del Instituto de Mecánica Aplicada y Estructuras, Facultad de Ciencias Exactas e Ingeniería de la Universidad Nacional de Rosario, donde se realizaron los trabajos sobre los que está basada esta tesis.

Al Centro de Computación de la Universidad Nacional de Rosario, donde se efectuaron los cálculos numéricos.

Al Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas, al que pertenezco como miembro de su Carrera del Investigador, por los subsidios recibidos.

Finalmente y no por ello menos importante, a mi esposa por su incondicional apoyo y estímulo.

INDICE

## 1- INTRODUCCION

La aplicación de cargas concentradas sobre una superficie reducida de un cuerpo elástico, carga parcial, constituye un problema muy importante en el diseño de estructuras. Debido al creciente uso del hormigón pretensado, se ha desarrollado en relación a este tipo de estructuras la más extensa investigación en el tema. La fuerza de pretensado da lugar a fuertes tensiones locales que deben ir distribuyéndose sobre toda la sección de la estructura, fenómeno que se produce en una región vecina a la de aplicación del esfuerzo denominada zona de anclaje. En función de la posición y dimensión del anclaje, se originan en esta zona elevadas tensiones de tracción. El conocimiento de la distribución de las tensiones en esta zona es esencial para el proyectista, para preveer las armaduras necesarias en todo punto donde el material no sea capaz de resistirlas por sí sólo.

Este problema es de naturaleza tridimensional, pero debido a la dificultad de obtener una solución de este tipo, la primera aproximación fue tratar al mismo como bidimensional. Varias soluciones aproximadas han sido desarrolladas por distintos autores, entre las que se destaca la de Guyon[1] basada en la aplicación de sucesivas correcciones a las expresiones de las tensiones. La solución exacta para el caso bidimensional fue obtenida por Iyengar[2] desarrollando las tensiones en series de Fourier y satisfaciendo las condiciones de contorno. Yettram y Robbins[3] en 1969 obtuvieron la solución tridimensional usando un modelo de equilibrio del método de elementos finitos. Inicialmente trataron el caso de un prisma de sección cuadrada de lado 2a, cargado concéntricamente sobre una superficie cuadrada de lado 2a'. Si bien no describen la técnica empleada, estos autores muestran la distribución de las tensiones de tracción para distintas relaciones de a'/a. Los cálculos fueron realizados suponiendo al prisma formado por un material linealmente elástico, isótropo y homogéneo con un módulo de Poisson igual a 0.166, que es el valor promedio para el hormigón.

Los trabajos experimentales muestran resultados de validez restringida o que están en conflicto con los dados por distintas teorías. Esta incerteza en los mismos trae como consecuencia una tendencia a sobre-reforzar el hormigón, que frecuentemente introduce serias dificultades en su compactación. Christodoulides[4] estudió la distribución de tensiones utilizando modelos fotoelásticos bidimensionales y sus resultados coinciden bastante bien con los obtenidos por Iyengar. Sin embargo al estudiar modelos tridimensionales, mediante la técnica de congelación de tensiones, halló grandes desviaciones respecto a los valores teóricos. Zieliński y Rowe[5], utilizando bloques de hormigón de sección cuadrada, midieron deformaciones superficiales longitudinales $\varepsilon_x$ y transversales $\varepsilon_y$ en función de la relación a'/a, para distintas formas de aplicación del esfuerzo. Compararon sus resultados con los dados por distintas teorías, apareciendo diferencias entre ambos superiores al 100%. Como estos autores no midieron la deformación normal $\varepsilon_z$ y dada la na turaleza tridimensional del problema de carga parcial, resulta sencillo justificar la escasa concordancia obtenida por los mismos.

Para clarificar esta situación se propuso estudiar experimentalmente este problema utilizando técnicas de mayor sensibilidad que las convencionales. Este trabajo tiene como objetivo, en parte, mostrar la aplicación de dos técnicas de óptica coherente, fotografía de ~~speckle~~ motas e interferometría holográfica, a la determinación de los desplazamientos superficiales en un cuerpo difusor. Por medio de la fotografía de ~~speckle~~ motas se miden desplazamientos en el plano de la superficie del objeto y con la interferometría holográfica, desplazamientos normales a aquélla.

La investigación descripta en esta tesis se limita al estudio de un prisma de sección cuadrada, cargado concéntricamente con una fuerza normal a una de sus bases y con una relación entre la dimensión de la zona cargada y la sección transversal $a'/a = 0.5$. Para independizarse de efectos dependientes del tiempo que usualmente tiene el hormigón como material, a saber: relajación, deformaciones inelásticas, cracks superficiales, etc., se usó un modelo de resina epoxica.

En el trabajo de Yettram y Robbins no figuran resultados de los desplazamientos. Aunque éstos existieran, no serían de utilidad para el caso que aquí se describe debido a que el módulo de Poisson de la resina epoxi es aproximadamente dos veces y media mayor que el del hormigón, diferencia que altera sustancialmente la distribución de los desplazamientos. Por esta causa se calcularon los mismos usando un modelo del método de elementos finitos.

En el capítulo 2 se considera el fenómeno de ~~speckle~~ moteado, es decir la granulosidad que se produce cuando se ilumina una superficie rugosa con un haz altamente coherente y se describen ciertas propiedades físicas del mismo, como ser el diámetro medio de los granos luminosos. En el punto 2.2 se aplica este fenómeno a la medición de desplazamientos uniformes en el plano de la superficie de un objeto difusor, mediante una técnica de doble exposición. Se generaliza un trabajo reciente y se demuestra que la figura de difracción al infinito de la imagen fotografiada, es similar al diagrama de interferencia de Young formado por dos aberturas que tienen separación proporcional a la componente del desplazamiento en el plano de la superficie del objeto. Usando el criterio de resolución de Rayleigh se calcula la resolución del método. El caso de desplazamientos no uniformes, como son los debidos a deformaciones, se trata en el punto 2.4. Se muestra como se extrae la información del registro de ~~speckle~~ moteado y como se modifica la sensibilidad debido a la necesidad de usar un sistema óptico.

En el capítulo 3 se consideran los aspectos principales de la holografía, que más adelante se aplican a la interferometría. Se analizan las dos operaciones básicas de la holografía, registro y reconstrucción, y se muestra como finalmente se obtienen las dos imágenes, una virtual y otra real. Luego se discuten los requerimientos de coherencia y estabilidad, y los efectos de la emulsión. Por último se trata la aplicación de la holografía a la interferometría. Se discute la interferometría holográfica de doble exposición, que es la técnica que se aplica en este trabajo y se estudia la interpretación de las franjas de interferencia. Se desarrolla la ecuación básica que permite determinar pequeños desplazamientos en un cuerpo difusor y se muestra como se simplifica la interpretación de las franjas cuando solamente esta técnica se usa para la determinación de desplazamientos normales.

En el capítulo 4 se expone el método experimental usado para la medición de los desplazamientos, que consiste en usar fotografía de motas para determinar los desplazamientos en el plano de la superficie del modelo e interferometría holográfica para la determinación de los desplazamientos normales a la misma. Se muestra el modelo usado y la forma de aplicación de la carga. También se detalla como se midieron los módulos elásticos del material y se muestran los montajes usados para registrar los moteogramas y hologramas.

En el capítulo 5 se introduce el método de elementos finitos y se considera formalmente el modelo de desplazamientos. Este método consiste básicamente en reemplazar una estructura continua por un modelo matemático construido por elementos de dimensiones finitas, de propiedades elásticas conocidas, que son expresadas en forma matricial. En el punto 5.3 se calcula la matriz para el elemento cúbico de ocho modos, usado en este trabajo. En el punto 5.4 se considera la aplicación numérica del método a este caso.

Finalmente, en el capítulo 6 se muestran y se discuten los resultados experimentales y teóricos hallados.

MOTAS
## 2- FOTOGRAFIA DE [redacted]

### 2.1- Propiedades físicas del fenómeno de speckle.

Cuando se ilumina una superficie rugosa con un haz coherente, como el que proviene de un laser, la luz difundida presenta una estructura de tipo granular. Es decir, se observan regiones de alta luminosidad rodeadas de otras oscuras. Este fenómeno es llamado speckle o motas (manchas) por los autores ingleses.

Muchos autores[6-11] descubrieron e investigaron este fenómeno, que se produce debido a la interferencia mutua de las ondas que difracta cada microelemento difusor de la superficie rugosa. Consideremos a continuación que sucede cuando una onda plana proveniente de un laser incide sobre una superficie reflectora de estructura microscópica irregular. El frente de onda reflejado adopta en la proximidad del objeto la misma forma irregular de la superficie, pero va cambiando a medida que se aleja de la misma. Para determinar dicha forma a una distancia cualquiera del objeto, puede utilizarse la construcción clásica de Huygens-Fresnel. Cada punto del frente de onda se comporta como origen de una onda secundaria esférica y la onda difundida es el resultado del fenómeno de interferencia que se obtiene de la superposición de todas estas ondas secundarias.

El frente de la onda conserva el carácter granuloso de la superficie del objeto, pero su forma evoluciona y cambia a medida que la onda se propaga. Tanto la intensidad luminosa como la fase de la onda cambian rápidamente de un punto del frente a otro próximo a él. En Fig. 2.1 se muestra una fotografía de ~~speckle~~ motas en la que se aprecia claramente la presencia de "granos luminosos", regiones donde la intensidad luminosa es máxima, separados por regiones oscuras.

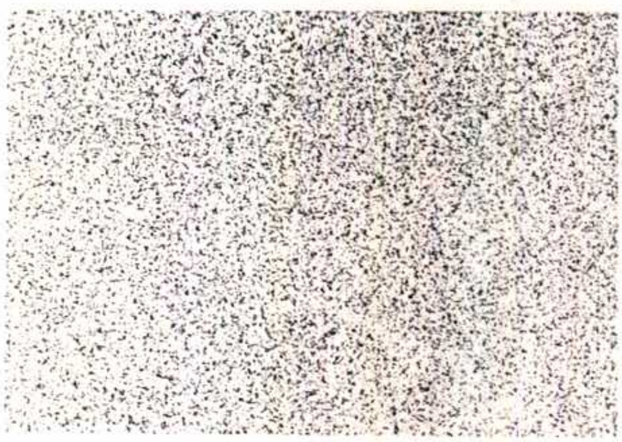
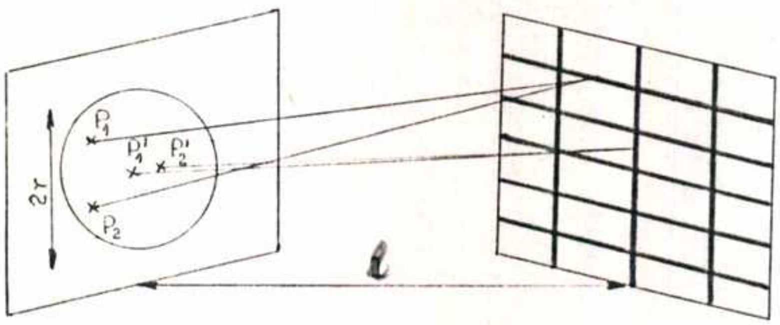


Fig. 2.1

La dimensión media de los granos aumenta a medida que la cámara fotográfica se aleja del objeto. Un enfoque posible para interpretar la figura granulosa que se observa sobre un plano dado, es considerarla como el resultado de la superposición coherente de todos los sistemas de franjas de interferencia de Young debidos a los pares de puntos ( $P_1$ $P_2$ ) , ( $P_1'$ $P_2'$ ) , etc, situados sobre la superficie del difusor, Fig. 2.2. El entrecruzamiento irregular de todos estos sistemas de franjas da lugar a la formación de regiones alternadamente claras y oscuras.

La dimensión media s de los granos de speckle será igual a la más pequeña de las interfranjas de los sistemas de franjas elementales antedichos, que impone la fineza de su tramado sobre el resto de la figura. La <u>interfranja</u> i de un sistema de Young correspondiente a una distancia $\overline{P_1P_2}$ entre los puntos fuente




pero, dos fuentes puntuales (no lineales), no dan lugar a hipérbolas?

Fig. 2.2

$P_1$ y $P_2$ y el plano de observación, vale[11] que quiere decir "interfranja"? distancia entre franjas?

$$i=\lambda \ell / \overline{P_1P_2} = \frac{\lambda \cdot \ell}{\Delta P} \tag{2.1}$$

donde $\lambda$ es la longitud de onda emitida por el laser y $\ell$ la distancia de separación entre el objeto y el plano de observación.

Por lo tanto, el diámetro medio s de los granos luminosos sobre el plano en consideración está dado por

$$s=\lambda \ell / 2r \tag{2.2}$$

donde 2r es el diámetro medio del objeto. En realidad si la zona iluminada o el diámetro del objeto no son circulares, la dimensión media de los granos de "speckle" varía según la dirección considerada.

Se debe señalar que cada grano luminoso posée una extensión limitada en sentido longitudinal. La distribución de ~~speckle~~ motas está formada entonces por un conjunto de regiones tridimensionales, de extensión limitada y dependiente de la distancia a la superficie difusora, rodeadas de regiones oscuras.

## 2.2- Medición de desplazamientos usando fotografía de ~~speckle~~ motas.

Puesto que la distribución de ~~speckle~~ motas es solidaria con el objeto que lo difunde, es posible detectar movimientos de este último a partir del registro del ~~speckle~~ motas correspondiente a diferentes posiciones del objeto. La primera contribución se debe a Burch y Tokarski[16] quienes estudiaron el caso de fotografiar m veces un objeto fijo, difusor por transmisión, sobre una placa fotográfica que había sido desplazada m-1 veces en una dirección coplanar a la misma. Hallaron que la distribución de intensidad de la figura de difracción al infinito de la placa revelada es equivalente al diagrama de interferencia formado por m aberturas que tienen separaciones proporcionales a los desplazamientos. En 1970 Leendertz[12,13] basándose en el trabajo anterior, fue el primero que determinó desplazamientos a partir del doble registro, sobre una misma película fotográfica, del "speckle" difundido por un objeto, antes y después de haberse movido este último. Luego esta técnica fue desarrollada y aplicada por otros autores[14,15].

A continuación se generaliza el trabajo de Burch y Tokarski para el caso de un objeto difusor por reflexión que se desplaza en una distancia de dirección arbitraria, dejando la película fotográfica en reposo. Dado que en la práctica se usa solamente doble exposición, éste es el caso que se trata. Se muestra que la figura de difracción al infinito de la película, es similar al diagrama de interferencia de Young formado por dos aberturas que tienen separación propocional a la componente del desplazamiento en el plano de la superficie del objeto.

El vector desplazamiento $\vec{d}$ de un punto arbitrario del objeto se puede descomponer en dos vectores, uno $\vec{dp}$ coplanar con la superficie y otro $\vec{dn}$ normal a la misma. O sea

$$\vec{d}=\vec{d}_p+\vec{d}_n \tag{2.3}$$

tal que

$$\vec{d}_p=u\hat{i}+v\hat{j} \tag{2.4}$$

$$\vec{d}_n=w\hat{k} \tag{2.5}$$

donde u, v, w e $\hat{i}$, $\hat{j}$, $\hat{k}$ son los desplazamientos y los versores según los tres ejes cartesianos x, y, z respectivamente.

El "speckle" se traslada según un vector idéntico en módulo y dirección, si la película es paralela al objeto, Fig.2.3.

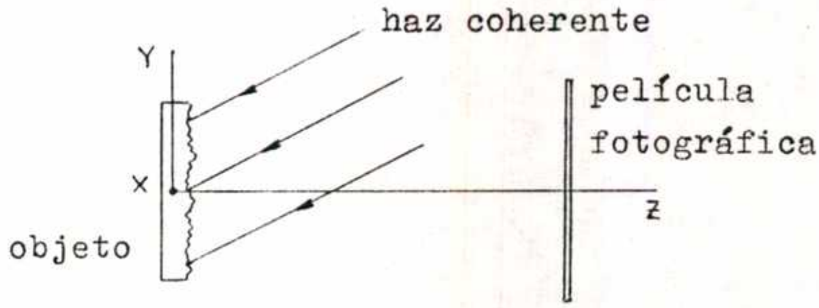



Fig. 2.3

Si $|g(x,y,z)|^2$ es la intensidad de la distribución de speckle en un punto x,y,z del plano de la película y t es la duración de cada una de las dos exposiciones, la iluminación total es

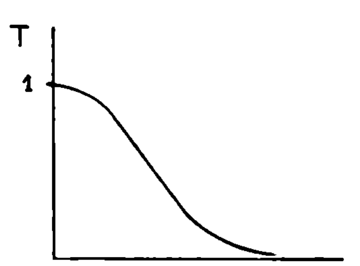
$$E(x,y,z)=t\left[|g(x,y,z)|^2+|g(x+u,y+v,z+w)|^2\right] \quad (2.6)$$

Como el desplazamiento es mucho menor que la distancia que existe entre la superficie y la película, la distribución de las motas [redacted] no varía por efecto del desplazamiento en dirección normal. Es decir

$$|g(x+u,y+v,z+w)|^2=|g(x+u,y+v,z)|^2 \quad (2.7)$$

Por lo tanto, en lo que sigue, para simplificar la notación, se suprimirá la coordenada z.

Se supone que la función de transmisión en amplitud $T(x,y)$ de la película una vez revelada es aproximadamente una función lineal de la exposición [17], es decir se supone que se trabaja en la región lineal de la curva T-E, Fig. 2.4, donde $T(x,y)=\sqrt{I/I_0}$




$\log \frac{I_0}{I} = d$

Curvas de T-E

log E

Fig. 2.4

$$T(x,y)=B-CE(x,y) \quad (2.8)$$

donde B y C son dos constantes positivas que dependen de la película. Por lo tanto resulta

$$T(x,y)=B-Ct\left[|g(x,y)|^2+|g(x+u,y+v)|^2\right] \qquad (2.9)$$

Si el desplazamiento es muy pequeño, es prácticamente imposible medirlo visualizando ? mirando ? la película. Para obtener información sobre el mismo, se observa entonces sobre una pantalla la figura difracción al infinito del fenómeno registrado sobre la película revelada o "specklegrama". Esto se puede realizar si se ilumina este último en incidencia normal, con una onda plana coherente de amplitud A y se coloca una lente convergente para observar la figura de difracción en su plano focal, Fig. 2.5

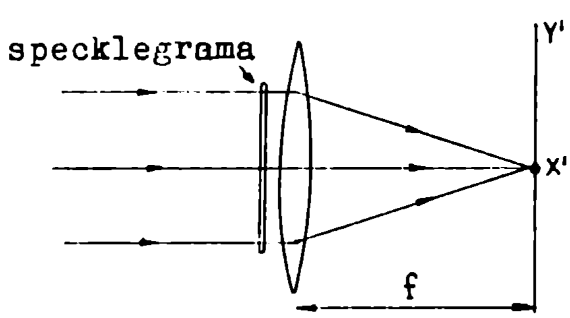



Fig. 2.5

Usando la Ec.I.13 del Apéndice I se puede escribir la amplitud U (x', y') de la luz en el plano focal, que resulta proporcional a la transformada de Fourier de la función de trasmisión T (x, y) del specklegrama

$$U(x',y')=(i\lambda f)^{-1}A e^{ik(x'^2+y'^2)/2f}\,\mathcal{F}\left[T(x,y)\right] \qquad (2.10)$$

con $$k=2\pi/\lambda \qquad (2.11)$$

donde f es la distancia focal de la lente y F[ ] significa la transformada de Fourier de la función que está adentro del corchete, es decir

$$F\left[T(x,y)\right] = \iint_{-\infty}^{\infty} T(x,y)\, e^{-ik(xx'+yy')/f}\, dx\, dy \qquad (2.12)$$

Teniendo en cuenta que [13,19]

$$F\left[a\right] = a\,\delta(x',y') \qquad (2.13)$$

donde $\delta(x', y')$ es la delta de Dirac

y como

$$F\left[|g(x+u,y+v)|^2\right] = e^{ik(ux'+vy')/f}\, F\left[|g(x,y)|^2\right] \qquad (2.14)$$

se obtiene

$$U(x',y') = (i\lambda f)^{-1} A e^{ik(x'^2+y'^2)/2f} \Big\{ B\delta(x',y') - \\ -Ct\, F\left[|g(x,y)|^2\right]\left[1+e^{ik(ux'+vy')/f}\right] \Big\} \qquad (2.15)$$

como $\delta(x', y') = 0$ para todo punto que no sea el origen de coordenadas, la intensidad $|U(x', y')|^2$ en el plano focal, fuera del punto $(x', y') = (0,0)$, es

$$|U(x',y')|^2 = (\lambda f)^{-2} A^2 C^2 t^2 \left|F\left[|g(x,y)|^2\right]\right|^2 . \\ . \left|1+e^{ik(ux'+vy')/f}\right|^2 \qquad (2.16)$$

O sea, a menos de una constante, la intensidad en el plano focal es igual al producto de dos funciones. La función

$\left|F\left[|g(x, y)|^2\right]\right|^2$ es la intensidad de la luz difractada por la distribución de speckle correspondiente a una única exposición y representa el halo de difracción. Será una distribución simétrica alrededor del origen con intensidad gradualmente decreciente a medida que (x', y') aumenta. Veremos que la otra función representa la distribución de intensidad que generan dos aberturas puntuales que modulan el halo de difracción. En efecto

$$\left|1+e^{ik(ux'+vy')/f}\right|^2=4\cos^2\left[k(ux'+vy')/2f\right] \qquad (2.17)$$

es la expresión para el diagrama de interferencia de Young, que consiste de franjas equiespaciadas y perpendiculares al desplazamiento[20]. En Fig. 2,6 se observa como se ven estas franjas brillantes sobre el p lano focal.

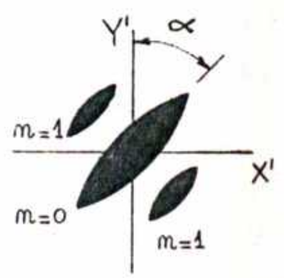



Fig. 2.6

Un pequeño dezplazamiento, dificilmente medible, produce entonces una interfranja apreciable a simple vista.

El primer orden $n = 1$, interferencia constructiva, se obtiene para

$$k(ux'+vy')/2f=\pi \qquad (2.18)$$

Teniendo en cuenta Ec.2.4 y Ec.2.11, se obtiene

$$\vec{d_p}\cdot\vec{r'}=\lambda f \qquad (2.19)$$

donde

$$\vec{r'}=(x',y') \qquad (2.20)$$

Como $\vec{d_p}$ tiene dirección normal a las franjas

$$\vec{d_p}\cdot\vec{r'}=d_p i \qquad (2.21)$$

donde i es la distancia entre dos franjas consecutivas o interfranja. Por lo tanto se obtiene finalmente

$$i=\lambda f/d_p \qquad (2.22)$$

Si se mide la interfranja i y el ángulo de inclinación $\alpha$ de las franjas respecto al eje y' vertical , se pueden obtener los valores de los desplazamientos coplanares u y v a traves de

$$u=d_p\cos\alpha$$
$$v=d_p\,\mathrm{sen}\,\alpha \qquad (2.23)$$

¿Si no hay [illegible] desplazamientos coplanares.
[illegible]

Es importante subrayar que para que pueda usarse esta técnica es necesario que la región iluminada del objeto sufra movimientos de conjunto, sin deformaciones locales de la microestructura de la superficie. Si así no sucede, el diagrama de "speckle"

del moteado

se deforma, es decir cambia la forma y la distribución relativa de los granos. o motas.

2.3- <u>Sensibilidad del método</u>

Se verá ahora cual es la sensibilidad del método, es decir cual es el mínimo desplazamiento que se puede medir. La intensidad de la luz difractada por la distribución de speckle correspondiente a una sola exposición, se puede considerar como el resultado de la superposición de todas las figuras de difracción debidos a cada uno de los granos registrados en la película. Si suponemos que en promedio estos granos son círculos de diámetro s, dicha intensidad tendrá solamente un valor significante para el disco central de la figura de Airy[21] correspondiente a uno de esos granos. Por lo tanto el radio R del halo de difracción vale, aproximadamente,

$$R=\lambda f/s \qquad (2.24)$$

si se omite el factor 1.22.

Teniendo en cuenta que solamente son visibles franjas de Young que se encuentren dentro del halo de difracción y comparando la Ec.2.22 que da la interfranja i con el radio R del halo de difracción dado por la Ec.2.24, se concluye que sólo un desplazamiento mayor que s generará franjas de Young visibles.

Es importante señalar que la resolución de la emulsión fotográfica debe ser tal que sea capaz de registrar cada grano del moteado ~~speckle~~. En general se usan películas espectrográficas con re-soluciones de hasta 500 líneas/mm.

En Fig. 2.7 se muestran las franjas de Young obtenidas para un desplazamiento del objeto igual a 80 $\mu$m. Para este montaje

$\lambda$ = 0.6328 x $10^{-6}$m (laser de He-Ne)

$\ell$ = 0.70m?

2r = 2 x $10^{-2}$m 2,0?

y por lo tanto la dimensión media de los granos de speckle es s=22 $\mu$m.

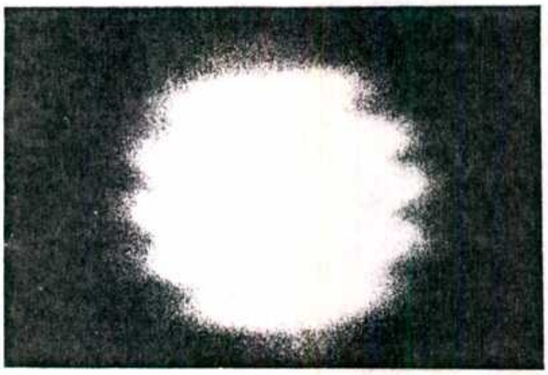


Fig. 2.7

## 2.4- Extensión del método al caso de desplazamientos no uniformes

Si la superficie de un objeto sufre deformaciones locales no se puede utilizar el método anterior. Entonces, habría que dividir dicha superficie en regiones suficientemente pequeñas, como para que cada una de ellas se comporte prácticamente como un rígido. Cada una de estas regiones se iluminaría separadamente y se aplicaría en cada caso la técnica citada.

Para evitar la incomodidad de realizar la iluminación secuencialmente, se puede iluminar todo el objeto y formar su imágen con una lente sobre la pelicula. De esta forma se consigue que un pequeño área de la imágen reciba el ~~speckle~~ moteado procedente del área correspondiente en el objeto. ?

Si el desplazamiento en una pequeña zona del plano de la superficie del objeto es dp, el correspondiente desplazamiento sobre la imagen es

$$D=d_p m \qquad (2.25)$$

donde m es ~~la magnificación~~ el aumento de la lente (dimensión de la imagen/ dimensión del objeto).

Para conocer los desplazamientos del objeto sobre distintos puntos de su superficie, se ilumina un pequeño área del specklegrama con el haz del laser sin expandir, Fig. 2.8. Se obtiene así un sistema de franjas de Young, que modulan el halo de difracción, de espaciamiento angular[22]

$$\operatorname{sen}\beta=n\lambda/D=n\lambda/md_p \qquad (2.26)$$

donde n es el orden del espectro de difracción ($n = 1,2,3,\ldots$).

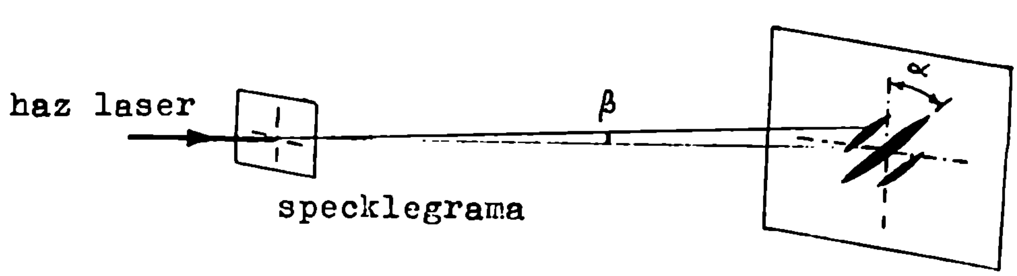



Fig. 2.8

Analizando el specklegrama punto por punto, se pueden determinar los desplazamientos en magnitud y dirección sobre toda la superficie del objeto.

En este caso la dimensión de un grano del moteado ~~speckle~~ se puede calcular usando el criterio de resolución de Rayleigh[23]. Rayleigh estableció que dos componentes espectrales monocromáticas están justamente resueltas en un espectroscopio, cuando la intensidad máxima de una de ellas coincide con el primer mínimo de la otra. Para el caso de difracción al infinito por una abertura circular, el ángulo $\theta$ mínimo de resolución es igual a

$$\text{sen } \theta = 1.22\lambda/b \qquad (2.27)$$

donde b es el diámetro de la lente, Fig. 2.9

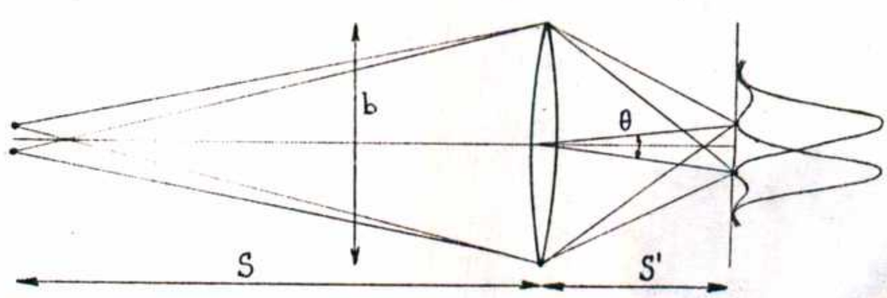



Fig. 2.9

Como $\theta$ es pequeño, el diámetro medio s de un grano de moteado ~~speckle~~ en el plano imagen es

(1+m) ?

$$s = 1.22\lambda S'/b = 1.22\lambda F(1+m) \quad ? \qquad (2.28)$$

donde $F=f/b$ es la abertura de la lente. $\frac{s'}{b} = \frac{f}{b}\cdot(m+1)$ ?

Por lo tanto, el diámetro medio So de un grano de speckle sobre el objeto es

$$s_0 = 1.22\lambda F(1+m)/m \qquad (2.29)$$

Para una lente F=6.3, un laser de He-Ne y con m=1, se obtiene So=9.7 $\mu$m. La Ec.2.29 muestra que la sensibilidad del método puede ser variada dentro de límites amplios, eligiendo adecuadamente F y m. Esta posibilidad de desensilizar el método, permite independizarse de vibraciones ambientales sin necesidad de usar bancos ópticos especialmente aislados.

En general conviene usar aberturas grandes de modo que los tiempos de exposición sean pequeños, pero teniendo en cuenta la resolución de la emulsión. Por ejemplo, si se emplea como fuente luminosa un laser de He-Ne, la resolución de la emulsión deberá ser mejor que 1300/F líneas por mm para magnificación unitaria. Por otra parte, cuanto más fino es el grano de la emulsión más alto es el contraste y se mejora la visibilidad de las franjas. La reducción de sensibilidad que acompaña el aumento de resolución puede compensarse con el uso de mayores aberturas, para mantener así los tiempos de exposición en valores normales.

Una última consideración debe tenerse en cuenta cuando se usa una emulsión de espesor finito para registrar la distribución de motas. Si la estructura de esta última cambia apreciablemente a lo largo del espesor de la emulsión, una sola exposición registrará más de una distribución. Este efecto no será serio a menos que el espesor de la emulsión exceda dos veces la tolerancia focal $\Delta z$ calculada de acuerdo a la regla de un cuarto de longitud de onda, introducida por Rayleigh[24]. Usando la fórmula[25]

$$\Delta z = \pm 2F^2\lambda \qquad (2.30)$$

se encuentra que para una lente f/2 el espesor de la emulsión debe ser menor que 10 $\mu$m. Como las películas espectrográficas de más alta resolución tienen un espesor de emulsión del orden de 7 $\mu$m, la abertura mencionada es la límite para no tener un pobre contraste de franjas. *que más quieres.*

*donde consiguen una lente de f/2 ?!*

# 3- HOLOGRAFIA E INTERFEROMETRIA HOLOGRAFICA

## 3.1- Holografía

### 3.1.1- Introducción

En 1948 Gabor[28] propuso un nuevo método de formación de imágenes en dos etapas y sin lentes, que llamó reconstrucción de frentes de onda. Este método consiste en fotografiar primero el diagrama de interferencia que existe cuando la figura de difracción de un objeto interfiere con una onda de referencia. Este proceso se llama formación o registro del holograma (del griego holos: todo), conteniendo este último toda la información del objeto, amplitud y fase. El segundo proceso, llamado reconstrucción, consiste en colocar el holograma en un haz luminoso coherente para producir una imagen del objeto. Existen dos tipos de imágenes que se pueden obtener de un holograma. La imagen real es aquélla que aparece sobre la parte opuesta del holograma con respecto a la fuente de luz y tiene la propiedad de que no se necesita un sistema óptico para registrarla. La imagen virtual es la que aparece del mismo lado del holograma y tiene la propiedad de que se necesita un elemento focalizador para detectarla.

La holografía fue introducida por Gabor como un intento para mejorar el poder de resolución de los microscopios electrónicos. Gabor[29,30] sugirió un proceso de formación de imágenes en dos etapas, en el cual el holograma se registraba con longitud de onda de electrones y se reconstruía con luz visible. Sin embargo el esquema original de Gabor, onda de referencia sobre el eje con respecto al campo de difracción del objeto, no permitió resolver totalmente el problema. Las imágenes real y virtual se superponían una con otra, causando interferencia mutua. Además como el haz de referencia debía pasar a través de la muestra, este montaje restringía mucho la clase de objetos que podían usarse.

Muchos científicos trataron de eliminar estos inconvenientes, pero recién pasaron doce años hasta que la idea de Gabor renació. Leith y Upatnieks[31], usando principios de la teoría de radio-comunicaciones, introdujeron un haz de referencia inclinado para resolver los inconvenientes mencionados. Simultáneamente, con el advenimiento del laser, se tuvo una fuente de luz coherente cuasimonocromática muy intensa. Un año más tarde estos autores obtuvieron las primeras imágenes tridimensionales de alta calidad. De aquí en más la holografía se desarrolló notablemente y dio origen a una nueva óptica.

A continuación se analiza la formación de los hologramas de Fresnel, que son registros de interferencia entre el campo de difracción cercano producido por el objeto y un fondo coherente. Estos hologramas son los que dan origen a la interferometría holográfica, que es la técnica que se usa en este trabajo para la determinación de desplazamientos normales.

### 3.1.2- Formación de imágenes

Como se indicó anteriormente el procedimiento de reconstrucción de frentes de onda consiste de dos operaciones: un registro y una operación final de reconstrucción. Por el momento se tratará la primera de ellas.

Debido a que todos los medios sensibles que se disponen actualmente registran solamente intensidad luminosa, la amplitud y la fase de la onda difractada por el objeto se registran superponiendo un fondo coherente de referencia. La forma más sencilla de llevar a cabo esta superposición, para el caso de un objeto difusor, se muestra en Fig. 3.1 donde una onda plana ilumina el objeto y un espejo plano.

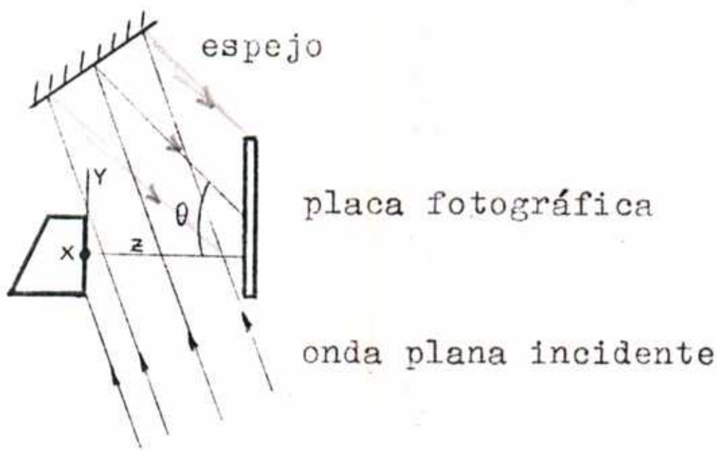



Fig. 3.1

Un punto (x, y, z) cualquiera de la superficie del objeto dispersa la radiación incidente y se comporta como una fuente emisora de ondas. El espejo desvía simplemente la onda plana incidente en un ángulo θ y contribuye al campo con una amplitud uniforme y una variación lineal de fase.

El frente de onda originario se puede reconstruir si se supone como en el capítulo anterior que la placa fotográfica es tal que, una vez revelada, su función de trasmisión es una función lineal de la iluminación . Para ello se ilumina el holograma con una onda plana en incidencia normal. Cuando la onda plana pasa a través del holograma, se puede demostrar[33] que la onda trasmitida posee cuatro componentes distintas de radia ción. La primer componente no es más que la onda incidente atenuada y representa una onda plana que se propaga a lo largo del eje óptico. La segunda componente da origen a una débil difracción alrededor del eje. La tercera componente es proporcional a la onda objeto original, multiplicada por un factor exponencial que depende del ángulo $\theta$. Es una onda esférica divergente y produce una imagen virtual del objeto a la distancia z del holograma; el factor exponencial ? muestra que esa imagen está desviada de un ángulo $\theta$ respecto al eje, Fig. 3.2. Por lo tanto cuando se utiliza como onda de reconstrucción la onda de referencia, se produce una imágen virtual del objeto. ?

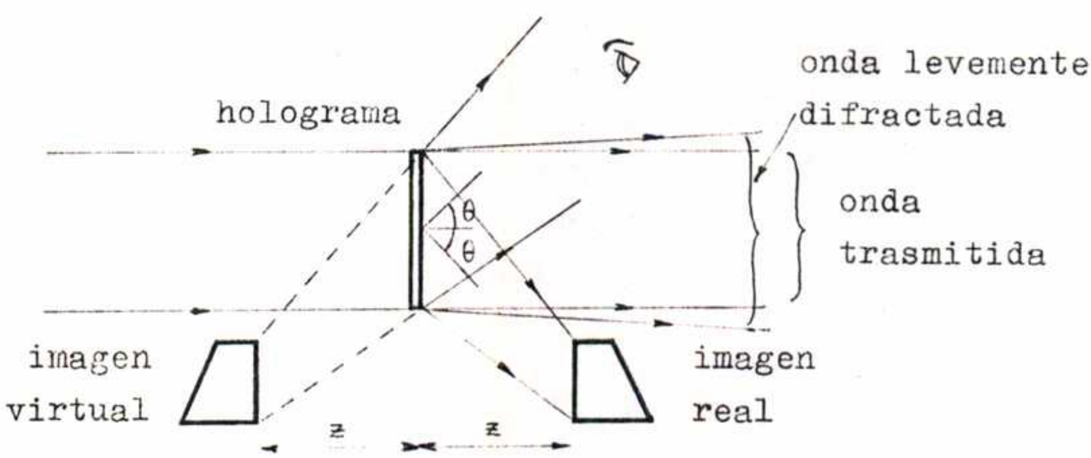



Fig. 3.2

La cuarta componente es una onda esférica que converge a la distancia z del holograma y da origen a la imagen real. La presencia del factor exponencial ? dice que esa imagen está desviada de un ángulo - $\theta$ respecto al eje del holograma. Esta imagen real corresponde a una focalización efectiva de la luz en el espacio. De esta forma se obtienen simultáneamente dos imágenes, pero que están separadas una de la otra y también de la onda trasmitida. Debido a que el objeto entero se puede considerar como un conjunto de fuentes puntuales de amplitud y fases variables, se puede demostrar que el haz dispersado por el objeto entero engendra dos imágenes del mismo. Dado que en la reconstrucción se obtiene una réplica del frente de onda emitido por el objeto, la imagen virtual conserva todas las propiedades tridimensionales de aquél y se tiene una perfecta sensación de relieve. En particular se observan efectos de paralaje: se puede ver detrás de los objetos situados en primer plano, cambiando simplemente el punto de observación.

La imagen real en este caso tiene ciertas propiedades que la hacen menos interesante que la imagen virtual. Los puntos del objeto que están más próximos a la placa fotográfica aparecen en la imagen real más lejos de la misma. Es decir que si se observa la imagen real, los efectos de paralaje no son los que aparecen en la escena original. Se dice que la imagen es pseudoscópica. Además para los hologramas comunes la profundidad de campo es generalmente pequeña, de modo que si se quiere registrar la imagen real hay que reconstruir parcialmente una parte del holograma. Sin embargo hay que tener en cuenta que en este caso la perspectiva aparente de la imágen bidimensional se modifica.

Una extensión del caso tratado es usar ondas esféricas tanto para la referencia ~~y~~ como para la reconstrucción. Supongamos que la onda de referencia sea una onda esférica producida por una fuente puntual que se halla a distancia $z_R$ de la placa y que la reconstrucción del holograma se realiza con otra onda esférica que proviene de un punto situado a distancia $z_p$. Para mayor generalización se supone que la longitud de onda $\lambda_2$ para la reconstrucción es distinta de $\lambda_1$ utilizada en el registro. Se puede demostrar que en este caso se obtiene una magnificación[34,35]

$$m=\left[(1-z_0/z_R)\pm\lambda_1 z_0/\lambda_2 z_p\right]^{-1} \qquad (3.1)$$

donde $z_0$ es la distancia del objeto a la placa, el signo - vale para la imagen virtual y el + para la real. Si se utiliza una onda de referencia plana ( $z_R = \infty$ ) y una onda de reconstrucción plana ( $z_p = \infty$ ), la magnificación es igual a 1 independientemente del cociente $\lambda_1/\lambda_2$. Se observa que se pueden obtener magnificaciones considerables si la longitud de onda $\lambda_2$ para la restitución es mucho mayor que la longitud de onda $\lambda_1$ utilizada para el registro. quien tuviera un espejo para rayos X!!

### 3.1.3- Requerimientos de coherencia y estabilidad

Se vió que un holograma es el registro de un diagrama de interferencia entre el campo de difracción que proviene del objeto y un fondo coherente de referencia. El tratamiento expuesto anteriormente se basa en la adición de estos campos ópticos. Esta adición de campos es la aproximación de una expresión más general que da la teoría de luz parcialmente coherente.

La teoría de interferencia entre dos haces parcialmente coherentes fue introducida por Wolf[36,37]. Esta teoría considera el caso de un sistema como el de Fig. 3.3, en la cual una fuente de tamaño finito S emite luz de ancho espectral fino, que in cide sobre una pantalla opaca que contiene dos pequeñas aberturas en los puntos $P_1$ y $P_2$ de coordenadas $\vec{r}_1$ y $\vec{r}_2$ respectivamente. La amplitud compleja de quién? en estas dos aberturas son $V(\vec{r}_1, t)$ y $V(\vec{r}_2, t)$ y estas funciones satisfacen la ecuación de onda

$$\nabla^2 V(\vec{r},t) = 1/c^2 \; \partial^2 V(\vec{r},t)/\partial t^2 \qquad (3.2)$$

donde $\nabla^2$ es el operador laplaciano y c es la velocidad de la luz.

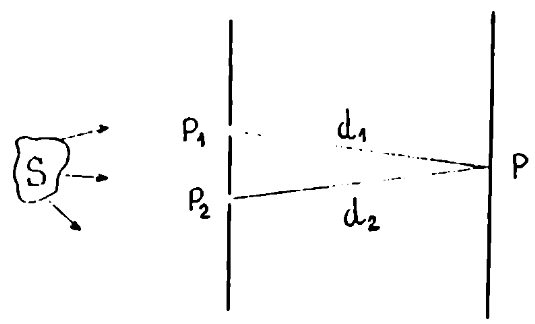



Fig. 3.3

Se quiere determinar la intensidad resultante en el punto P que está detrás de la pantalla. Esta intensidad es la cantidad observable y está dada por

$$I_p = \langle V_p(t) \; V_p^*(t) \rangle \qquad (3.3)$$

donde $\langle \quad \rangle$ significa un promedio temporal largo definido por

$$\langle f(t) \rangle = \lim_{T \to \infty} 1/2T \int_{-T}^{T} f(t)\, dt \qquad (3.4)$$

Debido a que la ecuación de onda es una ecuación diferencial lineal, la amplitud compleja en P es la superposición de las contribuciones desde $P_1$ y $P_2$. Para campos estacionarios se puede demostrar que

$$I_p = I_1 + I_2 + 2|K_1K_2| \operatorname{Re} \Gamma_{12}(\tau) \qquad (3.5)$$

donde $I_1$ es la intensidad en P debido a la abertura $P_1$ solamente, idem para $I_2$, $K_1$ y $K_2$ dependen del tamaño de las aberturas y la posición relativa de P con respecto a $P_1$ y $P_2$ y $\Gamma_{12}$ es la función de correlación cruzada dada por

$$\Gamma_{12}(\tau) = \langle V_1(t+\tau) \quad V_2^*(t)\rangle \qquad (3.6)$$

que se llama función de coherencia mutua de los campos en $P_1$ y $P_2$. Cuando los dos puntos coinciden la correlación cruzada se vuelve una autocorrelación, que se llama función de auto-coherencia y no es nada más que la intensidad en el punto considerado si el intervalo de tiempo es $\tau = 0$

$$\Gamma_{11}(0) = I(\vec{r}_1) \qquad (3.7)$$

Se define al grado complejo de coherencia como la función de correlación mutua normalizada

$$\gamma_{12}(\tau) = \Gamma_{12}(\tau)/\sqrt{\Gamma_{11}(0)\Gamma_{22}(0)} \qquad (3.8)$$

Si la frecuencia media de la luz es $\nu$ y la longitud de onda media es $\lambda$ , se puede escribir

$$I_p = I_1+I_2+2\sqrt{I_1 I_2}\,|\gamma_{12}(\tau)|\cos\left[2\pi\nu\tau+2\pi(d_2-d_1)/\lambda+ +\arg\gamma_{12}(\tau)\right] \tag{3.9}$$

que es la ley de interferencia generalizada para luz parcialmente coherente.

Para el caso de luz incoherente $|\gamma_{12}| = 0$ y

$$I_p=I_1+ I_2 \tag{3.10}$$

y no existe interferencia debido a que las intensidades se suman directamente.

Para el caso de radiación coherente es $|\gamma_{12}| = 1$ y

$$I_p=I_1+I_2+2\sqrt{I_1 I_2}\cos\phi_{12} \tag{3.11}$$

que es la conocida ley de interferencia.

Para muchos problemas se puede suponer a la luz como cuasi-monocromática, es decir

$$\Delta\nu \ll \nu \tag{3.12}$$

donde $\Delta\nu$ es el ancho espectral y $\nu$ la frecuencia media.

Además para muchas situaciones experimentales

$$\tau \ll 1/\Delta\nu \tag{3.13}$$

Bajo estas condiciones se pueden separar las componentes espacial y temporal de la función de coherencia. La llamada coherencia espacial describe los efectos de coherencia parcial que se deben al tamaño finito de la fuente luminosa y está medida por $\gamma_{12}(o)$. La llamada coherencia temporal resulta de consideraciones del ancho espectral finito de la radiación y está medida por $\gamma_{11}(\tau)$. Se puede definir una longitud de coherencia $\Delta \ell$ y un tiempo de coherencia $\Delta t$ dados por

$$\Delta \ell = c/\Delta\nu = \lambda^2/\Delta\lambda \qquad (3.14)$$

$$\Delta t = \Delta \ell / c = 1/\Delta\nu \qquad (3.15)$$

La Ec. 3.14 se puede usar para evaluar las dimensiones sobre las cuales se puede tener coherencia con una fuente de ancho de línea espectral $\Delta\lambda$ .

El valor de $|\gamma_{12}|$, se puede medir experimentalmente a través de la observación de las franjas de interferencia, definido la visibilidad de las mismas, magnitud introducida por Michelson (equivalente, [illegible], a la R.O.E. en comunicaciones)

$$V = (I_{máx} - I_{mín})/(I_{máx} + I_{mín}) \qquad (3.16)$$

Si se supone que $I_1 = I_2 = I$ , la visibilidad de las franjas en P es

$$V_p = |\gamma_{12}| \qquad (3.17)$$

y de esta forma se puede medir el grado de coherencia entre las dos fuentes puntuales. La fase de $\gamma_{12}$ es una medida del corrimiento de fase del máximo de la franja central, comparada con la que se obtiene con dos ranuras iluminadas con radiación perfectamente coherente.

El efecto cuantitativo de la coherencia temporal, es decir $|\gamma_{11}(\tau)|$ , se puede medir usando un interferómetro de Michelson con un compensador de camino óptico en uno de sus haces y moviendo uno de los espejos hasta que las franjas desaparecen[78].

A continuación se verán cuales son los requerimientos de coherencia para obtener un buen holograma. Como se dijo anteriormente, la onda de referencia que llega a la placa debe ser coherente con la luz difundida por todos los puntos del objeto. Esta condición primero impone que la luz difundida por el objeto sea de la misma frecuencia que la de la fuente. Además las dimensiones del objeto deben ser menores que la longitud de coherencia de la fuente utilizada. Finalmente la diferencia de camino óptico entre los haces objeto y referencia también debe ser menor que la longitud de coherencia de la fuente. Estas condiciones son satisfechas por un laser, el cual usualmente tiene una longitud de coherencia mayor al metro para los de tipo gaseoso de mediana potencia.

El procedimiento de registro de un holograma no difere mucho de las técnicas interferométricas. Para registrar franjas netas y contrastadas, es esencial que el montaje óptico sea estable de modo que las diferencias de camino no varíen más que un décimo de la longitud de onda durante el tiempo de exposición.

A medida que la potencia de la fuente aumenta, es más corto el tiempo de exposición y son menores las exigencias de estabilidad, pero también se hace más pequeña la longitud de coherencia de la fuente utilizada.

### 3.1.4- Respuesta y resolución de la emulsión

Un problema práctico importante está ligado al hecho que en una emulsión real la función de transmision T sólo es una función lineal de la iluminación E en una región limitada de la curva T-E. Para obtener respuesta lineal, usualmente se adiciona un nivel de luz mediante el incremento de la intensidad de la onda de referencia. Se encontró[39] que se obtienen buenas reconstrucciones para valores de la razón entre la intensidad del haz de referencia con respecto al haz objeto comprendidos entre 2 y 10. En el caso de que el objeto sea difusor esto se simplifica debido a que éste dispersa la luz en un ángulo sólido grande, de modo que la radiación que proviene de cada punto del objeto ilumina totalmente la placa fotográfica y se eliminan así las regiones de iluminación muy fuerte o muy débil. En el caso qué el objeto difracte luz por trasmisión se utiliza un vidrio despulido entre aquél y la placa fotográfica, para lograr el mismo efecto.

Kozma[40] estudió los efectos de no linealidad de la emulsión sobre los frentes de onda reconstruídos por holografía. Estos efectos limitan seriamente la calidad de la imágen mediante la aparición de un halo superpuesto a la misma e introducen imágenes de orden superior.

Debido a que un holograma es básicamente un interferograma, su registrabilidad estará determinada por dos condiciones, además de la monocromaticidad de la fuente, a saber el ángulo $\theta$ entre la onda de referencia y el campo de ondas difractadas, y la dimensión y estructura de la abertura usada para generar el fondo coherente de referencia esférico o plano[41]. Para que las imágenes estén bien separadas, se debe usar una onda de referencia bastante inclinada. En el caso simple de que las ondas objeto y referencia sean planas, la distancia i entre dos franjas brillantes es[42]

$$i=\lambda/\text{sen }\theta \qquad (3.18)$$

donde $\theta$ es el ángulo entre las dos ondas. Para $\theta = 20°$ se tiene $i \simeq 2\ \mu m$, es decir la emulsión debe ser capaz de registrar 500 franjas por milímetro. Por lo tanto se deben utilizar emulsiones de resolución estremadamente elevadas. Las placas usadas en este trabajo, 8 E 75 de Agfa-Gevaert, tiene un poder de resolución del orden de 3.000 líneas por milímetro. Lamentablemente estas emulsiones de alta resolución son muy poco sensibles (0,015 ASA para el tipo mencionado), de modo que en general se requieren tiempos de exposición largos que entrañan severas condiciones de estabilidad.

Como comentario final se debe agregar que en fotografía convencional, dos puntos imágenes se pueden resolver si están separados por una distancia mayor que el tamaño del grano de la emulsión. En un holograma, por el contrario, la información sobre un punto imagen se dispersa sobre toda la placa y esto trae como consecuencia que la resolución en sistemas holográficos sea un problema muy complicado[43]. Si bien la resolución de la imagen no está determinada directamente por la resolución de la placa, ésta limita la frecuencia espacial registrable y en consecuencia, la visión del objeto.

3.1.5- Efecto del espesor de la emulsión

En lo que precede, se supuso que la emulsión fotográfica tenía un espesor despreciable y que el registro de un holograma era un fenómeno de superficie. En realidad la emulsión tiene un espesor finito y por lo tanto se debe tener necesariamente en cuenta el aspecto en volumen del proceso de registro. Como ejemplo, la emulsión de la placa 8 E 75 de Agfa-Gevaert tiene un espesor aproximado de 15 $\mu$m, que si bien a primera vista parece despreciable, es mucho mayor que la longitud de onda de un laser de He-Ne, $\lambda = 0.6328$ $\mu$m.

Siguiendo a Collier[44] analicemos el caso de ondas objeto y de referencia planas, simétricas respecto a la perpendicular a la placa y que forman un ángulo $\theta$ entre sí. Para este caso, los máximos de las dos ondas determinan, en el transcurso del tiempo, planos equiespaciados donde las mismas están en fase y la amplitud es máxima. Después del revelado de la placa, estos planos se comportan como espejos semireflectantes.

Para conocer cual es el ángulo $\alpha$ de reconstrucción que se debe utilizar para obtener una onda objeto de intensidad máxima, se usa una onda plana, Fig. 3.3.

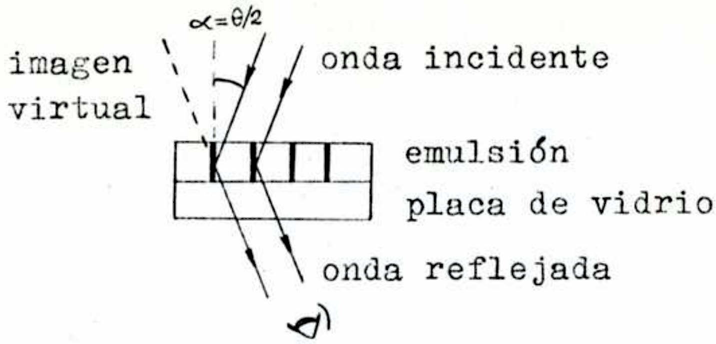



Fig. 3.3

Para poder ver una imagen reconstruída de la onda objeto, las diferentes ondas reflejadas deben estar en fase. Esta condición no es otra que la conocida relación de Bragg de cristalografía y trae como consecuencia que

$$\alpha = \theta/2 \quad , \quad \alpha = -(\pi - \theta/2) \tag{3.19}$$

Este resultado importante indica que para obtener una recontrucción de la onda objeto original, el holograma se debe iluminar con una onda idéntica a la de referencia utilizada en el registro, $\alpha = \theta/2$. Esta onda produce una imagen virtual del objeto. Si el holograma se ilumina con una onda que se propaga en sentido opuesto a la onda de referencia, $\alpha = -(\pi - \theta/2)$, esta onda conjugada produce una imagen real del objeto, Fig.3.4.

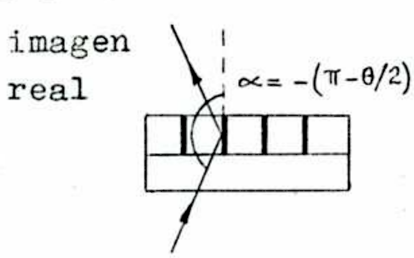



Fig. 3.4

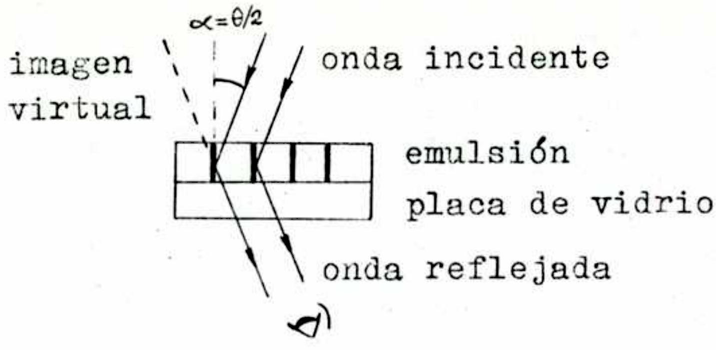



Fig. 3.3

Para poder ver una imagen reconstruída de la onda objeto, las diferentes ondas reflejadas deben estar en fase. Esta condición no es otra que la conocida relación de Bragg de cristalografía y trae como consecuencia que

$$\alpha = \theta/2 \quad , \quad \alpha = -(\pi - \theta/2) \qquad (3.19)$$

Este resultado importante indica que para obtener una recontrucción de la onda objeto original, el holograma se debe iluminar con una onda idéntica a la de referencia utilizada en el registro, $\alpha = \theta/2$. Esta onda produce una imagen virtual del objeto. Si el holograma se ilumina con una onda que se propaga en sentido opuesto a la onda de referencia, $\alpha = -(\pi - \theta/2)$, esta onda conjugada produce una imagen real del objeto, Fig.3.4.

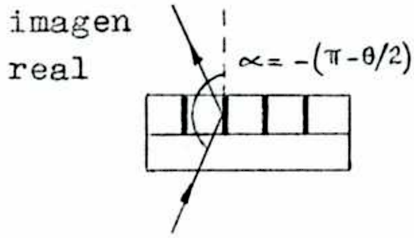



Fig. 3.4

Estos resultados suponen que el espesor de la emulsión es mucho más grande que la distancia que separa los planos semi-reflectantes. Si sucede lo contrario, el efecto Bragg es despreciable y el holograma se comporta como un medio bidimensional..

## 3.2- Aplicacion de la holografía a la interferometría

### 3.2.1- Introducción

En todos los interferómetros clásicos se hacen interferir dos ondas que provienen de la misma fuente, es decir emitidas en un mismo instante. Las fuentes ordinarias, exceptuando el laser, emiten trenes de onda de corta duración y no se puede observar.interferencia con fuentes diferentes. La holografía permite resolver este problema de una forma elegante, debido a que la onda objeto se reconstruye en amplitud y fase.

La interferometría holográfica fue sugerida por Gabor y colaboradores[45] y fue desarrollada a partir de 1965 por varios investigadores[46-49]. Dentro de este campo existen numerosas técnicas, pero solo se discutirá la de doble exposición, que es la que se utiliza en este trabajo.

La interferometría holográfica de doble exposición consiste en hacer interferir dos ondas registradas secuencialmente en forma holográfica sobre una misma placa fotográfica. Al reconstruir el holograma estas ondas pueden interferir por ser ambas coherentes. Una de las ondas contiene información del objeto en un dado instante inicial o de referencia y la otra contiene información de un estado perturbado. En la reconstrucción se obtienen dos imágenes virtuales y dos reales. Como la pertubación del objeto es pequeña, en realidad se ve una sola imagen superpuesta a una red de franjas que está directamente relacionada con la variación que sufrió el objeto entre ambos estados.

### 3.2.2- Interpretación de las franjas de interferencia

En lo que sigue se restringe el análisis al caso de que la pertubación del objeto sea un pequeño desplazamiento debido a una deformación del mismo.

La interpretación de las franjas en interferometría holográfica es un tema de primera importancia para la explotación correcta de esta técnica. Los primeros que se abocaron a la interpretacion y análisis de las franjas fueron Haines e Hildebrand [50] y Aleksandrow y Bronch-Bruevich[51]. Haines e Hildebrand dividieron a la superficie del objeto en superficies planas infinitesimales y determinaron las coordenadas de los desplazamientos de los centros de estas superficies y los tres ángulos de Euler que describen la rotación de la normal, usando la aproximación de la teoría de difracción. Para el caso de franjas que se localizan en el infinito, más de 1000 $\lambda$ desde la superficie, obtuvieron expresiones para los desplazamientos. Aleksandrov y Bronch-Bruevich consideraron a la superficie como un conglomerado de puntos y obtuvieron una descripción punto a punto del movimiento observando las franjas y la imagen simultáneamente a través de una abertura pequeña. Ambas técnicas son bastante complicadas para usarlas en casos prácticos.

Vienot[52,53] contribuyó a la determinación de la región de localización de las franjas mediante la introducción del concepto de rayos homólogos. Sea $P_1$ un punto del objeto y $P_1'$ la posición del mismo punto pero sobre el frente de onda difundido. Si $P_2$ es la posición del mismo punto pero para el objeto desplazado, $P_1P_1'$ y $P_2P_2'$ son un par de rayos homólogos, Fig.3.5

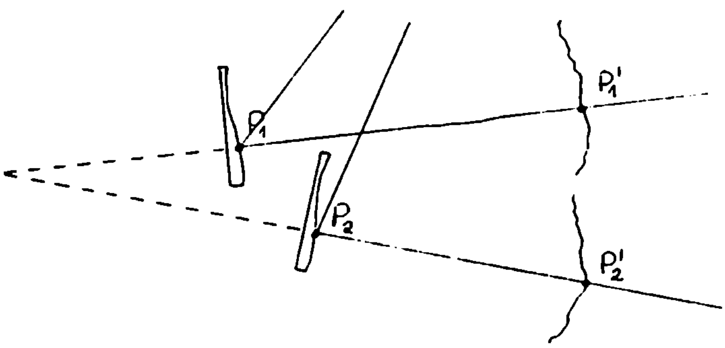



Fig. 3.5

Vienot halló que la zona de mayor visibilidad del sistema de franjas se sitúa en la vecindad de la perpendicular común a los pares de rayos homólogos. Teniendo en cuenta que cada una de las ondas difractas posee una estructura granular, de motas [redacted], debido a la estructura rugosa del objeto, dedujo que las franjas tienen buena visibilidad sólo si la distancia mínima entre los rayos homólogos es menor que la dimensión media de los granos en dicha zona. A partir de este análisis obtuvo las propiedades de los sistemas de franjas correspondientes a algunos movimientos simples del objeto. Por ejemplo sea el caso de un objeto que ha sufrido una rotación alrededor de un eje contenido en su plano y perpendicular al plano determinado por la fuente luminosa y los centros del objeto y la placa fotográfica. Las franjas resultantes son rectilíneas, paralelas entre sí y al eje de rotación, se hallan localizadas sobre el objeto y poseen una excelente visibilidad. Además la interfranja es inversamente proporcional al ángulo de rotación del objeto.

Otros investigadores[54-56] contribuyeron con analísis más completos y últimamente Abramson[57-59] desarrolló una técnica gráfica para el análisis de las franjas.

A continuación, siguiendo a Sollid[60], se derivará la relación básica que permite determinar pequeños desplazamientos en un cuerpo difusor usando interferometría holográfica de doble exposición. Supongamos el caso general que se muestra en Fig. 3.6.

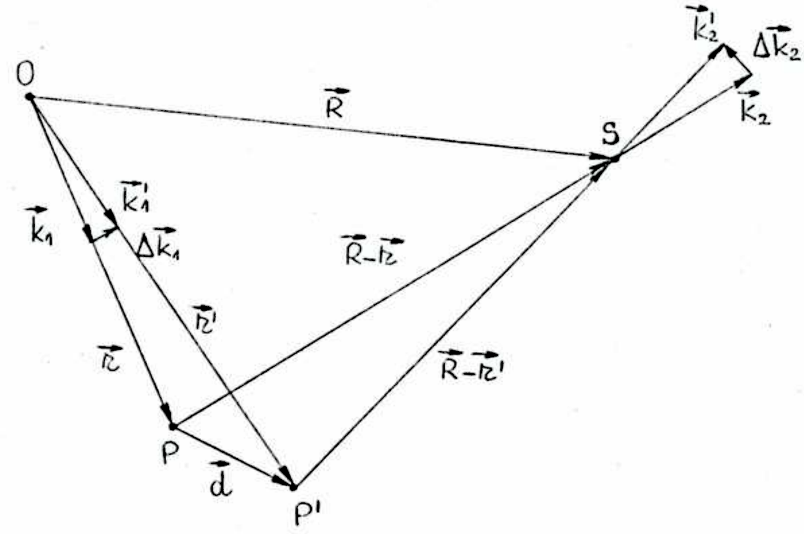



Fig. 3.6

La fuente luminosa está en O, elegido arbitrariamente como origen, y sea $\vec{k}_1$ el vector de propagación $(k = 2\pi/\lambda)$ dirigido a un punto P de la superficie del objeto que está localizado por $\vec{r}$. La luz se difunde con una dirección dada por $\vec{k}_2$ y es observada en S, que está localizado por el vector posición $\vec{R}$. Cuando se reconstruye la imagen virtual una vez registrado el holograma, se recrea el vector de propagación $\vec{k}_2$. Supongamos ahora que el holograma ha sido semiexpuesto bajo las condiciones descriptas, que el punto P se mueve a una nueva posición P' y que se completa la exposición. Los nuevos caminos ópticos están determinados por los vectores de propagación $\vec{k}_1'$ y $\vec{k}_2'$. Cuando el holograma se reconstruye, la luz difundida según $\vec{k}_2$ interfiere con la dada por $\vec{k}_2'$.

Las fases $\delta_1$ y $\delta_2$ a lo largo de los caminos $\vec{k}_1$ $\vec{k}_2$ y $\vec{k}_1'$ $\vec{k}_2'$, respectivamente, son

$$\begin{aligned} \delta_1 &= \vec{k}_1 . \vec{r} + \vec{k}_2 . (\vec{R} - \vec{r}) + \delta_o \\ \delta_2 &= \vec{k}_1' . \vec{r}' + \vec{k}_2' . (\vec{R} - \vec{r}') + \delta_o \end{aligned} \qquad (3.20)$$

donde $\delta_o$ es un cambio de fase constante debido a la interacción de la luz con la superficie.

Los vectores de propagación $\vec{k}_1'$ y $\vec{k}_2'$ se expresan como

$$\begin{aligned} \vec{k}_1' &= \vec{k}_1 + \Delta\vec{k}_1 \\ \vec{k}_2' &= \vec{k}_2 + \Delta\vec{k}_2 \end{aligned} \qquad (3.21)$$

Reemplazando la Ec.3.21 en Ec.3.20, se puede calcular la diferencia de fase $\delta = \delta_1 - \delta_2$

$$\delta = (\vec{k}_1 - \vec{k}_2) . (\vec{r} - \vec{r}') - \Delta\vec{k}_1 . \vec{r}' - \Delta\vec{k}_2 . (\vec{R} - \vec{r}') \qquad (3.22)$$

En la práctica la distancia

$$|\vec{r}| \simeq |\vec{r}\,'| \gg |\vec{d}| = |\vec{r}\,' - \vec{r}| \qquad (3.23)$$

Entonces $\Delta\vec{k}_1$ y $\Delta\vec{k}_2$ son perpendiculares a $\vec{r}\,'$ y $(\vec{R}-\vec{r}\,')$, por lo tanto son nulos los dos últimos términos de Ec.3.22 y finalmente se obtiene

$$\delta = (\vec{k}_2 - \vec{k}_1) . \vec{d} \qquad (3.24)$$

Cuando $\delta = 2\pi\ (n + 1/2)$ y se observa el punto P de la imagen virtual según la dirección $\vec{k}_2$ se obtiene una franja oscura de orden n.

En el caso de que el vector desplazamiento tenga una cierta dirección conocida, usando esta relación se pueden medir los desplazamientos en cualquier punto de la superficie del objeto. Esta técnica es particularmente útil para la determinación de los desplazamientos normales $d_n$ a la superficie del objeto. Se usa el montaje de Fig. 3.7, es decir se ilumina con un haz perpendicular a la superficie y se coloca la placa fotográfica paralelamente a aquélla.

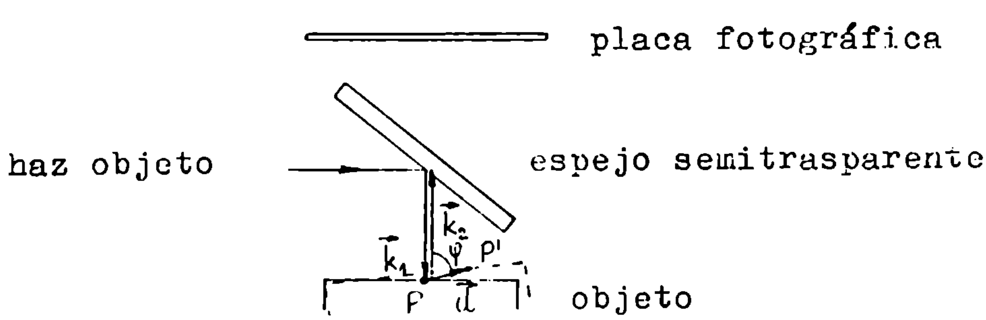



Fig. 3.7

Para este montaje

$$(\vec{k}_2-\vec{k}_1).\vec{d}=2kd\cos\varphi \qquad (3.25)$$

donde

$$|\vec{k}_1|=|\vec{k}_2|=k \qquad (3.26)$$

y

$$d_n=d\cos\varphi \qquad (3.27)$$

es la componente normal del vector desplazamiento.

El valor del desplazamiento normal $d_n$ en cada punto del objeto, se puede calcular usando el sistema de franjas que se observa superpuesto a la imagen virtual, a través de la relación

$$d_n=(n+1/2)\lambda/2 \qquad (3.28)$$

En este caso cada franja es el lugar geométrico de los puntos de igual desplazamiento normal, es decir de esta forma se obtienen curvas de nivel de la superficie deformada. La diferencia de desplazamiento normal entre puntos correspondientes a dos franjas oscuras consecutivas, es el mínimo desplazamiento medible y da la sensibilidad del método. Para un laser de He-Ne resulta igual a 0.315 $\mu$m. De aquí se concluye que este método es en promedio diez veces más sensible que la fotografía de motas [redacted].

En el caso general [redacted] no se conoce la evolución del objeto, sin embargo se pueden determinar las tres componentes de los desplazamientos a partir de un conjunto de medidas efectuadas sobre el sistema de franjas. Varios métodos han sido desarrollados por diversos autores. Algunos de ellos[61,62] utilizan un solo holograma sobre el que se registra el movimiento de las franjas cuando se observa la imagen desde distintas posiciones. De esta forma se obtienen varias ecuaciones que se resuelven generalmente aplicando el método de los cuadrados mínimos, para calcular así las tres componentes de los desplazamientos. Otros[63,64] se basan en el registro de tres hologramas simultáneos desde tres posiciones diferentes. También de esta forma se obtiene un sistema de ecuaciones, en el cual las incógnitas son las componentes de los desplazamientos.

Todos estos métodos tienen el inconveniente de que requieren cálculos considerables para casos de interés práctico. Se verá en el próximo capítulo como se simplifica la interpretación de los resultados, si se utilizan fotografía de motas [redacted] e interferometría holográfica en forma combinada.

# 4- TECNICAS EXPERIMENTALES

## 4.1- Síntesis del método

En el capítulo 2 se vió que la fotografía de [redacted] motas es una técnica simple que permite la determinación de desplazamientos en el plano de la superficie de un objeto difusor. En el capítulo siguiente se vió que mediante la interferometría holográfica se puede determinar el campo tridimensional de los desplazamientos, pero realizando cálculos considerables. Sin embargo el uso de esta técnica se simplifica cuando se utiliza para medir solamente los desplazamientos normales. En este caso las franjas están relacionadas con dichos desplazamientos a través de una única ecuación.

Nuestra experiencia en estas dos técnicas de óptica coherente, nos indujo a usarlas en forma combinada de modo de medir los desplazamientos coplanares con fotografía de [redacted] motas y los desplazamientos normales con interferometría holográfica. El único antecedente publicado es una comunicación de Adams y Maddux[65] en la que proponen este método dual.

Ya se vió en los capítulos anteriores que la interferometría holográfica tiene una sensibilidad aproximadamente diez veces mayor que la fotografía de [redacted] motas. Este hecho trae como consecuencia la imposibilidad de registrar holograma y specklegrama simultáneamente. La alternativa es registrar primero el holograma para una deformación que dé franjas posibles de resolver y luego el specklegrama para una deformación mayor. Esto requiere primeramente verificar que el material que compone el objeto es lineal en el rango de cargas usado.

Si bien el montaje de Fig. 3.7 permite obtener los desplazamientos normales, el mismo no se pudo utilizar debido a las siguientes causas. La dimensión del espejo semitransparente y la necesidad de tener espacio suficiente para expandir el haz de referencia, hacen que no sea posible colocar el modelo cerca de la placa fotográfica. Además se pierde un 50% de la intensidad del haz objeto por la presencia del mencionado espejo. Estas causas combinadas con la baja potencia del laser disponible, hacían que los tiempos de cada una de las dos exposiciones fuesen muy prolongados. Teniendo en cuenta los inconvenientes de estabilidad que aparecen cuando se usan tiempos de exposición tan largos, se usó un montaje con incidencia cuasi-normal, Fig. 4.1.

En dicha figura $\vec{k}_1$ y $\vec{k}_2$ son los vectores de onda incidente y difundido respectivamente y P un punto cualquiera de la superficie del objeto. Este montaje está caracterizado porque $\vec{k}_1$ y $\vec{k}_2$ definen un plano que es perpendicular a la superficie del modelo, $\vec{k}_2$ tiene dirección de la normal a la misma y $\vec{k}_1$ forma un ángulo $\theta$ con $\vec{k}_2$. Expresando el vector desplazamiento en función de sus tres componentes u, v, w

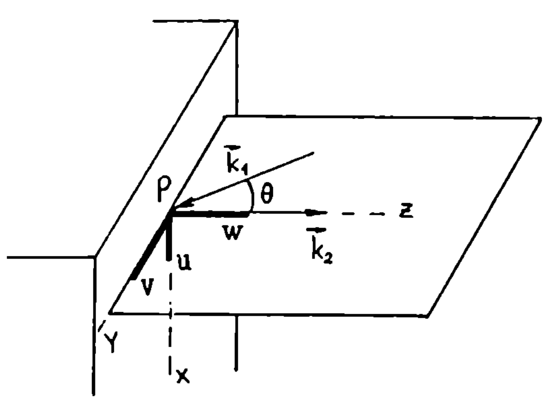



Fig. 4.1

$$\vec{d}=u\hat{i}+v\hat{j}+w\hat{k} \qquad (4.1)$$

si se reemplaza esta expresión en Ec. 3.24 se obtiene

$$\delta=kw(1+\cos\theta)+kv\,\text{sen}\theta \qquad (4.2)$$

Para este caso se pueden calcular los desplazamientos normales w a través de

$$w=\left[\lambda(n+1/2)-v\,\mathrm{sen}\theta\right]/(1+\cos\theta) \qquad (4.3)$$

si se conocen los desplazamientos transversales v y donde n es el orden de las franjas de interferencia.

Por último falta aclarar que si bien con la fotografía de motas se obtiene información sobre la magnitud del desplazamiento, las franjas en interferometría holográfica dan solo diferencia de desplazamientos entre dos puntos. Para ubicar la franja de orden cero, se coloca una cinta de un material flexible con un extremo pegada al objeto, en una zona donde se supone que los desplazamientos van a ser pequeños. El otro extremo se pega a una parte del soporte del objeto, que pueda asegurarse que permanece rígido. Una vez restituido el holograma, sobre la cinta aparecerán franjas que sirven para determinar el desplazamiento del objeto en la zona donde está pegado a la cinta. El sentido de crecimiento de los desplazamientos se realiza comparando hologramas correspondientes a distintas cargas.

## 4.2- Modelo

El modelo utilizado era un prisma de resina epoxica de sección cuadrada de 3,33 cm de lado y 5 cm de largo. Tenía un conducto longitudinal centrado de 0.325 cm de diámetro por donde pasaba el alambre de pretensado, Fig. 4.2. La relación entre la dimensión de la zona cargada y aquélla de la sección transversal, $a'/a$, se adoptó igual a 0.5.

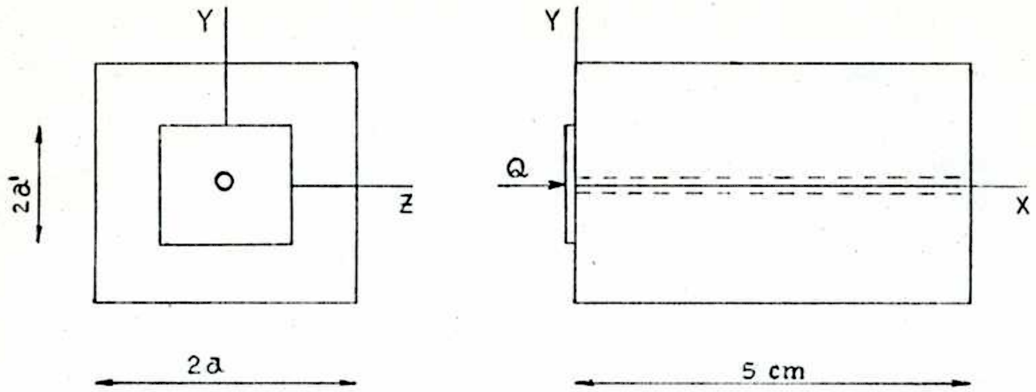



Fig. 4.2

La resina epoxi ca utilizada era Araldite B con endurecedor HT 901, de Ciba-Geigy y fue curada en un molde metálico a 140°C durante 12 horas para lograr su desgasado y evitar la inclusión de burbujas. Una vez obtenida la pieza, ésta fue maquinada, para llevarla a sus dimensiones definitivas.

Como se evitó que se pegue al molde?

Que acabado se dió a las caras?

A continuación, sobre la misma pieza, se midieron los módulos elásticos de Young E y de Poisson $\nu$ del material. Para ello se ensayó la pieza a compresión pura usando dos rótulas centradas como se indica en Fig. 4.3 para eliminar la flexión. Se midieron las deformaciones longitudinal $\varepsilon_1$ y transversal $\varepsilon_2$ para distintos valores de la carga Q usando extensímetros eléctricos SR-4 tipo FAE-25-12S6, de las siguientes características

factor de taraje: $2.04 \pm 1\%$ , resistencia: $(120 \pm 0.2)\,\Omega$

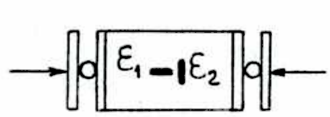



Fig. 4.3

Estos extensímetros se pegaron al modelo con un adhesivo de cianacrilato, Loctite 12, de baja relajación.

Las deformaciones longitudinales y transversales, para distintas cargas, se midieron simultáneamente, usando una unidad de balance BLH modelo 225 y un puente Automatic Industries model P-350. Con el objeto de evitar errores por diferencia de temperatura, se trabajó con un extensímetro compensador que se aplicó a un trozo del mismo material que el del modelo, pero que no estaba sometido a deformaciones. De esta forma se compensan los efectos térmicos en el puente.

Se obtuvieron los siguientes valores

$$E = (30.000 \pm 900)\ Kg/cm^2$$

$$\nu = 0.40 \pm 0.1$$

Además con los valores obtenidos se verificó que el material tuviese dentro de los errores de medición un comportamiento lineal en el intervalo de cargas a ser usado.

Finalmente se cubrió una de las caras laterales del modelo con pintura blanco mate, con lo que se obtuvo una superficie de excelentes características de difusión de la luz y se le perforó el conducto central longitudinal.

### 4.3- Montajes

Debido a la gran sensibilidad de la interferometría holográfica, el modelo debe estar montado de forma tal que se eliminen todos los desplazamientos rígidos, es decir no debidos a deformaciones del mismo. En general estos desplazamientos rígidos no son reproducibles una vez vuelto a cargar el modelo y ésta es otra causa de porque deben ser eliminados. Esta tarea no es sencilla y en particular para nuestro caso, se arribó al sistema que ahora se describirá luego de reiterados ensayos sobre otros dispositivos, los que debidos a esos problemas dificultaban la obtención de resultados correctos.

El prisma se montó sobre una base especialmente diseñada construída con perfiles de acero, de manera de lograr alta rigidez y total inmovilidad, Fig. 4.4. Las cargas fueron aplicadas al prisma a través de un alambre de alta resistencia que era tensado paulatinamente por medio de un tornillo micrométrico apoyado sobre cojinetes lubricados.

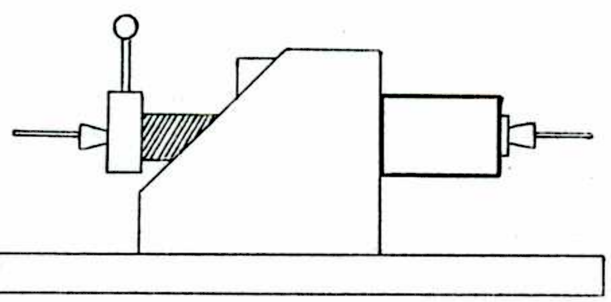


Fig. 4.4

En la Fig. 4.5 se muestra una foto del montaje del modelo. El procedimiento que se utilizó en los hologramas y specklegramas fué el siguiente. Primero se tensó el prisma con una carga de 500 Kg aproximadamente y se realizó la primera exposición. Luego se operó sobre el tornillo de carga para reducir el esfuerzo y con esa carga menor se realizó la segunda exposi-

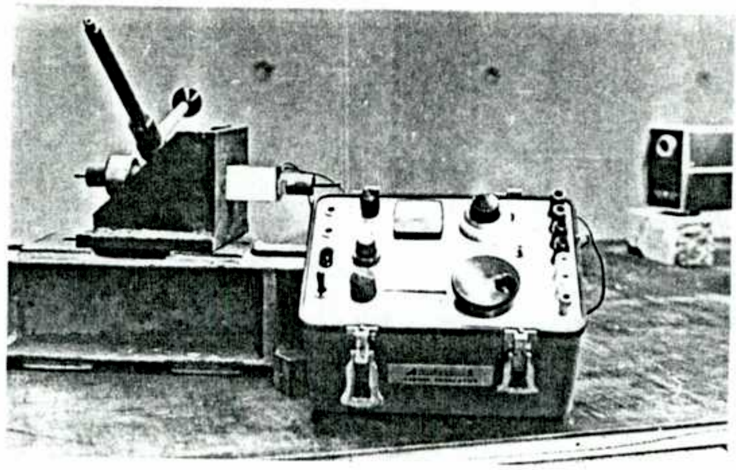


Fig. 4.5

ción. Para cada uno de los estados, se leyó la deformación que indicaba uno de los extensímetros eléctricos. Las cargas se determinaron ensayando el modelo en una máquina con la misma configuración y para los valores de deformación anteriormente obtendios. Este montaje y el procedimiento empleado suministraron una elevada estabilidad y alta rigidez y se eliminaron de esta forma movimientos rígidos del modelo que enmascaraban los efectos de la carga sobre el mismo. Se utilizó un laser Spectra Physics model 134 de He-Ne $TEM_{oo}$ con longitud de onda de 6328 A y con una potencia de salida de 3 mW. Para registrar los hologramas se emplearon placas holográficas Agfa-Gevaert 8E75 y p ara los specklegramas, película Copex Pan de Agfa-Gevaert de 500 líneas por mm de resolución.

Las experiencias se realizaron sobre una mesa[66] de 2m x 1m de superficie, diseñada y contruída especialmente para aislar vibraciones.

Las figs 4.6 y Fig. 4.7 muestran los montajes utilizados para medir los desplazamientos coplanares u, v mediante fotografía de motas [redacted]. Se usó una cámara con f=17.8 cm y F=4.5 con magnificación unitaria, m=1, de forma que el diámetro medio de los granos de speckle resultó igual a 6.9 $\mu$m. El tiempo de exposición para cada uno de los registros fué de 15 segundos. El error en la determinación de los desplazamientos coplanares es del orden del 12% y proviene de los errores en las mediciones de la interfranja y del ángulo que forma el sistema de franjas con el eje horizontal.

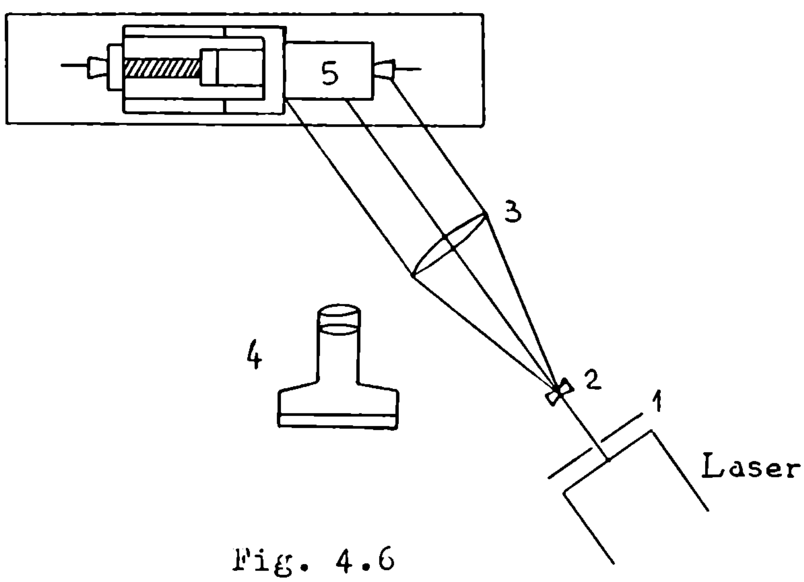



Fig. 4.6

(1) obturador, (2) lente expansora,

(3) lente colimadora, (4) cámara fotográfica, (5) modelo

Las figs 4.8 y [redacted]. 4.9 muestran el montaje usado para medir los desplazamientos normales w mediante interferometría holográfica. El tiempo de exposición para cada uno de los registros fué de 10 segundos. El ángulo θ entre el haz de referencia y la normal a la placa holográfica era igual a 26°. El

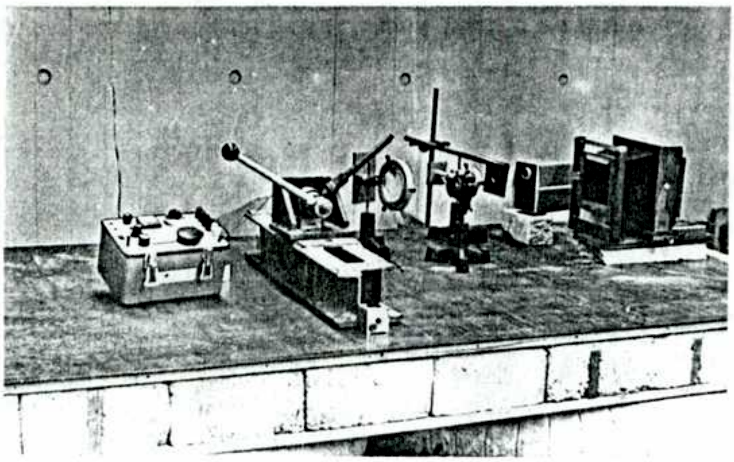


Fig. 4.7

error en la determinación de los desplazamientos normales se puede estimar en un 7% aproximadamente.

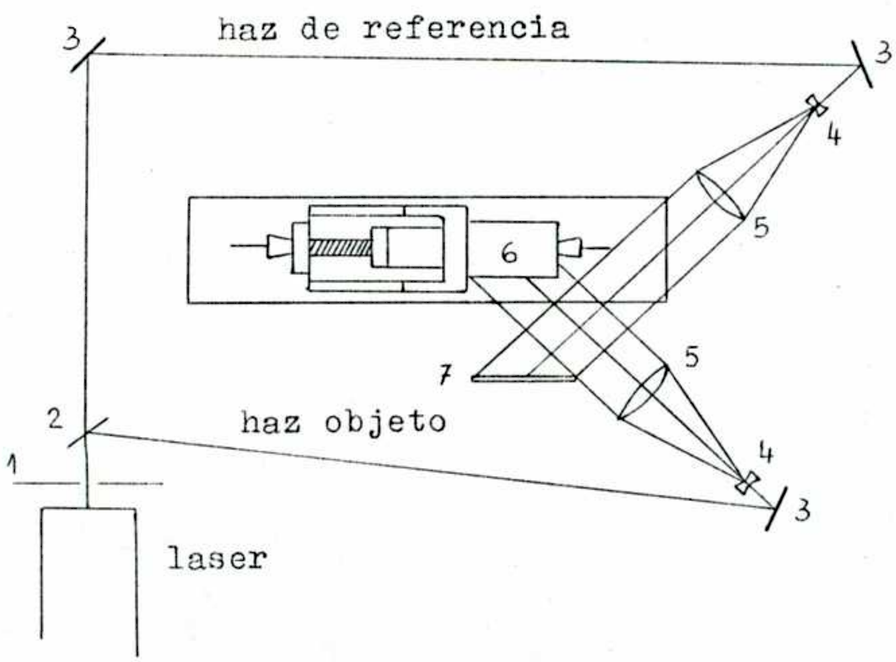



Fig. 4.8

(1) obturador, (2) espejo semitransparente, (3) espejo, (4) lente expansora, (5) lente colimadora, (6)modelo,(7)placa holográfica

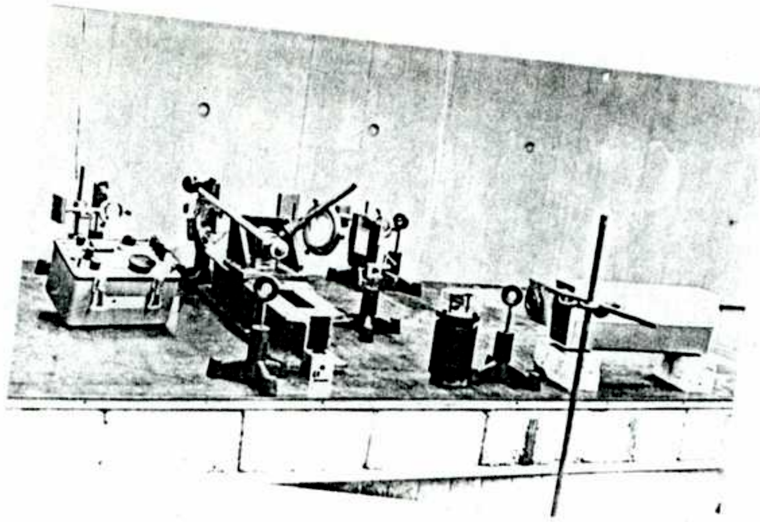


Fig. 4.9

# 5- METODO DE ELEMENTOS FINITOS

## 5.1- Introducción

El método de elementos finitos está basado en el concepto de reemplazar una estructura continua por un modelo matemático construído por elementos de dimensiones finitas, de propiedades conocidas. Estos elementos están unidos entre sí o con el contorno de la estructura en puntos determinados que se llaman nodos. Cuando el tamaño de los elementos tiende a cero, el modelo matemático converge hacia la estructura continua. Todo esto requiere una gran cantidad de operaciones algebraicas, que expresadas en forma matricial, pueden ser automatizadas en una computadora digital.

Existen dos modelos dentro del análisis matricial: de los desplazamientos y de equilibrio[67]. En el primero se toman como incógnitas los desplazamientos y en el segundo, las fuerzas. La aplicación de uno u otro modelo estuvo ligada a la evolución de las computadoras, pues el aumento de la memoria de éstas hizo que el gran número de desplazamientos no fuera un impedimiento para tomarlos como incógnitas. Esto junto con otras ventajas hacen que actualmente el modelo de los desplazamientos sea el más difundido y en particular, es el que se utiliza en este trabajo.

En cada uno de los elementos en que se dividió la estructura se hace una aproximación sobre el campo de los desplazamientos. Esta consiste en reducir el número infinito de desplazamientos a un número finito, que son descriptos por funciones elementales. De esta forma el campo de deformación queda expresado en función de ciertas coordenadas generalizadas. Además, el campo de tensiones se reemplaza por un conjunto de fuerzas generalizadas que no tienen significado físico en la estructura real. La energía de deformación de la estructura y la energía potencial de las cargas aplicadas pueden ser expresadas, elemento por elemento, en función de los desplazamientos. Aplicando alguno de los principios variacionales de la elasticidad[68] se puede calcular la matriz de rigidez del elemento. Esta relaciona los desplazamientos con las cargas generalizadas a través de las propiedades elásticas y geométricas de cada elemento.

Producido el ensamble de los elementos, el problema matemático consiste en buscar el mínimo de un funcional, dependiente de los desplazamientos y sujeto a las condiciones de contorno. La operación de lograr el mínimo conduce a un sistema de ecuaciones algebráicas lineales, del que una vez resuelto se obtienen los desplazamientos. Toda esta serie de operaciones se sistematiza por medio de una computadora digital, que es imprescindible debido al gran volumen de cálculo.

Si bien se limitará la aplicación de este método al cálculo de estructuras elásticas, el mismo es de aplicación general, pues se usa en distintos dominios además del citado. Se utiliza en conducción del calor, escurrimiento de fluidos irrotacionales, distribución de potencial eléctrico y magnético y en general en cualquier problema que esté regido por una ecuación de Laplace o Poisson en el dominio lineal.

## 5.2- Teoría básica del modelo de desplazamientos

Consideremos un elemento aislado del conjunto en que se divide la estructura. Se define sobre el mismo, un campo paramétrico de desplazamientos u, v, w, que son respectivamente los desplazamientos en dirección de los ejes estructurales x, y, z, terna ortogonal a la que se ha referido la estructura.

$$
\begin{aligned}
u &= \sum_{1}^{N} P_i(\xi,\eta,\zeta)\ u_i \\
v &= \sum_{1}^{N} P_i(\xi,\eta,\zeta)\ v_i \\
w &= \sum_{1}^{N} P_i(\xi,\eta,\zeta)\ w_i
\end{aligned}
\qquad (5.1)
$$

donde $P_i\ (\xi,\eta,\zeta)$ con i = 1 a N son las funciones de interpolación en el sistema de ejes locales $(\xi,\eta,\zeta)$, N es el número total de nodos del elemento y $u_i$, $v_i$, $w_i$ son los desplazamientos nodales en el nodo i en direcciones x, y, z respectivamente. El sistema de ejes locales es un sistema ortogonal asociado a cada elemento en particular. El campo de deformaciones se puede escribir en forma matricial como

$$\{\varepsilon\} = \{\varepsilon_x\ \varepsilon_y\ \varepsilon_z\ \gamma_{xy}\ \gamma_{yz}\ \gamma_{zx}\} \qquad (5.2)$$

donde

$$
\begin{aligned}
&\varepsilon_x = \partial u/\partial x\ ;\ \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}\quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}\ ? \\
&\gamma_{xy} = \partial u/\partial y + \partial v/\partial x\ ;\ \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\ ;\ \gamma_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\ ?
\end{aligned}
\qquad (5.3)
$$

y análogamente para las otras componentes. Las llaves significan que la matriz debe tomarse como una matriz columna, a pesar de estar escrita como una fila. Se mantendrá siempre esta convención, para facilitar la escritura.

Sustituyendo la Ec.5.1 en la Ec.5.3, se obtiene

$$\{\varepsilon\} = [T]\{\alpha\} \tag{5.4}$$

donde $\{\alpha\}$ es la matriz de desplazamientos nodales

$$\{\alpha\} = \{u_1 v_1 w_1 u_2 v_2 w_2 \ldots\ldots\ u_N v_N w_N\} \tag{5.5}$$

$$[T] = [T_1(\xi,\eta,\zeta)\ T_2(\xi,\eta,\zeta)\ \ldots\ T_N(\xi,\eta,\zeta)] \tag{5.6}$$

$$[T_i(\xi,\eta,\zeta)] = \begin{bmatrix} \partial P_i/\partial x & 0 & 0 \\ 0 & \partial P_i/\partial y & 0 \\ 0 & 0 & \partial P_i/\partial z \\ \partial P_i/\partial y & \partial P_i/\partial x & 0 \\ 0 & \partial P_i/\partial z & \partial P_i/\partial y \\ \partial P_i/\partial z & 0 & \partial P_i/\partial x \end{bmatrix} \tag{5.7}$$

Las funciones de interpolación $P_i$ están definidas en términos de las coordenadas locales $\xi,\eta,\zeta$ y por lo tanto se deben calcular las derivadas de $P_i$ respecto a las coordenadas x, y,z.

$$\begin{Bmatrix} \partial P_i/\partial x \\ \partial P_i/\partial y \\ \partial P_i/\partial z \end{Bmatrix} = [J]^{-1} \begin{Bmatrix} \partial P_i/\partial \xi \\ \partial P_i/\partial \eta \\ \partial P_i/\partial \zeta \end{Bmatrix} \tag{5.8}$$

donde $[J]^{-1}$ es la inversa de la matriz Jacobiana $[J]$.

$$[J] = \begin{bmatrix} \partial x/\partial \xi & \partial y/\partial \xi & \partial z/\partial \xi \\ \partial x/\partial \eta & \partial y/\partial \eta & \partial z/\partial \eta \\ \partial x/\partial \zeta & \partial y/\partial \zeta & \partial z/\partial \zeta \end{bmatrix} \tag{5.9}$$

Las coordenadas x y z se expresan en términos de las funciones de interpolación y de las coordenadas nodales en ese mismo sistema como

$$x = \sum_{N}^{1} P_i(\xi,\eta,\zeta)\; x_i \tag{5.10}$$

y análogamente para las otras dos coordenadas.

Diferenciando la Ec.5.10 y de acuerdo a la Ec.5.9 se obtiene la matriz Jacobiana $[J]$ necesaria para calcular las derivadas en Ec.5.7.

$$[J] = \begin{bmatrix} \partial P_1/\partial \xi & \partial P_2/\partial \xi & \ldots \partial P_N/\partial \xi \\ \partial P_1/\partial \eta & \partial P_2/\partial \eta & \ldots \partial P_N/\partial \eta \\ \partial P_1/\partial \zeta & \partial P_2/\partial \zeta & \ldots \partial P_N/\partial \zeta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ x_N & y_N & z_N \end{bmatrix} \tag{5.11}$$

El campo de tensiones se puede escribir en forma matricial como

$$\{\sigma\} = \{\sigma_x \;\sigma_y \;\sigma_z \;\tau_{xy} \;\tau_{yz} \;\tau_{zx}\} \tag{5.12}$$

El campo de tensiones $\{\sigma\}$ es función del campo de deformaciones y si se supone comportamiento lineal

$$\{\sigma\}=[H]\{\varepsilon\} \qquad (5.13)$$

donde $[H]$ es la matriz de elasticidad.

Reemplazando Ec.5.4 en Ec.5.13, se obtiene

$$\{\sigma\}=[H]\,[T]\,\{\alpha\} \qquad (5.14)$$

ecuación que expresa el campo de tensiones en función de los desplazamientos nodales.

La energía por unidad de volumen en un punto del elemento es

$$W=\{\sigma\}^t\{\varepsilon\}/2=\{\varepsilon\}^t\{\sigma\}/2 \qquad (5.15)$$

La energía total en el elemento se obtiene por integración de este producto matricial en todo el volumen V del elemento

$$U=\iiint_V W\,dV=1/2\iiint_V \{\varepsilon\}^t\{\sigma\}\,dV \qquad (5.16)$$

Reemplazando las Ec.5.4 y Ec.5.14 en la Ec.5.16 y teniendo en cuenta que el diferencial de volumen es

$$dV=\det[J]\;d\xi\;d\eta\;d\zeta \qquad (5.17)$$

se obtiene

$$U=1/2\{\alpha\}^t[K]\{\alpha\} \qquad (5.18)$$

donde

$$[K]=\iiint_V [T(\xi,\eta,\zeta)]^t [H] [T(\xi,\eta,\zeta)] \det[J]\, d\xi\, d\eta\, d\zeta \qquad (5.19)$$

siendo $[K]$ la <u>matriz de rigidez</u> del elemento.

Supongamos que sobre el elemento actúan fuerzas de volumen, fuerzas de superificie sobre el borde del elemento y fuerzas concentradas según los grados de libertad definidos en los puntos nodales. El trabajo de todas estas fuerzas para el desplazamiento unitario de un nodo en una cierta dirección, siendo nulos todos los demás desplazamientos, será igual al trabajo de una fuerza concentrada y ficticia $F_i$. Esta es la definición de carga equivalente a un sistema dado y para un campo de desplazamientos determinado. Procediendo de la misma manera con todos los nodos, se obtiene una matriz $\{F\}$ de cargas concentradas equivalentes.

$$\{F\}=\{F_1\ F_2\ .\ .\ .\ .\ F_{3N}\} \qquad (5.20)$$

De acuerdo al principio variacional de los desplazamientos, si se da un cambio infinitesimal en los desplazamientos en un sistema que está en equilibrio, el trabajo que producen las cargas externas debe ser igual a la energía de deformación, ya que la energía total debe ser una cantidad estacionaria y sus variaciones nulas. Tomando una variación infinitesimal $\delta\{\alpha\}$ de los desplazamientos

$$1/2(\delta\{\alpha\}^t[K]\{\alpha\}+\{\alpha\}[K]\delta\{\alpha\})-\delta\{\alpha\}\{F\}=0 \qquad (5.21)$$

Cada uno de estos términos son variaciones de energía, o sea son escalares y serán por lo tanto iguales a su traspuesta. Teniendo en cuenta además que la matriz de rigidez es simétrica por su formación, la variación de energía resulta ser igual a

$$\delta\{\alpha\}^t([K]\{\alpha\}-\{F\})=0 \qquad (5.22)$$

Como la variación debe ser nula para cualquier $\delta\{\alpha\}$, se obtiene

$$\{F\}=[K]\{\alpha\} \qquad (5.23)$$

Esta relación vincula las cargas generalizadas con los desplazamientos. Es decir que los términos de la matriz de rigidez del elemento son fuerzas producidas según los grados de libertad del elemento para desplazamientos unitarios de los mismos.

La unión entre los distintos elementos para formar toda la estructura se realiza de la siguiente forma. Si se llama $\{\alpha_i\}$ a los desplazamientos de los nodos del elemento genérico i, $\{\alpha\}$ a los desplazamientos en los nodos de toda la estructura

?

y $[L_i]$ a la matriz de localización del elemento i en la estructura total se tiene

$$\{\alpha_i\} = [L_i]\{\alpha\} \qquad (5.24)$$

Esta matriz de localización contiene en general los cosenos directores que forman los ejes locales y estructurales siendo nulos los demás términos. En el caso particular que ambos ejes son paralelos, es decir que difieren por una traslación, la matriz de rigidez en ambos sistemas es la misma, por lo que la matriz de localización está compuesta por unos y ceros.

Como el trabajo de las fuerzas actuando sobre cada uno de los elementos y sumado para todos los elementos, debe ser igual al trabajo de todas las fuerzas actuando sobre la estructura, se tiene

$$\sum_{1}^{M} \{F_i\}^t\{\alpha_i\} = \{F\}^t\{\alpha\} \qquad (5.25)$$

donde M es el número de elementos, $\{F_i\}$ son las cargas generalizadas actuando según los $\{\alpha_i\}$ y $\{F\}$ son las cargas generalizadas actuando en los nodos de toda la estructura.

Como

$$\{F_i\} = [K_i]\{\alpha_i\} \qquad (5.26)$$

donde $[K_i]$ es la matriz de rigidez para el elemento i, recemplazando Ec.2.24 y Ec.2.26 en Ec.2.25 se obtiene a nivel de toda la estructura

$$\{F\} = [K]\{\alpha\} \qquad (5.27)$$

donde

$$[K] = \sum_{1}^{M} [L_i]^t [K_i] [L_i] \qquad (5.28)$$

De esta forma se puede conocer la matriz de rigidez $[K]$ de toda la estructura a partir de la matriz de rigidez de los elementos en que la misma se ha subdividido y a partir de la misma determinar los desplazamientos incógnitas.

### 5.3- Elemento cúbico de ocho nodos

Debido a que la dimensión de las matrices de rigidez es muy grande para los distintos elementos tridimensionales, en general sus expresiones no figuran en la bibliografía apareciendo sólo las funciones de interpolación. Como una mayor dimensión de la matriz implica una necesidad creciente de memoria de la computadora y en consecuencia un tiempo de ejecución del programa más largo, este tipo de elementos no son muy usados en la práctica. Sin embargo cuando el problema no puede ser tratado en forma bidimensional, como es en este caso, su uso es ineludible. A continuación se mostrará como se calculó la matriz de rigidez para un elemento cúbico de ocho nodos. Debido a la simetría del problema, se tomó como sistema de ejes locales $(\xi,\eta,\zeta)$ un sistema de ejes ortogonales paralelos al sistema de ejes estructurales (x, y, z), Fig. 5.1.

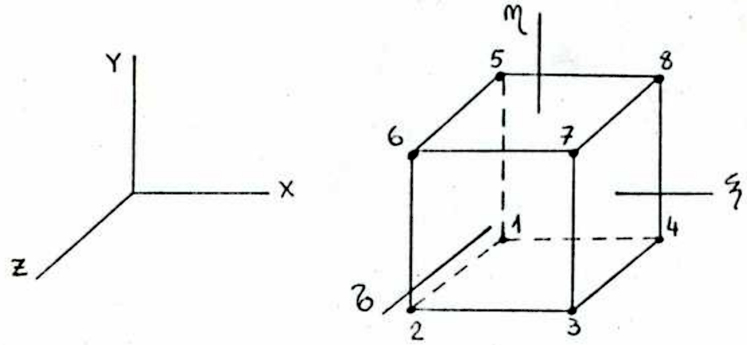



Fig. 5.1

Las funciones de interpolación $P_i$ $(\xi, \eta, \zeta)$ con i = 1 a 8 están dadas por la expresión[69]

$$P_i(\xi,\eta,\zeta)=1/8(1+\xi\xi_i)(1+\eta\eta_i)(1+\zeta\zeta_i) \qquad (5.29)$$

donde $\xi_i, \eta_i, \zeta_i$ son las coordenadas de cada nodo.

En Tabla 5.1 se muestran las coordenadas de cada nodo en ambos sistemas y las funciones de interpolación. En el sistema estructural, los lados del cubo valen 2c.

Usando la Ec.5.11 y la Tabla 5.1 se calculó la matriz Jacobiana

$$[J]=\begin{bmatrix} c & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix} \qquad (5.30)$$

y el determinante de $[J]$

$$\det[J]=c^3 \qquad (5.31)$$

TABLA 5.1

| nodo i | $\xi_i$ $\eta_i$ $\zeta_i$ | $x_i$ $y_i$ $z_i$ | $P_i(\xi,\eta,\zeta)$ |
|---|---|---|---|
| 1 | -1 -1 -1 | -c -c -c | $1/8(1-\xi)(1-\eta)(1-\zeta)$ |
| 2 | -1 -1 1 | -c -c c | $1/8(1-\xi)(1-\eta)(1+\zeta)$ |
| 3 | 1 -1 1 | c -c c | $1/8(1+\xi)(1-\eta)(1+\zeta)$ |
| 4 | 1 -1 -1 | c -c -c | $1/8(1+\xi)(1-\eta)(1-\zeta)$ |
| 5 | -1 1 -1 | -c c -c | $1/8(1-\xi)(1+\eta)(1-\zeta)$ |
| 6 | -1 1 1 | -c c c | $1/8(1-\xi)(1+\eta)(1+\zeta)$ |
| 7 | 1 1 1 | c c c | $1/8(1+\xi)(1+\eta)(1+\zeta)$ |
| 8 | 1 1 -1 | c c -c | $1/8(1+\xi)(1+\eta)(1-\zeta)$ |

Con estos resultados se calculó la matriz $[T]$ dada por Ec.5.6.

Sustituyendo esta matriz $[T]$, la matriz $[H]$ de elasticidad para un material isótropo tridimensional[70] y det $[J]$ en Ec.5.19 e integrando, se halló la matriz de rigidez $[K]$ del elemento. Esta matriz de 24 x 24, se dividió en submatrices reordenando la matriz $\{\alpha\}$ de desplazamientos nodales. De esta forma resultó más fácil programarla y se pudo ahorrar mucha memoria de la computadora.

Haciendo

$$\{\alpha\} = \{u_1 u_2 u_3 u_4 u_5 u_6 u_7 u_8 v_1 v_4 v_3 v_2 v_5 v_8 v_7 v_6 w_1 w_5 w_6 w_2 \\ w_4 w_8 w_7 w_3\} \qquad (5.32)$$

la matriz de rigidez $[K]$ resultó igual a:

$$[K] = \begin{bmatrix} [K_1] & [K_2] & [K_3] \\ [K_2] & [K_1] & [K_2] \\ [K_3] & [K_2] & [K_1] \end{bmatrix} \qquad (5.33)$$

En Tabla 5.2 se muestran las componentes de estas matrices.

Para calcular las tensiones que actúan en los nodos de cada elemento, se usó la Ec.5.14 que se puede escribir.

$$\{\sigma\} = [TEN]\{\alpha\} \qquad (5.34)$$

Debido a que las tensiones de tracción máximas que se producen en el modelo son las tensiones transversales $\sigma_y$ sobre el eje longitudinal del mismo, para cada elemento sólo se calcularon las tensiones $\sigma_y$ correspondientes a los nodos 2 y 3 de la Fig. 5.1. Usando las matrices $[H]$ y $[T]$ se obtuvo

?

$$\{\sigma_y(2), \sigma_y(3)\} = [TEN]\{\alpha\} \qquad (5.35)$$

donde $[TEN]$ es una matriz de 2 x 24, cuyas componentes no nulas son

$$\begin{aligned} &TEN(1,2)=TEN(2,6)=-F \\ &TEN(1,3)=TEN(2,7)=F \\ &TEN(1,13)=TEN(2,13)=TEN(1,17)=TEN(2,18)=-G \\ &TEN(1,16)=TEN(2,16)=TEN(1,20)=TEN(2,19)=G \end{aligned} \qquad (5.36)$$

$$F=E(1-\nu)/[(1-2\nu)(1+\nu)2c] \quad , \quad G=E\nu/[(1-2\nu)(1+\nu)2c]$$

TABLA 5.2

$$\left[K_1\right] = \begin{bmatrix}
A+B & A/2-B/4 & -A/2-B/8 & -A+B/2 & A/2-B/4 & A/4-B/2 & -A/4-B/4 & -A/2-B/8 \\
 & A+B & -A+B/2 & -A/2-B/8 & A/4-B/2 & A/2-B/4 & -A/2-B/8 & -A/4-B/4 \\
 & & A+B & A/2-B/4 & -A/4-B/4 & -A/2-B/8 & A/2-B/4 & A/4-B/2 \\
\text{SIMETRICA} & & & A+B & -A/2-B/8 & -A/4-B/4 & A/4-B/2 & A/2-B/4 \\
 & & & & A+B & A/2-B/4 & -A/2-B/8 & -A+B/2 \\
 & & & & & A+B & -A+B/2 & -A/2-B/8 \\
 & & & & & & A+B & A/2-B/4 \\
 & & & & & & & A+B
\end{bmatrix}$$

$$A = Ec(1-\nu)/\left[18(1-2\nu)(1+\nu)\right]$$

$$B = Ec/\left[18(1+\nu)\right]$$

$$\left[K_2\right] = \begin{bmatrix}
C+D/2 & C-D/2 & -C-D/2 & -C+D/2 & C/2+D/4 & C/2-D/4 & -C/2-D/4 & -C/2+D/4 \\
C/2+D/4 & C/2-D/4 & -C/2-D/4 & -C/2+D/4 & C+D/2 & C-D/2 & -C-D/2 & -C+D/2 \\
-C/2+D/4 & -C/2-D/4 & C/2-D/4 & C/2+D/4 & -C+D/2 & -C-D/2 & C-D/2 & C+D/2 \\
-C+D/2 & -C-D/2 & C-D/2 & C+D/2 & -C/2+D/4 & -C/2-D/4 & C/2-D/4 & C/2+D/4 \\
C-D/2 & C+D/2 & -C+D/2 & -C-D/2 & C/2-D/4 & C/2+D/4 & -C/2+D/4 & -C/2-D/4 \\
C/2-D/4 & C/2+D/4 & -C/2+D/4 & -C/2-D/4 & C-D/2 & C+D/2 & -C+D/2 & -C-D/2 \\
-C/2-D/4 & -C/2+D/4 & C/2+D/4 & C/2-D/4 & -C-D/2 & -C+D/2 & C+D/2 & C-D/2 \\
-C-D/2 & -C+D/2 & C+D/2 & C-D/2 & -C/2-D/4 & -C/2+D/4 & C/2+D/4 & C/2-D/4
\end{bmatrix}$$

$$C = Ec\nu/\left[6(1-2\nu)(1+\nu)\right]$$

$$D = Ec\ /\left[6(1+\nu)\right]$$

$$\left[K_3\right] = \left[K_2\right]^t$$

### 5.4- Idealización del modelo

El campo tridimensional de desplazamientos y la distribución de tensiones $\sigma_y$ sobre el eje longitudinal y = 0 se determinaron usando la idealización que se muestra en Fig. 5.2. En la misma se muestra la numeración de algunos de los elementos en que se dividió el modelo.

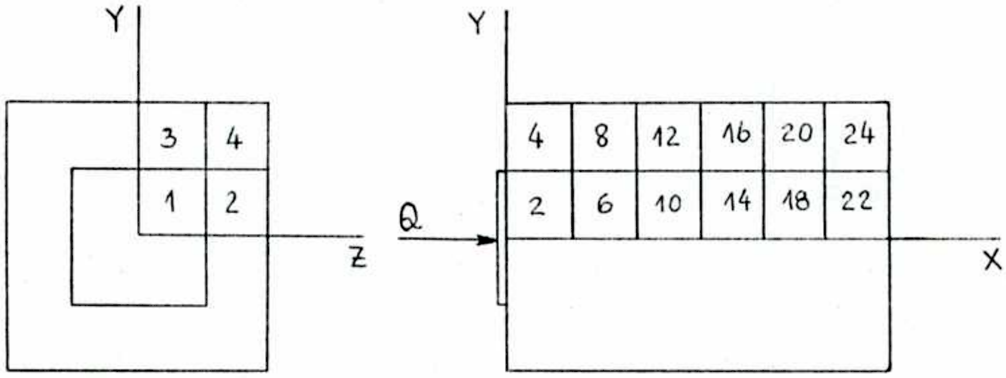



Fig. 5.2

Teniendo en cuenta las condiciones de simetría, sólo se resolvió un cuarto de prisma. Para esta idealización el total de desplazamientos es de 189. Esta malla es la más densa que se pudo utilizar, debido a la limitada capacidad de la memoria central, 8K, del sistema IBM 1130 con que cuenta el Centro de Computación de la Universidad Nacional de Rosario.

En Fig. 5.3 se muestra la numeración de todos los elementos y nodos.

Las condiciones de contorno en los desplazamientos son consecuencia de la simetría del problema. Además se supuso que lasección límite no cargada se mantenía plana. Usando estas

es razonable esto?

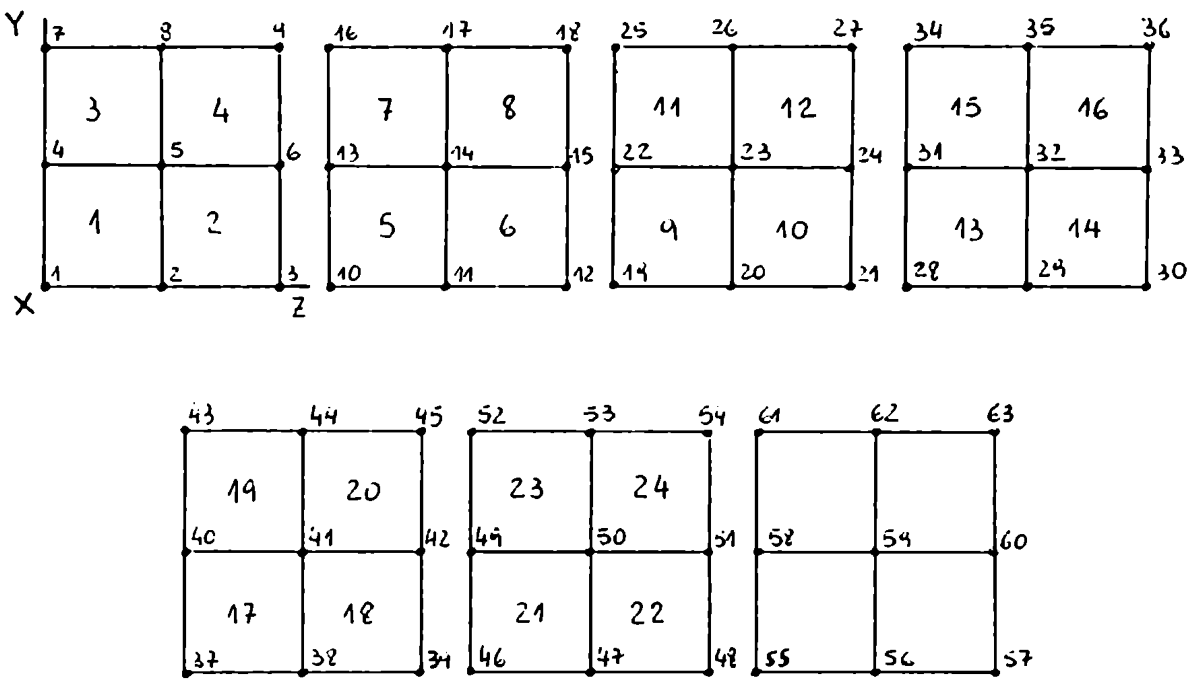



Fig. 5.3

condiciones, en Tabla 5.3 se muestran los grados de libertad fijos, es decir, desplazamientos nulos, correspondientes a cada nodo.

Por consideraciones energéticas se puede demostrar[67] que una carga Q distribuída uniformemente sobre una de las caras del elemento cúbico equivale a cuatro fuerzas concentradas iguales a Q/4 que actúan sobre los nodos de esa cara. Para Q = 1 Kg y dirección del eje x, en Tabla 5.4 se muestra la ubicación de dichas fuerzas.

En este trabajo se utilizó el programa CEPEF[71] (ver Apéndice II), cálculo de estructuras por elementos finitos, desarrollado en el Centro de Computación de la Universiad Nacional de Rosario.

TABLA 5.3

| nodos | grados de libertad fijos | nodos | grados de libertad fijos | nodos | grados de libertad fijos |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | y,z | 25 | z | 49 | z |
| 2 | y | 28 | y,z | 52 | z |
| 3 | y | 29 | y | 55 | x,y,z |
| 4 | z | 30 | y | 56 | x,y |
| 7 | z | 31 | z | 57 | x,y |
| 10 | y,z | 34 | z | 58 | x,z |
| 11 | y | 37 | y,z | 59 | x |
| 12 | y | 38 | y | 60 | x |
| 13 | z | 39 | y | 61 | x,z |
| 16 | z | 40 | z | 62 | x |
| 19 | y,z | 43 | z | 63 | x |
| 20 | y | 46 | y,z | | |
| 21 | y | 47 | y | | |
| 22 | z | 48 | y | | |

TABLA 5.4

| nodo | fuerza generalizada [kg] | dirección |
|---|---|---|
| 1 | 0.0625 | x |
| 2 | 0.0625 | x |
| 4 | 0.0625 | x |
| 5 | 0.0625 | x |

Para conocer con que grado de aproximación se trabajaba, se calcularon los desplazamientos y las tensiones usando la misma malla pero para un caso bidimensional. Estos resultados se compararon con la solución analítica exacta obtenida por

Iyengar[2] para este caso. El error máximo de los valores obtenidos usando esta malla resultó aproximadamente del 9%.

# 6.- RESULTADOS EXPERIMENTALES Y TEORICOS

En Fig. 6.1 se muestran las franjas de interferencia de Young obtenidas por reconstrucción de un specklegrama, correspondiente a una carga de 260 kg, para tres puntos distintos del modelo.

Los desplazamientos longitudinales u y transversales v están graficados en la Fig. 6.2 y ~~Fig.~~ 6.3, respectivamente, para una carga de 260 kg. Estos se obtuvieron analizando punto por punto el specklegrama sobre los ejes longitudinales y=0 e y=a', midiendo en cada uno de ellos la interfranja e inclinación de las redes, de Young. Asímismo, se muestran los resultados teóricos obtenidos usando elementos finitos para el mismo valor de la carga.

En la Fig. 6.4 se muestra la restitución de un holograma para una carga de 75 kg. En Fig. 6.5 se grafican los desplazamientos normales w obtenidos de este holograma, sobre los ejes y=o e y=a'. También en la misma figura se muestran los resultados calculados.

En la Fig. 6.6 se muestra la distribución de las tensiones de tracción $\sigma_y$, obtenida por el método de elementos finitos, sobre el eje longitudinal y=o. En la misma figura, para su comparación, se representan los resultados obtenidos por Yettram y Robbins para un modelo similar, de módulo de Poisson igual a 0.166.

Los gráficos de los desplazamientos, Fig. 6.2, Fig. 6.3 y Fig. 6.5, muestran que existe un buen acuerdo entre los valores

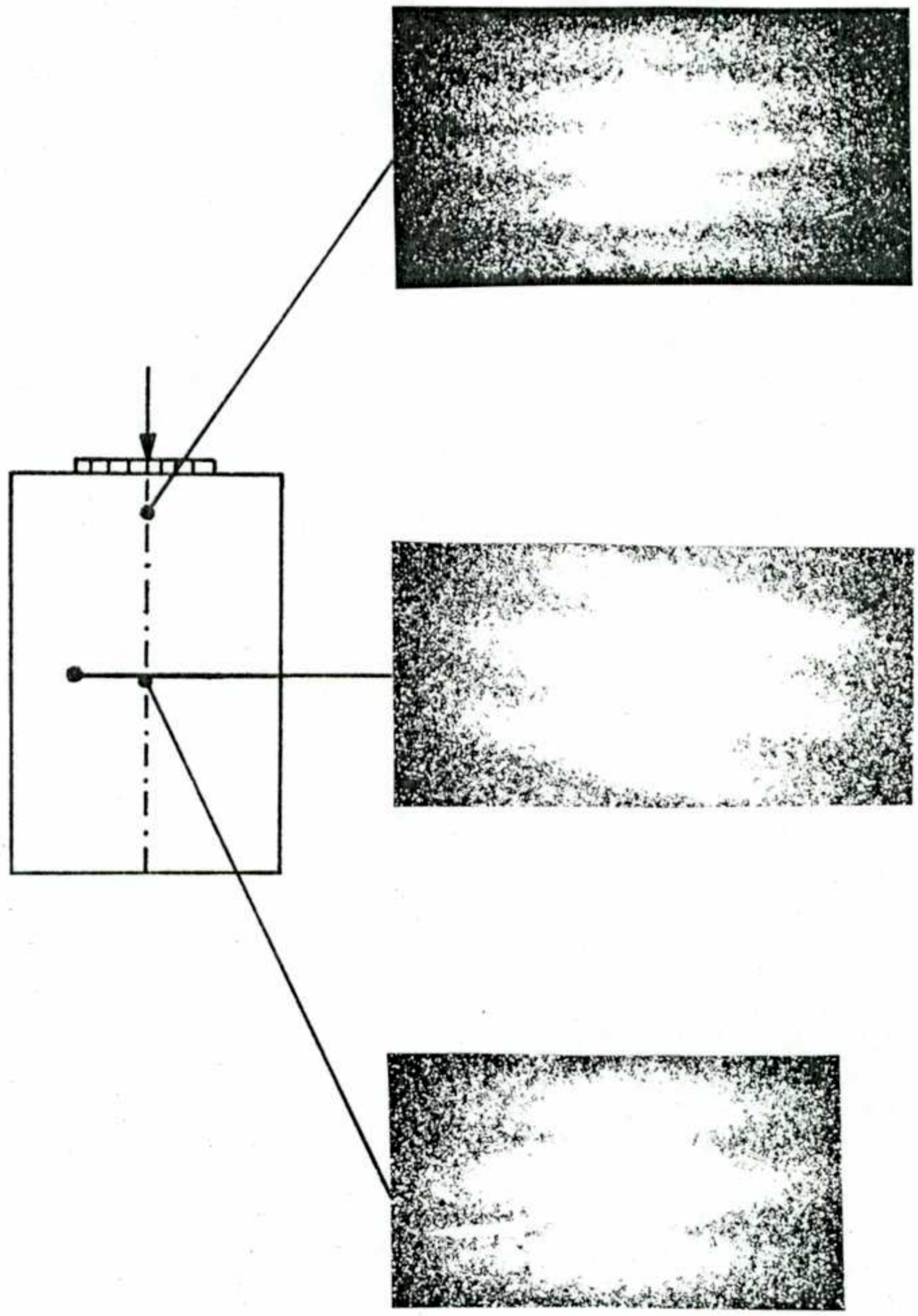


Fig. 6.1

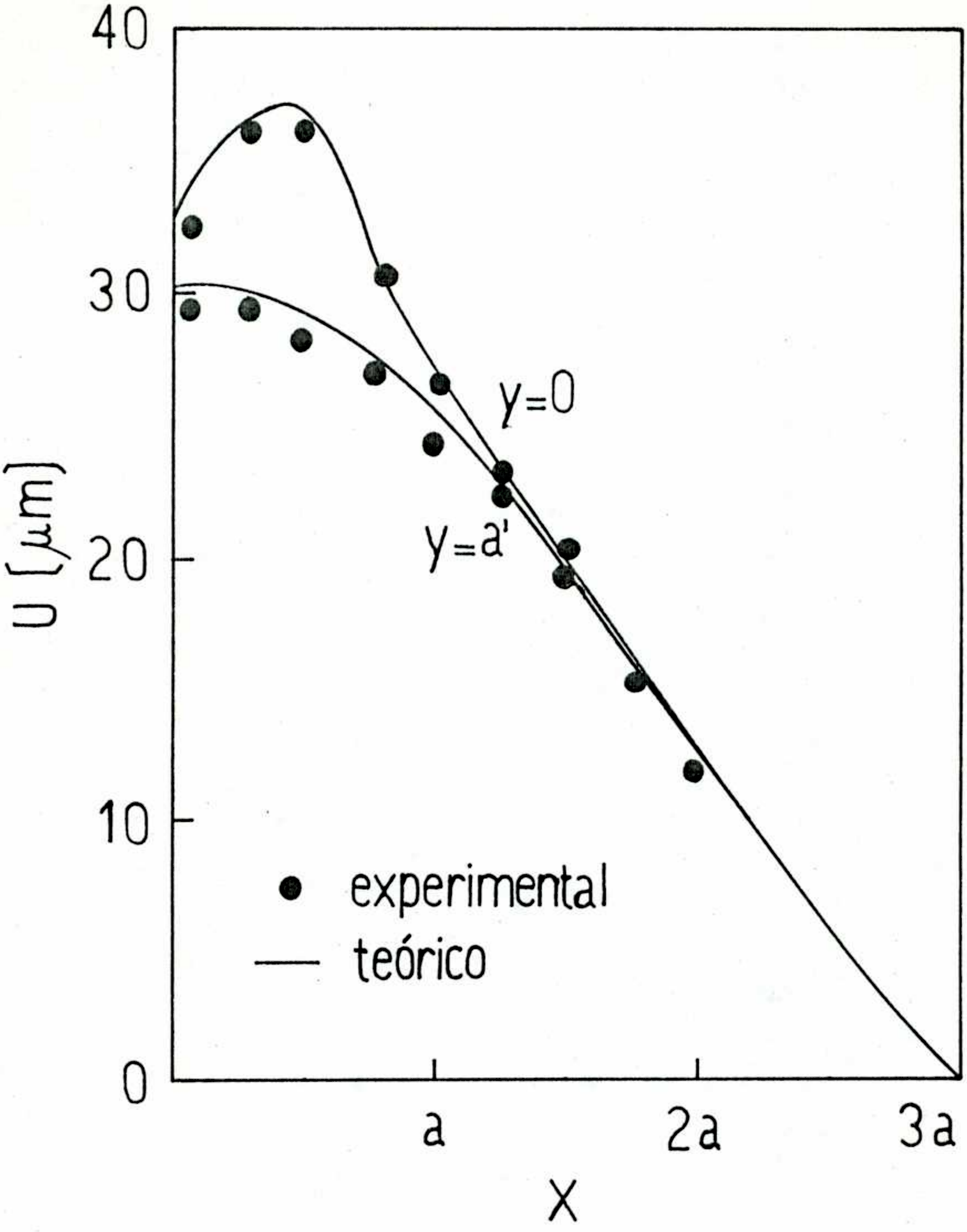



Fig. 6.2

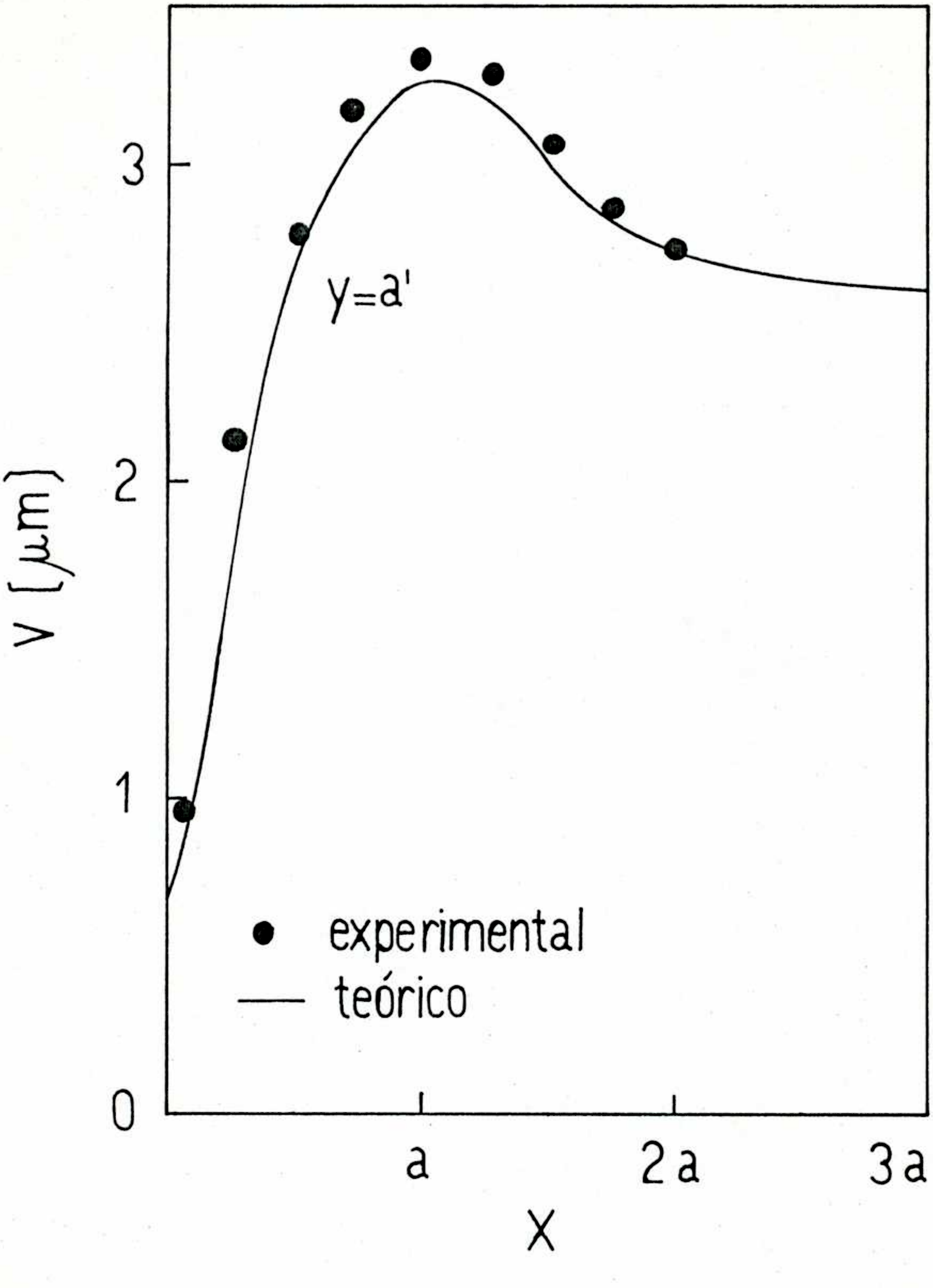



Fig. 6.3

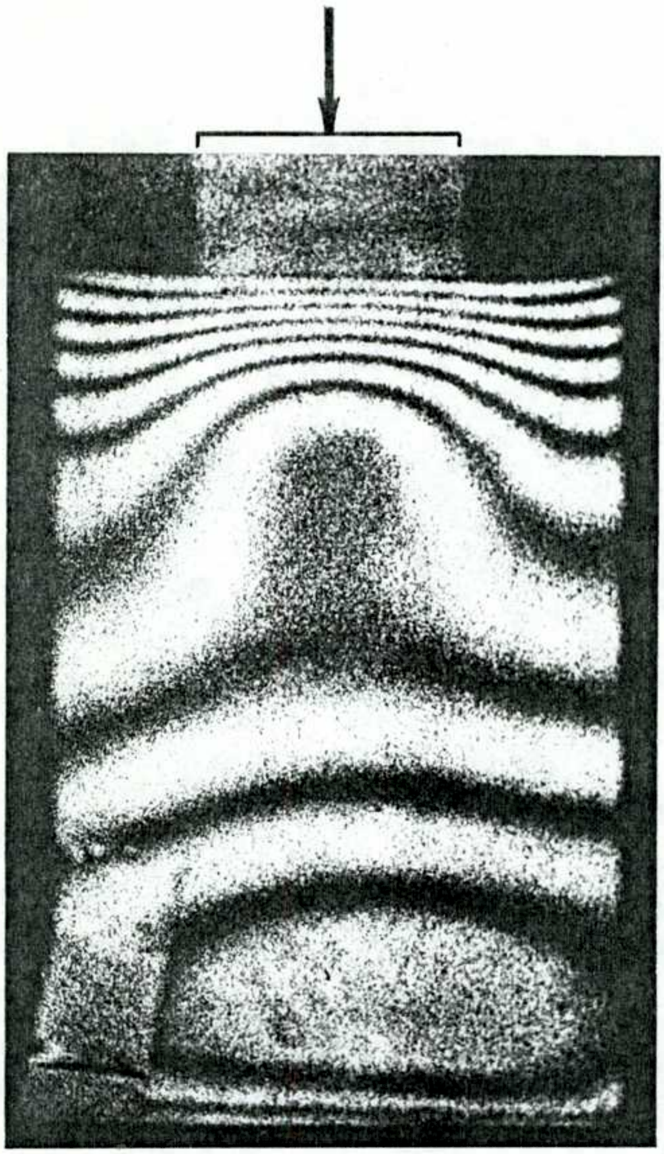


Fig. 6.4

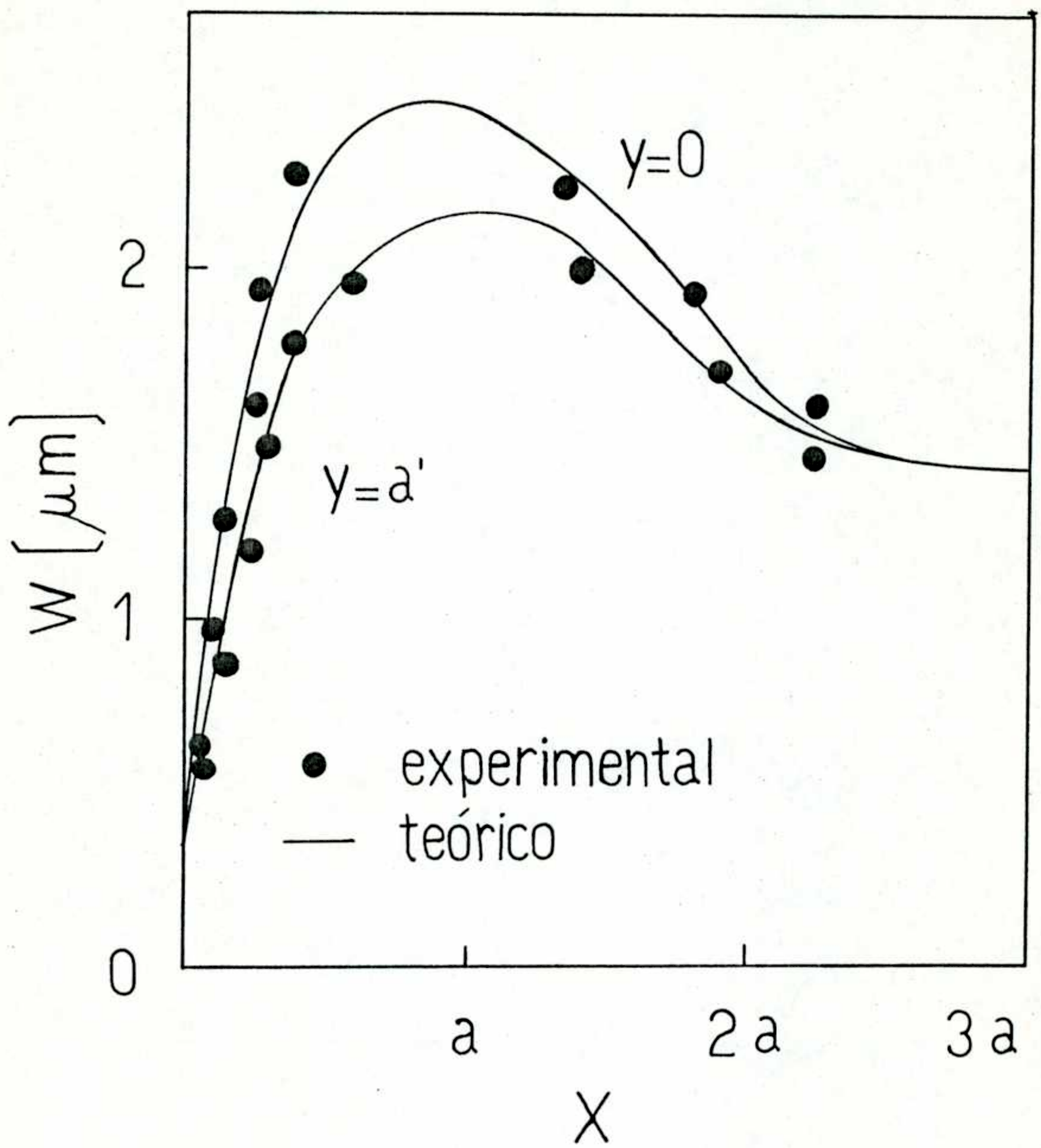



Fig. 6.5

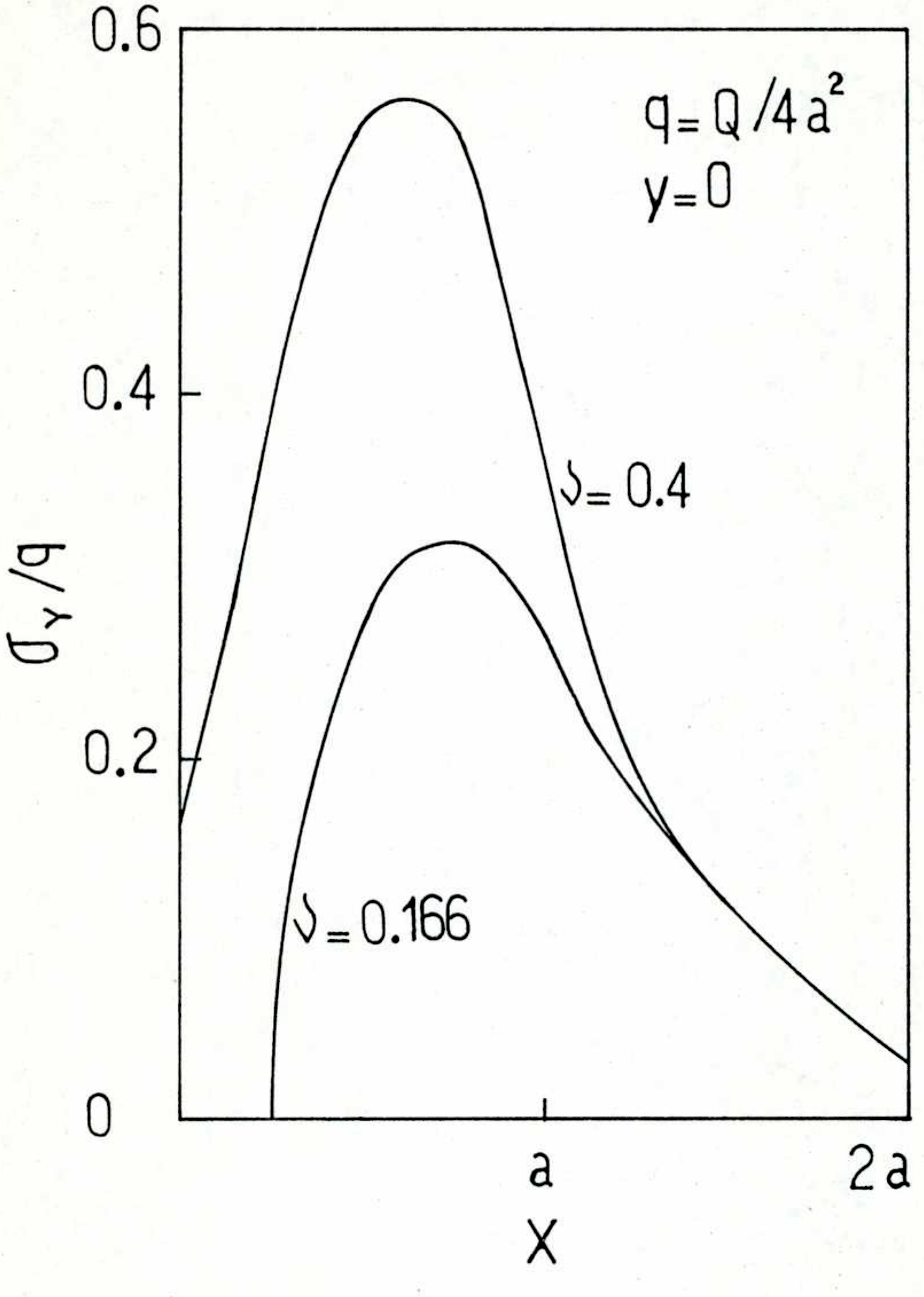



Fig. 6.6

experimentales y los teóricos. Además, resulta importante remarcar las diferencias que introduce la variación del módulo de Poisson sobre la distribución de las tensiones $\sigma_y$ y sobre sus valores máximos, Fig. 6.6.

Las tensiones $\sigma_y$ no se pueden calcular a través de los desplazamientos medidos experimentalmente, pues no se conoce la variación de w en dirección normal o lo que es lo mismo la deforma ción normal $\varepsilon_z$. Esto se debe a que la interferometría holográfica solo suministra información superficial sobre los desplazamientos.

Resumiendo se puede decir que los resultados experimentales obtenidos muestran que, si se toman precauciones para restringir movimientos rígidos del modelo debido a la aplicación de las cargas, el método usado combinando las dos técnicas de óptica coherente mencionadas es una herramienta muy sensible y simple para utilizar en el análisis de desplazamientos. Se debe recalcar que el método consiste básicamente en medir los desplazamientos en el plano de la superficie del objeto difusor por medio de fotografía de motas ~~speckle~~ y los normales a la misma con interferometría holográfica.

También se muestra aquí la utilidad del método de elementos finitos, que si bien entraña un complejo trabajo de computación, brinda resultados con la aproximación que se desée simplemente aumentando el número de los elementos.

Finalmente se puede decir que los objetivos básicos del trabajo han sido logrados.

APENDICE I

Demostración de la Ec. 2.10

Sea una pantalla plana opaca sobre la que existe una abertura S que es iluminada por una fuente puntual monocromática de amplitud U, situada en $P_2$ a distancia $\vec{r}_{21}$ de un punto genérico $P_1$ de la abertura, Fig. I.1.

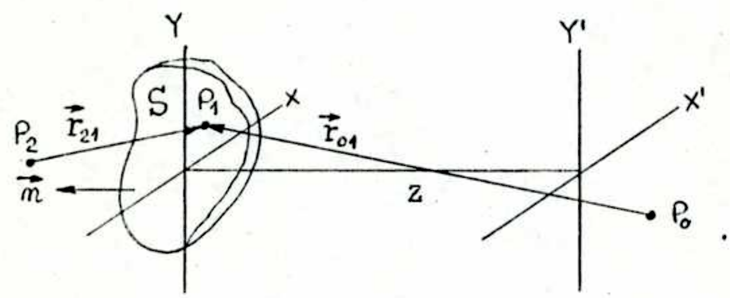



Fig.I.1

Si la máxima dimensión lineal de la abertura y la distancia $\vec{r}_{01}$ son grandes con respecto a la longitud de onda, se puede usar la teoría escalar de difracción. La amplitud del campo sobre el plano de observación x'y' está dada por la fórmula de Fresnel-Kirchhoff[26]

$$U(x',y')=(2i\lambda)^{-1}\iint_S (e^{ikr_{01}}/r_{01})\, U(x,y)\,. \qquad (I.1)$$
$$.\left[\cos(\vec{n},\vec{r}_{01})-\cos(\vec{n},\vec{r}_{21})\right] dx\, dy$$

Supongamos se verifican las siguientes aproximaciones:

1) la función U $(P_1)$ es nula fuera de la abertura S, lo que permite extender a infinito los límites de la integral;

2) La distancia z entre la abertura S y el plano de observación es grande respecto de la máxima dimensión lineal de S, de forma que

$$\begin{aligned} \cos(\vec{n},\vec{r}_{01}) &\simeq 1 \\ \cos(\vec{n},\vec{r}_{21}) &\simeq -1 \end{aligned} \qquad (I.2)$$

y desarrollando en serie $r_{01}$, aproximación de Fresnel,

$$e^{ikr_{01}}/r_{01}=e^{ikz}\, e^{ik\left[(x'-x)^2+(y-y')^2\right]/2z}/z \qquad (I.3)$$

Reemplazando las expresiones anteriores en Ec.I.1, se obtiene

$$U(x',y')=\overbrace{(i\lambda z)^{-1}}^{e^{ikz}}\iint_{-\infty}^{\infty} U(x,y)\; e^{ik\left[(x'-x)^2+(y'-y)^2\right]/2z} \,.dx\,dy \qquad (I.4)$$

Utilizando esta ecuación se verá ahora como una lente convergente realiza una transformación bidimensional de Fourier.

Una lente delgada simplemente retarda la fase de la onda incidente en una cantidad proporcional al espesor de la misma.

Si $\Delta_o$ es el espesor máximo de la lente y $\Delta(x, y)$ es el espesor en un punto genérico (x, y), el retardo de fase $\phi(x,y)$ de una onda después de haber atravesado la misma en (x, y) es[27], Fig. I.2

$$\phi(x,y)=kn\Delta(x,y)+k\left[\Delta_0-\Delta(x,y)\right] \qquad (I.5)$$

donde $n$ es el índice de refracción del material que constituye la lente

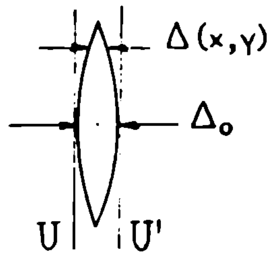



Fig. I.2

Por lo tanto el campo U' (x, y) en un plano situado inmediatamente después de la lente está relacionado con el incidente por medio de la transformación de fase

$$U'(x,y)=e^{ik\Delta_0}\ e^{ik(n-1)\Delta(x,y)}\ U(x,y) \qquad (I.6)$$

Se puede demostrar que para rayos paraxiales[27]

$$\Delta(x,y)=\Delta_0-(x^2+y^2)/f^2 \qquad (I.7)$$

donde f es el foco de la lente.

Reemplazando Ec. I.7 en Ec. I.6, se obtiene

$$U'(x,y)=e^{ikn\Delta_0}\ e^{-ik(x^2+y^2)/f^2} \qquad (I.8)$$

El primer factor representa simplemente un retardo de fase constante; el segundo se puede interpretar como la aproximación cuadrática de una onda esférica. Si la lente es convergente, la distancia focal es positiva y la onda esférica converge en un punto del eje situado sobre el plano focal.

Supongamos ahora un objeto plano con una función de trasmisión $T(x, y)$, situado inmediatamente adelante de una lente convergente de distancia focal f. El objeto es iluminado por una onda monocromática plana de amplitud A en incidencia normal. Si las dimensiones del objeto son menores que el diámetro de la lente, la distribución de amplitud inmediatamente después de la lente es de acuerdo a Ec. I.8

$$U'(x,y)=A\ T(x,y)\ e^{-ik(x^2+y^2)/2f} \qquad (I.9)$$

sin tener en cuenta el retardo de fase constante.

Para determinar la distribución $U(x',y')$ de amplitud sobre el plano focal de la lente, se usa Ec. I.4 con z=f y se obtiene

$$U(x',y')=(i\lambda f)^{-1}A\ e^{ik(x'^2+y'^2)/2f}\iint_{-\infty}^{\infty}T(x,y)\,.\,e^{-ik(xx'+yy')/f}\,dx\,dy \qquad (I.10)$$

o sea

$$U'(x',y')=(i\lambda f)^{-1}A\ e^{ik(x'^2+y'^2)/2f}\ F\big[T(x,y)\big] \qquad (I.11)$$

donde F[ ] significa la transformada de Fourier de la función que está adentro del corchete.

APENDICE II:

## Programa de análisis numérico CEFEF

A continuación se describirá el programa de análisis numérico usado, CEFEF, que es completamente general pues permite la incorporación de elementos de cualquier tipo.

La memoria central de 8K conjuntamente con el disco magnético periférico del sistema IBM 1130, limitan el número de elementos a usar. La dificultad máxima ocurre en el momento del ensamble en la memoria de las matrices de rigidez de cada elemento, para formar la matriz de rigidez de toda la estructura. Conocido el número de palabras que ocupa el programa y los datos en la memoria, se puede calcular la dimensión máxima de la matriz estructural y en consecuencia el número máximo de elementos. Sin embargo la topología de la matriz estructural es muy particular y permite el ahorro de memoria. Esto se debe a que dicha matriz presenta una topología de banda, es decir los términos no nulos están situados solamente alrededor de la diagonal principal formando una banda. De esta forma la densidad de población de términos no nulos en la matriz resulta ser muy baja. El ancho de la banda depende de la naturaleza de los elementos y de la forma de conectarlos.

La aplicación estricta de Ec. 5.28 para conectar los elementos usando la matriz localización, no se puede utilizar en la práctica pues requiere memorizar numerosas matrices de gran dimensión. En el programa se utiliza un método directo que consiste en dar como datos las posiciones de la matriz total en que deberán alojarse cada uno de los términos de la matriz de rigidez del elemento correspondiente. Esos datos se dan como componentes de un vector de localización que tiene la dimensión de la matriz de rigidez del elemento. Un término K(i,j) de esta matriz deberá ser ubicado en la posición L(i) L(j) de la matriz de rigidez total. Para el elemento i de Fig. II.1, el vector localización se define como

$$L_i=(52,53,104,105,106,107,54,55) \qquad (II.1)$$

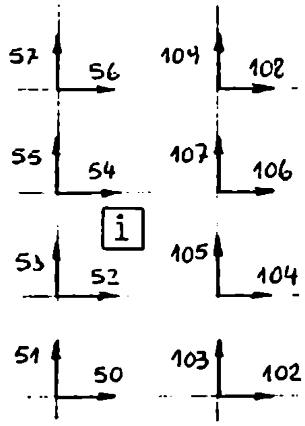



Fig. II.1

Un término como el K(2,3) de la matriz de rigidez del elemento i se ubicará en la matriz total en la posición

$$K(2,3)=K(L_i(2),L_i(3))=K(53,104) \qquad (II.2)$$

Para aprovechar mejor la memoria de la computadora, el programa utiliza el método de las sub-estructuras. Este consiste en dividir el modelo en grupos de sub-estructuras, tales que la matriz de rigidez de cada uno de ellos no exceda la capacidad de la memoria central. En el interior de cada sub-estructura se puede agrupar los desplazamientos en tres categorías, Fig. II.2, a saber

1) los desplazamientos $\{\alpha_R\}$ necesarios para las conexiones con las sub-estructuras vecinas;

2) los desplazamientos $\{\alpha_F\}$ impuestos por las condiciones de contorno, que en general serán nulos;

3) los otros desplazamientos $\{\alpha_C\}$.

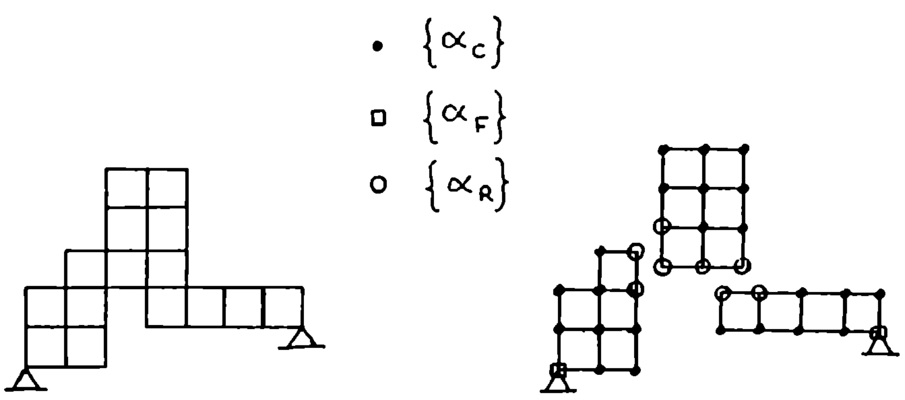



Fig. II.2

Se particionan los grados de libertad dentro de las matrices $\{\alpha\}$, $[K]$ y $\{F\}$ tal que

$$\left\{ F_{RC} \;\; F_F \right\} = \begin{bmatrix} K_1 & K_2 \\ K_3 & K_4 \end{bmatrix} \left\{ \alpha_{RC} \;\; \alpha_F \right\} \qquad \text{(II.3)}$$

donde $\alpha_{RC}$ agrupa los desplazamientos $\{\alpha_R\}$ y $\{\alpha_C\}$ y lo mismo para las fuerzas generalizadas.

Desarrollando los productos de las submatrices correspondientes, se obtiene

$$\left\{F_{RC}\right\}=\left[K_1\right]\left\{\alpha_{RC}\right\}+\left[K_2\right]\left\{\alpha_F\right\} \tag{II.4}$$

$$\left\{F_F\right\}=\left[K_3\right]\left\{\alpha_{RC}\right\}+\left[K_4\right]\left\{\alpha_F\right\} \tag{II.5}$$

En Ec. II.4 como se conocen $\left\{\alpha_F\right\}$ se puede calcular

$$\left\{F'_{RC}\right\}=\left\{F_{RC}\right\}-\left[K_2\right]\left\{\alpha_F\right\}=\left[K_1\right]\left\{\alpha_{RC}\right\} \tag{II.6}$$

Ahora se puede separar los desplazamientos $\left\{\alpha_R\right\}$ y $\left\{\alpha_c\right\}$ de Ec. II.6

$$\left\{F'_R\right\}=\left[K_{RR}\right]\left\{\alpha_R\right\}+\left[K_{RC}\right]\left\{\alpha_C\right\} \tag{II.7}$$

$$\left\{F'_C\right\}=\left[K_{CR}\right]\left\{\alpha_R\right\}+\left[K_{CC}\right]\left\{\alpha_C\right\} \tag{II.8}$$

De Ec. II.8

$$\left\{\alpha_C\right\}=\left[K_{CC}\right]^{-1}\left\{F'_C\right\}-\left[K_{CC}\right]^{-1}\left[K_{CR}\right]\left\{\alpha_R\right\} \tag{II.9}$$

y reemplazando en Ec. II.7

$$\left\{F'_R\right\}-\left[K_{RC}\right]\left[K_{CC}\right]^{-1}\left\{F'_C\right\}=\left(\left[K_{RR}\right]-\left[K_{RC}\right]\left[K_{CC}\right]^{-1}\left[K_{CR}\right]\right)\cdot\left\{\alpha_R\right\} \tag{II.10}$$

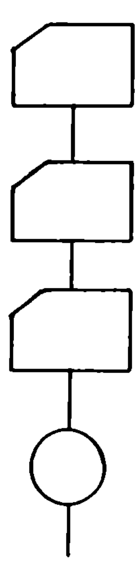
que se puede escribir

$$\left\{F''_R\right\}=\left[K'\right]\left\{\alpha_R\right\} \qquad (II.11)$$

De esta forma se realiza la operación de condensación y halla la relación entre las fuerzas y los desplazamientos en la frontera de la subestructura.

En definitiva, el problema de elementos finitos se ha reducido a la solución de un sistema de ecuaciones lineales. Existen numerosos métodos para la resolución de éste. Para elegir entre ellos se debe comparar la rapidez de ejecución, los errores del método, la facilidad de programación y la extensión a sistemas de orden elevado. El programa CEFEF utiliza un método directo, o sea que obtiene la solución exacta, si no se tienen en cuenta los errores de redondeo. El método es el de Cholevsky-Banachiewicz, que está basado en la triangularización del sistema y que es muy útil cuando las matrices son simétricas.

El diagrama de flujo del programa CEFEF es el siguiente:

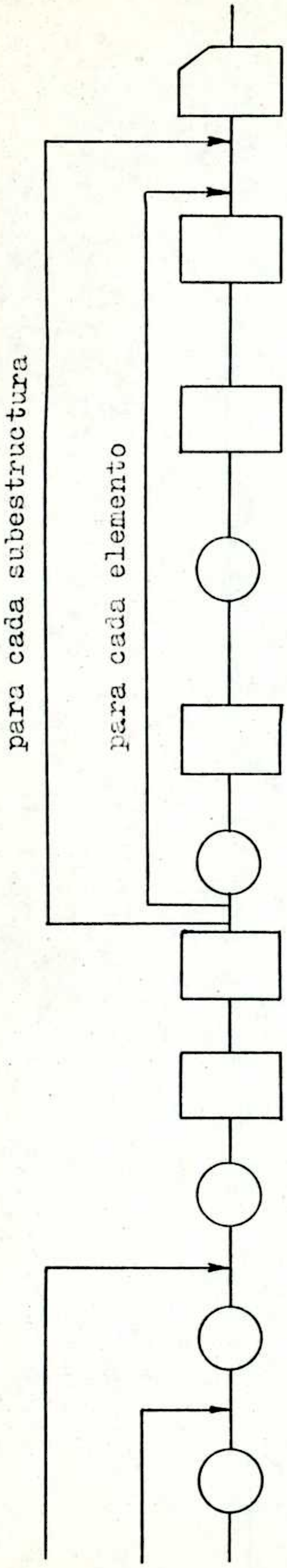


lectura de constantes elásticas y geométricas

lectura numeración de elementos y nodos

lectura coordenadas de nodos

grabación en disco datos de la estructura




lectura grados de libertad con restricciones de vínculo

subprograma correspondiente al tipo de elemento

formación matriz de tensiones del elemento

grabación matriz de tensiones del elemento

formación matriz de rigidez del elemento

grabación matriz de rigidez del elemento

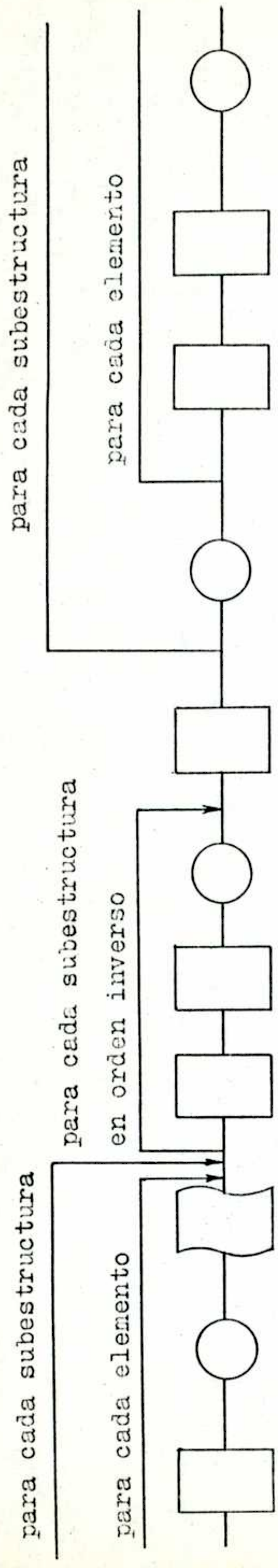
lectura datos de cargas

generación de cargas equivalentes

grabación de cargas equivalentes

lectura vector de localización de la subestructura

lectura matriz de rigidez del elemento




lectura vector de localización del elemento

ubicación de la matriz de rigidez del elemento en la subestructura

cálculo $\left[K_{cc}\right]^{-1}$ , $\left[K_{cR}\right]$ , $\left[K_{RR}\right]$ ; $\left[K_{Rc}\right]$ , $\left\{F'_{Rc}\right\}$ , $\left\{F'_{R}\right\}$ , $\left\{F'_{c}\right\}$

grabación vector de localización de la subestructura y de matrices anteriores

resolución del sistema $\left\{F''_{R}\right\}=\left[K'\right]\left\{\alpha_{R}\right\}$ para la última subestructura

lectura $\left\{\alpha_{c}\right\}$

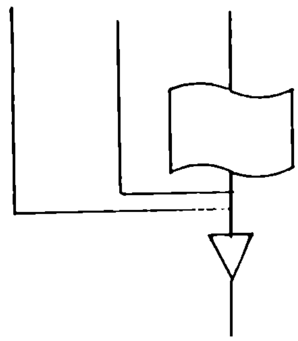
ubicación $\left\{\alpha_{c}\right\}$ en $\left\{\alpha\right\}$

cálculo reacciones de vínculo $\left\{F_{F}\right\}$

impresión de los desplazamientos y reacciones

lectura matriz de tensiones

cálculo de tensiones en nodos del elemento



impresión de las tensiones

fin

REFERENCIAS

1- Y. Guyon, Publication, International Association for Bridge and Structural Engineering 11, 165 (1951).

2- K.T. Sundara Raja Iyengar, J. Am. Concrete Inst.. 59, 1443 (1962).

3- A.L. Yettram and K. Robbins, Mag. Concrete Research 21, 103 (1969).

4- S.P. Christodoulides, Publication, International Association for Brdige and Structural Engineering, 16, 55 (1956).

5- J. Zieliński and R.E. Rowe, London, Cement and Concrete Association, Research Report No. 9 (1960).

6- J.D. Ridsen and E.I. Gordon, Proc. IRE 50, 2367 (1962).

7- B.M. Oliver, Proc. IEEE 51, 220 (1963).

8- L.I. Goldfisher, J. Opt. Soc. Am. 55, 247 (1965).

9- T. Suzuki and R. Hioki, Jap. J. Appl. Phys. 5, 807 (1966).

10- H.H. Hopkins and H.J. Tiziany, "Speckling in diffraction patterns and optical images formed with the laser", Comptes

Rendus du Symposium International sur Applications del'Holographie, Besançon (1970).

11- M. Born and E. Wolf, "Principles of Optics", Pergamon Press, London (1959).

12- J.A. Leendertz, J. Phys. E (Sci. Instrum.) 3, 214 (1970).

13- J.N. Butters and J.A. Leendertz, J. Phys. E (Sci. Instrum.) 4, 277 (1971).

14- E. Archbold, J.M. Burch and A.E. Ennos, Optica Acta 17, 883 (1970).

15- E. Archbold and A.E. Ennos, Optica Acta 19, 253 (1972).

16- J.M. Burch and J.M. Tokarski, Optica Acta 15, 101 (1968).

17- C.E.K. Mees, "The Theory of the Photographic Process", The Mcmillan Co., New York (1954).

18- R.N. Bracewell,"The Fourier Transform and Its Applications", Mc Graw-Hill Book Co., New York (1965).

19- J. Arsac, "Transformations de Fourier et Théorie des Distributions", Dunod, Paris (1960).

20- Ref. 11

21- G. Bruhat, "Optique" Masson et Cie., Paris (1972).

22- Ref. 11.

23- Lord Rayleigh, Phil. Mag. 8, 261 (1879).

24- Ref. 11

25- H.H. Hopkins, Proc. Roy. Soc. A231, 98 (1955).

26- A. Sommerfeld, "Optics", Lectures on Theoretical Physics, vol. IV, Academic Press Inc., New York (1954).

27- J.W. Goodman, "Introduction a l'Optique de Fourier et a l'Holographie", Masson et Cie., Paris (1972).

28- D. Gabor, Nature, 161, 177 (1948).

29- D. Gabor, Proc. Roy. Soc. A197, 454 (1949).

30- D. Gabor, Proc. Phys. Soc. B64, 449 (1951).

31- E.N. Leith and J. Upatnieks, J. Opt. Soc. Am. 52, 1123 (1962).

32- E.N. Leith and J. Upatnieks, J. Opt. Soc. Am. 54, 1295 (1964).

33- G.W. Stroke, "An Introduction to Coherent Optics and Holography", Academic Press, New York (1969).

34- M. Françon, "Holographie", Masson et Cie., Paris (1969).

35- J.B. De Velis and G.O. Reynolds, "Theory and Applications of Holography", Addison-Wesley Publishing Co., New York (1967).

36- B.J. Thompson and E. Wolf, J. Opt. Soc. Am. 47, 895 (1957).

37- M.J. Beran and G.B. Parrent, "Theory of Partial Coherence", Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J. (1964).

38- Ref. 11.

39- A.A. Friessem, A. Kozma and G.F. Adam, Appl. Opt. 6, 851 (1967).

40- A. Kozma, J. Opt. Soc. Am., 56, 428 (1966).

41- G.W. Stroke, J. Opt. Soc. Am. 45, 30 (1955).

42- Ref. 33.

43- E.B. Champagne and N.G. Massey, Appl. Opt. 8, 1879 (1969).

44- R.J. Collier, IEEE Spectrum 7, 67 (1966).

45- D. Gabor et al., Phys. Lett. 18, 116 (1965).

46- M.H. Horman, Appl. Opt. 4, 333 (1965).

47- R.E. Brooks, L.O. Heflinger and R.F. Wuerker, Appl. Phys. Lett. 7, 248 (1965).

48- R.L. Powell and K.A. Stetson, J. Opt. Soc. Am. 55, 1593 (1965).

49- K.A. Stetson and R.L. Powell, J. Opt. Soc. Am. 55, 1964 (1965).

50- K.A. Haines and B.P. Hildebrand, Appl. Opt. 5, 595 (1966).

51- E.B. Aleksandrov and A.M. Bronch-Bruevich, Soviet Phys. Tech. Phys. 12, 258 (1967).

52- J. Ch. Vienot et al., Optica Acta 16, 343 (1969).

53- J. Ch. Vienot et al., Proceedings of the Symposium on the Engineering Uses of Holography, Glasgow (1968), ed. Cambridge University Press, London (1970).

54- K.A. Stetson, Optik 69, 386 (1969).

55- R.C. Sampson, Exp. Mech. 10, 313 (1969).

56- S. Walles, Arkiv for Fysik 40, 299 (1969).

57- N. Abramson, Appl. Opt. 8, 1235 (1969).

58- N. Abramso n, Appl. Opt. 9, 97 (1970).

59- N. Abramson, Appl. Opt. 10, 2155 (1971).

60- J.E. Sollid, Appl. Opt. 8, 1587 (1969).

61- Ref. 51.

62- S.K. Dhir and J.P. Sikora, Exp. Mech. 12. 323 (1972).

63- A. Sciammarella and T.Y. Chang, Exp. Mech. 14, 217 (1974).

64- C.A. Sciammarella and J.A. Gilbert, Appl. Opt. 12, 1951 (1973).

65- F.D. Adams and G.E. Maddux, Appl. Opt. 13, 219 (1974).

66- R.J. Rasia y H.M. Acosta, "Banco Holográfico", Memorias del Segundo Coloquio sobre Métodos de Análisis Experimental de Tensiones, Córdoba (1975).

67- O.C. Zienkiewicks, "The Finite Element Method in Structural and Continuum Mechanics", Mc Graw-Hill, London (1967).

68- J.H. Argyris, "Energy Theorems and Structural Analysis", Mc-Graw-Hill, London (1973).

69- J. Robinson, "Integrated Theory of Finite Elements Methods", John Wiley & Sons, London (1973).

70- I.S. Sokolnikoff, "Mathematical Theory of Elasticity", Mc-Graw-Hill, New York (1956).

71- J.R. Orengo, "Método de los elementos finitos-Programa CEPEF-Sistema de Computación IBM 1130", Publicación del Centro de Computación de la Universidad Nacional de Rosario, Rosario (1973).