Biblioteca Digital
F C E N - U B A

BIBLIOTECA CENTRAL LUIS F LELOIR
BIBLIOTECA CENTRAL LELOIR
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES UBA

Tesis de Posgrado

Simulación numérica de la convección seca y análisis de las perturbaciones del campo de la presión

Nuñez, Mario Néstor

1977

Tesis presentada para obtener el grado de Doctor en Ciencias Meteorológicas de la Universidad de Buenos Aires

Este documento forma parte de la colección de tesis doctorales y de maestría de la Biblioteca Central Dr. Luis Federico Leloir, disponible en digital.bl.fcen.uba.ar. Su utilización debe ser acompañada por la cita bibliográfica con reconocimiento de la fuente.

This document is part of the doctoral theses collection of the Central Library Dr. Luis Federico Leloir, available in digital.bl.fcen.uba.ar. It should be used accompanied by the corresponding citation acknowledging the source.

Cita tipo APA:
Nuñez, Mario Néstor. (1977). Simulación numérica de la convección seca y análisis de las perturbaciones del campo de la presión. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad de Buenos Aires. http://digital.bl.fcen.uba.ar/Download/Tesis/Tesis_1541_Nunez.pdf

Cita tipo Chicago:
Nuñez, Mario Néstor. "Simulación numérica de la convección seca y análisis de las perturbaciones del campo de la presión". Tesis de Doctor. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad de Buenos Aires. 1977.
http://digital.bl.fcen.uba.ar/Download/Tesis/Tesis_1541_Nunez.pdf

EXACTAS UBA
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales

UBA
Universidad de Buenos Aires

Dirección: Biblioteca Central Dr. Luis F. Leloir, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Universidad de Buenos Aires. Intendente Güiraldes 2160 - C1428EGA - Tel. (++54 +11) 4789-9293

Contacto: digital@bl.fcen.uba.ar

MAO

SIMULACION NUMERICA DE LA CONVECCION

UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

Buenos Aires, 9 de septiembre de 1977.-

En la fecha, la Sub-Comisión de Doctorado del Departamento de Ciencias Meteorológicas, presentó a este Departamento dos (2) ejemplares del trabajo de Tesis realizado por el Licenciado MARIO NESTOR NUÑEZ, a sus efectos.

Buenos Aires, 10 de septiembre de 1977.-

VISTO, pase al Jurado designado a fin de que se sirva considerar el presente trabajo de Tesis.

DRA. J. D. ALVAREZ ALONSO
PROSECRETARIA ACADEMICA

Buenos Aires, 20 de septiembre de 1977.-

En la fecha, el Jurado designado procedió a considera la Tesis presentada por el Licenciado MARIO NESTOR NUÑEZ, resolviendo aceptarla, quienes firman de conformidad más arriba

1541

SIMULACION NUMERICA DE LA CONVECCION SECA Y ANALISIS DE LAS PERTURBACIONES DEL CAMPO DE LA PRESION

Mario Nestor NUÑEZ

Departamento de Meteorología
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Universidad Nacional de Buenos Aires

Agosto 1977

15411

RESUMEN

En este trabajo se ha desarrollado un modelo numérico bidimensional, con el objeto de estudiar el efecto de los factores dinámicos y termodinámicos en la evolución de un elemento convectivo. El modelo es no divergente, con simetría rectilínea y representa la evolución de una burbuja más caliente, cuando es introducida en un fluído con estabilidad neutral y en reposo.

El sistema modela la convección chata en la atmósfera, en el sentido que la escala vertical del movimiento, es pequeña comparada con la altura de la atmósfera de referencia. Por otro lado, el modelo no considera la presencia del agua en ninguna de sus fases, lo que implica que la convección es seca. Es válida la aproximación de Boussinesq.

Se tomaron como base las ecuaciones que para la convección chata, aproximaron Ogura y Phillips y se adoptó un sistema de ecuaciones derivado que incluye, en otras, a las ecuaciones de vorticidad y divergencia. Esta última ecuación se retiene con el objeto de expresar explícitamente el campo de perturbación de la presión y evaluarlo cuantitativamente. Se realizaron en total cinco experimentos numéricos, considerando en cada uno de ellos la presencia o no de la mezcla con el entorno, además de la inclusión de una fuente de calor variable con el tiempo.

Se estudió la energética del modelo y se verificó la consistencia del mismo. Se analizó la evolución del campo de movimiento como así también, la evolución de las perturbaciones en los campos térmico y bárico. Se estudió el efecto del campo térmico y del campo de movimiento sobre el campo de perturbación de la presión. Los resultados señalaron que el campo de movimiento, pasa a ser dominante a medida que transcurre el tiempo.

Se evaluó, además, el orden de magnitud de las fuerzas debidas al gradiente de presión y al empuje ascensional ("buoyancy"), en la ecuación vertical de movimiento. Se comprobó que ambos términos tienen igual orden de magnitud y por lo tanto, el término del gradiente de presión debe ser retenido en la formulación de los modelos de convección.

I N D I C E

		Pág.
1.	INTRODUCCION	1
	1.1 Introduccion y Revisión Bibliográfica . . .	1
	1.2 Objetivos de estudio y Modelo Propuesto . .	7
2.	SUPOSICIONES Y ECUACIONES BASICAS	8
	2.1 Suposiciones Básicas	8
	2.2 Ecuaciones Fundamentales	8
	2.3 Aproximación del Sistema de ecuaciones . .	10
	2.4 Condiciones de Contorno e Iniciales	17
	2.5 Condiciones Integrales de Energía	19
3.	CONSIDERACIONES NUMERICAS	21
	3.1 Resolución del Sistema de Ecuaciones . . .	21
	3.2 Esquemas de Diferencias finitas	21
	3.3 Estabilidad de las Ecuaciones Discretizadas	22
4.	EXPERIMENTOS NUMERICOS Y ANALISIS DE LOS RESULTADOS	24
	4.1 Experimentos Numéricos	24
	4.2 Estudio de la Energética del Modelo	27
	4.3 Análisis de los campos de perturbación de temperatura y movimiento	37
	4.4 Análisis del campo de perturbación de la presión	47
5.	CONCLUSIONES	57

CAPITULO 1

CONSIDERACIONES GENERALES

1.1 Introducción y Revisión Bibliográfica

El ciclo de vida de una nube cúmulus depende de un gran número de condiciones e interacciones atmosféricas, entre los que son de fundamental importancia los campos de temperatura y humedad, la mezcla dentro de la nube y entre la nube y su entorno, los movimientos de escala sinóptica, la naturaleza de los procesos microfísicos de la nube y los movimientos verticales inducidos por la topografía y el calentamiento diferencial en la superficie terrestre. Es decir que se está en presencia de un campo que alcanza un alto grado de complejidad, por efecto de la interacción entre distintas escalas del movimiento atmosférico.

Los estudios experimentales primero y los teóricos basados en la simulación numérica después, se han convertido en una herramienta eficaz para mostrar los efectos que producen las variaciones en las condiciones señaladas anteriormente, sobre un modo singular de movimiento atmosférico: la convección.

Hasta el presente, se han realizado numerosos trabajos relacionados con el ciclo de vida de un elemento convectivo y en los últimos veinte años se intensificaron los esfuerzos para intentar "modelar" no sólo una nube cúmulus, sino que algunos trabajos se relacionan con líneas de inestabilidad (Ogura y Charney, 1960; Hane, 1973), brisa de mar y tierra (Fischer, 1961) y otros más ambiciosos simularon numéricamente hasta el desarrollo de un ciclón tropical (Kasahara, 1961).

En el caso de los cúmulus, los primeros modelos numéricos fueron unidimensionales, no dependientes del tiempo, e intentaron representar nubes no precipitantes. Posteriormente con los desarrollos logrados, fundamentalmente por Kessler (1969), en la parametrización de los procesos microfísicos de una nube se logró incluir la precipitación. Sin embargo, el concepto más elemental sobre convección boyante, es sin duda la teoría de la parcela. En esta teoría se supone que una parcela de aire saturado se eleva, desde su nivel de condensación, sin intercambiar calor, agua o cantidad de movimiento con su entorno. El nivel en el que la velocidad de la parcela se hace cero, se define como la altura del tope de la nube. En los procesos naturales las parcelas ascendentes se mezclan, total o parcialmente con el entorno, produciéndose un transporte vertical de calor antes de alcanzar el correspondiente gradiente adiabático. Por otra parte, los cálculos de energía cinética muestran que el método de la parcela da valores normalmente en exceso, sobreestimando los topes de las nubes.

La teoría de la parcela fué modificada por Bjerknes (1938), in

troduciendo la idea de que la cantidad de aire en movimiento en las corrientes ascendentes en los cúmulus, debe ser compensada por una masa igual de aire que desciende entre los mismos. El aire que desciende se calienta por compresión adiabática, disminuyendo de este modo el exceso de temperatura de la nube con respecto al entorno y en consecuencia el efecto de empuje ascencional. Sin embargo, esta modificación al método de la parcela en la práctica es poco utilizada, debido a la dificultad para determinar las áreas correspondientes a las corrientes verticales.

No sería aventurado afirmar en este momento, que la dinámica de los cúmulus inicia una nueva era en 1947, cuando Stommel introduce el concepto de arrastre ("entrainment") como una nueva modificación al método de la parcela. En un primer análisis Stommel mostró que una cantidad apreciable de aire del entorno, es arrastrado hacia adentro de los cúmulus en desarrollo y mezclado con el aire de las nubes. Posteriormente, las investigaciones realizadas entre otros por Austin y Fleisher (1948), comprobaron lo afirmado por Stommel. Por efecto del arrastre, el gradiente de temperatura y el contenido de agua líquida de la nube pueden modificarse apreciablemente, hasta el caso extremo de que en un entorno muy seco, un cúmulus no puede desarrollarse más allá de un cúmulus húmilis.

A partir de Stommel, se realizaron numerosos trabajos teóricos y observaciones tendientes a adquirir nuevos conocimientos sobre la convección atmosférica. Puesto que, no es objeto de este trabajo realizar una revisión exaustiva de las numerosas publicaciones dedicadas al tema en consideración, a continuación sólo se hace referencia a algunos de los trabajos más importantes.

Entre los distintos trabajos desarrollados tomando en cuenta el concepto de arrastre introducido por Stommel, se encuentra al de Houghton y Cramer (1951). Estos autores propusieron la representación de la nube mediante un cilindro en el cual, cuando se ha alcanzado un estado estacionario, una variación de la velocidad vertical con la altura produce una entrada horizontal de aire a través de las paredes del cilindro, por efecto del principio de continuidad de la masa. En este caso la proporción de aire que se mezcla, que está determinada por la humedad y estabilidad del entorno, ajusta la velocidad vertical.

Ludlam y Scorer (1953) introdujeron la teoría de que los elementos de convección activos en una nube cúmulus, son burbujas discretas o térmicas que se manifiestan por la intermitente formación de protuberancias semiesféricas en los topes de las nubes. Scorer realizó experiencias de laboratorio para estudiar el comportamiento de burbujas producidas mediante la introducción de un fluído boyante en un tanque de agua. Encontró que las burbujas se expanden siguiendo un camino cónico de acuerdo a la ley:

$$r = \alpha z \qquad (1.1)$$

En la expresión (1.1) r es el radio de la burbuja, z la altura desde la fuente de la burbuja hasta la burbuja y α es un coeficiente de ensanchamiento que además indica una medida de la proporción de mezcla. En cuanto a la velocidad vertical de la burbuja, estas experiencias mostraron que se cumple la siguiente ley:

$$W = C(g \bar{B} r)^{1/2} \qquad (1.2)$$

En (1.2) W es la velocidad de la burbuja, g la aceleración de la gravedad, $\bar{B}$ es el promedio del empuje ascensional y C es una constante. Los trabajos experimentales mostraron que la proporción de arrastre ("entrainment") es constante para un amplio rango de valores de la fuerza de empuje ascensional.

Malkus y Scorer (1955), midieron la velocidad de crecimiento de algunas torres que emergen en los topes de cúmulus aislados, encontrando que la relación (1.2) se cumple con bastante aproximación.

Morton y otros (1956), propusieron un mecanismo de arrastre diferente a los considerados anteriormente. Sobre la base de las ideas de Houghton y Cramer, postularon que el aire exterior al cilindro se mueve horizontalmente hacia el mismo y al penetrar en él, se produce una mezcla turbulenta con el aire del chorro ascendente. Esta mezcla es proporcional a la velocidad del chorro ascendente. La expresión para la variación del flujo de masa con la altura, cumple la siguiente relación:

$$\frac{d}{dz}(\pi r^2 w \rho) = 2\pi r \alpha w \rho_o \qquad (1.3)$$

donde α es el coeficiente de ensanchamiento para el chorro, ρ es la densidad del aire en el chorro ascendente y ρ_o es la densidad del aire exterior. A partir de experiencias de laboratorio, Morton encontró un valor para α en el caso de chorros continuos de $\alpha = 0{,}116$. Los modelos que se basan en el concepto del chorro continuo, utilizan como parámetro de arrastre ("entrainment") una aproximación de la expresión (1.3) que es la siguiente:

$$\frac{1}{M}\frac{dM}{dz} = \frac{2\alpha}{r} \qquad (1.4)$$

donde $\frac{1}{M}\frac{dM}{dz}$ es la proporción de cambio con la altura para la masa de aire M ; α y r tienen el mismo significado que en la expresión (1.3). En cambio Levine(1959) y Malkus (1960) encontraron que para los modelos que se basan en el concepto de la burbuja, el parámetro de arrastre cumple la siguiente relación:

$$\frac{1}{M}\frac{dM}{dz} = \frac{9}{32}\frac{K_2}{D} \qquad (1.5)$$

En (1.5) K_2 es una constante y D es el diámetro de la burbuja. Las expresiones (1.4) y (1.5) pueden ser escritas de modo tal que una única expresión represente la proporción de aire incorporado a la nube:

$$\frac{1}{M}\frac{dM}{dz} = \frac{K}{r} \qquad (1.6)$$

En la relación (1.6) r es el radio de la burbuja o del chorro ascendente, mientras que K es la constante adecuada para el modelo elegido como representación de la nube.

En 1961, Saunders realizó mediciones de los diámetros de torres que emergen desde los topes de nubes cúmulus, encontrando que éstas torres crecen siguiendo la relación (1.1) con un valor de $\alpha = 0,2$. Este valor para el coeficiente de ensanchamiento se aproxima notablemente a los valores obtenidos en las experiencias de laboratorio.

Entre los numerosos experimentos de simulación numérica que se llevaron a cabo con el objeto de estudiar la evolución de un elemento convectivo, merece destacarse el trabajo de Malkus y Witt (1959). El advenimiento de las computadoras electrónicas de alta velocidad, permitieron a estos autores realizar el primer intento para resolver el sistema de ecuaciones no lineales, que gobiernan la convección térmica en la atmósfera. Malkus y Witt estudiaron los campos de movimiento y temperatura, partiendo inicialmente de una configuración térmica para una burbuja boyante que fué introducida en un entorno en reposo y con estabilidad neutral e inestable (en experimentos distintos). Sus resultados fueron acordes con los que obtuvieron otros autores mediante experiencias de laboratorio y estudios teóricos. Sin embargo, los errores provenientes de los cálculos numéricos, inestabilizaron computacionalmente la evolución de la burbuja a los seis minutos aproximadamente. Es probable que la inestabilidad computacional que impidió un mayor tiempo en

la integración del trabajo de Malkus y Witt, sea del tipo no lineal estudiada por Phillips (1959).

Ogura y Charney (1960) realizaron un modelo numérico para estudiar el comportamiento dinámico de distintas formas de convección térmica, en una atmósfera condicionalmente inestable. En este modelo los autores filtraron las ondas acústicas y sólo permitieron la presencia de ondas gravitatorias como solución de las ecuaciones linealizadas. En los resultados de este trabajo se discute los experimentos numéricos para una línea de inestabilidad, mostrando su formación, intensificación y disipación.

Lilly (1962) simuló numericamente la evolución de un elemento convectivo mediante la utilización de un modelo bidimensional con simetría rectilínea. En este modelo, similar al de Malkus y Witt, fué posible controlar la inestabilidad no lineal mediante la introducción de fuerzas viscosas no lineales en forma explícita. De este modo fue posible extender los experimentos numéricos hasta los treinta minutos.

Ogura (1962) usó la aproximación de Boussinesq en un modelo numérico de convección con simetría axial, donde los efectos de la viscosidad fueron introducidos implicitamente a través del esquema de diferencias finitas utilizado. Como en el caso de Lilly, a Ogura le fué posible controlar la inestabilidad no lineal.

En 1962, Turner introdujo el concepto de que los elementos de convección son el producto de la combinación de las teorías de la burbuja y el chorro continuo. Squires y Turner (1962) utilizaron este concepto para desarrollar un modelo de la corriente ascendente de un cumulonimbus no precipitante. La integración numérica de éste modelo unidimensional estacionario, muestra en sus resultados la influencia del radio de la corriente ascendente sobre los distintos parámetros de la nube.

Nickerson (1965) estudió los efectos de una fuente constante de calor sobre el desarrollo de un elemento convectivo, resolviendo numéricamente un sistema de ecuaciones similar al que usaron Malkus y Witt. La utilización en los esquemas de diferencias finitas del Jacobiano de Arakawa (1962) le permitió extender los cálculos hasta diez minutos, estimando posible continuar la integración numérica sin que se desarrolle inestabilidad no lineal.

La inclusión de la precipitación en los modelos numéricos como los discutidos hasta aquí, requiere algunas parametrizaciones simplificatorias de los procesos microfísicos. Muchos investigadores utilizaron en sus modelos las técnicas de parametrización desarrolladas por Kessler (1969) para incluir la precipitación, tanto en modelos estacionarios como dependientes del tiempo. Kessler supuso que el proceso de conversión se unicia cuando el contenido de agua de la nube alcanza un valor crítico (umbral de conversión), convirtiéndose a agua de la pre-

cipitación en forma proporcional al exceso sobre el valor crítico. También supuso que las gotas de la precipitación se distribuyen según la ley exponencial inversa de Marshall-Palmer y además, supuso que las gotas caen con una velocidad terminal que corresponde a la gota cuyo diámetro es el diámetro promedio de la población. En cuanto al proceso de colisión, Kessler considera un proceso similar al concepto de colisión continua desarrollado por Langmuir (1948).

Entre los trabajos que utilizaron la parametrización de Kessler, se puede citar el de Weinstein y Davis (1968). Estos autores desarrollaron un modelo unidimensional estacionario integrando la ecuación vertical de cantidad de movimiento, la ecuación de energía y una ecuación de continuidad para el agua. Nuñez (1977) estudió el comportamiento de un modelo unidimensional y estacionario de convección, tomando en cuenta las variaciones impuestas a los parámetros que caracterizan la nube modelada por Davis y Weinstein. Este autor señala en sus conclusiones que el modelo utilizado presenta variaciones notables en sus resultados, cuando se modifican las constantes usadas en la parametrización de los procesos microfísicos.

Weinstein (1969) desarrolló un modelo unidimensional dependiente del tiempo, integrando ecuaciones similares a las utilizadas por Weinstein y Davis (con la diferencia que en este modelo las variables son también función del tiempo). En este trabajo la inclusión de la precipitación se realiza utilizando también la parametrización propuesta por Kessler.

Un modelo de convección chata con simetría axial fué desarrollado por Lee (1971), donde tomó en cuenta los efectos de las variaciones en la presión. Este autor redujo su modelo bidimensional a uno unidimensional, considerando que las variables seguían una distribución de una curva tipo campana en la dirección radial.

Ogura y Takahasi (1971) realizaron una simulación numérica del ciclo de vida de una célula de tormenta, utilizando la ecuación vertical de movimiento, la de continuidad de masa, la primera ley de la termodinámica e incluyeron en la microfísica de la nube los siguientes procesos: condensación de vapor de agua, conversión de las gotas de nube a gotas de lluvia, glaciación, sublimación de vapor de agua, fusión de cristales de hielo, evaporación de gotas de nube, evaporación de gotas de lluvia, evaporación de cristales de hielo y evaporación de los cristales de hielo que se funden. Los resultados de este trabajo mostraron que, con la inclusión de los procesos microfísicos, varios aspectos de los tres estados de una tormenta (Byers y Braham, 1949) llegan a ser simulados cualitativamente por el modelo.

Murray y Koening (1972) recurrieron a la simulación numérica para estudiar la relación entre los procesos dinámicos y microfísicos

en la convección, utilizando un modelo bidimensional. Por otro lado, Miller y Pearce (1974) desarrollaron un modelo tridimensional para simular los procesos convectivos en un cumulonimbus. Estos autores integraron las ecuaciones primitivas, utilizando como coordenada vertical la presión en lugar de la altura.

1.2 Objetivos de este Estudio y Modelo Propuesto

El objetivo de este trabajo es estudiar el efecto de los factores dinámicos y termodinámicos en la evolución de un elemento convectivo, mediante un modelo numérico bidimensional de convección térmica.

El modelo propuesto es no divergente, con simetría rectilínea y representa la evolución de una burbuja más caliente (ó térmica), cuando la misma es introducida en un fluído con estabilidad neutral y en reposo. Esta térmica se utiliza para idealizar el comportamiento de la convección seca en la atmósfera, cuando se desarrolla muy próxima a la superficie terrestre.

Tomando como base las ecuaciones para la convección chata que aproximaran Ogura y Phillips (1962), se adopta un sistema de ecuaciones derivado que incluye, entre otras, a las ecuaciones de vorticidad y de divergencia. Esta última ecuación se retiene como una ecuación agregada al sistema, con el objeto de expresar explícitamente el campo de perturbación de la presión y evaluarlo cuantitativamente. La inclusión en la ecuación de la energía termodinámica de calor no adiabático (como una función del tiempo y del espacio), idealiza el tipo de fenómeno que aparece en la atmósfera, cuando hay liberación de calor latente en la base de una nube cúmulus.

La carencia de observaciones especiales de ciertas variables atmosféricas y el número limitado de estaciones meteorológicas que obtienen información de la tropósfera inferior, son condiciones limitantes para encarar un estudio del movimiento en la pequeña escala atmosférica, sin apelar a la simulación numérica del mismo. Por otra parte, si bien es deseable el desarrollo de modelos más complejos, puesto que los sistemas convectivos (como las nubes cúmulus) están definidos claramente en tres dimensiones, los elevados requerimientos computacionales que los modelos tridimensionales presentan y la no disponibilidad de las facilidades necesarias, obliga a recurrir a modelos más simples.

Teniendo en cuenta las consideraciones anteriores, es que se ha desarrollado un modelo bidimensional dependiente del tiempo en el cual, el campo de perturbación de la presión se expresa explícitamente.

CAPITULO 2

SUPOSICIONES Y ECUACIONES BASICAS

2.1 Suposiciones Básicas

En el presente modelo se hacen suposiciones simplificatorias, con el objeto de facilitar y circunscribir éste estudio a los objetivos específicos del mismo. Las suposiciones hechas se indican a continuación:

1- El movimiento, que se desarrolla en un plano vertical, es no divergente y con simetría rectilínea.

2- No se toman en cuenta las posibles variaciones del flujo, en la dirección normal al plano del movimiento.

3- El entorno del movimiento considerado, se encuentra en reposo, en equilibrio hidrostático y en condiciones de estabilidad neutral, sin cambiar con el tiempo.

4- Es válida la aproximación de Boussinesq.

5- El movimiento en consideración es de convección chata. Es decir, la escala vertical del movimiento es pequeña, comparada con la altura de la atmósfera de referencia o estado básico.

6- Debido a los conocimientos limitados que existen, sobre los procesos de mezcla turbulenta entre la nube y su entorno, los coeficientes cinemáticos de turbulencia para la cantidad de movimiento y calor se consideran iguales y constantes.

7- La convección es seca. Es decir, no se considera la presencia del agua en ninguna de sus fases y la ecuación de continuidad es sólo para el aire seco.

2.2 Ecuaciones Fundamentales

Las ecuaciones fundamentales para la descripción de los procesos convectivos en la atmósfera, se derivan de las leyes que gobiernan el movimiento, la conservación de la masa y los principios de la termodinámica para un gas ideal.

Teniendo en cuenta que, dentro de la pequeña escala en la atmósfera (Ogura, 1963), el ciclo de vida de los elementos convectivos es mucho menor que la duración de un día solar, las ecuaciones referidas al movimiento se expresan en un sistema de coordenadas no rotante. De este

modo y considerando el coeficiente cinemático de turbulencia constante, la ecuación de movimiento se expresa:

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = -\alpha \nabla p - g\vec{k} + K\nabla^2\vec{v} \qquad (2.1)$$

En (2.1) $\vec{v}$ es la velocidad tridimensional, g es la aceleración de la gravedad, K el coeficiente cinemático de turbulencia, p es la presión, α el volumen específico del aire, t el tiempo y $\vec{k}$ el vector unitario en la dirección vertical.

La ecuación de continuidad, que se obtiene del principio de conservación de la masa, es:

$$\frac{1}{\alpha}\frac{\alpha}{dt} = \nabla . \vec{v} \qquad (2.2)$$

Una expresión combinada del primer y segundo principio de la termodinámica, se utilizará como ecuación de energía:

$$ds = Cp\, d\ln T - R\, d\ln p = d(Cp \ln\theta) \qquad (2.3)$$

$$S = Cp \ln T + \text{constante} \qquad (2.4)$$

En (2.3) y (2.4) S es la entropía específica, Cp el calor específico a presión constante, T es la temperatura del aire, θ es la temperatura potencial del aire y R es la constante de los gases para el aire seco.

Teniendo en cuenta que se supone al aire atmosférico como un gas ideal, se cumple para las variables termodinámicas la siguiente relación:

$$p\alpha = RT \qquad (2.5)$$

Como puede observarse, las ecuaciones (2.1), (2.2), (2.3) y (2.5) forman un sistema cerrado de ecuaciones diferenciales, con respecto a las variables $\vec{v}$, p, α y T.

2.3 Aproximación del Sistema de ecuaciones

Muchos investigadores han trabajado en el planteamiento de un sistema de ecuaciones, derivado de las ecuaciones básicas o fundamentales, con el objeto de obtener una aproximación exclusiva para el movimiento de una determinada escala de la atmósfera. En la escala del movimiento que nos ocupa, la pequeña escala, es posible citar varios trabajos que se refieren a ecuaciones aproximadas para gases y líquidos. Entre ellos podemos citar al de Batchelor (1953), al de Spiegel y Veronis (1960), Ogura y Phillips (1962) y Dutton y Fichtl (1969).

En el estudio de la convección térmica, es de práctica frecuente simplificar las ecuaciones básicas adoptando la aproximación de Boussinesq. La esencia de esta aproximación puede resumirse como sigue: 1) Las fluctuaciones en la densidad del fluído, que aparecen como un producto del campo de movimiento, son el resultado de efectos térmicos. 2) En las ecuaciones las variaciones en la densidad son despreciadas, excepto cuando las mismas están asociadas a la aceleración de la gravedad en la fuerza de empuje ascensional. Spiegel y Veronis, señalan en su trabajo que los efectos de viscosidad y conducción de calor deben ser retenidos, cuando el sistema de ecuaciones posee la forma general de un sistema incompresible de Boussinesq.

Aunque, en general, las aproximaciones obtenidas por los distintos autores citados son similares y equivalentes, en nuestro caso particular tomamos como base el sistema que, mediante un análisis de escala, obtuvieron Ogura y Phillips para la convección profunda y chata en la atmósfera. Este sistema aproximado de ecuaciones, será ligeramente modificado con el objeto de permitir en el modelo el intercambio turbulento.

Las suposiciones y el tratamiento empleado por Ogura y Phillips para derivar un sistema de ecuaciones aproximado para la convección, se exponen brevemente a continuación:
En el análisis se omiten los efectos moleculares tales como la viscosidad y conducción. Los movimientos están limitados verticalmente por dos planos paralelos separados por una distancia vertical d y se supone que la variación relativa de la temperatura potencial es pequeña:

$$\varepsilon = \frac{\Delta\theta}{\theta} \sim 0{,}1 \qquad (2.6)$$

Además, la escala de tiempo (τ) para el movimiento se toma como la inversa de la frecuencia de Brunt-Väisälä. En estas condiciones, para la convección profunda, es $d \sim 10$ Km y por lo tanto $\tau \sim 100$ segundos.

En las ecuaciones básicas, la presión es reemplazada por la variable adimensional π :

$$\pi = \left(\frac{p}{P}\right)^{\varkappa} \qquad (2.7)$$

donde P es una presión de referencia (por ejemplo, 1000 mb) y $\varkappa$ es la relación entre la constante de los gases para el aire y el calor específico a presión constante ($\varkappa = \frac{R}{Cp}$) . El uso de esta forma adimensional de la presión, tiene la ventaja de reemplazar en las ecuaciones a la densidad (o volumen específico) por la temperatura potencial θ , a través de la relación:

$$\alpha \nabla p = Cp\,\theta\,\nabla\pi \qquad (2.8)$$

El sistema de ecuaciones básicas es escrito en forma adimensional y cada una de las variables adimensionales, tanto dinámicas como termodinámicas, es reemplazada por una expansión en serie de potencias de ε :

$$\begin{aligned}
\vec{v}' &= \vec{v}'_0 + \varepsilon\vec{v}'_1 + \varepsilon^2\vec{v}'_2 + \ldots \\
w' &= w'_0 + \varepsilon w'_1 + \varepsilon^2 w'_2 + \ldots \\
\pi &= \pi_0 + \varepsilon\pi_1 + \varepsilon^2\pi'_2 + \ldots \\
\theta' &= 1 + \varepsilon\theta'_1 + \varepsilon^2\theta'_2 + \ldots
\end{aligned} \qquad (2.9)$$

La retención de los términos de orden cero en la ecuación de continuidad y de los términos de primer orden en las ecuaciones de movimiento (horizontal y vertical) y de energía termodinámica, conduce al sistema de ecuaciones aproximado para la convección profunda. Este sistema es designado inelástico, por cuanto en las condiciones integrales de energía falta el término correspondiente a la energía elástica.

Cuando se toma en cuenta que la escala vertical del movimiento (d) es pequeña, comparada con la altura (H) de la atmósfera de referencia, es decir $\beta = \frac{d}{H} << 1$, es posible una nueva aproximación válida para la convección chata ($d \sim 1$ Km). En este caso, las varia-

bles en las ecuaciones inelásticas son reemplazadas por expansiones en serie de potencias de β :

$$\pi_0 = \pi_{00} + \beta\pi_{01} + \beta^2\pi_{02} + \ldots$$

$$\pi_1 = \pi_{10} + \beta\pi_{11} + \beta^2\pi_{12} + \ldots$$

$$\vec{v}_0' = \vec{v}_{00}' + \beta\vec{v}_{01}' + \beta^2\vec{v}_{02}' + \ldots \qquad (2.10)$$

$$w_0' = w_{00}' + \beta w_{01}' + \beta^2 w_{02}' + \ldots$$

$$\theta_1' = \theta_{10}' + \beta\theta_{11}' + \beta^2\theta_{12}' + \ldots$$

La retención de los términos de orden cero en la ecuación de continuidad y en la ecuación de energía, y los términos de orden uno en las ecuaciones horizontal y vertical de movimiento, conduce a un sistema de ecuaciones aproximado para la convección chata. Este sistema es designado como inelástico Boussinesq y para el caso del aire seco, puede escribirse con las variables dimensionadas (Ogura, 1963) como sigue:

$$\frac{d\vec{v}_H}{dt} = -Cp\ \Theta\ \nabla_H \pi^* \qquad (2.11)$$

$$\frac{dw}{dt} = -Cp\ \Theta\ \frac{\partial \pi}{\partial z}^* + g\ \frac{\theta}{\Theta}^* \qquad (2.12)$$

$$\nabla_H \cdot \vec{v}_H + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \qquad (2.13)$$

$$\frac{1}{\Theta}\ \frac{d\theta}{dt}^* = 0 \qquad (2.14)$$

Las ecuaciones (2.11) a (2.14) poseen la forma general de un sistema incompresible de Boussinesq. Antes de hacer referencia al significado de las variables que aparecen en el sistema de ecuaciones de

Ogura y Phillips para la convección ohata, modificaremos ligeramente el mismo para adecuarlo a las suposiciones del modelo propuesto.

En primer lugar, la inclusión de una fuente de calor variable, nos obliga a modificar la ecuación de energía termodinámica (2.14) con el agregado de un término correspondiente a calor no adiabático. Esta modificación fué prevista en el trabajo de Ogura y Phillips.

En segundo lugar, teniendo en cuenta las consideraciones de Spiegel y Veronis, agregaremos al sistema (2.11) a (2.14) los términos correspondientes a los efectos de intercambio turbulento.

Por último, para limitar el movimiento a un plano vertical, como fué supuesto en el punto 2.1, solamente serán retenidas en el sistema de ecuaciones las componentes que corresponden a las direcciones x é y .

Con las consideraciones anteriores, el sistema aproximado de ecuaciones para este trabajo, es el siguiente:

$$\frac{du}{dt} = -Cp\,\Theta\,\frac{\partial \Pi}{\partial x}^{*} + K\nabla^2 u \qquad (2.15)$$

$$\frac{dw}{dt} = -Cp\,\Theta\,\frac{\partial \pi}{\partial z}^{*} + g\,\frac{\theta}{\Theta}^{*} + K\nabla^2 w \qquad (2.16)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \qquad (2.17)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\theta}{\Theta}^{*}\right) = \frac{Q}{\Theta} + K\nabla^2\left(\frac{\theta}{\Theta}^{*}\right) \qquad (2.18)$$

En el sistema anterior, que es un sistema cerrado con respecto a u , w , Π^* y * , las variables con supraíndice * son desviaciones con respecto a una atmósfera de referencia o estado básico.

Esta atmósfera de referencia está en equilibrio hidrostático y tiene una temperatura potencial uniforme e igual a Θ . La distribución de la presión adimensional y de la temperatura en el estado básico, es:

$$\pi_0(z) = 1 - \frac{g}{Cp\Theta}\,z \qquad (2.19)$$

$$T_0(z) = \Theta - \frac{g}{Cp}\,z \qquad (2.20)$$

Por lo tanto, las desviaciones se expresan como sigue:

$$\theta^* = \theta - \Theta$$

$$\pi^* = \pi - \pi_0 \qquad (2.21)$$

$$T^* = T - T_o$$

Por otra parte, Q es una función que representa al calor no adiabático, K es el coeficiente cinemático de turbulencia, u y w las componentes horizontal y vertical de la velocidad, respectivamente y ∇^2 es el laplaceano para el plano vertical:

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

La aproximación de orden cero en las variables termodinámicas, conduce a la siguiente relación dimensional que liga la temperatura y presión del estado básico:

$$T_0 = \Theta \pi_0$$

La misma aproximación anterior, conduce a la siguiente relación que liga a la presión con la presión adimensional del estado básico:

$$\pi_0 = \left(\frac{p_0}{P}\right)^{\varkappa}$$

En cambio, la aproximación de orden uno conduce a una relación equivalente a la ecuación de estado para un gas ideal, que liga las desviaciones de las variables termodinámicas:

$$\frac{T^*}{T_0} = \frac{\theta}{\Theta}^* + \frac{\pi}{\pi_0}^*$$

La aproximación de orden uno, además, conduce a la siguiente relación que liga las desviaciones de la presión, con y sin dimensiones:

$$\frac{\pi^*}{\pi_0} = \varkappa \frac{p^*}{p_0}$$

Con el objeto de simplificar la resolución numérica de las ecuaciones (2.15) a (2.18), teniendo en cuenta que el movimiento es bidimensional y no divergente, en lugar de las ecuaciones de movimiento usaremos la ecuación de vorticidad y una función corriente. Además, como uno de los objetivos de este trabajo es estudiar la evolución del campo de perturbación de la presión (es decir la desviación de la presión entre la térmica y su entorno), usaremos también la ecuación de la divergencia.

Usando las ecuaciones (2.15), (2.16) y (2.17) obtenemos las ecuaciones de vorticidad y divergencia:

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + u \frac{\partial \eta}{\partial x} + w \frac{\partial \eta}{\partial z} = - g \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\theta^*}{\Theta} \right) + K \nabla^2 \eta \qquad (2.22)$$

$$Cp\, \Theta\, \nabla^2 \pi^* = - 2 \left(\frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial z} \right) + g \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\theta^*}{\Theta} \right) \qquad (2.23)$$

En la (2.22) η es la componente de la vorticidad, en la dirección normal al plano del movimiento:

$$\eta = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \qquad (2.24)$$

Dado que está definida una función corriente, se cumple:

$$u = \frac{\partial \Psi}{\partial z} \qquad (2.25)$$

$$w = - \frac{\partial \Psi}{\partial x} \qquad (2.26)$$

$$\eta = \nabla^2 \Psi \qquad (2.27)$$

Introduciendo las relaciones (2.25) y (2.26) en las ecuaciones de vorticidad (2.22) y divergencia (2.23), obtenemos:

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = J(\Psi, \eta) - \frac{\partial B}{\partial x} + K\nabla^2\eta \qquad (2.28)$$

$$Cp\ \Theta\ \nabla^2\pi^* = 2\,J(u, w) + \frac{\partial B}{\partial z} \qquad (2.28^*)$$

En la (2.28) y (2.28*) B es la expresión del empuje ascensional:

$$B = g\,\frac{\theta}{\Theta}^*$$

Además, los Jacobianos están definidos como sigue:

$$J(\Psi,\eta) = \frac{\partial \Psi}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial z} - \frac{\partial \Psi}{\partial z}\frac{\partial \eta}{\partial x}$$

$$J(u,w) = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial z} - \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial w}{\partial x}$$

Las ecuaciones (2.18), (2.27) y (2.28) constituyen un sistema cerrado con respecto a las variables θ^* , Ψ y η . Por lo tanto, su resolución permite conocer la evolución de los campos de temperatura y movimiento para un elemento convectivo. Un sistema de ecuaciones similar fué utilizado, para la simulación numérica, por Malkus y Witt (1959) y también por Nickerson (1965).

En el presente trabajo, se resuèlve numéricamente el sistema formado por las ecuaciones (2.18), (2.27) y (2.28), junto con las tres ecuaciones señaladas como (2.25), (2.26) y (2.29). La resolución simultánea de las ecuaciones indicadas permitirá estudiar, además de los campos de temperatura y movimiento, los campos de presión y la energética del modelo. De este modo, el sistema de ecuaciones que en este trabajo será resuelto numéricamente, es el siguiente:

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = J(\Psi,\eta) - \frac{\partial B}{\partial x} + K\nabla^2\eta \qquad (2.29)$$

$$Cp\ \Theta\ \nabla^2\pi^* = 2J(u,w) + \frac{\partial B}{\partial z} \qquad (2.30)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = J(\Psi,\varphi) + \frac{Q}{\theta_0} + K\nabla^2\varphi \qquad (2.31)$$

$$\nabla^2\Psi = \eta \qquad (2.32)$$

$$u = \frac{\partial \Psi}{\partial z} \qquad (2.33)$$

$$w = -\frac{\partial \Psi}{\partial x} \qquad (2.34)$$

En la (2.31) se han introducido leves modificaciones de forma, con respecto a la (2.18). En este caso es:

$$\varphi = \frac{\theta}{\Theta}^*$$

$$J(\Psi,\varphi) = \frac{\partial \Psi}{\partial x}\frac{\partial \varphi}{\partial z} - \frac{\partial \Psi}{\partial z}\frac{\partial \varphi}{\partial \partial x}$$

2.4 Condiciones de Contorno e Iniciales

La ubicación de una perturbación inicial para la temperatura en el centro del plano vertical considerado y a una distancia de 100 metros por encima del suelo, junto a las condiciones de simetría rectilínea del modelo, nos permite la integración numérica de las ecuaciones (2.29) a (2.34) en uno de los dos semiplanos del plano vertical. Este semiplano, que será considerado como recinto para la integración numérica, se elige con dimensiones de 400 metros para el ancho y 600 metros para la altura.

La perturbación inicial o desviación de la temperatura con respecto a la temperatura de la atmósfera de referencia, se define por

la expresión:

$$\theta^* = \theta_0^* \cos\left(\frac{\pi x}{320}\right) \cos^2\left[\frac{\pi(z-100)}{400}\right] \qquad (2.35)$$

En la (2.35), $\theta_0^* = 0{,}5$ grados representa la desviación máxima de la temperatura. La perturbación inicial (2.35) está definida en la región determinada por las relaciones:

$$\theta^* \begin{cases} 0 \leqslant x \leqslant 160 \text{ metros} \\ 100 \leqslant z \leqslant 300 \text{ metros} \end{cases} \qquad \theta^* = 0 \text{ en el resto del recinto}$$

La expresión (2.35) es similar a la que usaron distintos investigadores, entre ellos Malkus y Witt y Nickerson.

En el presente trabajo, el calentamiento no adiabático, se introduce por la función:

$$Q(x,t) = Q_0 e^{-\alpha t} \cos\left(\frac{\pi x}{320}\right) \qquad (2.36)$$

Con el objeto de ubicar la fuente de calor en la base de la burbuja definida por (2.35), la función calentamiento (2.36) se define para $z = 100$ metros y para los siguientes valores de x :

$$0 \leqslant x \leqslant 160 \text{ metros}$$

Q es nulo para el resto del recinto; Q_0 y α son constantes en la (2.36).

La expresión (2.35) junto con la ecuación (2.30), define la perturbación inicial para la presión. En el instante inicial, además del estado básico, la perturbación está en reposo. Es decir, las componentes de la velocidad, la función corriente y la vorticidad son inicialmente nulas.

Resumiendo, las condiciones iniciales están dadas por:

$$\left.\begin{matrix} u \\ w \\ \psi \\ \eta \end{matrix}\right\} = 0 \qquad \left.\begin{matrix} \theta^* \\ Q \\ \pi^* \end{matrix}\right\} \neq 0$$

Las condiciones de contornó que se utilizan para la resolución numérica del modelo planteado, son las correspondientes a superficies lisas aisladas, es decir:

$$\left.\begin{aligned} w &= 0 \\ \frac{\partial u}{\partial z} &= 0 \\ \frac{\partial \varphi}{\partial z} &= 0 \\ \frac{\partial \pi^*}{\partial z} &= 0 \\ \eta &= 0 \\ \Psi &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \text{para } z = 0 \text{ y } z = 600 \text{ metros.}$$

$$\left.\begin{aligned} u &= 0 \\ \frac{\partial w}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial \pi^*}{\partial x} &= 0 \\ \eta &= 0 \\ \Psi &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \text{para } x = 0 \text{ y } x = 400 \text{ metros.}$$

2.5. Condiciones Integrales de Energía

El sistema de ecuaciones (2.15) a (2.18) constituye una aproximación consistente para las ecuaciones hidro-termodinámicas y por lo tanto cumple con condiciones integrales de energía. Esto es de suma importancia, por cuanto las integrales de energía hacen posible la des-

cripción de los procesos físicos involucrados en la convección, en términos de la energética. Por otro lado las integrales de energía sirven como control de la precisión en la integración numérica. Obviamente, si el sistema no cumpliera con una relación integral, la introducción de fuentes ficticias de energía conduciría a la destrucción del proceso convectivo (Haltiner, 1971).

Usando las ecuaciones (2.15), (2.16) y (2.17), obtenemos la integral para la energía mecánica total, que en condiciones de ausencia de fuentes o sumideros de calor y cantidad de movimiento, adopta la expresión siguiente:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_0^l \int_0^h \left[k - gz\varphi\right] dx\, dz = 0 \qquad (2.37)$$

En la (2.37), $k = \frac{1}{2}(u^2 + w^2)$, representa la energía cinética.

La condición integral para la energía interna, con las mismas condiciones señaladas para la (2.37), puede obtenerse a partir de las ecuaciones (2.17) y (2.18). La expresión es la siguiente:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_0^l \int_0^h \varphi^2\, dx\, dz = 0 \qquad (2.38)$$

La (2.37) y la (2.38) indican que la energía mecánica total por un lado y la energía interna total por otro lado, se conservan en ausencia de fuentes o sumideros de calor y cantidad de movimiento ($Q = 0$ y $K = 0$).

CAPITULO 3

CONSIDERACIONES NUMERICAS

3.1 Resolución del Sistema de Ecuaciones

Dado la imposibilidad de resolver analíticamente el sistema de ecuaciones (2.29) a (2.34), se recurre a la aproximación del mismo por un sistema de ecuaciones discretizadas. La discretización permite transformar el sistema de ecuaciones diferenciales en un sistema de ecuaciones algebraicas de resolución, en general, más accesible.

El sistema de ecuaciones (2.29) a (2.34) solo tiene dos ecuaciones de pronóstico, la (2.29) y la (2.31). Las cuatro ecuaciones restantes son de diagnóstico y permiten conocer la evolución de las variables involucradas en las mismas, conociendo los valores de vorticidad y temperatura para cada instante de tiempo.

La integración numérica del sistema de ecuaciones se lleva a cabo como sigue: Dada la distribución inicial para la temperatura θ^*, puede conocerse la distribución inicial para la presión π^* mediante la ecuación (2.30), teniendo en cuenta que inicialmente el sistema está en reposo. También con la distribución inicial de la temperatura θ^* , puede conocerse la vorticidad η para un instante posterior, mediante la ecuación (2.29). Con esta solución para la vorticidad y con el uso de la ecuación (2.32) puede conocerse la función corriente Ψ para el mismo instante. Para el mismo instante también, pueden conocerse los valores de la velocidad u y w , introduciendo los valores de la función corriente en las ecuaciones (2.33) y (2.34). Los valores de la función corriente se utilizan para hallar un nuevo valor de la temperatura θ^* , usando la ecuación (2.31). Este ciclo se repite hasta completar el tiempo total de integración deseado.

A efectos de la integración numérica en el plano definido para el modelo, se introduce una malla rectangular con un paso constante de 20 metros ($\Delta x = \Delta z = 20$ metros). Con este paso de malla, el semiplano de 400 x 600 metros está formado por 21 x 31 nudos, es decir por un total de 651 nudos.

3.2 Esquemas de Diferencias finitas

El sistema de ecuaciones utilizado en éste modelo, admite la posibilidad de ser aproximado a diferencias finitas por distintos esquemas. Estos esquemas presentan ventajas y desventajas y la elección del

más adecuado obliga a una solución de compromiso entre la exactitud de los resultados por un lado y los requerimientos de memoria y velocidad de computadora, junto a la estabilidad computacional, por el otro lado.

Siguiendo a Nickerson (1965) se eligió para las derivadas dependientes del tiempo un esquema centrado, excepto para el instante inicial que fué adoptado un esquema adelantado. Para todas las derivadas espaciales se eligió el esquema centrado y para la resolución de los Jacobianos en las ecuaciones (2.29), (2.30) y (2.31) se utilizó la aproximación del Jacobiano de Arakawa.

Las ecuaciones (2.30) y (2.32) presentan la forma general de una ecuación de Poisson y es ventajoso la resolución numérica, mediante el uso de las técnicas de aproximaciones sucesivas conocidas como métodos de relajación. En este trabajo se utilizó el Método de Relajación Acelerada (Liebmann acelerado), de convergencia más rápida que el método de Liebmann convencional (Ralston y Wilf, 1960).

En cuanto a las integrales de energía (2.37) y (2.38) fueron resueltas mediante una aproximación a sumatorias, empleando la regla de los trapecios compuesta bidimensional.

3.3 Estabilidad de las Ecuaciones Discretizadas

En el sistema (2.29) a (2.34), sólo dos ecuaciones incluyen como variable independiente al tiempo: la de vorticidad (2.29) y la termodinámica (2.31). En las mismas, la acumulación de errores provenientes del esquema de diferencias finitas elegido para la discretización, puede llegar a inestabilizar computacionalmente la resolución numérica, si el tiempo de integración es prolongado.

Las dos ecuaciones señaladas en el párrafo anterior, contienen un término de advección y uno de difusión. Según Haltiner (1971), la resolución numérica de ecuaciones con un término advectivo es computacionalmente estable, si se usa para discretizar las derivadas temporales y espaciales un esquema centrado (respetando el correspondiente criterio de estabilidad). En cambio, el uso de un esquema adelantado para el tiempo, desarrolla inestabilidad computacional. Por otro lado, las ecuaciones que contienen un término de difusión, son computacionalmente estables cuando se utiliza un esquema adelantado para el tiempo y centrado para las derivadas espaciales. Este mismo tipo de ecuaciones llega a ser inestable computacionalmente, si se recurre a un esquema centrado para el tiempo.

De las consideraciones anteriores se infiere que, cuando una ecuación contiene simultáneamente un término de advección y uno de difusión (como en nuestro caso), la decisión sobre la elección de un es-

quema adelantado o centrado es incompatible. Lo usual es usar un esquema centrado para las derivadas temporales y espaciales, evaluando el término de difusión en el paso de tiempo (n-1) , anterior al paso (n) correspondiente a la integración, en tanto que el término advectivo se calcula para el mismo paso (n) . Este criterio asegura la estabilidad computacional (Haltiner, 1971). Sin embargo, un criterio similar fué utilizado por Malkus y Witt (1959) en su experimento de simulación numérica y los cálculos no pudieron ser extendidos más de seis minutos. Las causas de esta inestabilidad, se debieron probablemente a que el criterio señalado es válido cuando el término advectivo es lineal. Esto puede ocurrir, por ejemplo, cuando u y w son constantes, pero esta condición no es frecuente en los movimientos atmosféricos. Por otra parte, el esquema centrado no conserva la energía cinética cuando se usa en términos advectivos y en consecuencia, los tiempos de integración prolongados conducen a inestabilidad de tipo no lineal.

Teniendo en cuenta las consideraciones anteriores, los términos advectivos en las ecuaciones (2.29) y (2.31) (además de la (2.30) fueron aproximados por el Jacobiano de Arakawa, que conserva el promedio del cuadrado de la energía cinética (Haltiner, 1971). Por otra parte, éste esquema elimina el tipo de inestabilidad no lineal que producen los esquemas más simples, cuando se extiende el tiempo de integración (Phillips, 1959).

El paso de tiempo fué elegido de tal forma que los cálculos fueran computacionalmente estables, a través del tiempo total de integración. Experimentalmente se encontró para éste modelo, que el paso de tiempo adecuado es constante e igual a 3 segundos.

CAPITULO 4

EXPERIMENTOS NUMERICOS Y ANALISIS DE LOS RESULTADOS

4.1 Experimentos Numéricos

Para determinar la temperatura potencial del estado básico o atmósfera de referencia, se analizaron los datos de radiosondeos realizados en Mendoza durante los meses de verano del año 1976. Se eligió esta región porque sus características geográficas y climáticas, determinan que la convección térmica sea marcadamente favorecida. Los radiosondeos fueron realizados a las 15.00 horas (Hora local) y la información de los mismos fué facilitada por el Servicio Meteorológico Nacional.

Con el objeto de representar las condiciones impuestas por la aproximación utilizada en el sistema de ecuaciones (atmósfera de referencia con estabilidad neutral), se eligieron los datos de aquellos radiosondeos que mostraron una capa de estabilidad neutral, de aproximadamente 3.000 metros sobre el suelo. De los distintos valores calculados para la temperatura potencial, se eligió el valor de $\Theta = 310°K$ como valor óptimo para la experimentación numérica. Cabe señalar aquí, que variaciones en la temperatura potencial de hasta 30° no produjeron variaciones sensibles en los resultados, con excepción de un desarrollo más lento en el sistema convectivo cuando se aumenta la temperatura potencial del estado básico.

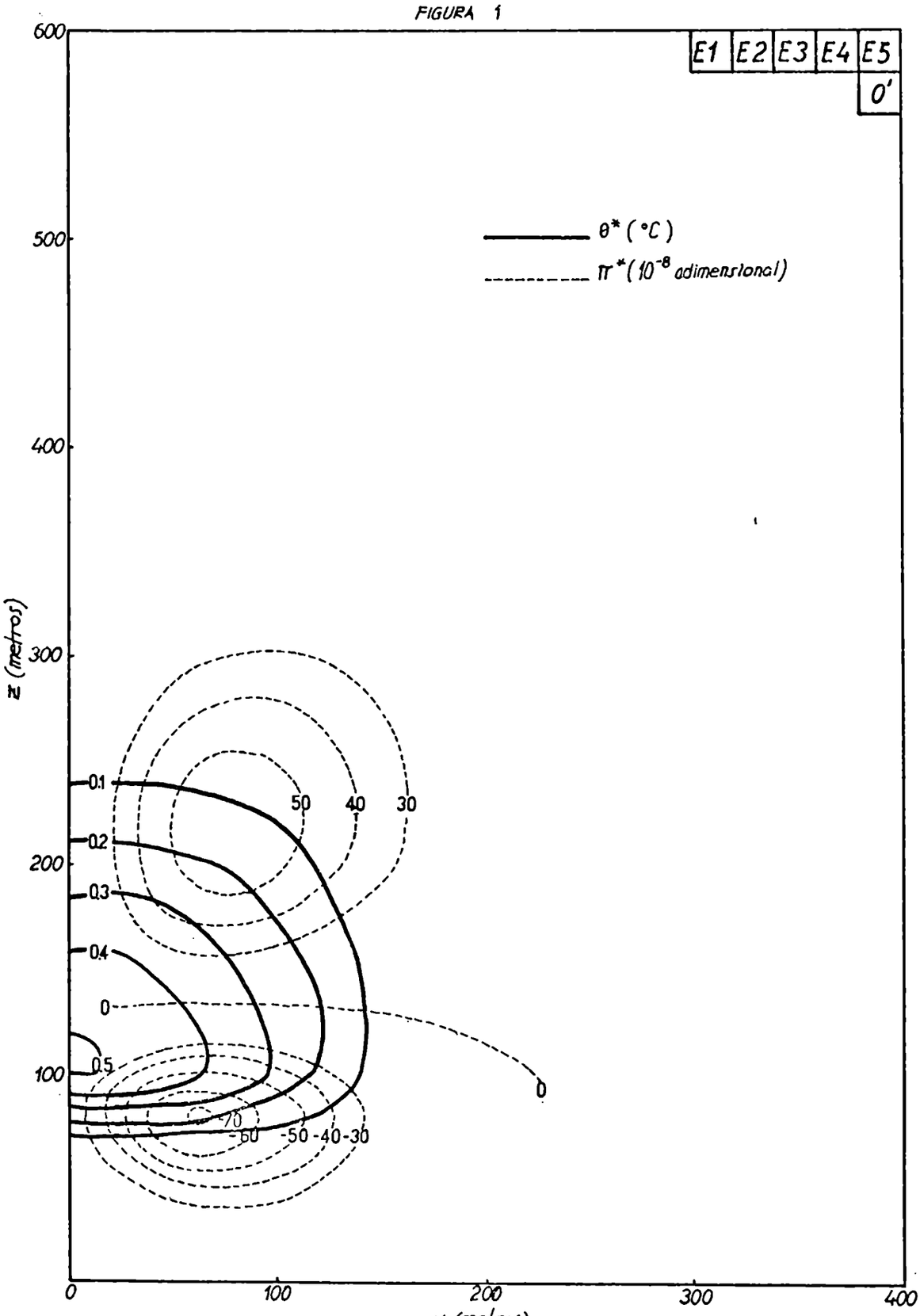
Cuando en la experimentación numérica se consideró la presencia de una fuente de calor y la mezcla turbulenta, se tomaron los siguientes valores para el coeficiente cinemático de turbulencia y el máximo calentamiento no adiabático: $K = 0{,}5\ m^2\ seg^{-1}$; $Q_o = 0{,}004°C seg^{-1}$.

En todos los experimentos realizados, se consideró la perturbación inicial para la temperatura potencial definida por la expresión (2.35). Esta distribución espacial para la temperatura, da como resultado una perturbación inicial para la presión a través de la relación (2.30). La representación gráfica de las perturbaciones de temperatura y presión en el instante inicial, se muestra en la Figura N° 1.

Cuando se tomó en cuenta la presencia de la fuente de calor no adiabático, la distribución espacial y temporal de la misma fué dada por la expresión (2.36). La Figura N° 2 muestra la representación de la función de calentamiento no adiabático, para un valor de $\alpha = 1{,}67 \times 10^{-3}$.

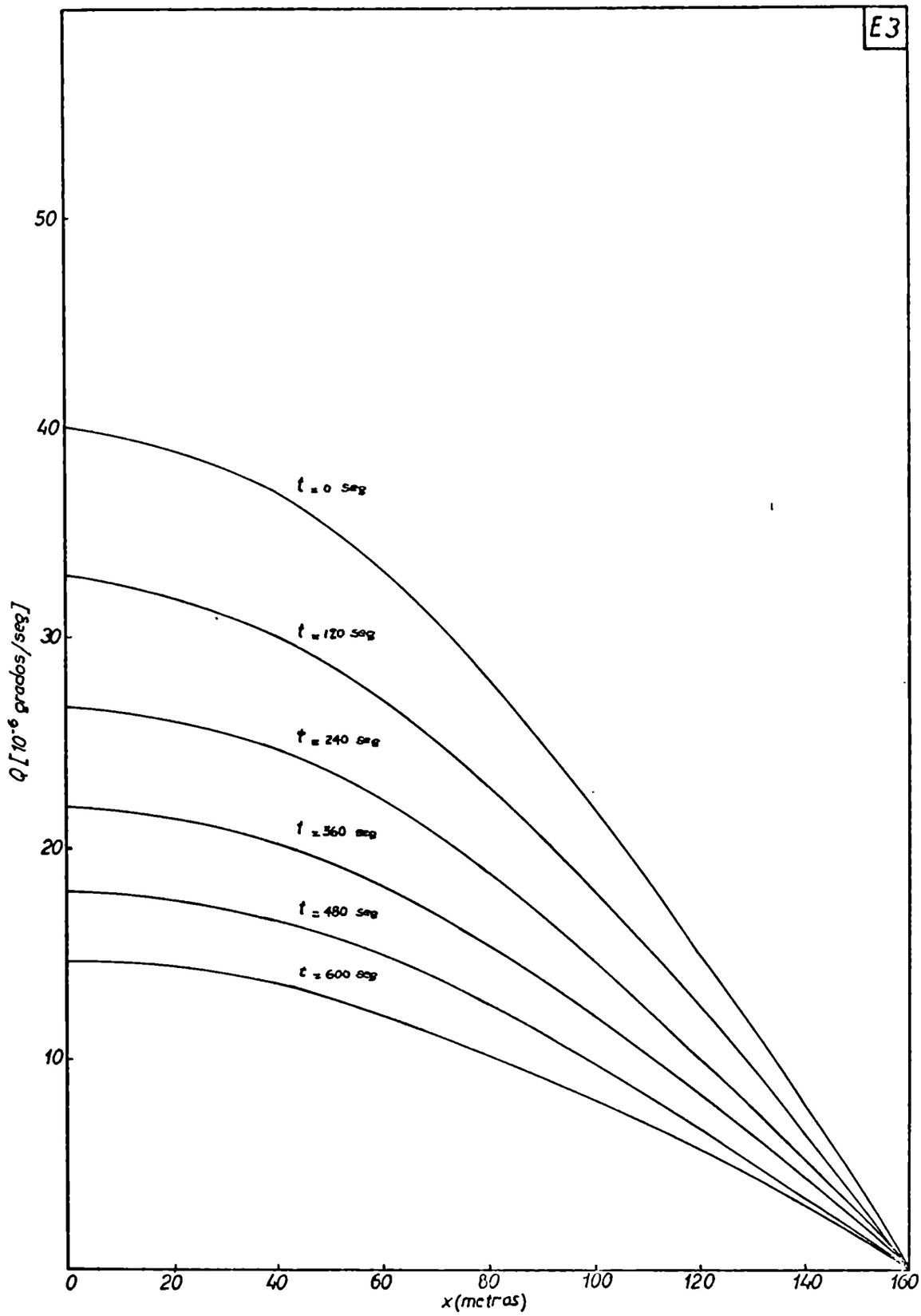
En total fueron realizados cinco experimentos numéricos con el objeto de simular la circulación y la evolución de un elemento convectivo. Estos experimentos se describen a continuación:

FIGURA 1



Perturbaciones iniciales de temperatura potencial (θ^*) y presión (π^*)

FIGURA 2



Variación espacial y temporal de la fuente de calor para $\alpha = 1.67 \times 10^{-5}$

E 1 . El primer experimento consiste en la resolución numérica de las ecuaciones (2.29) a (2.34), sin considerar calentamiento no adiabático y mezcla turbulenta ($Q_o = 0$ y $K = 0$) . El objetivo principal de éste experimento, es verificar el cumplimiento de las relaciones (2.37) y (2.38). La conservación de energía, asegura la consistencia del modelo y la precisión de los cálculos numéricos.

E 2 . El segundo experimento consiste en la resolución numérica de las ecuaciones (2.29) a (2.34), tomando en cuanta la mezcla turbulenta y la presencia de una fuente de calor constante. Este último requisito se obtiene haciendo $\alpha = 0$ en la expresión (2.36). Los objetivos principales de este experimento, son la comparación de resultados con los que obtuvieron otros investigadores y el estudio de la energética del modelo.

E 3 . El tercer experimento consiste en la resolución numérica de las ecuaciones (2.29) a (2.34), tomando en cuenta la mezcla turbulenta y la presencia de una fuente de calor variable. En este caso se toma $\alpha = 1{,}67 \times 10^{-3}$ en la expresión (2.36). Los resultados de este experimento se utilizan para el análisis de la evolución del elemento convectivo, en presencia de una fuente de calor variable y se comparan con los resultados que se obtuvieron en E 2 .

E 4 . El cuarto experimento es similar al anterior, E 3 , modificando el valor de α en la expresión (2.36). En este caso se toma $\alpha = 1{,}67 \times 10^{-2}$.

E 5 . El quinto y último experimento es similar al E 4 , excluyendo la mezcla turbulenta ($K = 0$). Sus resultados se comparan con los casos en que la mezcla fué permitida.

En los próximos puntos son analizados los resultados de los distintos experimentos numéricos.

4.2 Estudio de la Energética del Modelo

El comportamiento general del esquema usado para la resolución numérica de las ecuaciones del modelo, puede analizarse a través del cálculo de las integrales de energía (2.37) y (2.38). La Figura N° 3, que fué realizada con los resultados del experimento numérico E1, muestra las variaciones temporales de las integrales de energía cinética $\{k\}$, potencial disponible $\{P\}$ y la suma de estas dos $\{k - P\}$, que designamos como energía mecánica. Es decir:

$$\{k\} = \int_0^l \int_0^h k \, dx \, dz$$

$$\{P\} = \int_0^l \int_0^h g \, z \, \varphi \, dx \, dz$$

$$\{k - P\} = \int_0^l \int_0^h \left[k - gz\varphi\right] dx \, dz$$

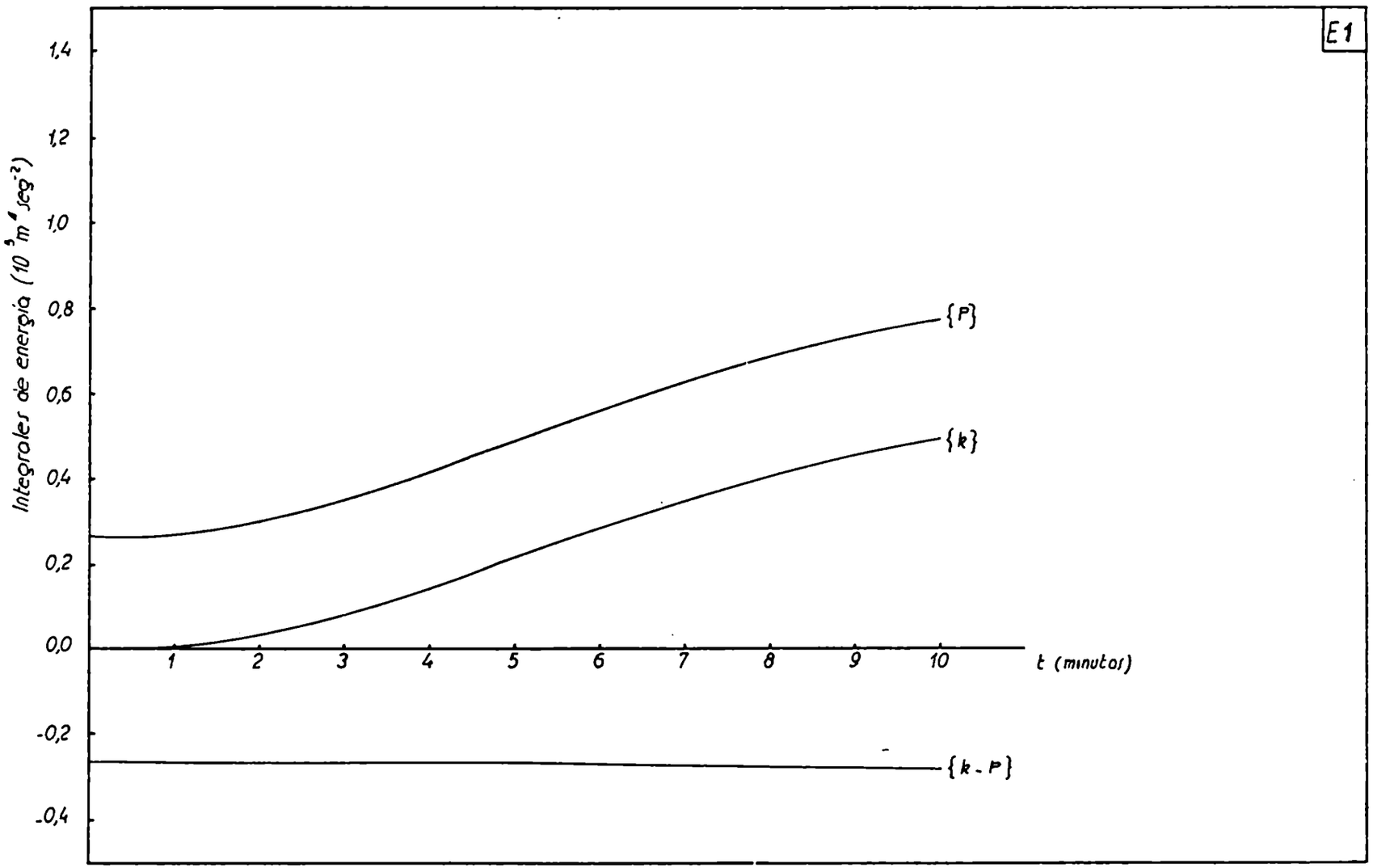
En la Figura N° 3, es posible observar que $\{k - P\}$ se conserva casi exactamente a través de todo el tiempo de integración, cuando en la experimentación numérica se consideró la ausencia de fuentes o sumideros de calor y cantidad de movimiento. Entre el valor inicial y final de la integral de energía mecánica, solo se observa una variación de 3,6%, aproximadamente. Este resultado es semejante al que obtuvo Nickerson (1965), excepto que en nuestro trabajo no se observan las oscilaciones en las integrales a través del tiempo que aparecen en el estudio citado. Estas oscilaciones aumentan la frecuencia en forma marcada, cuando cambia el paso de integración (Δt) en el tiempo. Cabe recordar que, en el presente trabajo, se eligió un paso de tiempo Δt constante para lograr la estabilidad computacional deseada.

Si se analiza en forma separada, la evolución temporal de las integrales de energía $\{k\}$ y $\{P\}$, se puede observar en la Figura N°3 que, inicialmente y por efecto de la distribución espacial en la perturbación de la temperatura, el sistema dispone de energía potencial para comenzar el movimiento adiabático. Una vez iniciado el movimiento, la energía cinética crece en forma casi estacionaria hasta los ocho minutos, disminuyendo a partir de ese instante la velocidad de crecimiento. La misma figura muestra que, la variación temporal de $\{P\}$ describe una curva prácticamente paralela a la correspondiente a $\{k\}$, lo que asegura la conservación de $\{k - P\}$. El cumplimiento de la condición integral (2.37) nos indica que, para un movimiento adiabático y sin mezcla turbulenta, la energía cinética crece cada vez que θ^* decrece para pequeños valores de z o cada vez que, θ^* crece para grandes valores de z.

En la Figura N° 4 puede observarse la evolución temporal de la integral de energía interna:

$$\{\varphi^2\} = \int_0^l \int_0^h \varphi^2 \, dx \, dz$$

FIGURA 3



Variación con el tiempo de {k}, {P} y {k-P} para el caso en que se consideró ausencia de fuente de calor y mezcla con el entorno (E1)

Esta integral se conserva también, casi exactamente, a través de todo el tiempo de integración cuando el experimento numérico (E1), no tomó en cuenta la presencia de la fuente de calor ni la mezcla con el entorno. En éste caso, la variación entre el valor final e inicial de $\{\varphi^2\}$, sólo fué del 0,9%. Este valor está por debajo del que fué obtenido por Nickerson y nuevamente no son observadas las oscilaciones que señalara el mencionado autor en su trabajo.

Los resultados del experimento numérico E1, indican el cumplimiento de las relaciones (2.37) y (2.38), cuando las fuentes o sumideros y la mezcla son omitidas. Por lo tanto, la energía del sistema convectivo, es conservada y de este modo se aseguran la consistencia del modelo y la precisión en los cálculos numéricos.

La Figura N° 5 muestra las variaciones temporales de $\{k\}$, $\{P\}$ y $\{k-P\}$ cuando se tomó en cuenta la presencia de una fuente de calor constante y la mezcla turbulenta con el entorno. En éste caso observamos que la suma de la energía cinética y potencial $\{k-P\}$, se disipa a velocidad casi constante y sostenida durante el tiempo de integración y como era de esperar, no se cumple la relación (2.37). En presencia de calor no adiabático y mezcla con el entorno, la expresión (2.37) es distinta de cero y su valor está dado por:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_0^l\int_0^h \left[k-gz\varphi\right]dx\,dz = -\frac{g}{\Theta}\int_0^l\int_0^h zQ\,dx\,dz +$$

$$+ K\int_0^l\int_0^h \left[\vec{v}\,.(\nabla.\nabla\vec{v}) - gz\nabla^2\varphi\right]dx\,dz \qquad (4.1)$$

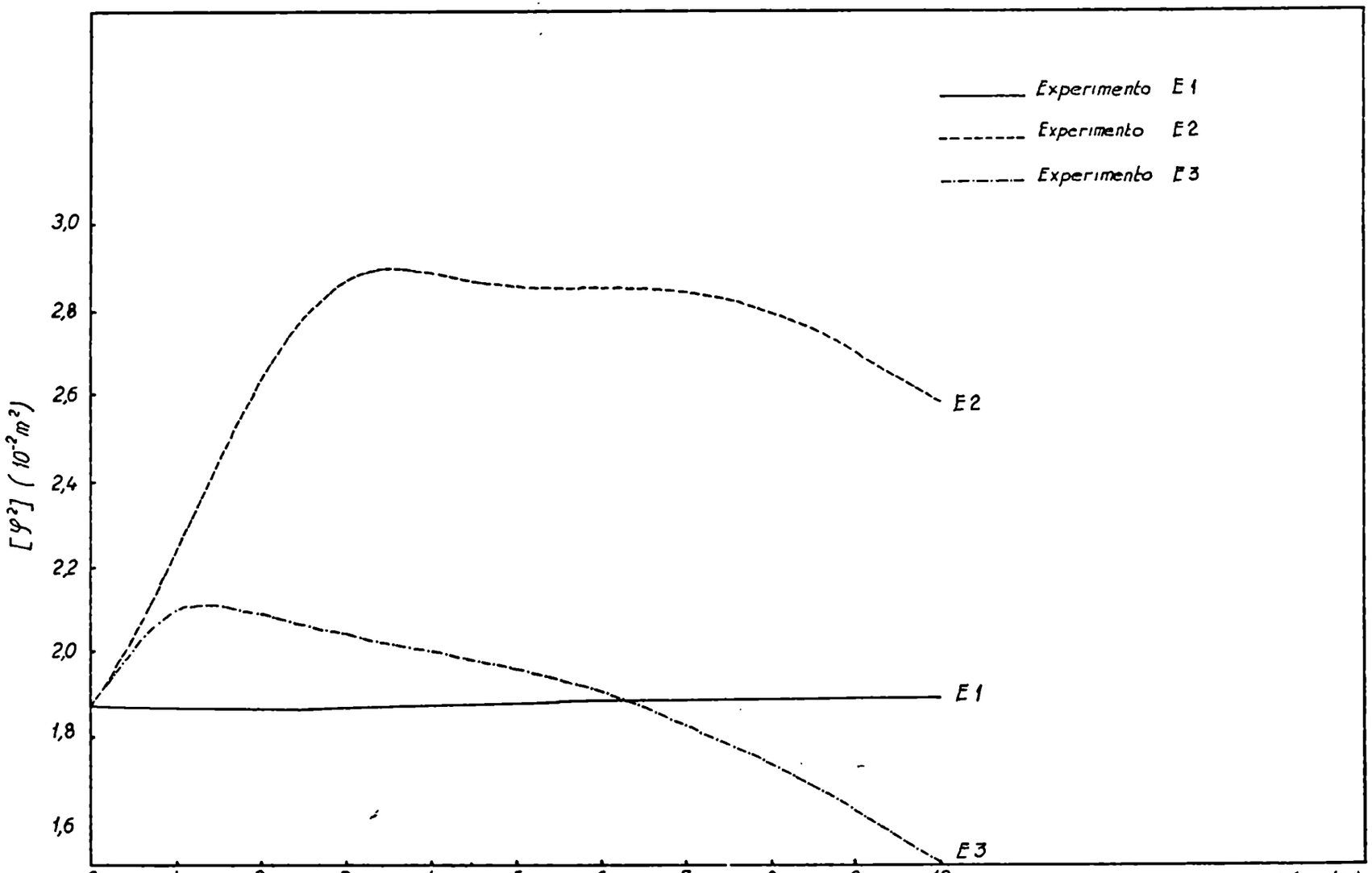
donde $\vec{v} = u\,\vec{i} + w\,\vec{k}$

En las mismas condiciones, la (2.38) se expresa como sigue:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_0^l\int_0^h \varphi^2 dx\,dz = \frac{2}{\Theta}\int_0^l\int_0^h \varphi Q\,dx\,dz + 2K\int_0^l\int_0^h \nabla^2\varphi\,dx\,dz \qquad (4.2)$$

De la disminución de $\{k-P\}$ con el tiempo como se observa en la Figura N° 5, se infiere que la segunda integral en el segundo miembro de la (4.1) prevalece y como resultado, la energía mecánica es disipada continuamente, a pesar de la fuente de calor constante. Esta fuente, de acuerdo a la (4.2), provoca un aumento de energía interna y

FIGURA 4



Variación con el tiempo de $[\varphi^2]$ para los casos en que se consideró ausencia de fuente de calor y mezcla (E1), inclusión de fuente constante y mezcla (E2) e inclusión de fuente variable y mezcla (E3)

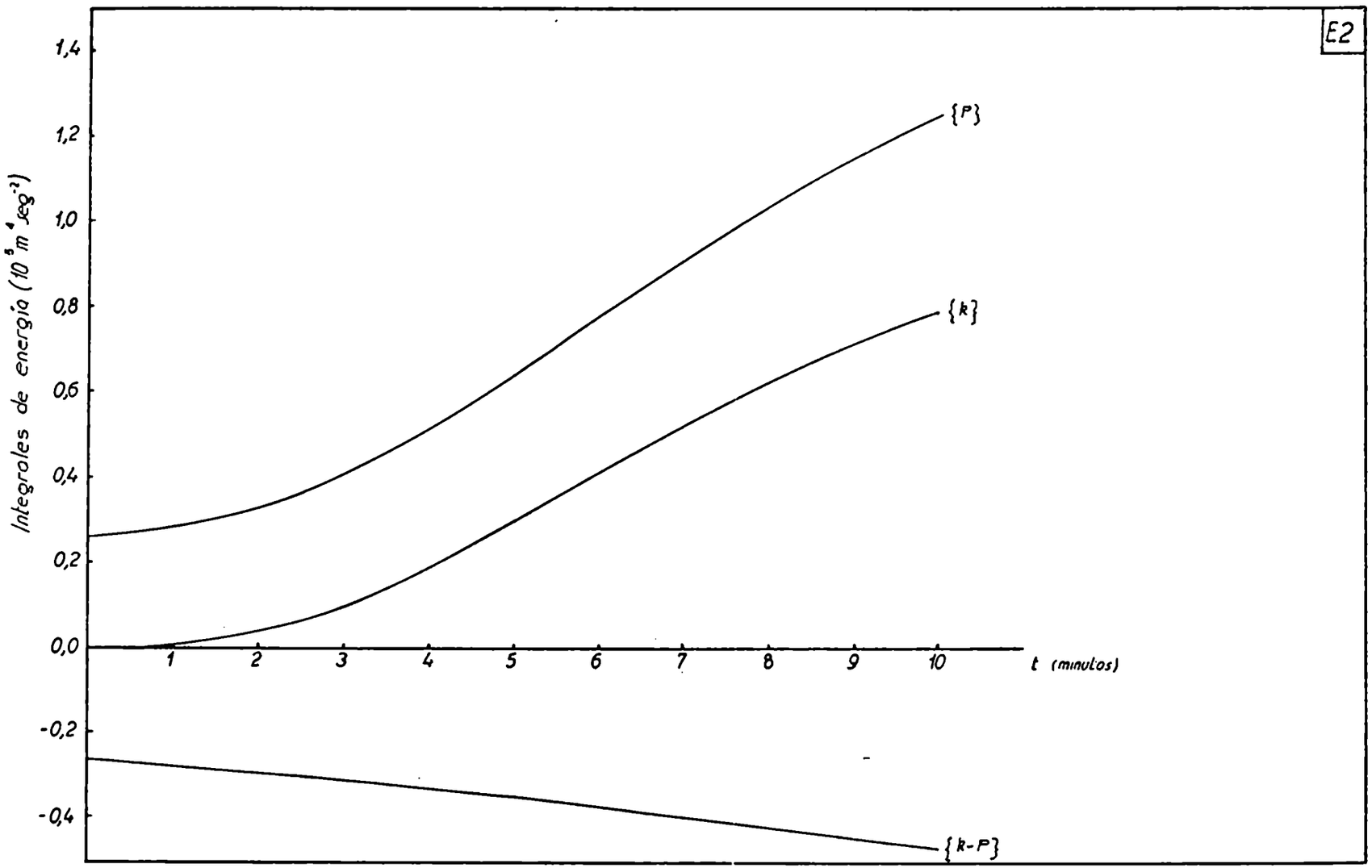
en consecuencia un aumento de la energía potencial. La transferencia continua de energía potencial en cinética, hace que {k} aumente con el tiempo en forma moderada (ver Figura N° 5) hasta los tres minutos y medio, intensificándose luego la relación de crecimiento de {k} hasta los ocho minutos. A partir de ese instante, el aumento de {k} se hace más moderado. El experimento E2, del cual se extrajeron los resultados de la Figura N° 5, como los experimentos restantes fué suspendido a los diez minutos, no habiendo comenzado aún la energía cinética a disminuir con el tiempo. En otras palabras, la integración numérica del modelo fué interrumpida cuando todavía la transferencia a energía cinética, aseguraba la continuación del movimiento.

En la Figura N° 4 se ha representado la variación con el tiempo de φ^2 , para las mismas condiciones señaladas en el párrafo anterior. Se puede observar que la energía interna crece en forma casi estacionaria, hasta los dos minutos y medio. A partir de ese instante y hasta los tres minutos y medio, tiempo en que se alcanza el máximo valor, el crecimiento es más moderado. A continuación, la disminución de energía interna se produce lentamente hasta llegar a los siete minutos y medio, iniciándose luego una disipación notoriamente sostenida hasta finalizar el tiempo total de integración.

Si se comparan las Figuras n° 3 y 5, es posible notar que, en ausencia de calor no adiabático y mezcla, el valor final alcanzado por {k} se redujo en 38% con respecto al que se alcanzó en presencia de fuente de calor constante y mezcla turbulenta. Este resultado es similar al que Nickerson obtuviera en su trabajo. La comparación de los resultados en los mismos experimentos (E1 y E2), muestran para {P} una reducción de 38,4%. Si se toma en cuenta la suma de energía cinética y potencial {k - P} , se observa que la disipación alcanzó al 42,6% con respecto al valor constante en el experimento sin fuente y sin mezcla turbulenta. Por otro lado, la Figura N° 4 muestra que, el valor final de la energía interna φ^2 (cuando no hubo fuente ni mezcla) se redujo en un 26,7% con respecto al valor alcanzado en el experimento E2. Es decir, cuando se consideró fuente de calor constante y mezcla turbulenta.

Los resultados energéticos para el experimento E3, en el cual se tomó en cuenta la mezcla turbulenta y la presencia de una fuente de calor variable con el tiempo, se muestran en las Figuras N° 4 y 6. En este caso se tomó $\alpha = 1{,}67 \times 10^{-3}$ en la expresión (2.36), provocando este coeficiente un decrecimiento exponencial para la intensidad de la fuente de calor, a medida que transcurre el tiempo. La Figura N° 2 muestra la variación de la fuente de calor, observándose que la intensidad de la fuente se reduce al 50% de su valor inicial al cabo de siete minutos. Al finalizar el experimento, transcurridos diez minutos, la fuen-

FIGURA 5



Variación con el tiempo de {k}, {P} y {k-P} para el caso en que se consideró la inclusión de una fuente de calor constante y la mezcla con el entorno (E 2)

te redujo su intensidad al 37% de su valor inicial. La Figura N° 6 muestra las variaciones temporales de las integrales de energía $\{k\}$, $\{P\}$ y $\{k-P\}$. En la misma, puede observarse que $\{k-P\}$ se disipa a través del tiempo a una velocidad prácticamente constante y marcadamente moderada. Si se toma en cuenta la variación relativa entre el instante final e inicial para $\{k-P\}$, el valor calculado fué de sólo 22,9%. En cambio, en el experimento E2 que tomó en cuenta una fuente de calor constante con el tiempo, la misma variación alcanzó al 77%. Si ahora se comparan las Figuras N° 3 y 6, se observa que la variación con el tiempo de $\{k\}$ cuando se incluye la fuente variable y la mezcla y cuando son excluídas, es prácticamente la misma. Sin embargo, $\{P\}$ en el caso de ausencia de fuente y mezcla, redujo en 6,1% su valor final con respecto al caso en que una fuente de calor variable y la mezcla, fueron incluídas en el experimento. Este valor, fué notoriamente menor que el observado en la comparación con una fuente constante (38,4%).

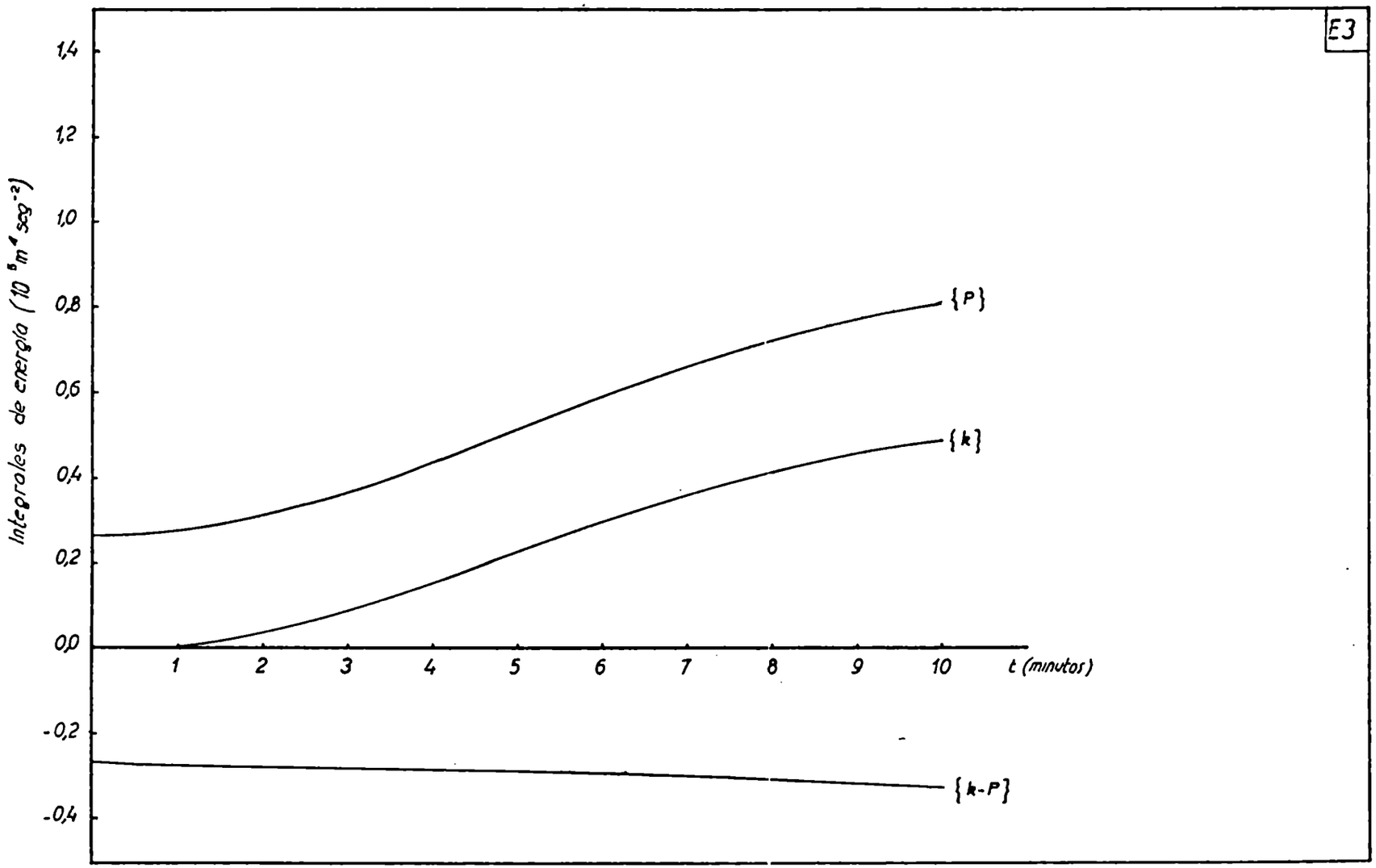
Comparando las Figuras N° 5 y 6, se infiere que el valor final de $\{k\}$ para una fuente variable, se redujo en 37,6% con respecto al valor alcanzado cuando se consideró la fuente de calor constante. En el caso de $\{P\}$, la reducción fué del 34,4%.

En la Figura N° 4, puede observarse que con una fuente de calor variable con el tiempo, φ^2 alcanza su máximo valor al cabo de un minuto y medio. Este valor está muy por debajo del valor alcanzado cuando la fuente es constante y además, el tiempo transcurrido hasta alcanzar el valor máximo es menor que el tiempo correspondiente a la fuente constante. Por otro lado, la disipación de φ^2 es más rápida en el caso de una fuente variable, alcanzando el valor inicial antes de los seis minutos y medio. En cambio, cuando la fuente es constante, el valor de φ^2 se mantiene por encima del valor inicial durante todo el tiempo de integración. El valor máximo alcanzado por φ^2 cuando la fuente fué variable, indica un aumento del 13,2% con respecto al valor del instante inicial. En cambio, cuando la fuente fué constante, el incremento llegó al 54,8%.

Si se comparan los valores finales de φ^2, es posible observar en la Figura N° 4 una reducción del 41,9% cuando la fuente se tomó variable, con respecto al caso de fuente constante. Si en cambio se comparan los resultados de los experimentos E1 y E3, es posible observar en la misma figura, que el valor final de φ^2 con fuente variable, se redujo en 20,6% con respecto al valor constante en ausencia de fuente y mezcla turbulenta.

De lo expuesto en los párrafos anteriores puede concluirse que, la disipación de energía interna cuando la fuente de calor es variable, es marcadamente más intensa que en el caso de la fuente constante. Esto hace que en este último caso, la conversión de energía interna en potencial y de potencial en cinética, asegure para el mismo

FIGURA 6



Variación con el tiempo de {k}, {P} y {k-P} para el caso en que se consideró la inclusión de una fuente de calor variable y la mezcla con el entorno (E3)

TABLA 1

Integrales de Energía en los Experimentos E1, E2, E3

$\{ k \}$ $(10^5\ m^4\ seg^{-2})$

Experimento	Valor Inicial	Valor Final	Valor Máximo
E1	0	0,49	0,49
E2	0	0,79	0,79
E3	0	0,49	0,49

$\{P\}$ $(10^5\ m^4\ seg^{-2})$

Experimento	Valor Inicial	Valor Final	Valor Máximo
E1	0,27	0,77	0,77
E2	0,27	1,25	1.25
E3	0,27	0,82	0,82

$\{k - P\}$ $(10^5\ m^4\ seg^{-2})$

Experimento	Valor Inicial	Valor Final	Valor Máximo
E1	-0,27	-0,28	-0,27
E2	-0.27	-0,47	-0,27
E3	-0,27	-0,33	-0,27

$\{ \varphi^2 \}$ $(10^{-2}\ m^2)$

Experimento	Valor Inicial	Valor Final	Valor Máximo
E1	1,87	1,89	1,89
E2	1,87	2,57	2,89
E3	1,87	1,50	2,11

tiempo de integración valores mayores para las variables dinámicas y termodinámicas.

Con la Tabla 1 se ilustra cuantitativamente la discusión realizada en los párrafos anteriores, con respecto a las integrales de energía.

4.3 Análisis de los campos de perturbación de temperatura y movimiento

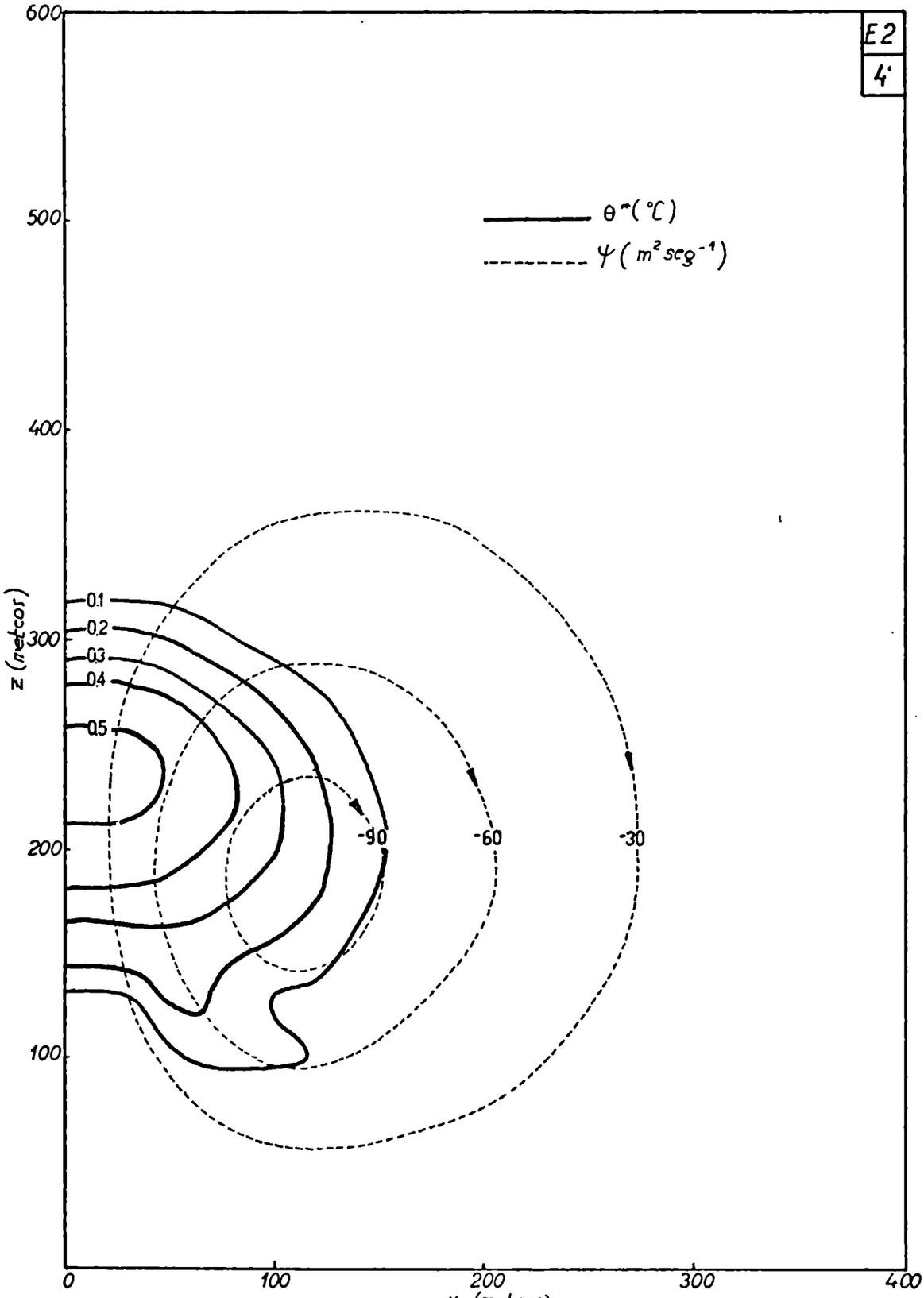
En esta sección se estudiará el comportamiento de los campos de perturbación de temperatura potencial (θ^*) y de movimiento asociado, mediante el análisis de los resultados de los distintos experimentos numéricos. En la Figura N° 1 se muestra el campo de temperatura, junto al campo de presión asociado para el instante inicial. En éste instante, el campo de perturbación de la presión es simplemente una respuesta al campo de perturbación de la temperatura, puesto que el sistema permanece en reposo.

Las condiciones iniciales señaladas por la Figura N° 1, fueron comunes a todos los experimentos numéricos, es decir son válidas para los casos en que se tomó o no en cuenta, una fuente de calor y la mezcla turbulenta.

En las Figuras N° 7, 8 y 9, se muestran los campos de perturbación de temperatura potencial con sus líneas de corriente asociadas, para el experimento numérico E2. En éste caso, se observó que el máximo valor para el exceso de temperatura, se alcanzó en los primeros instantes (al cabo de un minuto) del ciclo de vida del elemento convectivo. Este valor máximo fué asociado a la fuente de calor, dado que la burbuja aún no había iniciado prácticamente su movimiento de ascenso. La proximidad de la base de la burbuja a la región de máximo calentamiento, provoca en los primeros instantes de la evolución convectiva, un marcado gradiente de temperatura en la misma base. A medida que transcurre el tiempo y la burbuja asciende, desaparece el gradiente en la base y por la advección de temperatura, el gradiente máximo aparece en la parte superior de la burbuja (Figuras N° 8 y 9).

En los primeros minutos de la evolución, cuando aún el máximo de exceso de temperatura se encontraba próximo a la región de máximo calentamiento, se inició una circulación de tipo vórtice anular semejante a la de una celda de Bénard. Con el transcurso del tiempo, esta circulación se intensificó y por la advección de temperatura, se notó un ascenso en la configuración que define a la burbuja. Este ascenso se hace más notable a partir de seis minutos y la distancia entre el tope de la burbuja y la fuente de calor, aumenta considerablemente sin que

FIGURA 7



Perturbación de la temperatura potencial (θ^*) con la distribución de la función corriente (Ψ), al cabo de 4 minutos (fuente constante)

se produzca una separación de la fuente. La burbuja permanece unida a la fuente de calor, por medio de una columna de aire caliente (Figura N° 8).

Al cabo de diez minutos, la parte superior de la burbuja llegó casi al límite superior de la región considerada para la integración numérica. Al continuar estrechándose la columna de aire caliente que une la burbuja con la fuente, la configuración del elemento convectivo fué semejante a un hongo. En la Figura N° 9, puede observarse como los mayores excesos de temperatura fueron advectados en el sentido de la circulación, presentándose un doble máximo en la temperatura al cabo de diez minutos. Paralelamente, el aire más frío del entorno fué introducido hacia la parte central de la burbuja. A partir de los ocho minutos se observan leves asimetrías en el campo de líneas de corriente que fueron intensificándose con el tiempo. La Figura N° 9 muestra estas asimetrías para los diez minutos de vida de la burbuja.

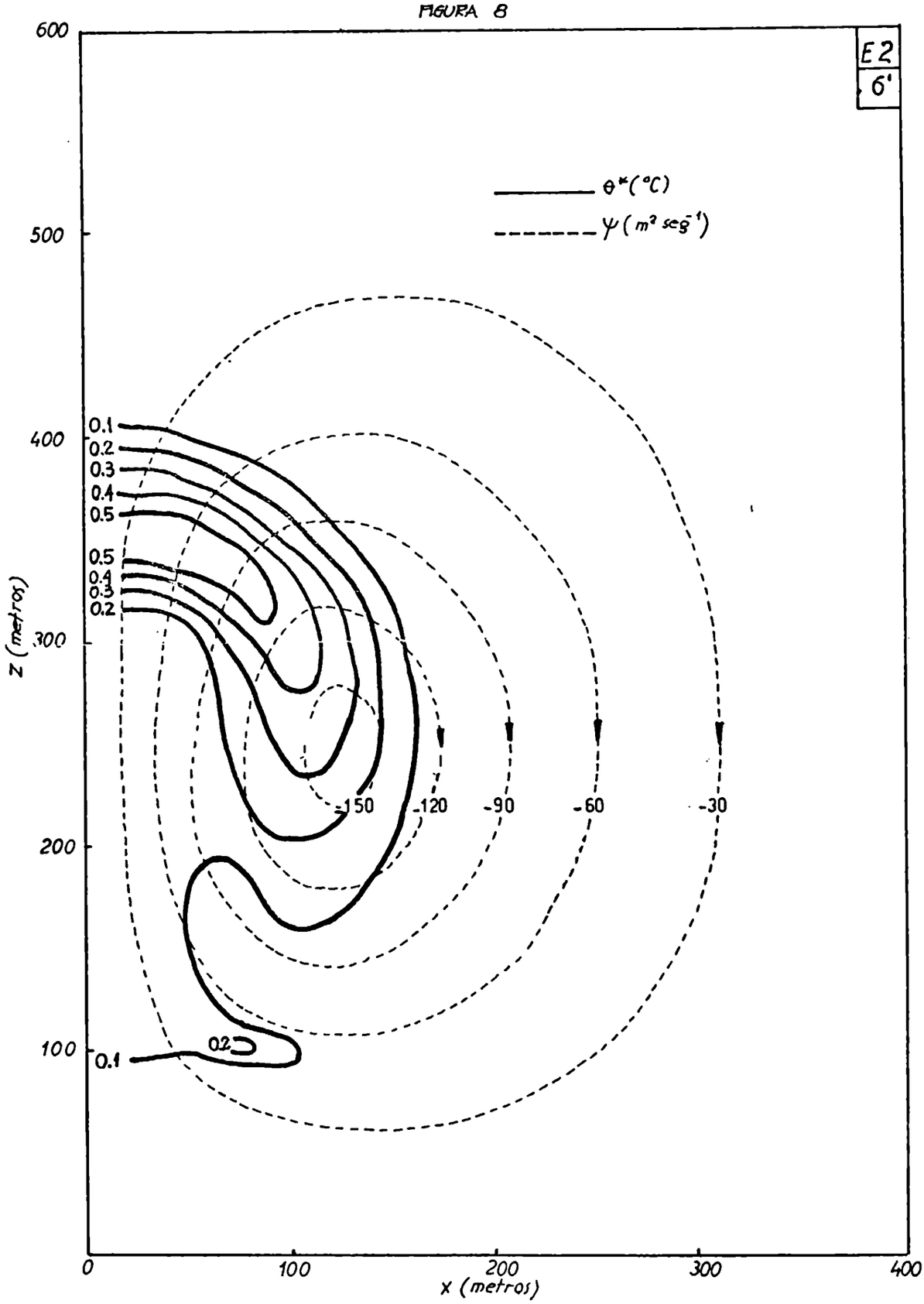
A partir de los dos minutos y medio, la altura a que se encuentra el máximo exceso de temperatura, creció más rápidamente que las alturas correspondientes a los máximos de velocidad vertical, función corriente y perturbación de la presión. Hasta este momento, el máximo exceso de temperatura, se mantuvo a una altura menor que la altura de los valores máximos de velocidad vertical y función corriente. Este período de tiempo corresponde a la fase de organización del elemento convectivo y fué observado también, en el trabajo se Malkus y Witt y en el de Nickerson.

Tanto la componente vertical como la horizontal de la velocidad, fueron incrementando sus valores máximos con el transcurso del tiempo de integración. Al finalizar la experimentación numérica (al cabo de diez minutos), el máximo de velocidad ascensional fué de 2,09 m/seg, mientras que el valor máximo para la velocidad horizontal (dirigida hacia el eje de simetría) alcanzó al 59,3% del valor correspondiente a la velocidad vertical.

Los resultados anteriores, obtenidos de la experimentación numérica E2 (con fuente de calor constante y mezcla turbulenta), son similares a los que obtuvo Nickerson.

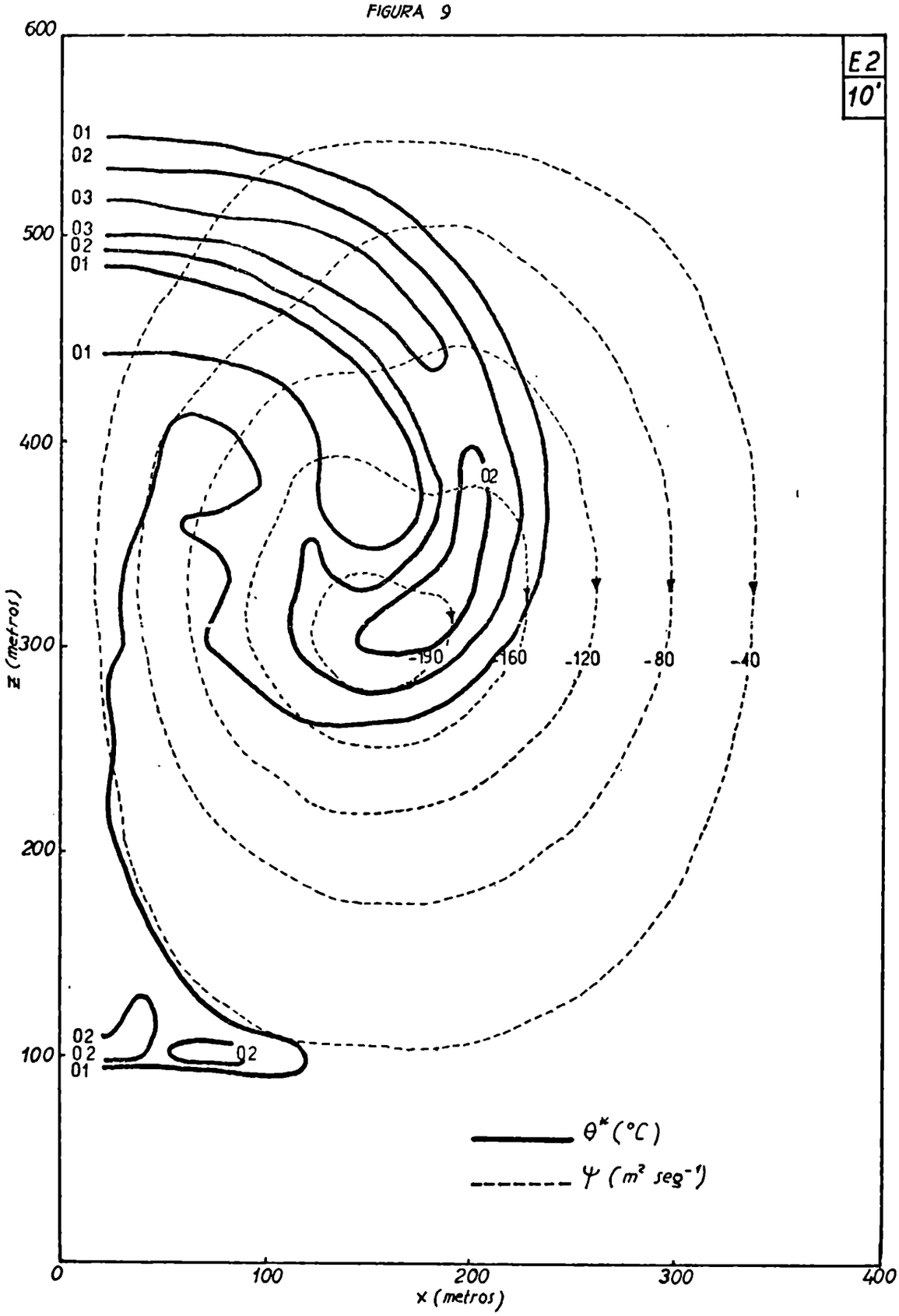
Las Figuras N° 10, 11, 12 y 13 muestran los campos de vorticidad y líneas de corriente asociadas, para distintos instantes de la experimentación numérica E2. A los dos minutos (Figura N° 10) la distribución de vorticidad muestra su máximo valor, ubicado próximo a la región de máximo calentamiento y donde el gradiente de las líneas de corriente es mayor. En forma esquemática, esta distribución de vorticidad presenta la característica de un vórtice anular que con el transcurso del tiempo, asciende, se expande y se intensifica. A partir de los seis minutos, el vórtice anular que pasó a ser dominante en la dis

FIGURA 8



Perturbación de la temperatura potencial con la distribución de la función corriente (Ψ), al cabo de 6 minutos (fuente constante)

FIGURA 9



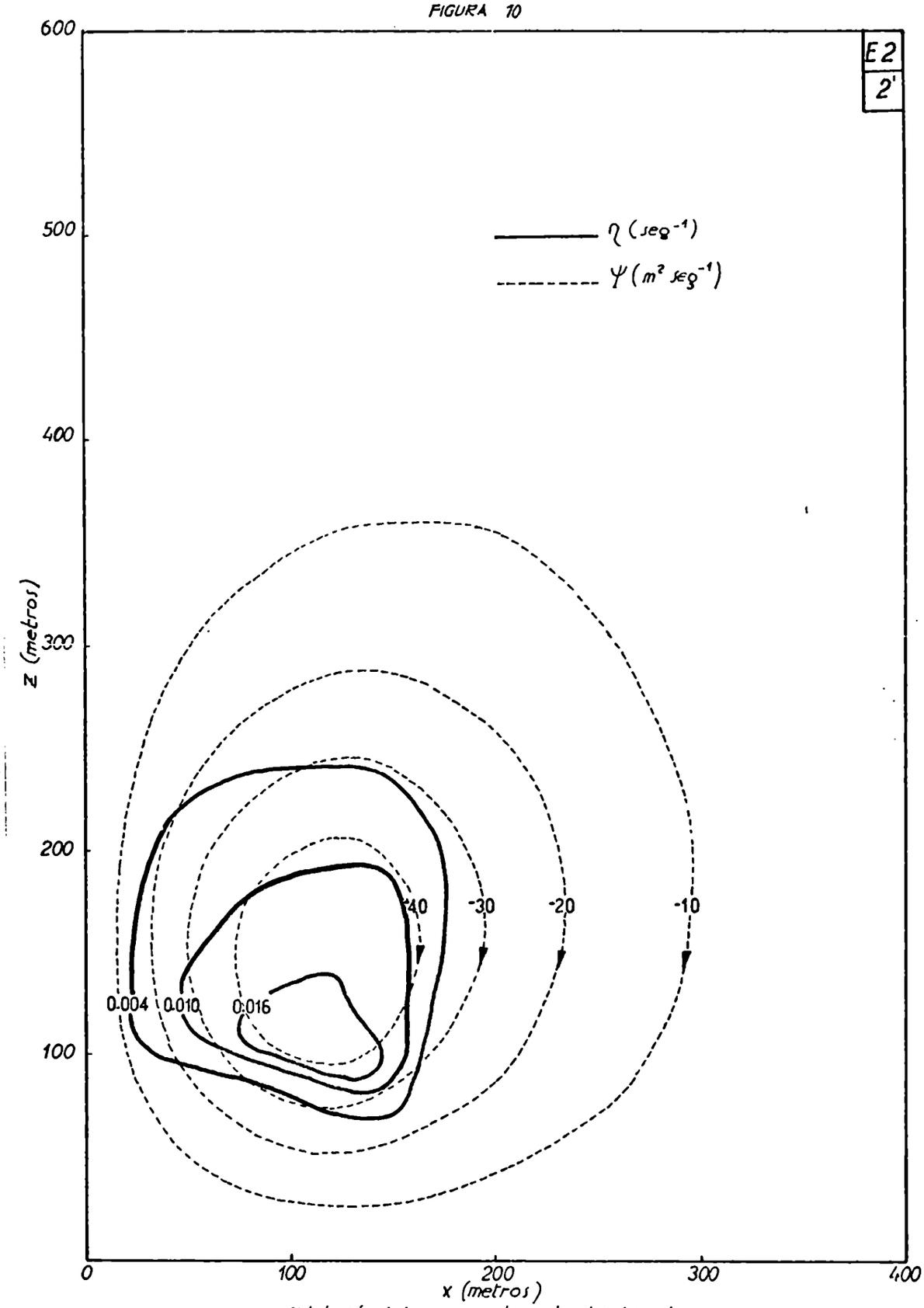
Perturbación de la temperatura potencial (θ^*) con la distribución de la función corriente (ψ) al cabo de 10 minutos (fuente constante)

tribución de vorticidad (Figura N° 13), comienza su descenso y al cabo de diez minutos se encuentra ubicado en la parte inferior de toda la distribución. Paralelamente, todo el sistema gira alrededor del vórtice dominante y lo acompaña en su movimiento. En todo éste proceso, el anillo dominante constituye uno de los elementos dinámicos más importantes, en lo que hace al campo de movimiento. Por otro lado, es éste anillo el que delimita la forma de la burbuja, haciendo que la misma adquiera una configuración tal que se asemeje a un hongo.

En los experimentos numéricos E3 y E4, además de la mezcla con el entorno se supuso que la fuente de calor varía con el tiempo. En E3, la fuente de calor reduce su intensidad en 50% del valor inicial, al cabo de siete minutos. En éste caso, en la expresión (2.36) se tomó un valor de $\alpha = 1{,}67 \times 10^{-3}$. En el experimento E4, la fuente de calor reduce su intensidad en 37% del valor máximo inicial, aproximadamente, al cabo de un minuto. En la expresión (2.36), se tomó $\alpha = 1{,}67 \times 10^{-2}$, para el experimento E4. Los resultados de ambos experimentos no mostraron diferencias muy marcadas. En los dos casos, la evolución del elemento convectivo durante los primeros minutos, fué similar a la observada en el experimento E2 (con fuente constante), con excepción de que en éste último experimento, se observó un máximo de exceso de temperatura ligeramente mayor. Las diferencias notables en la configuración de la burbuja, cuyos límites están determinados convencionalmente por la isoterma de 0,1 grados, aparecen a los cuatro minutos de la evolución convectiva. Las Figuras N° 14 y 15 muestran los campos de perturbación de la temperatura potencial con las líneas de corriente correspondientes, para el caso en que se tomó $\alpha = 1{,}67 \times 10^{-2}$. Cabe señalar que las configuraciones de la burbuja, cuando se tomó $\alpha = 1{,}67 \times 10^{-3}$, no difieren mayormente de las que aparecen en las figuras señaladas. Comparando las Figuras 7 y 14, se observa que al cabo de cuatro minutos, la burbuja presenta un apéndice en su base, siendo el mismo notoriamente más marcado cuando se consideró la fuente constante (E2).

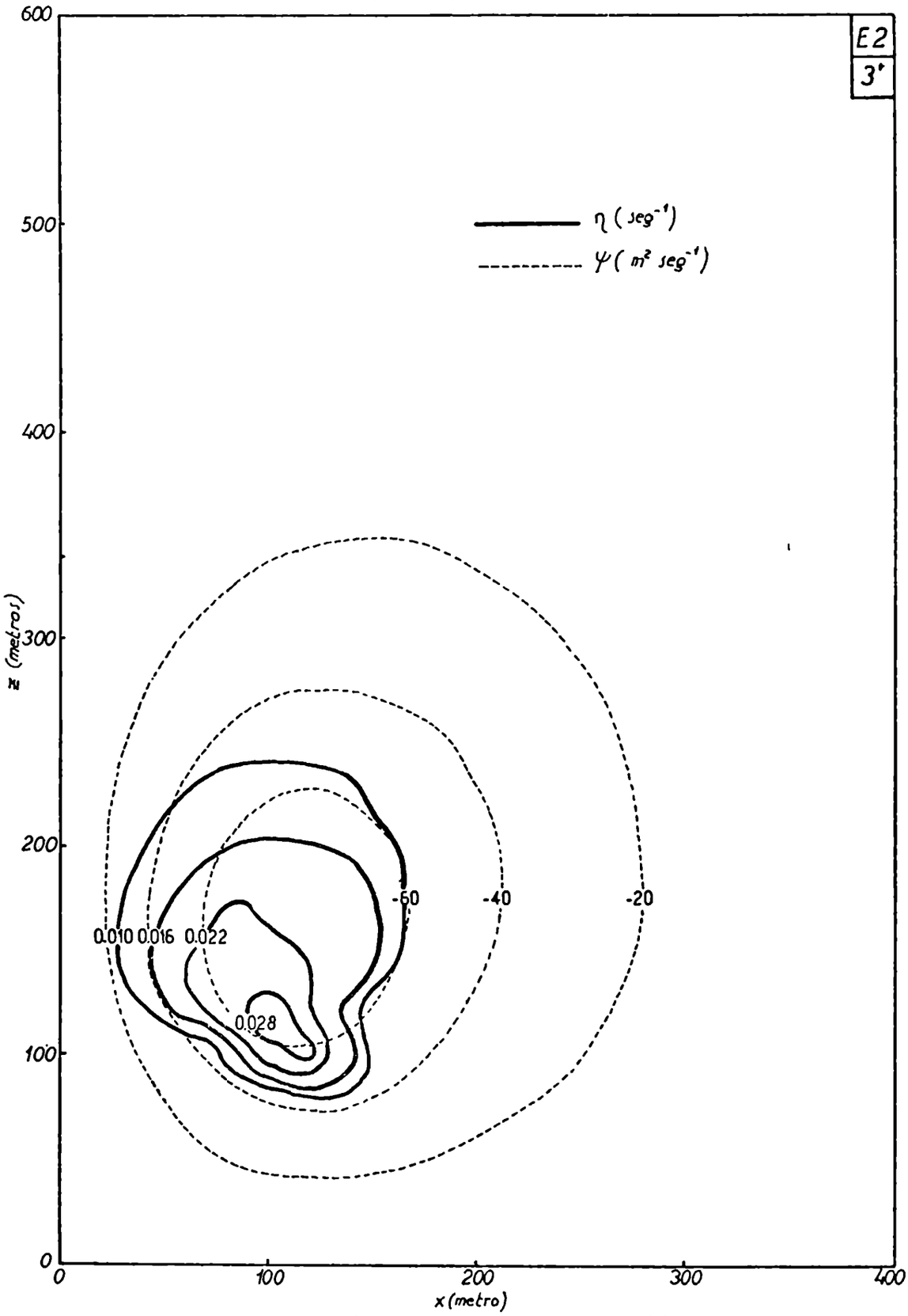
De la comparación de las Figuras N° 8 y 15 surge que, cuando la fuente disminuye la intensidad con el tiempo la burbuja se separa de la misma, perdiendo la columna de aire caliente que se observó cuando la fuente se mantuvo constante. Como era de esperar, en los casos en que se tomó la fuente variable con el tiempo, los valores máximos de velocidad, vorticidad, función corriente y de las perturbaciones de temperatura y presión, fueron menores que los que se obtuvieron para la fuente constante. Un análisis cuantitativo mostró que en el experimento E3, el máximo de velocidad ascensional alcanzó al 69,9% del valor correspondiente al experimento E2 (fuente constante). En cuanto al experimento E4, el máximo de la velocidad de ascenso alcanzó al 67,9% del valor alcanzado en E2.

FIGURA 10



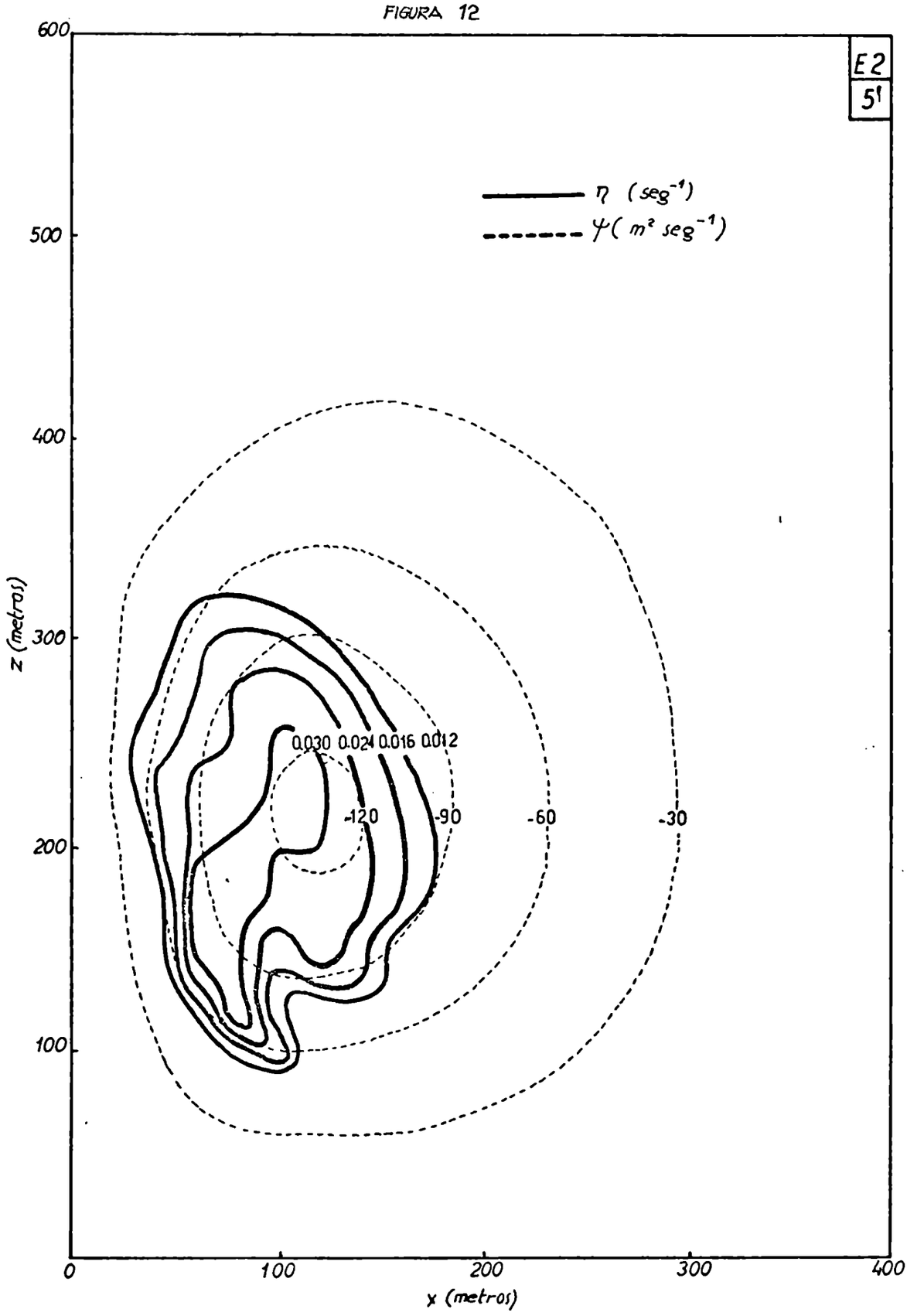
Distribución de los campos de vorticidad (η) y líneas de corrientes (ψ) al cabo de 2 minutos

FIGURA 11



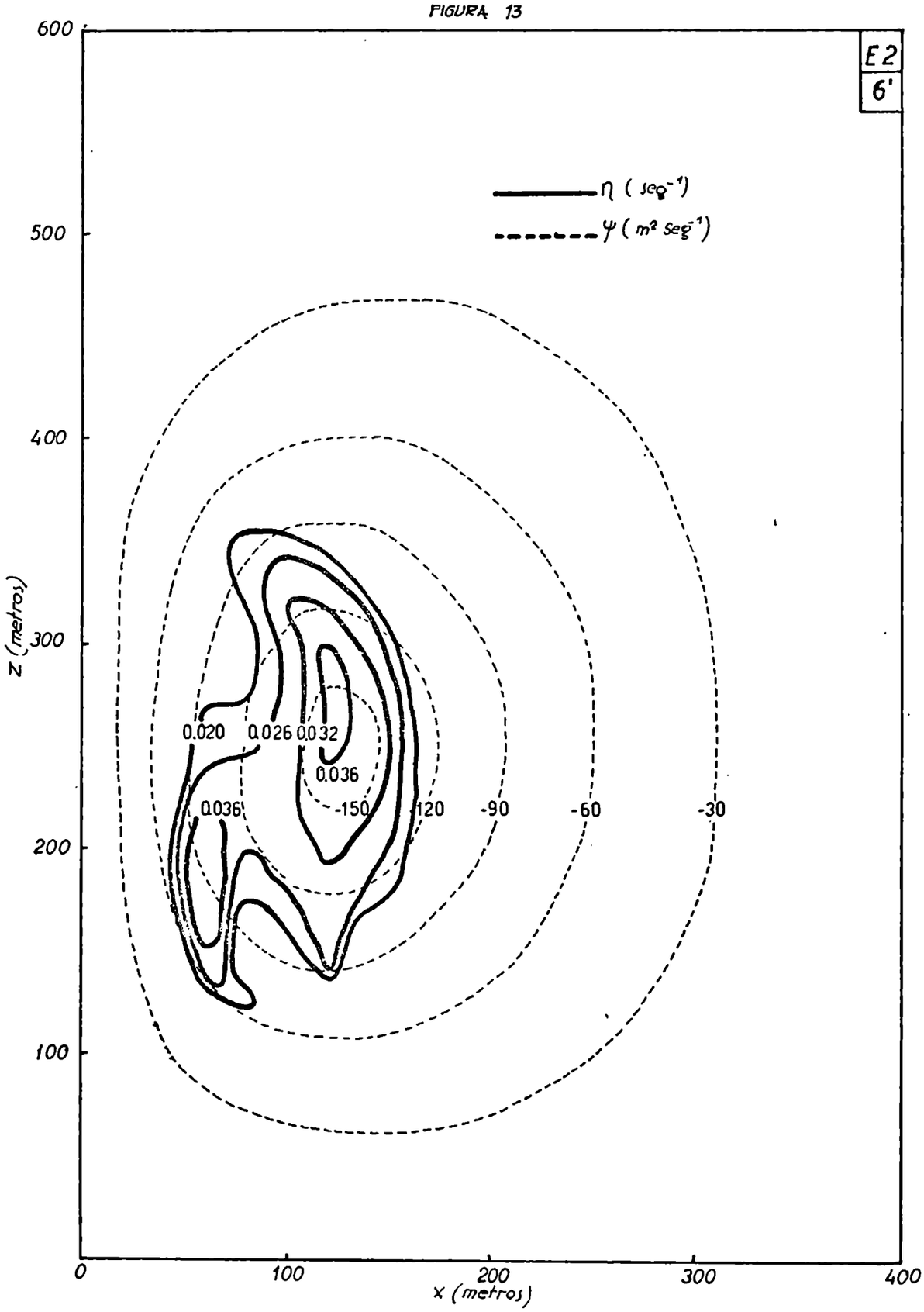
Distribución de los campos de vorticidad (η) y líneas de corriente (ψ) al cabo de 3 minutos

FIGURA 12



Distribución de los campos de vorticidad (η) y líneas de corrientes (ψ) al cabo de 5 minutos

FIGURA 13



Distribución de los campos de vorticidad (η) líneas de corriente (ψ) al cabo de 6 minutos

El experimento numérico E5 (similar al E4 pero excluída la mezcla turbulenta), no mostró resultados muy diferentes en la configuración de la burbuja, respecto a los que se obtuvieron cuando la mezcla fué permitida. El hecho sobresaliente en el análisis de éstos resultados, es la confirmación de que la mezcla con el entorno reduce los valores máximos de las variables dinámicas y termodinámicas. Cuantitativamente estos resultados señalaron que, la velocidad vertical disminuyó en un 12,3% y el exceso de temperatura en un 19% (al cabo de diez minutos), con respecto a los valores alcanzados cuando no actuó la mezcla.

4.4 Análisis del campo de perturbación de la presión

En el presente estudio, el campo de perturbación de la presión π^* , se identifica con las desviaciones de la presión adimensional π , con respecto a la presión $\pi_0(Z)$ de un estado básico o atmósfera de referencia. Esta atmósfera de referencia se encuentra en equilibrio hidrostático y en consecuencia, los valores de su presión adimensional están dados por la expresión (2.19):

$$\pi_0(Z) = 1 - \frac{g}{Cp\Theta} Z$$

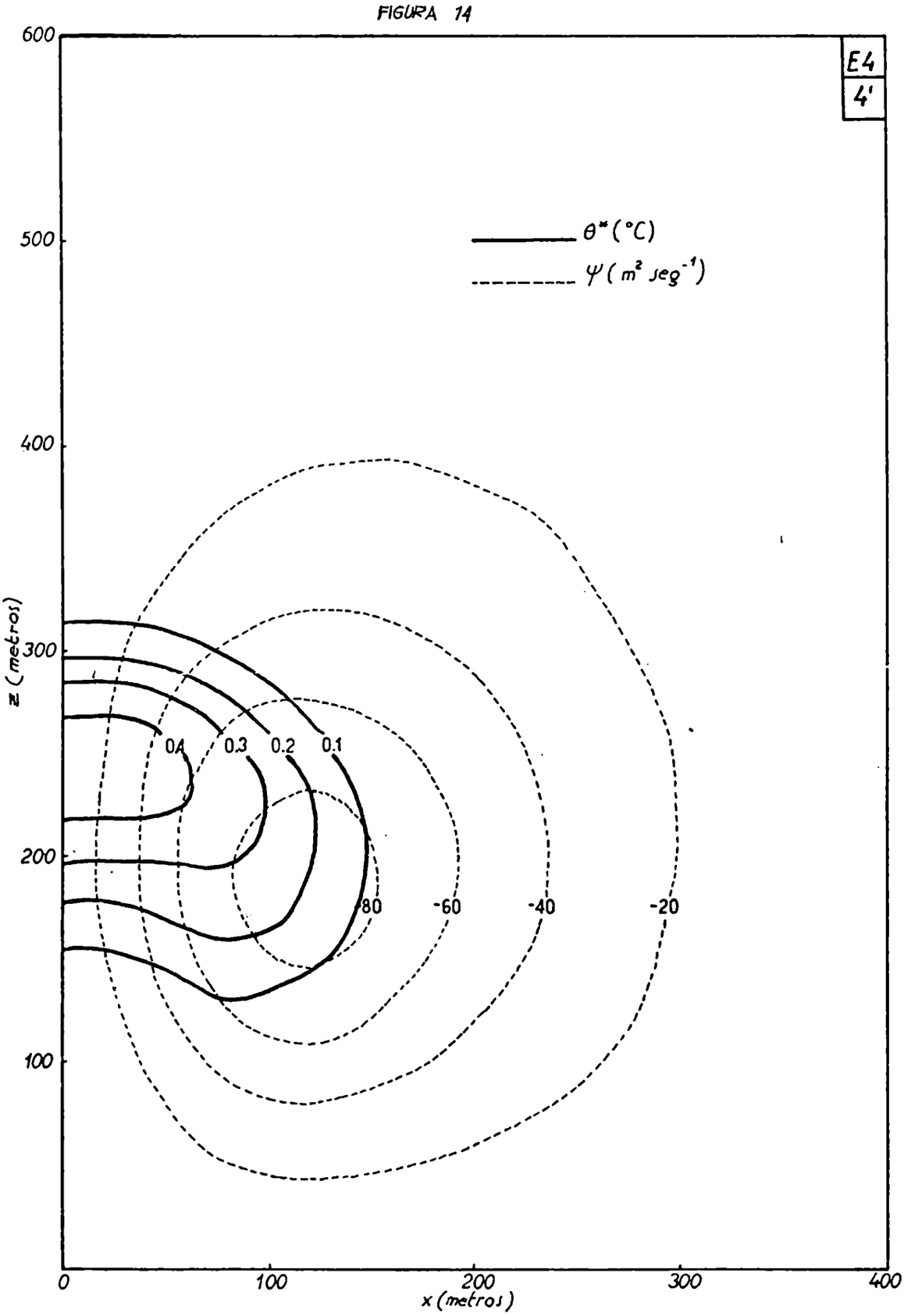
La expresión anterior, señala que $\pi_0(Z)$ es prácticamente constante en la región definida para el modelo. En efecto, calculando los valores de $\pi_0(Z)$ para los límites inferior $(Z = 0)$ y superior $(Z = 600$ metros$)$ de la región, obtenemos:

$$\pi_0(0) = 1 \quad ; \quad \pi_0(600) = 0{,}9810757$$

Por lo tanto, las desviaciones de la presión en nuestro caso, son desviaciones con respecto a un estado básico, de presión casi constante.

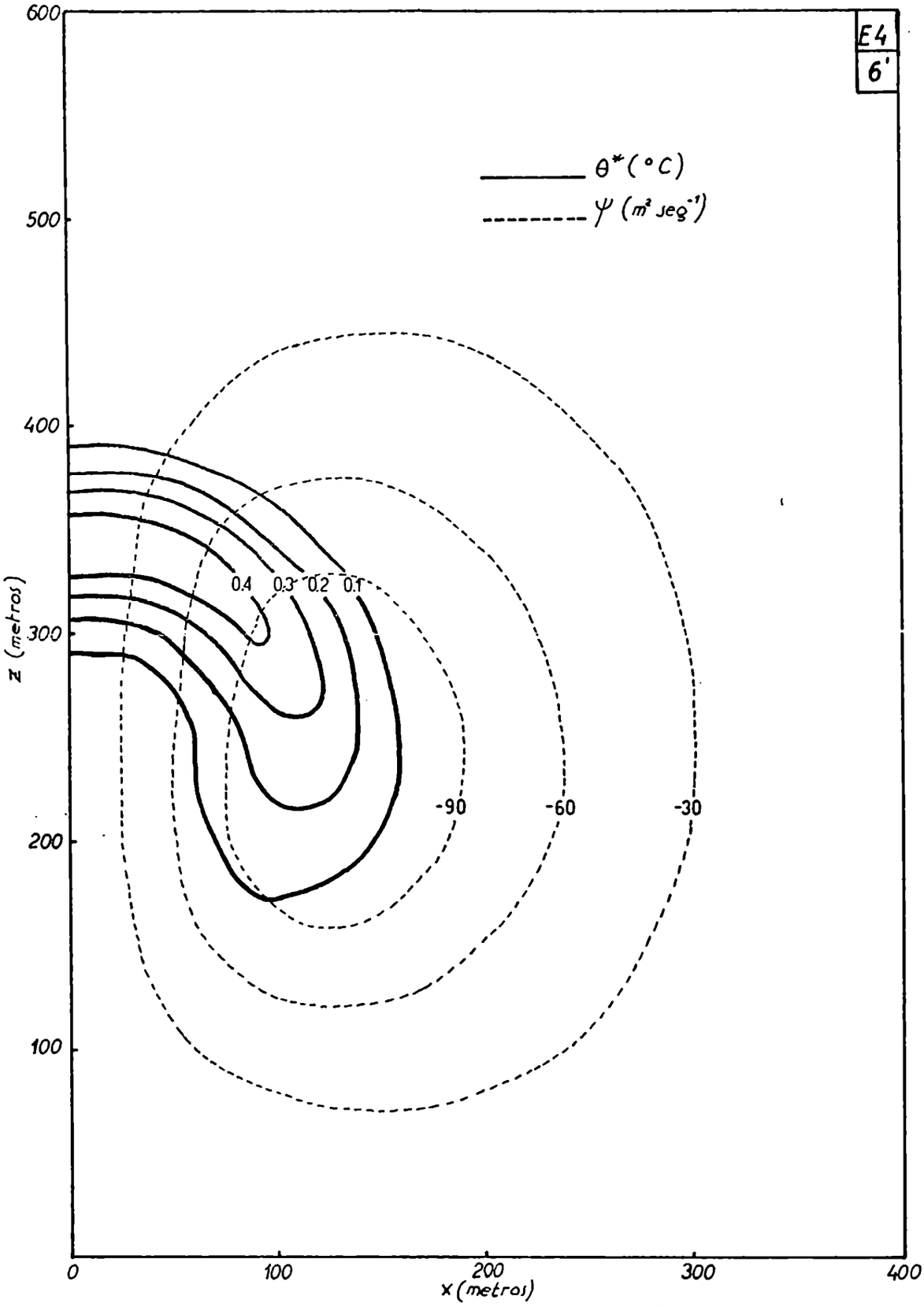
Tomando en cuenta la ecuación de divergencia (2.30), se infiere que el campo de perturbación de la presión es una respuesta al campo de perturbación de la temperatura por un lado y al campo de movimiento por otro lado. Sin embargo, en el instante inicial, la ausencia de movimiento hace que el campo de perturbación de la presión, sea sola-

FIGURA 14



Perturbación de la temperatura potencial (θ^*) con la distribución de la función corriente (ψ) al cabo de 4 minutos (fuente variable)

FIGURA 15



Perturbación de la temperatura potencial (θ^*) con la distribución de la función corriente (ψ) al cabo de 6 minutos (fuente variable)

mente un resultado del correspondiente campo inicial de temperatura.

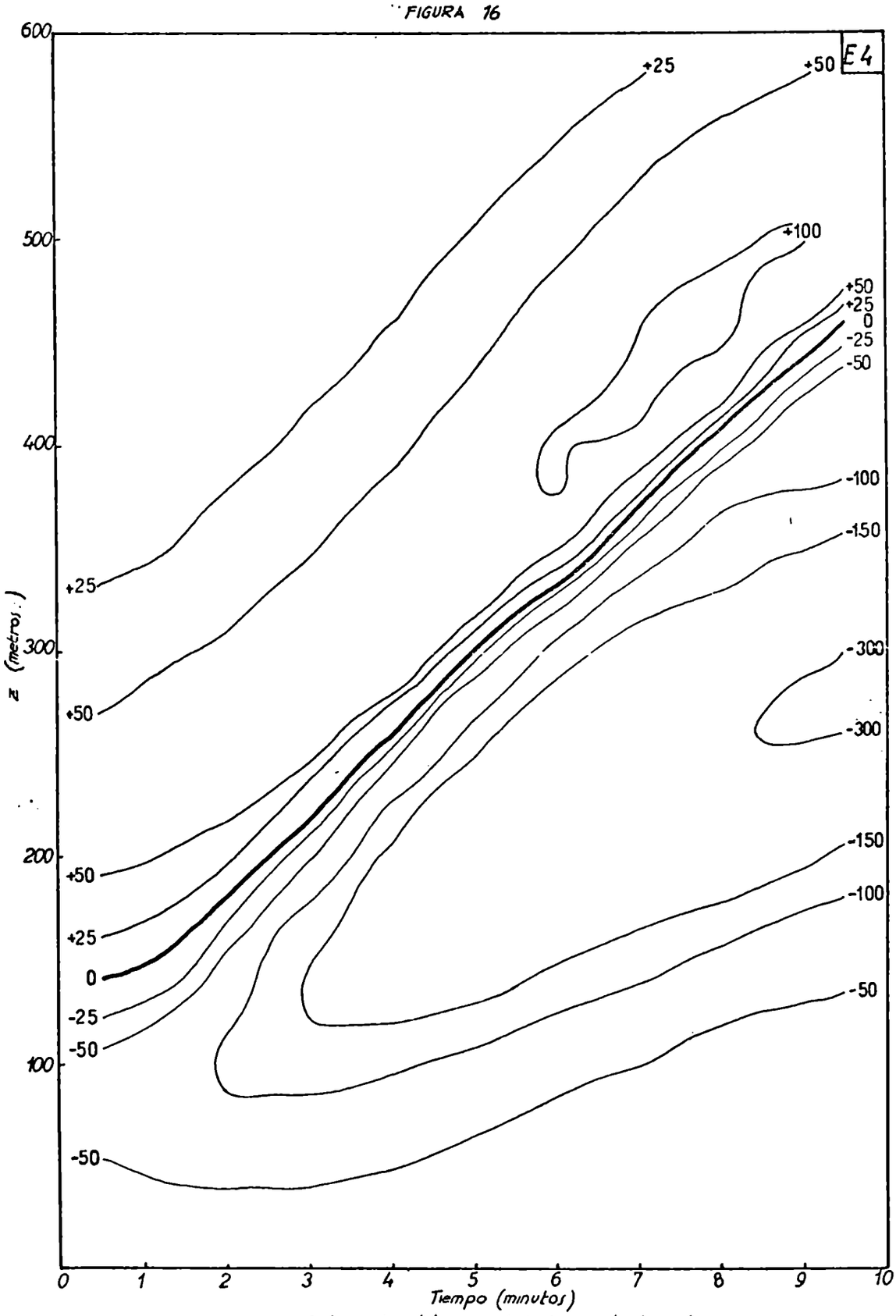
En la Figura N° 1, se puede observar la distribución espacial de la perturbación de la presión, superpuesta a la de temperatura para el instante inicial. Se observa una sobrepresión ubicada en la parte superior del elemento convectivo, a una altura de 220 metros sobre el suelo y cuyo máximo valor es de $\pi^* = 58 \times 10^{-8}$ (1,99 dyn/cm^2). En la parte inferior, a una altura de 80 metros sobre el suelo y próximo a la región de mayor gradiente térmico inicial, se observa una depresión cuyo máximo es de $\pi^* = -71 \times 10^{-8}$ (-2,47 dyn/cm^2).

La Figura N° 16, es un corte vertical-temporal de la perturbación de la presión, a una distancia horizontal de 80 metros respecto del eje de simetría. Esta representación gráfica fué elaborada con los resultados numéricos del experimento E4, pero cabe señalar que los resultados fueron similares en los distintos experimentos. Las diferencias observadas corresponden a los valores máximos alcanzados por la perturbación de la presión. Estas diferencias son justificadas y coherentes con los resultados discutidos en la sección anterior. Un análisis de la Figura N° 16 muestra que tanto la sobrepresión como la depresión inicial debidas al efecto del campo térmico, se intensifican y desplazan verticalmente a medida que transcurre el tiempo. Los resultados señalan además, que la sobrepresión es desplazada por la depresión. En la Figura N° 17, se ha representado la variación con el tiempo, de las alturas sobre el suelo a que se encuentran los máximos de velocidad de ascenso y los máximos de depresión. Se puede observar que, a medida que transcurre el tiempo, el centro de depresión tiende a desplazarse hacia el máximo de velocidad vertical. A partir de los seis minutos del ciclo convectivo, las alturas de los centros de máximo ascenso y máxima depresión son coincidentes. Es decir, el efecto del movimiento sobre el campo de presión, se hace más importante a medida que el campo de velocidad se intensifica.

Los resultados de las Figuras N° 16 y 17 pueden ser mejor interpretados con la ayuda de la ecuación de divergencia (2.30). En ésta ecuación, el efecto del primer término en el segundo miembro sobre el campo de perturbación de la presión, adquiere importancia a medida que el movimiento se intensifica. Paralelamente, el segundo término que refleja el efecto del campo térmico, si bien inicialmente tuvo un efecto marcado sobre el campo de presión, va debilitándose con el transcurso del tiempo. Como resultado, se observa la tendencia a coincidir, de los centros de depresión y movimiento.

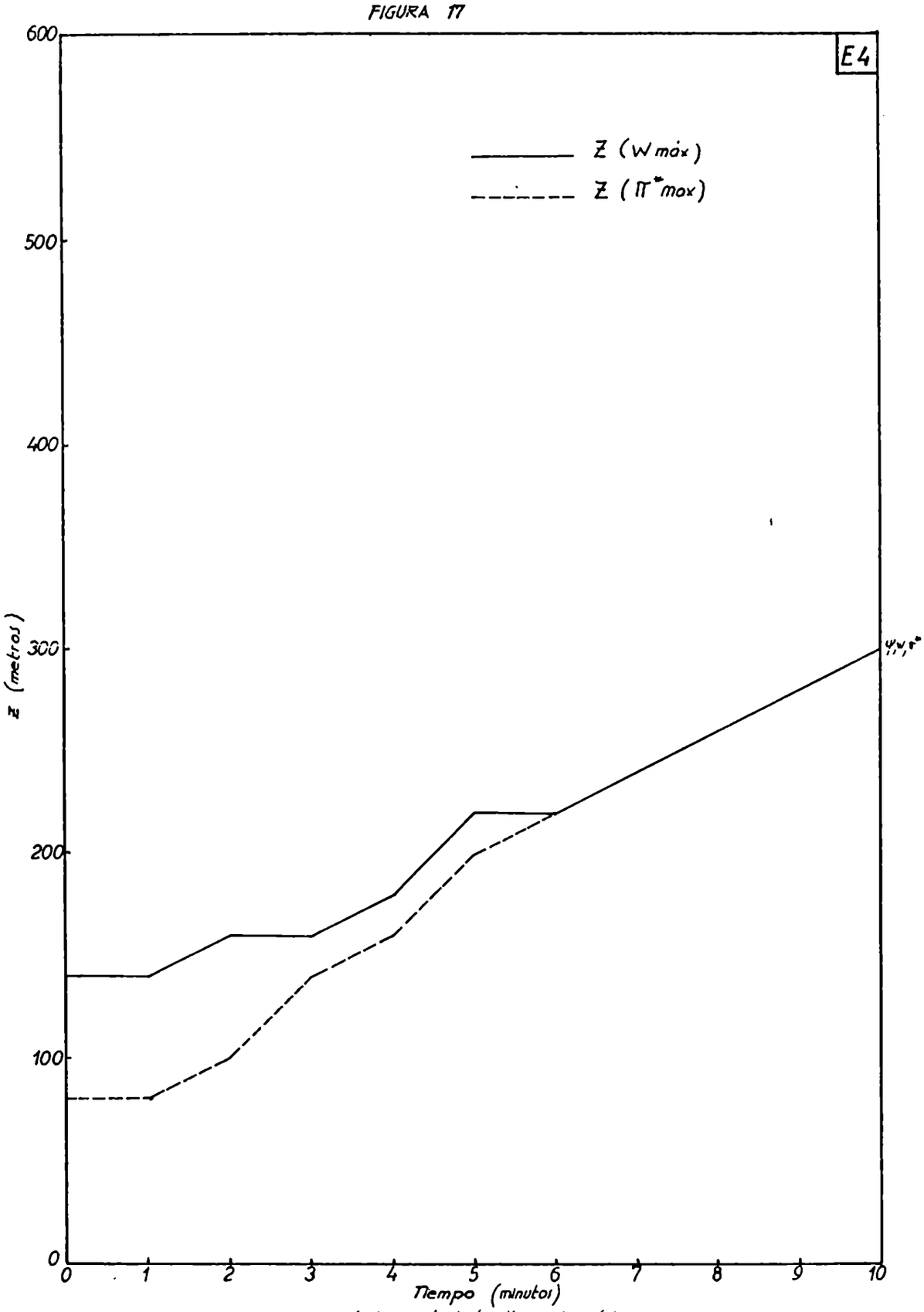
En las Figuras N° 18 y 19 se ha representado el campo de perturbación de la presión superpuesto con el campo de líneas de corriente, para dos estados de tiempo del experimento E2. El análisis simultáneo de las Figuras N° 1, 18 y 19, ilustra sobre la evolución del campo de

FIGURA 16



Corte vertical temporal de la perturbación de la presión a una distancia de 80 metros del eje de simetría

FIGURA 17



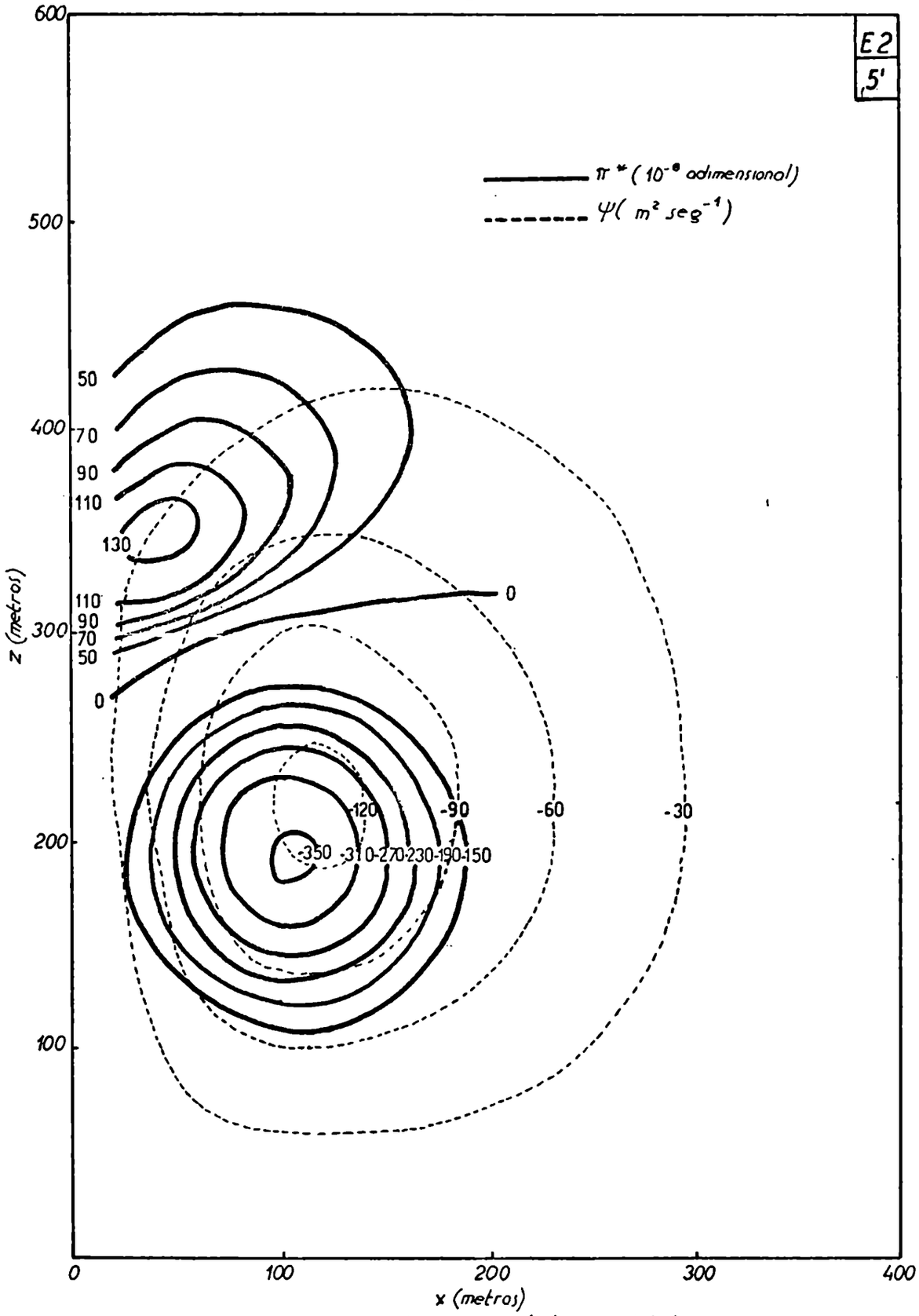
Variación temporal de la altura de máxima velocidad de ascenso Z(W max) y máxima depresión Z (Π* max)

perturbación de la presión y su relación con el campo de movimiento. En el instante inicial, por efecto del campo de temperatura, la distribución de la presión presenta una sobrepresión y una depresión de magnitud equivalente (Figura N° 1). A medida que la velocidad vertical crece, el campo de movimiento pasa a ser dominante en la distribución de la presión, frente al campo de la temperatura. Al cabo de cinco minutos (Figura N° 18) puede observarse que, tanto la sobrepresión como la depresión se han intensificado, aunque la primera está siendo desplazada por la segunda. En éste instante el máximo de sobrepresión se encuentra a 340 metros sobre el suelo con un valor de $\pi^* = 139 \times 10^{-8}$ (4,73 dyn/cm^2). El máximo de depresión ascendió hasta los 200 metros de altura y su valor alcanzó a $\pi^* = -358 \times 10^{-8}$ (-12,32 dyn/cm^2). La evolución de la depresión es tal que, hasta éste momento, su centro se ha desplazado hasta ubicarse muy próximo al centro de la configuración de las líneas de corriente y a la zona de mayor gradiente de las mismas. A los diez minutos (Figura N° 19), coincide el centro de las líneas de corriente con el centro de la depresión. La sobrepresión ha sido prácticamente desplazada y su máximo, que ha comenzado a debilitarse, se encuentra a 540 metros de altura con un valor de $\pi^* = 120 \times 10^{-8}$ (4,02 dyn/cm^2). La depresión se ha extendido prácticamente en toda la región y su valor máximo $\pi^* = -690 \times 10^{-8}$ (-23,56 dyn/cm^2) se encuentra a 300 metros de altura. En éste nivel se encuentran, además, los valores máximos de la función corriente y de la velocidad de ascenso. La perturbación de temperatura, que a los diez minutos presenta un doble máximo (Figura N° 9), muestra uno de los máximos en un nivel próximo a los 300 metros.

Con el objeto de evaluar cuantitativamente los efectos debidos al movimiento y al campo térmico, sobre la perturbación de la presión, se calcularon las magnitudes de los términos primero y segundo del miembro de la ecuación (2.30). Considerando el punto de coordenadas (160;300) que es el más próximo a los máximos de función corriente, perturbación de la presión y a uno de los dos máximos de perturbación de la temperatura (al cabo de diez minutos), obtenemos como resultado que la contribución debida al movimiento (9,96 x 10^{-4} m/seg^2) es de un orden mayor que la debida al campo térmico (6,89 x 10^{-5} m/seg^2). Esto corrobora lo expresado en párrafos anteriores, que el campo de movimiento pasa a ser dominante en la distribución de la presión, a medida que transcurre el tiempo.

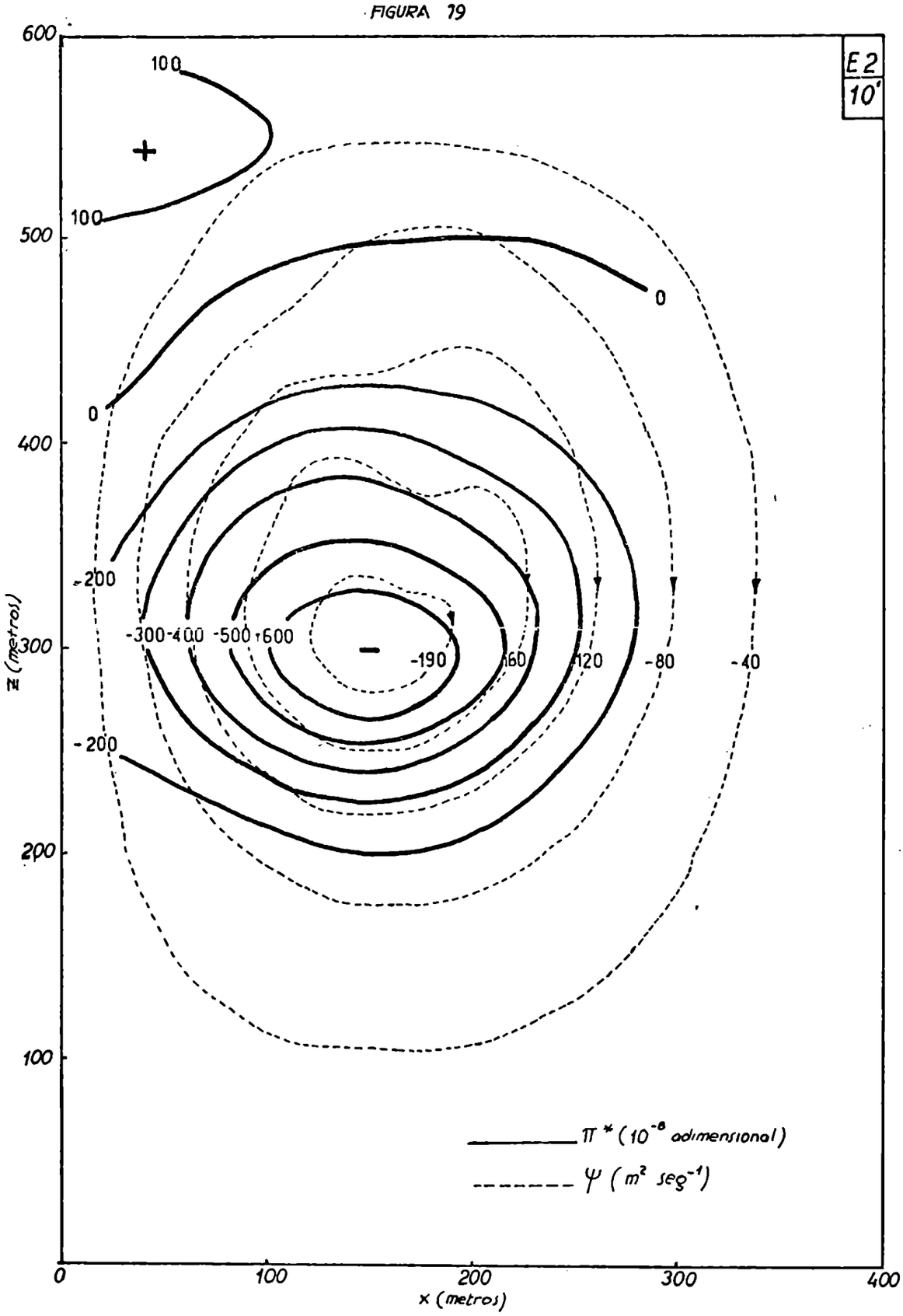
Por otro lado y con el objeto de evaluar cuantitativamente la contribución de la fuerza (por unidad de masa) debida al campo de perturbación de la presión (frente al empuje ascensional), se calculó a partir de los resultados de éste trabajo, la magnitud de los términos primero y segundo del segundo miembro de la ecuación (2.16). Se compro-

FIGURA 18



Perturbación de la presión (π^*) con la distribución de la función corriente (ψ) al cabo de 5 minutos

FIGURA 19



Perturbación de la presión con la distribución de la función corriente (ψ) al cabo de 10 minutos

bó que, al cabo de seis minutos, ya ambos términos tienen un orden de magnitud equivalente (10^{-3} m/seg^2). Es decir, la fuerza debida al gradiente vertical de perturbación de la presión, es del mismo orden de magnitud que el término de empuje ascensional ("buoyancy") en la ecuación vertical de movimiento. Este resultado señala la inconveniencia de eliminar, como en muchos modelos unidimensionales, el término correspondiente a la fuerza debida al gradiente de perturbación de la presión.

CAPITULO 5

CONCLUSIONES

La adopción de un modelo de convección chata y seca con simetría rectilínea, tomando como base las ecuaciones que aproximaron Ogura y Phillips, junto a un adecuado esquema de diferencias finitas para la resolución numérica, permitió la consistencia energética y por ende la confiabilidad en los cálculos numéricos. La inclusión de una fuente de calor variable con el tiempo, muestra que la disipación de energía interna es marcadamente más intensa que la disipación observada cuando se considera una fuente constante. Por otro lado, en todos los experimentos numéricos realizados en éste trabajo, se comprobó que el máximo exceso de temperatura potencial tuvo lugar en los primeros minutos de la evolución convectiva. Este valor máximo, fué asociado a la fuente de calor, cuando aún la convección no inició su desarrollo.

En los primeros minutos de cada experimento, se observó el desarrollo de una circulación de tipo vórtice anular que se intensifica con el tiempo. Esta circulación es semejante a la que se puede observar en una celda de Bénard. La distribución espacial de vorticidad permite observar la presencia de un anillo marcadamente dominante, girando todo el sistema alrededor del mismo y acompañándolo en su movimiento. En todo este proceso, el anillo dominante constituye uno de los elementos dinámicos más importantes, en lo que hace al campo de movimiento. Este anillo, además, es el que delimita la forma de la burbuja.

La configuración de la burbuja fué modificada cuando la fuente de calor pasó de ser una fuente constante a una variable con el tiempo. Mientras la fuente se mantuvo constante, la forma de la burbuja se asemejó a un hongo, observándose la presencia de una columna caliente que sirvió de conección entre la burbuja y la fuente. Cuando la fuente disminuyó su intensidad con el tiempo, la forma de la burbuja se modificó sustancialmente a partir de los cuatro minutos de la evolución convectiva. La burbuja se separó de la fuente de calor, perdiendo la rama caliente que sirvió de unión y su forma, fué similar a la que se obtuvo en el trabajo de Malkus y Witt.

Se comprobó que la mezcla con el entorno, reduce los valores máximos en la velocidad y en el exceso de temperatura potencial, como así también en el campo de perturbación de la presión. Cuantitativamente, se encontró que el máximo de velocidad vertical se redujo en 12,3%, cuando actuó la mezcla turbulenta. La reducción en la temperatura fué del 19%.

En el análisis de la evolución del campo de perturbación de

la presión, se encontró que el campo de movimiento pasa a ser dominante, frente al campo de temperatura, en la distribución bárica á medida que transcurre el tiempo.

Por último, el mismo orden de magnitud entre la fuerza debida al gradiente vertical de perturbación de la presión y la debida al empuje ascensional (buoyancy) en la ecuación vertical de movimiento, señala la necesidad de retener el término de presión en el modelado de la convección térmica.

REFERENCIAS

ARAKAWA, A., 1962: "A computational design for the long term integration of the equation of atmospheric motion". Report University of California, Los Angeles.

AUSTIN, J.M. and A. FLEISHER, 1948: "A thermodynamics analysis of cumulus convection. J. Meteor., 5, 240-243.

BATCHELOR, G.K., 1953: "The condition for dynamical similarity of motions of a frictionless perfect-gas atmosphere". Quart. J. R. Meteor. Soc., 79, 224-235.

BJERKNES, J., 1938: "Saturated-adiabatic ascent of air through dry-adiabatically descending environment". Quart. J.R. Meteor. Soc., 64, 325-330.

BYERS, H.R., and R.R. BRAHAM, 1949: "The thunderstorm". U.S. Govt. Printing Office, Washington, D.C.

DUTTON, J.A. and G.H. FICHTL, 1969: "Approximate equations of motion for gases and liquids". J. Atmos. Sci., 26, 241-254.

FISCHER, E.L., 1961: "A theorical study of the sea breeze". J. Meteor., 18, 216-233.

HANE, C.E., 1973: "The squall line thunderstorm: Numerical experimentation". J. Atmos. Sci., 30, 1672-1690.

HALTINER, G.J., 1971: "Numerical weather prediction". John Wiley and Sons Inc., New York. N.Y.

HOUGHTON, H.G. and H.E. CRAMER, 1951: "A theory of entrainment in convective currents". J. Meteor., 8, 95-102.

KASAHARA, A., 1961: "A numerical experiment on the development of a tropical cyclone". J. Meteor., 18, 259-282.

KESSLER, E. III, 1969: "On the distribution and continuity of water substance in atmospheric circulations". Meteor. Monog., 10, N° 32.

LANGMUIR, I., 1948: "The production of rain by a chain reaction in cumulus clouds at temperatures above freezing. J. Meteor., 5, 175-192.

LEE, J.L., 1971: "A numerical study of shallow convection". Report N° 19, NSF GA-13818, 93 pp.

LEVINE, J., 1959: "Spherical vortex theory of buble like motion in cumulus clouds". J. Meteor., 16, 653-662.

LILLY, D.K., 1962: "On the numerical simulation of buoyant convection". Tellus, 14, 148-172.

LUDLAM, F.H. and R.S. SCORER, 1953: "Buble theory of penetrative convection". Quart. J.R. Meteor. Soc., 79, 94-103.

MALKUS, J.S., 1960: "Recent developments in studies of penetrative convection and an application to hurricane cumulonimbus towers". Cumulus Dynamics. Pergamon Press, Oxford.

MALKUS, J.S. and R.S. SCORER, 1955: "The erosion of cumulus towers". J. Meteor., 12, 43-57.

MALKUS, J.S. and G. WITT, 1959: "The evolution of a convective element: A numerical calculation". The atmosphere and the sea in motion. New York, The Rockefeller Institute Press.

MILLER, M.J. and R.P. PEARCE, 1974: "A three-dimensional primitive equation model of cumulonimbus convection". Quart. J.R. Meteor, Soc., 100, 133-154.

MORTON, B.R., G.I. TAYLOR and J.S. TURNER, 1956: "Turbulent gravitational convection from maintained and instantaneus sources". Proc. Roy. Soc., A 234, 1-23.

MURRAY, F.W. and L.R. KOENING, 1972: "Numerical experiments on the relation between microphysics and dynamics in cumulus convection". Mon. Wea. Rev., 100, 717-732.

NICKERSON, E.C., 1965: "A numerical experiment in buoyant convection involving the use of a heat source". J. Atmos. Sci., 22, 412-418.

NUÑEZ, M.N., 1977: "Consideraciones sobre la utilización de un modelo

unidimensional de convección, con fines hidrometeorológicos". INCyTH. Informe Técnico N° 9.

OGURA, Y., 1962: "Convection of isolated masses of buoyant fluid: A numerical calculation". J. Atmos. Sci., 19, 492-502.

OGURA, Y., 1963: "A review of numerical modeling research on small scale convection in the atmosphere". Meteor. Monog., 5, N° 27.

OGURA, Y. and J.G. CHARNEY, 1962: "A numerical model of thermal convection in the atmosphere". Proc. of the Int. Symp. Numerical Weather Prediction, Tokyo, Meteor. Soc. Japan, 431-452.

OGURA, Y. and N.W. PHILLIPS, 1962: "Scale analysis of deep and shallow convection in the atmosphere". J. Atmos. Sci., 19, 173-179.

OGURA, Y. and T. TAKAHASHI, 1971: "Numerical simulation of the life cycle of a thunderstorm cell". Monthly Wea. Review, 99, 895-911.

PHILLIPS, N.W., 1959: "An example of nonlinear computational instability". The atmosphere and the sea in motion. New York, The Rockefeller Institute Press.

RALSTON, A. and S.W. HERBERT, 1960: "Mathematical methods for digital computers". Vol. I. John Wiley and Sons In., New York, N.Y.

SAUNDERS, P.M., 1961: "An observational study of cumulus". J. Meteor., 18, 451-467.

SCORER, R.S., 1957: "Experiments on convection of isolated masses of buoyant fluid". J. Fl. Mech., 2, 583-594.

SPIEGEL, E.A. and G. VERONIS, 1960: "On the Boussinesq approximation for a compressible fluid". Astrophys. J., 131, 442-447.

SQUIRES, P. and J.S. TURNER, 1962: "An entraining jet model for cumulonimbus updrafts". Tellus, 14, 422-434.

STOMMEL, H., 1947: "Entrainment of air into a cumulus cloud". J. Meteor., 4, 91-94.

TURNER, J.S., 1962: "The starting plume in neutral surroundings". J. Fl. Mech., 13, 356-368.

WEINSTEIN, A.J., 1968: "A numerical model of cumulus dynamics and micro physics". Ph. D. thesis, Pennsylvania State University.

WEINSTEIN, A.I. and L.G. DAVIS, 1968: "A parameterized numerical model of cumulus convection". Report N° 11, NSF GA-777.