

Tesis de Posgrado

Desarrollo de un método de estimación cuantitativa de la difusión atmosférica basado en la transformación de variables

Mazzeo, Nicolás Antonio

1977

Tesis presentada para obtener el grado de Doctor en Ciencias Meteorológicas de la Universidad de Buenos Aires

Este documento forma parte de la colección de tesis doctorales y de maestría de la Biblioteca Central Dr. Luis Federico Leloir, disponible en digital.bl.fcen.uba.ar. Su utilización debe ser acompañada por la cita bibliográfica con reconocimiento de la fuente.

This document is part of the doctoral theses collection of the Central Library Dr. Luis Federico Leloir, available in digital.bl.fcen.uba.ar. It should be used accompanied by the corresponding citation acknowledging the source.

Cita tipo APA:

Mazzeo, Nicolás Antonio. (1977). Desarrollo de un método de estimación cuantitativa de la difusión atmosférica basado en la transformación de variables. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad de Buenos Aires.

http://digital.bl.fcen.uba.ar/Download/Tesis/Tesis_1539_Mazzeo.pdf

Cita tipo Chicago:

Mazzeo, Nicolás Antonio. "Desarrollo de un método de estimación cuantitativa de la difusión atmosférica basado en la transformación de variables". Tesis de Doctor. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad de Buenos Aires. 1977.

http://digital.bl.fcen.uba.ar/Download/Tesis/Tesis_1539_Mazzeo.pdf

EXACTAS UBA

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales



UBA

Universidad de Buenos Aires

11/10

UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES

FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

DEPARTAMENTO DE METEOROLOGIA

DESARROLLO DE UN METODO DE ESTIMACION CUANTITATIVA
DE LA DIFUSION ATMOSFERICA BASADO EN LA TRANSFORMACION
DE VARIABLES

Nicolás Antonio Mazzeo

1539

1539
ej. 2

-1977-

INDICE

RESUMEN	I
1. INTRODUCCION	
1.1 Consideraciones generales	1
1.2 Conceptos básicos de un sistema teórico de difusión atmosférica	2
1.3 Aplicabilidad de los diferentes métodos básicos	3
1.4 Fórmulas ideales de difusión atmosférica	5
2. ASPECTOS TEORICOS DE LA DIFUSION ATMOSFERICA	
2.1 Generalidades	7
2.2 La ecuación fundamental de la difusión	7
2.3 La difusividad turbulenta	8
2.4 Resolución analítica de la ecuación de difusión simplificada	9
2.5 La ecuación de difusión bidimensional	11
3. ECUACION DE DIFUSION	
3.1 Aspectos generales	13
3.2 Expresiones de las difusividades turbulentas y de la velocidad del viento	13
3.3 Condiciones de contorno	14
3.4 Casos especiales	14
4. CONSIDERACIONES GENERALES SOBRE EL ANALISIS DIMENSIONAL GENERALIZADO Y LA TRANSFORMACION DE VARIABLES	16
5. RESOLUCION DE LA ECUACION DE DIFUSION	
5.1 La ecuación de difusión a considerar	17
5.2 Solución mediante el análisis dimensional ordinario	18
5.3 Solución mediante la transformación de variables	19
5.4 Casos especiales	23
6. DETERMINACION DE LOS VALORES NUMERICOS DE LOS COEFICIENTES	
6.1 Aspectos generales	24
6.2 Determinación de α y U	24
6.3 Determinación de δ y λ_2	26

INDICE

6.3.1	Condiciones de inestabilidad atmosférica ($x_3/L < 0$)	26
6.3.2	Condiciones de estabilidad atmosférica ($x_3/L > 0$)	27
6.3.3	Determinación de δ	27
6.3.4	Determinación de λ_2	27
6.4	Determinación de β y λ_1	29
6.5	Determinación de δ'	31
6.6	Determinación de ϕ	31
6.7	Fórmula general de difusión atmosférica	32
7.	EVALUACION DE LA FORMULA GENERALIZADA DE DIFUSION	33
8.	CONCLUSIONES	35
9.	REFERENCIAS	37
	TABLA I	39
	FIGURAS	41

RESUMEN

El deterioro del medio ambiente humano está alcanzando en algunas regiones de nuestro planeta límites irreversibles. En el caso particular de la contaminación atmosférica, el cálculo de la concentración de contaminantes en aire en función de la intensidad de emisión de las fuentes y de las características del flujo atmosférico, adquiere especial importancia. La existencia de diferentes fórmulas matemáticas destinadas al uso práctico-rutinario en problemas de difusión atmosférica, demuestra el interés alcanzado en este campo. Sin embargo, estas ecuaciones que se adaptan bien a los datos experimentales en condiciones ideales, atmósfera adiabática y terreno uniforme sin relieve, difieren considerablemente de las mediciones en casos con flujo atmosférico estratificado y superficies rugosas. Por otra parte, dichas fórmulas se desarrollaron mediante la integración de la ecuación de difusión en casos especiales (en particular suponiendo difusión "Fickiana"). Otra dificultad de la aplicación de estas fórmulas consiste en la dependencia del cálculo de la concentración de una considerable cantidad de observaciones.

Teniendo en cuenta estas consideraciones se desarrolla un modelo generalizado de difusión atmosférica para fuentes emitiendo continuamente contaminantes desde superficie. Para ello se emplea la ecuación de difusión tridimensional con difusividades turbulentas lateral y vertical y con velocidad media del viento variando potencialmente con la altura con diferentes exponentes. Esta ecuación es irresoluble mediante métodos analíticos. Por ello se utilizó el análisis dimensional.

Aplicando el análisis dimensional ordinario, la solución encontrada depende de cinco números argumentales, mientras que mediante el empleo de la técnica de transformación de variables, similar al análisis dimensional generalizado se halla una función dependiente de tres variables. Esto implica que este último procedimiento suministra mayor información que el análisis dimensional ordinario. Este método es utilizado por primera vez en problemas de difusión atmosférica.

A continuación, se elaboran diferentes métodos tendientes a encontrar los valores numéricos de los distintos coeficientes que intervienen en la fórmula generalizada de difusión.

Todos los parámetros que intervienen en ese modelo dependen del coeficiente de estabilidad atmosférica de Monin. Asimismo se encuentran las formas de las funciones argumentales.

La consideración del caso particular en que los exponentes de las difusividades turbulentas y de la velocidad del viento se anulan demuestra que la fórmula generalizada de difusión tiende, bajo esas condiciones a la ecuación de la "pluma gaussiana".

Finalmente, se compara el modelo generalizado de difusión y el de la "pluma gaussiana" con datos observacionales obtenidos del "Project Praire Grass" mediante una prueba estadística, verificándose que el primero se adapta mucho mejor a las mediciones que el segundo.

De esto se desprende que la fórmula generalizada de difusión deducida mediante la transformación de variables puede ser utilizada con éxito en el cálculo de la concentración de contaminantes en aire, siendo superior a otras empleadas hasta el presente.

1. INTRODUCCION

1.1 CONSIDERACIONES GENERALES

La contaminación del ambiente humano se ha convertido en una de las principales crisis de la sociedad actual. Las aguas del planeta están afectadas por los residuos provenientes de las grandes industrias, los desagües cloacales, el uso de pesticidas y herbicidas y por los desechos radioactivos. La atmósfera de las grandes ciudades está impregnada de sustancias tóxicas provenientes de la combustión de los automotores, de la producción de energía, de la industria y de las actividades domésticas y comerciales. La erosión y las catástrofes en gran escala, lenta pero persistentemente amenazan con transformar la tierra en una superficie muerta, sin vida.

Sin embargo, de los tres grandes recursos naturales: el aire, el agua y el suelo, sólo el primero no puede ser purificado o controlado por el hombre una vez contaminado, debido a que los contaminantes emitidos a la atmósfera son removidos o diluidos exclusivamente mediante procesos naturales. Por ejemplo, mientras que el agua de los ríos puede y a veces se efectúa, ser depurada en algún lugar, corriente abajo del punto de inyección de los contaminantes no existe tal posibilidad con el aire. Por otra parte, los contaminantes provenientes de diferentes tipos de fuentes de contaminación al ser introducidos en la atmósfera se mezclan y no es posible distinguirlos. Esto significa que la estimación numérica de la concentración de contaminantes en el aire adquiere singular importancia. Con ese fin son utilizados los modelos de difusión atmosférica. Un modelo de difusión atmosférica está constituido por una o un sistema de ecuaciones matemáticas que describen el proceso de transporte y dispersión de contaminantes en el aire y permite mediante solución calcular la concentración de los mismos en función de la intensidad de la emisión de las fuentes y de las características de la atmósfera.

Dichos modelos pueden ser utilizados, entre otros, con los siguientes objetivos:

- determinar las contribuciones relativas de diferentes clases de fuentes emisoras a la contaminación del aire de una región.

- encontrar la mejor ubicación para la instalación de muestreadores de contaminantes y de estaciones meteorológicas destinadas a la vigilancia de la calidad del aire de una zona.
- evaluar los efectos sobre la calidad del aire de futuras fuentes de emisión de contaminantes que podrían derivar del avance de la industrialización y/o del crecimiento demográfico.
- contribuir a la consideración de los resultados obtenidos mediante la reducción de las emisiones de contaminantes.
- predecir los niveles de contaminación del aire.

El desarrollo de un sistema destinado a calcular la concentración de contaminantes en aire partiendo del conocimiento de la intensidad de la emisión de las fuentes y de las condiciones atmosféricas contiene tres componentes básicas. La primera de ellas consiste en una teoría mediante la cual, estén al menos implícitas las relaciones entre la dispersión de los contaminantes y las características dinámicas de la atmósfera. La segunda componente exige que esa teoría, para el uso operativo, sea expresada por medio de una fórmula con el objeto de calcular la concentración en función de las características de las fuentes de emisión de los contaminantes y de la atmósfera. Por último, la tercera, requiere de mediciones de contaminantes con el objeto de comprobar el grado de aproximación del sistema teórico y de esta forma generalizar sus resultados e intentar la predicción de niveles de contaminación.

1.2 CONCEPTOS BASICOS DE UN SISTEMA TEORICO DE DIFUSION ATMOSFERICA

El tratamiento teórico del proceso de la difusión de contaminantes en un flujo turbulento se puede desarrollar siguiendo tres principales líneas, a saber:

- la relación "transporte-gradiente", mediante la cual el transporte turbulento de los contaminantes a través de un plano está representado por el producto de la difusividad turbulenta (1) y el gradiente perpendicular al plano de la concentración de contaminantes (2).
- la teoría estadística de la turbulencia, que involucra las descripciones y leyes de las velocidades y de las trayectorias de partículas "típicas" en un fluido (3).
- la teoría de la semejanza (4).

1.3 APLICABILIDAD DE LOS DIFERENTES METODOS BASICOS

La relación "transporte-gradiente" tiene su analogía con el transporte molecular y la teoría cinética, intercambiando moléculas por "torbellinos" turbulentos. Esta semejanza implica, inevitablemente, la elección de una relación de las escalas correspondientes al proceso y al efecto. De esta forma, así como la difusión molecular puede describirse satisfactoriamente cuando es efectiva en dimensiones suficientemente grandes comparadas con la separación y el recorrido libre de las moléculas, el transporte de "torbellinos" turbulentos es aplicable sólo si el tamaño de la pluma de contaminantes es grande en relación con las dimensiones y el rango de acción de los "torbellinos". Este criterio está implícito en las conclusiones de la teoría estadística, que postula que después de un desplazamiento de las partículas suficientemente grande coincidentemente con un tiempo (T) de dispersión de semejante dimensión, la desviación standard de las posiciones de una partícula (σ) es proporcional a $T^{\frac{1}{2}}$. Esta relación también es indicada por la teoría del transporte-gradiente con $K = \text{cte}$ denominada también difusión "Fickiana". También, la teoría de la semejanza predice que en la capa superficial atmosférica en condiciones neutrales $\sigma_{x_3} \propto T$, en este caso T es el tiempo que tardan las partículas en alcanzar la altura x_3 ; mientras que la teoría del transporte-gradiente postula que $K \propto x_3$. Estos son ejemplos de la interrelación entre las diferentes teorías.

La teoría de estadística de la turbulencia es cinemática y está vinculada con las fluctuaciones turbulentas de las velocidades de las partículas. Dadas las relaciones estadísticas de estas velocidades, es posible transformarlas matemáticamente en parámetros estadísticos del desplazamiento de las partículas, bajo condiciones de homogeneidad y estacionalidad del flujo. La suposición de homogeneidad es aceptable para la componente horizontal de la turbulencia perpendicular al viento (v_2'), pero no para la vertical (v_3'). En esta teoría, el parámetro importante es el coeficiente lagrangiano de autocorrelación y en especial su variación con el tiempo. Sin embargo, debido a que generalmente, las mediciones del flujo

atmosférico se realizan en un sistema "fijo" sobre la superficie terrestre (sistema euleriano) es necesario realizar una transformación del sistema lagrangiano al euleriano. Una teoría general, en este sentido, no fue desarrollada, pero existen diferentes procedimientos que intentan vincular la relación entre las escalas temporales lagrangiana (t_L) y euleriana (t_E) con la inversa de la intensidad de la turbulencia (i). La constante de proporcionalidad (β), aún no determinada definitivamente, parece ser 0.44 por su similitud con la derivada por la teoría de la semejanza para la capa superficial de la atmósfera. La forma de la difusividad turbulenta derivada a partir de una combinación de esta teoría con la relación "transporte-gradiente" es $\sigma_{x_k}^2 = 2 K_{x_k} T$, que para tiempos de difusión suficientemente grandes se aproxima asintóticamente a $\sigma_{x_3}^2 = 2 \bar{v}_3'^2 t_L T$. De la sustitución de $t_L = \beta t_E$ y la combinación con los resultados experimentales: $\bar{v}_1 t_E / \lambda_m = 0.23$ y $(\bar{v}_3'^2)^{1/2} = 0.3 \epsilon \lambda_m$, (donde λ_m es la longitud de onda correspondiente al máximo del espectro de v_3' y ϵ es el término de disipación viscosa en la ecuación de energía cinética turbulenta) resulta que $K \doteq \frac{\beta i}{4.4} \bar{v}_3'^2 \lambda_m$ ó $K \doteq \frac{\beta i}{6.6} \epsilon^{1/3} \lambda_m^{4/3}$.

De resultados experimentales se obtiene que $\bar{v}_1 t_E = 0.73 x_3$ y que $\bar{v}_3'^2 / v_*^2 = 1.25$ para condiciones neutrales ($v_* =$ velocidad de fricción). Luego, resulta $K = v_* k x_3$ ($k = 0.4$ es la constante de von Kármán).

El principio de la semejanza utilizado en el contexto de la difusión de partículas fue elaborado originalmente para describir la dispersión vertical para condiciones neutrales (4) y posteriormente extendido a atmósferas estratificadas (5). Las principales dificultades de esta teoría radican en la aplicación a la dispersión lateral y a la extensión al flujo estratificado. Sin embargo, para la estimación de la dispersión vertical de partículas cerca de la superficie terrestre la teoría provee resultados satisfactorios y se puede extender para diferentes tipos de rugosidad del terreno dentro de la capa superficial. Esta teoría también demuestra que para casos neutrales resulta $K = v_* k x_3$. Este método fue utilizado posteriormente para el cálculo de la variación de la concentración de contaminantes en aire con la distancia a una fuente de emisión puntual continua.

1,4 FORMULAS IDEALES DE DIFUSION ATMOSFERICA

Para el cálculo numérico de la concentración de contaminantes en aire a diferentes distancias de la fuente de emisión existen, básicamente, dos clases de expresiones matemáticas. Por una parte, están las fórmulas de naturaleza empírica que establecen una relación estadística entre las concentraciones de contaminantes obtenidas por medio de experimentos de difusión atmosférica y diferentes parámetros meteorológicos (7) y que son localmente efectivas, pero que carecen de validez general. Por otro lado, los tres principios básicos enunciados en la sección anterior es preciso enunciarlos en forma general con un mínimo de dependencia de las mediciones de la concentración de contaminantes y un máximo de condicionamiento de las características del flujo de la atmósfera. En general, los desarrollos básicos principales que involucran los principios enunciados anteriormente son cuatro.

En la primera adaptación de la teoría estadística (8) la idea básica central consistió en representar la acción dispersiva de la atmósfera en función del perfil vertical de la velocidad del viento cerca de la superficie terrestre. Esta representación combinó la relación del transporte-gradiente con la teoría estadística adoptando una forma del coeficiente lagrangiano de autocorrelación ($R[\xi]$), con el objeto de relacionar la tensión superficial del aire (τ_0) y el perfil vertical de la velocidad del viento en la forma:

$$\tau_0 = f(\eta) (\bar{v})^{2-\eta} x_3^{-\eta}, \text{ donde } \eta \text{ es un parámetro introducido}$$

en la expresión del coeficiente de autocorrelación y que se determina desde el perfil vertical del viento. Las desviaciones standards de la distribución espacial lateral y vertical de los contaminantes

($\sigma_{x_2} - \sigma_{x_3}$) son proporcionales a la potencia ($1 - \eta/2$)

de la distancia a la fuente de emisión y los coeficientes generalizados de dispersión ($C_{x_2} - C_{x_3}$) utilizados en este modelo dependen también del parámetro de estabilidad atmosférica (η).

Este desarrollo determina que la concentración decrece con la inversa de la potencia ($n - 2$) de la distancia a la fuente puntual que emite continuamente contaminantes. La expresión matemática que deriva de este tratamiento fue ampliamente utilizada y aplicada; sin

embargo la mayor dificultad se encuentra en la interpretación física de los parámetros n , C_{x_2} , C_{x_3} .

Como se mencionó anteriormente la relación "transporte-gradiente" está involucrada en el desarrollo anterior (8), pero la solución a la ecuación parabólica de difusión fue establecida en forma satisfactoria en 1949 (9) con la incorporación de leyes experimentales deducidas en laboratorio. Esas relaciones empíricas fueron posteriormente comparadas con los resultados de la teoría de la semejanza aplicada a la capa superficial atmosférica. La principal ventaja en la utilización de la teoría del transporte-gradiente sobre la estadística es que la primera determina la forma de la distribución vertical de la concentración de contaminantes mientras que, en cualquier aplicación directa de la última debe suponerse la forma de esa distribución.

En la segunda adaptación de la teoría estadística (10), la característica esencial consiste en considerar que la dispersión de las partículas están relacionadas directamente con las condiciones de la turbulencia, a través de la suposición de semejanza entre las funciones de autocorrelación lagrangianas y eulerianas. Debido a ello se consideró que las escalas temporales lagrangiana y euleriana están relacionadas por el parámetro β . Aún cuando, la adaptación original dependió de la especificación empírica de β basada en diferentes experimentos, en la actualidad es posible determinar este parámetro en función de la intensidad de la turbulencia.

El último de los desarrollos de fórmulas básicas de difusión está relacionado con la teoría de la semejanza lagrangiana. Este procedimiento, consiste en encontrar una expresión de la dispersión vertical, pues no tiene validez para la dispersión lateral, y suponiendo una forma de la distribución vertical de los contaminantes y combinándoles, estimar numéricamente ~~la concentración~~ la concentración de contaminantes en aire (11).

2. ASPECTOS TEORICOS DE LA DIFUSION ATMOSFERICA

2.1 GENERALIDADES

Las partículas introducidas en la atmósfera son separadas entre sí por la acción de la turbulencia. Este proceso se denomina difusión atmosférica. El fenómeno de la difusión turbulenta atmosférica no ha sido unívocamente determinado, debido a que no existe un modelo único que desarrolle todos sus aspectos físicos. El objetivo básico de un modelo de difusión atmosférica es encontrar una expresión destinada a la estimación numérica de la concentración de contaminantes en aire en función de las características de las fuentes de emisión y de la atmósfera.

Cualquier expresión completa que abarque la distribución espaciotemporal de los contaminantes emitidos desde una fuente puntual, deberá contener los siguientes aspectos fundamentales:

- a. La forma de la distribución de la concentración en diferentes tiempos y/o puntos del espacio.
- b. Las dimensiones de la nube o de la pluma de contaminantes.
- c. Una expresión de la ecuación de conservación de los contaminantes.

2.2 LA ECUACION FUNDAMENTAL DE LA DIFUSION

La teoría de difusión aplicable a la atmósfera, denominada teoría "K" o semiempírica contiene (2) la ecuación de continuidad, que se puede expresar de la siguiente forma:

$$\frac{\partial C}{\partial t} + v_k \frac{\partial C}{\partial x_k} = 0 \quad k = 1, 2, 3 \quad (1)$$

donde C es la concentración de contaminantes en aire.

v_k es la componente de la velocidad del viento en cada dirección K.

Por otra parte, en un flujo turbulento se pueden establecer las siguientes relaciones:

$$v_k = \bar{v}_k + v'_k \quad (2)$$

y

$$C = \bar{C} + C'$$

donde \bar{v}_k es la velocidad media del aire

V'_k es la fluctuación turbulenta de la velocidad del aire

\bar{C} es la concentración media

C' es la fluctuación turbulenta de la concentración.

Suponiendo que la atmósfera es incompresible:

$$\frac{\partial v_k}{\partial x_k} = 0 \quad [3]$$

e introduciendo las relaciones (2) y (3) en (1) resulta:

$$\frac{\partial \bar{C}}{\partial t} + \bar{v}_k \frac{\partial \bar{C}}{\partial x_k} = - \frac{\partial \overline{v'_k C'}}{\partial x_k} \quad [4]$$

Análogamente a la ley de Newton para la tensión superficial molecular, se puede escribir:

$$\overline{v'_k C'} = -K_k \frac{\partial \bar{C}}{\partial x_k} \quad [5]$$

donde K_k es la componente en la dirección k de la difusividad turbulenta.

Combinando (4) y (5) resulta:

$$\frac{\partial \bar{C}}{\partial t} + \bar{v}_k \frac{\partial \bar{C}}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_k} \left(K_k \frac{\partial \bar{C}}{\partial x_k} \right) \quad [6]$$

Esta expresión constituye la ecuación de difusión turbulenta atmosférica. La ecuación (6) fue investigada por diferentes autores (8)

De esta forma, el problema de la difusión turbulenta atmosférica consiste en resolver la ecuación (6) bajo apropiadas condiciones de contorno (límites e iniciales). Esta es la base de la relación transporte-gradiente.

2.3 LA DIFUSIVIDAD TURBULENTA

Si las difusividades turbulentas (K_k) son constantes, la difusión se denomina "Fickiana". De esa forma la ecuación (6) se transforma en:

$$\frac{\partial \bar{C}}{\partial t} + \bar{v}_k \frac{\partial \bar{C}}{\partial x_k} = K_k \frac{\partial^2 \bar{C}}{\partial x_k \partial x_k} \quad [7]$$

La ecuación (7) fue tratada en los primeros estudios sobre la difusión de contaminantes en la atmósfera. Sin embargo, la consideración de $K_K = \text{cte.}$ es inaceptable físicamente en el proceso de la difusión turbulenta atmosférica (8).

La difusividad turbulenta (K_K) puede ser interpretada como una medida del flujo de contaminantes a través de un plano perpendicular a la dirección del gradiente de la concentración. La difusividad turbulenta es un parámetro inherente al aire. Su forma funcional es motivo de discusiones. Una suposición (2) consiste en considerar que cuando la turbulencia es esencialmente mecánica

$K = K_M$ y cuando existen condiciones de convección térmica, $K = K_T$. Donde K_M es la difusividad turbulenta para el momento y K_T es la difusividad turbulenta para el calor, definidas por las siguientes relaciones:

$$K_M = - \frac{\overline{V_1' V_3'}}{\frac{\partial \bar{V}_1}{\partial x_3}} \quad K_T = - \frac{\overline{\theta' V_3'}}{\frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x_3}}$$

donde $\theta = \bar{\theta} + \theta'$ es la temperatura del aire.

Por otra parte, existen suposiciones basadas en evidencias experimentales (12) de que las difusividades turbulentas para el calor y las partículas son iguales sobre la superficie terrestre, mientras que sobre el océano se sugiere $K = K_M$ (13).

Sin embargo, no hay un criterio unificado en esta consideración y en la forma funcional de exponer la difusividad turbulenta para las partículas.

2.4 RESOLUCION ANALITICA DE LA ECUACION DE DIFUSION SIMPLIFICADA

Para una emisión instantánea desde un punto, considerando que la nube de contaminantes es transportada con la velocidad media del viento, que el origen del sistema de coordenadas esté fijo en el centro de gravedad de la nube (sistema de referencia cuasilagrangiano) con el eje X_1 en la dirección del viento, en un caso unidimensional y con difusión "Fickiana", la ecuación (6) se transforma en

$$\frac{\partial \bar{C}}{\partial t} = K_{x_1} \frac{\partial^2 \bar{C}}{\partial x_1^2} \quad (8)$$

Las condiciones de contorno son las siguientes:

- a. $\bar{C} \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$ ($-\infty < x_1 < \infty$)
 b. $\bar{C} \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow 0$ ($\forall x_1$, excepto en $x_1=0$)
 c. $\bar{C} \rightarrow \infty$ cuando $t \rightarrow 0$ para $x_1=0$
 d. $\int_{-\infty}^{\infty} \bar{C} dx_1 = Q$

donde Q es la cantidad total de contaminantes emitidos a la atmósfera.

La solución de la ecuación (8) bajo esas condiciones de contorno es la siguiente:

$$\bar{C} = \frac{Q}{(4\pi K_{x_1} t)^{1/2}} \exp\left[-\frac{x_1^2}{4K_{x_1} t}\right] \quad (9)$$

y para el caso tridimensional, con turbulencia no isotrópica la fórmula de difusión se puede considerar la siguiente:

$$\bar{C}(x_1, x_2, x_3, t) = \frac{Q}{(4\pi t)^{3/2} (K_{x_1} K_{x_2} K_{x_3})^{1/2}} \exp\left[-\frac{1}{4t} \left(\frac{x_1^2}{K_{x_1}} + \frac{x_2^2}{K_{x_2}} + \frac{x_3^2}{K_{x_3}}\right)\right] \quad (10)$$

Por otra parte, la aplicación de la teoría estadística (3) permite obtener, para la difusión de partículas en una atmósfera con turbulencia estacionaria y homogénea, la siguiente relación:

$$\sigma_{x_k}^2 = 2 \overline{v_k'^2} \int_0^T \int_0^{t_1} R(\xi) d\xi dt$$

Esta expresión cuando T tiende a valores grandes se transforma en:

$$\sigma_{x_k}^2 = 2 \overline{v_k'^2} t_L T \quad (11)$$

y si
$$K_{x_k} = \overline{v_k'^2} \int_0^{t_1} R(\xi) d\xi = \overline{v_k'^2} t_L$$

se obtiene
$$\sigma_{x_k}^2 = 2 K_{x_k} T \quad (12)$$

Introduciendo la relación [12] en la ecuación [10], efectuando una transformación de coordenadas a un sistema de ejes fijo sobre la superficie terrestre e integrando resulta:

$$\bar{C}(x_1, x_2, x_3) = \frac{Q'}{2\pi\sigma_{x_2}\sigma_{x_3}\bar{v}_1} \exp\left[-\left(\frac{x_2^2}{2\sigma_{x_2}^2} + \frac{x_3^2}{2\sigma_{x_3}^2}\right)\right] \quad [13]$$

donde Q' es la intensidad de la fuente que emite continuamente contaminantes a la atmósfera.

La ecuación [13] constituye el modelo de la "pluma gaussiana" y es amplia y frecuentemente utilizada en muchos aspectos prácticos de la difusión atmosférica (14).

2.5 LA ECUACION DE DIFUSION BIDIMENSIONAL

El progreso más satisfactorio en el tratamiento de la ecuación [6] fue obtenido en la consideración de un proceso bidimensional correspondiente a la difusión de contaminantes emitidos continuamente a la atmósfera desde una línea de fuentes perpendicular a la dirección del viento. Considerando este caso como estacionario y suponiendo que el transporte de contaminantes debido a la acción del flujo medio atmosférico es mucho mayor que la acción difusora de la turbulencia en la dirección del viento, la ecuación [6] se reduce a la siguiente:

$$\bar{v}_1 \frac{\partial \bar{C}}{\partial x_1} = \frac{\partial}{\partial x_3} \left(K_{x_3} \frac{\partial \bar{C}}{\partial x_3} \right) \quad [14]$$

Las condiciones límites y de continuidad pueden ser expresadas de la siguiente forma:

- $\bar{C} \rightarrow 0$ cuando $x_1, x_3 \rightarrow \infty$
- $\bar{C} \rightarrow \infty$ en $x_1 = x_2 = 0$
- $K_{x_3} \frac{\partial \bar{C}}{\partial x_3} \rightarrow 0$ cuando $x_3 \rightarrow 0$ y para $x_1 > 0$
- $\int_0^\infty \bar{v}_1 \bar{C} dx_3 = Q_L$ para todo valor de x_1

En este caso Q_L es la emisión continua de contaminantes desde la línea de fuentes.

Para las capas de la atmósfera cercanas a la superficie terrestre en condiciones neutrales, se verifica que la velocidad del viento tiene una variación logarítmica con la altura (15).

La introducción de una expresión logarítmica del viento en la ecuación [15] no permite una solución analítica de la misma. Sin embargo, en muchos problemas de ingeniería (16) se utilizan las siguientes expresiones para el perfil vertical de la velocidad del viento y para la componente vertical de la difusividad turbulenta:

$$\bar{v}_1(x_3) = \bar{v}_1(x_3') \left(\frac{x_3}{x_3'} \right)^\alpha \quad [15]$$

$$K_{x_3}(x_3) = K_{x_3}(x_3') \left(\frac{x_3}{x_3'} \right)^\delta \quad [16]$$

donde $\bar{v}_1(x_3')$ y $K_{x_3}(x_3')$ son los valores de \bar{v}_1 y K_{x_3} en la altura x_3' .

La solución de la ecuación (14), introduciendo las expresiones [15] y [16] con las condiciones límites enumeradas anteriormente, es la siguiente:

$$\bar{c}(x_1, x_3) = \frac{Q_1}{\bar{v}_1 \Gamma(s)} \left[\frac{\bar{v}_1}{(\alpha - \delta + 2)^2 K_{x_3}(x_3') x_1} \right]^s \exp \left[- \frac{\bar{v}_1 x_3^{\alpha - \delta + 2}}{(\alpha - \delta + 2)^2 K_{x_3}(x_3') x_1} \right] \quad [17]$$

donde $\Gamma(s)$ es la función gamma de s

$$s = \frac{\alpha + 1}{\alpha - \delta + 2} \quad \text{que es válida cuando } \alpha - \delta + 2 > 0$$

Una alternativa para la capa superficial atmosférica es la aplicación de la ley de las potencias conjugadas (8) que postula que $\delta = 1 - \alpha$. Cuando $\alpha = \delta = 0$ la expresión [17] se transforma en la siguiente:

$$\bar{c}(x_1, x_3) = \frac{Q_1 \bar{v}_1^{1/2}}{[4 \pi K_{x_3}(x_3') x_1]^{1/2}} \exp \left[- \frac{\bar{v}_1 x_3^2}{4 K_{x_3}(x_3') x_1} \right]$$

que es similar a la expresión (9) cuando $t = x_1/\bar{v}_1$.

3. ECUACION DE DIFUSION

3.1 ASPECTOS GENERALES

La ecuación [6] para una fuente puntual que emite continuamente contaminantes a la atmósfera y que está ubicada en el origen del sistema de coordenadas se puede escribir de la siguiente forma:

$$\bar{v}_1 \frac{\partial \bar{c}}{\partial x_1} = \frac{\partial}{\partial x_2} \left(K_{x_2} \frac{\partial \bar{c}}{\partial x_2} \right) + \frac{\partial}{\partial x_3} \left(K_{x_3} \frac{\partial \bar{c}}{\partial x_3} \right) \quad [18]$$

En este caso el sistema de coordenadas está constituido por el eje $X_1 > 0$ en la dirección del viento medio (\bar{v}_1), el eje X_2 horizontal y perpendicular a X_1 , y el eje X_3 en la dirección vertical.

El viento medio (\bar{v}_1) está orientado en la dirección X_1 , por lo tanto $\bar{v}_2 = \bar{v}_3 = 0$, mientras que el transporte horizontal (en la dirección X_1) de los contaminantes es mucho mayor que el término que representa la difusión en esa dirección. Por lo tanto,

$$\bar{v}_1 \frac{\partial \bar{c}}{\partial x_1} \gg \frac{\partial}{\partial x_1} \left(K_{x_1} \frac{\partial \bar{c}}{\partial x_1} \right)$$

De esa forma, la ecuación [6] se transforma en la [18].

3.2 EXPRESIONES DE LAS DIFUSIVIDADES TURBULENTAS Y DE LA VELOCIDAD DEL VIENTO.

Las difusividades turbulentas lateral (K_{x_2}) y vertical (K_{x_3}) serán consideradas variables con la altura (3) (8) (17). De esta forma, se adoptará la hipótesis de la variación potencial con X_3 , expresadas mediante las siguientes relaciones

$$K_{x_2} = K_{x_2}(x_3') \left(\frac{x_3}{x_3'} \right)^\beta \quad [19]$$

$$K_{x_3} = K_{x_3}(x_3') \left(\frac{x_3}{x_3'} \right)^\gamma \quad [20]$$

donde β y γ son parámetros que dependen de la estabilidad atmosférica. Para el perfil del viento se adoptará la ecuación [15]:

$$\bar{v}_1 = \bar{v}_1 (x_3') \left(\frac{x_3}{x_3'} \right)^\alpha \quad [21]$$

donde α es un parámetro que depende de la rugosidad del terreno y de la estabilidad de la atmósfera (18).

3.3 CONDICIONES DE CONTORNO

Las condiciones de contorno y de continuidad que se aplican a la resolución de la ecuación [18] con la introducción de las expresiones [19], [20] y [21] son las siguientes:

- a. $\bar{c} \rightarrow 0$ cuando $x_1, x_2, x_3 \rightarrow \infty$
- b. $\bar{c} \rightarrow \infty$ cuando $x_1 = x_2 = x_3 = 0$
- c. $K_{x_3} \frac{\partial \bar{c}}{\partial x_3} \rightarrow 0$ cuando $x_3 \rightarrow 0$ y para $x_1 > 0$
- d. $\int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \bar{v}_1 \bar{c}(x_1, x_2, x_3) dx_3 dx_2 = Q'$ para todo $x_1 > 0$

La condición a., significa que la acción de procesos turbulentos que ocurren en la atmósfera determinan que la concentración de contaminantes en aire a distancias suficientemente grandes de la fuente de emisión es prácticamente nula.

La condición b., indica que la concentración de contaminantes en aire cerca de la fuente de emisión es muy grande.

La relación c., implica que el transporte vertical turbulento de los contaminantes cerca de la superficie terrestre es nulo o sea que no existe depósito de los contaminantes sobre el suelo (19).

De las relaciones a y b se deduce que la concentración de contaminantes disminuirá a partir de la fuente de emisión en la dirección del viento.

La condición d., implica que la integración de todos los contaminantes dispersos en la atmósfera es igual a la masa de contaminantes emitidos por unidad de tiempo desde la fuente. Esta condición es denominada de continuidad o de conservación de los contaminantes.

3.4 CASOS ESPECIALES

Algunos autores (2) han intentado la solución analítica de la ecuación [18] para los casos en que $\gamma = 1 - \alpha$ en las

expresiones [20] y [21] y $K_{x_2} \propto X_3^\alpha$.

En ese caso emplearon la ley de las potencias conjugadas entre la componente vertical de la difusividad turbulenta y el perfil vertical de la velocidad media del viento. La solución encontrada (3) no se adaptó a los datos experimentales: en condiciones neutrales la concentración calculada fue proporcional a $X_1^{-1.40}$, mientras que los valores observacionales de la concentración disminuyen con $X_1^{-1.75}$. Para que los valores empíricos y calculados se adapten bien es necesario que

$$K_{x_2} = K_{x_2}(X_3') \left(\frac{X_3}{X_3'} \right)^{\frac{1+\alpha(1-3\alpha)}{1+\alpha}}$$

El exponente en condiciones neutrales es cercano a la unidad.

Ninguna solución analítica de la ecuación [18] ha sido encontrada sin restringir los valores del exponente de la expresión [19], sin embargo algunos avances (3) se han encontrado para fuentes que emiten contaminantes a la atmósfera desde el suelo con

$$K_{x_2} \propto X_3^{\alpha+\mu} \quad \text{y} \quad K_{x_3} \propto X_3^\alpha \quad . \text{La solución}$$

general está representada por series que convergen hacia una evaluación numérica apropiada con la consideración de los ocho primeros términos. Un tratamiento especial (3) consideró que K_{x_2} es función de X_2, X_3 ; sin embargo, la comparación con los datos de observaciones demuestra que K_{x_2} no es función de X_2 .

Hasta la actualidad, ningún procedimiento analítico para la integración de la ecuación [18] ha deparado resultados satisfactorios.

4. CONSIDERACIONES GENERALES SOBRE EL ANÁLISIS DIMENSIONAL GENERALIZADO Y LA TRANSFORMACION DE VARIABLES

Algunos autores (20) (21) (22) han aplicado el análisis dimensional generalizado a la resolución de problemas de la mecánica de los fluidos en general y de la atmósfera, en particular. Esta aplicación se basa en la consideración de las ecuaciones que gobiernan los procesos físicos y de las condiciones de contorno. Las soluciones obtenidas por este procedimiento frecuentemente contienen mayor información que las provenientes de la utilización del análisis dimensional ordinario. Por otro lado se demostró (22) que el método del análisis dimensional generalizado es matemáticamente equivalente a un análisis de las ecuaciones gobernantes y de las condiciones de contorno bajo una particular transformación lineal simple de las variables independientes y dependientes involucradas en el problema. Este procedimiento encuentra que los resultados obtenidos mediante el análisis dimensional generalizado pueden ser logrados simple y directamente por la técnica de la transformación de variables, que es puramente matemática sin recurrir a la consideración del Teorema Π de Buckingham del análisis dimensional.

Este método, sólo es aplicable a problemas que involucren ecuaciones y condiciones de contorno que contengan M variables independientes U_m ($m = 1, 2, \dots, M$), N variables dependientes Z_n ($n = 1, 2, \dots, N$) y R constantes p_r ($r = 1, 2, \dots, R$).

La mayoría de estos problemas es de difícil resolución analítica completa y por esta razón el análisis dimensional puede proveer información para ampliar la solución general. La hipótesis principal de este método es la existencia de una solución única. En ese caso la solución estará dada por una relación funcional de la siguiente forma:

$$Z_n = f_n \left\{ U_1, U_2, \dots, U_M; p_1, p_2, \dots, p_R \right\} \quad (22)$$

$n = 1, 2, \dots, N$

Cada una de estas ecuaciones es una relación entre ($M + R + 1$) parámetros. En el análisis dimensional generalizado, basado en la transformación de variables que intervienen en las ecuaciones que gobiernan el proceso y en las condiciones de contorno, las nuevas

variables transformadas resultan U'_m ($m = 1, 2, \dots, M$), Z'_n ($n = 1, 2, \dots, N$) y p'_s ($s = 1, 2, \dots, S$). De esta forma el número de constantes se redujo, tal que $S < R$. En ese caso, es posible encontrar que la solución requerida puede ser expresada por relaciones de la forma:

$$Z'_n = f'_n \left\{ U'_1, U'_2, \dots, U'_M; p'_1, p'_2, \dots, p'_S \right\} \quad [23]$$

$n = 1, 2, \dots, N$

La expresión [23] provee mayor información que la [22], debido a que involucra relaciones entre un número menor de cantidades ($M + S + 1$).

Por lo tanto, es evidente que la solución de las ecuaciones que gobiernan el proceso por la técnica de la transformación de las variables dependientes e independientes que intervienen en las ecuaciones y en las condiciones de contorno, requieren relaciones solamente matemáticas y no necesitan de una composición física del proceso. Los argumentos físicos se utilizan en las expresiones de las ecuaciones y de las condiciones de contorno.

5. RESOLUCIÓN DE LA ECUACION DE DIFUSION

5.1 LA ECUACION DE DIFUSION A CONSIDERAR

La aplicación del análisis dimensional ordinario y de la transformación de variables no han sido considerados en problemas de difusión atmosférica. De esta forma, se intentará la resolución de la ecuación de difusión atmosférica con el objeto de encontrar una expresión de la distribución de la concentración de contaminantes en aire emitidos desde una fuente puntual continua ubicada en superficie. La ecuación de difusión atmosférica, las representaciones de las difusividades turbulentas lateral y vertical, y de la velocidad del viento representadas por las expresiones [18] , [19] , [20] , [21] y las condiciones de contorno introducidas en la sección 3.3 pueden sintetizarse en la siguiente forma:

La ecuación de difusión:

$$\bar{v}_1 \frac{\partial \bar{c}}{\partial x_1} = \frac{\partial}{\partial x_2} \left(K_{x_2} \frac{\partial \bar{c}}{\partial x_2} \right) + \frac{\partial}{\partial x_3} \left(K_{x_3} \frac{\partial \bar{c}}{\partial x_3} \right) \quad (24)$$

Las relaciones para el perfil del viento y las difusividades turbulentas:

$$\bar{v}_1 = \bar{v}_1(x_3') \left(\frac{x_3}{x_3'} \right)^\alpha = U x_3^\alpha \quad (25)$$

$$K_{x_2} = K_{x_2}(x_3') \left(\frac{x_3}{x_3'} \right)^\beta = \lambda_1 x_3^\beta \quad (26)$$

$$K_{x_3} = K_{x_3}(x_3') \left(\frac{x_3}{x_3'} \right)^\gamma = \lambda_2 x_3^\gamma \quad (27)$$

Las condiciones de contorno:

$$\begin{aligned} \text{a.} \quad \bar{c} &\rightarrow 0 && \text{cuando} && x_1, x_2, x_3 \rightarrow \infty \\ \text{b.} \quad \bar{c} &\rightarrow \infty && \text{en} && x_1 = x_2 = x_3 = 0 \\ \text{c.} \quad K_{x_3} \frac{\partial \bar{c}}{\partial x_3} &\rightarrow 0 && \text{cuando} && x_3 = 0 \quad \text{para} \quad x_1 > 0 \end{aligned} \quad (28)$$

$$d. \quad \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \bar{v}_i \bar{C} dx_3 dx_2 = Q' \quad \text{para todo } x_i > 0$$

5.2 SOLUCION MEDIANTE EL ANALISIS DIMENSIONAL ORDINARIO

Con la hipótesis de existencia de una solución única y del examen de las expresiones [24], [25], [26], [27] y [28] debe encontrarse una relación funcional de la siguiente forma

$$F \{ \bar{C}; x_1, x_2, x_3; U; \lambda_1, \lambda_2; Q' \} = 0 \quad [29]$$

donde los parámetros α , β , γ no son incluidos por tratarse sólo de valores numéricos.

La aplicación del análisis dimensional ordinario a la resolución de la ecuación [29] es función de tres dimensiones fundamentales: masa (M), longitud (L) y tiempo (T).

De esta manera, la matriz dimensional fundamental es la siguiente:

	\bar{C}	x_1	x_2	x_3	U	λ_1	λ_2	Q'
M	1	0	0	0	0	0	0	1
L	-3	1	1	1	(1- α)	(2- β)	(2- γ)	0
T	0	0	0	0	-1	-1	-1	-1

Aplicando el Teorema Π de Buckingham se encuentran cinco números dimensionales con las siguientes expresiones:

$$\pi_1 = \frac{\bar{C} U}{Q'} \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right)^{\frac{\alpha+2}{\beta-\gamma}}$$

$$\pi_2 = \frac{x_1}{x_3}, \quad \pi_3 = \frac{x_2}{x_3}$$

$$\pi_4 = \left(\frac{\lambda_2}{U} \right)^{\frac{1}{1+\alpha-\gamma}} \Big/ x_3$$

$$\pi_5 = \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right)^{\frac{1}{\beta+\gamma}} \Big/ x_3$$

y de acuerdo con el mismo teorema debe existir la siguiente relación:

$$\pi_1 = \psi \{ \pi_2, \pi_3, \pi_4, \pi_5 \}$$

que se transforma en:

$$\bar{C} = \frac{Q'}{U} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \right)^{\frac{\alpha+2}{\beta-\delta}} \Psi \left[\frac{x_1}{x_3}, \frac{x_2}{x_3}, \left(\frac{\lambda_2}{U} \right)^{\frac{1}{1+\alpha-\delta}} \Big/ x_3, \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right)^{\frac{1}{\beta-\delta}} \Big/ x_3 \right] \quad (30)$$

En este caso, la concentración depende, entre otros parámetros de una función de cuatro argumentos.

5.3 SOLUCION MEDIANTE LA TRANSFORMACION DE VARIABLES

Como se explicitó anteriormente, este procedimiento considera una transformación lineal simple de las variables independientes y dependientes.

Las variables transformadas pueden ser expresadas de la siguiente manera:

$$C^* = \bar{C} / C, \quad x_1^* = x_1 / \bar{x}_1, \quad x_2^* = x_2 / \bar{x}_2, \quad x_3^* = x_3 / \bar{x}_3$$

que introducidas en la ecuación [24] conjuntamente con las expresiones [25], [26] y [27] resulta:

$$U (\bar{x}_3 x_3^*)^\alpha \frac{\tilde{C}}{\bar{x}_1} \frac{\partial C^*}{\partial x_1^*} = \lambda_1 (\bar{x}_3 x_3^*)^\beta \frac{\tilde{C}}{\bar{x}_2^2} \frac{\partial^2 C^*}{\partial x_2^* \partial x_2^*} + \frac{1}{\bar{x}_3} \frac{\partial}{\partial x_3^*} \left[\lambda_2 (\bar{x}_3 x_3^*)^\delta \frac{\tilde{C}}{\bar{x}_3} \frac{\partial C^*}{\partial x_3^*} \right] \quad (31)$$

Si se establece que:

$$\frac{U \bar{x}_3^\alpha}{\bar{x}_1} = \lambda_1, \quad \frac{\bar{x}_3^\beta}{\bar{x}_2^2} = \lambda_2 \bar{x}_3^{\delta-2} \quad (32)$$

la ecuación [31] se transforma en la siguiente:

$$x_3^{*\alpha} \frac{\partial C^*}{\partial x_3^*} = x_3^{*\beta} \frac{\partial^2 C^*}{\partial x_2^* \partial x_2^*} + \frac{\partial}{\partial x_3^*} \left(x_3^{*\delta} \frac{\partial C^*}{\partial x_3^*} \right) \quad (33)$$

Mientras que las condiciones de contorno con la transformación de variables se convierten en:

- $C^* \rightarrow 0$ cuando $x_1^*, x_2^*, x_3^* \rightarrow 0$
- $C^* \rightarrow \infty$ en $x_1^* = x_2^* = x_3^* = 0$
- $x_3^{*\delta} \frac{\partial C^*}{\partial x_3^*} \rightarrow 0$ cuando $x_1^* \rightarrow 0$ para $x_1^* > 0$
- $U \bar{x}_3^{\alpha+1} \bar{x}_2 \tilde{C} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} x_3^{*\alpha} C^* dx_3^* dx_2^* = Q'$

La condición de continuidad puede expresarse de la siguiente manera:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} x_3^{\alpha} C^* dx_3 dx_2 = \delta$$

donde δ es una constante numérica.

Por lo tanto, se obtiene que:

$$\delta U \tilde{x}_2 \tilde{x}_3^{\alpha+1} \tilde{C} = Q' \quad [35]$$

De esta forma, la solución de la ecuación [33] bajo las condiciones de contorno expresadas en las relaciones [34] deberá satisfacer la forma funcional siguiente:

$$C^* = \varphi(x_1^*, x_2^*, x_3^*) \quad [36]$$

donde $\varphi(x_1^*, x_2^*, x_3^*)$ es una función universal.

Sin embargo, a partir de la ecuación [32] se obtiene que:

$$\tilde{x}_1 = \frac{U \tilde{x}_3^{\alpha+2-\gamma}}{\lambda_2} \quad [37]$$

$$\tilde{x}_2 = \left[\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \tilde{x}_3^{\beta+2-\gamma} \right]^{1/2} \quad [38]$$

Combinando las expresiones [35], [37] y [38] resulta:

$$\tilde{C} = \frac{Q'}{\delta U \tilde{x}_2 \tilde{x}_3^{\alpha+1}} = \frac{Q'}{\delta U \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \right)^{1/2} \tilde{x}_3^{\frac{2\alpha+\beta-\gamma+4}{2}}} \quad [39]$$

Luego, relacionando la expresión [36] con las [37], [38] y [39] se obtiene la siguiente ecuación:

$$\frac{\delta \tilde{C} U}{Q'} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \right)^{1/2} \tilde{x}_3^{\frac{2\alpha+\beta-\gamma+4}{2}} = \varphi \left[\frac{x_1}{U \sqrt{\lambda_2} \tilde{x}_3^{\alpha+2-\gamma}}, \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \tilde{x}_3^{\beta+2-\gamma} \right)^{1/2}, \frac{x_2}{\tilde{x}_3} \right] \quad [40]$$

Sin embargo, esta solución no debe depender de \tilde{x}_3 , que no aparece en la formulación original del problema.

Para eliminar \tilde{X}_3 del miembro de la derecha, es necesario multiplicar éste por

$$\left(\frac{\lambda_2 x_1}{U \tilde{X}_3^{\alpha+2-\beta}} \right)^{\frac{2\alpha+\beta+4-\beta}{2(\alpha+2-\beta)}} \quad \text{obteniéndose:}$$

$$\frac{\delta' \bar{C} U}{Q'} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \right)^{1/2} \left(\frac{\lambda_2 x_1}{U} \right)^{\frac{2\alpha+\beta-\beta+4}{2(\alpha+2-\beta)}} = \varphi \left(\frac{x_1}{\frac{U}{\lambda_2} \tilde{X}_3^{\alpha+2-\beta}}, \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \tilde{X}_3^{\alpha+2-\beta} \right)^{1/2}, \frac{x_2}{\tilde{X}_3} \right)$$

Para que φ sea independiente de \tilde{X}_3 debe adquirir la siguiente forma especial:

$$\phi \left(\frac{\lambda_2 x_1}{U x_3^{\alpha+2-\beta}}, \frac{\lambda_2 x_1 \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \right)^{\frac{\alpha+2-\beta}{\beta+2-\beta}}}{U x_2^{\frac{2(\alpha+2-\beta)}{\beta+2-\beta}}} \right)$$

De esta manera la solución de la ecuación [24] resulta:

$$\frac{\delta' \bar{C} U}{Q'} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \right)^{1/2} \left(\frac{\lambda_2 x_1}{U} \right)^{\frac{2\alpha+\beta-\beta+4}{2(\alpha+2-\beta)}} = \phi \left(\frac{\lambda_2 x_1}{U x_3^{\alpha+2-\beta}}, \frac{\lambda_2 x_1 \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \right)^{\frac{\alpha+2-\beta}{\beta+2-\beta}}}{U x_2^{\frac{2(\alpha+2-\beta)}{\beta+2-\beta}}} \right) \quad [41]$$

Con este desarrollo se obtiene una solución de la ecuación [24] expresada como una relación funcional universal de tres variables solamente, en comparación con el resultado obtenido por el análisis dimensional ordinario cuya solución expresada por la ecuación [30] involucra una relación entre cinco variables o números adimensionales. Luego la expresión [41] contiene menor número de variables que la [30].

La ecuación [41] también puede escribirse de la siguiente forma:

$$\bar{C}(x_1, x_2, x_3) = \frac{Q'}{\delta' U} \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right)^{1/2} \left(\frac{U}{\lambda_2 x_1} \right)^{\frac{2\alpha+\beta-\beta+4}{2(\alpha+2-\beta)}} \phi \left(\frac{\lambda_2 x_1}{U x_3^{\alpha+2-\beta}}, \frac{\lambda_2 x_1 \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \right)^{\frac{\alpha+2-\beta}{\beta+2-\beta}}}{U x_2^{\frac{2(\alpha+2-\beta)}{\beta+2-\beta}}} \right) \quad [42]$$

velocidad media del viento y de las difusividades turbulentas la altura. Esto implica que en las expresiones [25], [26] y se postule que $\alpha = \beta = \gamma = 0$. Con esta suposición la ecuación [42] se transforma en la siguiente expresión:

$$\bar{C}(x_1, x_2, x_3) = \frac{Q'}{\delta' U} \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right)^{1/2} \left(\frac{U}{\lambda_2 x_1} \right) \phi \left[\frac{\lambda_2 x_1}{U x_3^2}, \frac{\lambda_1 x_1}{U x_2^2} \right]$$

que también puede expresarse de esta manera:

$$\bar{C}(x_1, x_2, x_3) = \frac{Q'}{\delta' \lambda_1^{1/2} \lambda_2^{1/2} x_1} \phi \left[\frac{\lambda_2 x_1}{U x_3^2}, \frac{\lambda_1 x_1}{U x_2^2} \right]$$

Pero como, debido a la suposición inicial deberá verificarse

$$U = \bar{v}_1 \quad \lambda_1 = K_{x_2} \quad \lambda_2 = K_{x_3}$$

combinando estas expresiones con [43] resulta:

$$\bar{C}(x_1, x_2, x_3) = \frac{Q'}{\delta' K_{x_2}^{1/2} K_{x_3}^{1/2} x_1} \phi \left[\frac{K_{x_3} x_1}{\bar{v}_1 x_3^2}, \frac{K_{x_2} x_1}{\bar{v}_1 x_2^2} \right]$$

Esta ecuación, introduciendo la relación [12] para $K = 2, 3$ con $T = x_1 / \bar{v}_1$ se transforma en la siguiente:

$$\bar{C}(x_1, x_2, x_3) = \frac{Q'}{2^{-1} \delta' \sigma_{x_2} \sigma_{x_3} \bar{v}_1} \phi \left[\frac{\sigma_{x_3}^2}{2 x_3^2}, \frac{\sigma_{x_2}^2}{2 x_2^2} \right]$$

que puede ser comparada con la expresión [13] que constituye modelo de la "pluma gaussiana".

6. DETERMINACIÓN DE LOS VALORES NUMERICOS DE LOS COEFICIENTES.

6.1 ASPECTOS GENERALES.

La solución general de la ecuación [24] está representada por la expresión [42] que involucra los siguientes parámetros:

δ' , U , λ_2 , λ_1 , α , β , γ y la función argumental Φ . La determinación numérica de los diferentes coeficientes y de la función universal debe realizarse por procedimientos que en algunos casos son semiempíricos y en otros experimentales.

6.2 DETERMINACION DE α Y U .

De acuerdo con lo utilizado en la expresión [25] la variación de la velocidad media del viento con la altura se obtiene a partir de la siguiente relación:

$$\bar{v}_1 = \bar{v}_1(x_3^0) \left(\frac{x_3}{x_3^0} \right)^\alpha \quad [45]$$

Luego

$$\alpha = \frac{d(\ln \bar{v}_1)}{d(\ln x_3)} \quad [46]$$

Considerando la cortante vertical del viento (23) expresada de la forma siguiente:

$$\frac{\partial \bar{v}_1}{\partial x_3} = \frac{v_*}{k x_3} \Phi_1 \left(\frac{x_3}{L} \right)$$

donde $\Phi_1 \left(\frac{x_3}{L} \right)$ es la cortante adimensional del viento y es en función universal.

x_3/L es un parámetro de estabilidad atmosférica

$L = - \frac{v_*^3 c_p \rho T}{k Q_T}$ es la longitud característica de Monin-Obuckov
 c_p es el calor específico a presión constante.

ρ es la densidad del aire.

T es la temperatura característica del aire.

Q_T es el flujo vertical turbulento de calor.

La expresión más aplicada de la variación de la velocidad del viento con la altura (31) está dada por:

$$\bar{v}_1 = 2.5 v_* \left[\ln \frac{x_3}{x_3^0} - \Psi_1 \left(\frac{x_3}{L} \right) \right] \quad [47]$$

donde x_3^0 es el coeficiente de rugosidad.

ψ_1 es una función que depende de la estabilidad atmosférica. (31)

Coordinando las ecuaciones [46] y [47] resulta:

$$\alpha = \frac{\phi_1(x_3/L)}{\left[\ln \frac{x_3}{x_3^0} - \psi_1\left(\frac{x_3}{L}\right) \right]} \quad [48]$$

De esta forma es posible obtener diferentes valores de α para distintos x_3/x_3^0 y x_3/L . En la Figura 1 se encuentra graficada α en función de $\frac{x_3}{x_3^0}$ y $\frac{x_3}{L}$.

En la figura 1 se observa que α , a una altura dada, aumenta con la rugosidad del terreno y con la estabilidad atmosférica. En este trabajo será utilizada, para fines comparativos, la información de los experimentos de difusión atmosférica "Project Prairie Grass" (24) (25). El coeficiente de rugosidad en el lugar de los experimentos fué estimado en $x_3^0 = 0.1$ cm, computándose $\frac{x_3}{x_3^0} = 4 \times 10^3$.

De esta forma, utilizando la Figura 1 con el valor estimativo de $\frac{x_3}{x_3^0}$, se puede encontrar α en función de $\frac{x_3}{L}$.

En la Figura 2 se ha representado α en función de $\frac{x_3}{L}$ para $\frac{x_3}{x_3^0} = 4 \times 10^3$.

De las mediciones de la velocidad del viento a diferentes alturas durante las diferentes experiencias del "Project Prairie Grass" se han calculado diferentes valores de α para $\frac{x_3}{L}$ que se encuentran incluidos en la Figura 2 para su comparación con los calculados mediante la ecuación [48]. Se observa que los valores de α para un mismo $\frac{x_3}{x_3^0}$ aumentan con la estabilidad atmosférica coincidiendo con lo obtenido por otros autores (8) (18).

En la ecuación [25] escrita en la siguiente forma:

$$\bar{v}_1 = U x_3^\alpha$$

el parámetro de escala U puede ser considerado como la velocidad media del viento a la altura $x_3 = 1$ m si la dimensión vertical de longitud es la unidad del sistema métrico.

De esta forma, se pueden obtener los valores de U en función de $\frac{x_3}{L}$ a partir de los datos experimentales.

En la figura 3, se encuentra graficada U en función de x_3/L observándose que desde el valor máximo de $U = 6.5 \frac{m}{s}$ el parámetro decrece hacia las estabildades e inestabildades externas de la atmósfera. Esta relación coincide con la elaboración de las clases de estabilidad atmosférica en función de la velocidad del viento consideradas en el modelo de la "pluma gaussiana" (3)

6.3 DETERMINACION DE γ Y λ_2 .

La variación con la altura de la componente vertical de la difusividad turbulenta según la ecuación [27] puede ser expresada de la siguiente manera:

$$K_{x_3} = K_{x_3}(x_3') \left(\frac{x_3}{x_3'} \right)^\gamma = \lambda_2 x_3^\gamma$$

Siguiendo la línea de trabajos anteriores (23) se expresará la difusividad vertical turbulenta de esta forma:

$$K_{x_3} = \frac{k v_* x_3}{\phi_1(x_3/L)}$$

donde la forma funcional de $\phi_1(x_3/L)$, (23) será considerada por tres caminos diferentes según la estabilidad atmosférica:

- Neutralidad atmosférica ($x_3/L = 0$) $\phi_1(x_3/L) = 1$
- Inestabilidad atmosférica ($x_3/L < 0$) $\phi_1(x_3/L) = (1 - 15 x_3/L)^{1/4}$
- Estabilidad atmosférica ($x_3/L > 0$) $\phi_1(x_3/L) = (1 + 4.7 x_3/L)$

Como la neutralidad es un caso límite de las otras dos cuando

$x_3/L = 0$, no será considerada como una situación especial. En esta forma, sólo se tratarán dos casos: estable e inestable.

6.3.1 CONDICIONES DE INESTABILIDAD ATMOSFERICA ($x_3/L < 0$)

Introduciendo la expresión [50], correspondiente a inestabilidad atmosférica, en la ecuación [49] resulta:

$$K_{x_3} = k v_* x_3 (1 - 15 x_3/L)^{1/4}$$

que combinada con la [27] y despejando γ queda transformada en la siguiente:

$$\gamma = 1 - 15 x_3/L$$

6.3.2 CONDICIONES DE ESTABILIDAD ATMOSFERICA ($x_3/L > 0$)

Combinando las expresiones [50] referida a la estabilidad atmosférica y [49] queda:

$$K_{x_3} = k v_* x_3 (1 - 4.7 x_3/L)^{-1} \quad [53]$$

que introducida en la [25] y extrayendo γ da por resultado:

$$\gamma = \frac{1 + 9.4 x_3/L}{1 + 4.7 x_3/L} \quad [54]$$

6.3.3 DETERMINACION DE γ

En la figura 4, se encuentra la representación gráfica de γ en función de x_3/L , calculada de acuerdo con las expresiones [52] y [54]. Se observa una disminución de γ en las cercanías de la neutralidad atmosférica alcanzando un valor mínimo de $\gamma = 1$ para $x_3/L = 0$. En condiciones de marcada inestabilidad atmosférica $\gamma \rightarrow 1.25$ y para condiciones extremas de estabilidad $\gamma \rightarrow 2.0$. De la inspección de las Figuras 2 y 4 se observa que $\alpha + \gamma > 1$ contradiciendo la ley de las potencias conjugadas mencionada anteriormente y utilizada por diversos autores (8) en problemas de difusión atmosférica.

6.3.4 DETERMINACION DE λ_2

Para determinar los valores numéricos de λ_2 se utilizó la expresión [27] de la siguiente forma:

$$\lambda_2 = K_{x_3} / x_3^\gamma$$

Los valores de K_{x_3} fueron encontrados utilizando la teoría estadística según la relación. [12] : $\sigma_{x_3}^2 = 2 K_{x_3} T$

que con $T = x_1/\bar{v}_1$ se transforma en:

$$K_{x_3} = \frac{\sigma_{x_3}^2 \bar{v}_1}{2 x_1} \quad [55]$$

Durante los experimentos de difusión atmosférica del "Project Prairie Grass" se determinaron concentraciones de partículas en aire a dife-

de distancia de la fuente de emisión. La concentración de partículas en el eje central de la pluma tiene una variación con la altura que se adapta a la siguiente expresión (26) :

$$\bar{C}(x_3) = \bar{C}(0) \exp[-C x_3^S]$$

donde C es un parámetro que depende de las dimensiones de la pluma de contaminantes.

S es un número positivo

$\bar{C}(0)$ es la concentración, en $x_3=0$ o sea en el eje central de la pluma.

A partir de las magnitudes de la concentración en tres alturas

x_3^1 , x_3^2 , x_3^3 tales que:

$$x_3^3 = 2x_3^2 = 4x_3^1$$

puede ser encontrado el valor de S mediante la siguiente expresión:

$$2^S = \frac{\ln \bar{C}(x_3^2) - \ln \bar{C}(x_3^3)}{\ln \bar{C}(x_3^2) - \ln \bar{C}(x_3^1)}$$

Teniendo en cuenta que es posible definir una altura de la nube mediante la siguiente relación:

$$x_3^{\max} = x_3[\bar{C}(0)] - x_3[0.1\bar{C}(0)] \quad [56]$$

o sea

$$\bar{C}(x_3^{\max}) / \bar{C}(0) = 0.1$$

y que por definición

$$\sigma_{x_3}^2 = \frac{\int_0^{\infty} (x_3)^2 \bar{C}(x_3) dx_3}{\int_0^{\infty} \bar{C}(x_3) dx_3}$$

Se puede encontrar que:

$$\sigma_{x_3} = \frac{x_3^{\max}}{(\ln 10)^{1/5}} \left\{ \frac{\Gamma(3/5)}{\Gamma(1/5)} \right\}^{1/2} \quad [57]$$

Mediante la introducción de la relación [57] en [55] con la consideración de $x_1 = 100$ m y de \bar{v} , según los experimentos del "Project Prairie Grass" se obtuvieron diferentes valores de K_{x_3} que son válidos para la altura \bar{x}_3 (altura del eje de masa central de los contaminantes).

Los valores de \bar{x}_3 fueron estimados según la siguiente definición:

$$\bar{x}_3 = \frac{\int_0^{\infty} x_3 \bar{C}(x_3) dx_3}{\int_0^{\infty} \bar{C}(x_3) dx_3}$$

y con la consideración de [57] resulta:

$$\bar{x}_3 = \frac{x_3^{\max} \Gamma(2/5)}{(lm \ 10)^{1/5} \Gamma(1/5)} \quad [58]$$

Luego la expresión [27] puede ser escrita de la siguiente manera:

$$\lambda_2 = \frac{\sigma_{x_3}^2 \bar{v}_1}{2 \bar{x}_3^\beta x_1} \quad [59]$$

Los diferentes valores de λ_2 obtenidos mediante la relación [59] en función de x_3/L se encuentran graficados en la Figura 5. En dicha Figura se observa una disminución continua pero no uniforme de λ_2 con el aumento de la estabilidad atmosférica.

6.4 DETERMINACION DE β Y λ_1

La obtención de los valores numéricos de β y λ_1 debe realizarse mediante métodos indirectos debido a que no existen valores de K_{x_2} . Para determinar numéricamente β se consideró la expresión [42] para \bar{C} en el eje central de la pluma, es decir

$$x_2 = x_3 = 0 \quad . \text{ Bajo estas condiciones se supone que } \phi = 1.$$

De acuerdo con esta suposición resulta:

$$\bar{C}(x_1, 0, 0) \propto \frac{1}{(x_1)^{\frac{2\alpha+\beta-\gamma+4}{2(\alpha+2-\gamma)}}} = \frac{1}{x_1^m}$$

donde

$$m = \frac{2\alpha+\beta-\gamma+4}{2(\alpha+2-\gamma)} \quad [60]$$

En la figura 6, está graficada m en función de x_3/L . Se observa una disminución de m con el incremento de la estabilidad de la atmósfera.

Esto significa que a constancia de los otros parámetros la concentración aumenta con la estabilidad atmosférica. Estos valores fueron encontrados con los experimentos del "Project Prairie Grass"

Despejando β :

$$\beta = 2m(\alpha + 2 - \gamma) + \gamma - 2\alpha - 4$$

En la Figura 7, está representada β en función de x_2/L observándose una disminución de los valores numéricos de ese parámetro con la estabilidad del aire.

Para obtener los valores de λ_1 se utilizó la expresión [26] de la siguiente forma:

$$\lambda_1 = \frac{K_{x_2}}{x_3^\beta} \quad [61]$$

De la misma manera que en la obtención de K_{x_2} se utilizó la relación [12] que expresa lo siguiente:

$$K_{x_2} = \frac{\sigma_{x_2}^2 \bar{v}_1}{2x_1}$$

o sea que [60] puede ser representada por:

$$\lambda_1 = \frac{\sigma_{x_2}^2 \bar{v}_1}{2x_1 x_3^\beta}$$

Suponiendo una variación lateral de la concentración de contaminantes de la forma:

$$\bar{C}(x_2) = \bar{C}(0) \exp[-bx^r]$$

y de la expresión similar a la obtención de S para el cálculo de z se puede escribir:

$$z^r = \frac{\ln \bar{C}(x_2^3) - \ln \bar{C}(x_2^2)}{\ln \bar{C}(x_2^1) - \ln \bar{C}(x_2^2)}$$

donde

$$x_2^3 = 2x_2^2 = 4x_2^1$$

mediante las análogas relaciones a las utilizadas en la sección 5.3.4 pero aplicadas a la variación lateral de la concentración se obtiene lo siguiente:

$$\sigma_{x_2} = \frac{x_2^{\max}}{(\ln 10)^{1/r}} \left\{ \frac{\Gamma(3/r)}{\Gamma(1/r)} \right\}^{1/2}$$

y con la expresión [58] se puede determinar λ_1 , a partir de la siguiente relación:

$$\lambda_1 = \frac{\sigma_{x_2}^2 \bar{v}_1}{2 \bar{x}_3^\beta x_1} \quad [62]$$

Mediante la información de los experimentos del "Project Prairie Grass" se obtuvieron los valores de λ_1 , utilizando la expresión [62] y se graficó ese parámetro en función de x_3/L en la figura 8.

6.5 Determinación de S'

Para obtener el valor numérico de S' se calcularon las concentraciones en el eje de la pluma $\{\bar{c}(x, 0, 0)\}$ para diferentes clases de estabilidad atmosférica (x_3/L). De la comparación con las concentraciones medidas en los experimentos del "Project Prairie Grass" se obtuvieron los diferentes valores de S' en función de x_3/L que se encuentra graficada en la Figura 9.

6.6 Determinación de Φ

Para determinar la forma de la función argumental Φ , se partió de la hipótesis siguiente:

$$\Phi[\] = \Phi_2[\] \cdot \Phi_3[\]$$

Esta suposición se basa en la ecuación particular (44) comparada con la expresión de la pluma gaussiana (ecuación [13]).

De esa manera, el problema se transforma en encontrar las formas funcionales de Φ_2 y Φ_3

donde:

$$\Phi_2 = \Phi_2 \left[\frac{U x_3^{\alpha+2-\beta}}{\lambda_2 x_1} \right] = \Phi_2 \left[\zeta x_3^{\alpha+2-\beta} \right]$$

$$\Phi_3 = \Phi_3 \left[\frac{U x_2^{\frac{2(\alpha+2-\beta)}{\beta+2-\beta}}}{\lambda_1 x_1 \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \right)^{\frac{\alpha+2-\beta}{\beta+2-\beta}}} \right] = \Phi_3 \left[\eta x_2^{\frac{2(\alpha+2-\beta)}{\beta+2-\beta}} \right]$$

Con ese objeto se obtuvo gráficamente para $X_1 = 100$ m y para diferentes valores de X_3/L la función $\phi_2 = \phi_2(2 X_3^{\alpha+2-\gamma}) = \phi_2(2 X_3^s)$. Los valores de $s = \alpha+2-\gamma$ fueron encontrados utilizando las Figuras 2 y 4 para diferentes X_3/L . La representación de s en función de X_3/L se encuentra en la Figura 10, en la que se incluyen los valores experimentales de ese parámetro. Para $X_1 = 100$ m fué también, obtenida la función $\phi_3 = \phi_3(\eta X_2^{\frac{2(\alpha+2-\gamma)}{\beta+2-\gamma}}) = \phi_3(\eta X_2^r)$

Los valores de $r = \frac{2(\alpha+2-\gamma)}{\beta+2-\gamma}$ fueron calculados mediante las Figuras 2, 4 y 7 para distintos X_3/L . La representación de r se encuentra en la Figura 11 que incluye también las estimaciones experimentales. De los gráficos de ϕ_2 en función de X_3/L y de ϕ_3 en función de X_3/L es posible establecer las siguientes relaciones empíricas que coinciden con las expresiones de la variación espacial de los contaminantes utilizados en 5.3.4 y 5.4 :

$$\phi_2 = \exp \left[- \frac{U X_3^{-(\alpha+2-\gamma)}}{\lambda_2 X_1} \right]$$

$$\phi_3 = \exp \left[- \frac{U X_2^{-\left\{ \frac{2(\alpha+2-\gamma)}{\beta+2-\gamma} \right\}}}{\lambda_2 X_1 \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \right)^{\frac{\alpha+2-\gamma}{\beta+2-\gamma}}} \right]$$

6.7 Fórmula general de difusión atmosférica

De acuerdo con las estimaciones realizadas en las secciones anteriores la ecuación [42] puede ser expresada en la siguiente forma general:

$$\bar{C}(x_1, x_2, x_3) = \frac{Q'}{S' U} \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right)^{1/2} \left(\frac{U}{\lambda_2 X_1} \right)^{\frac{2\alpha+\beta-\gamma+4}{2(\alpha+2-\gamma)}}$$

$$\exp \left[- \frac{U X_3^{-(\alpha+2-\gamma)}}{\lambda_2 X_1} \right] \exp \left[- \frac{U X_2^{-\left\{ \frac{2(\alpha+2-\gamma)}{\beta+2-\gamma} \right\}}}{\lambda_2 X_1 \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \right)^{\frac{\alpha+2-\gamma}{\beta+2-\gamma}}} \right] \quad [63]$$

7. EVALUACION DE LA FORMULA GENERALIZADA DE DIFUSION

Para evaluar la aptitud práctica de la fórmula (63) derivada del modelo propuesto (o fórmula generalizada de difusión) es necesario comparar los valores numéricos de la concentración en aire de contaminantes calculados por dicha expresión con los medidos en experiencias de campo. Los valores calculados mediante la fórmula (63) , los estimados por medio del modelo de la "pluma gaussiana" y los observados durante el "Project Praire Grass" están incluidos en la Tabla I. Para los efectos comparativos se han utilizado 50 ternas de valores.

Con el objeto de conocer si la muestra correspondiente a los datos encontrados mediante la expresión (63) y los observados difieren significativamente se utilizó la prueba de la diferencia por el método de rangos. (27). Tomando los límites de significación de los niveles del 1% y 5%, para $N = 50$ valores, se encontró:

$$\text{límite } 5\% = 434$$

$$\text{límite } 1\% = 370$$

En el caso considerado, la comparación de los resultados obtenidos por la expresión (63) con los valores experimentales se encontró que la suma de diferencias de rangos positivos es igual a 561 y la de negativos es 714.

Por lo tanto, la menor de esas sumas supera el límite del 5%. Esto significa que la diferencia entre las dos series puede ser debidas al azar y se podría considerar que pertenecen a la misma distribución.

Por otra parte, de la comparación de los resultados provenientes de la fórmula de la "pluma gaussiana" con las observaciones se desprende que la suma de las diferencias de rangos positivos es 1138 y la de negativos es 137. Como el número de pares de datos considerados es 50 pueden ser utilizados los mismos límites de significación correspondientes a los niveles de 1% y 5% empleados anteriormente. De esta forma, se observa que la suma de los rangos con signo negativo es menor que el valor correspondiente al límite del 1%. Esto parece indicar que el modelo de la "pluma gaussiana" está desnivelado respecto de los datos observacionales.

Por lo tanto, dentro de la muestra considerada, la fórmula (63) resulta estadísticamente superior a la del modelo de la "pluma gaussiana y se adapta dentro de los límites considerados a los datos provenientes de la observación. Una prueba gráfica de ello se ejemplifica en la Figura 12.

8. CONCLUSIONES

El modelo generalizado de difusión atmosférica desarrollado utilizando el método de la transformación de variables y su verificación mediante datos experimentales, permite extraer las siguientes conclusiones:

-Considerando el proceso del transporte y de la dispersión turbulenta de contaminantes en la atmósfera descrito por la ecuación fundamental de difusión, bajo condiciones de contorno adecuadas y teniendo en cuenta que las difusividades turbulentas lateral y vertical y la velocidad media del viento varían potencialmente con la altura, la aplicación del procedimiento resolutivo de la transformación de variables permite obtener la solución del problema. Dicha solución provee mayor información que la lograda utilizando el análisis dimensional ordinario.

-Cuando con la fórmula generalizada de difusión, los exponentes de los perfiles verticales de las difusividades turbulentas y de la velocidad del viento se anulan, es decir estos parámetros son constantes con la altura, la solución tiende a la fórmula de la "pluma gaussiana".

-Los métodos de determinación de los valores numéricos de los coeficientes involucrados en la fórmula generalizada de difusión permiten la obtención de resultados que contradicen a la hipótesis de las potencias conjugadas de Schmidt considerada para el perfil del viento y de la componente vertical de la difusividad turbulenta y utilizada para resolver mediante métodos analíticos la ecuación de difusión.

-Las funciones argumentales obtenidas tomando como base las mediciones provenientes de los experimentos de difusión atmosférica permiten determinar un apartamiento respecto de la distribución gaussiana de la variación espacial y vertical de los contaminantes.

-La verificación del modelo generalizado de difusión contrastado con el de la "pluma gaussiana" y los datos provenientes de experiencias de difusión atmosférica demuestra la "bondad" del mismo y su superioridad respecto de la fórmula normal.

Por otra parte, con el solo conocimiento de los valores numéricos del parámetro de estabilidad de Monin (x_3/L) se pueden determinar todos los coeficientes involucrados en la fórmula generalizada de difusión mediante el uso de las Figuras correspondientes y en diferentes condiciones de rugosidad del terreno.

El método empleado (transformación de variables) consecuentemente podría ser utilizado en la resolución de otros problemas: difusión desde una fuente ubicada a una altura del suelo, depósito de contaminantes en el suelo, difusión desde fuentes distribuidas en línea cruzada al viento, evaporación desde superficies libres de agua.

G. P. U. S.

roman

9. REFERENCIAS

- (1) Mazzeo N.A. Inserción de un modelo de difusión atmosférica en el control de la calidad del aire. (Presentado al I Congreso Latinoamericano de Meteorología- Buenos Aires) 1974.
- (2) USAEC. Meteorology and atomic energy. 1968.
- (3) Pasquill F. Atmospheric diffusion. 1962.
- (4) Monin A. S. Smoke propagation in the surface layer of the atmosphere Advances in Geophysics. Vol. 6. 1959.
- (5) Gifford F. A. Diffusion in the diabatic surface layer. J. Geophys. Res. Vol. 67. 1962.
- (6) Klug W. Diffusion in the atmospheric surface layer: comparison of similarity theory with observations. Quart.J.Roy.Met.Soc. Vol.94.1968.
- (7) Marsh K. J. Bishop K. A. and Foster M. D. An experimental study of the dispersion of the emissions from chimneys.. In Reading-III. The investigation of dispersion calculations. Atmos. Environ. Vol. 3. 1969.
- (8) Sutton O. G. Micrometeorology. 1953.
- (9) Calder K. L. Eddy diffusion and evaporation in flow over aerodynamically smooth and rough surfaces: a treatment based on laboratory laws of turbulent flow with special reference to conditions in the lower atmosphere. Quart.J.Mech.Appl.Math. Vol.2 1949.
- (10) Hay J.S. and Pasquill F. Diffusion from a continuous source in relation to the spectrum and scale of turbulence. Advances in Geophysics. Vol. 6. 1959.
- (11) Pasquill F. Atmospheric dispersion of pollution. Quart. J.Roy.Met. Soc. Vol. 97. 1971.
- (12) Panofsky H.A. A survey of current thought on wind properties relevant from diffusion in the lowest 100 M. SC-M-68-191. 1968.
- (13) Swinbank W. C. A dimensional analysis of the constant-flux layer. SC-M-68-191. 1968.
- (14) Turner D. B. Workbook of atmospheric dispersion estimates. P.H.S.P. Nº 999-AP-26. 1970.
- (15) Mazzeo N.A. La estructura del viento en las capas inferiores de la atmósfera. Meteorológica Vol. 1. 1970.
- (16) Plate E. J. Aerodynamic characteristics of atmospheric boundary layers. T.I.D-25465. 1971.

- (17) Lumley J.L and Panofsky H.A. The structure of atmospheric Turbulence. 1964.
- (18) Högström A.S. and Högström U. A practical method for determining wind frequency distributions for the lowest 200 meters from routine meteorological data. Report No 47.Uppsala. 1977.
- (19) Mazzeo N. A. Deposition de aerosoles dispersados en la atmósfera. Meteorologica Vol.1. 1970.
- (20) Long. R.R. The use of governing equations in dimensional analysis. J.Atmos. Sci. Vol. 20. 1963.
- (21) Long R.R. Dimensional analysis of mathematically determinate geophysical problems. Bull.Amer. Meteor. Soc.Vol. 47. 1966.
- (22) Calder K.L. Concerning similarity analysis based on the use of governing equations and boundary conditions and Long's method of generalized dimensional analysis.J.Atmos.Sci.Vol.24. 1967.
- (23) A.M.S. Workshop on micrometeorology. 1973.
- (24) Barad M.L. Project Praire Grass, a field program in diffusion. Geophys.Res.Paper. Vol.I and II.1958.
- (25) Haugen D.A. Project Praire Grass. A field program in diffusion. Geophys.Res. Paper. Vol.III.1959.
- (26) Pasquill F. Lagrangian similarity and vertical diffusion from a source at ground level. Quat.Jour.Roy.Met.Soc. Vol.92.1966.
- (27) Panofsky H.A. and Brier G.W. Some applications of statistics to meteorology.1958.

TABLA I VALORES DE LA CONCENTRACION DE CONTAMINANTES EN AIRE (mg/m^3)

\bar{C} , Calculado por la fórmula (63)	\bar{C} , Calculado por la fórmula (13)	\bar{C} Observado (Project Praire Grass)
726	1025	730
304	308	285
119	103	121
50	31	41
621	840	620
207	290	242
74	86	81
25	25	29
9	6	11
160	216	158
44	48	43
10	14	11
3	6	2
306	348	305
52	76	49
30	38	32
4	8	5
2	7	4
548	560	540
200	210	203
183	190	186
158	160	156
12	13	10
322	350	318
109	78	105
29	40	28
2	8	2
40	50	42
153	180	156
418	450	414
100	142	107
20	38	22

VARIACION DEL COEFICIENTE α CON EL PARAMETRO DE RUGOSIDAD DEL TERRENO Y CON LA ESTABILIDAD ATMOSFERICA.

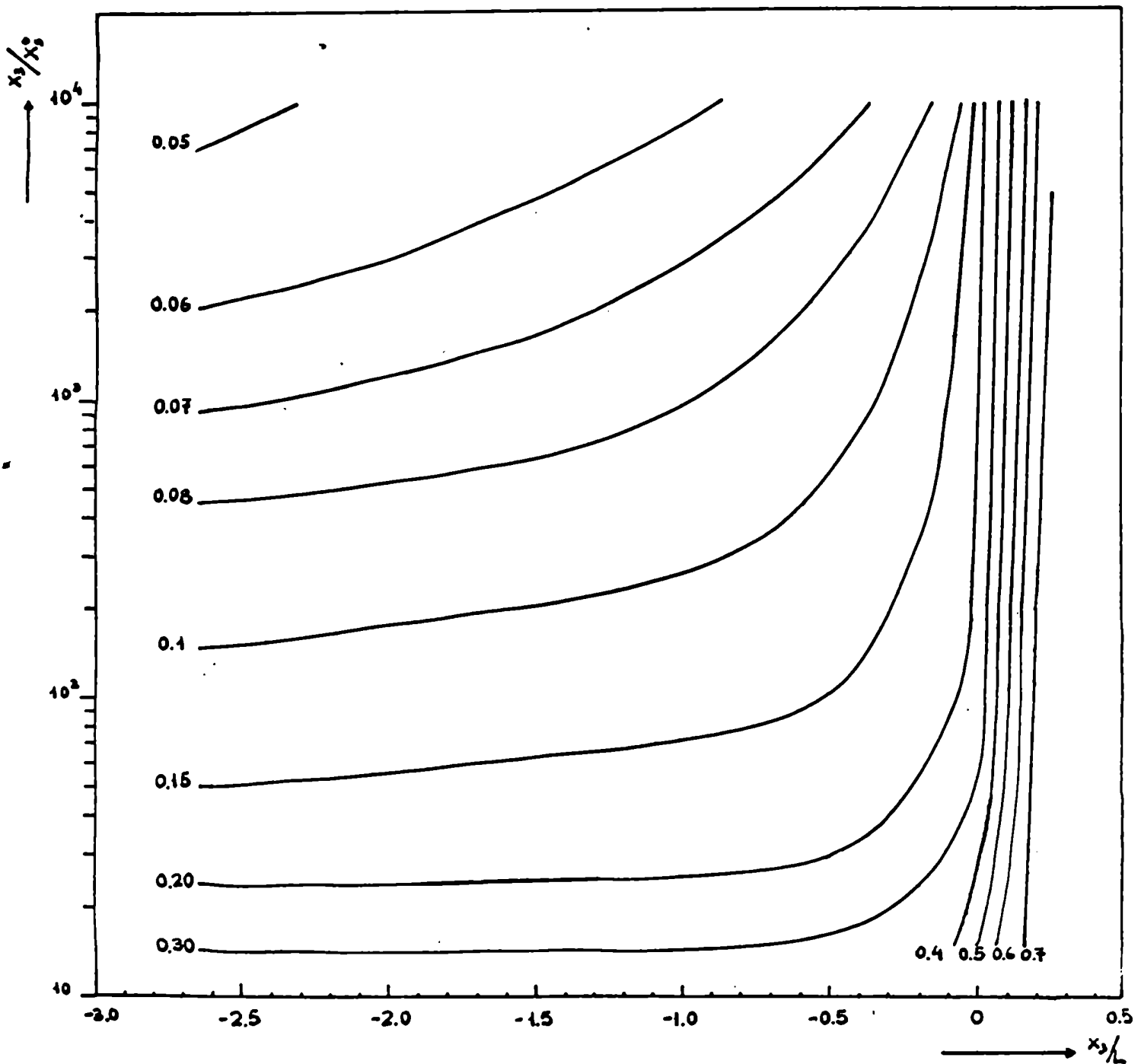


FIGURA N° 1

TABLA I (continuación)

\bar{C} Calculado por la fórmula (63)	\bar{C} Calculado por la fórmula (13)	\bar{C} Observado (Project Praire Grass)
6	8	5
250	272	249
190	204	197
35	45	39
179	222	176
53	52	62
19	23	20
6	10	6
2	4	2
98	138	95
31	54	33
10	20	8
52	70	55
12	20	14
153	180	152
50	73	51
19	30	17
6	10	5

VARIACION DEL COEFICIENTE α CON LA ESTABILIDAD ATMOSFERICA PARA
 $x_3^0 = 0.8$ cm (CORRESPONDIENTE AL PROJECT PRAIRE GRASS)

LINEA LLENA: A PARTIR DE LA FIGURA 1.

* CORRESPONDEN AL PROJECT PRAIRE GRASS.

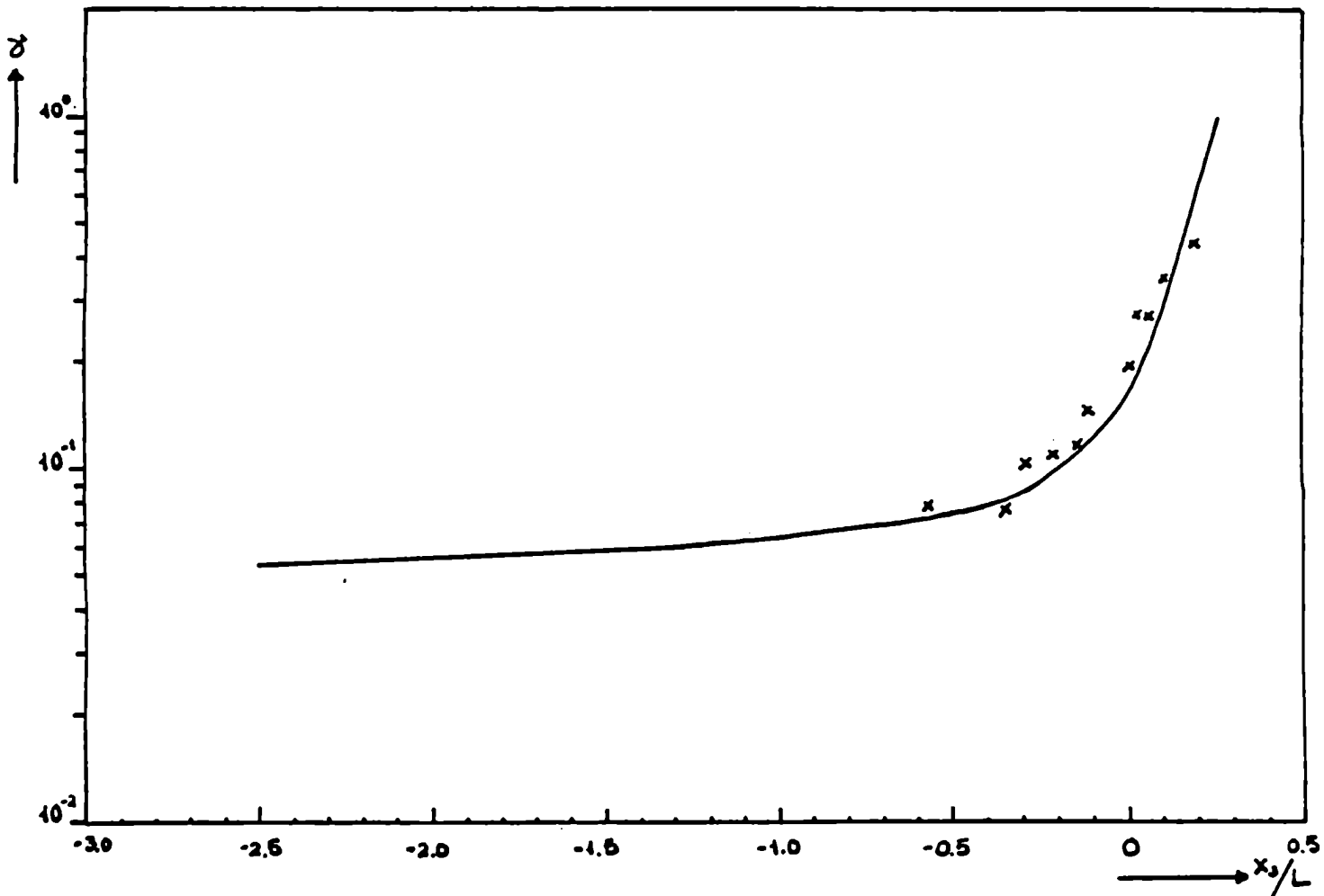


FIGURA N° 2.

VARIACION DEL COEFICIENTE U CON LA ESTABILIDAD DE LA ATMOSFERA

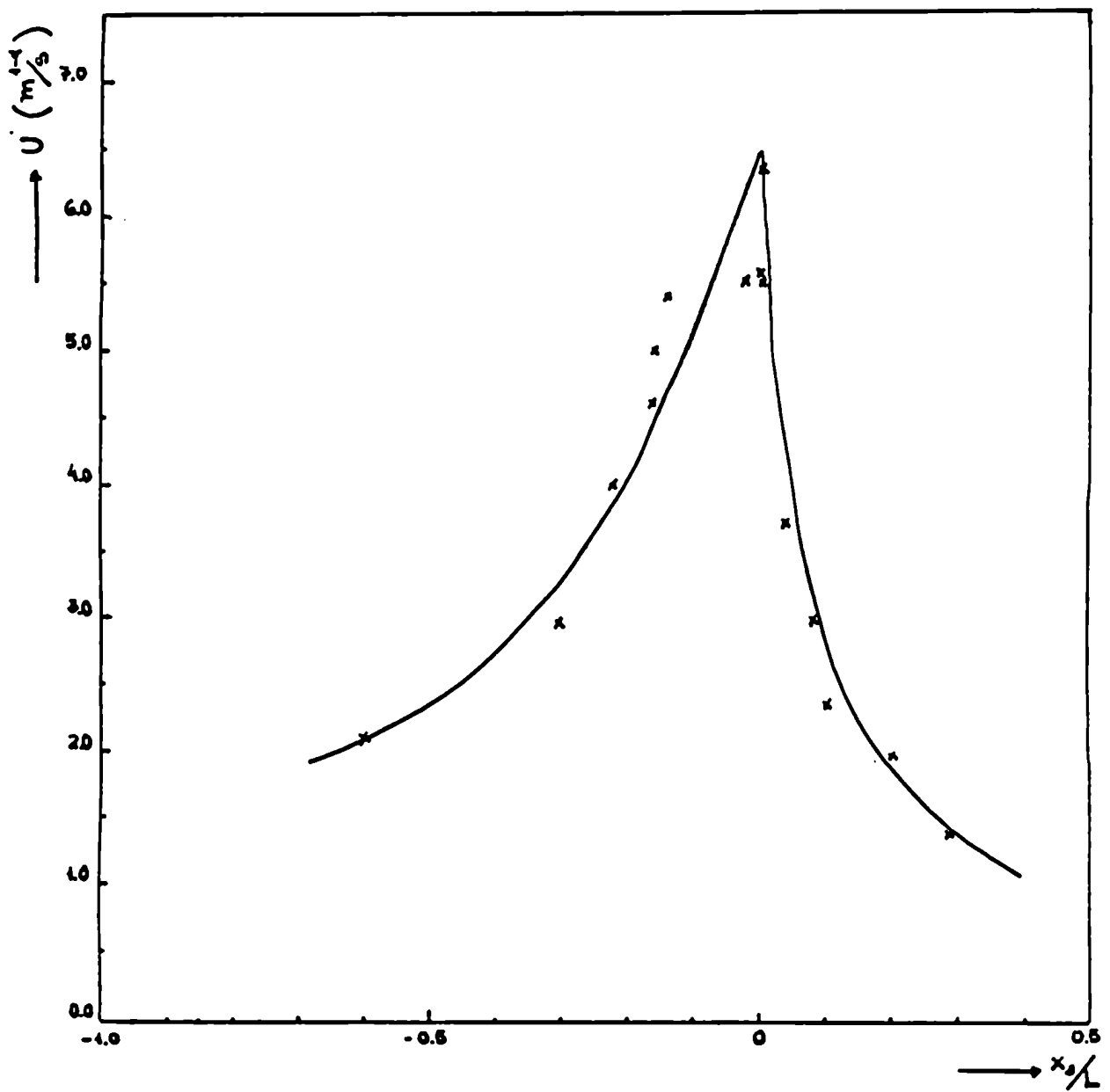


FIGURA Nº 3.

VARIACION DEL COEFICIENTE γ CON LA ESTABILIDAD DE LA ATMOSFERA.

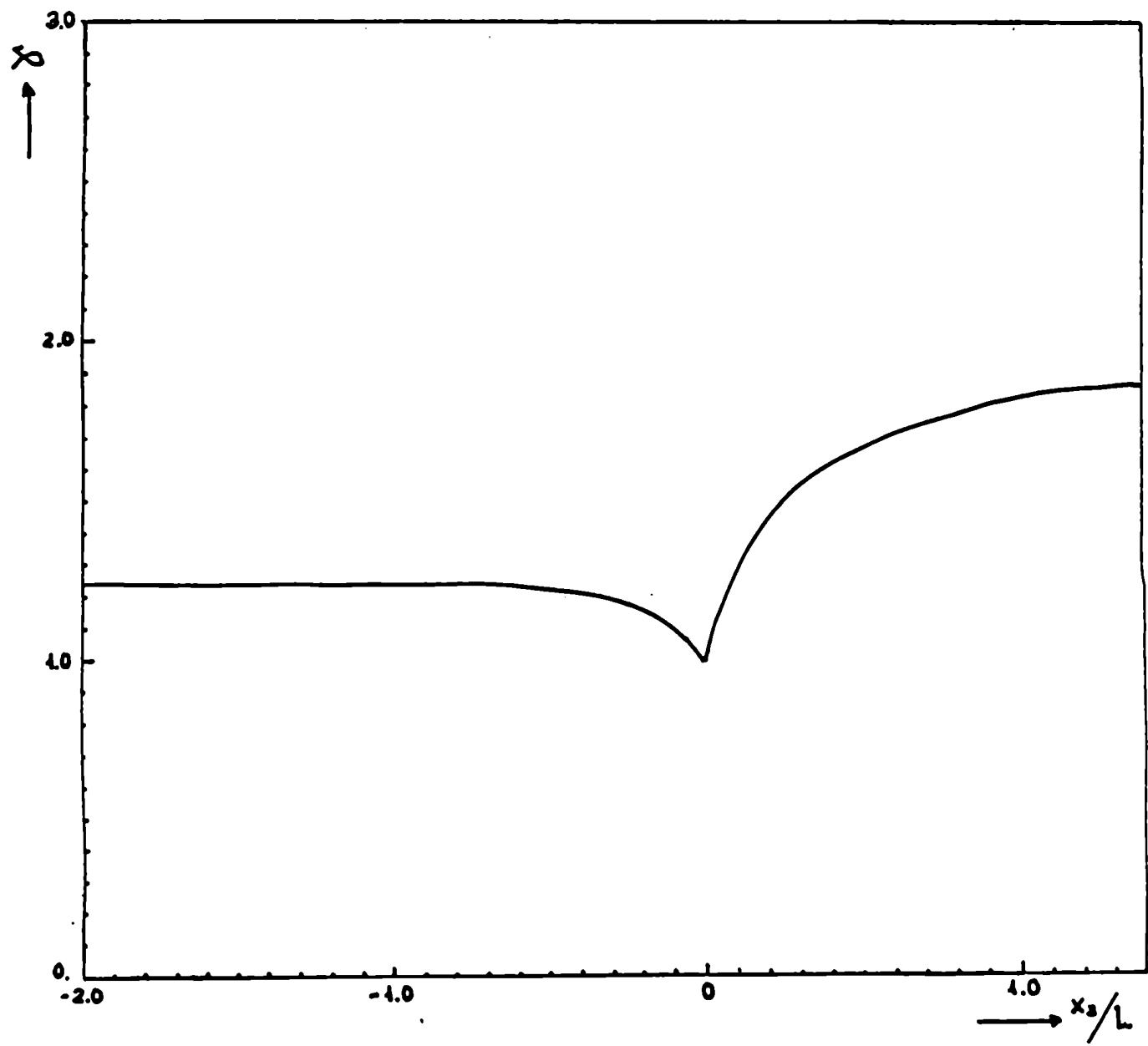


FIGURA Nº 1.

VARIACION DE λ_2 CON LA ESTABILIDAD DE LA ATMOSFERA

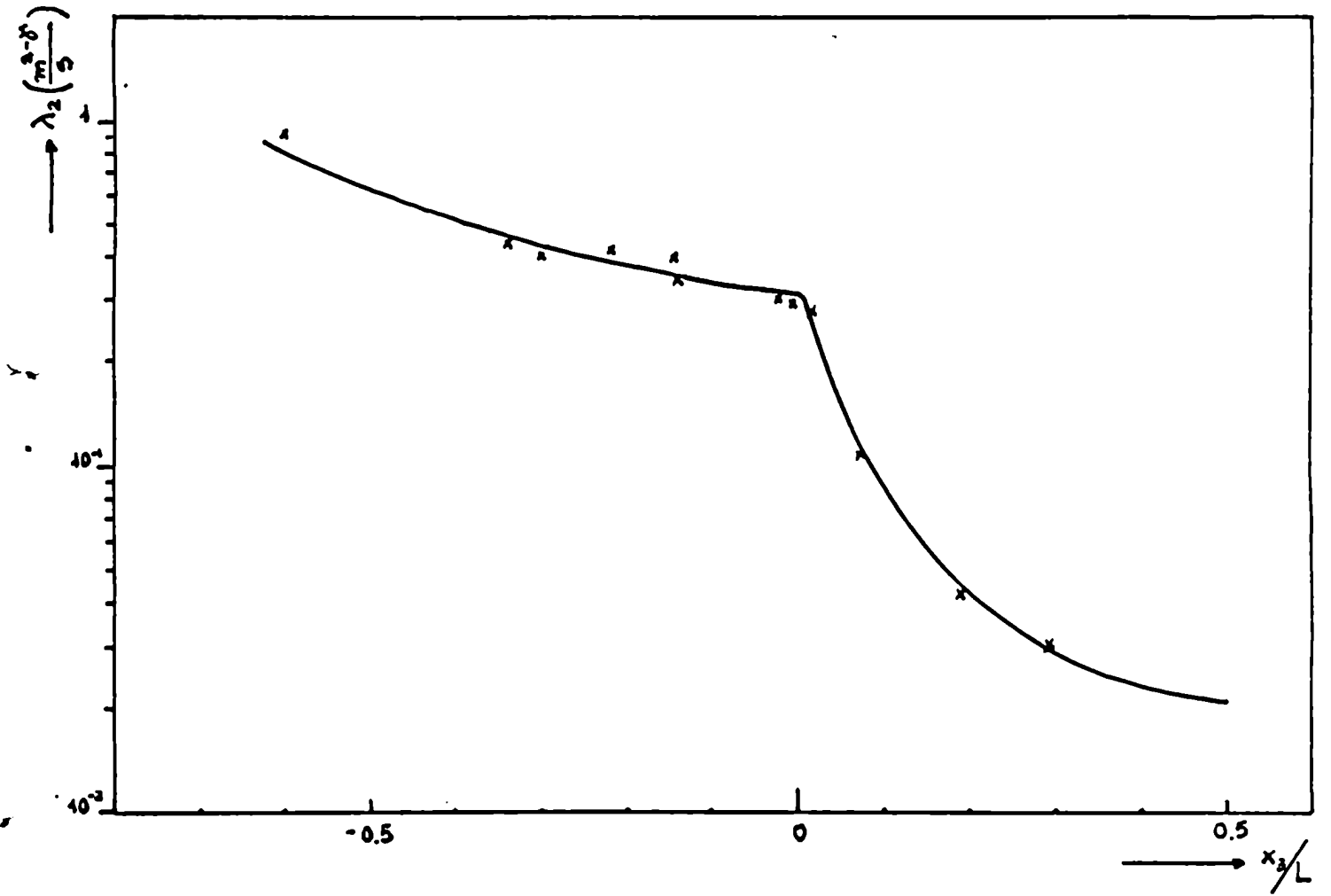


FIGURA Nº 5

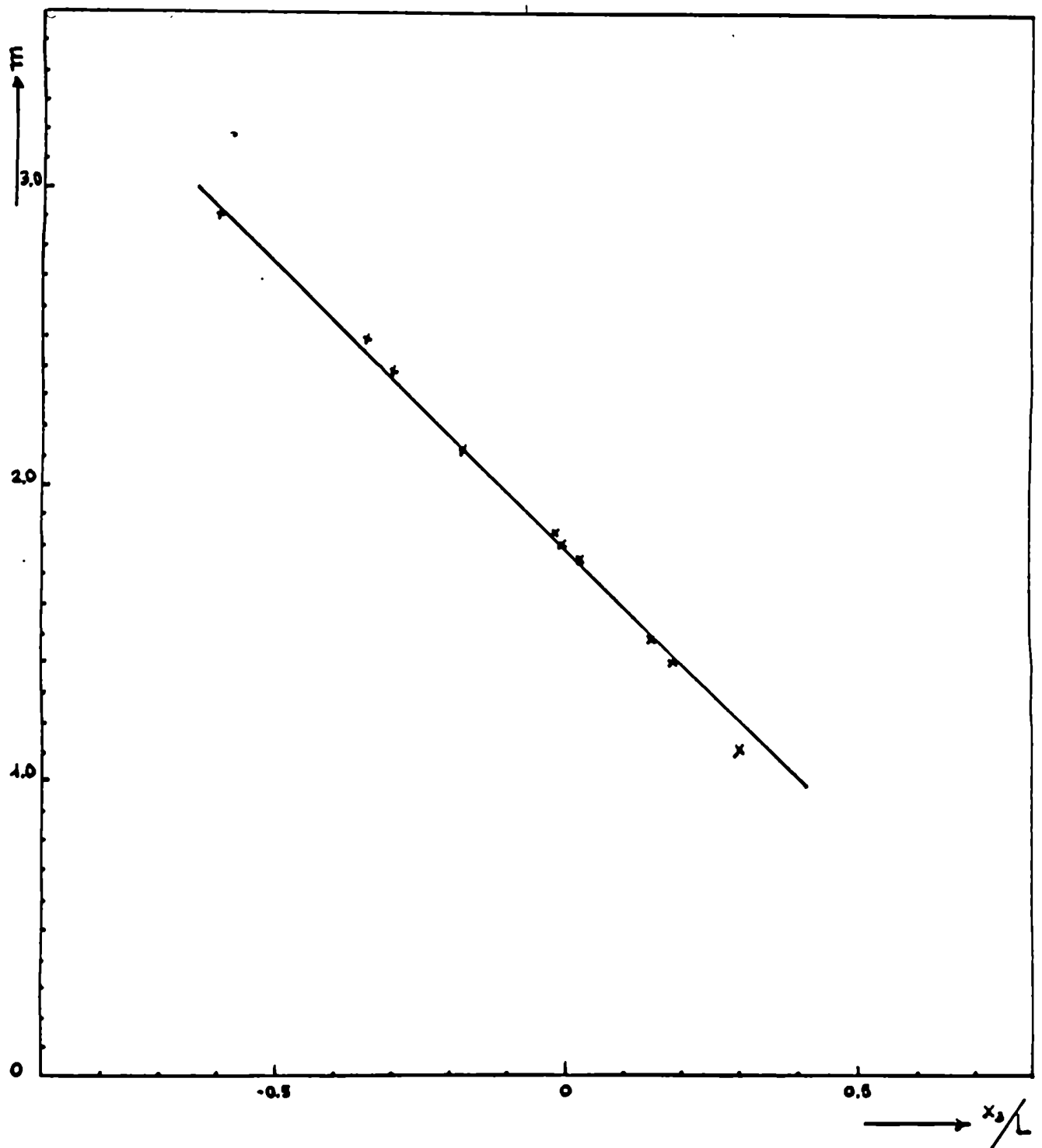
VARIACION DE m CON LA ESTABILIDAD DE LA ATMOSFERA

FIGURA Nº 6

VARIACION DE β CON LA ESTABILIDAD DE LA ATMOSPHERA

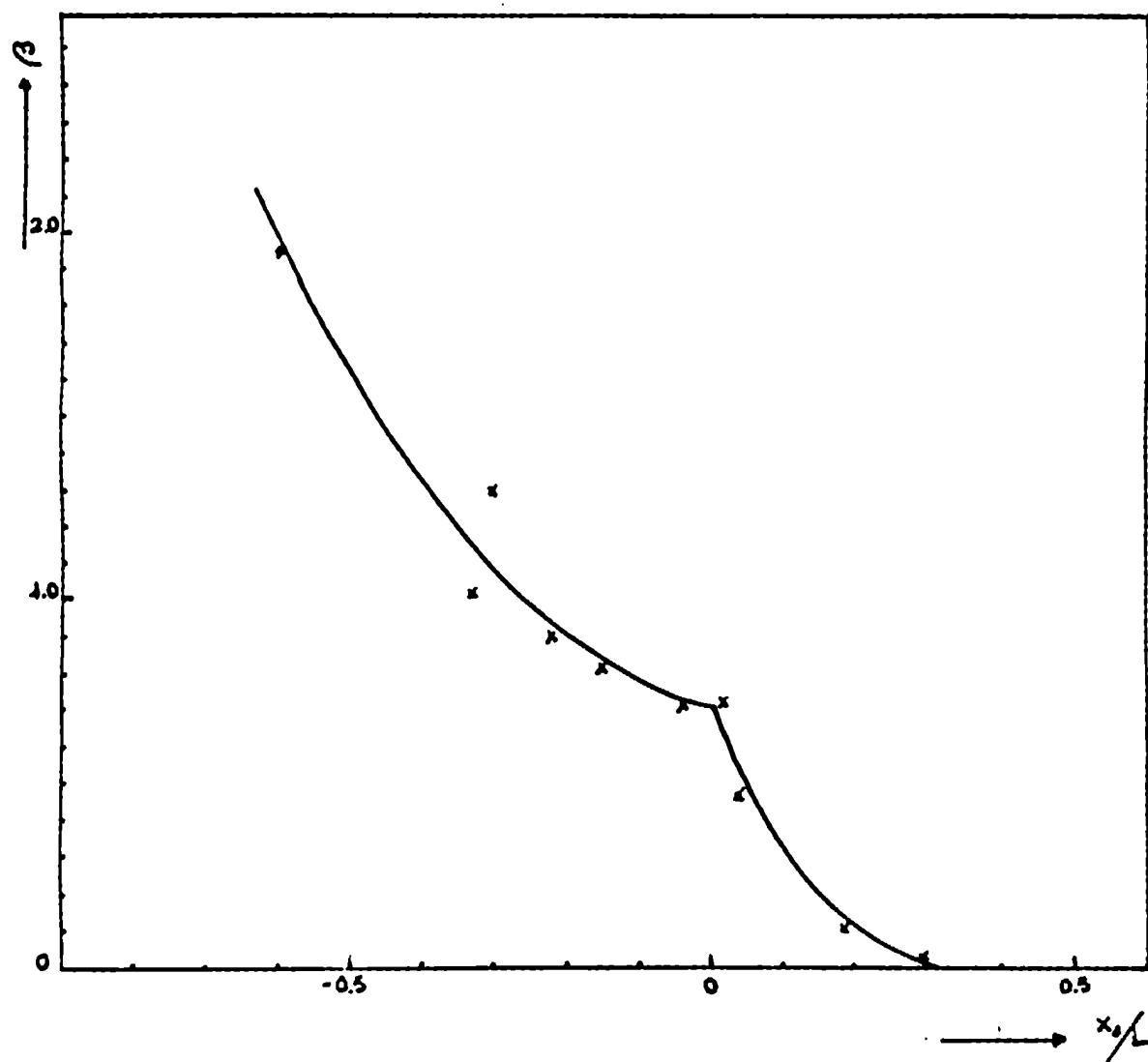
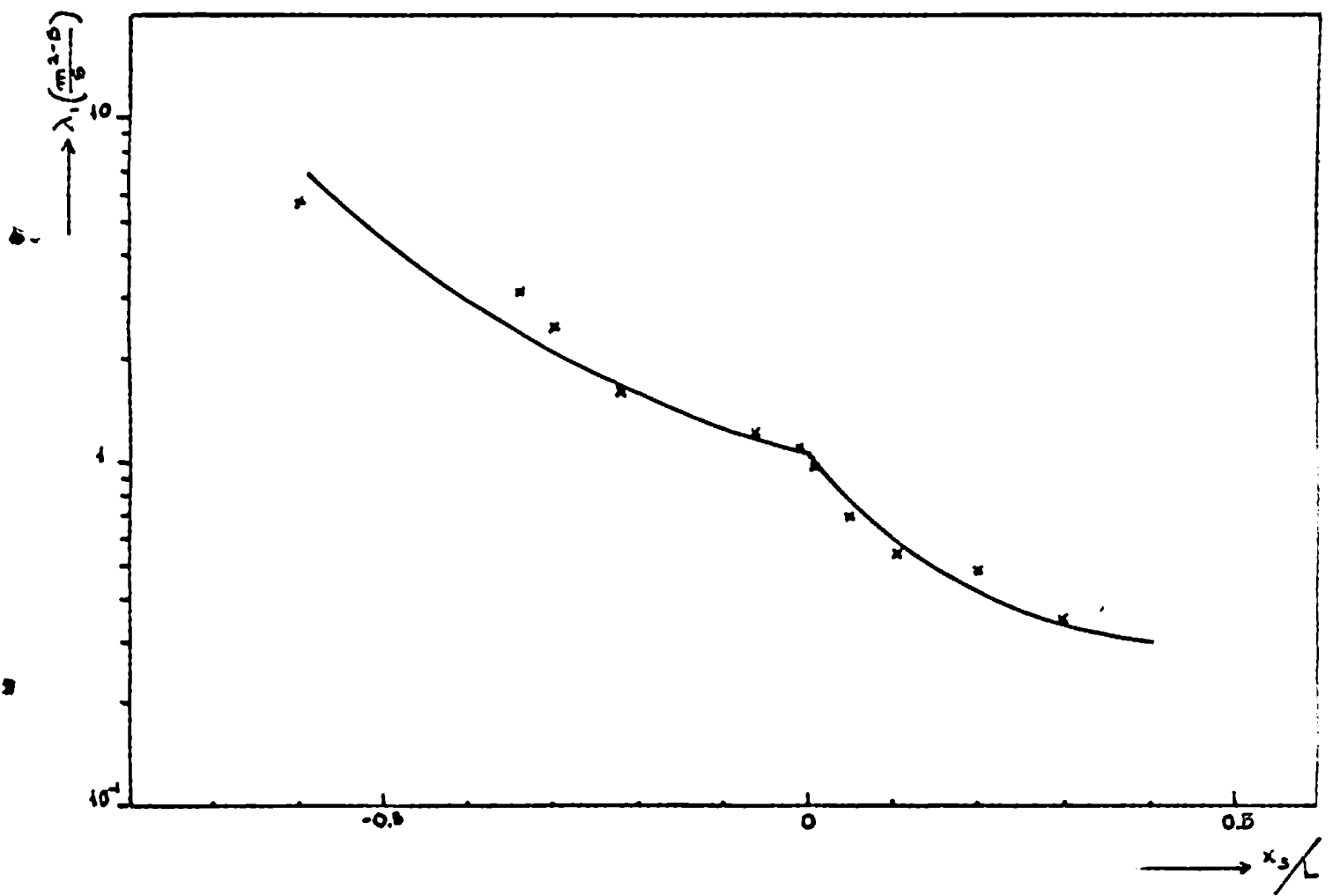


FIGURA Nº 7

VARIACION DE λ , CON LA ESTABILIDAD DE LA ATMOSFERA



VARIACION DEL COEFICIENTE δ' CON LA ESTABILIDAD DE LA ATMOSFERA

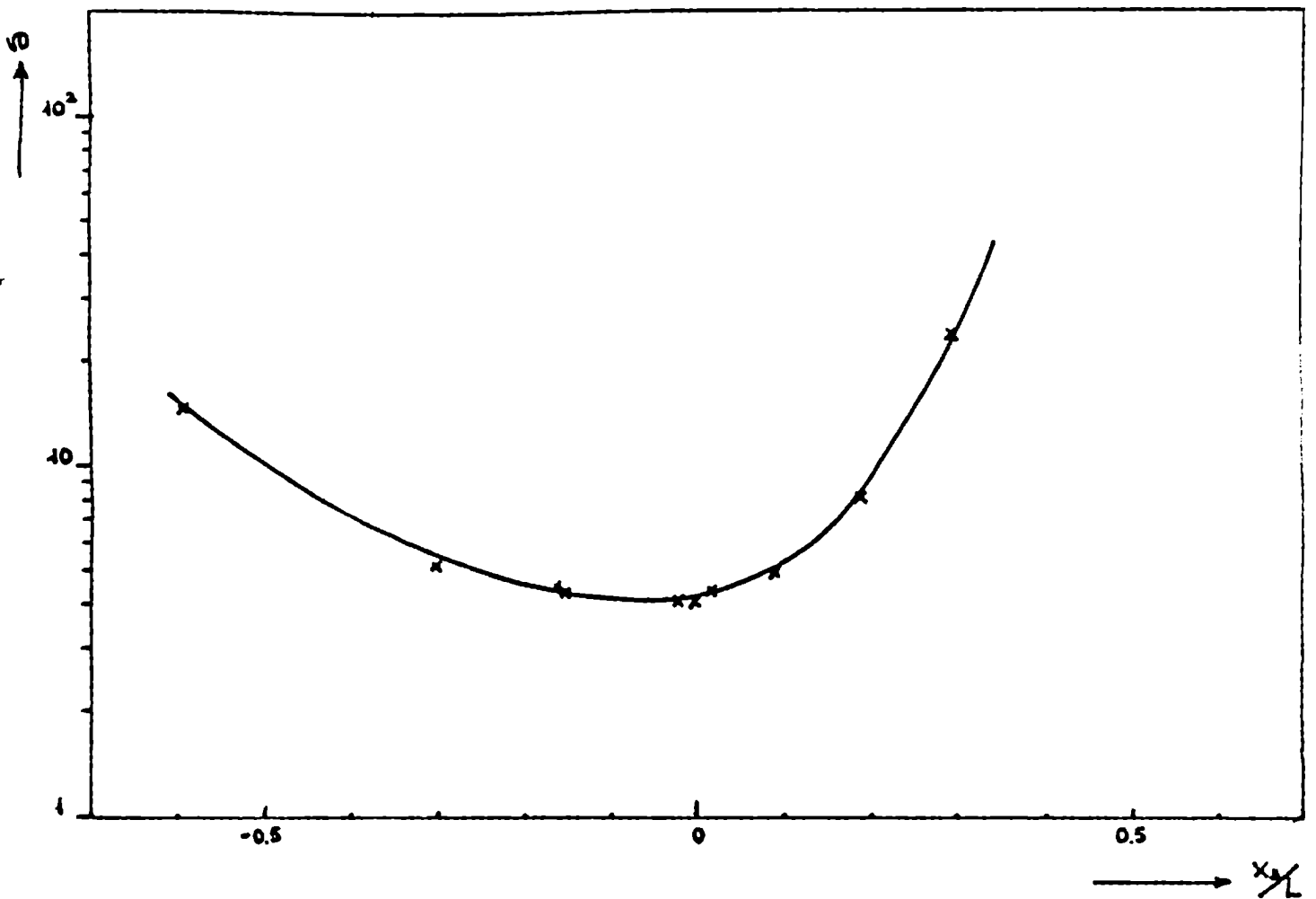


FIGURA Nº 2

VARIACION DEL COEFICIENTE S CON LA ESTABILIDAD DE LA ATMOSFERA

- Valores calculados mediante la expresión $S = \alpha + 2 - \gamma$
- * Valores estimados a partir de experimentos de difusión.

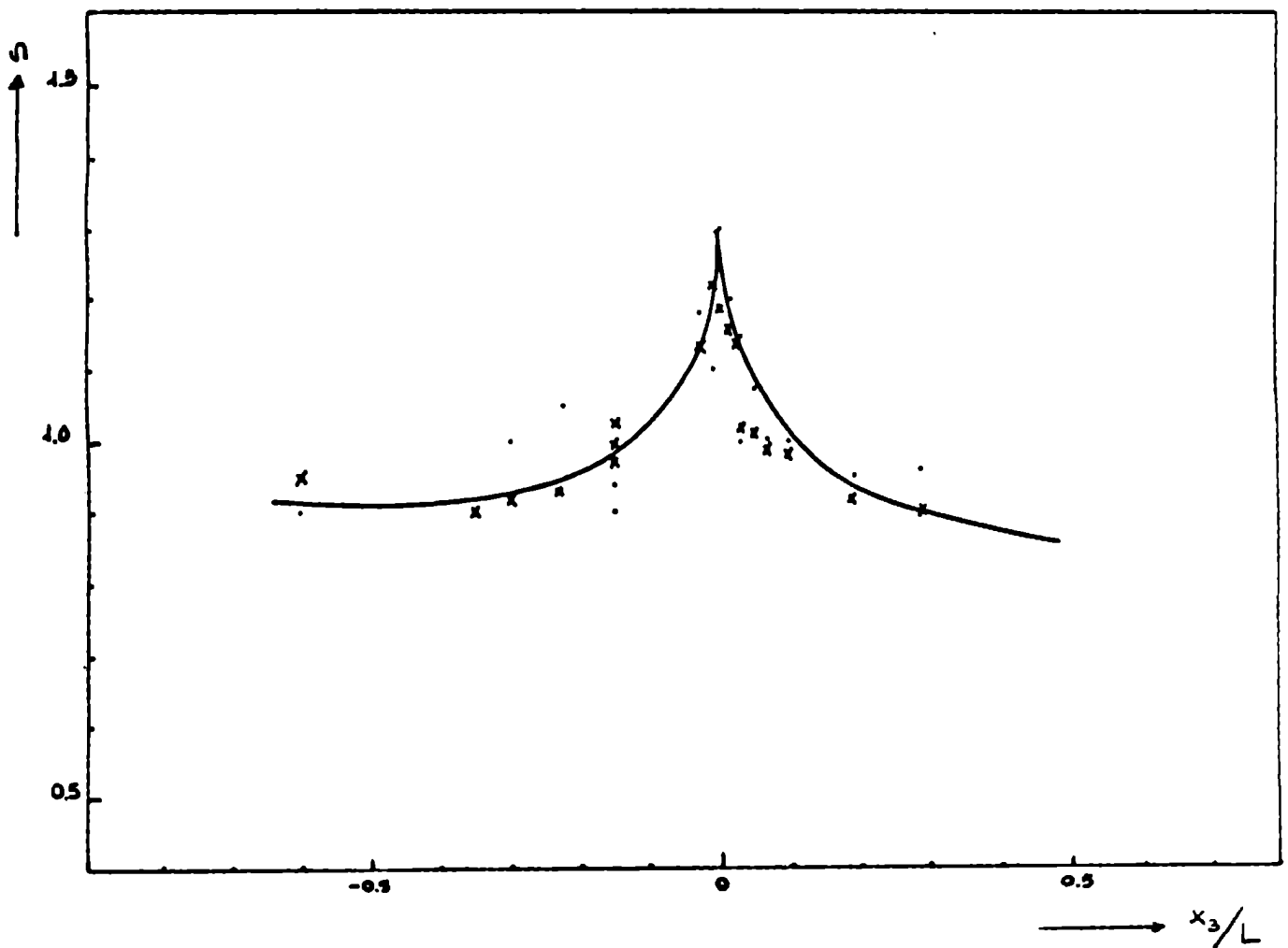


FIGURA Nº 10

VARIACION DEL COEFICIENTE Γ CON LA ESTABILIDAD ATMOSFERICA

- Valores calculados mediante la expresión $\Gamma = \frac{2(\alpha + 2 - \beta)}{\beta + 2 - \beta}$
- * Valores estimados a partir de experimentos de difusión.

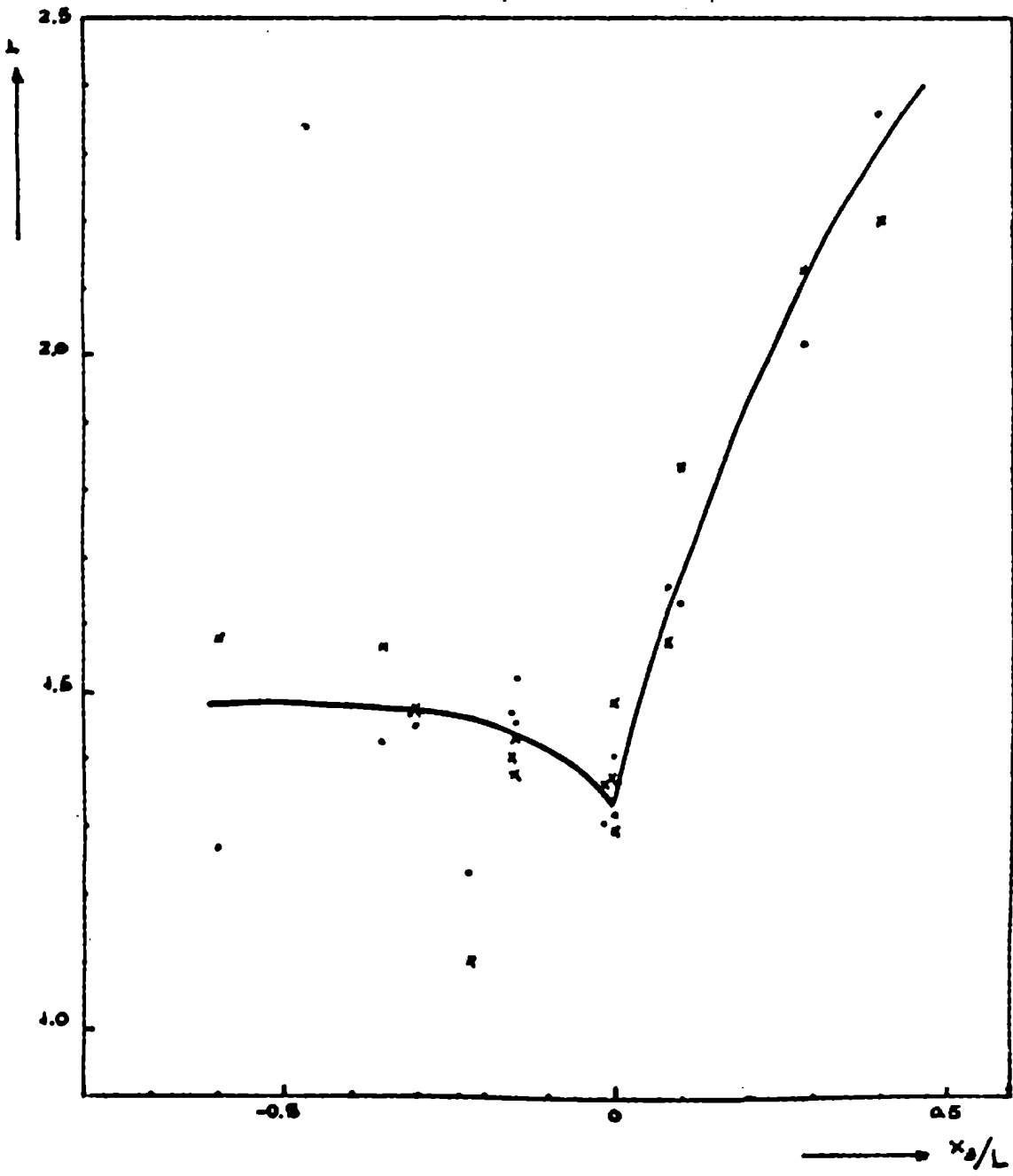


FIGURA Nº 11

CONCENTRACION MEDIA DE CONTAMINANTES EN AIRE A DISTINTAS
DISTANCIAS DE LA FUENTE DE EMISION EN LA DIRECCION DEL VIENTO

- × Valores calculados mediante la expresión [63]
- Valores calculados mediante la fórmula de la "pluma gaussiana"
- Valores observados.

