Algebras uniformes y su aplicación al estudio de funciones casi periódicas

Milaszewicz, Juan Pedro

1974

Tesis presentada para obtener el grado de Doctor en Ciencias Matemáticas de la Universidad de Buenos Aires

ALGEBRAS UNIFORMES Y SU APLICACION
AL ESTUDIO DE FUNCIONES CASI PERIODICAS

por

Juan Pedro Milaszewicz

Trabajo de Tesis para optar al título de
Doctor en Ciencias Matemáticas
presentado al Departamento de Matemáticas de la
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales de la
Universidad de Buenos Aires

Julio, 1974

INTRODUCCION

El presente trabajo tiende a elaborar una nueva perspectiva para algunas cuestiones clásicas del análisis funcional.

El punto de vista asumido es el de la teoría de las álgebras uniformes, rama que ha desarrollado recientemente como parte del análisis funcional. El primer capítulo establece un nuevo criterio para decidir cuándo dos puntos del espectro de un álgebra uniforme están o no en una misma parte de Gleason; a partir de esto se analizan especialmente las consecuencias en el caso de las álgebras de Dirichlet y en el de las álgebras fundamentales.

En el segundo capítulo, se analiza la estructura de partes de Gleason del espectro de un álgebra de funciones analíticas generalizadas, es decir, el "gran disco"; los resultados del primer capítulo son empleados aquí para poner en evidencia las razones estructurales que hacen a los clásicos contraejemplos debidos a H. Bohr y J. Favard de funciones casi periódicas, analíticas o armónicas, con comportamiento aparentemente patológico.

El tercer y último capítulo muestra someramente que las estructuras analizadas en el que lo precede, y que dan origen en forma natural a una noción de espacios de Hardy definida por K. Hoffman, no pueden ser tratados con la teoría abstracta de espacios de Hardy así como la conoce hasta el momento.

El material presentado ha sido organizado de tal manera que, a medida que se procede en su lectura, se adquiere el conocimiento histórico correspondiente a través de las citas bibliográficas.

El autor agradece profundamente a su Director de Tesis, el doctor Horacio Porta, quien le ha dado el aliento y la necesaria cuota de discusiones para llevar a buen término este trabajo.

Finalmente, el autor expresa su reconocimiento al doctor Alberto González Domínguez, director del Instituto Argentino de Matemática por haberle brindado las instalaciones del mismo para realizar el trabajo de redacción final.

INDICE

CAPITULO I

1.1 *Partes de Gleason en el espectro de un álgebra uniforme*

(1.1.1) En todo lo que siga, $\mathbb{C}$ designará el cuerpo de los números complejos, $\mathbb{R}$ el de los números reales y $\mathbb{Z}$ el grupo de los enteros.

Sea A un álgebra de Banach conmutativa y con unidad; Sp(A) es el espectro de A, es decir, el conjunto de funcionales lineales multiplicativas no nulas de A en $\mathbb{C}$, o lo que es lo mismo, el espacio de ideales maximales de A. Sp(A) es un subconjunto de la bola unitaria de A^*, el espacio dual de A, y es compacto en la topología débil estrella de A^*. Si f es un elemento de A, $\hat{f}$ indica la transformada de Guelfand de f, es decir, la función $\hat{f}:Sp(A) \dashrightarrow \mathbb{C}$ definida por $\hat{f}(x)=x(f)$ para cada $x \in Sp(A)$.

Si un espacio compacto, C(X) designa el álgebra de Banach de las funciones continuas definidas en X y con valores en $\mathbb{C}$; la norma es la del supremo. M(X) es el espacio dual de C(X), es decir, el espacio de medidas borelianas regulares y de variación total acotada. El signo $\| \ \|$ será usado indistintamente para designar la norma en C(X) o en M(X).

A es un *álgebra uniforme sobre X* si:

(i) A es una subálgebra cerrada de C(X).

(ii) A contiene a las constantes y separa los puntos de X.

(1.1.2) Nótese que si A es un álgebra de Banach, conmutativa y con unidad, entonces la clausura uniforme del conjunto de sus transformadas de Guelfand es un álgebra uniforme sobre $Sp(A)$, cuyo espectro vuelve a ser $Sp(A)$.

(1.1.3) Obsérvese también que si A es un álgebra uniforme sobre X, la transformación de Guelfand es una isometría de A con su imagen en $C(Sp(A))$; además X es canónicamente homeomorfo a una parte $\hat{X}$ de $Sp(A)$. Por esta razón en todo lo que siga salvo indicación en sentido contrario, cada vez que se hable de un álgebra uniforme sobre un espacio compacto X, se supondrá a este último identificado con $\hat{X}$.

(1.1.4) Si A es uniforme sobre X, ∂A designa la frontera de Shilov de A, es decir el menor conjunto cerrado sobre el cual todos los elementos de A alcanzan su módulo máximo; es claro que A es isométricamente isomorfa al álgebra uniforme sobre ∂A cuyos elementos son las restricciones a ∂A de los elementos de A.

(1.1.5) Si $x \in Sp(A)$, se dirá que $m_x \in M(X)$ es una *medida representativa de x en X* si:

(i) $\int f \, dm_x = \hat{f}(x)$ para toda f en A,

(ii) $\|m_x\| = \int dm_x = 1$

De la definición se deduce que una medida representativa es una medida de probabilidad.

Es claro por otra parte que si $X=Sp(A)$ entonces la medida de masa unitaria concentrada en $\{x\}$ es una medida representativa de x en X, pero la existencia de medidas representativas con soporte en, por ejemplo, la frontera de Shilov de A, no es totalmente evidente. El siguiente lema de R. Arens e I.M. Singer (Ver [3]) resuelve la cuestión.

(1.1.6) Lema: Sea A un álgebra uniforme sobre X y $x \in Sp(A)$; entonces existe $m_x \in M(X)$ que representa a x.

Demostración: El homomorfismo $f \dashrightarrow \hat{f}(x)$ de A en C tiene norma 1; el teorema de Hahn-Banach permite extender esta funcional lineal a una $\Phi: C(X) \dashrightarrow C$ también de norma 1. El teorema de representación de Riesz permite ahora obtener $m_x \in M(X)$ tal que:

(i) $\|m_x\| = 1$

(ii) $\Phi(f) = \int f \, dm_x$, para toda f en C(X).

Esta medida m_x es una medida representativa de x en X.

(1.1.7) En lo que resta de la sección, X indicará un espacio compacto y A un álgebra uniforme sobre X. Si $x \in Sp(A)$, $M_x(X)$ es el conjunto de medidas representativas de x en X; $M_x(X)$ es un conjunto convexo y débil-estrella compacto en M(X) por lo que se le podrá aplicar el siguiente resultado cuya demostración se encuentra en [26].

(1.1.8) Sea $K \subset M(X)$ un conjunto convexo y débil-estrella compacto de medidas positivas.

(i) Si $\mu \in M(X)$ es tal que μ es singular con respecto a todas las medidas de K, existe entonces $E \subset X$ tal que E es un conjunto F_σ, $\|\mu\|(X \setminus E) = 0$ y $m(E) = 0$ para cada m en K.

(ii) Si $\mu \in M(X)$, entonces $\mu = \mu_a + \mu_s$ donde μ_a es absolutamente continua con respecto a alguna ν en K y μ_s está concentrada en un boreliano E (i.e. $\|\mu_s\|(X\setminus E)=0$) tal que $m(E)=0$ para cada m en K.

(1.1.9) La descomposición dada por (ii) será llamada *descomposición generalizada de Lebesgue de* μ *con respecto a K.*

El siguiente resultado, conocido como teorema generalizado de F. y M. Riesz, ha sido demostrado por I. Glicksberg en [15]; Glicksberg utiliza una noción de descomposición de Lebesgue de una medida respecto de un conjunto como en (1.1.8) que, como se muestra en la introducción de [26], coincide con la recién definida.

(1.1.10) Sean A, X como en (1.1.7) y $\mu\in M(X)$ tal que μ es ortogonal a A. Si $x\in Sp(A)$ y $\mu=\mu_a+\mu_s$ es la descomposición generalizada de Lebesgue de μ con respecto a M_x, entonces μ_a y μ_s son ortogonales a A.

Del teorema generalizado de F. y M. Riesz se deduce que si μ es ortogonal a $A_x=\{f\in A\ /\ \hat{f}(x)=0\}$ entonces μ_a es ortogonal a A_x y μ_s es ortogonal a A; para ello basta considerar $\mu'=\mu-\mu(1)\mu$. Es esta variante del teorema la que será utilizada en este capítulo.

(1.1.11) Dados x e y en Sp(A), se dirá que *x es equivalente a y* cuando $\|x-y\|<2$, donde $\|x-y\|$ es la norma de x-y como elemento de A^*.

Que la relación recién definida es de equivalencia fue observado por A. Gleason en [14] y es una consecuencia inmediata del siguiente lema enunciado por E. Bishop en [6].

(1.1.12) Lema: Sean x e y en Sp(A); las propiedades siguientes son equivalentes:

(i) $\|x-y\| <$

(ii) Para cada sucesión (f_n) de elementos de A con $\|f_n\| \leq 1$, tal que $\lim|\hat{f}_n(x)|=1$ resulta $\lim|\hat{f}_n(y)|=1$.

Demostración: (i) $\Rightarrow$ (ii) Supóngase que la conclusión sea falsa; existen entonces z_0 y z_1 en C y una subsucesión (f_m) de la dada tales que:

$$|z_0|=1, \ \lim \hat{f}_m(x)=z_0, \ |z_1|<1 \ \text{y} \ \lim \hat{f}_m(y)=z_1 .$$

Sea $\varepsilon>0$ y τ_ε una aplicación conforme que transforma el disco unitario cerrado en sí mismo y tal que

$$|\tau_\varepsilon(z_0)-\tau_\varepsilon(z_1)| \geq 2-\varepsilon$$

Existen entonces g_m en A que satisfacen $\hat{g}_m = \tau_\varepsilon \circ \hat{f}_m$ y $\|g_m\| \leq 1$; pero en tal caso

$$\|x-y\| \geq \sup_m \{|\hat{g}_m(x)-\hat{g}_m(y)|\} = \sup_m \{|\tau_\varepsilon(\hat{f}_m(x))-\tau_\varepsilon(\hat{f}_m(y))|\} \geq 2-\varepsilon .$$

Como ε es un número positivo arbitrario se obtendrá $\|x-y\|=2$; esta contradicción prueba la primera implicación.

(ii) $\Rightarrow$ (i) Si se supone que $\|x-y\|=2$, existe entonces una sucesión (f_n) de elementos de A con $\|f_n\| \leq 1$ y tal que

$$\lim \ |\hat{f}_n(x)-\hat{f}_n(y)| = 2$$

Considerando una subsucesión conveniente y multiplicando por números de módulo 1, se puede suponer que se está en la siguiente situación:

$$g_n \in A, \ \|g_n\| \leq 1, \ \lim \hat{g}_n(x) = 1 \ \ \text{y} \ \ \lim \hat{g}_n(y) = -1$$

Sea $\tau: C \dashrightarrow C$ definida por $\tau(z) = \dfrac{1+z}{2}$; resulta entonces que existen elementos h_n en A tales que $\hat{h}_n = \tau \circ \hat{g}_n$. En tal caso

$$\|h_n\| \leq 1 \ , \quad \lim \hat{h}_n(x) = 1 \quad y \quad \lim \hat{h}_n(y) = 0$$

Esta contradicción completa la demostración.

(1.1.13) Las clases de equivalencia definidas por (1.1.11) se llaman *partes de Gleason de A*. El siguiente teorema de E. Bishop establece una relación importante entre puntos en una misma parte de Gleason y los respectivos conjuntos de medidas representativas; su demostración puede verse en [6] o en VI.1.1, 1. y 2.1 de [13].

(1.1.14) Si $x, y \in Sp(A)$ y $\|x-y\|<2$, entonces existen $c>0$, $m_x \in M_x(X)$ y $m_y \in M_y(X)$ tales que

$$c\, m_y \leq m_x \leq \frac{1}{c}\, m_y$$

Este resultado se completa con el siguiente de T. Gamelin cuya demostración se encuentra en VI.2.2 de [13].

(1.1.15) Si $x,y \in Sp(A)$ y $\|x-y\| = 2$ entonces existen conjuntos borelianos E_x, E_y tales que: $E_x \cup E_y = X$,

$m_x(E_y)=0$, para cada $m_x \in M_x(X)$

$m_y(E_x)=0$, para cada $m_y \in M_y(X)$

1.2 Algunas álgebras uniformes y sus partes de Gleason

(1.2.1) Si A es un álgebra uniforme sobre el espacio compacto X, dice que A es un *álgebra de Dirichlet sobre X* si $\mathrm{Re}\, A = \{\mathrm{Re}\, f \ / \ f \in A\}$ es denso en $C_R(X) = \mathrm{Re}\, C(X)$.

Esta clase de álgebras ha sido definida, y estudiadas algunas de sus propiedades, por A. Gleason en [14].

(1.2.2) Proposición: (i) A es de Dirichlet sobre X si y sólo si $m=0$ es la única medida real ortogonal a A; en particular, para todo

x en $Sp(A)$, el conjunto $M_x(X)$ contiene una sola medida.

(ii) Si A es de Dirichlet sobre X, entonces $\partial A = X$.

Demostración: (i) es una consecuencia inmediata de (1.2.1).

(ii) Supóngase que $\partial A \neq X$ y sea $x \in X \setminus \partial A$. Considerando a A como álgebra uniforme sobre A (ver (1.1.4)), en virtud de (1.1.6), existe $m_x \subset M(\partial A)$ que representa a x en X; la medida δ_x de masa unitaria concentrada en $\{x\}$ es también una medida que representa a x en X; m_x y δ_x resultan ser medidas representativas de x en X con soportes disjuntos. Esta contradicción con (i) concluye la demostración.

(1.2.3) *El álgebra del disco:* Sean $\bar{D} = \{ z \in C \ / \ |z| \leq 1 \}$ y $A(\bar{D})$ el conjunto de las funciones continuas en $\bar{D}$ y analíticas en D, su interior.

El espectro de $A(\bar{D})$ es $\bar{D}$ y $\partial A(D) = T = \{ |z| = 1 \}$. LLamando $A^+(T) = \{ f \in C(T) \ / \ \int e^{-in\theta} f(e^{i\theta})\, d\theta = 0$ si $n \in Z,\ n<0 \}$, se tiene que $A^+(T)$ es el álgebra cuyos elementos son las restricciones a $\partial A(\bar{D})$ de los elementos de $A(\bar{D})$; $A^+(T)$ es un álgebra de Dirichlet sobre T. Si $z \in D = \bar{D} \setminus T$, la medida $m_z \subset M(T)$ que lo representa se obtiene por convolución con el núcleo de Poisson:

si $z = re^{i\theta}$ $(0 \leq r < 1)$, entonces $f(z) = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int \dfrac{(1-r^2)\ f(e^{i\phi})}{1-2r\ \cos(\theta-\phi)+r^2}\, d\phi$.

Si $z \in T$, m_z es la medida de masa unitaria concentrada en z.

Teniendo en cuenta estas observaciones, (1.1.14) y (1.1.15), las partes de Gleason de $A(\bar{D})$ son D y cada uno de los puntos de T.

(1.2.4) *P(K)*: Sean $K \subset C$ un compacto y $P(K)$ el álgebra de las funciones que son límite uniforme sobre K de polinomios en z; la norma de una tal función es el supremo de su módulo sobre K. El espectro de P(K) se identifica con $\hat{K}$, la cápsula polinomialmente convexa de K, es decir, la unión de K con las componentes conexas acotadas de su complemento en C. La frontera de Shilov de P(K) es la frontera exterior de K, esto es, la frontera topológica de $\hat{K}$.

El teorema de Walsh (Ver [29] o II.3.3 en [13]) afirma que si $K=\hat{K}$, o equivalentemente si $\partial K=\partial\hat{K}$, entonces toda función real y continua definida en ∂K se aproxima uniformemente por partes reales de polinomios en z. Resulta entonces que P(K) es de Dirichlet sobre $\partial\hat{K}$.

Las partes de P(K) son las componentes conexas del interior de $\hat{K}$ y cada uno de los puntos de $\partial\hat{K}$ (Ver Satz 7 de [30]).

(1.2.5) Sean $K \subset C$ un compacto y A(K) el álgebra de las funciones continuas sobre K que son analíticas en su interior; la norma es la del supremo. El espectro de A(K) se identifica con K (Ver [2]). Interesa destacar aquí que en el caso en que el complemento de K sea conexo, el teorema de Mergelyan (Ver 20.5 de [27]) afirma que A(K)=P(K). Obsérvese también que cuando $K=\bar{D}$ entonces $A(K)=A(\bar{D})=P(K)$.

(1.2.6) Sea $\bar{D}^2=\bar{D}\times\bar{D}$ y $A(D^2)$ el álgebra de las funciones continuas en $\bar{D}^2$ y analíticas en $D^2=D\times D$.

El espectro de $A(D^2)$ es $\bar{D}^2$ y su frontera de Shilov es $T^2=T\times T$. $A(D^2)$ se identifica al álgebra de funciones continuas sobre T^2 con coeficientes de Fourier nulos fuera del primer cuadrante de Z^2.

Las partes de Gleason de $A(D^2)$ son D^2, cada uno de los puntos de T^2 y los discos del tipo $D\times\{e^{i\theta}\}$ y $\{e^{i\phi}\}\times D$.

$A(D^2)$ no es un álgebra de Dirichlet considerada como álgebra sobre T^2. Para esto basta observar que si $f\in A(D^2)$ entonces su parte real tiene los coeficientes de Fourier no nulos en el primer y tercer cuadrantes de Z^2; en particular, la función $e^{-i\theta}e^{i\phi}+e^{i\theta}e^{-i\phi}$ $(\theta,\phi\in[0,2\pi])$ es una función real ortogonal a la restricción a T^2 de los elementos de $\mathrm{Re}\,A(D^2)$.

(1.2.7) Sea A un álgebra uniforme sobre el espacio compacto X y A^{-1} el conjunto de elementos inversibles de A; se dice que el álgebra es *logmodular sobre* X si $\log|A^{-1}|=\{\log|f| \;/\; f\in A^{-1}\}$ es denso en $C_R(X)$.

La noción de logmodularidad ha sido definida por K. Hoffman en [18] ; en ese trabajo se establecen para las álgebras logmodulares resultados conocidos para las álgebras de Dirichlet.

Toda álgebra de Dirichlet sobre X es logmodular sobre X. La recíproca no es válida: sea H^∞ el álgebra de las funciones analíticas y acotadas en D; si T' es el espectro de $L^\infty(T)$, H^∞ se identifica con una subálgebra cerrada de $C(T')$, que es logmodular sobre T' pero que no es de Dirichlet (Ver Chapter 10 de [19]). La descripción de $Sp(H^\infty)$ así como la de sus partes requiere un estudio detallado que se puede hallar en [19] , [10] y [20] . Un método general para la construcción de álgebras logmodulares como el descrito recién (i.e., a partir de una medida multiplicativa en un álgebra uniforme) se encuentra en [21] .

(1.2.8) Un álgebra uniforme sobre X es, por definición, *fundamental sobre X* si cada x en Sp(A) admite una única medida representativa en M(X).

El estudio de las álgebras fundamentales ha sido comenzado en [22]. Si A es fundamental sobre X entonces la frontera de Shilov de A es X; esto se demuestra fácilmente utilizando el argumento empleado para demostrar (1.2.2)-(ii): si $x \in X \setminus \partial A$ existe una medida representativa de x con soporte en la frontera de Shilov de A, y por otro lado la medida de masa unitaria concentrada en x representa a x en X. Como $M(\partial A) \subset M(X)$ se tendría que A no es fundamental sobre X.

Si A es logmodular sobre X entonces A es fundamental sobre X (Ver [18]) pero no es siempre cierta la recíproca. El siguiente ejemplo, que nos ha sido comunicado por A. Bernard, ilustra este hecho.

(1.2.9) *Ejemplo.* Sea A un álgebra logmodular, pero no de Dirichlet, sobre X. Si $Y \subset A^*$, el cono de Y es el conjunto

$$c(Y) = \{tx \,/\, 0 \leqslant t \leqslant 1,\ x \in Y\} \quad ;$$

es claro que $c(Sp(A))$ y $c(X)$ son débil-estrella compactos. Sea A_c el álgebra de las funciones en $C(c(X))$ que son límite uniforme sobre $c(X)$ de polinomios de la forma

$$P(tx) = \sum f_j(x)\, t^j + k \quad , f_j \in A,\ k \in C. \qquad (*)$$

A_c resulta ser un álgebra uniforme sobre $c(X)$ y este es el ejemplo en cuestión, lo que resulta de las siguientes proposiciones (que se demuestran a continuación):

(i) $Sp(A_c)=c(Sp(A))$.

(ii) A_c es fundamental sobre $c(X)$.

(iii) A_c no es logmodular sobre $c(X)$.

(i) Sean $0 \leq s \leq 1$ y $y \in Sp(A)$; si P es de la forma (*), se define $e_{sy}(P) = \sum \hat{f}_j(y)\, s^j + k$

Obsérvese que no hay ambigüedad en la definición de e_{sy} cuando $s=0$.

e_{sy} es lineal, multiplicativa y no nula. Se quiere ver que es continua. Si m_y es la medida representativa de y en X resulta

$$e_{sy}(P) = \int P(sx)\, dm_y(x)$$

Por lo tanto

$$|e_{sy}(P)| \leq \sup \{|P(sx)| \ / \ x \in X\} \leq \|P\|$$

De esto se deduce que e_{sy} se extiende de manera única a una funcional lineal multiplicativa no nula E_{sy} definida en A_c.

Se tiene así que la aplicación que a sy le asocia E_{sy} es una inyección continua de $c(Sp(A))$ en $Sp(A_c)$. Esta inyección es suryectiva; en efecto, sea w un elemento de $Sp(A_c)$; como A_c contiene a los polinomios en t (con coeficientes constantes), $C([0,1])$ está contenido en A_c y vale $w(t)=s \in [0,1]$. Si $s=0$,

$$(w(t.f))^2 = w(t^2 f^2) = w(t)\, w(t.f^2) = 0$$

En tal caso $w=E_0$.

Supóngase ahora que $s \neq 0$ y definamos $w' : A \dashrightarrow C$ mediante $w'(f) = w(ts^{-1}f)$. Es claro que w' es lineal y que $w'(1)=1$; además w' es multiplicativa pues para todo par de funciones f y g en A vale $w'(f).w'(g)=w(ts^{-1}f).w(ts^{-1}g)=w(t^2s^{-2}fg)=w(ts^{-1})w(ts^{-1}fg)=w'(fg)$

Por consiguiente $w = E_{sw}$,

(ii) La única medida representativa de 0 en $c(X)$ es la medida de masa unitaria concentrada en $\{0\}$; pues si $P_n(tx)=(1-t)^n$ se tiene

$$1 = P_n(0) = \int P_n(tx)\, dm_0(tx) = \int (1-t)^n\, dm_0(tx) \longrightarrow m_0(\{0\}).$$

Sea ahora sy en $c(Sp(A))$ con $s \neq 0$ y m una medida representativa de sy. Veamos primero que $m(s.X)=1$; si $P_n(t)$ es una sucesión de polinomios para los cuales vale

(a) $P_n(s)=0$, (b) $|P_n(t)| \leq 2$ si $t \in [0,1]$, y (c) $\lim P_n(t)=1$ si $t \neq s$,

el teorema de convergencia mayorada permite obtener

$$m(s.X) = \lim \int (1-P_n)\, dm = 1$$

Si f está en A, se tendrá

$$\int tf\, dm = s \int f\, dm = s\, \hat{f}(y)$$

La unicidad de m_y en $M(X)$, implica que

$$\int g\, dm = \int g(sx)\, dm_y(x) \text{ para cada } g \text{ en } C(c(X)),$$ i.e. m es única.

(iii) Siendo $Sp(A_c)$ simplemente conexo, los elementos de A_c^{-1} tienen logaritmos en A_c (Ver §7, Chap. III en [13]), i.e.,

$$A_c^{-1} = \exp(A_c) = \{\exp(f) \;/\; f \in A_c\}$$

De aquí se obtiene que $\log |A_c^{-1}| = \operatorname{Re} A_c$; como suponer que $\operatorname{Re} A_c$ es denso en $C_R(c(X))$ implica que $\operatorname{Re} A$ es denso en $C_R(X)$ y puesto que A no es de Dirichlet sobre X se tiene que A_c no es logmodular sobre $c(X)$.

1.3 Partes de Gleason y aproximación uniforme

(1.3.1) Si A es uniforme sobre X y x es un elemento de $Sp(A)$, A_x denota el ideal maximal asociado a x y $\overline{A}_x$ el conjunto de los elemenlos conjugados de los de A_x. Si $m \in M(X)$, $\bar{m}$ denota la medida conjugada de m definida por

$$\int f \, d\bar{m} = \overline{(\int \bar{f} \, dm)} \ , \quad \text{para cada } f \text{ en } C(X) \ .$$

(1.3.2) Teorema: Sean A uniforme sobre X y x e y en Sp(A); las siguientes proposiciones son equivalentes:

(i) $\|x-y\| = 2$

(ii) $1 \in$ Clausura de $(A_x + \bar{A}_y)$

Demostración: (i) $\Rightarrow$ (ii) Si n es una medida ortogonal a $A_x + \bar{A}_y$ y $n = n_x + n_s'$ es la descomposición generalizada de Lebesgue de n respecto de $M_x(X)$, el teorema generalizado de F. y M. Riesz (ver (1.1.10)) permite afirmar que n_x es ortogonal a A_x y que n_s' es ortogonal a A; por lo tanto

$$n(1) = n(X) = n_x(1) \tag{a}$$

Ahora bien, n_x es absolutamente continua con respecto a alguna m_x en $M_x(X)$ y se tiene un boreliano F_x tal que (ver (1.1.8)):

$$m_x(F_x) = 0, \text{ para cada } m_x \text{ en } M_x(X), \quad y \quad \|n_s'\|(X \setminus F_x) = 0 \ .$$

Además, (1.1.15) permite suponer que $m_y(X \setminus F_x) = 0$ para toda m_y en $M_y(X)$.

Considerando ahora n_s' y $M_y(X)$ y procediendo análogamente se obtiene la descomposición generalizada de Lebesgue, $n_s' = n_y + n_s$, de n_s' con respecto a $M_y(X)$, y la existencia de un boreliano F_y contenido en F_x tal que:

$$\|n_s\|(X \setminus F_y) = 0 \ , \quad m_y(F_y) = 0 \text{ para cada } m_y \text{ en } M_y(X) \ .$$

Aquí también se tiene que n_s es ortogonal a A, es decir

$$0 = n_s'(1) = n_y(1) = n_s(1) \tag{b}$$

La medida n' definida por $n' = \bar{n}_x + \bar{n}_s$ está concentrada en $F'_y = F_y \cup (X \setminus F_x)$, es decir $\|n'\|(X \setminus F'_y) = 0$; por otra parte $m_y(F'_y) = 0$ para cada m_y en $M_y(X)$. Como $\bar{n}_y$ es absolutamente continua con respecto a alguna medida m_y en $M_y(X)$ se tiene que $\bar{n} = \bar{n}_y + n'$ es la descomposición generalizada de Lebesgue de $\bar{n}$ con respecto a $M_y(X)$. Pero $\bar{n}$ es ortogonal a A_y, por lo que el teorema generalizado de F. y M. Riesz implica que n' es ortogonal a A. Esta última observación (y teniendo en cuenta (b)) permite deducir que $n_x(1)=0$; volviendo a (a) se obtiene finalmente que $n(1)=0$, y entonces 1 pertenece a la clausura (débil, y por lo tanto en norma) de $A_x + \bar{A}_y$.

(ii) ⇒ (i) Sean (f_n) y (g_n) sucesiones en A_x y A_y respectivamente tales que $f_n + \bar{g}_n$ converge uniformemente a 1 y supóngase que $\|x-y\| < 2$. En virtud de (1.1.14), existen m_x en $M_x(X)$, m_y en $M_y(X)$ y $c>0$ tales que

$$c\, m_y \leqslant m_x \leqslant c^{-1} m_y \qquad \text{(c)}$$

Como $(1-f_n)$ es ortogonal a $\bar{g}_n$ en $L^2(m_y)$ (puesto que m_y es multiplicativa en A), se tiene

$$\int |1-f_n-\bar{g}_n|^2\, dm_y = \int |1-f_n|^2\, dm_y + \int |g_n|^2\, dm_y = k_n \longrightarrow 0 .$$

Es decir que vale $\lim f_n = 1$ y $\lim g_n = 0$ en $L^2(m_y)$, y en vista de (c), también en $L^2(m_x)$.

Por otra parte, como $\bar{f}_n + g_n$ también converge uniformemente a 1, se concluye que también $\lim f_n = 0$ y $\lim g_n = 1$ en $L^2(m_x)$ y $L^2(m_y)$. Pero entonces, eligiendo convenientemente una subsucesión (f_j) de (f_n), se obtendría que para casi todo punto respecto de m_x vale

$1 = \lim f_n = 0$ y esto se contradice con $m_x(X) = 1$. Por lo tanto debe valer $\|x-y\| = 2$.

(1.3.3) Corolario: Con las mismas hipótesis de (1.3.2) son equivalentes que la clausura de $(A_x + \bar{A}_y)$ contenga a $A + \bar{A}$ y que 1 pertenezca a la clausura uniforme de $A_x + \bar{A}_y$.

(1.3.4) Corolario: Sean A un álgebra de Dirichlet sobre X y x e y en Sp(A); entonces $\|x-y\| = 2$ si y sólo si $A_x + \bar{A}_y$ es denso en $C(X)$.

Demostración: Será suficiente ver que la clausura uniforme de $A_x + \bar{A}_y$ contiene a A. Si f está en A $f = (f-\hat{f}(x)) + \hat{f}(x)$. El primer término de esta descomposición pertenece a A_x y el segundo, en virtud de (1.3.2), pertenece a la clausura uniforme de $A_x + \bar{A}_y$.

(1.3.5) Es interesante destacar que la equivalencia demostrada en (1.3.4) caracteriza a las álgebras de Dirichlet entre las álgebras uniformes, como lo prueba el siguiente lema.

(1.3.6) Lema: Sea A un álgebra uniforme sobre X; las propiedades siguientes son equivalentes:

(i) A es un álgebra de Dirichlet sobre X ;

(ii) Si x e y son elementos de Sp(A), entonces $\|x-y\|=2$ si y sólo si $A_x + \bar{A}_y$ es denso en $C(X)$.

Demostración: La implicación (i) $\Rightarrow$ (ii) está dada por (1.3.4).

Para ver que (ii) $\Rightarrow$ (i), obsérvese que si la frontera de Shilov de A se reduce a un punto, entonces todo resulta absolutamente trivial. Suponer que ∂A no se reduce a un punto implica que lo mismo ocurre con la frontera de Choquet (i.e., el conjunto de puntos de $Sp(A)$ que admiten una única medida representativa en $M(Sp(A))$) ya que esta última es densa en la primera (Ver 2.2 en [8]). Sean entonces x e y dos puntos de la frontera de Choquet de A; sus medidas representativas son las medidas de masa unitaria concentrada en $\{x\}$ y $\{y\}$ respectivamente. Pero entonces, teniendo en cuenta (1.1.14), resulta $\|x-y\|=2$ y por consiguiente $A_x + \overline{A}_y$ es denso en $C(X)$; considerando partes reales se obtiene la conclusión.

(1.3.7) En conexión con (1.3.2) es interesante el siguiente teorema que es una generalización de un teorema demostrado por K. Hoffman en [17] (Ver Theorem 6.4).

(1.3.8) Teorema: Sean A un álgebra de Dirichlet sobre X, x un elemento de $Sp(A)$ y m_x la medida representativa de x en X. Si n $M(X)$ es ortogonal a A_x y existe una medida real $m \in M(X)$, m mutuamente singular con m_x, y tal que $m(\overline{f})=n(\overline{f})$ para toda f en A, entonces $n(1)=0$.

Demostración: Las hipótesis permiten verificar que

$$(n + \overline{n})\ (g) = (m + m(1)\ m_x)\ (g) \qquad \text{si} \quad g \in \operatorname{Re} A$$

Como A es de Dirichlet resulta

$$n + \overline{n} = m + m(1).m_x \tag{a}$$

Si $n = h\, m_x + n_s$ es la descomposición de Lebesgue de n con respecto a m_x ($h \in L^1(m_x)$) se tiene que

$$n + \overline{n} = (2 \operatorname{Re} h)\ m_x + (n_s + \overline{n}_s) \tag{b}$$

es la descomposición de Lebesgue de $n + \overline{n}$ con respecto a m_x.

Puesto que m es singular con respecto a m_x, la conjunción de (a), (b) y la unicidad de la descomposición de Lebesgue implican que $m = n_s + \bar{n}_s$. Por otra parte, el teorema generalizado de F. y M. Riesz (ver (1.1.10)) permite afirmar que n_s es ortogonal a A. Por lo tanto

$$0 = n_s(1) + \bar{n}_s(1) = m(1) = n(1)$$

1.4 Partes de Gleason y aproximación en L^2

(1.4.1) En esta sección se trata la posibilidad de dar versiones alternativas de (1.3.2) para álgebras fundamentales. Para álgebras de Dirichlet esto ha sido hecho en (1.3.4) pero, como ha sido observado en (1.3.5), la situación allí resuelta es típica de las álgebras de Dirichlet.

(1.4.2) Teorema: Sean A un álgebra fundamental sobre X, x e y elementos de Sp(A) y m_x y m_y sus respectivas medidas representativas en X. Son entonces equivalentes:

(i) $\|x-y\| = 2$

(ii) $A_x + \bar{A}_y$ es denso en $L^2(m_x+m_y)$

Demostración: (i) $\Rightarrow$ (ii) Sea $f \in L^2(m_x+m_y)$ ortogonal a $A_x + \bar{A}_y$; (1.3.2) implica que f es ortogonal a $A + \bar{A}$. Se quiere probar que $f=0$.

Sea (f_n) una sucesión de elementos de C(X) que converge a f en $L^2(m_x+ m_y)$. Es claro entonces que (f_n) es una sucesión fundamental en $L^2(m_x)$ y en $L^2(m_y)$; llamaremos f_x y f_y a los respectivos límites en dichos espacios. Por otra parte, si g es un elemento de C(X) se tiene

$$(f,g) = \lim \left(\int f_n g \, dm_x + \int f_n g \, dm_y \right)$$

donde (,) indica el producto escalar en $L^2(m_x + m_y)$.

Por lo tanto

$$(f,g) = \int f_x g \, dm_x + \int f_y g \, dm_y \qquad \text{para toda } g \text{ en } C(X) \quad .(a)$$

Por ser $\|x-y\|=2$, existe una sucesión (g_n) en A tal que

$$\|g_n\| \leq 1, \; g_n(z) \longrightarrow 1 \;\; p.p.(m_x), \; g_n(z) \longrightarrow -1 \;\; p.p.(m_y) \; .$$

Si $u_n = \frac{1+g_n}{2}$ se tiene que

$$u_n(z) \longrightarrow 1 \;\; p.p.(m_x), \; u_n(z) \longrightarrow 0 \;\; p.p.(m_y),$$

$$\|u_n\| \leq 1 \qquad y \qquad \|1 - u_n\| \leq 1 \; .$$

Puesto que f es ortogonal a $A + \overline{A}$, (a) implica:

$$\int f_x(g + \overline{h}) \, dm_x + \int f_y(g + \overline{h}) \, dm_y = 0 \qquad \text{si } f,\, g \in A$$

En particular resulta que

$$\int f_x g \, dm_x + \int f_y g \, dm_y = 0 \quad \text{para toda } g \text{ en } A \; .$$

Pero entonces:

$$\int f_x g \, u_n \, dm_x + \int f_y g \, u_n \, dm_y = 0 \qquad ;$$

pasando al límite se obtiene $\int f_x g \, dm_x = 0$ para toda g en A.

Análogamente resulta $\int f_x \overline{h} \, dm_x = 0$ si h es un elemento de A.

Estas conclusiones nos dicen que f_x es ortogonal a $A+\overline{A}$; un resultado de G. Lumer (ver Theorem 5 de [22]) afirma que si A es fundamental sobre X, entonces $A + \overline{A}$ es denso en $L^2(m_x)$, donde m_x es la medida representativa en X del elemento x de Sp(A). Se concluye así que

$$f_x = 0 \quad p.p.(m_x) \qquad\qquad (b)$$

Procediendo con $1-u_n$ como se ha hecho con u_n se obtendrá del mismo modo que

$$f_y = 0 \quad p.p.(m_y) \tag{c}$$

Teniendo en cuenta (a), (b) y (c) implican entonces que f es ortogonal a C(X), i.e. f es nula; por lo tanto $A_x + \overline{A}_y$ es denso en $L^2(m_x + m_y)$.

(ii) ⇒ (i) Si se supone que $\|x-y\| < 2$ entonces (1.1.14) implica que

$$L^2(m_x) = L^2(m_y) = L^2(m_x + m_y) \tag{d}$$

Si $f_n \in A_x$, $g_n \in A_y$ son tales que

$$\lim \int |1-f_n-\overline{g}_n|^2 \, d(m_x+m_y) = 0$$

se deduce entonces de (d) que

$$\lim \int |1-f_n-\overline{g}_n|^2 \, dm_y = 0 \tag{e}$$

Puesto que $\overline{g}_n$ es ortogonal a $(1-f_n)$ en $L^2(m_y)$, de (e) resulta

$$\lim \left(\int |1-f_n|^2 \, dm_y + \int |g_n|^2 \, dm_y \right) = 0$$

Por lo tanto $f_n \longrightarrow 1$ p.p.(m_y) y $g_n \longrightarrow 0$ p.p.(m_y) .

Análogamente $f_n \longrightarrow 0$ p.p.(m_x) y $g_n \longrightarrow 1$ p.p.(m_x) .

Pero entonces, volviendo a (d) se obtiene que $m_x = m_y = 0$; esta contradicción completa la demostración.

(1.4.3) Corolario: Sean A uniforme sobre X y x e y en Sp(A); si $A_x + \overline{A}_y$ es denso en $L^2(m_x + m_y)$ para cada m_x en $M_x(X)$, m_y en $M_y(X)$, entonces $\|x-y\| = 2$.

(1.4.4) El siguiente ejemplo muestra que la recíproca de (1.4.3) no es siempre cierta.

Con las notaciones de (1.2.6) sean $Y = \bar{D}^2 \times [0,1]$ y $B = \{ f \in C(Y) \ / \ f(.,.,t) \in A(D^2)$ para cada $t \in [0,1] \}$.

La frontera de Shilov de B es $X = T^2 \times [0,1]$ .Sean A el álgebra sobre X cuyos elementos son las restricciones a X de los elementos de B, $x=(0,0,0)$ y $y=(0,0,1)$; $\|x-y\|=2$ en A^* pues si g define por $g(e^{i\theta},e^{i\phi},t) = 1-2t$, g es un elemento de A que satisface $g(x)=1$, $g(y)=-1$ y $\|g\|=1$.

Considérense las medidas representativas en X de x e y definidas respectivamente por

$$\int f\, dm_x = \frac{1}{4\pi^2}\int\int f(e^{i\theta},e^{i\phi},0)\, d\theta\, d\phi, \text{para toda } f \in C(X)$$

$$\int f\, dm_y = \frac{1}{4\pi^2}\int\int f(e^{i\theta},e^{i\phi},1)\, d\theta\, d\phi, \text{para toda } f \in C(X).$$

La función $f(e^{i\theta},e^{i\phi},t) = e^{i(\theta-\phi)}$ no sólo es ortogonal a $A_x+\bar{A}_y$ en $L^2(m_x+m_y)$ sino que también es ortogonal a $A+\bar{A}$ en $L^2(m_x+m_y)$.

(1.4.5) Si bien la recíproca de (1.4.3) no es siempre cierta, obsérvese que en la demostración de la primera parte de (1.4.2) se ha establecido lo siguiente: Si A es uniforme sobre X, x e y son elementos de Sp(A) tales que $\|x-y\|=2$, $m_x \in M_x(X)$ y $m_y \in M_y(X)$, y si $A+\bar{A}$ (o $A_x+\bar{A}_y$ en virtud de (1.3.2)) tiene ortogonal no nulo en $L^2(m_x+m_y)$ entonces $A+\bar{A}$ no puede tener simultáneamente nulos sus ortogonales en $L^2(m_x)$ y en $L^2(m_y)$.

Se plantea entonces la cuestión acerca de la validez de la recíproca del teorema de Lumer citado en la demostración de (1.4.2). La respuesta está dada por el siguiente teorema.

(1.4.6) Teorema: Sea A un álgebra uniforme sobre X; si $x \in Sp(A)$ es tal que $A+\bar{A}$ es denso en $L^2(m_x)$ para cada m_x en $M_x(X)$, entonces $M_x(X)$ se reduce a un punto.

Demostración: Esta consiste en una aplicación del teorema minimax de von Neumann en la versión siguiente (Ver [25]): Si K es un subconjunto convexo y compacto de un espacio vectorial topológico Y, si S es un subconjunto convexo del espacio vectorial Y' y si $F:K\times S \dashrightarrow R^{+}$ es una función cóncava y continua en la primera variable y convexa en la segunda se tiene entonces que

$$\inf_{g\in S}\ (\sup_{m\in K}\ F(m,g)\ ) = \sup_{m\in K}\ (\ \inf_{g\in S}\ F(m,g)\ )$$

Sea $f \in C(X)$; se quiere ver que $\int f\ dm_x$ es una constante que no depende de $m_x \in M_x(X)$.
Considérense $K = M_x(X)$, $S = A + \bar{A}$ y $F: K\times S \dashrightarrow R$ definida por $F(m,g) = \int |f-g|\ dm$.
Es claro que F satisface las hipótesis del teorema del minimax. Además $\inf_{g} F(m,g) = 0$ para cada $m \in M_x(X)$; por lo tanto, para cada n existe $g_n\in A + \bar{A}$ tal que

$$\sup_{m\in M_x(X)}\ \int |f-g_n|\ dm < \frac{1}{n} \qquad \text{(a)}$$

Si se fija $m_1 \in M_x(X)$ y m_2 es cualquier otro elemento de $M_x(X)$, (a) implica que

$$\lim \int g_n\ dm_1 = \int f\ dm_1 \quad \text{y} \quad \lim \int g_n\ dm_2 = \int f\ dm_2 .$$

Pero como $\int g_n\ dm_1 = \int g_n\ dm_2$ por ser m_1 y m_2 elementos de $M_x(X)$ y estar g_n en $A + \bar{A}$ resulta que $\int f\ dm_2 = \int f\ dm_1$.
Como esto ocurre para toda función f en $C(X)$ se obtiene finalmente que $M_x(X)$ se reduce a un punto.

(1.4.7) Corolario: Sea A un álgebra uniforme sobre el compacto X; son entonces equivalentes:

(i) A es fundamental sobre X

(ii) Si $x,y \in Sp(A)$ entonces $\|x-y\|=2$ si y sólo si $A_x + \bar{A}_y$ es denso en $L^2(m_x)$ y en $L^2(m_y)$ para cada $m_x \in M_x(X)$, $m_y \in M_y(X)$.

Demostración: Sólo es necesario observar que si $Sp(A)$ no se reduce a un punto, en cuyo caso todo sería trivial, entonces dado x en $Sp(A)$ existe siempre y en $Sp(A)$ tal que $\|x-y\|=2$; para ello basta tomar un y distinto de x en la frontera de Choquet de A.

CAPITULO II

2.1 Funciones analíticas generalizadas

(2.1.1) Sea G un subgrupo aditivo de $\mathbb{R}$, munido de la topología discreta; $L(G)$ designa al álgebra de grupo correspondiente .
Si G_+ es el subconjunto de G de los elementos no negativos se define

$$L(G_+) = \{ a \in L(G) \ / \ x \notin G_+ \Rightarrow a(x)=0 \} \quad ;$$

$L(G_+)$ es una subálgebra cerrada de $L(G)$.

$Sp(L(G))$ será notado $\Gamma(G)$ mientras que $\overline{\Delta}(G)$ designará a $Sp(L(G_+))$. $\Gamma(G)$ con la topología menos fina que hace continuas a las transformadas de Guelfand es canónicamente homeomorfo a $\hat{G}$, el grupo dual del grupo G . Esta identificación ha sido extendida por R. Arens y I.M. Singer en [4] a situaciones muy generales; dicha extensión establece asimismo un homeomorfismo entre $\overline{\Delta}(G)$ provisto de la topología inducida por las transformadas de Guelfand y el semigrupo de los morfismos no nulos definidos en G_+ y con valores en el disco unitario cerrado $\overline{D}$; este semigrupo se considera con la topología producto. $\Gamma(G)$ se incluye homeomórficamente en $\overline{\Delta}(G)$.

$A(\overline{\Delta}(G))$ o simplemente $A(\overline{\Delta})$, cuando esto no dé lugar a confusiones, designará al álgebra uniforme de las funciones que son límite uniforme de transformadas de Guelfand de elementos de $L(G_+)$. Llamando m a la medida de Haar normalizada de $\Gamma(G)$, es de fácil verificación el siguiente resultado (Ver también [4]).

(2.1.2) Sea $f \in C(\Gamma)$; f es la restricción a Γ de un elemento F de $A(\bar{\Delta})$ si y sólo si $\int f(\alpha)\,\overline{(\alpha,x)}\,dm(\alpha) = 0$ si $x \notin G_+$ (Aquí (α,x) indica el valor de α en x).

(2.1.3) Es de hacer notar que $\bar{\Delta}(Z) = \bar{D}$, que $\Gamma(Z) = T = \hat{Z}$ y que $A(\bar{\Delta}) = A(\bar{D})$ (Ver (1.2.3)).

(2.1.4) Dado $ix \in iR$ se le puede asociar un elemento $I'(ix)$ en $\Gamma(G)$ definido por $(I'(ix),y) = e^{-ixy}$ para todo y en G. La aplicación I' resulta ser continua. El siguiente teorema cuya demostración se encuentra en [4] caracteriza la suryectividad de I' en términos de G.

(2.1.5) La aplicación $I':iR \dashrightarrow \Gamma$ es suryectiva si y sólo si G es isomorfo a Z. Si G no es isomorfo a Z entonces I es inyectiva y su imagen es densa en Γ.

(2.1.6) Las observaciones hechas en (2.1.3) junto con (2.1.5) justifican sobradamente que toda vez que G sea denso en R (i.e., no isomorfo a Z), $\bar{\Delta}(G)$ sea llamado el "gran disco" asociado a G y $A(\bar{\Delta})$ el álgebra de las "funciones analíticas generalizadas" asociada a G.

A partir de la caracterización de $\bar{\Delta}(G)$ como morfismos de semigrupo mencionada en (2.1.1), en [4] se prueba el siguiente resultado que da la descomposición polar generalizada de los elementos de $\bar{\Delta}(G)$.

(2.1.7) Si ξ es un elemento de $\overline{\Delta}(G)$ distinto de ξ_0 ($(\xi_0,x)=0$ si $x\neq 0$ y $(\xi_0,0)=1$) entonces existen ρ y α en $\overline{\Delta}(G)$ únicos que satisfacen

(i) $(\rho,x) \geqslant 0$ si $x \in G_+$

(ii) $\alpha \in \Gamma(G)$

(iii) $(\xi,x) = (\rho,x)\,(\alpha,x)$ para todo x en G_+.

A esto se puede agregar (Ver [17])

(2.1.8) Si $\rho \in \overline{\Delta}(G)$, $(\rho,x) \geqslant 0$ para todo x en G_+ y $\rho\neq \xi_0$, entonces existe un único $s \in (0.1]$ tal que

$$(\rho,x) = s^x \quad \text{para todo} \quad x \in G_+$$

(2.1.9) Es de inmediata verificación además, que la aplicación

$$j:[0,1]\dashrightarrow\overline{\Delta}(G) \qquad \text{definida por}$$

$$j(0) = \xi_0 \qquad \text{y si} \quad s > 0 \quad (j(s),x)=s^x \text{ para todo } x \in G_+$$

es un homeomorfismo de $[0,1]$ con su imagen.

Por otro lado (2.1.7) implica que si $0 < s \leqslant 1$ entonces $\overline{\Delta}$ es homeomorfo a $j(s).\,\overline{\Delta}(G) = \{\, j(s).\xi \;/\; \xi \in \overline{\Delta}(G) \,\}$ donde el producto de η y ξ en $\overline{\Delta}(G)$ está definido por

$$(\eta.\xi,x) = (\eta,x).\,(\xi,x)$$

(2.1.10) La aplicación I' definida en (2.1.4) se extiende del modo siguiente:

$$I : \overline{S}= \{\, w \in C \;/\; \operatorname{Re} w \geqslant 0 \,\}\dashrightarrow\overline{\Delta}(G) \qquad \text{donde}$$

$$(I(w),x) = e^{-xw} \quad \text{para todo} \quad x \in G_+ \;, \quad w \in \overline{S} \;.$$

I es continua; teniendo en cuenta (2.1.5), (2.1.7) y (2.1.9) resulta que si G es denso en R entonces I es inyectiva y de imagen densa. Obsérvese que I, al igual que $\Gamma(G)$ y $\overline{\Delta}(G)$, varía con G. Por lo tanto las notaciones Γ, $\bar{\Delta}$ e I serán usadas sin especificación respecto de G salvo en aquellos casos en que pueda haber ambigüedad o real imprecisión.

2.2 Medidas representativas y medidas de Cauchy

(2.2.1) Teorema: (i) La restricción de los elementos de $A(\bar{\Delta})$ a Γ es un álgebra de Dirichlet sobre Γ.

(ii) Γ es la frontera de Shilov de $A(\bar{\Delta})$.

(iii) Si $f \in A(\bar{\Delta})$ es tal que f restringida a Γ es nula, entonces f es nula.

(iv) La medida representativa de $\xi_0 \in \bar{\Delta}$ es la medida de Haar de Γ.

(v) Si m_ξ y m_η son las medidas representativas en Γ de ξ y η pertenecientes a $\bar{\Delta}$, entonces

$$m_{\xi.\eta} = m_\xi * m_\eta$$

donde con $*$ se denota la operación de convolución en $M(\Gamma)$.

Demostración: (i) El conjunto de las partes reales de las restricciones a Γ de los elementos de $A(\bar{\Delta})$ contiene a todos los polinomios trigonométricos reales, esto es, las funciones del tipo

$$P(\alpha) = \sum a(x)\,(\alpha,x)$$

donde $\overline{a(x)} = a(-x)$ para todo x en G, y $a(x) = 0$ salvo para una cantidad finita de x en G. El teorema de Stone-Weierstrass permite afirmar que dichos polinomios forman un conjunto denso en $C_R(X)$.

(ii) Es consecuencia de (i) y de (1.2.2).

(iii) Es consecuencia de (ii).

(iv) Sean $x \in G$, y $\delta_x \in L(G)$ definido por $\delta_x(y) = 1$ si $y = x$, $\delta_x(y) = 0$ si $y \neq x$.

Llamando $\hat{\ }$ y $\hat{\ }^{+}$ a las transformaciones de Guelfand definidas en $L(G)$ y $L(G_+)$ respectivamente, se obtiene

$$\int \hat{\delta}_x(\alpha)\, dm(\alpha) = \int (\alpha,x)\, dm(\alpha) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ 0 & \text{si } x \neq 0 \end{cases}$$

Por otra parte si $x \geq 0$, como $\hat{\delta}_x^{+}(\alpha) = \hat{\delta}_x(\alpha)$, para todo $\alpha \in \Gamma$, resulta $\int \hat{\delta}_x^{+}(\alpha)\, dm(\alpha) = \hat{\delta}_x^{+}(\xi_0)$ y como las combinaciones lineales de elementos del tipo $\hat{\delta}_x^{+}$ con x en G_+ generan un subespacio denso en $A(\bar{\Delta})$, se obtiene finalmente que la medida de Haar de Γ es la medida representativa de ξ_0 en Γ.

(v) Si $\mu \in M(\Gamma)$, llamando $\hat{\mu}$ a la transformada de Fourier-Stieltjes de μ ($\hat{\mu}(x) = \int \overline{(\alpha,x)}\, d\mu(\alpha)$ para todo x en G), una verificación sencilla permite ver que

$$\hat{m}_{\xi\cdot\eta}(x) = (m_\xi * m_\eta)\hat{\ }(x) \quad \text{para todo } x \in G \tag{a}$$

Al ser Γ compacto, los polinomios trigonométricos resultan densos en $C(\Gamma)$ por lo que (a) implica

$$\int f(\alpha)\, dm_{\xi\cdot\eta}(\alpha) = \int f(\alpha)\, d(m_\xi * m_\eta)(\alpha), \text{ para cada } f \in C(\Gamma),$$

i.e., $m_{\xi\cdot\eta} = m_\xi * m_\eta$.

(2.2.2) Sea $\xi \in \Delta = \bar{\Delta} \setminus \Gamma, \xi \neq \xi_0$; en virtud de (2.1.7) y de (v) en (2.2.1) para conocer m_ξ será suficiente conocer la medida representativa de la componente radial en la descomposición polar de ξ. Se trata entonces de determinar (ver (2.1.9) y (2.1.10)) $m_{j(s)} = m_{I(-\ln s)}$ cuando $0 < s < 1$.

Obsérvese que si $f(\xi) = \sum a(x)\, (\xi,x)$, con $a(x) = 0$ si $x < 0$ y $\sum |a(x)| < \infty$, entonces $f(I(w)) = \sum a(x)\, e^{-xw}$ resulta ser una función continua y acotada en $\overline{S}$, y analítica en $S=\{\mathrm{Re}\ w>0\}$; por consiguiente, lo mismo vale para $f\circ I$ cuando f es cualquier elemento de $A(\overline{\Delta})$.

Ahora bien, si $w = u + iv$ está en S, el núcleo de Poisson del semiplano permite escribir

$$(f\circ I)(w) = \frac{1}{\pi}\int_R (f\circ I)(it)\,\frac{u}{u^2+(v-t)^2}\,dt \qquad \text{si} \quad f\in A(\overline{\Delta})$$

Se tiene así que la medida $m_{I(w)} \in M(\Gamma)$ definida por

$$\int g\,dm_{I(w)} = \frac{1}{\pi}\int_R g(I(it))\,\frac{u}{u^2+(v-t)^2}\,dt, \text{ para cada } g\in C(\Gamma),$$

es la medida representativa de $I(w)$.

Por lo tanto, si $\xi = \rho.\alpha$ y $\rho = I(u)$ con $u > 0$, se tiene que

$$\int g(\beta)\,dm_\xi(\beta) = \frac{1}{\pi}\int_R g(\alpha.I(it))\,\frac{u}{u^2+t^2}\,dt$$

Las consideraciones anteriores permiten establecer el siguiente teorema de R. Arens e I.M. Singer (ver [4]).

(2.2.3) Teorema: (i) Si $\xi\in\Delta$ y $\xi\neq\xi_0$, entonces la medida m_ξ, representativa de ξ en Γ está concentrada en $\alpha.I(iR)$, es decir $m_\xi(\Gamma\setminus\alpha.I(iR)) = 0$.

(ii) Si $\rho = I(u)$ con $u\geq 0$, la medida m_ρ es simétrica.

(iii) Si ξ y η están en $\Delta\setminus\{\xi_0\}$ y $\xi=\rho_1\alpha$, $\eta = \rho_2.\gamma$ con sus respectivas descomposiciones polares, entonces m_ξ y m_η son mutuamente singulares si y sólo si $\alpha\notin\gamma.I(iR)$.

(iv) Supóngase que G no es isomorfo a Z. Si $\xi\in\overline{\Delta}$,

$\xi \neq \xi_0$, entonces m_ξ y $m_{\xi_0} = m$ son mutuamente singulares.

Demostración: Teniendo en cuenta (2.2.2), sólo es necesario probar que $m(I(iR)) = 0$ cuando G no es isomorfo a Z; recordando que I restringida al eje imaginario es inyectiva y continua se obtiene que

$$m(I(iR))=m(I(\cup[n,n+1)))=m(\cup I([n,n+1)))=\sum m(I([n,n+1)))$$

donde n varía en Z.

Pero como $I([n,n+1)) = I(n).I([0,1))$, la invariancia y la finitud de m ($m(\Gamma) = 1$) implican que $m(I(iR)) = 0$.

(2.2.4) Corolario: Supóngase que G no es isomorfo a Z; las partes de Gleason de $A(\bar{\Delta})$ son:

(i) $\{\xi_0\}$

(ii) Cada uno de los puntos de Γ.

(iii) Los conjuntos de la forma $\alpha.I(S)$ donde α recorre las clases de equivalencia de Γ módulo $I(iR)$.

Demostración: La unicidad de las medidas representativas en Γ por ser $A(\bar{\Delta})$ de Dirichlet sobre Γ (ver (2.2.1) y (1.2.2)) implica, en virtud de (1.1.14), que dos puntos de $\bar{\Delta}$ están en la misma parte de Gleason si y sólo si sus medidas representativas son absolutamente continuas entre sí.

(2.2.5) El corolario anterior permite dar otra demostración del siguiente teorema de R. Arens (Ver Theorem 4.7 en [1]).

(2.2.6) Teorema: Supóngase que G no es isomorfo a Z; si τ es el homeomorfismo de $\overline{\Delta}$ asociado a un automorfismo U de $A(\overline{\Delta})$, vale entonces que $\tau(\xi_0) = \xi_0$.

Demostración: Basta tener en cuenta que τ transforma la frontera de Shilov en sí misma y que si dos puntos están en una misma parte de Gleason, lo mismo ocurre con sus transformados; pues entonces la parte de Gleason $\{\xi_0\}$ debe transformarse en sí misma.

(2.2.7) Es interesante comparar (2.2.4) con (1.2.3), es decir cuando $G = Z$. En este último caso se tiene que las partes de Gleason son esencialmente pocas: el disco abierto D y cada uno de los puntos de T. Se trata ahora de establecer algunas consecuencias importantes que resultan de esta diferencia original.

Si $G = Z$ y $0 \leqslant s < 1$, entonces

$$\int g \, dm_s = \frac{1}{2\pi} \int g(e^{i\theta}) \frac{1 - s^2}{1 - 2s.\cos\theta + s^2} \, d\theta \quad \text{si} \quad g \in C(T).$$

m_s tiene asociada una medida de Cauchy, también llamada contracción analítica; es decir, existe m'_s en M(T) cuya transformada de Fourier-Stieltjes satisface

$$\hat{m}'_s(n) = \begin{cases} s^n & \text{si} \quad n \geqslant 0 \\ 0 & \text{si} \quad n < 0 \end{cases}$$

Dicha medida es la asociada a la función $c_s(\theta) = \dfrac{1}{1-se^{i\theta}}$

La cuestión de la existencia de tales medidas está relacionada con varios puntos de este capítulo y el siguiente. La no-existencia de contracciones analíticas de m_s ($0 < s < 1$) cuando G no es isomorfo a Z ha sido probada por K. Hoffman en [17] . Se verá ahora que esto es consecuencia, independientemente, de de (1.3.2) y de (1.3.8); este último teorema fue probado por K. Hoffman, como se menciona en (1.3.7), para el caso de un gran disco.

(2.2.8) Teorema: Si $r = I(1)$ y G es denso en R entonces no existe ninguna $m_r' \in M(\Gamma)$ que verifique

$$\hat{m}_r'(x) \begin{cases} (r,x) = e^{-x} & \text{si} \quad x \geqslant 0 \\ 0 & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$$

Demostración: Suponer que una tal medida m_r' existe implica que m_r' es ortogonal a $\overline{A}_0$ donde $A_0 = \{ f \in A(\overline{\Delta}) \ / \ f(\xi_0) = 0\}$ y que m_r' es ortogonal a $A_r = \{ f \in A(\overline{\Delta}) \ / \ f(r) = 0\}$. Como ξ_0 y r están en distintas partes de Gleason resultará, aplicando (1.3.2), que $\hat{m}_r'(0) = m_r'(1) = 0$ y esto contradice a $\hat{m}_r'(0) = (r,0) = 1$.

La demostración, utilizando (1.3.8) se hace como sigue. Supóngase que m_r' existe. Entonces $\overline{m_r'}$ es ortogonal a A_0; además $\overline{m_r'}(\overline{f}) = m_r(\overline{f})$ para cada f en A. Por otra parte, m_r es singular respecto de m, así que finalmente es posible aplicar (1.3.8), con lo que se obtiene que $0 = \overline{m_r'}(1) = \overline{m_r'(1)}$; como esto contradice la suposición de partida, no existe una tal m_r'.

2.3 *Medidas de Cauchy y transformadas de Hilbert*

(2.3.1) Con las notaciones de 2.1 y 2.2, si $1 \leqslant p < \infty$ (resp. $p = \infty$), $L^p(\Gamma)$ (resp. $L^\infty(\Gamma)$), indicará el espacio de Banach de las funciones medibles, módulo la relación de equivalencia que las identifica cuando difieren en un conjunto de medida nula, cuyo módulo a la potencia p es integrable respecto de m (resp. las funciones medibles esencialmente acotadas respecto de m). Con $\hat{f}$ se designa a la transformada de Fourier de f en $L^1(\Gamma)$ ($\hat{f}(x)=\int(\alpha,x)f(\alpha)\,dm(\alpha)$ para cada x en G). La transformación de Hilbert, $H: L^2(\Gamma)--->L^2(\Gamma)$, se define por $H(f) = \sum \hat{f}(x)\,sgn(x)\,(\alpha,x)$ donde $sgn(x) = 1$ si $x \geq 0$ y $sgn(x) = -1$ si $x < 0$. Que H está bien definida y es una isometría resulta del teorema de Plancherel y de la igualdad de Parseval. Ahora bien, si $0 < s < 1$, llamando m_s a la medida representativa de j(s) (Ver (2.1.9)) se tiene que si f es un elemento de $L^2(\Gamma)$ entonces $H_s(f) = H(f)*m_s$ es también una función de $L^2(\Gamma)$; esto resulta de que $\hat{m}_s(x) = s^{|x|}$ para todo x en G, pues entonces

$$\|H_s(f)\|_2 = \|H(f)*m_s\|_2 \leq \|H(f)\|_2 = \|f\|_2 .$$

Si $\Gamma = T$ (i.e., G es isomorfo a Z), se tiene además que $H_s(f)$ es una función continua. El siguiente teorema muestra en particular que esto no siempre es cierto si G no es isomorfo a Z.

(2.3.2) Teorema: Cualquiera sea G denso en R, existe f en $C(\Gamma)$ tal que $H_s(f)$ no está en $L^\infty(\Gamma)$.

Antes de pasar a la demostración es necesario recordar algunos hechos conocidos y establecer alguna notación complementaria.

$L^1(\Gamma)$ admite inmersiones lineales e isométricas en $(L^\infty(\Gamma))^*$ y $M(\Gamma)$ definidas del siguiente modo:

$i: L^1(\Gamma)---->(L^\infty(\Gamma))^*$, $(i(f),g) = \int fg\,dm$ para cada $g\in L^\infty(\Gamma)$

y $i_1: L^1(\Gamma)---->M(\Gamma)$, $(i_1(f),g) = \int fg\,dm$ para cada $g\in C(\Gamma)$.

Demostración: Supóngase que $H_s(f)$ pertenece a $L^\infty(\Gamma)$ para cada f en $C(\Gamma)$; se puede definir entonces, un operador lineal

$$K: C(\Gamma)---->L^\infty(\Gamma) \quad , \quad K(f) = H_s(f)$$

Se trata de ver que K es acotado de $C(\Gamma)$ en $L^{\infty}(\Gamma)$, para lo que se aplicará el teorema del gráfico cerrado. Sea entonces (f_n) una sucesión de elementos de $C(\Gamma)$ que converge uniformemente a f y tal que $(K(f_n))$ converge a g en $L^{\infty}(\Gamma)$; es claro que (f_n) converge a f en $L^2(\Gamma)$ y que $(H_s(f_n))$ converge a $H_s(f)$. En tal caso

$$H_s(f) = g \quad \text{en } L^{\infty}(\Gamma)\ , \text{ i.e., } \quad K(f) = g$$

Sea ahora $K^*: (L^{\infty}(\Gamma))^* \dashrightarrow (C(\Gamma))^* = M(\Gamma)$ la aplicación dual de K; K^* es continua por serlo K y

$$K^*(i(f)) = i_1(K(f)) \qquad \text{para cada } f \text{ en } C(\Gamma) \quad .$$

Esto implica que la restricción de K^* a $i(L^1(\Gamma))$ tiene su imagen contenida en $i_1(L^1(\Gamma))$ ya que $C(\Gamma)$ es denso en $L^1(\Gamma)$; llamando K_i a dicha restricción resulta

$$K_i(f) = K^*(i(f)) \quad , \quad \text{para toda } f \text{ en } L^1(\Gamma)$$

Como $K_i(f*g) = K_i(f)*g$, siempre que $f,\ g \in C(\Gamma)$, la continuidad de K_i en $L^1(\Gamma)$ implica que

$$K_i(f*g) = K_i(f)*g \quad , \text{ toda vez que } \quad f,\ g \in L^1(\Gamma)$$

En tal caso el operador K_i es un multiplicador, es decir, es la convolución con una medida $\tilde{n} \in M(\Gamma)$; por lo tanto, si $x \in G$

$$\hat{\tilde{n}}(x) = \int \overline{(\alpha,x)}\, d\tilde{n}(\alpha) = (\tilde{n}*\hat{\delta}_x)(0) = (K_i(\hat{\delta}_x))(0) = s^{|x|}\ \mathrm{sgn}(x)$$

donde $\hat{\delta}_x(\alpha)=(\alpha,x)$, para cada $\alpha \in \Gamma$.

La medida $m_s' = 2^{-1}(m_s+\tilde{n})$ es entonces una contracción analítica de m_s; esto contradice (2.2.8) y completa la demostración.

2.4 Descomposición de Laurent en la gran corona

(2.4.1) Considérese en $\bar{\Delta}$ el conjunto

$$E = \{\ \xi \in \bar{\Delta}\ /\ \xi = j(s).\alpha\ ,\quad e^{-1} \leqslant s \leqslant 1\ ,\ \alpha \in \Gamma\}$$

y sea $H(E)$ el álgebra de las funciones que son límite uniforme sobre E de funciones de la forma

$$\sum_{x<0} a(x)(\xi,-x)^{-1} + \sum_{x\geq 0} a(x)\ (\xi,x) \qquad \text{(a)}$$

donde $a(x)=0$ salvo para una cantidad finita de x en G.

(2.4.2) Teorema: (i) $H(E)$ es un álgebra uniforme sobre E.

(ii) $Sp(H(E)) = E$.

(iii) $\partial\,(H(E)) = j(e^{-1}).\Gamma \cup \Gamma$.

Demostración: (i) Es consecuencia inmediata de la definición de $H(E)$.

(ii) Para determinar un elemento Φ en $Sp(H(E))$ basta conocer su valor en las funciones de la forma $f_x^+(\xi)=(\xi,x)$ y $f_x^-(\xi)=(\xi,x)^{-1}$ donde x es un elemento de G_+ . Es claro que las funciones del primer tipo generan un álgebra que es densa en aquella formada por las restricciones a E de los elementos de $A(\overline{\Delta})$; por lo tanto existe $\eta \in \overline{\Delta}$ tal que $\Phi(f_x^+) = (\eta,x)$ para cada x en G_+. Pero

$$\Phi(f_x^+)\ \Phi(f_x^-) = \Phi(f_x^+\ f_x^-) = \Phi(1)= 1 \qquad \text{por lo que}$$

$$\Phi(f_x^-) = (\eta,x)^{-1} \ ; \text{ en particular } \ \eta \neq \xi_0 \ .$$

La aplicación I restringida a $\overline{B} = \{w \ / \ 0 \leq \operatorname{Re} w \leq 1\}$ transforma esta banda en un subconjunto denso de E (ver (2.1.10)); entonces $(f_x^- \circ I)(w) = e^{xw}$.

Por consiguiente

$$\|f_x^-\| = \sup\{|f_x^-(\xi)| \ / \ \xi \in E\} = \sup\{|(f_x^- \circ I)(w)| \ /w \in \overline{B}\} = e^x$$

Por otra parte, si $j(e^{-u})$ es la parte radial de η en su descomposición polar resulta $|\Phi(f_x^-)| = e^{ux}$. Como $|\Phi(f_x^-)| \leq \|f_x^-\|$ para cada x en G_+, debe ser $0 \leq u \leq 1$, es decir $\eta \in E$.

(iii) Si $\overline{B}$ es como en (ii) y f es un elemento en $H(E)$, entonces $f_o I$ es una función continua y acotada en $\overline{B}$, analítica en $B = \{w \,/\, 0 < \mathrm{Re}\, w < 1\}$. El teorema de Phragmen-Lindelöff afirma en tal caso que

$$\sup \{\, |(f_o I)(w)| \,/\, w \in \overline{B}\} = \sup \{\, |(f_o I)(w)| \,/\, w \in \overline{B} \setminus B\}.$$

Pero entonces:

$$\sup \{\, |f(\xi)| \,/\, \xi \in E\,\} = \sup \{\, |f(\xi)| \,/\, \xi \in j(e^{-1}).\Gamma \cup \Gamma\}.$$

(2.4.3) En el caso en que $G=Z$, $H(E(Z))$ es el álgebra de las funciones continuas en la corona circular $\{e^{-1} \leq |z| \leq 1\}$ y holomorfas en el interior de la misma; para tales funciones está definida la descomposición de Laurent que consiste en escribir a la función como suma de una función en $A(\overline{D})$ y otra que es analítica en $\{|z|>e^{-1}\}$ y se anula en infinito. En lo que resta de la sección se analizará la posibilidad de una descomposición análoga para elementos de $H(E)$ cuando G no es isomorfo a Z; se verá finalmente que tal descomposición no es siempre posible.

(2.4.4) Sea f en $H(E)$ y para $e^{-1} \leq s \leq 1$ se define

$$f_s(\alpha) = f(j(s).\alpha) \qquad \text{para todo } \alpha \in \Gamma\,.$$

De la definición de $H(E)$ resulta

$$\hat{f}_s(x) = \int f_s(\alpha)\, \overline{(\alpha,x)}\, dm(\alpha) = s^x\, \hat{f}_1(x) \qquad \text{para cada } x \in G$$

(2.4.5) Se dirá que la función f de $H(E)$ admite descomposición de Laurent cuando existe g en $C(\Gamma)$ tal que

$$\hat{g}(x) = \begin{cases} \hat{f}_1(x) & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

En tal caso f_+ designará al elemento de $A(\overline{\Delta})$ para el cual $f_{+,1}=g$

(ver (2.1.2)); definiendo $f_-(\xi) = f(\xi) - f_+(\xi)$ para todo $\xi \in E$ f_- resulta ser también un elemento de $H(E)$.

Teniendo en cuenta la observación hecha en (2.4.4) se obtiene que si $e^{-1} \leqslant s \leqslant 1$,

$$(f_{-,s})^\wedge(x) = \int f_{-,s}(\alpha)\, \overline{(\alpha,x)}\, dm(\alpha) = \begin{cases} \hat{f}_1(x)\, s^x & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases} \quad \text{(a)}$$

(2.4.6) Con $A_E(\bar{\Delta})$ se denotará al subespacio de $H(E)$ formado con las restricciones a E de los elementos de $A(\bar{\Delta})$; se define además

$$A^\circ(E) = \{\ f \in H(E) \ /\ \hat{f}_1(x) = 0 \quad \text{para cada} \quad x \geqslant 0\ \}.$$

Con estas definiciones y (2.4.5) las afirmaciones que siguen se verifican fácilmente.

(2.4.7) $A_E(\bar{\Delta})$ y $A^\circ(E)$ son subespacios cerrados y disjuntos en $H(E)$; si f es un elemento de $H(E)$ que admite descomposición de Laurent entonces

(i) $f = f_+ + f_-$ $\qquad f_+ \in A_E(\bar{\Delta}),\ f_- \in A^\circ(E)$

(ii) La descomposición dada en (i) es única.

(2.4.8) Lema: Sea f_- un elemento de $A^\circ(E)$; si se define f_-° por

$$f_-^\circ(j(s).\alpha) = f_-(j(e^{-1}s^{-1})\ \alpha^{-1}) \quad \text{para todo } s \in [e^{-1},1],\ \alpha \in \Gamma$$

entonces f_-° es la restricción a E de un elemento de $A_0(\bar{\Delta})$, esto es, el ideal de $A(\bar{\Delta})$ de los elementos que se anulan en ξ_0.

Demostración: Si $x \in G$

$$(f_{-,1}^\circ)^\wedge(x) = \int f_-^\circ(\alpha)\ \overline{(\alpha,x)}\ dm(\alpha) = \int f_-(j(e^{-1}s^{-1})\alpha^{-1})(\alpha^{-1},x)\ dm(\alpha) =$$
$$= \int f_-(j(e^{-1})\alpha)(\alpha,x)\ dm(\alpha)$$

La última igualdad es consecuencia de que Γ es un grupo compacto conmutativo. La definición de $A^\circ(E)$ y (2.4.4) implican que

$(f^{\circ}_{-,1})\hat{}\,(x) = 0$ si $x \leq 0$; por lo tanto, y teniendo en cuenta (2.1.2), para llegar a la conclusión bastará verificar que

$$f^{\circ}_{-}(\xi) = \int f^{\circ}_{-,1}\, dm_{\xi} = \int f^{\circ}_{-}(\beta)\, dm_{\xi}(\beta) \quad \text{para cada} \quad \xi \in E$$

Considérese entonces $s \in [e^{-1},1]$; para ver que

$$f^{\circ}_{-,s}(\alpha) = \int f^{\circ}_{-,1}\, dm_{j(s)\alpha} \quad \text{para todo} \quad \alpha \in \Gamma$$

será suficiente observar que ambos miembros, considerados como elementos de $C(\Gamma)$, tienen los mismos coeficientes de Fourier. Por un lado

$$(f^{\circ}_{-,s})\hat{}\,(x) = \int f_{-}(j(e^{-1}s^{-1})\alpha)\ (\alpha,x)\ dm(\alpha) = \begin{cases} \hat{f}_{-,1}(-x)e^{x}s^{x}, & \text{si } x>0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

y por otro

$$(m_{j(s)} * f^{\circ}_{-,1})\hat{}\,(x) = \hat{f}^{\circ}_{-,1}(x)\ \hat{m}_{j(s)}(x) = e^{x}\ \hat{f}_{-,1}(-x)\ s^{|x|}$$

(2.4.9) Corolario: Sea f_{-} un elemento de $A^{\circ}(E)$ y $s \in [e^{-1},1]$; vale entonces

$$\sup_{\substack{s\leq t\leq 1\\ \alpha\in\Gamma}} |f_{-}(j(t)\alpha)| = \sup_{\alpha\in\Gamma} |f_{-}(j(s)\alpha)|$$

Demostración: Sea f°_{-} como en (2.4.8); entonces

$$\sup_{\substack{s\leq t\leq 1\\ \alpha\in\Gamma}} |f_{-}(j(t)\alpha)| = \sup_{\substack{s\leq t\leq 1\\ \alpha\in\Gamma}} |f^{\circ}_{-}(j(e^{-1}t^{-1})\alpha^{-1})| \overset{*}{=}$$

$$= \sup\{\ |f^{\circ}_{-}(j(s)\alpha)|\ /\ e^{-1}\leq t \leq e^{-1}s^{-1},\alpha\in\Gamma\} = \sup_{\alpha\in\Gamma} |f^{\circ}_{-}(j(e^{-1}s^{-1})\alpha)| =$$

$$= \sup_{\alpha\in\Gamma} |f(j(s)\alpha)|$$

La igualdad * resultó de la aplicación de(2.1.9) y (2.2.1)-(ii).

(2.4.10) Teorema : El conjunto de los elementos de $H(E)$ que admiten descomposición de Laurent forman un subespacio denso y no cerrado.

Demostración: El operador lineal

$$N: A_E(\bar{\Delta}) \times A^\circ(E) \dashrightarrow H(E)$$

definido por $(f_1,f_2) \dashrightarrow f_1 + f_2$ es inyectivo debido a la unicidad de la descomposición de Laurent.

$A_E(\bar{\Delta})$ y $A^\circ(E)$ son espacios de Banach, por lo que, definiendo $\|(g,h)\| = \|g\| + \|h\|$, $A_E(\bar{\Delta}) \times A^\circ(E)$ resulta ser también un espacio de Banach; N es entonces un operador acotado.

Suponer que todo elemento de H(E) admite descomposición de Laurent equivale a suponer que el operador N sea suryectivo; pero entonces, el teorema de la aplicación abierta implica que el operador inverso de N, que será llamado L, es también acotado. Es decir que existe k en R tal que

$$\|g\| + \|h\| \leq k \ \|g+h\| \text{ para cada } g \in A_E(\bar{\Delta}) \text{ y } h \in A^\circ(E) \qquad \text{(a)}$$

Considérese la siguiente funcional lineal en H(E):

$$L_1: H(E) \dashrightarrow C \quad , \ L_1(f) = f_+(j(e^{-1})) \ \text{ donde } L(f) = (f_+, f_-).$$

(a) implica que L_1 es continua

Sea $0 < t < 1$ y si $f \in H(E)$

$$f_t(j(s)\alpha) = f(j(s^t)\alpha) \quad \text{para todo} \quad s \in [e^{-1}, 1],$$

Es claro que f_t es un elemento de H(E) y que si f pertenece a $A_E(\bar{\Delta})$ (resp. $A^\circ(E)$) entonces f_t es también un elemento de $A_E(\bar{\Delta})$(resp. $A^\circ(E)$); si $f = f_+ + f_-$ es la descomposición dada por (2.4.7), entonces $f_t = (f_+)_t + (f_-)_t$.

Por otra parte, aplicando (a)

$$|L_1(f)| = |f_+(j(e^{-1}))| \ \sup_{\alpha \in \Gamma} |f_+(\alpha)| = \sup\{|f_+(j(s^t)\alpha)| \ / e^{-1} \leq s \leq 1, \alpha \in \Gamma\} =$$

$$= \|f_{+,t}\| \leq \|f_{+,t}\| + \|f_{-,t}\| \leq k \|f_t\| = k \ \sup\{|f(j(s^t)\alpha) \ / \ e^{-1} \leq s \leq 1, \ \alpha \in \Gamma\}$$

Es decir

$$|L_1(f)| \leq k \, \|f_t\| \quad \text{para todo} \quad t \in [0,1] \tag{b}$$

Haciendo tender t a 0 en (b) se obtiene

$$|L_1(f)| \leq k \sup_{\alpha \in \Gamma} |f(\alpha)| \tag{c}$$

Llamando $H_1(E)$ a la subálgebra de $C(\Gamma)$ cuyos elementos son las restricciones a Γ de los elementos de $H(E)$, (c) dice que L_1 define una funcional continua en $H_1(E)$. El teorema de Hahn-Banach permite extender esta funcional a un L_1' en $C(\Gamma)^*=M(\Gamma)$; es decir que existe $\mu \in M(\Gamma)$ tal que

$$\int f \, d\mu = L_1(f) \quad \text{para toda} \quad f \in H_1(E)$$

Pero es claro de la definición de L_1 que

$$\hat{\mu}(x) = \int \overline{(\alpha,x)} \, d\mu(\alpha) = \begin{cases} e^x & \text{si} \quad x \leq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$$

y entonces la medida conjugada $\bar{\mu}$ de μ resultaría una contracción analítica de $m_{j(e^{-1})}$ lo cual contradice (2.2.8).

Este teorema se utilizará en la sección siguiente.

2.5 Los contraejemplos de Bohr y Favard

(2.5.1) En su tesis (Ver [11]), J. Favard estudió la cuestión siguiente: determinar si la conjugada armónica de una función armónica casi periódica y acotada en un semiplano es siempre casi periódica; en la misma exhibe (Ver pp. 84-87 de [11]) un ejemplo en que esto no ocurre. Poco antes (Ver p. 278 de [7]), H. Bohr exhibió un ejemplo de función analítica y casi periódica en una banda que no admite descomposición de Laurent con respecto a su desarrollo en serie de Dirichlet. En esta sección se demostrará que la existencia de las funciones que proveen los contraejemplos mencionados es consecuencia directa de (2.3.2) y (2.4.10) respectivamente.

(2.5.2) En [1], R. Arens describió el conjunto de funciones que se obtiene cuando se componen funciones del álgebra $A(\overline{\Delta})$ con la aplicación I definida en (2.1.10). A continuación se procederá a completar dicha descripción.

Las definiciones y propiedades relativas a las funciones casi periódicas (c.p. en lo sucesivo) serán tomadas de [12] y de [5].

(2.5.3) Sea f en $C(\Gamma)$; se define la transformada de Poisson generalizada de f como la función

$$P(f): \overline{\Delta} \dashrightarrow C \quad , \quad P(f)(\xi) = \int f(\alpha)\, dm_{\xi}(\alpha)$$

donde m_{ξ} es la medida representativa de ξ.

Si f es un polinomio trigonométrico en $C(\Gamma)$, es decir

$f(\alpha) = \sum a(x)\,(\alpha,x)$, donde $a(x) \neq 0$ sólo para un número finito de x, entonces

$$P(f)(\xi) = \sum_{x \geq 0} a(x)\,(\xi,x) + \sum_{x<0} a(x)\,\overline{(\xi,-x)}$$

Si ahora se considera la aplicación I definida en (2.1.10) se tendrá que

$$P(f)(I(w)) = \sum_{x \geq 0} a(x)\, e^{-xw} + \sum_{x<0} a(x)\, e^{x\overline{w}}$$

Resulta entonces claro que en el caso en que f sea un polinomio trigonométrico entonces $P(f)_{o}I$ es una función continua, acotada y uniformemente c.p. en $\overline{S}=\{ w \in C \ / \ \mathrm{Re}\ w \geq 0 \}$; además $P(f)_{o}I$ es armónica en $S=\{ w \in C \ / \ \mathrm{Re}\ w > 0\}$ y $P(f)_{o}I$ es analítica en S si y sólo si a(x) se anula cuando x es negativo, es decir, si y sólo si P(f) es un elemento de $A(\bar{\Lambda})$.

En lo sucesivo, con $h_c(\bar{\Delta})$ se designará el conjunto de las transformadas generalizadas de Poisson de los elementos de $C(\Gamma)$.

(2.5.4) Teorema: La aplicación

$$I^*: h_c(\bar{\Lambda}) \dashrightarrow B(\bar{S}) = \text{funciones acotadas en } \bar{S}$$

$$I^*(F) = F_o I$$

satisface las siguientes propiedades:

(i) I^* es una isometría con su imagen, cuando $B(\bar{S})$ se considera provisto de la norma del supremo.

(ii) Si $F=P(f)$ con f en $C(\Gamma)$, entonces $I^*(F)$ es una función continua, acotada y uniformemente c.p. en $\bar{S}$; los exponentes (o frecuencias) de su desarrollo de Dirichlet (Ver Chapitre IV, §28 y §31 en [12]) están en G y el coeficiente correspondiente al exponente x-ésimo es $\hat{f}(x) = \int f(\alpha)\, \overline{(\alpha,x)}\, dm(\alpha)$. Además $I^*(F)$ es armónica en S y si F está en $A(\bar{\Delta})$ entonces $I^*(F)$ es holomorfa en S.

(iii) Vale la recíproca de (ii), es decir, si $F' \in B(\bar{S})$ es continua, acotada, uniformemente c.p. en $\bar{S}$, con su desarrollo de Dirichlet tal que los exponentes están en G, y armónica en S, entonces existe F en $h_c(\bar{\Delta})$ tal que $I^*(F)=F'$. Si además F' es analítica entonces F pertenece a $A(\bar{\Delta})$.

Demostración: (i) Es consecuencia de que $I(\bar{S})$ es denso en $\bar{\Delta}$.

(ii) Si $F=P(f)$ con f un polinomio trigonométrico, entonces las consideraciones hechas en (2.5 3) conducen de inmediato a la demostración. Como las propiedades enunciadas se preservan por límites uniformes, entonces resultan ciertas en general.

(iii) Sea $F': \overline{S} \dashrightarrow C$ con las propiedades mencionadas en la hipótesis. F' se aproxima uniformemente en $\overline{S}$ por una sucesión de funciones de la forma $I^*(P(f_n))$ donde f_n es un polinomio trigonométrico en $C(\Gamma)$ tal que si $\int f_n(\alpha)\,(\overline{\alpha},x)\,dm(\alpha)$ es no nulo entonces x es un exponente de F' (Ver Chapitre II § 19 y Chap. IV § 31 en [12]).

Si F' es analítica en S, entonces sus exponentes son todos no negativos (Ver §3 Ch 3 en [5]) y consecuentemente las funciones aproximantes $I^*(P(f_n))$ son tales que $P(f_n)$ está en $A(\overline{\Delta})$ para cada n.

Tanto I^* como P son isometrías, por lo que existe f en $C(\Gamma)$ tal que P(f) es el límite uniforme de la sucesión $(P(f_n))$. Es claro entonces que

$$F' = I^*(P(f))$$

y que P(f) pertenece a $A(\overline{\Delta})$ si F' es analítica en S.

(2.5.5) En el resto de la sección se supondrá que G es denso en R.

Sea entonces f un elemento de $C_R(\Gamma)$ tal que $H(f)*m_{j(e^{-1})}$ no es continua en (Ver (2.3.2)). Teniendo en cuenta (2.5.4), $u = I^*(P(f))$ es una función real, continua, acotada, uniformemente c.p. en $\overline{S}$ y armónica en S.

Sea v una conjugada armónica de u en S; v se obtiene por integración de las derivadas parciales de u y estas últimas son c.p.(Ver §29 Ch. IV en [12]). Entonces v será c.p. en una recta contenida en S si y sólo si es acotada en dicha recta (Ver 15° §1 Ch. I en [5])

Supóngase entonces que v es c.p. en { Re w=k }(k > 0);la casi periodicidad de v en toda otra recta contenida en S será consecuencia de la siguiente propiedad de las funciones armónicas.

(2.5.6) Sea u una función armónica y acotada en S; si v es una conjugada armónica de u y v es acotada en una recta contenida en S, entonces v es acotada en toda otra recta contenida en S.

(2.5.7) Volviendo a la situación de (2.5.6) se tiene entonces que v es c.p. en toda recta contenida en S; por ser v una conjugada armónica de u, su desarrollo de Dirichlet no tiene término en s (w=s+it) (Ver Chap. IV §30 en [12]). Es decir si

$$u(s,t) \sim \sum_{x \geq 0} \hat{f}(x)\, e^{-|x|(s+it)} + \sum_{x<0} \hat{f}(x)\, e^{-|x|(s-it)}$$

es el desarrollo de Dirichlet de u, el de v es (ver Chap. IV § 30 en [12])

$$v(s,t) \sim b_0 + \sum_{x>0} \hat{f}(x)\, e^{-|x|(s+it)} - \sum_{x<0} \hat{f}(x)\, e^{-|x|(s-it)} \quad (s>0).$$

Se supondrá que $b_0 = \hat{f}(0)$.

Pero entonces u+iv es una función analítica en S cuyo desarrollo de Dirichlet no tiene exponentes negativos por lo que es acotada en todo semiplano {Re w ≥ k > 0} (Ver §4, Ch. III en [5])

La función

$$v_1 : \overline{S} \dashrightarrow R \quad , \; v_1(w) = v(1+w)$$

satisface las hipótesis de (iii) en (2.5.4); por lo tanto existe g en C(Γ) tal que

$$\hat{g}(x) = \int \overline{(\alpha,x)}\, g(\alpha)\, dm(\alpha) = sgn(x)\, \hat{f}(x)\, e^{-|x|} \qquad x \in G \quad .$$

Pero entonces $g = H(f) * m_{j(e^{-1})}$; esto contradice la suposición hecha inicialmente en (2.5.5) y v resulta ser no acotada en ninguna recta contenida en S.

(2.5.8) Con la misma técnica empleada en (2.5.4), es decir la utilización de funciones polinomiales del tipo (a) en (2.4.1) resulta que si f es un elemento de H(E) entonces $f_o I$ es una función continua, acotada y uniformemente c.p. en $\overline{B} = \{0 \leq Re\ w \leq 1\}$ y analítica en $B = \{\ 0 < Re\ w < 1\}$; su desarrollo de Dirichlet (Ver §3 Ch. 3 en [5]) es

$$(f_o I)(s+it) \sim \sum a(x)\, e^{-x(s+it)}$$

donde $a(x) = \int f(\alpha)\, \overline{(\alpha,x)}\, dm(\alpha)$.

Para probar la recíproca basta aplicar nuevamente el teorema de aproximación polinomial como en la demostración de (iii) en (2.5.4).

(2.5.9) H. Bohr en [7] exhibió una función

$$F' : \overline{B} \dashrightarrow C$$

F' continua, acotada, uniformemente c.p. en $\overline{B}$ y analítica en B tal que si

$$F'(s+it) \sim \sum a(x)\, e^{-x(s+it)}$$

es su desarrollo en serie de Dirichlet, entonces no existe

$$F'_+ : \overline{S} \dashrightarrow C$$

continua, acotada, uniformemente c.p. y analítica en S tal que su desarrollo en serie de Dirichlet sea

$$F'_+(s+it) \sim \sum_{x \geq 0} a(x)\, e^{-x(s+it)} \qquad s+it \in \overline{S}$$

(2.5.10) Sea f un elemento de H(E) que no admite descomposición de Laurent (Ver (2.4.5) y (2.4.10)); $f_o I$ es una función continua, acotada, uniformemente c.p. en $\overline{B}$ y analítica en B. Si el desarrollo de Dirichlet de $f_o I$ es

$$(f_o I)(s+it) \sim \sum a(x)\, e^{-x(s+it)} \qquad (0 \leqslant s \leqslant 1)$$

de la definición de H(E) resulta que

$$a(x) = \int f(\alpha)\, \overline{(\alpha,x)}\, dm(\alpha)$$

Suponer que existe $(f_o I)_+$, continua, acotada, uniformemente c.p. en $\overline{S}$ y analítica en S tal que su desarrollo en serie de Dirichlet sea

$$(f_o I)_+(s+it) \sim \sum_{x \geqslant 0} a(x)\, e^{-x(s+it)} \qquad (s \geqslant 0)$$

implica, en virtud de (iii) en (2.5.4), que existe g_+ en $C(\Gamma)$ tal que

$$\hat{g}_+(x) = \int \overline{(\alpha,x)}\, g_+(\alpha)\, dm(\alpha) = \begin{cases} a(x) & \text{si} \quad x \geqslant 0 \\ 0 & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$$

i.e.,

$$\hat{g}_+(x) = \begin{cases} \hat{f}_1(x) = \int f(\alpha)\, \overline{(\alpha,x)}\, dm(\alpha) & \text{si} \quad x \geqslant 0 \\ 0 & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$$

Como esto contradice el hecho de que f no admite descomposición de Laurent, resulta que $f_o I$ no admite descomposición de Laurent en el sentido definido por Bohr.

CAPITULO III

3.1 *Los espacios de Hardy en el gran disco*

(3.1.1) A partir del núcleo de Poisson, $P_r(\theta) = \dfrac{1-r^2}{1-2r\cos\theta+r^2}$

$(0 \leqslant r < 1,\ \theta \in [-\pi,\pi])$, es posible asociar a toda medida μ en el círculo unidad T, una función armónica $P\mu$ definida en el disco D, del siguiente modo

$$(P\mu)(re^{i\theta}) = \int P_r(\theta-\phi)\ d\mu(\phi) = (P_r * \mu)(\theta)$$

El teorema de Fatou (Ver [19]) establece que para casi todo respecto de la medida de Haar de T vale

$$\lim (P\mu)(re^{i\theta}) = \frac{d\mu}{d\theta}$$

donde $\frac{d\mu}{d\theta}$ es la derivada de Radon-Nykodim de la medida μ respecto de la medida de Haar normalizada de T.

El teorema de F. y M. Riesz (Ver [19] y (1.1.10))caracteriza a los elementos de $M(T)$ para los cuales su transformada de Poisson es una función analítica en D como aquellas medidas que son absolutamente continuas respecto de la medida de Haar de T y que además tienen sus coeficientes de Fourier negativos iguales a cero.

(3.1.2) Si $1 \leqslant p \leqslant \infty$, es posible dar dos definiciones de espacios de Hardy del siguiente modo:

(i) Si p es finito, $H^p(D) = \{ f \in H(D) \ / \ \sup_{0\leqslant r<1} \|f_r\|_p < \infty\}$

donde $H(D)$ es el espacio de las funciones holomorfas en D

y $\|f_r\|_p = \left(\frac{1}{2\pi} \int |f(re^{i\theta})|^p \, d\theta \right)^{\frac{1}{p}}$

Si p es infinito $H^\infty(D)$ es el espacio de las funciones analíticas y acotadas en D.

(ii) $H^p(T) = \{ f \in L^p(T) \ / \ \hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi} \int f(e^{i\theta}) e^{-in\theta} d\theta = 0 \text{ si } n<0 \}$.

Si f es un elemento de $H^p(D)$, se define su norma como $\sup_{r<1} \|f_r\|_p$, y si f pertenece a $H^p(T)$ su norma es la de $L^p(T)$.

Así normados, $H^p(D)$ y $H^p(T)$ son espacios de Banach y los resultados citados en (3.1.1) permiten demostrar que $H^p(D)$ y $H^p(T)$ son isométricamente isomorfos (Ver [19]).

(3.1.3) En [16], K. Hoffman ha extendido el teorema de Fatou a funciones analíticas generalizadas acotadas y posteriormente, en [17], definió clases de Hardy generalizadas probando para las mismas el análogo del teorema de Fatou y la existencia de una representación integral del tipo de Poisson; lo que resta de esta sección será dedicado a dar un resumen de dichos resultados y tratar algunas posibles extensiones de los mismos.

(3.1.4) Sean G y $\overline{\Delta}$ como en el capítulo anterior; se dirá que una función f definida en Δ y con valores en C es analítica generalizada si para cada $s \in [0,1)$, la función $\xi \dashrightarrow f(j(s)\xi)$ ($\xi \in \overline{\Delta}$) es un elemento de $A(\overline{\Delta})$.

Con $H(\Delta)$ se designará al espacio de las funciones analíticas generalizadas en Δ.

Si f es una función definida en Δ y con valores en C y si s es no negativo y menor que 1 se define $f_s : \overline{\Delta} \dashrightarrow C$ por $f_s(\xi) = f(j(s)\xi)$ para cada ξ en $\overline{\Delta}$; se define también $f^s : \Gamma \dashrightarrow C$ por $f^s(\alpha) = f(j(s)\alpha)$.

(3.1.5) Sea $r = j(e^{-1})$; si $1 \leqslant p < \infty$, se define

$$H^p(\Delta) = \{ f \in H(\Delta) \ / \ \sup\{\int |f^s(\alpha\beta)|^p dm_r(\alpha) ; s<1, \beta\in\Gamma\} < \infty \}$$

Si f está en $H^p(\Delta)$, se define su norma como

$$\|f\|'_p = \sup\{\|f^s_\beta\|_{L^p(m_r)} ; s<1, \beta\in\Gamma \}, \text{ donde } f^s_\beta(\alpha) = f^s(\alpha\beta)$$

Con $H^\infty(\Delta)$ se designará al espacio de las funciones analíticas generalizadas definidas en Δ y que sean acotadas; si f es un elemento de $H^\infty(\Delta)$ su norma se define como

$$\|f\|'_\infty = \sup \{ |f(\xi)| \ / \ \xi \in \Delta\}$$

(3.1.6) Es interesante destacar que si $G=Z$ entonces $H^p(\Delta) = H^p(D)$; asimismo, es sencillo demostrar que los espacios $(H^p(\Delta), \| \ \|'_p)$ $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$ son espacios de Banach. La definición dada en (3.1.5) permite trasladar el problema de la existencia de límites radiales al semiplano, via la aplicación I definida en (2.1.10).

El siguiente teorema es análogo al de Fatou,para las clases de Hardy generalizadas; su demostración se encuentra en [17] (Ver 5.1 de [17]).

(3.1.7) Sea $f \in H^p(\Delta)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$; entonces $\lim f(j(s)\alpha)$ existe para todo $\alpha \in \Gamma \setminus N$ donde N es un conjunto tal que $m_\xi(N)=0$ para cada ξ en Δ.

Definiendo

$$f_1(\alpha) = \begin{cases} \lim f(j(s)\alpha) & \text{si } \alpha \notin N \\ 0 & \text{si } \alpha \in N \end{cases}$$

f_1 pertenece a $L^p(\Gamma, m_\xi)$ para cada ξ en Δ; vale además

(i) $f(j(s)\alpha) = \int f_1(\alpha\beta^{-1}) \, dm_{j(s)}(\beta)$ si $s < 1$, $\alpha \in \Gamma$.

(ii) Si p es finito, f^s $(s<1)$ converge a f_1 en $L^p(\Gamma, m_\xi)$ para cada ξ en Δ.

(iii) Si $p \to \infty$, $\|f^{\xi}\|_p$ converge a $\|f_{\xi}\|_{L^{\infty}(\Gamma, m_{\xi})}$ para cada ξ en Δ.

(3.1.8) Se dirá que $f: \Delta \dashrightarrow C$ es armónica generalizada si para cada $s \in [0,1)$, $f_s \in h_c(\bar{\Delta})$(Ver (2.5.3)).

Es claro entonces que para una tal función vale

$$f_s(\alpha) = f_{st^{-1}}(j(t)\alpha) = \int f^{t}(\alpha\beta)dm_{st^{-1}}(\beta) \quad , \quad \text{si } 0 \leq s \leq t < 1,$$

i.e.,

$$f^{s} = f^{t} * m_{st^{-1}}$$

(3.1.9) Teorema: Si f es armónica generalizada y satisface

$$\sup \{\int |f(j(s)\alpha\beta)|\, dm_{\Gamma}(\alpha);\ 0 \leq s < 1 \ , \beta \in \Gamma\} \ < \ \infty$$

entonces existe una única medida μ_f en $M(\Gamma)$ tal que

$$f^{s} = \mu_f * m_s \qquad \text{para todo} \quad 0 \leq s < 1 \quad .$$

Demostración: Sea (s_n) una sucesión creciente de números positivos que converge a 1; considérese la sucesión de medidas (μ_n) asociadas a f^{s_n}, i.e.,

$$(\mu_n, g) = \int g(\alpha)\, f^{s_n}(\alpha)\, dm(\alpha) \quad \text{si} \quad g \in C(\Gamma).$$

Las hipótesis sobre f implican que el supremo de las variaciones totales de las μ_n es finito; el teorema de Bourbaki-Alaoglu implica entonces que existe μ_f en la adherencia de (μ_n) en la topología débil estrella de $M(\Gamma)$,considerado como espacio dual de $C(\Gamma)$. Vale además que $\|\mu_f\| \leq \sup \|\mu_n\|$ (a).

Por otra parte, teniendo en cuenta la observación hecha en (3.1.8),

$$\hat{\mu}_n(x) \quad s_m^{|x|} \ = \ \hat{\mu}_m(x) \quad s_n^{|x|} \qquad \text{para cada } x \text{ en } G \text{ y } m \text{ y } n$$

cualesquiera. Esta igualdad implica en primer lugar que $\mu_f \neq \mu_n$ a menos que f sea constante; además, fijando n y haciendo tender m a infinito se obtiene

$$\hat{\mu}_n(x) \quad s_n^{-|x|} = \lim \hat{\mu}_m(x) \qquad \text{para cada } x \text{ en } G \qquad (b).$$

(a) junto con (b) implican que la sucesión (μ_n) converge en la topología débil estrella a la medida μ_f; en particular, μ_f resulta ser el único elemento en la adherencia débil-estrella de (μ_n) y

$$\hat{\mu}_n(x) = \hat{\mu}_f(x) \quad s_n^{|x|} = (\mu_f * m_{s_n})\hat{\ }(x)$$

Pero entonces $f^{s_n} = \mu_f * m_{s_n}$ y esto junto con la armonicidad de f y la elección de la sucesión (s_n) implican que

$$f^s = \mu_f * m_s \qquad \text{para todo } 0 \leq s < 1 .$$

3.2 Espacios de Hardy asociados a medidas representativas

(3.2.1) Con las definiciones dadas en (3.1.1) es fácil verificar que si p es finito, entonces $H^p(T)$ es la clausura en $L^p(T)$ de la subálgebra de C(T) cuyos elementos son las restricciones a T de los elementos de $A(\overline{D})$. Asimismo, $H^\infty(T)$ es la clausura, en la topología débil estrella de $L^\infty(T)$, de la misma subálgebra de C(T)

Si A es un álgebra uniforme sobre X y ξ es un elemento de Sp(A), se define para $0 < p < \infty$ y $m_\xi \in M_\xi(X)$, el espacio de Hardy $H^p(m_\xi)$ como la clausura de A en $L^p(X,m_\xi)$; asimismo, se define $H^\infty(m_\xi)$ como la clausura débil estrella de A en $L^\infty(m_\xi)$ (Ver [23]).

Con estas definiciones, y tomando $X=\Gamma$ y $A=A(\overline{\Delta})$, se analizará ahora en qué medida se mantienen identificaciones análogas a las mencionadas en (3.1.2) para $H^p(\Delta)$ y $H^p(m_\xi)$ donde $\xi \in \Delta$.

(3.2.2) Sea $\xi \in \Delta$ y $1 \leqslant p \leqslant \infty$; definimos

$$i_{p,\xi} : H^p(\Delta) \qquad H^p(m_\xi) \quad \text{por} \quad i_{p,\xi}(f) \quad f_1$$ (Ver (3.1.7).

(3.2.3) Lema: Sea p finito; $i_{p,\xi}$ es (i) inyectiva y (ii) continua.

Demostración: (i) Se supondrá, sin pérdida de generalidad, que

$\xi = j(s)$ con $s \in [0,1)$. Sea $f \in H^p(\Delta)$ tal que $i_{p,\xi}(f)=0$.

Considérese primero el caso $s=0$; entonces $j(0) = \xi_0$ y $m_{\xi_0} = m$, la medida de Haar normalizada de Γ. Puesto que $f^t = f_1 * m_t$ si $0 \leqslant t \quad 1$ (Ver (3.1.7)) se obtiene entonces que

$$\|f^t\|_p \leqslant \|f_1\|_p \qquad \text{para todo} \quad 0 \leqslant t < 1$$

Si f_1 fuera igual a cero en casi todo punto respecto de m, lo mismo valdría para f^t $(0 \leqslant t < 1)$; pero como f^t es continua, resultaría que f es idénticamente nula.

Sea ahora s estrictamente positivo; puesto que si $0 < s \leqslant s' < 1$, m_s y $m_{s'}$ son mutuamente absolutamente continuas con derivadas de Radon-Nykodim acotadas, se puede suponer que $s=e^{-1}$ $(j(e^{-1})=r)$. Si $f_1=0$ en casi todo punto respecto de m_r, entonces, teniendo en cuenta la representación integral de f, se obtiene que

$f(j(t)\ I(iy)) = 0$ en casi todo punto respecto de la medida de Lebesgue de R y para cada $t \in [0,1)$; pero entonces, para cada t fijo se tiene $f(j(t)\alpha) = 0$ para todo $\alpha \in \Gamma$, ya que $\{I(iy)/y \in R\}$ es denso en Γ (Ver (2.1.5)).

(ii) Si $\xi = \xi_0$ de (3.1.7) se obtiene

$$\|f_1\|_p = \lim \|f_s\|_p \tag{a}$$

Como m es invariante por traslaciones

$$\int \left(\int |f(j(s)\alpha\beta)|^p \, dm_r(\beta) \right) dm(\alpha) = \int |f(j(s)\alpha)|^p \, dm(\alpha)$$

Por lo tanto

$$\int |f(j(s)\alpha)|^p dm(\alpha) \leq \sup \{\int |f(j(s)\alpha\beta)|^p \, dm_r(\alpha); s < 1, \beta \in \Gamma\};$$

teniendo en cuenta (a), se obtiene finalmente que

$$\|f_1\|_p \leqslant \|f\|_p'$$

Sea ahora $\xi = j(t)$ $(0 < t < 1)$; existe $k(t,r)$ en R tal que

$$m_t \leqslant k(t,r)\, m_r \qquad ;$$

entonces

$$\int |f_1(\alpha)|^p \, dm_t(\alpha) = \lim \int |f(j(s)\alpha)|^p \, dm_t(\alpha) \quad \leqslant$$

$$\leqslant \quad \overline{\lim} \;\; k(t,r) \int |f(j(s)\alpha)|^p \, dm_r(\alpha) \leqslant k(t,r) \; (\|f\|_p')^p$$

(3.2.4) Obsérvese que en virtud de (3.1.7)

$$i_{\infty,\xi}: H^\infty(\Delta) \dashrightarrow H^\infty(m_\xi)$$

es una isometría para cada ξ en Δ.

(3.2.5) Supóngase que G no es isomorfo a Z y sea ξ en Δ; se quiere ver que en tal caso $i_{p,\xi}$ no es suryectiva para ningún p $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$. Se probará este hecho para $p=\infty$, de donde resultará para cualquier p finito.

(3.2.6) Consideremos $r=j(e^{-1})$ y sea $u': \bar{S} \dashrightarrow R$, continua, acotada, uniformemente c.p. en $\bar{S}$, armónica en S y con sus frecuencias en G de tal modo que si v' es una conjugada armónica de u' en S, entonces v' no es c.p. en ninguna recta contenida en S (Ver (2.3.2)).

Sea (u_n) una sucesión de polinomios trigonométricos reales en $C(\Gamma)$ tal que $u_n' = P(u_n)_\circ I$ converge uniformemente a u' en $\bar{S}$ (Ver (2.5.3) y (2.5.4)). Llamando $v_n = H(u_n)$ (Ver (2.3.1)), $v_n'=P(v_n)_\circ I$ es tal que $u_n'+iv_n'$ es analítica en S y la sucesión que forman estas funciones converge puntualmente en S a u'+iv' donde v' es una conjugada armónica de u'.

Sea $f_n' = \exp(u_n' + iv_n') = \exp((P(u_n + iv_n))_\circ I) = (\exp(P(u_n + iv_n)))_\circ I$ y $f' = \exp(u' + iv')$. La sucesión formada por las funciones $\exp((Pu_n + iv_n)) = P(\exp(u_n + iv_n))$ es uniformemente acotada en $\overline{\Delta}$ y lo mismo ocurre con $f_n = \exp(u_n + iv_n)$ en Γ. Sea entonces f un punto de adherencia de (f_n) en $H^\infty(m_r)$ y supongamos que existe F en $H^\infty(\Delta)$ tal que $i_{\infty,r}(F) = F_1 = f$ en casi todo punto respecto de m_r.

La fórmula de representación integral de F a partir de F_1 (Ver (3.1.7)), el hecho de que para cada w en S, $m_{I(w)}$ y m_r son mutuamente absolutamente continuas con derivadas de Radon-Nykodim acotadas y la naturaleza de f implican que para una subsucesión $(f_{n(w)})$ conveniente

$$F(I(w)) = \int f \, dm_{I(w)} = \lim \int f_{n(w)} \, dm_{I(w)} =$$

$$= \lim (\exp(P(u_{n(w)} + iv_{n(w)}) (I(w))) = \lim f'_{n(w)}(w) = f'(w) .$$

Como esto se puede hacer para cada w en S resulta que

$$F(I(w)) = f'(w) \quad \text{para todo } w \text{ en } S \qquad (a).$$

De (a) resulta que la función F_s $(F_s(\xi) = F(j(s)\xi))$ es para cada s en $[0,1)$ un elemento de $A(\overline{\Delta})$ que no se anula en ningún punto; tomando $s = e^{-1}$ y observando que $\overline{\Delta}$ es simplemente conexo resulta entonces que existe un logaritmo de F_r en $A(\overline{\Delta})$(Ver §7 Ch.III en [13]),i.e., existe $h \in A(\overline{\Delta})$ tal que

$$F_r(\xi) = \exp(h(\xi)) \quad \text{para todo} \quad \xi \in \overline{\Delta}$$

En particular,

$$\exp(h(I(w))) = F_r(I(w)) = F(I(1+w)) \quad \text{para todo} \quad w \in \overline{S} .$$

Pero entonces, volviendo a (a) , se obtiene

$$F'(1+w) = \exp\,(u'(1+w)+iv'(1+w)) = \exp\, h(I(w)) \quad ,$$

de donde resulta que v' es casi periódica (Ver (2.5.4)) en $\{\mathrm{Re}\, w > 1\}$. Esta contradicción prueba que no existe F en $H^\infty(\Delta)$ tal que $i_{\infty,\Gamma}(F) = f$, i.e., $i_{\infty,\Gamma}$ no es suryectiva.

(3.2.7) De (3.2.6) se deduce con facilidad que $i_{\infty,j(s)}$ no es suryectiva para ningún s en $(0,1)$ y por consiguiente tampoco es $i_{\infty,\xi}$ suryectiva cuando $\xi = j(s)\alpha$ con s en $(0,1)$ y α en Γ.

Sea ahora $\xi \in \Delta$, $\xi \neq \xi_0$, y p finito. Como vale (Ver por ejemplo 4.2.6 en [8])

$$H^p(m_\xi) \cap L^\infty(m_\xi) = H^\infty(m_\xi) \quad ,$$

si $i_{p,\xi}$ fuera suryectiva entonces

$$i_{p,\xi}(H^p(\Delta)) \supset H^\infty(m_\xi) \quad ,$$

i.e., si f está en $H^\infty(m_\xi)$, entonces existe F en $H^p(\Delta)$ tal que $i_{p,\xi}(F)=F_1=f$; pero entonces, en virtud de la fórmula de representación integral en (3.1.7), se obtendría que F está en $H^\infty(\Delta)$. De este modo, $i_{p,\xi}$ resultaría ser suryectiva y esto contradice lo ya establecido al respecto.

(3.2.8) Se analizará ahora el caso $\xi = \xi_0$ y se obtendrá como resultado final que i_{∞,ξ_0} no es suryectiva.

Sean u, u_n y v_n como en (3.2.6) ($H(u) * m_r$ no está en $L^\infty(\Gamma)$ (Ver (2.3.2))); habíamos observado que $u_n'+iv_n'=P(u_n+iv_n)\circ I$ converge puntualmente en S a $u'+iv'$. Si $\alpha \in \Gamma$, se define

$$I_\alpha : \overline{S} \dashrightarrow \overline{\Delta} \quad \text{por} \quad I_\alpha(w)=\alpha I(w) \text{ para todo } w \text{ en } \overline{S} \quad .$$

Es claro que para I_α valen propiedades análogas a las descriptas para I en (2.5.4). Si ahora se considera $g \in C(\Gamma)$ y se define $g_\alpha(\beta)=g(\alpha\beta)$ $(\beta\in\Gamma)$, es claro entonces que $P(g_\alpha)_\circ I = P(g)_\circ I_\alpha$ y por consiguiente, la sucesión cuyos elementos son $u'_{n,\alpha}$ $P(u_{n,\alpha})_\circ I$ converge uniformemente a $P(u_\alpha)_\circ I$. Puesto que $H(u_{n,\alpha})= (H(u_n))_\alpha$, resulta que $P(v_n)_\circ I_\alpha=P(H(u_{n,\alpha}))_\circ I$; llamando $v'_{n,\alpha}=P(v_n)_\circ I_\alpha$, la sucesión $(u'_{n,\alpha}+iv'_{n,\alpha})$ converge puntualmente en S a una función analítica $u'_\alpha+iv'_\alpha$ .v'_α no es c.p. en ninguna recta contenida en S. Esta afirmación se prueba como sigue: Si v' fuera c.p. en alguna recta contenida en S, entonces sería c.p. en cualquier otra recta contenida en S(Ver (2.5.5) y (2.5.6)). Teniendo en cuenta que el límite en $L^2(\Gamma)$ de $v_{n,\alpha}* m_r$ es $v_\alpha * m_r$, se tendría entonces que $v_\alpha * m_r$ es igual en $L^2(\Gamma)$ (Ver (2.5.4)) a una función continua; pero como

$$v_\alpha * m_r = \lim (v_{n,\alpha} * m_r) = (H(u))_\alpha * m_r = ((H(u)) * m_r)_\alpha$$

en $L^2(\Gamma)$, resultaría finalmente ("rotando con ángulo α^{-1}") que $(H(u)) * m_r$ es igual en $L^2(\Gamma)$ a una función continua; en particular $(H(u)) * m_r$ está en $L^\infty(\Gamma)$. Esta contradicción con las hipótesis de partida implican que v' no es c.p. en ninguna recta contenida en S.

Es claro que de las consideraciones anteriores resulta en particular que la sucesión $(P(u_n+iv_n))$ converge puntualmente en Δ.

Ahora bien, u_n+iv_n converge en $L^2(\Gamma)$ a $u+iH(u)$ (Ver (2.3.1)); podemos suponer que la sucesión converge puntualmente en casi todo punto respecto de m a $u+iH(u)$. Por consiguiente $(\exp(u_n+iv_n))$ converge en casi todo punto a $\exp(u+iv)$ y puesto que $(\exp(u_n+iv_n))$

es una sucesión uniformemente acotada en $A(\overline{\Delta})$, $\exp(u+iH(u))$ está en $H^{\infty}(m)$. Se quiere ver que no existe $F \in H^{\infty}(\Delta)$ tal que

$$i_{\infty,\xi_0}(F) = F_1 = \exp(u+iH(u))$$

Supongamos entonces que una tal F existe. Si $s \in [0,1)$, definiendo $F^s(\alpha) = F(j(s)\alpha)$ $(\alpha \in \Gamma)$ y llamando $g=\exp(u+iH(u))$ se tiene

$$(F^s)\hat{}(x) = (F_1 * m_s)\hat{}(x) = (g * m_s)\hat{}(x) = \hat{g}(x)\, s^{|x|} =$$
$$= \lim \hat{g}_n(x)\, s^{|x|} = \lim ((g_n * m_s)\hat{}(x)) \qquad ,$$

donde $g_n = \exp(u_n+iv_n)$.

Pero $g_n * m_s = \exp((u_n+iv_n)* m_s)$ y entonces

$$(F^s)\hat{}(x) = (\exp((u+iH(u))*m_s))\hat{}(x) \quad \text{para todo } x \in G.$$

Por lo tanto

$$F^s = \exp((u+iH(u))*m_s) \quad \text{en } L^2(\Gamma) \tag{a}$$

La continuidad de F junto con (a) implican entonces que F_s ($F_s(\xi)=F(j(s)\xi)$ si $\xi\in\overline{\Delta}$) es no nula en $\overline{\Delta}$ para cada s en $[0,1)$; por consiguiente, fijando $s=e^{-1}$ $(j(e^{-1})=r)$ y empleando el argumento ya utilizado en (3.2.6), F_r tiene un logaritmo en $A(\overline{\Delta})$. Sea h un tal logaritmo; (a) implica ahora que para cada $t \in [0,1]$

$$\exp(h(j(t)\alpha)) = \exp\,(((u+iH(u))* m_{rj(t)})(\alpha) \quad \text{para casi}$$

todo α en Γ respecto de m.

Por otra parte, $(u+iH(u)* m_r$ es el límite en $L^2(\Gamma)$ de $((u_n+iH(u_n))* m_r)$ y esta sucesión converge en todo punto; llamando h'_r a su límite, se tiene entonces que $\exp(h(\beta))=\exp(h'_r(\beta))$ en casi todo punto respecto de m. Esto implica que existe $\alpha \in \Gamma$ tal que

$$m_{r\alpha}\{\ \beta\ /\ \exp(h(\beta)) = \exp(h_r'(\beta))\ \} > 0$$

en virtud del lema de K. Hoffman que afirma : Si $E \subset \Gamma$ es un boreliano tal que $m_\xi(E) = 0$ para todo $\xi \in \Delta \setminus \{\xi_0\}$, entonces $m(E)=0$ (Ver 2.5 en [17]). Pero entonces $g'(w) = \lim(\exp(P((u_{n,} + iv_{n,})*m_r)(I(w)))$ $(w \in \bar{S})$ que es continua y acotada en $\bar{S}$, analítica en S, y la función $(\exp(h))_\circ I_\alpha$ (que también es continua y acotada en $\bar{S}$ y analítica en S), son tales que sus valores coinciden en un conjunto de medida positiva del eje imaginario respecto de la medida $\frac{1}{1+y^2}\,dy$ (dy indica la medida de Lebesgue de R); por lo tanto

$g'(iy) = (\exp(h_\circ I_\alpha))(iy)$ en un conjunto de medida positiva respecto de la medida de Lebesgue y ésto implica que g' y $\exp(h_\circ I_\alpha)$ son iguales en todo $\bar{S}$. i.e.,

$$(\exp(h_\circ I_\alpha))(w) = (\exp(u_\alpha' + iv_\alpha'))(1+w) \quad \text{para todo} \quad w \in \bar{S} \quad (b)$$

De (b) se deduce que v' es uniformemente c.p. en $\{\mathrm{Re}\ w \geq 1\}$; esta contradicción muestra finalmente que i_{∞,ξ_0} no es suryectiva.

(3.2.9) El mismo argumento empleado en (3,2,7) permite ver ahora que si p es finito, entonces i_{p,ξ_0} no es suryectiva.

(3.2.10) Sea $h^1(\Delta)$ el espacio de las funciones armónicas generalizadas que satisfacen

$$\|f\|' = \sup\ \{\ \int |f(j(s)\alpha\beta)|\ dm_r(\alpha)\ ;\ s \in [0,1),\ \beta \in \Gamma\} < \infty\ ;$$

este espacio resulta ser de Banach cuando se define la norma de un elemento f como $\|f\|'$. El teorema (3.1.9) permite definir una aplicación inyectiva y continua de $h^1(\Delta)$ en $M(\Gamma)$; como corolario de (3.2.9) resulta entonces que dicha aplicación no es suryectiva si G no es isomorfo a Z.

3.3 *Factorización de funciones analíticas generalizadas*

(3.3.1) En el estudio de los espacios de Hardy del disco es de gran utilidad el siguiente teorema de descomposición (Ver p.67 en [19]).

(3.3.2) Si $f \in H^1(D)$, entonces $f = B(f)\, F(f)\, S(f)$ donde

(i) $B(f)$ es el producto de Blaschke asociado a los ceros de f.

(ii) $$F(f)(z) = \exp\left(\frac{1}{2\pi} \int \frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z} \log|f(e^{i\theta})|\, d\theta \right)$$

aquí $f(e^{i\theta})$ indica los valores límite-radiales de f, que en virtud del teorema de Fatou existen en casi todo punto.

(iii) $S(f)$ no se anula en D y sus límites radiales, en módulo, son iguales a 1 en casi todo punto.

La descomposición descrita es única salvo factores numéricos unimodulares.

(3.3.3) Para los espacios $H^p(m_\xi)$ (Ver (3.2.1) hay una teoría de factorización hecha por G. Lumer en [24]; teniendo en cuenta (3.2.6) hasta (3.2.9) resulta que esta teoría no se extiende a los espacios $H^p(\Delta)$. El último objetivo de este trabajo es analizar algunos casos particulares en los cuales hay una noción de factorización que es satisfactoria. Los resultados relacionados con (3.3.2), i.e., el caso clásico, serán tomados de [19].

(3.3.4) Sea f en $A(\overline{\Delta})$; definiendo

$$f': \overline{D}\setminus\{1\} \dashrightarrow C \qquad f'(z) = f\left(I\left(\frac{1+z}{1-z}\right)\right),$$

f' resulta ser continua y acotada; además f' es analítica en D.

Supóngase ahora que f no se anula en Γ; existen entonces números positivos k y k' tales que

$$|(f_\circ I)(w)| \geq k' \quad \text{para todo} \quad w \in \{0 \leq \operatorname{Re} w \leq k\}$$

En consecuencia, utilizando las notaciones establecidas en (3.3.2), se tiene (Ver p. 68 en [19]): Existe $\lambda_0 \geq 0$ tal que

$$S(f')(z) = \exp\left(-\lambda_0 \frac{1+z}{1-z}\right)$$

Por otra parte, si $e^{i\theta} \neq 1$, $e^{i\theta}$ no es punto de acumulación de ceros de f' y por esta razón, $B(f')$ es continua en $\mathbb{T}\setminus\{1\}$ (Ver p. 68 en [19]); lo mismo resulta ser cierto para $\Gamma(f')$ (Ver también p. 69 en [19]).

Haciendo el cambio de variable $z = \tau(w) = \dfrac{w-1}{w+1}$, se obtiene

$$(f_o I)(w) = \exp(-\lambda_0 w)(B(f')_o\tau)(w)(\Gamma(f')_o\tau)(w) \quad \text{si} \quad w \in \overline{S} .$$

(3.3.5) Teorema: Sea $f \in A(\overline{\Delta})$ tal que f no se anula en Γ y $f(\xi_0) \neq 0$; las siguientes proposiciones son equivalentes:

(i) $B(f')_o\tau$ es uniformemente c.p. en $\overline{S}$.

(ii) $\Gamma(f')_o\tau$ es uniformemente c.p. en $\overline{S}$.

Demostración: Por ser $f(\xi_0) \neq 0$, existen k y k' positivos tales que

$$|f(I(w))| \geq k' \quad \text{para todo} \quad w \in \{ \operatorname{Re} w \geq k \}.$$

En particular, por ser $\Gamma(f')$ acotada (Ver p.69 en [19]) resulta ser $\lambda_0 = 0$.

(i) ⇒ (ii) Si $B(f')_o\tau$ es c.p. en alguna recta en la cual su ínfimo módulo es positivo, entonces $F(f')_o\tau$ es igualmente c.p. en dicha recta (Ver 7° y 13° en Chapter I de [5]); pero entonces, $F(f')_o\tau$ es c.p. en el eje imaginario, pues el ínfimo de los módulos de $B(f')_o\tau$ en dicho eje es estrictamente positivo. Como además $F(f')_o\tau$ es acotada y analítica en S, coincide entonces con la transformada de Poisson de su restricción al eje imaginario que es uniformemente c.p. en $\overline{S}$.

(ii) $\Rightarrow$ (i) Si $F(f')_{o}\tau$ es uniformemente c.p. en $\overline{S}$, entonces existe g en $A(\overline{\Delta})$ tal que $F(f')_{o}\tau = g_{o}I$ (Ver (2.5.4)). Es claro que $g(\xi_0) \neq 0$; tampoco puede anularse g en ningún punto de la forma $j(s)\alpha$ con $0 < s < 1$, pues en tal caso, en la recta $\{\mathrm{Re}\ w = -\ln(s)\}$, el ínfimo de $|F(f')_{o}\tau|$ sería nulo; pero entonces (Ver 9°, § 2, Chap. III en [5]) $F(f')_{o}\tau$ tendría ceros en cualquier banda abierta que contenga a $\{\mathrm{Re}\ w = -\ln(s)\}$. Finalmente g no se anula en Γ pues allí su módulo mínimo coincide con el de f. En consecuencia g admite logaritmos en $A(\overline{\Delta})$ (§7 Ch.III, [13]), i.e., existe $h \in A(\overline{\Delta})$ tal que

$$F(f')_{o}\tau = \exp(h_{o}I)$$

Por lo tanto

$$(B(f')_{o}\tau)(w) = (f_{o}I)(w)\ \exp(-(h_{o}I)(w)) \quad \text{para todo} \quad w \in \overline{S}\ .$$

De esta última igualdad resulta entonces que $B(f')_{o}\tau$ es c.p. en cualquier recta contenida en $\overline{S}$; además, siendo $B(f')_{o}\tau$ acotada, resulta ser la transformada de Poisson de sus valores en el eje imaginario, i.e.,

$$(B(f')_{o}\tau)(s+it) = \frac{1}{\pi}\int \frac{s}{s^2+(y-t)^2}\,(B(f')_{o}\tau)(iy)\ dy \quad \text{si} \quad s > 0\ .$$

Por lo tanto $B(f')_{o}\tau$ es uniformemente c.p. en $\overline{S}$.

(3.3.6) De (3.3.5) resulta entonces que la casi periodicidad del producto de Blaschke $B(f')_{o}\tau$ está ligada a la casi periodicidad de la conjugada armónica de la transformada de Poisson (en el semiplano) de $\log|f(I(iy))|$; (2.5.5) a (2.5.7) ponen en evidencia que cuando G no es isomorfo a Z, la cuestión así planteada no puede resolverse como en el caso clásico. Para tratar el problema de la casi periodicidad del producto de Blaschke asociado a una función analítica y casi periódica en un semiplano, J. Wagner ha adoptado métodos que le han permitido obtener el siguiente resultado (Ver [28]).

(3.3.7) Sean α y β números irracionales entre sí y $f:\overline{S}\text{---->}C$ una función continua, acotada, uniformemente c.p. en $\overline{S}$ y analítica en S; se supone además que

$$\inf \{ \ |f(iy)| \ / \ y \in R \ \} > 0 \qquad ,$$

y que existen números k y k' estrictamente positivos tales que

$$|f(w)| \geq k \qquad \text{si} \qquad \text{Re } w \geq k'$$

Si la serie de Dirichlet de f tiene sus coeficientes no nulos sólo cuando los exponentes son de la forma $m\alpha+n\beta$, con m y n enteros no negativos, entonces $(B(f)_{o}\tau)$ es uniformemente c.p. en $\overline{S}$.

H. PORTA

BIBLIOGRAFIA

[1] R. Arens; A Banach algebra generalization of conformal mappings of the disc, Transactions A.M.S., Vol. 81, N°2, 1956, pp. 501-513.

[2] R. Arens; The maximal ideals of certain function algebras, Pacific J. Math., Vol. 8, N°4, 1958, pp. 641-648.

[3] R. Arens and I.M. Singer; Function values as boundary integrals, Proceedings A.M.S., Vol. 5, 1954, pp. 735-745.

[4] R. Arens and I.M. Singer; Generalized analytic functions, Transactions A.M.S., Vol 81, 1957, pp. 379-393.

[5] A.S. Besicovitch; Almost Periodic Functions, Cambridge at the University Press, 1932.

[6] E. Bishop; Representing measures for points in a uniform algebra, Bulletin A.M.S., Vol. 70, 1964, pp. 121-122.

[7] H. Bohr; Zur Theorie der fastperiodischen Funktionen III; Acta Mathematica, Vol. 47, 1926, pp. 237-281.

[8] A. Browder; Introduction to Function Algebras, W.A. Benjamin, New York, 1969.

[9] A. Browder and J. Wermer; A method for constructing Dirichlet algebras, Proceedings A.M.S., Vol 15, 1964, pp. 546-552.

[10] L. Carleson; Interpolation by bounded analytic functions and the corona problem, Annals of Math., Vol 76, 1962, pp. 542-559.

[11] J. Favard; Sur les fonctions harmoniques presque périodiques, Thèses présentées a la Faculté des Sciences, Gauthier-Villars, Paris, 1927.

[12] J. Favard; Leçons sur les Fonctions presque périodiques, Gauthier-Villars, Paris, 1933.

[13] T.W. Gamelin; Uniform Algebras, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1969.

[14] A. Gleason; Function algebras, Seminar on Analytic Functions, Vol. II, Institute for Advanced Study, Princeton, 1957, pp. 213-226.

[15] I. Glicksberg; The abstract F. and M. Riesz theorem, J. Functional Analysis, Vol 1, 1967, pp. 109-122.

[16] K. Hoffman; Fatou's theorem for generalized analytic functions, Seminar on Analytic Functions, Vol. II, Institute for Advanced Study, Princeton, 1957, pp. 227-239.

[17] K. Hoffman; Boundary behavior of generalized analytic functions, Transactions A.M.S., Vol 87, 1958, pp. 447-466.

[18] K. Hoffman; Analytic functions and logmodular Banach algebras, Acta Mathematica, Vol 108, 1962, pp. 271-317.

[19] K. Hoffman; Banach Spaces of Analytic Functions, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1962.

[20] K. Hoffman; Bounded analytic functions and Gleason parts, Annals of Math., Vol 86, 1967, pp. 74-111.

[21] K. Hoffman and H. Rossi; Function theory from a multiplicative linear functional, Transactions A.M.S., Vol 116, 1965, pp.536-543.

[22] G. Lumer; Analytic functions and Dirichlet problem, Bulletin A.M.S., Vol 70, 1965, pp. 98-104.

[23] G. Lumer; Herglotz transformation and H^p theory, Bulletin A.M.S., Vol. 71, 1965, pp. 725-730.

[24] G. Lumer; Algebres de fonctions et espaces de Hardy, Lecture Notes in Math., N°75, Springer Verlag, Berlin, 1969.

[25] H. Nikaido; On von Neumann's minimax theorem, Pacific J. Math., Vol. 4, 1954, pp. 65-72.

[26] J. Rainwater; A note on the preceding paper, Duke Math. J., Vol. 36, 1969, pp. 799-800.

[27] W. Rudin; Real and Complex Analysis, Mac Graw Hill, New York, 1966.

[28] J. Wagner; Factorisation de fonctions analytiques sur un poly-disque, Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, Paris, Vol. 2[illegible], 1969, Série A pp. 1147-1150.

[29] J.L. Walsh; Über die Entwicklung einer harmonischen Funktion nach harmonischen Polynomen, J. Reine Angew. Math., Vol. 159, 1928, pp. 197-209.

[30] J. Wermer; Seminar über Funktionen-Algebren, Lecture Notes in Math., N° 1, Springer Verlag, Berlin, 1964.