Biblioteca Digital
F C E N - U B A

BIBLIOTECA CENTRAL LUIS F LELOIR
BIBLIOTECA CENTRAL LELOIR
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES UBA

Tesis de Posgrado

Operadores seudodiferenciales con símbolos : Distribuciones

Alvarez Alonso, Josefina D.

1976

Tesis presentada para obtener el grado de Doctor en Ciencias Matemáticas de la Universidad de Buenos Aires

Este documento forma parte de la colección de tesis doctorales y de maestría de la Biblioteca Central Dr. Luis Federico Leloir, disponible en digital.bl.fcen.uba.ar. Su utilización debe ser acompañada por la cita bibliográfica con reconocimiento de la fuente.

This document is part of the doctoral theses collection of the Central Library Dr. Luis Federico Leloir, available in digital.bl.fcen.uba.ar. It should be used accompanied by the corresponding citation acknowledging the source.

Cita tipo APA:
Alvarez Alonso, Josefina D.. (1976). Operadores seudodiferenciales con símbolos : Distribuciones. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad de Buenos Aires.
http://digital.bl.fcen.uba.ar/Download/Tesis/Tesis_1509_AlvarezAlonso.pdf

Cita tipo Chicago:
Alvarez Alonso, Josefina D.. "Operadores seudodiferenciales con símbolos : Distribuciones". Tesis de Doctor. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad de Buenos Aires. 1976.
http://digital.bl.fcen.uba.ar/Download/Tesis/Tesis_1509_AlvarezAlonso.pdf

EXACTAS UBA
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales

UBA
Universidad de Buenos Aires

Dirección: Biblioteca Central Dr. Luis F. Leloir, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Universidad de Buenos Aires. Intendente Güiraldes 2160 - C1428EGA - Tel. (++54 +11) 4789-9293 **Contacto:** digital@bl.fcen.uba.ar

UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES

FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

OPERADORES SEUDODIFERENCIALES

CON SIMBOLOS DISTRIBUCIONES

Josefina D. Alvarez Alonso

Trabajo de tesis para optar al grado

de doctor en ciencias matemáticas

Director de tesis: Dr. Alberto P. Calderón

Buenos Aires, junio de 1976

... Un día me acerqué al Dr. Calderón y le dije muy resueltamente: -"Quiero hacer la tesis con usted"- . ¡Qué inconsciencia la mía! Mas su mucho saber y su generosa paciencia, orientaron mi esfuerzo, para lograr que esta tesis sea hoy realidad. Gracias, Dr. Calderón.

CONTENIDO

INTRODUCCION

Para justificar en cierto modo lo que se va a estudiar aquí, resultará conveniente hablar algo de los operadores seudodiferenciales en general.

Calderón y Zygmund (ver [7]), emplearon un cálculo de operadores integrales singulares para estudiar ecuaciones elípticas; con él, obtuvieron parametrices de estas ecuaciones. Ese cálculo fue usado luego por Calderón (ver [3] y [4]), para demostrar el primer resultado general sobre unicidad de las soluciones de sistemas.

Los operadores seudodiferenciales se introdujeron como un refinamiento del cálculo de Calderón y Zygmund y fueron estudiados, entre otros, por Khon y Nirenberg, Seeley y Hörmander (ver [12] , [14] y [10]). En estas primeras clases, siguen estando incluídas parametrices de las ecuaciones elípticas. Los símbolos $a(x,\xi)$ de esos operadores, se expresan como suma asintótica de funciones positivamente homogéneas en ξ, de grados decrecientes. Pero esta hipótesis de homogeneidad no es esencial y sólo importan las estimaciones que se obtienen para las derivadas del símbolo.

A partir de esta observación, se define la clase de los operadores cuyos símbolos cumplen

$$\left| D_x^\alpha \; D_\xi^\beta \; a(x,\xi) \right| \leq C_{\alpha\beta} \; (1+|\xi|)^{m-|\beta|}$$

y más generalmente:

$$\left| D_x^\alpha \; D_\xi^\beta \, a(x,\xi) \right| \leq C_{\alpha\beta} \; (1+|\xi|)^{m-\rho|\beta|+\delta|\alpha|}$$

$$0 \leq \delta < \rho \leq 1$$

(Ver [11]). Estas clases contienen parametrices de operadores no elípticos, como el del calor y $-|x|^4 \Delta + 1$.

Se podrían mencionar otras generalizaciones y técnicas de cálculo (ver [1]).

El objetivo siempre es ampliar la clase de los operadores seudodiferenciales, para poder invertir nuevas ecuaciones.

Esto se intenta hacer aquí, también. Básicamente, se definen operadores seudodiferenciales, cuyos símbolos $a(x,\xi)$, son funciones de ξ , con valores en ciertas distribuciones que actúan en x . El hecho de que la función sea más o menos regular en ξ y que sus derivadas modifiquen o no la clase de distribuciones en x , lleva a considerar varios tipos de símbolos. Sus definiciones y propiedades figuran en el punto 2.

Cada clase de símbolos, origina un espacio de operadores seudodiferenciales.

En el punto 3., se les da sentido y se demuestran propiedades de continuidad y regularidad. El punto 4., está dedicado a analizar la composición de estos operadores entre sí y con los operadores seudodiferenciales habituales. Finalmente, en el punto 5., se incluyen algunos ejemplos de símbolos y operadores distribuciones y se obtiene, en cierto sentido, una parametriz del operador $|x|^{2h}(1-\Delta^{\ell})$, $h, \ell \geqslant 1$, en $\mathbb{R}^3$.

Todas las notaciones y los resultados básicos usados, figuran en el punto 1.

1. NOTACIONES Y RESULTADOS BÁSICOS

a). Notaciones

- Se trabaja en el espacio euclídeo $\mathbb{R}^n$; sus puntos se indican $x = (x_1, \dots, x_n)$

$\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$, etc., con las notaciones:

$$x + \xi = (x_1 + \xi_1, \dots, x_n + \xi_n)$$
$$x . \xi = x_1 \xi_1 + \dots + x_n \xi_n$$
$$|\xi| = \sqrt{\xi_1^2 + \dots + \xi_n^2}$$

- $\mathbb{N}$ es el conjunto de los números naturales, incluído el cero.
- Dadas n-uplas $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n) \in \mathbb{N}^n$, se nota:

$$\alpha ! = \alpha_1 ! \dots \alpha_n !$$
$$\alpha \leq \beta \quad \text{si} \quad \alpha_j \leq \beta_j \ , \ \forall j$$
$$\alpha < \beta \quad \text{si} \quad \alpha \leq \beta \ \text{y} \ \alpha_j < \beta_j \quad \text{para algún } j$$

- Si $\alpha \leq \beta$, se indica $\binom{\beta}{\alpha} = \binom{\beta_1}{\alpha_1} \dots \binom{\beta_n}{\alpha_n}$

Dados $x \in \mathbb{R}^n$, $\alpha \in \mathbb{N}^n$, es $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}$

- Dada $\alpha \in \mathbb{N}^n$, $D_x^\alpha = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\alpha_1} \dots \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{\alpha_n}$
- Δ_x indica el operador laplaciano, actuando en la variable x: $\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}$
- Las estructuras de espacios vectoriales consideradas, siempre son complejas.
- Dada una función φ, $\text{sop}(\varphi)$ es su soporte.
- C^∞, C_0^k, C_0^∞, L^1, L^2, D, D', S, S', E', indican los espacios

habituales, con sus correspondientes estructuras topológicas.

- Dada $f \in L^1$, se notan

$$F(f)(\xi) = \hat{f}(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int e^{ix\xi} f(x)\, dx$$
$$\overline{F}(f)(\xi) = \int e^{-ix\xi} f(x)\, dx$$

la transformada de Fourier y la transformada de Fourier conjugada, respectivamente.

- Dado $s \in \mathbb{R}$, H^s es el espacio de Sobolev de orden s, definido como:

$$\left\{ f \in S' \ / \ (1 + |\xi|^2)^{s/2} \hat{f}(\xi) \in L^2 \right\},$$

con su estructura habitual de espacio de Hilbert.

• Cuando interesa destacar la dimensión del espacio euclídeo o la variable con la que se trabaja, se escribe : $\mathbb{R}^n_\xi$, $C_0^{\infty}(\mathbb{R}^{2n})$, L^2_θ , F_x , etc.

• Se emplean funciones definidas sobre $\mathbb{R}^n$, con valores en el espacio de Sobolev H^s . Estas funciones se indican:

$$a(\quad,\xi) : \mathbb{R}^n \longrightarrow H^s$$

En el lugar libre, se piensa la variable de la distribución $a(\,\cdot\,,\xi)$, para cada ξ .

Con $\| a(\quad,\xi)\|_{H^s}$, se nota la norma en el espacio H^s , de esa distribución.

A veces resulta conveniente escribir $a(x,\xi)$.

• $D'(\mathbb{R}^n_\xi ; H^t)$ es el espacio de las distribuciones con valores en H^t . Es decir, son las aplicaciones lineales y continuas $L : D \longrightarrow H^t$.

• En general, C indica diferentes constantes; cuando interesa destacar que depende de cierta cantidad γ , se escribe C_γ .

• Dados $m \in \mathbb{R}$, $0 \leq \rho \leq 1$, es:

$$S^m_\rho = \Big\{ a(x,\xi) \in C^{\infty}(\mathbb{R}^{2n}) \ / \ \text{para } \alpha, \beta \in \mathbb{N}^n ,$$
$$\sup_{x\in \mathbb{R}^n} \left| D^\alpha_x \, D^\beta_\xi \, a(x,\xi) \right| \leq C_{\alpha,\beta} (1+|\xi|)^{m-\rho|\beta|} \Big\}$$

Si $a \in S^m_\rho$, la integral

$$Af(x) = \int e^{-ix\xi} \, a(x,\xi) \, \hat{f}(\xi) \, d\xi \quad , \quad f \in S$$

define un operador continuo de S en S, que se llama operador seudodiferencial de orden m y tipo ρ ; $a(x,\xi)$ es el símbolo de A y por eso suele hablarse de S^m_ρ como de la clase de símbolos.

$\mathfrak{J}^m_\rho$ es el espacio de los operadores seudodiferenciales con símbolos en S^m_ρ

b). Resultados básicos

• Desigualdad de Peetre:

Dados $\xi, \eta \in \mathbb{R}^n$, $s \in \mathbb{R}$, vale:

$$(1+|\xi|^2)^s \leq 2^{|s|} (1+|\xi-\eta|^2)^s (1+|\eta|^2)^{|s|} .$$

• H^s es la completación de C_0^{∞} respecto de la norma

$$\|\Psi\|_{H^s} = \left(\int (1+|\xi|^2)^s \left| \hat{\Psi}(\xi) \right|^2 d\xi \right)^{1/2} .$$

. Sea $\varphi \in C^{\infty}$, tal que $D^{\alpha}\varphi$ está acotada para cada $\alpha \in \mathbb{N}^n$.

Entonces la aplicación

$$\begin{array}{ccc} H^s & \longrightarrow & H^s \\ f & \longrightarrow & f.\varphi \end{array}$$

está definida y es continua.

En efecto, se tiene

$$\| f.\varphi \|_{H^s} \leq C \left[\sup_{\substack{x \in \mathbb{R}^n \\ |\alpha| \leq [|s|]+1}} \left| D_x^{\alpha} \varphi(x) \right| \right] . \| f \|_{H^s}$$

donde $[|s|]$ indica la parte entera de $|s|$.

<u>Idea de la demostración</u>:

El resultado es claro cuando $s \in \mathbb{N}$ y por dualidad, también cuando $-s \in \mathbb{N}$. En el caso general, se usa un teorema de interpolación en espacios de Sobolev. (ver [5]). #

. Para la teoría de funciones con valores vectoriales y en particular para la integral de Bochner, ver [9] .

. Se usan algunos resultados muy básicos, de la teoría de distribuciones vectoriales. (Ver [8]).

. En S^m_{ρ} , puede definirse una estructura de espacio de Fréchet, mediante la familia de seminormas

$$\| a \|_k = \sup_{\substack{(x,\xi) \in \mathbb{R}^{2n} \\ |\alpha|, |\beta| \leq k}} \frac{\left| D_x^{\alpha} D_{\xi}^{\beta} a(x,\xi) \right|}{(1+|\xi|)^{m-\rho|\beta|}}$$

2. LAS CLASES DE SIMBOLOS

Dado $r \in \mathbb{N}$, $C^r(\mathbb{R}^n_\xi ; H^t)$, indicará el espacio de las funciones $a(\ ,\xi) : \mathbb{R}^n_\xi \longrightarrow H^t$ continuas, que admiten derivadas continuas de órdenes $\leqslant$ r.

Definición 2.1:

$$A^k(\mathbb{R}^n_\xi ; H^s) = \{ a(\ ,\xi) : \mathbb{R}^n_\xi \longrightarrow H^s \ / \ a(\ ,\xi) \in C^r(\mathbb{R}^n_\xi ; H^{s-r}), \text{ para cada } r = 0, 1, 2, \dots, k \}.$$

Es decir, se permite que las derivadas en ξ de la función $a(x, \xi)$, modifiquen la regularidad en x.

Definición 2.2 :

Dados $m, s \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant \rho \leqslant 1$, se introduce la clase $H^{m,s,k}_\rho$, de símbolos distribuciones de orden m y tipo ρ, de la siguiente manera:

$$H^{m,s,k}_\rho = \{ a(\ ,\xi) \in A^k(\mathbb{R}^n_\xi ; H^s) \ / \ \| D^\alpha_\xi a(\ ,\xi) \|_{H^{s-|\alpha|}} \leqslant C_\alpha (1 + |\xi|)^{m-\rho|\alpha|}, \ |\alpha| \leqslant k \}.$$

Definición 2.3 :

Cuando se supone que al derivar en ξ la función $a(x, \xi)$, no cambia su regularidad en x, se obtiene una nueva clase de símbolos, $S^{m,s,k}_\rho$, que se define como:

$$S^{m,s,k}_\rho = \{ a(\ ,\xi) \in C^k(\mathbb{R}^n_\xi ; H^s) \ / \ \| D^\alpha_\xi a(\ ,\xi) \|_{H^s} \leqslant C_\alpha (1 + |\xi|)^{m-\rho|\alpha|}, |\alpha| \leqslant k \}.$$

Observación 2.1 :

Cuando no haya límite sobre el orden de derivación k admitido, las clases introducidas se notarán, respectivamente, $A(\mathbb{R}^n_\xi ; H^s)$, $H^{m,s}_\rho$, $C^\infty(\mathbb{R}^n_\xi ; H^s)$ y $S^{m,s}_\rho$.

Los espacios $H^{m,s,k}_\rho$ y $S^{m,s,k}_\rho$, se han introducido sin distinguir entre $k = 0$ y $k > 0$; es claro que cuando $k = 0$, el parámetro ρ no juega ningún papel; en este caso, los espacios se notarán $H^{m,s,0}$ y $S^{m,s,0}$.

Quiere darse ahora estructura topológica a los espacios definidos:

En $A^k(\mathbb{R}^n_\xi ; H^s)$, se considera la topología determinada por la familia de seminormas:

$$p_C^k(a) = \sup_{\substack{\xi \in C \\ |\alpha| \leq k}} \left\| D_\xi^\alpha a(\ ,\xi) \right\|_{H^{s-|\alpha|}} \quad , \quad C \subset \mathbb{R}^n \ , \text{ compacto.}$$

En $H_\rho^{m,s,k}$, se define la norma:

$$P_{m,s}^k(a) = \sup_{\substack{\xi \in \mathbb{R}^n \\ |\alpha| \leq k}} \frac{\left\| D_\xi^\alpha a(\ ,\xi) \right\|_{H^{s-|\alpha|}}}{(1+|\xi|)^{m-\rho|\alpha|}}$$

La topología de $C^k(\mathbb{R}^n_\xi ; H^s)$, es esencialmente la misma que acaba de introducirse en $A^k(\mathbb{R}^n_\xi ; H^s)$; sólo debe tenerse en cuenta que al derivar en ξ , no se modifica la regularidad en x y por lo tanto se definen las seminormas como :

$$q_C^k(a) = \sup_{\substack{\xi \in C \\ |\alpha| \leq k}} \left\| D_\xi^\alpha a(\ ,\xi) \right\|_{H^s}$$

En cuanto a $S_\rho^{m,s,k}$, la única diferencia con $H_\rho^{m,s,k}$, es el espacio en el que se toma la norma en x :

Se define entonces la norma:

$$Q_{m,s}^k(a) = \sup_{\substack{\xi \in \mathbb{R}^n \\ |\alpha| \leq k}} \frac{\left\| D_\xi^\alpha a(\ ,\xi) \right\|_{H^s}}{(1+|\xi|)^{m-\rho|\alpha|}}$$

Cuando no se fija k , en cada espacio $A(\mathbb{R}^n_\xi ; H^s)$, $H_\rho^{m,s}$, $C^{\infty}(\mathbb{R}^n_\xi ; H^s)$ y $S_\rho^{m,s}$ obtenido, se considerará la topología intersección de las topologías en $\left\{A^k(\mathbb{R}^n_\xi ; H^s)\right\}_k$, $\left\{H_\rho^{m,s,k}\right\}_k$, $\left\{C^k(\mathbb{R}^n_\xi ; H^s)\right\}_k$ y $\left\{S_\rho^{m,s,k}\right\}_k$, respectivamente.

Desde luego, que esa topología intersección está definida, respectivamente, por $\left\{p_C^k\right\}_{k,C}$, $\left\{P_{m,s}^k\right\}_k$, $\left\{q_C^k\right\}_{k,C}$ y $\left\{Q_{m,s}^k\right\}_k$.

<u>Teorema 2.1</u> :

$(A^k(\mathbb{R}^n_\xi ; H^s) , \{p_C^k\}_C)$ y $(C^k(\mathbb{R}^n_\xi ; H^s) , \{q_C^k\}_C)$, son espacios de Fréchet .

$(H_\rho^{m,s,k} , P_{m,s}^k)$ y $(S_\rho^{m,s,k} , Q_{m,s}^k)$, son espacios de Banach .

Por propiedad de la topología intersección, se deduce que los espacios $(A(\mathbb{R}^n_\xi ; H^s) , \{p^k_C\}_{k,C})$, $(H^{m,s}_\rho , \{P^k_{m,s}\}_k)$, $(C^{\infty}(\mathbb{R}^n_\xi ; H^s) , \{q^k_C\}_{k,C})$ y $(S^{m,s}_\rho , \{Q^k_{m,s}\}_k)$ son de Fréchet.

Demostración:

Todo lo dicho se prueba en forma semejante.

Por ejemplo, se verá que $H^{m,s,k}_\rho$ es un espacio de Banach:

Sea $\{a_j\}$ una sucesión de Cauchy en $H^{m,s,k}_\rho$. Entonces, fijado $\xi\in\mathbb{R}^n$, existe $a^\alpha (x , \xi) \in H^{s-|\alpha|}$, tal que $D^\alpha_\xi a_j (\ ,\xi) \longrightarrow a^\alpha (\ ,\xi)$ en $H^{s-|\alpha|}$ $|\alpha| \leqslant k$. Se afirma que $a^0 (x ,\xi) \in H^{m,s,k}_\rho$ y que $a_j \longrightarrow a^0$ en ese espacio

En primer lugar, $a^\alpha (\ ,\xi) \in C^0 (\mathbb{R}^n_\xi ; H^{s-|\alpha|})$, para $|\alpha|\leqslant k$, porque la sucesión $\{ D^\alpha_\xi a_j (\ ,\xi) \}$ es de Cauchy, uniformemente en los compactos de $\mathbb{R}^n_\xi$.

Por lo tanto, $a^\alpha (\ ,\xi)$ define una distribución en $D' (\mathbb{R}^n_\xi ; H^{s-|\alpha|})$, mediante la integral de Boohner

$$\begin{array}{ccc} D (\mathbb{R}^n_\xi) & \longrightarrow & H^{s-|\alpha|} \\ \varphi & \longrightarrow & \int a^\alpha (\ ,\xi) \varphi(\xi) \, d\xi . \end{array}$$

Como fijado $j\in\mathbb{N}$, $a_j (\ ,\xi) \in C^{|\alpha|}(\mathbb{R}^n_\xi ; H^{s-|\alpha|})$, $D^\alpha_\xi a_j (\ ,\xi)$ determina también una distribución de $D' (\mathbb{R}^n_\xi ; H^{s-|\alpha|})$, con la integral

$$\int D^\alpha a_j (\ ,\xi) \varphi (\xi) \, d\xi .$$

Aquí, puede integrarse por partes en el sentido de $H^{s-|\alpha|}$, obteniéndose la igualdad:

$$\int D^\alpha_\xi a_j (\ ,\xi)\varphi(\xi) \, d\xi = (-1)^{|\alpha|} \int a_j (\ ,\xi) \, D^\alpha_\xi \varphi (\xi) \, d\xi .$$

El teorema de convergencia mayorada de Lebesgue, permite pasar al límite bajo el signo integral, en ambos miembros.

Resulta:

$$\int a^\alpha (\ ,\xi) \varphi (\xi) \, d\xi = (-1)^{|\alpha|} \int a^0(\ ,\xi) \, D^\alpha_\xi \varphi (\xi) \, d\xi .$$

O sea, que en el sentido de $D' (\mathbb{R}^n_\xi ; H^{s-|\alpha|})$, es:

$$D^\alpha_\xi a^0 = a^\alpha .$$

Debe probarse ahora que $a^0 (\ ,\xi) \in A^k (\mathbb{R}^n_\xi ; H^s)$ y que $D^\alpha_\xi a^0 (\ ,\xi) =$

$= a^{\alpha}(\ ,\xi)$, en el sentido de las funciones con valores en $H^{s-|\alpha|}$. Por inducción, basta probarlo cuando $|\alpha| = 1$.

Sea $a^{\alpha'}(\ ,\xi) = \int_0^{\xi_j} a^{\alpha}(\ ,\xi_1,\dots,\xi_{j-1},t,\xi_{j+1},\dots,\xi_n)\ dt$

Se comprueba sin dificultad que existe $\frac{\partial a^{\alpha'}}{\partial \xi_j}(\ ,\xi) = a^{\alpha}(\ ,\xi)$, en el sentido de $C^0(\mathbb{R}^n_{\xi}\ ;\ H^{s-1})$. Luego, puede escribirse $a^0(\ ,\xi) = a^{\alpha'}(\ ,\xi) + b^{\alpha}(\ ,\xi)$, donde $b^{\alpha}(\ ,\xi) \in C^0(\mathbb{R}^n_{\xi}\ ;\ H^{s-1})$ y en el sentido de $D'(\mathbb{R}^n_{\xi}\ ;\ H^{s-1})$ es $\frac{\partial b^{\alpha}}{\partial \xi_j} = 0$.

Al ser $b^{\alpha}(\ ,\xi)$ una función : $\mathbb{R}^n_{\xi} \longrightarrow H^{s-1}$ continua, se concluye que b^{α} no depende de la variable ξ_j, con la misma demostración que en el caso de distribuciones escalares. Luego, en el sentido de las funciones con valores en H^{s-1}, existe $\frac{\partial b^{\alpha}}{\partial \xi_j}(\ ,\xi) = 0$. Y por lo tanto, existe $\frac{\partial a^0}{\partial \xi_j}(\ ,\xi) = a^{\alpha}(\ ,\xi)$, que pertenece a $C^0(\mathbb{R}^n_{\xi}\ ;\ H^{s-1})$.

Por ser la sucesión $\{a_j\}$ de Cauchy, existe $C > 0$ tal que

$$\frac{\| D^{\alpha}_{\xi} a_j(\ ,\xi) \|_{H^{s-|\alpha|}}}{(1+|\xi|)^{m-\rho|\alpha|}} \leqslant C \quad , \ \forall\ j \geqslant 1\ ,\ \xi \in \mathbb{R}^n .$$

Tomando $\lim\limits_{j \to \infty}$, se concluye que $a^0 \in H^{m,s,k}_{\rho}$.

Finalmente, dado $\varepsilon > 0$, $\exists\ j_0(\varepsilon)$ tal que $\forall\ j, h \geqslant j_0$, $\xi \in \mathbb{R}^n$, es :

$$\frac{\| D^{\alpha}_{\xi} a_j(\ ,\xi) - D^{\alpha}_{\xi} a_h(\ ,\xi) \|_{H^{s-|\alpha|}}}{(1+|\xi|)^{m-\rho|\alpha|}} < \varepsilon .$$

Si se toma $\lim\limits_{h \to \infty}$, resulta que $a_j \longrightarrow a^0$ en $H^{m,s,k}_{\rho}$. #

En el siguiente lema, se incluyen algunas propiedades básicas de los espacios que se han definido.

<u>Lema 2.1</u> :

a). Si $m \leq m_1$, $k \geqslant k_1$, $s \geqslant s_1$, $\rho \geqslant \rho_1$, el espacio $H^{m,s,k}_{\rho}$ está incluído cóntinuamente en el espacio $H^{m_1,s_1,k_1}_{\rho_1}$.

b). Dados $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$, $|\beta| \leq k$, la aplicación $D_\xi^\beta D_x^\alpha$ está definida y es contínua de $H_\rho^{m,s,k}$ en $H_\rho^{m-\rho|\beta|, s-|\alpha+\beta|, k-|\beta|}$.

Además, si $a \in H_\rho^{m,s,k}$, $D_\xi^\beta D_x^\alpha a(\ ,\xi) = D_x^\alpha D_\xi^\beta a(\ ,\xi)$, en el sentido de $H^{s-|\alpha+\beta|}$.

c). Si $A_0^k (\mathbb{R}_\xi^n ; H^s) = \left\{ a(\ ,\xi) \in A^k (\mathbb{R}_\xi^n ; H^s) \ / \text{ tiene soporte compacto en la variable } \xi \right\}$,

este espacio está incluído en $H_\rho^{m,s;k}$ $\forall m \in \mathbb{R}$ y sobre él coinciden su topología natural y la inducida por $H_\rho^{m,s,k}$.

d). Si $a_j \longrightarrow 0$ en $H_\rho^{m,s,k}$, entonces para cada $|\alpha| \leq k$, $D_\xi^\alpha a_j(\ ,\xi) \longrightarrow 0$ en $H^{s-|\alpha|}$, uniformente respecto de ξ en los compactos de $\mathbb{R}^n$.

<u>Demostración</u>:

a). Si $a(\ ,\xi) \in H_\rho^{m,s,k}$, se verá primero que pertenece a $A^{k_1} (\mathbb{R}_\xi^n ; H^{s_1})$:

En primer lugar, por la inclusión contínua de H^s en H^{s_1} si $s \geq s_1$, fijado $\xi \in \mathbb{R}^n$, $a(\ ,\xi) \in H^{s_1}$.

Además, como $\| f \|_{H^{s_1}} \leq \| f \|_{H^s}$ si $s \geq s_1$, es:

$$\| a(\ ,\xi_0+h) - a(\ ,\xi_0) \|_{H^{s_1}} \leq \| a(\ ,\xi_0+h) - a(\ ,\xi_0) \|_{H^s} \xrightarrow[h \to 0]{} 0 .$$

De la misma manera se trabaja con $D_\xi^\alpha a(\ ,\xi)$, para $|\alpha| \leq k_1$; luego, se ha probado que $a(\ ,\xi) \in A^{k_1} (\mathbb{R}_\xi^n ; H^{s_1})$.

Finalmente, dada $|\alpha| \leq k_1$,

$$\| D_\xi^\alpha a(\ ,\xi) \|_{H^{s_1-|\alpha|}} \leq \| D_\xi^\alpha a(\ ,\xi) \|_{H^{s-|\alpha|}} \leq$$
$$\leq P_{m,s}^k(a) \ (1+|\xi|)^{m-\rho|\alpha|} \leq P_{m,s}^k(a) \ (1+|\xi|)^{m_1-\rho_1|\alpha|}.$$

Luego,

$$P_{m_1,s_1}^{k_1}(a) = \sup_{\substack{\xi \in \mathbb{R}^n \\ |\alpha| \leq k_1}} \frac{\| D_\xi^\alpha a(\ ,\xi) \|_{H^{s_1-|\alpha|}}}{(1+|\xi|)^{m_1-\rho_1|\alpha|}} \leq P_{m,s}^k(a)$$

b). Dada $a \in A^k(\mathbb{R}_\xi^n ; H^s)$, va a probarse que $D_x^\alpha D_\xi^\beta a = D_\xi^\beta D_x^\alpha a \in$

$\in A^{k-|\beta|}(\mathbb{R}^n_\xi ; H^{s-|\alpha+\beta|})$.

Si $|\alpha| = 0$, por definición de la clase $A^k(\mathbb{R}^n_\xi ; H^s)$, $D^\beta_\xi a \in A^{k-|\beta|}(\mathbb{R}^n_\xi ; H^{s-|\beta|})$.

Como $D^\alpha_x : H^s \longrightarrow H^{s-|\alpha|}$ es un operador continuo, resulta que $D^\alpha_x D^\beta_\xi a \in A^{k-|\beta|}(\mathbb{R}^n_\xi ; H^{s-|\beta+\alpha|})$.

Análogamente se demuestra que $D^\beta_\xi D^\alpha_x a$ pertenece al mismo espacio.

Va a probarse ahora que esos órdenes de derivación conmutan:

Por inducción, es suficiente probarlo $\forall\alpha$ y $|\beta| = 1$.

$$\frac{\partial}{\partial\xi_j} D^\alpha_x a(\ ,\xi) = \lim_{h\to 0} \frac{D^\alpha_x a(\ ,\xi+h) - D^\alpha_x a(\ ,\xi)}{h_j}$$, con $h = (0,\ldots,0,h_j,0,\ldots,0)$; el límite se toma en $H^{s-|\alpha|-1}$, fijado $\xi \in \mathbb{R}^n$.

Luego, dada $\varphi \in C^{\infty}_0(\mathbb{R}^n_x)$, se tiene:

$$\left(\frac{\partial}{\partial\xi_j} D^\alpha_x a(\ ,\xi), \varphi\right) = \lim_{h\to 0} \left(\frac{D^\alpha_x a(x,\xi+h) - D^\alpha_x a(\ ,\xi)}{h_j}, \varphi\right)$$

Fijado h, es:

$$\frac{1}{h_j}\left(D^\alpha_x a(\ ,\xi+h), \varphi\right) - \frac{1}{h_j}\left(D^\alpha_x a(\ ,\xi), \varphi\right) =$$

$$= \frac{(-1)^{|\alpha|}}{h_j}\left(a(\ ,\xi+h), D^\alpha_x\varphi\right) - \frac{(-1)^{|\alpha|}}{h_j}\left(a(\ ,\xi), D^\alpha_x\varphi\right) =$$

$$= (-1)^{|\alpha|}\left(\frac{a(\ ,\xi+h) - a(\ ,\xi)}{h_j}, D^\alpha_x\varphi\right)$$

Pero existe el $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{a(\ ,\xi+h) - a(\ ,\xi)}{h_j} = \frac{\partial a}{\partial\xi_j}$ en H^{s-1}.

Entonces puede tomarse

$$\lim_{h\to 0} (-1)^{|\alpha|}\left(\frac{a(\ ,\xi+h) - a(\ ,\xi)}{h_j}, D^\alpha_x\varphi\right) =$$

$$= (-1)^{|\alpha|}\left(\frac{\partial a}{\partial\xi_j}(\ ,\xi), D^\alpha_x\varphi\right) = \left(D^\alpha_x \frac{\partial}{\partial\xi_j} a(\ ,\xi), \varphi\right).$$

Luego, se comprueba que las derivaciones en ξ, x, conmutan.

En cuanto a la continuidad:

Dados $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{N}^n$, $|\beta| \leq k$, $|\gamma| \leq k - |\beta|$:

$$\| D_\xi^\gamma D_x^\alpha \quad D_\xi^\beta a(\ ,\xi) \|_{H^{s-|\alpha+\beta+\gamma|}} = \| D_x^\alpha \quad D_\xi^{\gamma+\beta} a(\ ,\xi) \|_{H^{s-|\alpha+\beta+\gamma|}} \leq$$

$$\leq \| D_\xi^{\gamma+\beta} a(\ ,\xi) \|_{H^{s-|\gamma+\beta|}} \leq P_{m,s}^k (a) \quad (1 + |\xi|)^{m-\rho|\gamma+\beta|}$$

Por lo tanto:

$$P^{k-|\beta|}_{m-\rho|\beta|,s-|\alpha+\beta|}(a) = \sup_{\substack{\xi \in \mathbb{R}^n \\ |\gamma| \leq k-|\beta|}} \frac{\| D_\xi^\gamma \ D_x^\alpha \ D_\xi^\beta a(\ ,\xi) \|_{H^{s-|\alpha+\beta+\gamma|}}}{(1 + |\xi|)^{m-\rho|\beta|-\rho|\gamma|}} \leq P^k_{m,s} \quad (a)$$

c) , d). La demostración de estos puntos es inmediata. #

Observación 2.2 :

Resultados análogos a los expuestos en el lema 2.1 , pueden enunciarse sobre los ótros espacios. Las demostraciones son semejantes.

En el teorema que se va a enunciar enseguida, M_k indicará cualquiera de los espacios $A^k(\mathbb{R}^n_\xi \ ; H^s)$, $C^k(\mathbb{R}^n_\xi \ ; H^s)$, $H_\rho^{m,s,k}$ o $S_\rho^{m,s,k}$.

En cambio, M será uno de los espacios $A(\mathbb{R}^n_\xi \ ; H^s)$, $C^{oo}(\mathbb{R}^n_\xi \ ; H^s)$, $H_\rho^{m,s}$ o $S_\rho^{m,s}$.

Teorema 2.2 :

$C_o^k(\mathbb{R}^{2n})$ está incluído en M_k y $C_o^{oo}(\mathbb{R}^{2n})$ está incluído en M .

Además, todas las inclusiones son densas, considerando en el caso de $H_\rho^{m,s,k}$, $H_\rho^{m,s}$, $S_\rho^{m,s,k}$ y $S_\rho^{m,s}$, la topología inducida por el correspondiente espacio con orden $m' > m$.

Demostración:

Se verá primero que $C_o^{oo}(\mathbb{R}^{2n})$ es un subespacio denso de $H_\rho^{m,s,k}$, cuando a este espacio se da la topología de $H_\rho^{m',s,k}$, con $m' > m$.

Para ver que $C_o^{oo}(\mathbb{R}^{2n})$ está contenido en $H_\rho^{m,s,k}$, basta demostrar que si $\varphi \in C_o^{oo}(\mathbb{R}^{2n})$, entonces $\varphi(\ ,\xi) \in C^o(\mathbb{R}^n_\xi \ ; H^s)$ y $\sup_{\xi \in \mathbb{R}^n} \| \varphi(\ ,\xi) \|_{H^s} \leq$ $\leq C(1 + |\xi|)^m$, pues las derivadas $D_\xi^\alpha \varphi(\ ,\xi)$, se tratan en igual forma.

Como $\varphi(x, \xi)$ tiene soporte compacto en cada variable, uniformemente respecto de la otra, para ξ_0 fijo, $\varphi(x, \xi_0) \in H^s$. Además, dado $K \in \mathbb{N}$, es

$$\|\varphi(\ , \xi_0+h) - (\ , \xi_0)\|^2_{H^s} =$$

$$= C \left\| (1+|\theta|^2)^{s/2 - K} \ F_x \left\{ (1-\Delta_x)^K \left[\varphi(x, \xi_0+h) - \right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left. - \varphi(x, \xi_0)\right] \right\} (\theta) \right\|^2_{L^2_\theta}$$

Para K adecuado, esto puede acotarse con

$$C \sup_{(x,\xi) \in \operatorname{sop}(\varphi)} \left| (1-\Delta_x)^K \left[\varphi(x, \xi+h) - \varphi(x, \xi)\right] \right|$$

Como cada derivada de φ es uniformemente continua, se deduce que $\varphi(\ , \xi) \in C^0(\mathbb{R}^n_\xi ; H^s)$.

El hecho de que $\sup_{\xi \in \mathbb{R}^n} \|\varphi(\ , \xi)\|_{H^s} \leq C(1+|\xi|)^m$, es inmediato por ser $\|\varphi(\ , \xi)\|_{H^s}$ una función de soporte compacto.

Se demuestra ahora la densidad de la inclusión:

Para ello, se hacen primero ciertas consideraciones, que permiten simplificar los cálculos.

Sea $L^s = F(H^s)$

Es decir,

$$L^s = \left\{ f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{C} \text{ medibles } / \ (1+|\theta|^2)^{s/2} f \in L^2 \right\}$$

L^s resulta un espacio de Hilbert definiendo

$$(f, g) = \int (1+|\theta|^2)^s \ f(\theta) \ \bar{g}(\theta) \ d\theta$$

La aplicación $F : H^s \longrightarrow L^s$ es entonces un homeomorfismo isométrico.

A partir de esto, si $L^{m,s}_\rho = F_x(H^{m,s}_\rho)$, se deduce que $a \in L^{m,s}_\rho$ si y sólo si $a(\ , \xi) : \mathbb{R}^n \longrightarrow L^s$ y para cada $k \geq 0$, a es continua y admite derivadas continuas de órdenes $\leq k$, como función de $\mathbb{R}^n$ en L^{s-k}

Sea
$$\rho^k_{m,s}(a) = \sup_{\substack{\xi \in \mathbb{R}^n \\ |\alpha| \leq k}} \frac{\| D^\alpha_\xi a(\ , \xi) \|_{L^{s-|\alpha|}}}{(1+|\xi|)^{m-\rho|\alpha|}}$$

Considerando en $L^{m,s}_\rho$ la topología inducida por estas seminormas, la aplicación $F_x : H^{m,s}_\rho \longrightarrow L^{m,s}_\rho$ es un homeomorfismo.

Luego, si se supiera que $C_0^{oo}(\mathbb{R}^{2n})$ es denso en $L_\varsigma^{m,s}$ respecto de la topología inducida por $L_\varsigma^{m',s}$, $m'>m$, mediante la transformación F_x, se tendría que $S(\mathbb{R}^{2n})$ es denso en $H_\varsigma^{m,s}$, respecto de la topología de $H_\varsigma^{m',s}$, $m'>m$.

Como ya se sabe que $C_0^{oo}(\mathbb{R}^{2n})$ es denso en $S(\mathbb{R}^{2n})$, se concluiría el resultado.

En definitiva, el problema se redujo a probar la densidad de $C_0^{oo}(\mathbb{R}^{2n})$ en $L_\varsigma^{m,s}$, con la topología inducida por $L_\varsigma^{m',s}$, $m'>m$.

Esto se hará truncando en las variables θ, ξ y regularizando en la variable θ.

i). Truncando en ξ, va a probarse que en $L_\varsigma^{m,s}$ con la topología inducida por $L_\varsigma^{m',s}$, $m'>m$, es denso $\mathcal{L}_\varsigma^{m,s} = \{ a(\ ,\xi) \in L_\varsigma^{m,s}$ / / tiene soporte compacto en ξ, uniformemente en la otra variable $\}$.

Sea $\chi \in C_0^{oo}(\mathbb{R}^n)$ / $\chi(\xi) = \begin{cases} 1 & |\xi| \leq 1 \\ 0 & |\xi| > 2 \end{cases}$

Si $a \in L_\varsigma^{m,s}$, $0 < \varepsilon \leq 1$, se considera la función $a_\varepsilon(\ ,\xi) =$ $= a(\ ,\xi).\chi(\varepsilon\xi)$, que pertenece a $\mathcal{L}_\varsigma^{m,s}$.

Quiere probarse que $a_\varepsilon(\ ,\xi) \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} a(\ ,\xi)$, en $L_\varsigma^{m,s}$

Dada $\alpha \in \mathbb{N}^n$, es válida la fórmula de Leibniz:

$$D_\xi^\alpha \left[(a_\varepsilon - a)(\ ,\xi)\right] = \left[\chi(\varepsilon\xi) - 1\right] D_\xi^\alpha a(\ ,\xi) + \sum_{0<\gamma\leq\alpha} c_\gamma \varepsilon^{|\gamma|} D_\xi^\gamma \chi(\varepsilon\xi)\, D_\xi^{\alpha-\gamma} a(\ ,\xi)$$. Luego, es

$$\left\| D_\xi^\alpha \left[(a_\varepsilon - a)(\ ,\xi)\right] \right\|_{L^{s-|\alpha|}} \leq \left|1 - \chi(\varepsilon\xi)\right| \left\| D_\xi^\alpha a(\ ,\xi) \right\|_{L^{s-|\alpha|}} + C \sum_{0<\gamma\leq\alpha} \varepsilon^{|\gamma|} |D_\xi^\gamma \chi(\varepsilon\xi)| \left\| D_\xi^{\alpha-\gamma} a(\ ,\xi) \right\|_{L^{s-|\alpha-\gamma|}}$$

Se estima cada término:

$$\left|1 - \chi(\varepsilon\xi)\right| \left\| D_\xi^\alpha a(\ ,\xi) \right\|_{L^{s-|\alpha|}} \leq C \sup_{|\xi| \geq 2/\varepsilon} \left[(1+|\xi|)^{m-m'}\right] \cdot \rho_{m,s}^k(a)\ (1+|\xi|)^{m'-\varsigma|\alpha|}$$

Fijado $0<\gamma\leq\alpha$, en el sop$(D_\xi^\gamma \chi(\varepsilon\xi))$, es $1\leq\varepsilon|\xi|\leq 2$;

luego,

$$\varepsilon^{|\gamma|}\left|D_\xi^\gamma \chi(\varepsilon\xi)\right| \left\| D_\xi^{\alpha-\gamma} a(\ ,\xi)\right\|_{L^{s-|\alpha|}} \leq$$

$$\leq C \sup_{\xi\in \mathrm{sop}(D_\xi^\gamma \chi(\varepsilon\xi))} \left\{ \varepsilon^{|\gamma|} \rho_{m,s}^k(a) \quad (1+|\xi|)^{m'-\rho|\alpha|} (1+|\xi|)^{m-m'+\rho|\gamma|}\right\}.$$

En el sop $(D_\xi^\gamma \chi(\varepsilon\xi))$, es $\varepsilon^{|\gamma|}(1+|\xi|)^{\rho|\gamma|} \leq (\varepsilon+\varepsilon|\xi|)^{|\gamma|} \leq 3^{|\gamma|}$ y

también $(1+|\xi|)\geq 1+1/\varepsilon$, de donde se deduce que

$$(1+|\xi|)^{m-m'} \leq (1+1/\varepsilon)^{m-m'} = \left(\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}\right)^{m'-m}$$

En total, se ha obtenido:

$$\rho_{m',s}^k(a_\varepsilon - a) \leq C\,\rho_{m,s}^k(a)\left[\sup_{|\xi|\geq 2/\varepsilon} (1+|\xi|)^{m-m'} + \left(\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}\right)^{m'-m}\right]$$

y es claro que esto último tiende a cero cuando $\varepsilon \longrightarrow 0$.

ii). Según el lema 2.1 c), basta ahora aproximar las funciones de $\overset{\circ}{L}{}_\rho^{m,s}$ por funciones de $C_0^{\infty}(\mathbb{R}^{2n})$, respecto de la topología de la convergencia uniforme en ξ de $D_\xi^\alpha a(\ ,\xi)$, en la norma de $L^{s-|\alpha|}$, para cada α.

Con la misma función χ usada antes, se trunca en θ:

$$a_\varepsilon(\ ,\xi) = a(\ ,\xi)\,.\,\chi(\varepsilon\theta)$$

No hay dificultad en comprobar que la operación de truncar en la variable θ, es una operación continua de L^t en L^t, $\forall$ t, con norma independiente de ε; luego, $D_\xi^\alpha a_\varepsilon(\ ,\xi) = D_\xi^\alpha a(\ ,\xi)\ \chi(\varepsilon\theta)$.

Por lo tanto, es suficiente probar que $a_\varepsilon(\ ,\xi) \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} a(\ ,\xi)$ en L^s, uniformemente en ξ.

Fijado $\xi\in\mathbb{R}^n$, es claro que $a_\varepsilon(\ ,\xi) \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} a(\ ,\xi)$ en L^s.

Luego, para concluir que la convergencia es uniforme, por el teorema de Ascoli, es suficiente probar que la familia $\left\{ a_\varepsilon(\ ,\xi)\right\}_{0<\varepsilon\leq 1}$ es equicontinua de $\mathbb{R}_\xi^n$ en L^s:

Pero como antes se observó que truncar es uniformemente continuo respecto de ε, de L^s en L^s, existe $C = C_\chi > 0$, tal que $\forall\ 0<\varepsilon\leq 1$, es:

$$\left\| a_\varepsilon(\ ,\xi+h) - a_\varepsilon(\ ,\xi)\right\|_{L^s} \leq$$

$\leqslant C_\chi \| a(\cdot ,\xi+h) - a(\cdot ,\xi) \|_{L^s}$

Y ésto último , $\underset{h\to 0}{\longrightarrow} 0$, uniformemente en ξ .

Finalmente, se va a aproximar una función $a(\theta,\xi) \in \overset{\circ}{L}{}^{m,s}_{\rho}$ con soporte compacto en ambas variables, por una función de $C^{\infty}_{0}(\mathbb{R}^{2n})$:

Esto se hará regularizando en la variable θ .

Dada $\psi \in C^{\infty}_{0}(\mathbb{R}^n)$ / $0 \leqslant \psi$, $\int \psi(\theta)\, d\theta = 1$, se construye una identidad aproximada : $\psi_\varepsilon(\theta) = \frac{1}{\varepsilon^n}\psi(\theta/\varepsilon)$, $0<\varepsilon\leqslant 1$.

Sea $a_\varepsilon(\cdot ,\xi) = a(\cdot ,\xi) *_\theta \psi_\varepsilon$

Ambos factores tienen soporte compacto en todas sus variables; luego $a_\varepsilon(\theta,$ es una función de soporte compacto; además puede escribirse:

$$a_\varepsilon(\theta,\xi) = \int e^{-i\tau\theta}\, \hat{a}(\tau,\xi)\, \hat{\psi}_\varepsilon(\tau)\, d\tau$$

Fijado ξ , $a_\varepsilon \in C^{\infty}_{0}(\mathbb{R}^n_\theta)$; como se demuestra sin dificultad que regularizar es una aplicación continua de L^s en $C^{\infty}_{0}(\mathbb{R}^n_\theta)$, resulta que $a_\varepsilon \in C^{\infty}_{0}(\mathbb{R}^{2n})$.

También, la regularización es continua de L^s en L^s con norma independiente de ε ; luego, para comprobar que $a_\varepsilon(\cdot ,\xi) \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} a(\cdot ,\xi)$ en $L^{m,s}_{\rho}$, bastará ver que $a_\varepsilon(\cdot ,\xi) \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} a(\cdot ,\xi)$ en L^s , uniformemente en ξ .

Esto se comprueba de la misma manera que en el caso de la truncación en ξ , usando el teorema de Ascoli.

Queda completa así la demostración de la inclusión densa, en el espacio $L^{m,s}_{\rho}$

Cuando se trabaja con espacios como $H^{m,s,k}_{\rho}$, en los cuales se limita el número de derivadas en la variable ξ , la técnica es semejante, aunque resulta conveniente hacer la siguiente observación:

Transformando Fourier en la variable x , el problema de demostrar la densidad, se reduce al espacio que se indica $L^{m,s,k}_{\rho}$. El mismo razonamiento, permite obtener idénticos resultados, hasta el último paso; es decir, hasta la regularización en θ .

Allí se tiene una función $a(\theta,\xi) \in L^{m,s,k}_{\rho}$, con soporte compacto en ambas variables; al regularizar en Θ, fijado ξ, se obtiene una función de $C_0^{\infty}(\mathbb{R}^n_\Theta)$; pero al considerar la regularización en ambas variables a la vez, sólo puede asegurarse que pertenezca a $C_0^k(\mathbb{R}^{2n})$. Esto obliga a modificar el razonamiento que se empleó antes:

Sea $b(\Theta,\xi) \in C_0^k(\mathbb{R}^{2n})$, la regularización hecha en Θ. Para volver a $H_\rho^{m,s,k}$, hay que antitransformar $b(\Theta,\xi)$ en la variable Θ.

Sea

$$c(x,\xi) = \int e^{-i\Theta x}\, b(\Theta,\xi)\, d\Theta .$$

Usando las propiedades de la función b, no hay dificultad en comprobar que $c \in C_0^k(\mathbb{R}^n_\xi ; S_x)$; es decir, c es una función de $\mathbb{R}^n_\xi$ en S_x con soporte compacto en ξ, que es continua con derivadas continuas de órdenes $\leq k$.

Con la topología inducida en $C_0^k(\mathbb{R}^n_\xi ; S_x)$ por las seminormas

$$s_{r,\ell}(a) = \sup_{\substack{|\alpha|\leq k\\ |\beta|\leq r\\ x,\xi\in\mathbb{R}^n}} \left| (1+|x|^2)^{\ell/2}\, D_\xi^\alpha D_x^\beta a(x,\xi) \right|$$

$$r,\ell \in \mathbb{N}$$

resulta que $C_0^k(\mathbb{R}^n_\xi ; S_x)$ está contínuamente incluído en $H_\rho^{m,s,k}$.

Pero truncando en la variable x, se prueba que $C_0^k(\mathbb{R}^{2n})$ es denso en $C_0^k(\mathbb{R}^n_\xi ; S_x)$.

Esto concluye el resultado, pues los pasos anteriores habían permitido probar que $C_0^k(\mathbb{R}^{2n})$ es denso en $L_\rho^{m,s,k}$ con la topología inducida por $L_\rho^{m',s,k}$, $m'>m$. #

<u>Observación 2.3</u>:

Dada $a \in H_\rho^{m,s,k}$, la sucesión de $C_0^k(\mathbb{R}^{2n})$ construída, que la aproxima en la topología de $H_\rho^{m',s,k}$, $m'>m$, está acotada respecto de la topología de $H_\rho^{m,s,k}$.

Como la topología con orden $m'>m$ sólo aparece cuando se aproxima $F_x(a)$ en $L_\rho^{m,s,k}$ por funciones de $\overset{\circ}{L}{}_\rho^{m,s,k}$, es suficiente comprobar que la truncación en la variable ξ en $F_x(a)$, tiene esa propiedad.

Se usan las acotaciones obtenidas en el teorema 2.2, con $F_x(a) = b$.
Al truncar en ξ, dada $|\alpha| \leq k$, es:

$$\left\| D_\xi^\alpha \left[b(\ ,\xi).\chi(\varepsilon\xi) \right] \right\|_{L^{s-|\alpha|}} \leq \left|\chi(\varepsilon\xi)\right| \left\| D_\xi^\alpha b(\ ,\xi) \right\|_{L^{s-|\alpha|}} +$$
$$+ \sum_{0<\gamma\leq\alpha} c_\gamma \varepsilon^{|\gamma|} \left| D_\xi^\gamma \chi(\varepsilon\xi) \right| \left\| D_\xi^{\alpha-\gamma} b(\ ,\xi) \right\|_{L^{s-|\alpha-\gamma|}} \leq$$
$$\leq C\ (1+|\xi|)^{m-\rho|\alpha|} + C \sum_{0<\gamma\leq\alpha} \left| D_\xi^\gamma \chi(\varepsilon\xi) \right| \varepsilon^{|\gamma|} (1+|\xi|)^{\rho|\gamma|} (1+|\xi|)^{m-\rho|\alpha|}.$$

Según se observó, en el sop $(D_\xi^\gamma \chi(\varepsilon\xi))$, $|\gamma|>0$, es

$$\varepsilon^{|\gamma|}(1+|\xi|)^{\rho|\gamma|} \leq C \quad , \quad \text{para cierta } C>0 .$$

Luego, se comprueba la acotación en $L_\rho^{m,s,k}$ de la truncación en la variab

Lo que acaba de hacerse en $H_\rho^{m,s,k}$, puede repetirse, con las modificacione

obvias, en los espacios $S_\rho^{m,s,k}$, $H_\rho^{m,s}$ y $S_\rho^{m,s}$ #

Se hablará ahora de desarrollos asintóticos en los espacios $H_\rho^{m,s,k}$,
$H_\rho^{m,s}$, $S_\rho^{m,s,k}$ y $S_\rho^{m,s}$.

Para ello, conviene introducir la siguiente

<u>Definición 2.4</u> :

$$H^{-\infty,s,k} = \bigcap_{m\in\mathbb{R}} H_\rho^{m,s,k} \qquad S^{-\infty,s,k} = \bigcap_{m\in\mathbb{R}} S_\rho^{m,s,k}$$
$$H^{-\infty,s} = \bigcap_{m\in\mathbb{R}} H_\rho^{m,s} \qquad S^{-\infty,s} = \bigcap_{m\in\mathbb{R}} S_\rho^{m,s}$$

<u>Teorema 2.3</u> :

Dadas funciones $a_j \in H_\rho^{m_j,s}$, $j\in\mathbb{N}$, $m_j \searrow -\infty$, existe
$a \in H_\rho^{m_0,s}$ tal que para cada $N\geq 1$, es :

$$a - \sum_{j<N} a_j \in H_\rho^{m_N,s}.$$

<u>Demostración</u> :

Se considera $\varphi\in C^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ cumpliendo

$$0\leq \varphi(\xi)\leq 1 \quad , \quad \forall\, \xi\in\mathbb{R}^n$$
$$\varphi(\xi) = \begin{cases} 0 & |\xi|\leq 1 \\ 1 & |\xi|\geq 2 \end{cases}$$

Dado $0 < \varepsilon_j \leq 1$, que luego se elegirá convenientemente, sea

$$a_j^\bullet(\ ,\xi) = a_j(\ ,\xi) \cdot \varphi(\varepsilon_j \xi) \ .$$

La idea, es tomar ε_j de tal manera que la serie $\sum_j a_j^\bullet$ converja en $A(\mathbb{R}^n_\xi ; H^s)$ y que su suma pertenezca a $H^{m_0,s}_\rho$.

No hay dificultad en comprobar que $a_j^\bullet \in A(\mathbb{R}^n_\xi ; H^s)$.

Además, es:

$$D^\alpha_\xi a_j^\bullet(\ ,\xi) = \sum_{0\leq\gamma\leq\alpha} c_\gamma \varepsilon_j^{|\gamma|} D^\gamma_\xi \varphi(\varepsilon_j \xi) D^{\alpha-\gamma}_\xi a(\ ,\xi)$$

Por la manera en que se definió φ , para $|\gamma|>0$, el sop$(D^\gamma_\xi \varphi(\varepsilon_j \xi)) \subset$ $\subset \{ \varepsilon_j |\xi| \leq 2 \}$.

Luego,

$$\left| \varepsilon_j^{|\gamma|} D^\gamma_\xi \varphi(\varepsilon_j \xi) \right| \leq c_\gamma (1+|\xi|)^{-|\gamma|}$$

Esta acotación también vale para $\gamma = 0$.

Por otra parte, como la función $a_j^\bullet(\ ,\xi)$ tiene soporte en $\{ \varepsilon_j |\xi| \geq 1 \}$, allí es $(1+|\xi|)^{-1} \leq (1 + 1/\varepsilon_j)^{-1}$.

Aplicando todo esto a la expresión de $D^\alpha_\xi a_j^\bullet(\ ,\xi)$, se obtiene:

$$\left\| D^\alpha_\xi a_j^\bullet(\ ,\xi) \right\|_{H^{s-|\alpha|}} \leq \sum_{0\leq\gamma\leq\alpha} c_{\gamma,j} (1+|\xi|)^{m_j - \rho|\alpha-\gamma| - |\gamma|} \leq$$

$$\leq c_{\alpha,j} (1 + 1/\varepsilon_j)^{-1} (1+|\xi|)^{m_j + 1 - \rho|\alpha|}$$

Para $j \geq 1$ fijo, se elige ahora ε_j de tal manera que

$$\sup_{|\alpha| \leq j} c_{\alpha,j} \cdot (1 + 1/\varepsilon_j)^{-1} \text{ sea } \leq 1/2^j \quad \text{y} \quad \varepsilon_j \xrightarrow[j\to\infty]{} 0$$

Como $\varepsilon_j \xrightarrow[j\to\infty]{} 0$, si ξ varía en un compacto de $\mathbb{R}^n$, la serie $\sum_j a_j^\bullet$ tiene sólo un número finito de términos no nulos; luego es claro que converge en $A(\mathbb{R}^n_\xi ; H^s)$, hacia una función a .

Debe verse que $a \in H^{m_0,s}_\rho$ y que dado $N \geq 1$,

$$a - \sum_{j<N} a_j \in H^{m_N,s}_\rho$$

Dados $M \geq N \geq 1$, es :

$$a - \sum_{j<N} a_j = \sum_{j<N} (a_j^{\bullet} - a_j) + \sum_{j=N}^{M} a_j^{\bullet} + \sum_{j\geq M+1} a_j^{\bullet}$$

Como $a_j^{\bullet}(\ ,\xi) = a_j(\ ,\xi)$ para $|\xi| > 2/\varepsilon_j$, se comprueba que

$$a_j^{\bullet} - a_j \in H^{-\infty,s} .$$

Por lo tanto, el primer término pertenece a $H^{-\infty,s}$.

En cuanto al segundo:

$$\Big\| D_\xi^\alpha \sum_{j=N}^{M} a_j^{\bullet}(\ ,\xi) \Big\|_{H^{s-|\alpha|}} \leq \sum_{j=N}^{M} C_{\alpha,j} \quad (1+|\xi|)^{m_j - \rho|\alpha|} \leq$$

$$\leq C \ (1+|\xi|)^{m_N - \rho|\alpha|}$$

Para acotar el último término, se elige $M \geq N$ tal que $m_{M+1} + 1 \leq m_N$.

Fijado α , el caso que requiere mayor análisis, es $|\alpha| > M+1$.

Si ésta es la situación, se separan en la sumatoria los primeros términos, obteniéndose:

$$\sum_{j=M+1}^{|\alpha|-1} a_j^{\bullet} + \sum_{j\geq|\alpha|} a_j^{\bullet}$$

Luego,

$$\Big\| D_\xi^\alpha \sum_{j\geq M+1} a_j^{\bullet} \Big\|_{H^{s-|\alpha|}} \leq \sum_{j=M+1}^{|\alpha|} C_{\alpha,j} \ (1+|\xi|)^{m_j - \rho|\alpha|} +$$

$$+ \sum_{j\geq|\alpha|} 1/2^j \quad (1+|\xi|)^{m_j+1-\rho|\alpha|} \leq C \ (1+|\xi|)^{m_{M+1}-\rho|\alpha|} +$$

$$+ (1+|\xi|)^{m_{M+1}+1-\rho|\alpha|} \leq C \ (1+|\xi|)^{m_N - \rho|\alpha|}$$

Esto muestra que $a - \sum_{j<N} a_j \in H_\rho^{m_N,s}$, $\forall \ N \geq 1$.

De aquí se deduce además, que $a \in H_\rho^{m_0,s}$.

\#

Observación 2.4 :

Esta demostración sigue las mismas líneas del caso de símbolos escalares. (Ver [6]).

Se aplica con las modificaciones obvias, a los otros espacios

$$H_\rho^{m,s,k} \quad , \quad S_\rho^{m,s,k} \quad y \quad S_\rho^{m,s}$$

En las condiciones del teorema, $\sum_j a_j$ se llama desarrollo asintótico y la función a se dice que es una suma del desarrollo. Esto suele indicarse como

$$a \sim \sum_j a_j$$

Es claro que la suma de un desarrollo asintótico está determinado módulo $H^{-\infty,s}$, en el caso de trabajar en $H^{m_j,s}_\rho$.

Se estudia ahora el producto de funciones en $H^{m,s,k}_\rho$ por símbolos en la clase $S^{m_1}_\rho$.

Teorema 2.4 :
Dados $a \in H^{m,s,k}_\rho$, $b \in S^{m_1}_\rho$, la función $a.b = a(\ ,\xi).b(\ ,\xi)$, que para cada valor de ξ es el producto de la distribución $a(\ ,\xi)$ por la función indefinidamente derivable $b(x,\xi)$, pertenece a $H^{m+m_1,s,k}_\rho$.

Además, la aplicación bilineal

$$\begin{array}{ccc} H^{m,s,k}_\rho \times S^{m_1}_\rho & \longrightarrow & H^{m+m_1,s,k}_\rho \\ (a\ ,\ b) & \longrightarrow & a.b \end{array}$$

es continua en ambas variables.

Demostración:
Fijado $\xi \in \mathbb{R}^n$, el teorema esbozado en 1. b). , muestra que

$$a(\ ,\xi).\ b(\ ,\xi) \in H^s$$

Además se tiene la acotación

$$\| a(\ ,\xi)\ b(\ ,\xi) \|_{H^s} \leq C \sup_{\substack{x \in \mathbb{R}^n \\ |\alpha| \leq [|s|]+1}} \left| D_x^\alpha\ b(x,\xi) \right| \, \| a(\ ,\xi) \|_{H^s}$$

Quiere verse que $a.b \in A^k(\mathbb{R}^n_\xi\ ;\ H^s)$.

Se comprueba primero la continuidad:

$$\| a(\ ,\xi+h)\ .\ b(\ ,\xi+h) - a(\ ,\xi)\ .\ b(\ ,\xi) \|_{H^s} \leq$$

$$\leq \| a(\ ,\xi+h) \left[b(\ ,\xi+h) - b(\ ,\xi) \right] \|_{H^s} +$$

$$+ \| \left[a(\ ,\xi+h) - a(\ ,\xi) \right] .\ b(\ ,\xi) \|_{H^s}$$

Fijados $x \in \mathbb{R}^n$, $|\alpha| \leq [|s|]+1$, puede acotarse, con el teorema del valor medio:

$$\left| D_x^\alpha b(x, \xi+h) - D_x^\alpha b(x, \xi) \right| \leq \sum_{j=1}^{n} \left| \frac{\partial}{\partial \xi_j} D_x^\alpha b(x, \xi+th) \right| |h_j| ,$$

para cierto $0 < t < 1$.

Como $b \in S_\rho^{m_1}$, $\left| \frac{\partial}{\partial \xi_j} D_x^\alpha b(x, \xi+th) \right| \leq C (1 + |\xi+th|)^{m_1-\rho} \leq$

$\leq C (1+|\xi|)^{m_1-\rho}$, independientemente de $|\alpha| \leq k$, $x \in \mathbb{R}^n$, t , $|h| \leq 1$

Luego, el primer término se mayora con:

$$C (1+|\xi|)^{m+m_1-\rho} |h| \xrightarrow[h \to 0]{} 0 , \text{ fijado } \xi .$$

En cuanto al otro término:

$$\left\| \left[a(\ , \xi+h) - a(\ , \xi) \right] . b(\ , \xi) \right\|_{H^s} \leq C (1+|\xi|)^{m_1} .$$

$$. \left\| a(\ , \xi+h) - a(\ , \xi) \right\|_{H^s} \xrightarrow[h \to 0]{} 0 , \text{ fijado } \xi \in \mathbb{R}^n , \text{ pues}$$

ya se sabe que $a(\ , \xi)$ es continua de $\mathbb{R}^n_\xi$ en H^s .

Se probará ahora que para cada α , con $|\alpha| \leq k$, es:

$$D_\xi^\alpha \left[a(\ , \xi) . b(\ , \xi) \right] = \sum_{\gamma \leq \alpha} \binom{\alpha}{\gamma} D_\xi^\gamma a(\ , \xi) . D_\xi^{\alpha-\gamma} b(\ , \xi) , \text{ en}$$

el sentido de $H^{s-|\alpha|}$;

Esto va a hacerse por inducción sobre $|\alpha|$;

Si $|\alpha| = 1$, $D_\xi^\alpha = \frac{\partial}{\partial \xi_j}$, para cierto $1 \leq j \leq n$.

$$a(\ , \xi+h) \, b(\ , \xi+h) - a(\ , \xi) \, b(\ , \xi) =$$

$$= a(\ , \xi+h) \left[b(\ , \xi+h) - b(\ , \xi) \right] +$$

$$+ \left[a(\ , \xi+h) - a(\ , \ ) \right] b(\ , \xi) , \quad \text{donde } h = (0,\dots,h_j,\dots$$

Luego, es:

$$\left\| \frac{a(\ , \xi+h) \, b(\ , \xi+h) - a(\ , \xi) \, b(\ , \xi)}{h_j} - \frac{\partial}{\partial \xi_j} a(\ , \xi) . b(\ , \xi) \right.$$

$$\left. - a(\ , \xi) . \frac{\partial}{\partial \xi_j} b(\ , \xi) \right\|_{H^{s-1}} \leq$$

$$\leq \left\| a(\ , \xi+h) . \left[\frac{b(\ , \xi+h) - b(\ , \xi)}{h_j} - \frac{\partial}{\partial \xi_j} b(\ , \xi) \right] \right\|_{H^{s-1}} +$$

$$+ \left\| \left[\frac{a(\ , \xi+h) - a(\ , \xi)}{h_j} - \frac{\partial}{\partial \xi_j} a(\ , \xi) \right] . b(\ , \xi) \right\|_{H^{s-1}} +$$

$$+ \left\| \left[a(\ , \xi+h) - a(\ , \xi) \right] . \frac{\partial}{\partial \xi_j} b(\ , \xi) \right\|_{H^{s-1}}$$

Razonando como antes se prueba sin dificultad que el segundo término y el tercero $\xrightarrow[h \to 0]{} 0$.

En cuanto al primero:

Fijados $x \in \mathbb{R}^n$, $|\alpha| \leq [|s-1|] + 1$

$$\frac{D_x^\alpha b(\ ,\xi+h) - D_x^\alpha b(\ ,\xi)}{h_j} - D_x^\alpha \frac{\partial}{\partial \xi_j} b(\ ,\xi) =$$

$$= D_x^\alpha \frac{\partial}{\partial \xi_j} b(\ ,\xi+th) - D_x^\alpha \frac{\partial}{\partial \xi_j} b(\ ,\xi) \text{ , para cierto } 0 < t < 1 .$$

Si se vuelve a aplicar el teorema del valor medio, esto puede escribirse como:

$$D_x^\alpha \frac{\partial^2}{\partial \xi_j^2} b(\ ,\xi+\theta h) \cdot h_j$$

Luego, para $|h| \leq 1$, el primer término se acota con:

$$C \ (1+|\xi|)^{m+m_1-2\rho} |h_j| \xrightarrow[h \to 0]{} 0$$

Además, como antes resulta que $\frac{\partial a}{\partial \xi_j}(\ ,\xi) b(\ ,\xi) + a(\ ,\xi) \frac{\partial b}{\partial \xi_j}(\ ,\xi)$

es una función continua de $\mathbb{R}^n_\xi$ en H^{s-1} .

No hay dificultad en comprobar el paso inductivo .

Se ha probado entonces, que $a.b \in A^k(\mathbb{R}^n_\xi \ ; H^s)$.

Si ahora $|\alpha| \leq k$, es :

$$\| D_\xi^\alpha (a.b) (\ ,\xi) \|_{H^{s-|\alpha|}} \leq \sum_{\gamma \leq \alpha} C_\gamma \| D_\xi^\gamma a(\ ,\xi) \|_{H^{s-|\gamma|}} \ .$$

$$\cdot \sup_{\substack{x \in \mathbb{R}^n \\ |\beta| \leq [|s-|\gamma||]+1}} \left| D_\xi^{\alpha-\gamma} D_x^\beta b(x,\xi) \right| \leq$$

$$\leq C \ P^k_{m,s}(a) \ \| b \|_r \sum_{\gamma \leq \alpha} (1+|\xi|)^{m-\rho|\gamma|} (1+|\xi|)^{m_1-\rho|\alpha-\gamma|}$$

donde $\| \ \|_r$ indica una seminorma de la familia que define la topología de $S^{m_1}_\rho$.

Esta acotación muestra que efectivamente $a.b \in H^{m+m_1,s,k}_\rho$ y además, comos:

$$P^{k}_{m+m_1, s}(a.b) \leq C\, P^{k}_{m,s}(a)\ \|b\|_r$$

se deduce la continuidad en los espacios mencionados de la aplicación

$$(a\ ,\ b) \longrightarrow a.b \quad \#$$

Observación 2.5 :

Valen resultados análogos en los otros espacios de símbolos.

3. LAS CLASES DE OPERADORES

Lo que primero se intenta, es darle sentido a la integral que define un operador seudodiferencial, en el caso en que su símbolo pertenezca a alguna de las clases $E_\rho^{m,s,k}$, $E_\rho^{m,s}$, $S_\rho^{m,s,k}$ o $S_\rho^{m,s}$.

Según el lema 2.1, bastará poder hacerlo en $H^{m,s,0}$.

Lema 3.1 :

a). Fijado $\xi \in \mathbb{R}^n$, la aplicación $g \longrightarrow e^{-ix\xi}. g$, define un operador continuo $E_\xi : H^s \longrightarrow H^s$, que cumple

i). $\| E_\xi \| \leq 2^{|s|/2} \; (1 + |\xi|^2)^{|s|/2}$

ii). Para cada $g \in H^s$, la aplicación

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n_\xi & \longrightarrow & H^s \\ \xi & \longrightarrow & E_\xi \, g \end{array} \quad \text{es continua .}$$

b). Si $a \in H^{m,s,0}$, $E_\xi a(\, , \xi) \in H^{m+|s|,s,0}$ y además existe una constante $C > 0$, independiente de ξ , tal que

$$P^0_{m+|s|,s} \, (E_\xi a(\, , \xi)) \leq C \;\; P^0_{m,s} \, (a(\, , \xi))$$

Demostración :

a). i). Como la función $e^{-ix\xi}$ tiene todas las derivadas acotadas en x para ξ fijo, si $g \in H^s$, $e^{-ix\xi} \, g \in H^s$.

Además:

$$\| e^{-ix\xi} g \|_{H^s} = \| (1 + |\Theta|^2)^{s/2} \;\; F_x \left[e^{-ix\xi} \, g \right] \|_{L^2_\Theta} =$$

$$= \| (1 + |\Theta|^2)^{s/2} \;\; \hat{g} \, (\Theta - \xi) \|_{L^2_\Theta} .$$

Usando la desigualdad de Peetre, resulta:

$$\| E_\xi \, g \|_{H^s} \leq 2^{|s|/2} \;\; (1 + |\xi|^2)^{|s|/2} \;\; \| g \|_{H^s} .$$

ii). Se fija $g \in H^s$, $\xi_0 \in \mathbb{R}^n$.

Como $\| (E_\xi - E_{\xi_0}) \, g \|_{H^s} = \| E_{\xi_0} \, (E_{\xi - \xi_0} - 1) \;\; g \|_{H^s} \leq$

$\leq 2^{|s|/2} \;\; (1 + |\xi_0|^2)^{|s|/2} \; . \; \| (E_{\xi - \xi_0} - 1) \; g \|_{H^s}$, basta probar que la aplicación es continua en $\xi_0 = 0$.

Dada $\varphi \in C_0^{\infty}$, es :

$$\|E_\xi g - g\|_{H^s} \leq \|E_\xi(g-\varphi)\|_{H^s} + \|E_\xi\varphi - \varphi\|_{H^s} + \|\varphi - g\|_{H^s} \leq$$
$$\leq \left[2^{|s|/2}(1+|\xi|^2)^{|s|/2} + 1\right] \|g-\varphi\|_{H^s} + \|E_\xi\varphi - \varphi\|_{H^s}$$

Si $\xi \longrightarrow 0$, el primer término puede hacerse arbitrariamente pequeño, independientemente de ξ, usando la densidad de C_0^{∞} en H^s .

En cuanto al segundo término, fijada φ, es :

$$\|E_\xi\varphi - \varphi\|_{H^s} = \left\|(1+|\theta|^2)^{s/2}\left[\hat\varphi(\theta-\xi) - \hat\varphi(\theta)\right]\right\|_{L^2_\theta}$$

Para cada $\theta \in \mathbb{R}^n$, $\hat\varphi(\theta-\xi) \xrightarrow[\xi \to 0]{} \hat\varphi(\theta)$. Además, como $\hat\varphi \in S$,

$(1+|\theta|^2)^s\left[|\hat\varphi(\theta-\xi)|^2 + |\hat\varphi(\theta)|^2\right]$ puede acotarse con

$C(1+|\theta|^2)^{-k}$, $k > n/2$, independientemente de ξ en compactos.

Luego, puede aplicarse el teorema de convergencia mayorada de Lebesgue, resultando que $\|E_\xi\varphi - \varphi\|_{H^s} \xrightarrow[\xi \to 0]{} 0$.

Esto permite concluir que la aplicación es continua.

b). Dada $a \in H^{m,s,0}$, en la parte a) se ha probado que para $\xi \in \mathbb{R}^n$ fijo, $E_\xi a(\ ,\xi) \in H^s$. Quiere verse ahora la continuidad:

$$\|E_\xi a(\ ,\xi) - E_{\xi_0} a(\ ,\xi_0)\|_{H^s} \leq \|E_\xi a(\ ,\xi) - E_\xi a(\ ,\xi_0)\|_{H^s} +$$
$$+ \|E_\xi a(\ ,\xi_0) - E_{\xi_0} a(\ ,\xi_0)\|_{H^s}$$

Según lo visto en a), esto puede acotarse con :

$$2^{|s|/2}(1+|\xi|^2)^{|s|/2}\|a(\ ,\xi) - a(\ ,\xi_0)\|_{H^s} +$$
$$+ \|E_\xi a(\ ,\xi_0) - E_{\xi_0} a(\ ,\xi_0)\|_{H^s}$$

Como $a \in C^0(\mathbb{R}^n_\xi ; H^s)$, el primer término puede hacerse arbitrariamente pequeño, si ξ está cerca de ξ_0. En el segundo término ocurre lo mismo, por la continuidad de la aplicación $\xi \longrightarrow E_\xi a(\ ,\xi_0)$, fijado ξ_0 .

Luego, $E_\xi a(\ ,\xi) \in C^0(\mathbb{R}^n_\xi ; H^s)$.

Fijado $\xi \in \mathbb{R}^n$, según a), es:

$$\| E_\xi a(\ ,\xi) \|_{H^s} \leq 2^{|s|/2} (1+|\xi|^2)^{|s|/2} \| a(\ ,\xi)\|_{H^s} \leq$$
$$\leq C \ (1+|\xi|)^{m+|s|}$$

Lo cual muestra que $E_\xi a(\ ,\xi) \in H^{m+|s|,s,o}$ y que el operador

$$H^{m,s,o} \xrightarrow{E_\xi} H^{m+|s|,s,o}$$
$$a(\ ,\xi) \longrightarrow e^{-ix\xi} . a(\ ,\xi)$$

es continuo. #

Teorema 3.1 :

a). Dados $f \in S$, $a \in H^{m,s,o}$, la integral

$$A_a(f) = A(f) = \int e^{-ix\xi} a(\ ,\xi) \ \hat{f}(\xi) \ d\xi$$

existe como integral de Boohner .

b). La aplicación bilineal

$$H^{m,s,o} \times S \longrightarrow H^s$$
$$(a , f) \longrightarrow A_a(f)$$

es continua, en ambas variables.

c). La aplicación $f \longrightarrow A(f)$, puede extenderse a un operador acotado de $H^{m+|s|+r}$ en H^s , si $r > n/2$.

Demostración:

a). Para probar que la integral existe, bastará ver que la aplicación

$$\mathbb{R}^n \xrightarrow{\Phi} H^s$$
$$\xi \longrightarrow E_\xi a(\ ,\xi) . \hat{f}(\xi)$$

es fuertemente medible y que la función

$$g(\xi) = \| E_\xi a(\ ,\xi) . \hat{f}(\xi) \|_{H^s}$$

es integrable Lebesgue.

$\Phi(\xi)$ es una aplicación continua, pues fijado $\xi_o \in \mathbb{R}^n$, se tiene

$$\| \Phi(\xi) - \Phi(\xi_o) \|_{H^s} \leq \| E_\xi a(\ ,\xi) - E_{\xi_o} a(\ ,\xi_o) \|_{H^s} . |\hat{f}(\xi)| +$$
$$+ \| E_{\xi_o} a(\ ,\xi_o) \|_{H^s} \ |\hat{f}(\xi) - \hat{f}(\xi_o)| .$$

En el primer término se aplica la parte b) del lema 3.1 y en el segundo término se usa la continuidad de la función $\hat{f}$.

Luego, $\Phi(\xi)$ es continua y por lo tanto, fuertemente medible.

En cuanto a la función $g(\xi)$, según el lema 3.1, puede acotarse como: $g(\xi) \leq C \left| \hat{f}(\xi) \right| . (1+|\xi|)^{m+|s|}$, lo cual es integrable porque $\hat{f} \in$ $\in S$.

Se ha probado entonces que la integral existe.

b). Las acotaciones obtenidas en a), muestran la continuidad de esa forma bilineal:

En efecto, al existir la integral, puede tomarse norma H^s bajo el signo integral, teniéndose:

$$\| A_a(f) \|_{H^s} \leq \int \| E_\xi a(\, , \xi) \|_{H^s} \left| \hat{f}(\xi) \right| \, d\xi \leq$$

$$\leq C \; P^0_{m,s}(a) \int (1+|\xi|^2)^{|s|/2 + m/2} \left| \hat{f}(\xi) \right| \, d\xi \leq$$

$$\leq C \; P^0_{m,s}(a) \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \left| (1+|x|^2)^r \, (1-\Delta_x)^r \, f(x) \right| \quad , r > n/2$$

c). En b) se llegó a acotar la integral con

$$\| A_a(f) \|_{H^s} \leq C \; P^0_{m,s}(a) \; \| (1+|\xi|^2)^{|s|/2 + m/2} \left| \hat{f}(\xi) \right| \, d\xi \; .$$

Como $f \in S$, si $r > n/2$, aplicando la desigualdad de Schwarz, se tiene:

$$\| A_a(f) \|_{H^s} \leq C \quad P^0_{m,s}(a) \quad \| (1+|\xi|^2)^{|s|/2 + m/2 + r/2} \left| \hat{f}(\xi) \right| \|_{L^2}$$

De donde se concluye la extensión de A como operador acotado, a $H^{m+|s|+r}$, si $r > n/2$.
#

<u>Observación 3.1</u> :

Dado $\varepsilon > 0$ tal que $r - \varepsilon > n/2$, vale la estimación:

$$\| A_a(f) \|_{H^s} \leq C \; P^0_{m+\varepsilon, s}(a) \, . \, \| f \|_{H^{|s|+m+r}}$$

En efecto:

Al demostrar el teorema 3.1 se obtuvo:

$$\| A_a(f) \|_{H^s} \leq \int \| E_\xi a(\, , \xi) \|_{H^s} \left| \hat{f}(\xi) \right| \, d\xi$$

A partir de aquí, puede acotarse como :

$$\| A_a(f) \|_{H^s} = \int \frac{\| E_\xi a(\, , \xi) \|_{H^s}}{(1+|\xi|)^{m+|s|+\varepsilon}} \, . \, (1+|\xi|)^{m+|s|+\varepsilon} \, d\xi \leq$$

$$\leq C \; P^{o}_{m+\varepsilon,s}(a) \int (1+|\xi|)^{\varepsilon - r} (1+|\xi|^2)^{(m+|s|+r)/2} \, |\hat{f}(\xi)| \, d\xi$$

De donde resulta la estimación. #

Teorema 3.2 :

En las condiciones del teorema 3.1, la función $a(\ ,\xi)$ queda unívocamente determinada por el operador A.

Demostración :

Habrá que probar que si $A(f) = 0 \ \forall f \in S$, entonces $a(\ ,\xi) = 0$, entendiendo por ello que para cada $\xi \in \mathbb{R}^n$, la distribución $a(\ ,\xi)$ es nula.

Dada $\psi \in S \ / \ \hat{\psi} \in C_o^{\infty}$, $0 \leq \hat{\psi}$, $\int \hat{\psi} \, d\xi = 1$, para $\xi_o \in \mathbb{R}^n$ fijo, $0 < \varepsilon \leq 1$, se considera la identidad aproximada

$$\hat{\psi}_{\varepsilon}(\xi) = \frac{1}{\varepsilon^n} \hat{\psi}\left(\frac{\xi - \xi_o}{\varepsilon}\right) .$$

Dada $\varphi \in D$, la dualidad $(A\psi_{\varepsilon}, \varphi)$ entre los espacios H^s y H^{-s} puede escribirse, por propiedad de la integral de Boohner frente a los operadores lineales y acotados, como:

$$\int (e^{-ix\xi} a(\ ,\xi), \varphi) \, \hat{\psi}_{\varepsilon}(\xi) \, d\xi .$$

Al ser la aplicación $\xi \longrightarrow E_{\xi} a(\ ,\xi)$ continua de $\mathbb{R}^n$ en H^s, se deduce que la función $h_{\varphi}(\xi) = (E_{\xi} a(\ ,\xi), \varphi)$ es continua de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{C}$.

Como $\{\hat{\psi}_{\varepsilon}\}$ converge hacia δ_{ξ_o}, medida de Dirac concentrada en el punto ξ_o, en el sentido de las medidas, cuando $\varepsilon \to 0$, resulta que

$$(A(\psi_{\varepsilon}), \varphi) = \int h_{\varphi}(\xi) \, \hat{\psi}_{\varepsilon}(\xi) \, d\xi \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} h_{\varphi}(\xi_o)$$

Como se ha supuesto que $A(f) = 0 \ \forall f \in S$, es

$$h_{\varphi}(\xi_o) = 0 \quad \forall \varphi \in D .$$

En particular, si se toma $\varphi = \chi \, e^{ix\xi_o}$, para $\chi \in D$, se tiene:

$$h_{\varphi}(\xi_o) = (E_{\xi_o} a(\ ,\xi_o), E_{-\xi_o} \chi) =$$

$$= (a(\ ,\xi_o), \chi) = 0 \quad , \ \forall \chi \in D .$$

#

Definición 3.1 :

El operador $A(f) = \int e^{-ix\xi} a(\ ,\xi)\ \hat{f}(\xi)\ d\xi$, cuya definición se ha justificado en el teorema 3.1, se llama operador seudodiferencial de orden m y tipo ρ . La función $a(\ ,\xi)$, que queda unívocamente determinada por él, se denomina símbolo del operador y suele notarse $\sigma(A)$.

Observación 3.2 :

Como se indicó al principio, los mismos resultados se obtienen cuando el símbolo se toma en cualquiera de las clases $H_\rho^{m,s,k}$, $H_\rho^{m,s}$, $S_\rho^{m,s,k}$ o $S_\rho^{m,s}$.

Definición 3.2 :

Se introduce el espacio

$$\mathcal{H}_\rho^{m,s,k} = \left\{ \text{operadores seudodiferenciales} \ / \ \sigma(A) \in H_\rho^{m,s,k} \right\} .$$

Y con la definición obvia, se consideran los espacios

$$\mathcal{H}_\rho^{m,s} \ , \quad \mathcal{S}_\rho^{m,s,k} \ , \quad \mathcal{S}_\rho^{m,s} \ .$$

Cuando $k = 0$, se elimina el parámetro ρ .

Observación 3.3 :

De todo lo dicho se deduce que hay un isomorfismo

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{H}_\rho^{m,s,k} & \longrightarrow & H_\rho^{m,s,k} \\ A & \longrightarrow & \sigma(A) \end{array}$$

Esto permite inducir en $\mathcal{H}_\rho^{m,s,k}$ la estructura topológica del espacio de símbolos.

Lo mismo puede hacerse con cada uno de los espacios de operadores definidos. Las diferencias entre las distintas clases de operadores, se van a poner de manifiesto, sobre todo, cuando se estudien propiedades de composición .

Definición 3.3 :

De la misma manera que en el caso de los símbolos, se indicarán:

$$\mathcal{H}^{-\infty,s,k} = \bigcap_m \mathcal{H}_\rho^{m,s,k} \ , \qquad \mathcal{S}^{-\infty,s,k} = \bigcap_m \mathcal{S}_\rho^{m,s,k}$$

$$\mathcal{H}^{-\infty,s} = \bigcap_m \mathcal{H}_\rho^{m,s} \ , \qquad \mathcal{S}^{-\infty,s} = \bigcap_m \mathcal{S}_\rho^{m,s}$$

Teorema 3.3 :

Dado $A \in \mathcal{H}^{-\infty,s,0}$, A puede extenderse a un operador acotado de H^t en H^s, $\forall\ t \in \mathbb{R}$.

Demostración:

Que el operador A esté en la clase $\mathcal{H}^{-\infty,s,0}$, significa que su símbolo $\sigma(A) = a(\ ,\xi)$ pertenece a la clase $H^{-\infty,s,0}$.

Fijado $t \in \mathbb{R}$, se elige $m \in \mathbb{R}$ tal que $m+|s|+r < t$, para algún $r > n/2$.

Como $a(\ ,\xi) \in H^{m,s,0}$, el resultado se concluye a partir del teorema 3.1. #

Observación 3.4:

El teorema 3.3, también es válido en cualquiera de los espacios de operadores introducidos en la definición 3.3.

Este teorema, justifica el nombre de operadores H^s - regularizantes, que se le dará a los operadores en esas clases.

Por ejemplo, el teorema de inmersión de Sobolev, dice que si es $s > n/2 + j$ para cierto $j \geq 0$, entonces la clase H^s está incluída continuamente en $C^j(\mathbb{R}^n)$, dando a este espacio la topología de la convergencia uniforme sobre los compactos de $\mathbb{R}^n$. Luego, para ese valor de s, un operador H^s - regularizante transforma las distribuciones de H^t, $\forall\ t \in \mathbb{R}$, en funciones continuamente derivables hasta el orden j, inclusive.

Dado un desarrollo asintótico $\sum_j a_j$ en $H^{m,s,k}_{\rho}$, su suma, que según el teorema 2.3 existe siempre en $H^{m,s,k}_{\rho}$, está definida módulo $H^{-\infty,s,k}$.

Luego, ese desarrollo determinará un operador de $\mathcal{H}^{m,s,k}_{\rho}$, módulo operadores H^s - regularizantes. Este hecho será empleado en 5.

En el resultado que se va a dar enseguida, fijado $K \subset \mathbb{R}^n$ compacto, $H^{m+|s|+r}(K)$ será $\{ f \in H^{m+|s|+r} \ /\ \text{sop}(f) \subset K \}$.

Teorema 3.4 :

Dado $A \in \mathcal{H}^{m,s,0}$, A define un operador compacto de $H^{m+|s|+r}(K)$ en H^s, para $r > n/2$ y $K \subset \mathbb{R}^n$ compacto.

Demostración :

El punto fundamental, es observar que si $t_1 > t_2$, hay una inclusión compacta de $H^{t_1}(K)$ en H^{t_2}.

Dado $r > n/2$, sea entonces $\{f_j\}$ una sucesión de $H^{m+|s|+r}(K)$, que converge débilmente a 0. Quiere concluírse que la sucesión $\{A(f_j)\}$ converge a 0 en H^s.

Como $r > n/2$, existe $\varepsilon > 0$ tal que todavía es $r-\varepsilon > n/2$.

Luego, según la observación 3.1, existe $C > 0$ con:

$$\| A(f_j - f_h) \|_{H^s} \leq C \| f_j - f_h \|_{H^{m+|s|+r-\varepsilon}} , \forall j , h \in \mathbb{N} .$$

Se afirma que la sucesión $\{\hat{f}_j(\xi)\}$ converge a 0, para cada $\xi \in \mathbb{R}^n$ fijo; además, fijado $C \subset \mathbb{R}^n$ compacto, existe $M_C > 0$ tal que

$$| \hat{f}_j(\xi) | \leq M_C , \forall j \in \mathbb{N} , \xi \in C .$$

En efecto:

Como $f_j \in E'$, $\hat{f}_j(\xi)$ es, entre otras cosas, una función indefinidamente derivable que vale:

$$\frac{1}{(2\pi)^n} (f_j(x) , \chi(x) e^{ix\xi}) ,$$

donde $\chi \in C_0^{\infty}$ y $\chi = 1$ en un entorno de K.

$\chi(x) e^{ix\xi}$, para $\xi \in \mathbb{R}^n$ fijo, está en el dual de todos los espacios de Sobolev; entonces $(f_j , \chi(x) e^{ix\xi}) \xrightarrow[j \to \infty]{} 0$.

Por otra parte,

$$|(f_j , \chi(x) e^{ix\xi})| \leq \| f_j \|_{H^{m+|s|+r}} \| \chi(x) e^{ix\xi} \|_{H^{-m-|s|-r}}$$

Como converge débilmente, la sucesión $\{f_j\}$ está acotada en $H^{m+|s|+r}$.

En cuanto al otro factor, según el lema 3.1, es:

$$\| E_{-\xi} \chi(x) \|_{H^{-m-|s|-r}} \leq C (1 + |\xi|^2)^{|m-|s|-r|/2} \| \chi \|_{H^{-m-|s|-r}} ,$$

lo cual está acotado sobre los compactos de $\mathbb{R}^n$.

Con estas observaciones, puede concluírse el teorema de la siguiente forma:

Fijado $R \geq 1$, se escribe:

$$\| f_j - f_h \|^2_{H^{m+|s|+r-\varepsilon}} = \int_{|\xi| \leq R} (1 + |\xi|^2)^{m+|s|+r-\varepsilon} | \hat{f}_j(\xi) - \hat{f}_h(\xi) |^2 \, d\xi +$$

$$+ \int_{|\xi| > R} (1+|\xi|^2)^{m+|s|+r-\varepsilon} \left| \hat{f}_j(\xi) - \hat{f}_h(\xi) \right|^2 d\xi$$

El segundo término se acota con:

$$(1+R^2)^{-\varepsilon} \left\| f_j - f_h \right\|^2_{H^{m+|s|+r}} \leq C \, (1+R^2)^{-\varepsilon}$$

Como es $\varepsilon > 0$, esto puede hacerse arbitrariamente pequeño, eligiendo R . Si se fija en el primer término un valor de R , se puede pasar al límite bajo el signo integral, pues el integrando $\xrightarrow[j,h \to \infty]{} 0$, puntualmente y además está acotado por una constante, que es integrable en compactos. #

Para concluir esta parte, se va a decir algo más sobre la clase de los operadores H^s - regularizantes.

La observación 3.4, sugiere la siguiente definición:

<u>Definición 3.4</u>:

Sea

$$\mathcal{R}^s = \left\{ R : S \longrightarrow S' \ / \ \text{para cada } \alpha \in \mathbb{N}^n , \ R_\circ D \text{ se extiende a un operador acotado de } L^2 \text{ en } H^s \right\} .$$

Es claro que todo operador H^s - regularizante pertenece a esta clase.

Si en $\mathcal{R}^s$ se considera la topología determinada por la familia de seminormas:

$$\| R \|_q = \sum_{|\alpha| \leq q} \| R_\circ D^\alpha \|_{L^2 , H^s}$$

resulta que $\mathcal{R}^s$ es un álgebra de Fréchet respecto de la composición.

4. EL CÁLCULO DE OPERADORES

Van a estudiarse propiedades de composición de los operadores introducidos en el punto 3. Se los intentará componer entre ellos y también con los operadores seudodiferenciales clásicos.

Teorema 4.1 :

Si $A \in \mathcal{H}^{m,s,o}$, $B \in \mathcal{H}^{m_1,s_1,o}$ con $s \geq m_1 + |s_1| + r$, para cierto $r > n/2$, tiene sentido la composición $B \circ A$, como operador continuo de S en H^{s_1} .

Si además $s \geq |m_1| + |s_1| + r_o$, para algún $r_o > n/2$, entonces ese operador compuesto pertenece a la clase $\mathcal{H}^{m+m_1,s_1,o}$.

Es decir, existe $c \in H^{m+m_1,s_1,o}$ tal que

$$B \circ A\,(f) = \int e^{-ix\xi}\, c(\ ,\xi)\, \hat{f}(\xi)\, d\xi \quad , \text{ en el sentido de } H^{s_1} \quad , \quad \forall\, f \in S \ .$$

Demostración :

Según el teorema 3.1 , el operador B se extiende a un operador acotado de $H^{m_1+|s_1|+r}$ en H^{s_1} , si $r > n/2$.

Como A es acotado de S en H^s , la condición $s \geq m_1 + |s_1| + r$, para algún $r > n/2$, permite componer B con A obteniéndose un operador $B \circ A : S \longrightarrow H^{s_1}$, continuo .

Quiere probarse ahora que $B \circ A \in \mathcal{H}^{m+m_1,s_1,o}$, suponiendo

$$s \geq |m_1| + |s_1| + r_o \quad , \text{ para algún } r_o > n/2 \ .$$

La técnica que se usará está inspirada en lo hecho por Beals y Feffermann en [2].

Si los símbolos $\sigma(A) = a$, $\sigma(B) = b$, pertenecen a $C_o^o(\mathbb{R}^{2n})$, el operador compuesto $B \circ A$ es un seudodiferencial cuyo símbolo, indicado $b \circ a$, también pertenece a $C_o^o(\mathbb{R}^{2n})$.

En efecto, dado $f \in S$, puede escribirse:

$$B \circ A\,(f) = \int e^{-ix\xi}\, b(x,\xi) \left\{ \frac{1}{(2\pi)^n} \int e^{iy\xi} \left[\int e^{-iy\eta} a(y,\eta)\, \hat{f}(\eta)\, d\eta \right] dy \right\} d\xi$$

Aquí, todas las integrales convergen absolutamente y resulta

$$B \circ A\,(f) = \int e^{-ix\eta}\, b \circ a\,(x,\eta)\, \hat{f}(\eta)\, d\eta \quad ,$$

con $\quad b \circ a\,(x\,,\eta) = \dfrac{1}{(2\pi)^n} \displaystyle\int e^{i(y-x)(\xi-\eta)}\, b(x\,,\xi)\, a(y\,,\eta)\; dy\; d\xi$,

función que pertenece a $C_o^o(\mathbb{R}^{2n})$.

En primer lugar, va a demostrarse que la aplicación

$$\begin{array}{ccc} C_o^o(\mathbb{R}^{2n}) \times C_o^o(\mathbb{R}^{2n}) & \longrightarrow & C_o^o(\mathbb{R}^{2n}) \\ (a\,,b) & \longrightarrow & b \circ a \end{array}$$

es continua en ambas variables, cuando se toma en la primera, la topología de $H^{m,s,o}$; en la segunda, la topología de $H^{m_1,s_1,o}$ y en la imagen, la topología inducida por $H^{m+m_1,s_1,o}$.

Luego se obtendrá la conclusión deseada, trabajando con argumentos de densidad.

$$F_x\left[b \circ a(x\,,\eta)\right] = \frac{1}{(2\pi)^n}\int e^{izx}\; b \circ a(x\,,\eta)\; dx =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{2n}}\int e^{iy(\xi-\eta)}\; a(y\,,\eta)\left\{\int e^{i[z-(\xi-\eta)]\,x}\; b(x\,,\xi)\; dx\right\} dy\; d\xi =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^n}\int e^{iy(\xi-\eta)}\; a(y\,,\eta)\;\hat{b}\,(z-(\xi-\eta)\,,\xi)\quad dy\; d\xi =$$

$$= \int \hat{b}\,(z-(\xi-\eta)\,,\xi)\left[\int e^{iy(\xi-\eta)}\; a(y\,,\eta)\; dy\right] d\xi =$$

$$= \int \hat{b}\,(z-(\xi-\eta)\,,\xi)\;\hat{a}\,(\xi-\eta\,,\eta)\quad d\xi\ .$$

Por lo tanto , es:

$$\left\|b \circ a(\ \,,\eta)\right\|_{H^{s_1}} = \left\|(1 + |z|^2)^{s_1/2}\int \hat{b}\,(z-(\xi-\eta\,,\xi)\;\hat{a}\,(\xi-\eta\,,\eta)\; d\xi\right\|_{L^2_z}$$

Usando la desigualdad integral de Minkowski, esto puede acotarse con:

$$\int\left|\hat{a}\,(\xi-\eta\,,\eta)\right|\;\left\|(1+|z|^2)^{s_1/2}\left|\hat{b}\,(z-(\xi-\eta)\,,\xi)\right|\right\|_{L^2_z}\quad d\xi\ .$$

Mediante la desigualdad de Peetre, la norma que ha quedado en el integrando se mayora como:

$$\left\|(1+|z|^2)^{s_1/2}\left|\hat{b}\,(z-(\xi-\eta)\,,\xi)\right.\right\|_{L^2_z} \leq$$

$$\leq 2^{|s_1|/2}\;(1+|\xi-\eta|^2)^{|s_1|/2}\;\left\|b(\ \,,\xi)\right\|_{H^{s_1}} \leq$$

$$\leq C\;P^o_{m_1,s_1}(b)\quad(1+|\xi-\eta|^2)^{|s_1|/2}\quad(1+|\xi|)^{m_1}\quad .$$

Con esto se tiene :

$$\| b \circ a(\ ,\eta) \|_{H^{s_1}} \leq C \ P^{o}_{m_1,s_1}(b) \int (1+|\xi-\eta|^2)^{|s_1|/2} \ .$$
$$\cdot \left| \hat{a}(\xi-\eta,\eta)\right| \ d\xi \ .$$

Se vuelve a usar la desigualdad de Peetre, resultando:

$$\| b \circ a(\ ,\eta) \|_{H^{s_1}} \leq C \ P^{o}_{m_1,s_1}(b) \ (1+|\eta|)^{m_1} \int (1+|\tau|^2)^{|s_1|/2+|m_1|/2} \ .$$
$$\cdot \left| \hat{a}(\tau,\eta)\right| \ d\tau \ .$$

Dado $r > n/2$ tal que $s \geqslant |s_1|+|m_1|+r$, finalmente se obtiene, con la desigualdad de Schwarz y la inclusión continua de H^s en $H^{|s_1|+|m_1|+}$

$$\| b \circ a(\ ,\eta) \|_{H^{s_1}} \leq C \ P^{o}_{m_1,s_1}(b) \ (1+|\eta|)^{m_1} \ \| a(\ ,\eta) \|_{H^s} \leq$$
$$\leq C \ P^{o}_{m_1,s_1}(b) \ P^{o}_{m,s}(a) \ (1+|\eta|)^{m+m_1} \ .$$

Lo cual muestra la continuidad, en ambas variables, de la aplicación considerada.

Sean ahora a y b los símbolos en $H^{m,s,o}$ y $H^{m_1,s_1,o}$ de los operadores A y B , respectivamente.

Por el teorema 2.2 y la observación 2.2 , existen sucesiones $\{a_j\}$, $\{b_j\}$ en $C^{\infty}_{o}(\mathbb{R}^{2n})$ tales que:

i). Están acotadas en $H^{r,s,o}$ y $H^{m_1,s_1,o}$, respectivamente.

ii). $a_j \longrightarrow a$ en $H^{m',s,o}$, si $m' > m$.

$b_j \longrightarrow b$ en $H^{m_1',s_1,o}$, si $m_1' > m_1$.

Sean A_j y B_j los operadores seudodiferenciales con $\sigma(A_j) = a_j$, $\sigma(B_j) = b_j$.

Según lo que acaba de probarse, $B_j \circ A_j$ es otro operador seudodiferencial con símbolo $b_j \circ a_j$ en $C^{o}_{o}(\mathbb{R}^{2n})$.

Además $P^{o}_{m+m_1,s_1}(b_j \circ a_j) \leq C \ P^{o}_{m_1,s_1}(b_j) \ P^{o}_{m,s}(a_j)$

De lo cual se deduce que la sucesión $\{b_j \circ a_j\}$ está acotada en

$H^{m+m_1,s_1,o}$.

Por otra parte, esa sucesión es de Cauchy en $H^{M,s,o}$ si $M = m+m_1+\varepsilon$, con $\varepsilon > 0$ tal que $r_o - \varepsilon > n/2$.

En efecto, se comprueba sin dificultad que vale:

$$P^o_{M,s_1}(b_j \circ a_j - b_h \circ a_h) \leq P^o_{M,s_1}\left[b_j \circ (a_j - a_h)\right] + P^o_{M,s_1}\left[(b_j - b_h) \circ a_h\right] \leq$$

$$\leq C\, P^o_{m_1,s_1}(b_j)\; P^o_{m',s}(a_j - a_h) + C\, P^o_{m_1',s_1}(b_j - b_h)\; P^c_{m,s}(a_h) \quad ,$$

donde $m_1' = M-m$, $m' = M-m_1$.

De aquí resulta que efectivamente, $\{b_j \circ a_j\}$ es de Cauchy en $H^{M,s_1,o}$.

Luego, existe $c \in H^{M,s_1,o}$, tal que $b_j \circ a_j \xrightarrow[j \to \infty]{} c$, en ese espacio.

Se afirma que $c \in H^{m+m_1,s_1,o}$

Para verlo, sea $N > 0$ tal que :

$$\sup_{\xi \in \mathbb{R}^n} \| b_j \circ a_j(\ ,\xi) \|_{H^{s_1}} \leq N\, (1 + |\xi|)^{m+m_1}$$

Fijado $\xi \in \mathbb{R}^n$, según el lema 2.1 , $b_j \circ a_j\ (\ ,\xi) \longrightarrow c(\ ,\xi)$ en H^{s_1} .

Luego, pasando al límite en la acotación anterior, se tiene:

$$\sup_{\xi \in \mathbb{R}^n} \|c(\ ,\xi)\|_{H^{s_1}} \leq N\, (1 + |\xi|)^{m+m_1}$$

O sea $c \in H^{m+m_1,s_1,o}$

Finalmente, va a probarse que dada $f \in S$, es :

$$B\circ A\ (f) = \int e^{-ix\xi}\, c(\ ,\xi)\ \hat{f}(\xi)\ d\xi$$

con lo cual, $B\circ A$ pertenecerá a la clase $\mathcal{H}^{m+m_1,s_1,o}$

Por un momento, sea C el operador con $\sigma(C) = c$.

$$\| B\circ A\ (f) - C\ (f) \|_{H^{s_1}} \leq \|(B - B_j)\circ A\ (f)\|_{H^{s_1}} +$$

$$+ \|B_j \circ (A - A_j)\ (f)\|_{H^{s_1}} + \|(B_j \circ A_j - C)\ (f)\|_{H^{s_1}} \quad .$$

Para acotar cada término, se usará la observación 3.1 ; sea $\varepsilon > 0$ tal que $r_o - \varepsilon$, todavía es $> n/2$.

$$\| B\circ A\ (f) - C\ (f)\|_{H^{s_1}} \leq C_1\; P^o_{m_1+\varepsilon,s_1}(b - b_j)\; \|A\ (f)\|_{H^{m_1+|s_1|+r_o}} +$$

$$+ \; C_1 \; P^{o}_{m_1, s_1}(b_j) \; \left\| (A - A_j)\,(f) \right\|_{H^{m_1+|s_1|+r_o}} \; +$$

$$+ \; C_1 \; P^{o}_{m+m_1+\varepsilon \;, s_1}(b_j \circ a_j - c) \; \left\| f \right\|_{H^{m+m_1+|s_1|+r_o}}$$

A partir de todo lo dicho, es claro que el primer término y el tercero, tienden a 0, cuando $j \longrightarrow \infty$.

En cuanto al segundo, como es $s \geq |m_1|+|s_1|+r_o$, es también $s \geq m_1+|s_1|+r_o$; además $\left\{ b_j \right\}$ es una sucesión acotada en $H^{m_1, s_1, o}$.

Luego, puede acotarse:

$$C_1 \; P^{o}_{m_1, s_1}(b_j) \; \left\| (A - A_j)\,(f) \right\|_{H^{m_1+|s_1|+r_o}} \leq C_1 \left\| (A - A_j)\,(f) \right\|_{H^s} \leq$$

$$\leq C_1 \; P^{o}_{m+\varepsilon}(a - a_j) \; \left\| f \right\|_{H^{m+|s|+r_o}} .$$

Y entonces el segundo término también $\underset{j \to \infty}{\longrightarrow} 0$. #

Este teorema muestra, que dados dos operadores seudodiferenciales, en cualquiera de las clases introducidas en la definición 3.2, bajo ciertas hipótesis siempre tiene sentido componerlos, al menos en el espacio $\mathcal{H}^{m,s,o}$, con parámetros m y s adecuados.

Lo que quiere verse ahora es qué propiedades adicionales pueden asegurarse sobre el símbolo del operador compuesto, cuando se aumenta la regularidad de los factores.

Teorema 4.2:

Si $A \in \mathcal{H}^{m,s,k}_{\rho}$, $B \in \mathcal{H}^{m_1, s_1, k_1}_{\rho_1}$ con $s \geq m_1+|s_1|+r$, para cierto $r > n/2$, tiene sentido la composición $B \circ A$, como operador continuo de S en H^{s_1}.

Si además es

$$\rho \leq \rho_1$$

$$s-|\alpha-\gamma| \geq \left| m_1-\rho_1|\gamma| \right| + \left| s_1-|\gamma| \right| + r_o \quad , \text{ para cierto } r_o > n/2$$

$$\forall \, \gamma \leq \alpha \; , \; |\alpha| \leq K, \quad K = \min\,(k \,,\, k_1)$$

entonces $B \circ A \in \mathcal{H}^{m+m_1, s_1, K}_{\rho}$

Demostración :

Que la composición tiene sentido cuando $s \geq m_1 + |s_1| + r$, $r > n/2$,
ya se vio en el teorema 4.1 .

Por otra parte, si $K = 0$, o si no se toman derivadas, la condición

$$s - |\alpha - \gamma| \geq \left| m_1 - \rho_1 |\gamma| \right| + \left| s_1 - |\gamma| \right| + r_o \ , \quad r_o > n/2 \ ,$$

se reduce a $s \geq |m_1| + |s_1| + r_o$, que es la impuesta en ese teorema 4.1 para que la composición pertenezca al espacio $\mathcal{H}^{m+m_1, s_1, o}$

Se analiza ahora el caso general enunciado .

Si $a \in C_o^k(\mathbb{R}^{2n})$, $b \in C_o^{k_1}(\mathbb{R}^{2n})$, como antes , se ve que la composición de los operadores asociados, $B_b \circ A_a$, tiene símbolo

$$b \circ a(x, \eta) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int e^{i(y-x)(\xi - \eta)} \ b(x, \xi) \ a(y, \eta) \ dy \ d\xi \ ,$$

en $C_o^K(\mathbb{R}^{2n})$.

Lo que primero se probará es que la aplicación

$$(a, b) \longrightarrow b \circ a$$

es continua de $C_o^k(\mathbb{R}^{2n}) \times C_o^{k_1}(\mathbb{R}^{2n})$ en $C_o^K(\mathbb{R}^{2n})$, cuando en la primera variable se toma la topología de $H_\rho^{m,s,k}$, en la segunda, la de $H_{\rho_1}^{m_1, s_1, k_1}$ y en la imagen, la topología de $H_\rho^{m+m_1, s_1, K}$, con las condiciones que figuran en el enunciado.

Sea entonces .

$$D_\eta^\alpha \ b \circ a(x, \eta) = \frac{1}{(2\pi)^n} \sum_{\gamma \leq \alpha} c_\gamma \ (-1)^{|\gamma|} \int D_\xi^\gamma \ e^{i(y-x)(\xi - \eta)} \ .$$

$$\cdot \ b(x, \xi) \ D_\eta^{\alpha-\gamma} a(y, \eta) \ dy \ d\eta =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^n} \sum_{\gamma \leq \alpha} c_\gamma \int e^{i(y-x)(\xi - \eta)} \ D_\xi^\gamma \ b(x, \xi) \ D_\eta^{\alpha-\gamma} \ a(y, \eta) \ dy \ d\xi \ .$$

Para simplificar la notación, se llamarán

$$D_\xi^\gamma \ b = b_\gamma \quad ; \quad D_\eta^{\alpha-\gamma} \ a = a_{\alpha-\gamma} \, .$$

Se tiene:

$$D_\eta^\alpha \ b \circ a(x, \eta) = \frac{1}{(2\pi)^n} \sum_{\alpha \geq \gamma} c_\gamma \int e^{i(y-x)(\xi - \eta)} \ b_\gamma(x, \xi) \ .$$

$$\cdot \ a_{\alpha-\gamma}(y, \eta) \ dy \ d\xi = \sum_{\gamma \leq \alpha} c \quad e^{-ix(\xi - \eta)} \ b_\gamma(x, \xi) \ \hat{a}_{\alpha-\gamma}(\xi - \eta, \eta) \ d\xi$$

Aplicando como antes la desigualdad integral de Minkowski, es:

$$\| D_\eta^\alpha \, b \circ a(\;,\eta) \|_{H^{s_1-|\alpha|}} \leq \sum_{\gamma\leq\alpha} c_\gamma \int \| E_{\eta-\xi}\, b_\gamma (\;,\xi) \|_{H^{s_1-|\gamma|}} \cdot$$

$$\cdot \left| \hat{a}_{\alpha-\gamma} (\xi-\eta ,\eta) \right| \; d\xi \leq$$

$$\leq \sum_{\gamma\leq\alpha} c_\gamma \int (1 +|\xi-\eta|^2)^{|s_1-|\gamma||/2} \; \| b_\gamma (\;,\xi)\|_{H^{s_1-|\gamma|}} \left|\hat{a}_{\alpha-\gamma}(\xi-\eta ,\eta)\right| \; d\xi \leq$$

$$\leq c \; P^{k_1}_{m_1,s_1} (b) \sum_{\gamma\leq\alpha} \int (1 +|\xi-\eta|^2)^{|s_1-|\alpha||/2} \; (1 +|\xi|)^{m_1-\rho_1|\gamma|} \; \cdot$$

$$\cdot \left|\hat{a}_{\alpha-\gamma} (\xi-\eta ,\eta) \right| d\xi \; .$$

Se usa aquí la desigualdad de Peetre, obteniéndose:

$$c \; P^{k_1}_{m_1,s_1} (b)\sum_{\gamma\leq\alpha} (1 +|\eta|)^{m_1-\rho_1|\gamma|} \int (1 + |w|^2)^{|m_1-\rho_1|\gamma||/2 \,+\, |s_1-|\gamma||/2} \; \cdot$$

$$\cdot \left|\hat{a}_{\alpha-\gamma}(w ,\eta) \right| dw \; .$$

Según la condición impuesta, existe $r_o > n/2$ tal que

$$\text{para } \gamma\leq\alpha \;, |\alpha|\leq k, \quad | m_1-\rho_1|\gamma| | + | s_1-|\gamma| |+r_o \leq s-|\alpha-\gamma| \; .$$

Luego, usando esto y la desigualdad de Parseval, es :

$$\| D_\eta^\alpha \, b \circ a(\;,\eta)\|_{H^{s_1-|\alpha|}} \leq c \; P^{k_1}_{m_1,s_1} (b) \sum_{\gamma\leq\alpha} (1 +|\eta|)^{m_1-\rho_1|\gamma|} \cdot$$

$$\cdot \left(\int (1 + |w|^2)^{-r_o} \; dw\right)^{1/2} \; \| a_{\alpha-\gamma}(\;,\eta) \|_{H^{s-|\alpha-\gamma|}} \leq$$

$$\leq c \; P^{k_1}_{m_1,s_1} (b) \; P^{k}_{m,s} (a) \; (1 +|\eta|)^{m+m_1-\rho|\alpha|}\sum_{\gamma\leq\alpha}(1 +|\eta|)^{(\rho-\rho_1)|\gamma|}$$

La condición $\rho\leq\rho_1$, permite obtener la acotación :

$$P^{k}_{m+m_1,s_1} (b\circ a) \leq c \; P^{k_1}_{m_1,s_1} (b) \; P^{k}_{m,s} (a) \; .$$

Para concluir el teorema, conviene destacar lo siguiente:

Se da $\varepsilon>0$, tal que todavía es $r_o-\varepsilon> n/2$

Entonces valen las acotaciones:

$$P^{k}_{m+m_1+\varepsilon ,s_1} (b\circ a) \leq c \; P^{k_1}_{m_1+\varepsilon ,s_1} (b) \; P^{k}_{m,s} (a)$$

$$P^{k}_{m+m_1+\varepsilon ,s_1} (b\circ a) \leq c \; P^{k_1}_{m_1,s_1} (b) \; P^{k}_{m+\varepsilon ,s} (a)$$

Estas acotaciones ya fueron usadas en el teorema anterior, pero en un caso más simple.

Para obtener la primera, se observa que el espacio $H^{m_1,s_1,k_1}_{\rho_1}$ está contenido en $H^{m_1+\varepsilon,s_1,k_1}_{\rho_1}$, según el lema 2.1 .

Se parte de la acotación:

$$\|D^\alpha_\eta \, b \circ a(\ ,\eta)\|_{H^{s_1-|\alpha|}} \leq$$

$$\leq C \sum_{\gamma\leq\alpha} \int (1+|\xi-\eta|^2)^{|s_1-|\gamma||/2} \, \|b_\gamma(\ ,\xi)\|_{H^{s_1-|\gamma|}} \cdot$$

$$\cdot \, |\hat{a}_{\alpha-\gamma}(\xi-\eta,\eta)| \, d\xi \leq$$

$$\leq C \, P^{k_1}_{m_1+\varepsilon,s_1}(b) \sum_{\gamma\leq\alpha} (1+|\xi-\eta|^2)^{|s_1-|\gamma||/2} \, (1+|\xi|)^{m_1+\varepsilon-\rho_1|\gamma|} \cdot$$

$$\cdot \, |\hat{a}_{\alpha-\gamma}(\xi-\eta,\eta)| \, d\xi \leq$$

$$\leq C \, P^{k_1}_{m_1+\varepsilon,s_1}(b) \sum_{\gamma\leq\alpha} (1+|\eta|)^{m_1+\varepsilon-\rho_1|\gamma|} \int (1+|w|^2)^{|s_1-|\gamma||/2+|m_1+\varepsilon-\rho_1|\gamma||/2}$$

$$\cdot \, |\hat{a}_{\alpha-\gamma}(\xi-\eta,\eta)| \, d\xi \; .$$

Hay que analizar el exponente que aparece en el integrando:

$$|s_1-|\gamma|| + |m_1+\varepsilon-\rho_1|\gamma|| + r_0 - \varepsilon \leq |s_1-|\gamma|| + |m_1-\rho_1|\gamma|| + r_0 \leq s-|\alpha-\gamma|$$

según la condición impuesta, $\forall \gamma\leq\alpha$, $|\alpha|\leq K$.

Como $r_0-\varepsilon > n/2$, puede acotarse lo anterior con :

$$C \, P^{k_1}_{m_1+\varepsilon,s_1}(b) \sum_{\gamma\leq\alpha} (1+|\eta|)^{m_1+\varepsilon-\rho_1|\gamma|} \int (1+|w|^2)^{(-r_0+\varepsilon)/2} \cdot$$

$$\cdot \, (1+|w|^2)^{(s-|\alpha-\gamma|)/2} \, |\hat{a}_{\alpha-\gamma}(w,\eta)| \, dw \; .$$

De donde se concluye la primera estimación.

En cuanto a la segunda, es inmediata, usando el lema 2.1 :

En efecto, antes se obtuvo:

$$\|D^\alpha_\eta \, b \circ a(\ ,\eta)\|_{H^{s_1-|\alpha|}} \leq C \, P^{k_1}_{m_1,s_1}(b) \sum_{\gamma\leq\alpha} \|D^{\alpha-\gamma}_\eta a(\ ,\eta)\|_{H^{s-|\alpha-\gamma|}} \cdot$$

$$\cdot \, (1+|\eta|)^{m_1-\rho_1|\gamma|} \leq$$

$$\leq C \, P^{k_1}_{m_1,s_1}(b) \, P^{k}_{m+\varepsilon,s}(a) \sum_{\gamma\leq\alpha} (1+|\eta|)^{m+m_1+\varepsilon-\rho|\alpha|+(\rho-\rho_1)|\gamma|} \leq$$

$$\leq C \, P^{k_1}_{m_1,s_1}(b) \, P^{k}_{m+\varepsilon,s}(a) \, (1+|\eta|)^{m+m_1+\varepsilon-\rho|\alpha|}$$

Luego, también se ha demostrado la segunda acotación.

Ahora, ya se está en condiciones de usar los argumentos de densidad, en forma semejante al teorema anterior, para probar que el símbolo c del operador $B \circ A$, pertenece al espacio $H_{\rho}^{m+m_1, s_1, k}$

Si $a \in H_{\rho}^{m,s,k}$, $b \in H_{\rho_1}^{m_1, s_1, k_1}$, sean $\{a_j\}$, $\{b_j\}$ sucesiones tales que

$a_j \in C_o^k(\mathbb{R}^{2n})$, $b_j \in C_o^{k_1}(\mathbb{R}^{2n})$.

$\{a_j\}$ está acotada en $H_{\rho}^{m,s,k}$; $\{b_j\}$ está acotada en $H_{\rho_1}^{m_1,s_1,k_1}$

$a_j \longrightarrow a$ en $H_{\rho}^{m',s,k}$, $m' > m$

$b_j \longrightarrow b$ en $H_{\rho_1}^{m_1',s_1,k_1}$, $m_1' > m_1$

Por lo que se acaba de probar, la sucesión $\{b_j \circ a_j\}$ está acotada en $H_{\rho}^{m+m_1, s_1, k}$.

Además, es de Cauchy en $H_{\rho}^{M, s_1, k}$, si $M = m+m_1+\varepsilon$, con $\varepsilon > 0$ tal que $r_o - \varepsilon > n/2$

En efecto,

$$P_{M,s_1}^{k}(b_j \circ a_j - b_h \circ a_h) \leq C \; P_{M,s_1}^{k}\left[b_j \circ (a_j - a_h)\right] + $$
$$+ \; C \; P_{M,s_1}^{k}\left[(b_j - b_h) \circ a_h\right]$$

Se usan las estimaciones obtenidas antes:

$$P_{M,s_1}^{k}\,(b_j \circ a_j - b_h \circ a_h) \leq C \; P_{m_1,s_1}^{k_1}\,(b_j) \; P_{m+\varepsilon,s}^{k}\,(a_j - a_h) + $$
$$+ \; C \; P_{m_1+\varepsilon,s_1}^{k_1}\,(b_j - b_h) \; P_{m,s}^{k}\,(a_h) \quad .$$

Luego, existe $c \in H_{\rho}^{M,s_1,k}$ tal que $b_j \circ a_j \xrightarrow[j \to \infty]{} c$, en ese espacio. También, $b_j \circ a_j(\ ,\xi) \longrightarrow c(\ ,\xi)$ en H^{s_1}, para cada $\xi \in \mathbb{R}^n$ fijo.

Como la sucesión $\{b_j \circ a_j\}$ está acotada en $H_\rho^{m+m_1, s_1, k}$, se concluye que $c \in H_\rho^{m+m_1, s_1, K}$.

Finalmente, por unicidad del símbolo, es :

$$B \circ A\,(f) = \int e^{-ix\xi}\; c(\;,\xi)\;\hat{f}(\xi)\;d\xi\;, \quad \forall\; f \in S .$$

#

Observación 4.1 :

El teorema 4.2 vale, bajo hipótesis y con demostraciones, semejantes, en los espacios $\mathcal{S}_\rho^{m,s,k}$, $\mathcal{H}_\rho^{m,s}$ y $\mathcal{S}_\rho^{m,s}$.

Según las acotaciones hechas en este teorema, la aplicación

$$H_\rho^{m+\varepsilon, s, k} \times H_{\rho_1}^{m_1+\varepsilon, s_1, k_1} \longrightarrow H_\rho^{m+m_1+2\varepsilon, s_1, K}$$

$$(a\,,\,b) \longrightarrow c$$

es continua, si m , m_1 , s , s_1 , ρ y ρ_1 cumplen las condiciones impuestas, para cierto $r_0 > n/2$ y $r_0 - \varepsilon > n/2$.

En efecto, con la notación usada, fijado $j \geqslant 1$, es:

$$P^{K}_{m+m_1+2\varepsilon, s_1}(b_j \circ a_j) \leqslant C\; P^{k}_{m+\varepsilon, s}(a_j)\quad P^{k_1}_{m_1+\varepsilon, r_1}(b_j) \;.$$

Pero en esos espacios, las sucesiones convergen, con lo cual se obtiene

$$P^{K}_{m+m_1+2\varepsilon, s_1}(c) \leqslant C\; P^{k}_{m+\varepsilon, s}(a)\quad P^{k_1}_{m_1+\varepsilon, s_1}(b)$$

Se estudiarán ahora resultados de composición de estos operadores con operadores seudodiferenciales escalares.

Teorema 4.3:

Dados operadores $A \in \mathcal{S}_\rho^{m,s}$, $B \in \mathcal{J}_\rho^{m_1}$, la composición $A \circ B$ está definida como operador continuo de S en H^s y pertenece a $\mathcal{S}_\rho^{m+m_1, s}$. Es decir, existe $c \in S_\rho^{m+m_1, s}$ tal que

$$A \circ B\,(f) = \int e^{-ix\eta}\; c(\;,\eta)\;\hat{f}(\eta)\;d\eta\;, \qquad f \in S \;.$$

Además, fijado $N \geqslant 1$, es posible dar un desarrollo asintótico del símbolo c :

$$c(\;,\eta) \sim \sum_{\alpha} \frac{i^{|\alpha|}}{\alpha !}\; D_\eta^\alpha\, a(\;,\eta)\; D_x^\alpha\, b(x,\eta)$$

Demostración :

La composición está definida, porque B es un operador continuo de S en S.

Sea $\varphi \in C_0^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ tal que

$$0 \leq \varphi \leq 1$$

$$\varphi(\xi) = \begin{cases} 1 & |\xi| \leq 1 \\ 0 & |\xi| \geq 2 \end{cases}$$

Si a es el símbolo de A, según el teorema 2.2, $a(\;,\xi)\,\varphi(\varepsilon\xi) \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} a(\;,\xi)$ en $S_\rho^{m',s}$, si $0 < \varepsilon \leq 1$, $m' > m$.

Como la aplicación $(a, f) \longrightarrow A_a(f)$ es continua de $S_\rho^{m',s} \times S$ en H^s, se tiene que

$$A(f) = \lim_{\varepsilon \to 0} \int e^{-ix\xi}\, a(\;,\xi)\, \varphi(\varepsilon\xi)\, \hat{f}(\xi)\, d\xi\ ;$$

límite tomado en H^s, para cada $f \in S$.

Se fija ahora $0 < \varepsilon \leq 1$.

Sea $A_\varepsilon(f) = \int e^{-ix\xi}\, a(\;,\xi)\, \varphi(\varepsilon\xi)\, \hat{f}(\xi)\, d\xi$.

El operador B puede escribirse en la forma

$$B(f) = \int e^{-iy\eta}\, b(y,\eta)\, \hat{f}(\eta)\, d\eta$$

Dado $0 < \delta \leq 1$, sea

$$B_\delta(f) = \int e^{-iy\eta}\, b(y,\eta)\, \varphi(\delta y)\, \hat{f}(\eta)\, d\eta\ ,$$

con φ, la misma función anterior.

Cuando $\delta \longrightarrow 0$, $B_\delta(f) = \varphi(\delta y)\, B(f) \longrightarrow B(f)$ en S.

Luego, por la continuidad antes mencionada,

$$A_\varepsilon B_\delta(f) \xrightarrow[\varepsilon,\delta \to 0]{} A \circ B(f)\ , \text{ en } H^s$$

Se fijan ahora $0 < \varepsilon, \delta \leq 1$, $f \in S$ tal que $\hat{f} \in C_0^{\infty}$

$$A_\varepsilon B_\delta(f) =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^n} \int e^{-ix\eta} \left\{ \int e^{i(y-x)(\xi-\eta)}\, a(x,\xi)\, \varphi(\varepsilon\xi)\, \varphi(\delta y)\, \cdot \right.$$

$$\left. \cdot\, b(y,\eta)\, dy\, d\xi \right\} \hat{f}(\eta)\, d\eta\ .$$

Aquí las integrales convergen absolutamente, pues en todas las variables se integra sobre compactos.

Sea

$$c_{\varepsilon,\delta}(\ ,\eta) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int e^{i(y-x)(\xi-\eta)}\ a(x,\xi)\ \varphi(\varepsilon\xi)\ \varphi(\delta y)\ .$$

$$.\ b(y,\eta)\ dy\ d\xi\ .$$

Quiere probarse que cuando $\varepsilon,\delta \longrightarrow 0$, $c_{\varepsilon,\delta}$ converge hacia una función $c \in S^{m+m_1,s}_{\varrho}$, de tal manera que

$$A_\varepsilon B_\delta(f) \longrightarrow \int e^{-ix\eta}\ c(\ ,\eta)\ \hat{f}(\eta)\ d\eta \quad \text{en } H^s\ .$$

Como ya se probó que $A_\varepsilon B_\delta\ (f) \underset{\varepsilon,\delta\to 0}{\longrightarrow} A\circ B\ (f)$ en H^s , se concluirá entonces que

$$A\circ B\ (f) = \int e^{-ix\eta}\ c(\ ,\eta)\ \hat{f}(\eta)\ d\eta\ ,\quad \text{dada} \quad f\in S$$

tal que $\hat{f} \in C_0^{\infty}$. Como estas funciones son densas en S , por paso al límite se tendrá el resultado para cualquier $f \in S$.

Fijado $N \geq 1$, puede escribirse:

$$a(\ ,\xi) = \sum_{|\alpha|<N} D^\alpha_\eta a(\ ,\eta)\ \frac{(\xi-\eta)^\alpha}{\alpha!} + a_N(\ ,\xi,\eta)\ ,$$

con $a_N(\ ,\xi,\eta) = \sum_{|\alpha|=N} N\ \frac{(\xi-\eta)^\alpha}{\alpha!}\int_0^1 D^\alpha_\eta a(\ ,\eta+t(\xi-\eta))\ .$

$$.\ (1-t)^{N-1}\ dt\ .$$

Luego, es :

$$c_{\varepsilon,\delta}(\ ,\eta) = \frac{1}{(2\pi)^n}\sum_{|\alpha|<N}\frac{D^\alpha_\eta a(\ ,\eta)}{\alpha!}\int e^{i(y-x)(\xi-\eta)}\ (\xi-\eta)^\alpha\ .$$

$$.\ \varphi(\varepsilon\xi)\ \varphi(\delta y)\ b(y,\eta)\ dy\ d\xi\ +$$

$$+\ \frac{1}{(2\pi)^n}\int e^{i(y-x)(\xi-\eta)}\ a_N(\ ,\xi,\eta)\ \varphi(\varepsilon\xi)\ \varphi(\delta y)\ b(y,\eta)\ dy\ d\xi$$

Se analiza primero cada término en la sumatoria:

$$(\xi-\eta)^\alpha\ e^{i(y-x)(\xi-\eta)} = (-i)^{|\alpha|}\ D^\alpha_y\ e^{i(y-x)(\xi-\eta)}\ .$$

Reemplazando e integrando por partes, es:

$$\frac{i^{|\alpha|}}{\alpha!\ (2\pi)^n}\ D^\alpha_\eta a(\ ,\eta)\int e^{i(y-x)(\xi-\eta)}\ \varphi(\varepsilon\xi)\ D^\alpha_y\Big[\varphi(\delta y)\ b(y,\eta)\Big]\ dy\ d\xi$$

La integral puede interpretarse como:

$$e^{ix\eta}\int e^{-iy\eta}\ D^\alpha_y\Big[\varphi(\delta y)\ b(y,\eta)\Big]\ \left\{\frac{1}{(2\pi)^n}\int e^{i(y-x)\xi}\ \varphi(\varepsilon\xi)\ d\xi\right\} dy =$$

$$= e^{ix\eta}\int e^{-iy\eta}\, D_y^{\alpha}\Big[\varphi(\delta y)\, b(y,\eta)\Big]\ \frac{1}{\varepsilon^n}\ \hat{\varphi}\Big(\frac{y-x}{\varepsilon}\Big)\ dy =$$

$$= e^{ix\eta}\Big\{e^{-iy\eta}\ D_y^{\alpha}\Big[\varphi(\delta y)\, b(y,\eta)\Big] * \frac{1}{\varepsilon^n}\hat{\varphi}(y/\varepsilon)\ .$$

Se fija δ .

Para poder pasar al límite bajo el signo integral en el sentido de H^s , en la expresión de $A_\varepsilon B_\delta$ (f) , bastará probar que para $|\alpha|\leq[|s|]+1$,

$$D_x^{\alpha}\Big\{e^{ix\eta}\Big\{e^{-iy\eta}\, D_y^{\alpha}\Big[\varphi(\delta y)\, b(y,\eta)\Big] * \frac{1}{\varepsilon^n}\hat{\varphi}(y/\varepsilon)\Big\}\Big\}\qquad \text{converge}$$

acotadamente en $x\in\mathbb{R}^n$, para $\varepsilon\to 0$, uniformemente respecto de η en compactos de $\mathbb{R}^n$.

Se comprueba que eso ocurre:

Esa derivada D_x^{α} , vale:

$$\sum_{\beta_1+\beta_2+\beta_3=\alpha} c_{\beta_j}\ (i\eta)^{\beta_1}\ e^{ix\eta}\Big\{(-i\eta)^{\beta_2}\ e^{-iy\eta}\ D_y^{\alpha+\beta_3}\Big[\varphi(\delta y)\ .$$

$$.\ b(y,\eta)\Big] * \frac{1}{\varepsilon^n}\hat{\varphi}\ (y/\varepsilon)\ .$$

$\frac{1}{\varepsilon^n}\hat{\varphi}(y/\varepsilon)$ es una identidad aproximada , según la manera en que se definió φ ; luego, cuando $\varepsilon\to 0$, esa convolución converge, para cada η fijo en $\mathbb{R}^n$, hacia $e^{-ix\eta}\, D_x^{\alpha+\beta_3}\Big[\varphi(\delta x)\, b(x,\eta)\Big]$, uniformemente en $\mathbb{R}^n$.

Además,

$$\Big|(-i\eta)^{\beta_2}\ e^{-iy\eta}\ D_y^{\alpha+\beta_3}\Big[\varphi(\delta y)\, b(y,\eta)\Big] * \frac{1}{\varepsilon^n}\hat{\varphi}\ (y/\varepsilon)\Big| \leq$$

$$\leq\ c\,\big|\eta^{\beta_2}\big|\ \ (1+|\eta|)^m\ ,\quad \text{independientemente de } \varepsilon,\delta\ .$$

Luego, en H^s se tiene que :

$$D_\eta^{\alpha}\, a(\ ,\eta)\ e^{ix\eta}\Big\{e^{-iy\eta}\ D_y^{\alpha}\Big[\varphi(\delta y)\, b(y,\eta)\Big] * \frac{1}{\varepsilon^n}\hat{\varphi}(y/\varepsilon)\Big\}\xrightarrow[\varepsilon\to 0]{}$$

$$\longrightarrow D_\eta^{\alpha}\, a(\ ,\eta)\ D_x^{\alpha}\Big[\varphi(\delta x)\, b(x,\eta)\Big]\ ,$$ uniformemente respecto de η en los compactos de $\mathbb{R}^n$.

Es decir que se ha podido pasar al límite en ε , en la primera sumatoria, obteniéndose:

$$\sum_{|\alpha|<N}\frac{i^{|\alpha|}}{\alpha!}\, D_\eta^{\alpha}\, a(\ ,\eta)\quad D_x^{\alpha}\Big[\varphi(\delta x)\, b(x,\eta)\Big]$$

Además, se ha tomado límite de tal manera, que se puede hacer $\varepsilon \to 0$ también en el correspondiente término de la integral que define $A_\varepsilon B_\delta (f)$.

Se analiza ahora el resto; también se fija δ .

$$\sum_{|\alpha|=N} \frac{N}{\alpha !} \frac{1}{(2\pi)^n} \int_0^1 (1-t)^{N-1} \int e^{i(y-x)(\xi-\eta)} D_\eta^\alpha a(\;,\eta+t(\xi-\eta)) \cdot$$

$$\cdot \varphi(\varepsilon\xi)\, \varphi(\delta y)\; b(y,\eta)\; (\xi-\eta)^\alpha \; dy\; d\xi\; dt .$$

Para pasar aquí al límite en el sentido de H^s , de tal manera que se pueda tomar límite bajo el signo integral en el otro término de la expresión de $A_\varepsilon B_\delta$, cuando $\varepsilon \longrightarrow 0$, será suficiente probar que converge en H^s , uniformemente respecto de η en los compactos de $\mathbb{R}^n$.

Se analiza cada término:

Como antes, es :

$$(\xi-\eta)^\alpha e^{i(y-x)(\xi-\eta)} = (-i)^{|\alpha|} D_y^\alpha \; e^{i(y-x)(\xi-\eta)}$$

Luego, puede reemplazarse e integrar por partes .

Fijado $M \geqslant 1$, vale:

$$\left[1+(-\Delta_y)^M\right] e^{iy(\xi-\eta)} = (1+|\xi-\eta|^{2M})\; e^{iy(\xi-\eta)}$$

Entonces, volviendo a integrar por partes, es, a menos de constantes:

$$\int e^{i(y-x)(\xi-\eta)} \frac{D_\eta^\alpha a(\;,\eta+t(\xi-\eta))}{1+|\xi-\eta|^{2M}} \varphi(\varepsilon\xi) \;\cdot$$

$$\cdot \left[1+(-\Delta_y)^M\right] D_y^\alpha \left[\varphi(\delta y)\; b(y,\eta)\right] \; dy \quad d\xi \;.$$

Además, fijado $K \geqslant 1$, también vale:

$$\left[1+(-\Delta_\xi)^K\right] e^{i(y-x)\xi} = (1+|y-x|^{2K})\; e^{i(y-x)\xi} \;.$$

Luego, se reemplaza y se integra por partes una vez más:

$$\int e^{i(y-x)(\xi-\eta)} \left[1+(-\Delta_\xi)^K\right] \left[\frac{D_\eta^\alpha a(\;,\eta+t(\xi-\eta))\, \varphi(\varepsilon\xi)}{1+|\xi-\eta|^{2M}}\right] \cdot$$

$$\cdot \frac{1}{1+|x-y|^{2K}} \left[1+(-\Delta_y)^M\right] D_y^\alpha \left[\varphi(\delta y)\; b(y,\eta)\right] \; dy \quad d\xi .$$

En total, ésta es la integral que hay que analizar, para pasar al límite. Se la puede escribir como combinación lineal de términos de la forma:

$$\int e^{i(y-x)(\xi-\eta)}\, D_\xi^{\beta_1} \frac{1}{1+|\xi-\eta|^{2M}}\, D_\eta^{\beta_2+\gamma} a(\;,\eta+t(\xi-\eta)) \,.$$

$$\cdot\, \varepsilon^{|\beta_3|} D_\xi^{\beta_3} \varphi(\varepsilon\xi) \frac{1}{1+|x-y|^{2K}} D_y^{\gamma_1+\alpha} b(y,\eta)\, \delta^{|\gamma_2|} \,.$$

$$\cdot\, D_y^{\gamma_2} \varphi(\delta y)\; dy\; d\xi \,.$$

La integral en y es:

$$D_y^{\gamma_1+\alpha} b(y,\eta)\, \delta^{|\gamma_2|} D_y^{\gamma_2} \varphi(\delta y) * \frac{e^{-iy(\xi-\eta)}}{1+|y|^{2K}} = b_\delta(x,\xi,\eta)$$

Luego la integral puede escribirse como:

$$\int a_\varepsilon^{\beta_3}(\;,\xi,\eta)\; b_\delta(x,\xi,\eta)\; d\xi = F_{\varepsilon,\delta}^{\beta_3}(x,\eta) \,.$$

Se destaca el subíndice β_3, porque el análisis del término correspondiente dependerá de si vale cero o no .

Se considera un término tal que $|\beta_3| > 0$:

$$\| F_{\varepsilon,\delta}^{\beta_3}(\;,\eta)\|_{H^s} \leq c \int \| a_\varepsilon^{\beta_3}(\;,\xi,\eta)\|_{H^s} \,.$$

$$\cdot \sup_{\substack{x\in\mathbb{R}^n \\ |\lambda|\leq[|s|]+1}} \left| D_x^\lambda\; b_\delta(x,\xi,\eta)\right|\; d\xi$$

Se va a estimar cada factor:

$$\| a_\varepsilon^{\beta_3}(\;,\xi,\eta)\|_{H^s} \leq c\, \frac{1}{1+|\xi-\eta|^{2M}}\, \varepsilon^{|\beta_3|} (1+|\eta+t(\xi-\eta)|)^{m-\rho|\beta_2+\alpha|} \leq$$

$$\leq c\, \frac{1}{1+|\xi-\eta|^{2M}}\, \varepsilon^{|\beta_3|} (1+|\eta|)^{m-\rho N} (1+|\xi-\eta|)^{|m-\rho N|} \,.$$

Para estimar el otro factor, debe recordarse que proviene de una convolución .

$$D_x^\lambda b_\delta(x,\xi,\eta) = \sum_{\lambda_1\leq\lambda} c_{\lambda_1} D_y^{\gamma_1+\alpha+\lambda-\lambda_1} b(y,\eta)\; \delta^{|\gamma_2+\lambda_1|} D_y^{\gamma_2+\lambda_1}\varphi(\delta y) *$$

$$* \frac{e^{-iy(\xi-\eta)}}{1+|y|^{2K}}$$

Luego, para un valor de K adecuado, puede acotarse:

$$\left| D_x^\lambda\; b_\delta(x,\xi,\eta)\right| \leq c \sum_{\lambda_1\leq\lambda} \left\| \frac{1}{1+|y|^{2K}} \right\|_{L^1} \,.$$

$$\cdot\ \delta^{|\gamma_2+\lambda_1|} \sup_{y\in\mathbb{R}^n} \left| D_y^{\gamma_1+\alpha+\lambda-\lambda_1} b(y,\eta)\right| \leq C\,(1+|\eta|)^{m_1},$$

independientemente de $0<\delta\leq 1$.

Entonces, se tiene:

$$\left\| F^{\beta_3}_{\varepsilon,\delta}(\ ,\eta)\right\|_{H^s} \leq C\ \varepsilon^{|\beta_3|}\ (1+|\eta|)^{m+m_1-\rho N}\ .$$

$$\cdot \int (1+|\xi-\eta|)^{|m-\rho N|-2M}\, d\xi$$

Para un valor de M adecuado, esa integral converge.

Como se ha supuesto que $|\beta_3|>0$, resulta que al tomar límite para $\varepsilon\to 0$, esos términos convergen a cero en H^s, uniformemente respecto de η en compactos de $\mathbb{R}^n$ y de $0<\delta\leq 1$.

Se analiza ahora el término con $\beta_3=0$.

Es decir:

$$F^{0}_{\varepsilon,\delta}(x,\eta) = \int a^{0}_{\varepsilon}(\ ,\xi,\eta)\ b_{\delta}(x,\xi,\eta)\ d\xi\ .$$

Sea $a^0(\ ,\xi,\eta)$, el factor en el que se ha eliminado la función de truncación $\varphi(\varepsilon\xi)$.

Sea $F^0_\delta(x,\eta)$ la función que resulta de calcular

$$\int a^0(\ ,\xi,\eta)\, b_\delta(x,\xi,\eta)\, d\xi$$

Para M adecuado, esa integral existe, como elemento de H^s.

En efecto, hay que acotar de manera semejante a lo que acaba de hacerse:

$$\left\| F^0_\delta(\ ,\eta)\right\|_{H^s} \leq \int \left\| a^0(\ ,\xi,\eta)\right\|_{H^s}\ .$$

$$\cdot \sup_{\substack{x\in\mathbb{R}^n\\ |\lambda|\leq[|s|]+1}} \left| D_x^{\lambda}\ b_\delta(x,\xi,\eta)\right|\ d\xi \leq$$

$$\leq C\ (1+|\eta|)^{m+m_1-\rho N}\int (1+|\xi-\eta|)^{|m-\rho N|-2M}\ d\xi$$

y esta acotación es uniforme respecto de $0<\delta\leq 1$.

Lo que va a probarse ahora, es que existe en H^s el $\lim_{\varepsilon\to 0} F^0_{\varepsilon,\delta}(\ ,\eta) =$

$= F^0_\delta(\ ,\eta)$, uniformemente respecto de η en compactos de $\mathbb{R}^n$ y de $0<\delta\leq 1$.

$$\left\| F^0_{\varepsilon,\delta}(\ ,\eta) - F^0_\delta(\ ,\eta)\right\|_{H^s} \leq \int \left\| a^0_\varepsilon(\ ,\eta) - a^0(\ ,\eta)\right\|_{H^s}\ .$$

$$\cdot \sup_{\substack{x \in \mathbb{R}^n \\ |\lambda| \leq [|s|]+1}} \left| D_x^{\lambda} b_{\delta}(\ ,\xi ,\eta) \right| \ d\xi \ .$$

Según lo obtenido antes, esto puede acotarse con:

$$C \ (1+|\eta|)^{m+m_1-\rho N} \int (1+|\xi-\eta|)^{|m-\rho N|-2M} \ |\varphi(\varepsilon\xi)-1| \ d\xi \ .$$

Y esta acotación no depende de δ .

Para ξ fijo, es claro que el integrando $\underset{\varepsilon \to 0}{\longrightarrow} 0$; además se lo puede acotar con

$$C \ (1+|\xi-\eta|)^{|m-\rho N|-2M} \quad , \text{ integrable para } M \text{ adecuado} \ .$$

Luego, puede pasarse al límite bajo el signo integral, resultando que $F^{o}_{\varepsilon,\delta}(\ ,\eta) \underset{\varepsilon \to 0}{\longrightarrow} F^{o}(\ , \ )$ en H^{s} , uniformemente respecto de η en compactos de $\mathbb{R}^n$ y de $0 < \delta \leq 1$.

Recapitulando, lo que se ha probado en esta parte, es que el resto,

$$R^{N}_{\varepsilon,\delta}(\ ,\eta) = \int e^{i(y-x)(\xi-\eta)} \ a_{II}(\ ,\xi,\eta) \ \varphi(\varepsilon\xi) \ \varphi(\delta y) \ .$$

$$\cdot \ b(y,\eta) \ dy \ d\xi \ ,$$

converge en H^{s}, para $\varepsilon \longrightarrow 0$, uniformemente respecto de η en compactos de $\mathbb{R}^n$ y de $0 < \delta \leq 1$, a una función $R^{N}_{\delta}(\ ,\eta)$ tal que

$$\| R^{N}_{\delta}(\ ,\eta) \|_{H^{s}} \leq C \ (1+|\eta|)^{m+m_1-\rho N} \ ,$$

independientemente de δ .

Todo esto permite concluir el teorema de la siguiente forma:

$A_{\varepsilon} B_{\delta} \ (f)$ fue escrito como

$$\int e^{-ix\xi} \ c_{\varepsilon,\delta}(x,\eta) \ \hat{f}(\eta) \ d\eta \ ,$$

con

$$c_{\varepsilon,\delta}(x,\eta) = c^{N}_{\varepsilon,\delta}(x,\eta) + R^{N}_{\varepsilon,\delta}(x,\eta)$$

Estos dos términos, provienen de escribir $a(x,\xi)$ como su N - ésimo polinomio de Taylor, más el resto.

Para $\varepsilon \longrightarrow 0$, se probó que :

$$\int e^{-ix\eta} \ c^{N}_{\varepsilon,\delta}(x,\eta) \ \hat{f}(\eta) \ d\eta \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \int e^{-ix\eta} \left\{ \sum_{|\alpha|<N} \frac{i^{|\alpha|}}{\alpha!} \ D^{\alpha}_{\eta} a(\ ,\eta) \ D^{\alpha}_{x} \left[\varphi(\delta x) \ b(x,\eta) \right] \right\} \hat{f}(\eta) \ d\eta \ ,$$

en H^s .

Acaba de demostrarse, que el resto $R^N_{\varepsilon,\delta}(\ ,\eta)$ converge hacia cierta función $R^N_\delta(\ ,\eta)$ en el espacio H^s , cuando $\varepsilon \to 0$, uniformemente respecto de .

Como $A_\varepsilon B_\delta(f) \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} A\, B_\delta(f)$ en H^s , resulta que :

$$A\, B_\delta(f) = \int e^{-ix\eta}\left\{\sum_{|\alpha|<N} \frac{i^{|\alpha|}}{\alpha !} D^\alpha_\eta a(\ ,\eta)\ D^\alpha_x\left[\varphi(\delta x)\ b(x,\eta)\right]\right\}\hat{f}(\eta)\, d\eta +$$
$$+\int e^{-ix\eta} R^N_\delta(\ ,\eta)\ \hat{f}(\eta)\ d\eta \quad , \quad 0<\delta\leq 1 .$$

El último paso es entonces, tomar límite para $\delta \to 0$.

Según se vio al comienzo, $A\circ B_\delta(f) \xrightarrow[\delta\to 0]{} A\circ B(f)$ en H^s .

Dada $\psi \in C^{\infty}_0$, es :

$$\left|\left(e^{-ix\eta} D^\alpha_\eta a(\ ,\eta)\left\{D^\alpha_x\left[\varphi(\delta x)\ b(x,\eta)\right] - D^\alpha_x b(x,\eta)\right\} , \psi\right)_{H^s,H^{-s}}\right| =$$
$$= \left|\left(D^\alpha_\eta a(\ ,\eta)\ ,\ e^{-ix\eta}\left\{D^\alpha_x\left[\varphi(\delta x)\ b(x,\eta)\right] - D^\alpha_x b(x,\eta)\right\}.\psi\right)_{H^s,H^{-s}}\right| \leq$$
$$\leq \left\| D^\alpha_\eta\ a(\ ,\eta)\right\|_{H^s}\ \left\| E_{-\eta}\left\{D^\alpha_x\left[\varphi(\delta x)\ b(x,\eta)\right] - \right.\right.$$
$$\left.\left. - D^\alpha_x\ b(x,\eta)\right\}\psi\right\|_{H^{-s}}$$
$$\leq C\ (1+|\eta|)^{m-\rho|\alpha|+|s|}\ \left\|\left\{D^\alpha_x\left[\varphi(\delta x)\ b(x,\eta)\right] - D^\alpha_x\ b(x,\eta)\right\}.\psi\right\|_{H^{-s}}$$

Se analiza esa norma:

Puede acotarse con:

$$\left\|\left[\varphi(\delta x) - 1\right] D^\alpha_x\ b(x,\eta)\psi\right\|_{H^{-s}} + C\sum_{0<\alpha_1\leq\alpha} \delta^{|\alpha_1|}\left\| D^{\alpha_1}_x\varphi(\delta x)\ .\right.$$
$$\left. .\ D^{\alpha-\alpha_1}_x b(x,\eta)\psi\right\|_{H^{-s}}$$

Cada término de la sumatoria se mayora como:

$c\ \delta^{|\alpha_1|}(1+|\eta|)^{m_1} \xrightarrow[\delta\to 0]{} 0$, uniformemente respecto de η en compactos de $\mathbb{R}^n$.

En el otro término, se tiene la truncación en x de la función $D^\alpha_x b(x,\eta)$. $.\psi(x)$; según lo que se hizo en el teorema 2.2,

$$D^\alpha_x b(x,\eta)\ \psi(x)\ \ \varphi(\delta x) \xrightarrow[\delta\to 0]{} D^\alpha_x\ b(x,\eta)\ \psi(x) ,$$

en H^s , uniformemente respecto de η en compactos.

Además

$$\left\| D_x^\alpha b(x,\eta)\, \psi(x)\, \varphi(\delta x) \right\|_{\tilde{H}^s} \leq C \quad (1+|\eta|)^{m_1} ,$$

independientemente de .

Como la familia $\left\{ e^{-ix\eta}\, D_\eta^\alpha a(\ ,\eta)\, D_x^\alpha \left[\varphi(\delta x)\, b(x,\eta) \right] \right\}_{0<\delta\leq 1}$

está acotada en H^s uniformemente respecto de η en compactos, se ha probado en total que

$$e^{-ix\eta}\, D_\eta^\alpha\, a(\ ,\eta)\, D_x^\alpha \left[\varphi(\delta x)\, b(x,\eta) \right] \xrightarrow[\delta \to 0]{} e^{-ix}\, D_\eta^\alpha a(\ ,\eta)\, D_x^\alpha b(x,$$

débilmente en H^s y uniformemente respecto de η en compactos .

Luego, en ese sentido, puede también pasarse al límite en la sumatoria del segundo miembro.

En cuanto al término donde aparece $R_\delta^N(x,\eta)$, se recuerda la forma de esa función:

$$R_\delta^N(x,\eta) = \int e^{i(y-x)(\xi-\eta)} \left[1 + (-\Delta_\xi)^K \right] \left[\frac{D_\eta^\alpha\ a(\ ,\eta+t(\xi-\eta))}{1+|\xi-\eta|^{2M}} \right] \cdot$$

$$\cdot \frac{1}{1+|x-y|^{2K}} \left[1 + (-\Delta_y)^M \right] D_y^\alpha \left[\varphi(\delta y)\ b(y,\eta) \right] dy \quad d\xi \ .$$

Es decir, al tomar límite para $\varepsilon \to 0$, ha desaparecido la truncación en la variable ξ .

Lo que se quiere hacer ahora, es eliminar la truncación en y .

El tipo de acotaciones es semejante al que se usó en el otro término:

Se escribe:

$$R_\delta^N(x,\eta) = \int a(\ ,\xi,\eta) \left\{ \left[1 + (-\Delta_y)^M \right] D_y^\alpha \left[\varphi(\delta y)\, b(y,\eta) \right] * \right.$$
$$\left. * \frac{e^{-i(\xi-\eta)}}{1+|y|^{2M}} \right\} d\xi \, .$$

Para poder pasar al límite en la integral, bastará demostrar que

$R_\delta^N(\ ,\eta) \longrightarrow R^N(\ ,\eta)$ en H^s , débilmente y uniformemente respecto de η en los compactos de $\mathbb{R}^n$.

Como para M adecuado es

$\| R_\delta^N(\ ,\eta) \|_{H^s} \leq C \ (1+|\eta|)^{m_1+m-\rho N}$, independientemente de δ , se tendrá esa convergencia débil si $(R^N_\delta, \psi)_{H^s, H^{-s}} \xrightarrow[\delta\to 0]{} (R^N, \psi)_{H^s, H^{-s}}$

para cada $\psi \in C_0^\infty$.

Se omite la prueba de esto, pues, como ya se dijo, es parecida a lo hecho con el primer término.

Luego, se ha obtenido finalmente:

$$A \circ B\,(f) = \int e^{-ix\eta} \Big\{ \sum_{|\alpha|<N} \frac{i^{|\alpha|}}{\alpha !} D_x^\alpha\, b(x,\eta)\; D_\eta^\alpha\, a(\ ,\eta) \; + R^N(\ ,\eta) \Big\} \,.$$

$$. \hat{f}(\eta)\; d\eta \,.$$

Según el teorema 2.4 , cada término de la sumatoria pertenece a $S_\rho^{m+m_1-\rho|\alpha|, s}$.

Por otra parte, de la misma manera que se acotó $R^N_\delta(\ ,\eta)$, puede acotarse $R^N(\ ,\eta)$ y también sus derivadas, con lo cual se deduce que

$$R^N \in S_\rho^{m+m_1-\rho N, s}$$

Luego, se ha comprobado la existencia de $c \in S_\rho^{m+m_1, s}$ tal que

$$A \circ B\,(f) = \int e^{-ix\eta}\, c(\ ,\eta)\; \hat{f}(\eta)\; d\eta \;,\quad f \in S \,.$$

Y además, según la observación 2.2 ,

$$c(\ ,\eta) \sim \sum_\alpha \frac{i^{|\alpha|}}{\alpha !} D_\eta^\alpha\, a(\ ,\eta)\; D_x^\alpha\, b(x,\eta) \,.$$

Esto concluye el teorema. #

<u>Observación 4.2</u>:

También aquí, puede obtenerse un resultado de continuidad entre el símbolo de $A \circ B$ y los símbolos de A y de B .

Se va a demostrar que la aplicación

$$\begin{array}{ccc} S_\rho^{m,s} \times S_\rho^{m_1} & \longrightarrow & S_\rho^{m+m_1, s} \\ (a\,,\,b) & \longrightarrow & c \end{array}$$

es continua.

En efecto, siguiendo la notación del teorema, el símbolo c puede escribirse para $N = 1$, como:

$$c(\ ,\eta) = a(\ ,\eta)\; b(\ ,\eta) + R^1(\ ,\eta)$$

Según el teorema 2.4 , la aplicación

$$(a\,,\,b) \longrightarrow a.b$$

es continua.

Luego, basta analizar el resto .

$$R^1(\ ,\eta) = \sum_{j=1}^{n} \int e^{i(y-x)(\xi-\eta)} \left[1+(-\Delta_\xi)^K\right] \left[\frac{\frac{\partial a}{\partial \xi_j}(\ ,\eta+t(\xi-\eta))}{1+|\xi-\eta|^{2M}} \right]$$

$$\cdot \frac{1}{1+|x-y|^{2K}} \left[1+(-\Delta_y)^M\right] \frac{\partial b}{\partial y_j}(y,\eta) \quad dy \quad d\xi \ .$$

Se escribe, como antes:

$$R^1(\ ,\eta) = \sum_{j=1}^{n} \int a_j(\ ,\xi,\eta) \left\{ \left[1+(-\Delta_y)^M\right] \frac{\partial b}{\partial y_j}(\ ,\eta) * \right.$$

$$\left. * \frac{e^{-iy(\xi-\eta)}}{1+|y|^{2K}} \right\} d\xi \ .$$

Se acota $R^1(\ ,\eta)$, pues el trabajo con las derivadas en η es análogo; basta sólo adoptar una representación con valores de K y M, adecuados.

$$\|R^1(\ ,\eta)\|_{H^s} \leqslant C\, P^{2K+1}_{m,s}(a)\ (1+|\eta|)^{m-\rho}\ \|b\|_\ell\ (1+|\eta|)^{m_1} \ .$$

$$\cdot \int (1+|\xi-\eta|)^{|m-\rho|-2M}\ d\xi \int (1+|y|)^{-2K}\ dy$$

donde $\|\ \|_\ell$ indica una seminorma en $S^{m_1}_\rho$.

Esto muestra la continuidad.

Además, como en este teorema 4.3 se empleó una demostración directa y no basada en argumentos de densidad, se obtiene mayor precisión, em cuanto a los espacios en los que se puede probar la continuidad.

<u>Observación</u> <u>4.3</u>:

Con técnicas semejantes a las del teorema 4.2, que no se detallarán, es posible demostrar el siguiente resultado:

Si $A \in \mathcal{H}^{m,s}_\rho$, $B \in \mathcal{J}^{m_1}_\rho$ y el símbolo de B, $b(x,\xi)$ tiene soporte compacto en la variable x , entonces existe $c \in H^{m+m_1,s}_\rho$ tal que

$$A \circ B\,(f) = \int e^{-ix\xi}\, c(\ ,\xi)\ \hat{f}(\xi)\quad d\xi \quad ,\ f \in S$$

O sea, $A \circ B \in \mathcal{H}^{m+m_1,s}_\rho$.

Además, si $a(\ ,\xi)$ es el símbolo del operador A , para cada $N \geqslant 1$, puede escribirse:

$$c(\ ,\xi) = \sum_{|\alpha| < N} \frac{i^{|\alpha|}}{\alpha!} D_{\xi}^{\alpha} a(\ ,\xi)\, D_x^{\alpha} b(x,\xi) + R^N(\ ,\xi)$$

donde $R^N \in H_{\rho}^{m+m_1-\rho N, s-N}$.

5. EJEMPLOS Y APLICACIONES

Se detallarán ahora algunos ejemplos de símbolos y operadores en las clases introducidas:

<u>Ejemplo 1</u>

Si $a = a(x) \in H^s$ y $b(x,\xi)$ es un símbolo en la clase S_{ρ}^{m} , entonces $a(x).b(x,\xi) \in S_{\rho}^{m,s}$.

Este es en realidad un caso particular de lo que se enuncia en el teorema 2.4 Precisamente, este teorema permite construir, conocida una función $a(\ ,\xi) \in \in H_{\rho}^{m,s,k}$, otros ejemplos, pues dado $b \in S_{\rho}^{m_1}$, prueba que $a.b \in H_{\rho}^{m+m_1,s,k}$.

<u>Ejemplo 2</u>

Si $\delta(x-\xi)$ indica la medida de Dirac concentrada en el punto ξ , $\delta(x-\xi) \in H_0^{0,s}$, para $s < -n/2$.

<u>Demostración:</u>

Fijado $\xi \in \mathbb{R}^n$, $F_x\left[\delta(x-\xi)\right](\theta) = e^{i\theta\xi}$; luego, fijado ξ , $\delta(x-\xi) \in H^s$, para $s < -n/2$.

Quiere verse ahora que es contimua como función de $\mathbb{R}_{\xi}^n$ en H^s .

$$\| \delta(x-\xi_o-h) - \delta(x-\xi_o) \|_{H^s} = \left\| (1+|\theta|^2)^{s/2} e^{i\theta\xi_o}\left[e^{i\theta h} - 1\right] \right\|_{L^2_\theta}$$

$$= \left\| (1+|\theta|^2)^{s/2} (e^{i\theta h} - 1) \right\|_{L^2_\theta} \xrightarrow[h \to 0]{} 0 ,$$ lo cual se comprueba aplicando el teorema de convergencia mayorada de Lebesgue.

En cuanto a la derivabilidad:

Se probará por inducción sobre $|\alpha|$, que $D_\xi^\alpha \delta(x-\xi) = (-1)^{|\alpha|}\delta^{(\alpha)}(x-\xi)$, como función continua de $\mathbb{R}_\xi^n$ en $H^{s-|\alpha|}$.

Para $|\alpha| = 1$, si $h = (0,\dots,h_j,0,\dots0)$, es:

$$\left\| \frac{\delta(x-\xi_o-h) - \delta(x-\xi_o)}{h_j} + \delta^{(\alpha)}(x-\xi_o) \right\|_{H^{s-1}} = \left\|(1+|\theta|^2)^{\frac{s-1}{2}}\left[\frac{e^{i\theta(\xi_o+h)} - e^{i\theta\xi_o}}{h_j} - i\theta_j e^{i\theta\xi_o}\right]\right.$$

$$= \left\| (1+|\theta|^2)^{(s-1)/2} \left[\frac{e^{i\theta h}-1}{h_j} - i\theta_j\right]\right\|_{L^2_\theta} \xrightarrow[h\to 0]{} 0 \quad \text{, nuevamen-}$$

te aplicando convergencia mayorada.

El paso inductivo se comprueba de la misma manera.

Se ve ahora que $D_\xi^\alpha\delta(x-\xi)$ es continua de $\mathbb{R}_\xi^n$ en $H^{s-|\alpha|}$:

$$\left\| D_\xi^\alpha \delta(x-\xi_o-h) - D_\xi^\alpha\delta(x-\xi_o)\right\|_{H^{s-|\alpha|}} =$$

$$= \left\| \delta^{(\alpha)}(x-\xi_o-h) - \delta^{(\alpha)}(x-\xi_o)\right\|_{H^{s-|\alpha|}} \leq$$

$$\leq \left\|\delta(x-\xi_o-h) - \delta(x-\xi_o)\right\|_{H^s} \xrightarrow[h\to 0]{} 0$$

Luego, $\delta(x-\xi) \in A(\mathbb{R}_\xi^n ; H^s)$ si $s < -n/2$.

Finalmente, dada $\alpha \in \mathbb{N}^n$, es:

$$\left\| D_\xi^\alpha\delta(x-\xi)\right\|_{H^{s-|\alpha|}} = \left\|(-1)^{|\alpha|}\delta^{(\alpha)}(x-\xi)\right\|_{H^{s-|\alpha|}} \leq$$

$$\leq \left\|\delta(x-\xi)\right\|_{H^s} = \left\|(1+|\theta|^2)^{s/2} e^{i\theta\xi}\right\|_{L^2_\theta} \leq C \;.\#$$

Dado ahora un símbolo $b(\xi) \in S_\rho^m$, se comprueba sin dificultad que $b(\xi).\,\delta(x-\xi) \in H_o^{m,s}$.

Ejemplo 3

De manera semejante al ejemplo anterior, se comprueba que, en una variable, la distribución $vp\,\frac{1}{x-\xi}$ (valor principal) pertenece al espacio $H_o^{0,s}$, si $s < -1/2$.

Ejemplo 4

Se considera un operador diferencial lineal

$$P(x\,;D) = \sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha(x)\, D^\alpha$$

Para cada α , $a_\alpha \in H^{s_\alpha}$, para cierto $s_\alpha \in \mathbb{R}$.

Entonces, $P(x ; D)$ es un operador en la clase $\mathcal{S}_1^{m,s}$, donde

$s = \min (s_\alpha)$ y m es el orden de P.

En efecto, dada $f \in S$, transformando Fourier, se comprueba que

$$P(x ; D)(f) = \int e^{-ix\xi} \Big[\sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) \; (-i\xi)^\alpha \Big] \; \hat{f}(\xi) \; d\xi \; .$$

La función $\sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) \; (-i\xi)^\alpha$, que resulta ser el símbolo del operador , pertenece a $S_1^{m,s}$

En lo que sigue, van a usarse algunos resultados sobre distribuciones. (Ver [13]).

Ejemplo 5

Se considera el operador diferencial $|x|^{2h}(1 - \Delta^\ell) = P$, con $x \in \mathbb{R}^3$, h , $\ell \geq 1$.

Su símbolo es $p(x , \xi) = |x|^{2h} (1 + |\xi|^{2\ell})$

$$F\Big[\; Pf \frac{1}{|x|^{2h}} \Big] = C \frac{1}{|x|^{3-2h}} \; .$$

No es necesario colocar delante de $\dfrac{1}{|x|^{3-2h}}$ el signo de parte finita, pues es una función de cuadrado localmente integrable $\forall \; h \geq 1$.

Luego $Pf \dfrac{1}{|x|^{2h}} \in H^s$ si $s < -2(h-1)-1/2$

Como la función $\dfrac{1}{1 + |\xi|^{2\ell}} \in S_1^{-2\ell}$, del ejemplo 1 resulta que

$$Pf \frac{1}{|x|^{2h} \; (1 + |\xi|^{2\ell})} \in S_1^{-2\ell, s}$$

A partir de esta observación, se va a construir en cierta clase $\mathcal{S}_1^{-2\ell, t}$ un operador A con símbolo $a(\; , \xi)$ tal que

$$\sigma(A \circ P) \sim \sum_\alpha \frac{i^{|\alpha|}}{\alpha !} \; D_\xi^\alpha \; a(\; , \xi) \; D_x^\alpha \; p(x , \xi) \sim 1 \; .$$

En este sentido, se llamará al operador A H^t - parametriz de P .

Formalmente se escribe:

$$a(\ ,\xi) = \sum_{j \geq 0} a_j(\ ,\xi)$$

y se impone la condición:

$$1 \sim \sum_{|\alpha|+j \geq 0} \frac{i^{|\alpha|}}{\alpha!} D_\xi^\alpha\, a_j(\ ,\xi)\ D_x^\alpha\, p(x,\xi)$$

Como p es un polinomio en x de grado 2h, $|\alpha| + j$ varía hasta 2h .

Si $|\alpha| + j = 0$, se obtiene la condición

$$a_o(\ ,\xi) \cdot p(x,\xi) = 1 \ .$$

Luego, $a_o(\ ,\xi) = \mathrm{Pf}\ \dfrac{1}{p(x,\xi)}$, símbolo que pertenece a la clase $S_1^{-2\ell, s_o}$, según se vio antes, para $s_o < -2(h-1) - 1/2$

Si $|\alpha|+j = 1$, la condición que resulta es:

$$a_1(\ ,\xi) \cdot p(x,\xi) + i\sum_{r=1}^{3} \frac{\partial}{\partial \xi_r}\, a_o(\ ,\xi) \cdot \frac{\partial}{\partial x_r}\, p(x,\xi) = 0$$

Es decir,

$$a_1(\ ,\xi) \cdot p(x,\xi) = \mathrm{Pf}\ \frac{1}{|x|^{2h}}\ i \sum_{r=1}^{3} \frac{2\ell\,\xi_r\,|\xi|^{2\ell-2}}{(1+|\xi|^{2\ell})^2}\ 2h\, x_r \ .$$

$$\cdot\, |x|^{2h-2}\,(1+|\xi|^{2\ell}) =$$

$$= i\sum_{r=1}^{3} 4\ell\, h\ \frac{x_r}{|x|^2}\ \frac{\xi_r\,|\xi|^{2\ell-2}}{(1+|\xi|^{2\ell})} \ .$$

$$a_1(\ ,\xi) = i\sum_{r=1}^{3} 4\ell\, h\ \mathrm{Pf}\ \frac{x_r}{|x|^{2h+2}}\ \frac{\xi_r\,|\xi|^{2\ell-2}}{(1+|\xi|^{2\ell})^2}$$

Como antes, se comprueba que $a_1(\ ,\xi) \in S_1^{-2\ell-1, s_1}$,

si $s_1 < -2h + 1/2$

En general, si $0 \leq j \leq 2h$, resulta que puede obtenerse el j-ésimo término $a_j(\ ,\xi)$ en la clase $S_1^{-2\ell-j,\ s_j}$, si $s_j < -2h + 3/2 - j$

O sea que la suma $\sum_{j=0}^{2h} a_j(\ ,\xi)$ define un operador A en la clase $\mathcal{S}_1^{-2\ell, s}$, si $s < -4h + 3/2$. Este operador cumple

$$A \circ P = I$$

módulo operadores H^s - regularizantes .

REFERENCIAS

[1] . Beals, R. : "A general calculus of pseudodifferential operators". Duke Math. J. vol. 42, nº 1, March 1975.

2 . Beals, R. y Feffermann, Ch. : "Spatially inhomogeneous pseudodifferential operators, I". Comm. on Pure and Appl. Math., vol 27, 1 - 24, (1974).

[3] . Calderón, A. P. : "Uniqueness in the Cauchy problem of partial differential equations". Amer. J. Math., vol. 80, (1958), pp. 16 - 36.

[4] . ———— "Existence and uniqueness theorems for systems of partial differential equations". Symposium of fluid dynamics, Univ. of Maryland, College Park, Md., 1961.

[5] . ———— "Lebesgue spaces of differentiable functions and distributions". Proc. of Symp. in Pure Math., vol. 6, P. D. E., A. M. S., (1961), pp. 33 - 49.

[6] . ———— "Lecture notes on pseudodifferential operators and elliptic boundary value problems, I". Cursos de matemática, 1. Publicación del Instituto Argentino de Matemática.

[7] . Calderón, A. P. y Zygmund, A. : "Singular integral operators and differential equations". Amer. J. Math., vol. 79, (1957), pp. 901 - 921.

[8]. . Garsoux, J. : "Espaces vectoriels topologiques et distributions". Dunod, Paris.

[9] . Hille, E. y Phillips, R. S. : "Functional analysis and semigroups". Coll. Publ. A. M. S., vol. 31, (1957).

[10] . Hörmander, L. : "Pseudodifferential operators". Comm. Pure Appl. Math., vol. 18, (1965), pp. 501 - 517.

[11] . ———— "Pseudodifferential operators and hypoelliptic equations". Proc. Symp. Pure Math., vol. 10, A. M. S. Providence, R. I., 1966, pp. 138-183.

[12] . Kohn, J. J. y Nirenberg, L. : "An algebra of pseudodifferential operators". Comm. Pure and Appl. Math., vol. 18 (1965), pp. 269 - 305.

[13] . Schwartz, L. : "Théorie des distributions". Tomos I y II, Hermann, Paris.