

Tesis de Posgrado

Teoría lineal y no lineal de las interacciones ondas-partículas en plasmas homogéneos e inhomogéneos

Welti, Reinaldo

1976

Tesis presentada para obtener el grado de Doctor en Ciencias Físicas de la Universidad de Buenos Aires

Este documento forma parte de la colección de tesis doctorales y de maestría de la Biblioteca Central Dr. Luis Federico Leloir, disponible en digital.bl.fcen.uba.ar. Su utilización debe ser acompañada por la cita bibliográfica con reconocimiento de la fuente.

This document is part of the doctoral theses collection of the Central Library Dr. Luis Federico Leloir, available in digital.bl.fcen.uba.ar. It should be used accompanied by the corresponding citation acknowledging the source.

Cita tipo APA:

Welti, Reinaldo. (1976). Teoría lineal y no lineal de las interacciones ondas-partículas en plasmas homogéneos e inhomogéneos. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad de Buenos Aires. http://digital.bl.fcen.uba.ar/Download/Tesis/Tesis_1496_Welti.pdf

Cita tipo Chicago:

Welti, Reinaldo. "Teoría lineal y no lineal de las interacciones ondas-partículas en plasmas homogéneos e inhomogéneos". Tesis de Doctor. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad de Buenos Aires. 1976.

http://digital.bl.fcen.uba.ar/Download/Tesis/Tesis_1496_Welti.pdf

EXACTAS UBA

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales



UBA

Universidad de Buenos Aires

UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS
Y NATURALES

TESIS DE DOCTORADO
EN CIENCIAS FÍSICAS

presentada

por

RENILDO ALBERTI

TEORÍA LINEAL Y NO LINEAL DE LAS INTERACCIONES
ONDAS - PARTICULAS EN PLASMAS HOMOGÉNEOS E INHOMOGÉNEOS

Buenos Aires, junio 1976

1000

1000

INDICE

INTRODUCCION.....	1
Referencias	4
CAPITULO I : ECUACION DE VLASOV	5
CAPITULO II : EFECTO LANDAU LINEAL	
2.1 Amortiguamiento Landau	9
2.2 Interpretación física del efecto Landau	15
2.3 Límite de validez del efecto Landau	19
Referencias	21
CAPITULO III : AMORTIGUAMIENTO NO LINEAL DE LAS OSCILACIONES DE PLASMA	
3.1 Hechos experimentales	22
3.2 Teoría no lineal del amortiguamiento sin colisiones	23
3.3 Interpretación física	27
3.4 Dependencia del amortiguamiento Landau de la amplitud de la onda	30
3.5 Caso en que el plasma es inicialmente inestable	32
Referencias	33
CAPITULO IV : TURBULENCIA DEBIL - TEORIA CUASI LINEAL	
4.1 Introducción	35
4.2 Teoría general	36
4.3 Ecuación de difusión de las partículas resonantes	38
4.4 Partículas no resonantes	42
4.5 Espectro del campo eléctrico	43
4.6 Inestabilidad plasma - haces. Teoría lineal	44
4.7 Inestabilidad plasma-haces. Teoría cuasi lineal	45
4.8 Rango de validez de la teoría cuasi lineal	49
4.9 Ecuación de Fokker - Planck para las partículas resonantes ..	51
Referencias	54

CAPITULO V : EFECTO DE LA INHOMOGENEIDAD SOBRE EL AMORTIGUAMIENTO
NO LINEAL DE LAS ONDAS MONOCROMATICAS

5.1	Introducción	55
5.2	Ecuación de Poisson en un plasma inhomogeneo	55
5.3	Interacción de una onda con una partícula en un plasma inhomogéneo	57
5.4	Inhomogeneidad fuerte y amortiguamiento Landau	59
5.5	Inhomogeneidad débil y amortiguamiento Landau	64
5.6	Conclusión	66
	Referencias	67

CAPITULO VI : ONDAS MONOCROMATICAS Y EFECTOS DE LA INHOMOGENEIDAD.
APLICACIONES A LA GEOFISICA EXTERNA

6.1	Introducción	68
6.2	Efecto de la inhomogeneidad del medio sobre el atrapamiento	69
6.3	Efecto del atrapamiento sobre el nivel de saturación de la onda	70
6.4	Difusión por ondas electromagnéticas en un medio inhomogéneo	73
6.5	Interpretación del espectro en frecuencias de las micropulsaciones llamadas "perlas"	77
6.6	Teoría de la difusión por ondas electromagnéticas en un medio inhomogéneo	82
	Referencias	86

INTRODUCCION

En este trabajo nos interesamos unicamente en los plasmas completamente ionizados para los cuales el número de partículas dentro de la esfera de Debye es muy grande. En estas circunstancias el comportamiento colectivo del plasma está gobernado por la ecuación de Vlasov, cuyos fundamentos y límites de aplicación se tratan brevemente en el Capítulo I .

El hecho más característico de un plasma es que este contiene un espectro de oscilaciones colectivas conocidas como ondas de plasma. La frecuencia y la velocidad de propagación de estas ondas están determinadas por la magnitud del vector de onda y por los parámetros macroscópicos del plasma, por ejemplo : la densidad, la dispersión de las velocidades promedios de las partículas, la intensidad del campo magnético, etc. Esto refleja el hecho de que todas las partículas del plasma toman parte en las oscilaciones del plasma.

La situación es diferente en lo que se refiere al coeficiente de amplificación (o amortiguamiento) de estas oscilaciones. Este está determinado por detalles más finos de la distribución de la partícula en el espacio de las velocidades. Un papel fundamental juegan aquí las partículas resonantes, esto es aquellas cuyas velocidades satisfacen la condición $\omega_k - \bar{k} \cdot \bar{V}_R = 0$, donde ω_k es la frecuencia y \bar{k} el número de onda de la onda y \bar{V}_R es la velocidad de la partícula. Las partículas que viajan con la velocidad resonante \bar{V}_R tienen una fase constante respecto al campo eléctrico de la onda. Es de esperar entonces un fuerte intercambio de energía entre las ondas y estas partículas. Esta fuerte interacción se refleja en el hecho de que las ecuaciones lineales de movimiento son singulares.

En el Capítulo II se estudia la etapa lineal de esta interacción. Sus resultados son aplicables solamente para el comienzo de la interacción (Landau (1945), Dawson (1961)).

En una etapa posterior se debe tener en cuenta la variación de la trayectoria de la partícula debido a su interacción con la onda. La ecuación de

movimiento de la partícula, que resulta no lineal con esta consideración, indica que la partícula oscila en el pozo de potencial de la onda con una frecuencia $\omega_T = (ekE/m)^{1/2}$, donde E es la amplitud del campo eléctrico de la onda. Como las partículas resonantes oscilan en el pozo de potencial de la onda la fase relativa entre la partícula y la onda tiene la misma probabilidad de incrementar o decrecer si consideramos tiempos grandes comparados con el período de esta oscilación. El intercambio de energía entre la partícula y la onda tiende entonces a hacerse nulo (O'Neil, (1965)). En el Capítulo III se estudia en detalle esta interacción no lineal entre ondas monocromáticas y partículas.

La naturaleza inestable de un sistema depende esencialmente de la forma de la función de distribución de equilibrio f_0 . Para muchos tipos de inestabilidades, el sistema puede resultar estable cambiando la forma de la función de distribución en un dominio del espacio de las fases que contenga una fracción pequeña del número total de partículas. Drumond y Pines, (1961), Vedenov y Sagdeev (1961) y otros han demostrado que este cambio puede ser producido por las mismas fluctuaciones y que se puede llegar a la estabilización con un pequeño cambio relativo en la energía de las partículas. En estos casos el nivel de las fluctuaciones puede permanecer pequeño durante el proceso de estabilización. Es en estos casos en los cuales va a ser posible aplicar la teoría cuasi lineal o teoría de la turbulencia débil que se desarrolla en el Capítulo IV. En este capítulo también mostramos que si aplicamos la ecuación de Fokker - Planck a la interacción de ondas electrostáticas y partículas obtenemos la ecuación de difusión para las partículas resonantes de un modo más simple que con la teoría cuasi lineal (Laval y Pellat, 1972).

En el Capítulo V se estudia la evolución de una onda electrostática monocromática que se propaga en un medio inhomogéneo. La introducción de la inhomogeneidad a lo largo del campo magnético modifica la ecuación de mo-

movimiento de las partículas resonantes ya que la velocidad de fase de la onda varía punto a punto. Es interesante remarcar que en este caso se resuelve la singularidad que aparece, en medios homogéneos, en las ecuaciones lineales de movimiento de las partículas. En la ecuación de movimiento expresada en el sistema que se desplaza a la velocidad resonante V_R aparece una fuerza que está ligada al cambio de sistema no galileano. Esta fuerza, que traduce el efecto de la inhomogeneidad, tiende a oponerse al atrapamiento. Debido a esto, el coeficiente de amortiguamiento Landau en su límite asintótico no lineal, como el nivel de saturación de las ondas, es completamente diferente al caso homogéneo (Asseo et al, 1972).

En el Capítulo VI se estudia la interacción "giroresonante" de una partícula con una onda electromagnética circularmente polarizada que se propaga en un medio inhomogéneo. Una interacción giroresonante se produce cuando la partícula en su sistema de centro de guía ve al campo eléctrico de la onda rotar a una frecuencia igual a su propia frecuencia de ciclotrón; es decir cuando $\Omega_c = \omega - \vec{k} \cdot \vec{V}_R$. Se estudian en detalle las interacciones protón - ondas levóginas, Ω_c es entonces la frecuencia de ciclotrón de los protones, k y ω el número de onda y la frecuencia de la onda y V_R la velocidad resonante de la partícula paralela al campo magnético. Como las consecuencias de esta interacción serán aplicadas a la geofísica externa este campo magnético es el campo magnético terrestre.

El número de onda k de la onda y la frecuencia de ciclotrón varían punto a punto de acuerdo a la relación de dispersión en medio inhomogéneo y al modelo de campo magnético utilizado. Al orden más bajo, el movimiento de la partícula está determinado por la constancia de la energía y del primer invariante adiabático (el momento magnético). Es de esperar entonces que la partícula durante su ida y vuelta entre sus puntos espejos tenga una interacción resonante con la onda en dos puntos solamente de la línea de fuerza (simétricos con respecto al ecuador de la línea de fuerza magnética terrestre considerada).

Cada resonancia puede ser considerada como una colisión en la cual la energía W y el momento magnético μ cambian, el signo y el valor de $\delta\mu$ y δW dependen de la fase de la partícula respecto de la onda durante la resonancia. Si suponemos que no hay coherencia de fase entre una resonancia y la siguiente se puede describir al efecto de las mismas sobre la función de distribución mediante una ecuación de difusión del tipo Fokker - Planck (Melti et al, 1973). Este hecho es de singular importancia ya que se muestra que la teoría cuasi lineal es aplicable, a pesar del carácter monocromático de la onda, si el medio es inhomogéneo.

Se aplican estos resultados (Roux et al, 1973) a la interpretación del trabajo de Wehrlin et al (1973) que muestra que las ondas "en perlas" (0,2 a 5 Hz.) que se propagan a lo largo de las líneas del campo magnético terrestre en el modo iónico ciclotrónico tienen una estructura interna. Se evalúa además, utilizando la teoría desarrollada en el Capítulo V, el nivel de saturación de estas ondas.

Asseo, E., G. Laval, R. Pellat, R. Melti y A. Roux; J. Plasma Phys., 8, 341 (1972)

Dawson, J.; Phys. Fluids, 4, 869, (1961)

Landau, L.; J. Phys. U.S.S.R., 2, 25 (1945)

Laval G. y R. Pellat; "Course des Houches", 1972, a ser publicado.

O'Neil, T.; Phys. Fluids, 8, 2255 (1965)

Roux, A., R. Gendrin, N. Wehrlin, R. Pellat y R. Melti ; J. Geophys. Res., 78, 3176, (1973)

Vedenov A., E. Velikov y R. Sagdeev ; Proceeding of the International Conference on Plasma Physics and Controlled Thermonuclear Fusion, Salzburg, Paper N° 199 (1961) .

Wehrlin, N., R. Gendrin, A. Roux y R. Melti ; J. Geophys. Res., 78, 763, (1973)

Melti, R., R. Pellat, A. Roux ; Ann. Geophys., 29, 263 (1973)

CAPITULO I

EMISIÓN DE VLASOV

Cuando un gas adquiere una temperatura suficientemente alta, (por ej: $T = 2 \times 10^4$ °K para el hidrógeno), los átomos y las moléculas del gas resultan ionizados al perder sus electrones en las colisiones violentas que se producen. En el estado resultante, en el cual el gas está totalmente ionizado, el comportamiento dinámico del mismo está dominado por las fuerzas electromagnéticas que actúan sobre los electrones e iones. Las propiedades del gas son ahora lo suficientemente diferentes a aquellas del gas normal que justifica darle un nuevo nombre, plasma, para describir al gas en este estado altamente ionizado.

El estudio de la física de plasmas ha sido desarrollada inicialmente dentro del campo de la astrofísica. Se ha determinado que el estado de plasma es esencialmente el estado normal de la materia en nuestro universo. El hidrógeno, que es el estado más abundante en las estrellas y el espacio, se encuentra la mayoría de las veces ionizado. El helio, que es el próximo elemento más abundante está ionizado dentro del sol y en la corona solar. Además, las propiedades del viento solar, el cinturón de Van Allen y la ionosfera deben ser estudiados dentro del marco de la física de plasmas. Mas recientemente, las posibilidades tecnológicas del plasma han atraído la atención, principalmente las investigaciones dirigidas hacia la liberación controlada de energía de la fusión termonuclear de los elementos livianos. Ha sido éste uno de los motivos principales por los cuales se ha obtenido un avance considerable en la descripción y entendimiento de los fenómenos que se producen en un plasma.

Los problemas encontrados al analizar un plasma totalmente ionizado son de muy diversos tipos. A pesar de que los procesos físicos básicos son igualmente simples que los de un gas ordinario, los movimientos son mucho más complicados debido al fuerte acoplamiento al campo electromagnético. Si las colisiones binarias entre las partículas del plasma son lo suficientemente frecuentes, en el rango de la escala temporal de los fenómenos estudiados, el plasma se comporta como un fluido conductor con propieda-

dados similares a la de los metales líquidos. Como es de esperar, los movimientos resultantes llevan a una más rica variedad de flujos que las encontradas en la hidrodinámica ordinaria. El análisis de estos movimientos han sido desarrollados en una disciplina separada llamada magnetohidrodinámica.

En el caso en los cuales el plasma está suficientemente diluido se puede despreciar las colisiones binarias, pero como el plasma está compuesto de partículas cargadas que producen campos de largo alcance, el plasma conserva, contrariamente a un gas ordinario la facultad de propagar oscilaciones colectivas que tienen una gran diversidad de frecuencias y longitudes de ondas.

En este último caso el plasma puede ser descrito por el siguiente conjunto de ecuaciones:

$$(a) \quad \frac{\partial f^{\pm}}{\partial t} + \bar{v} \cdot \frac{\partial f^{\pm}}{\partial \bar{v}} + \frac{e^{\pm}}{m^{\pm}} (\bar{E} + \bar{v} \times \bar{B}) \cdot \frac{\partial f^{\pm}}{\partial \bar{v}} = 0$$

$$(b) \quad \frac{\partial \bar{E}}{\partial t} = - \nabla \times \bar{E}$$

$$(c) \quad \nabla \cdot \bar{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{\pm} e^{\pm} \int f^{\pm} d^3v$$

(1.1)

$$(d) \quad \frac{\partial \bar{E}}{\partial t} = \nabla \times \bar{B} - \mu_0 \bar{j}$$

$$(e) \quad \nabla \cdot \bar{B} = 0$$

$$(f) \quad \bar{j} = \sum_{\pm} e^{\pm} \int \bar{v} f^{\pm} d^3v$$

donde f^{\pm} es la función de distribución para cada especie (+ para los iones y - para los electrones). La ec. (1.1a) se denomina ecuación de Vlasov o ecuación de Boltzmann sin colisiones. Los campos electromagnéticos que intervienen en las ecs. (1.1) son campos promedios que varían lentamente con las coordenadas y no dependen de la ubicación microscópica pro

cisa de las partículas del plasma. En las ecs. (1.1) se ha hecho la distinción fundamental entre "colisión" y movimiento de la partícula bajo la acción del campo promedio de todas las otras partículas. Nosotros entenderemos por "colisión" a una gran fluctuación a nivel microscópico del campo eléctrico real relativo al campo promedio. Un parámetro que describe el rango de validez de la ecuación de Vlasov es la relación entre el número de partículas que generan los campos promedios y el número de partículas que participan en una fuerte fluctuación de estos campos. A priori diríamos que el número de partículas que contribuyen a los campos promedios es infinita. Sin embargo debemos recordar que en un plasma existe el efecto de apantallamiento para las interacciones lejanas. En efecto, el potencial en un plasma producido por una carga q en reposo viene dado por

$$(1.2) \quad \phi(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \exp(-r/\lambda_D)$$

donde r es la distancia a la carga q y

$$(1.3) \quad \lambda_D = \left[\frac{n e^2 (1+Z)}{\epsilon_0 k T} \right]^{-1/2}$$

es la longitud de Debye: aquí n es la densidad del plasma, e el valor absoluto de la carga electrónica, Z el número atómico, k la constante de Boltzmann y T la temperatura absoluta. La longitud característica del apantallamiento viene dado entonces por la longitud de Debye.

Las partículas que contribuyen entonces al campo promedio en un punto son aquellas que se encuentran a una distancia inferior a la longitud de Debye.

Por otra parte las partículas que pueden causar fuertes deflexiones coulombianas y contribuir a grandes fluctuaciones de los campos microscópicos que ve una partícula, son aquellas que se acercan a ella a una distancia inferior a la que corresponde a partículas con la energía cinética

promedio kT . Es decir que son partículas que se encuentran a una distancia

$$(1.4) \quad d \approx \frac{e^2}{\epsilon_0 kT}$$

de una prefijada. Comparando esta distancia con la distancia de Debye resulta

$$\frac{\text{radio de fluctuación de } E}{\text{radio del promedio de } E} \approx \frac{d}{\lambda_D} \sim \frac{1}{n\lambda_D^3}$$

Debe cumplirse entonces que $n\lambda_D^3 \gg 1$ para que la ecuación de Vlasov sea válida. En efecto la mecánica estadística de los plasmas permite demostrar que la ecuación de Vlasov corresponde al primer término de un desarrollo en serie de potencias en el parámetro $(n\lambda_D^3)^{-1}$. Es decir que corresponde al orden más bajo significativo de una teoría perturbativa que arranca de la ecuación de Liouville de la mecánica estadística.

El sistema de ecs. (1.1) es no lineal y no se tienen métodos generales de resolución. En algunas situaciones se puede suponer que las desviaciones del equilibrio son pequeñas y entonces se podrá linealizar a las ecuaciones (1.1). Sin embargo si el plasma es inestable desde el instante inicial las ecuaciones linealizadas no podrán describir la evolución del sistema. En estos casos será necesario desarrollar una teoría no lineal. En este trabajo se describen algunos de los métodos lineales y no lineales para resolver al sistema de ecs. (1.1) en situaciones tales que tienen una aplicación directa a experiencias de laboratorio y de la física espacial.

CAPITULO II

EFFECTO LANDAU LINEAL

2.1 Amortiguamiento Landau

Estudiaremos aquí las oscilaciones de un plasma infinito, homogéneo, sin campo magnético externo. Vamos a suponer que los iones están quietos y que forman un fondo neutralizador homogéneamente distribuido. La función de distribución de los electrones en el estado estacionario, f_0 , es uniforme en el espacio. En lo que sigue de este capítulo vamos a suponer que $\int \bar{v} f_0 d^3v = 0$, es decir que no hay corrientes al orden cero. Esta condición implica también que al orden cero no hay campo magnético propio en el plasma. Finalmente supondremos que no hay campo eléctrico propio en el plasma.

Designando con $f_1(\bar{r}, \bar{v}, t)$ al apartamiento del equilibrio de la función de distribución, el conjunto de ecs. (1.1) después de linealizarlas resultan

$$(a) \quad \frac{\partial f_1}{\partial t} + \bar{v} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial \bar{r}} - \frac{e}{m} (\bar{E}_1 + \bar{v} \times \bar{B}_1) \cdot \frac{\partial f_0}{\partial \bar{v}} = 0$$

$$(2.1) \quad (b) \quad \frac{\partial \bar{B}_1}{\partial t} = -\nabla \times \bar{E}_1 \qquad (c) \quad \nabla \cdot \bar{E}_1 = -\frac{e}{\epsilon_0} \int f_1 d^3v$$

$$(d) \quad \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \bar{E}_1}{\partial t} = \nabla \times \bar{B}_1 + \mu_0 e \int \bar{v} f_1 d^3v \qquad (e) \quad \nabla \cdot \bar{B}_1 = 0$$

Vamos a introducir los potenciales ϕ_1 y \bar{A}_1

$$(2.2) \quad \bar{B}_1 = \nabla \times \bar{A}_1$$

$$(2.3) \quad \bar{E}_1 = -\nabla \phi_1 - \frac{\partial \bar{A}_1}{\partial t}$$

con el gauge de Coulomb $\nabla \cdot \bar{A}_1 = 0$, de manera que en una onda plana \bar{A}_1 es normal al vector de onda \bar{k} .

Las ecs. (2.1b) y (2.1e) como es bien sabido se satisfacen idénticamente. Las ecuaciones restantes resultan:

$$(2.4) \quad \frac{\partial f_1}{\partial t} + \bar{v} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial \bar{v}} - \frac{e}{m} \left[-\nabla \phi_1 - \frac{\partial \bar{A}_1}{\partial t} + \bar{v} \times (\nabla \times \bar{A}_1) \right] \cdot \frac{\partial f_1}{\partial \bar{v}} = 0$$

$$(2.5) \quad \nabla^2 \phi_1 = \frac{e}{\epsilon_0} \int f_1 d^3v$$

$$(2.6) \quad \left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \bar{A}_1 = \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \phi_1) + \frac{e}{\epsilon_0} \int \bar{v} f_1 d^3v$$

Si tomamos divergencia de (2.6) obtenemos

$$\frac{\partial}{\partial t} (\epsilon_0 \nabla^2 \phi_1) + \nabla \cdot e \int \bar{v} f_1 d^3v = 0$$

que es la ecuación de conservación del número de electrones. Por consiguiente las ecs. (2.5) y (2.6) son independientes.

Vamos a ver ahora que bajo ciertas condiciones las ecs. (2.4) y (2.6) se desacoplan en ecuaciones puramente longitudinales y puramente transversales.

En primer lugar impondremos la condición que $f_0(\bar{v})$ sea isótropa en el plano perpendicular a \bar{k} . Entonces

$$\frac{\partial f_0}{\partial \bar{v}} = -\alpha_{\perp} \bar{v}_{\perp} f_0 + \frac{\bar{k}}{k} \frac{\partial f_0}{\partial v_{\parallel}}, \quad \bar{v} = \bar{v}_{\perp} + v_{\parallel} \frac{\bar{k}}{k}$$

Por consiguiente el tercer término de la ec. (2.4) se reduce para una onda plana monocromática $\exp i(\bar{k} \cdot \bar{r} - \omega t)$ a

$$-i \frac{e}{m} \left[-\bar{k} \phi_1 + \omega \bar{A}_1 + (\bar{v} \cdot \bar{A}_1) \bar{k} - (\bar{v} \cdot \bar{k}) \bar{A}_1 \right] \cdot \left(-\alpha_{\perp} \bar{v}_{\perp} f_0 + \frac{\bar{k}}{k} \frac{\partial f_0}{\partial v_{\parallel}} \right)$$

Está claro ahora que si integramos la ec. (2.4) sobre las velocidades normales a \bar{k} , en virtud de la simetría postulada sobre f_0 nos queda

$$(2.7) \quad (\omega - k v_{\parallel}) F_1 - \frac{e}{m} k \phi_1 \frac{\partial F_0}{\partial v_{\parallel}} = 0$$

donde hemos indicado con F_1 y F_0 el resultado de promediar f_1 y f_0 sobre las velocidades normales a k , es decir

$$F(v_{||}) = \int d^2v_{\perp} f(\bar{v}_{||}, \bar{v}_{\perp}) \equiv \int d^3v \delta(v_{||} - \frac{\bar{k} \cdot \bar{v}}{k}) f$$

En la ecuación de Poisson (2.5) solo es necesario el conocimiento de F_1 y en la (2.7) no figura \bar{A}_1 de modo tal que la (2.7) y la (2.5) pueden resolverse en forma independiente quedando desacopladas de A_1 . Esto significa que es posible obtener soluciones con $\bar{A}_1 = 0$, $\phi_1 \neq 0$; es decir oscilaciones electrostáticas puramente longitudinales; o bien soluciones con $\bar{A}_1 \neq 0$; $\phi_1 = 0$, es decir soluciones puramente transversales. En este capítulo vamos a examinar el caso en el cual $\bar{A}_1 = 0$.

De (2.5) y (2.7) obtenemos

$$-k^2 \phi_1 = \frac{e^2}{m \epsilon_0} \int \frac{\partial F_0 / \partial v_{||}}{\omega - kv_{||}} dv_{||} ;$$

es decir

$$(2.8) \quad 1 - \frac{\omega_p^2}{k^2} \frac{1}{n_0} \int \frac{\partial F_0 / \partial v_{||}}{\omega - kv_{||}} dv_{||} = 0$$

donde $\omega_p = (n_0 e^2 / \epsilon_0 m)^{1/2}$ es la "frecuencia de plasma"

El miembro de la izquierda de la ec. (2.8) es la constante dieléctrica $\epsilon(\bar{k}, \omega)$ para las oscilaciones longitudinales del plasma. En efecto la ec. (2.8) proviene de la ec. de Poisson (2.5), que en términos del vector \bar{D} se expresa como $\nabla \cdot \bar{D} = 0$, con $\bar{D} = \epsilon_0 \bar{E} + \bar{P}$ y con $-\nabla \cdot \bar{P} = \rho_{pol.} = -e \int f_1 d^3v$. Para oscilaciones longitudinales se obtiene entonces la relación $\bar{D} = \epsilon(\bar{k}, \omega) \bar{E}$ donde $\epsilon(\bar{k}, \omega)$ viene dado por el miembro de la izquierda de la ec. (2.8). En conclusión entonces la relación de dispersión de las oscilaciones electrostáticas viene dada por la constante dieléctrica igualada a cero.

La integral que aparece en la ec. (2.8) ofrece dificultades ya que si ω es real, diverge, y la relación de dispersión pierde su significado. Vlasov (1945) y Bohm y Gross (1949) han tratado de evitar la divergencia, el primero tomando la parte principal de la integral y los segundos conside

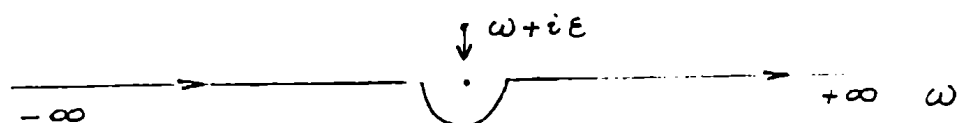
rando funciones de distribución artificiales con $\partial F / \partial v_{||} = 0$ para $v_{||} = \omega/k$. Por otra parte bajo la luz de la teoría general de la constante dieléctrica (ref. 3) resulta sospechoso que $\mathcal{E}(\bar{k}, \omega)$ sea convergente tanto para $\omega \rightarrow i\infty$ como para $\omega \rightarrow -i\infty$. Además vemos enseguida que cualquiera de los recursos antes mencionados para evitar la divergencia va contra el principio de causalidad. Si $\mathcal{E} = \mathcal{E}' + i\mathcal{E}''$, la relación de Kramer - Kronig (ref. 3) exige que para ω real

$$\mathcal{E}'(k, \omega) = 1 + \frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathcal{E}''(x)}{x - \omega} dx$$

Pero si la ec. (2.8) tuviera sentido para ω real sería $\mathcal{E}'' = 0$ y la relación de Kramer - Kronig no se satisfaría. La (2.8) carece de una parte imaginaria que permita el cumplimiento de la relación de K.K. Así como está contradice la causalidad.

El origen de estas dificultades y la contradicción con el principio de causalidad se deben a que la ec. (2.8) ha sido obtenida a partir de ondas monocromáticas, que existen para todo tiempo. Es necesario replantear el problema de las oscilaciones lineales de la ecuación de Vlasov, proponiendo un problema de valores iniciales que nos permita respetar la causalidad. Este fue el camino seguido por Landau (ref. 4). Una manera heurística de corregir a la (2.8) y de respetar la causalidad consiste en considerar una onda cuasimonocromática/cuya amplitud varía con el tiempo. Supondremos que ω posee una pequeña parte imaginaria positiva: $\omega = \omega + i\varepsilon$. Entonces la perturbación $\exp(-i\omega t)$ es nula para $t \rightarrow -\infty$ y va creciendo lentamente hasta alcanzar la amplitud actual. La integral de la ec. (2.8) tiene ahora sentido porque ω es compleja y no hay problemas de divergencias. (Haremos luego tender $\varepsilon \rightarrow 0$ puesto que no deseamos que la onda siga creciendo).

El cero del denominador en la ec. (2.8), $v_{||} = (\omega + i\varepsilon)/k$ está en el semiplano superior ω y se aproxima al eje real $v_{||}$. El contorno de integración tendrá que evitar el polo en $v_{||} = \omega/k$ con un pequeño semicírculo de radio $\varepsilon \rightarrow 0$. (ver figura en la página siguiente)



Con este contorno de integración la ec. (2.8) se transforma en

$$(2.9) \quad \mathcal{E}(k, \omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{k^2 n_0} \text{P.P.} \int \frac{\partial F_0 / \partial v_{||}}{v_{||} - \omega/k} dv_{||} - i\pi \frac{\omega_p^2}{k^2 n_0} \left. \frac{\partial F_0}{\partial v_{||}} \right|_{v_{||} = \omega/k}$$

donde P.P. indica parte principal y el tercer término del segundo miembro es la contribución del semiresiduo.

A la ec. (2.9) la podemos escribir en la forma

$$\mathcal{E}(k, \omega) = \mathcal{E}_1(k, \omega) + i \mathcal{E}_2(k, \omega)$$

donde

$$(2.10) \quad \mathcal{E}_1 = 1 - \frac{\omega_p^2}{k^2 n_0} \int dv_{||} \frac{\partial F_0 / \partial v_{||}}{v_{||} - \omega/k}$$

y

$$(2.11) \quad \mathcal{E}_2 = -\pi \frac{\omega_p^2}{k^2 n_0} \left. \frac{\partial F_0}{\partial v_{||}} \right|_{v_{||} = \omega/k}$$

La ec. (2.11) nos muestra que la contribución a \mathcal{E}_2 es proporcional a la tangente de la función de distribución en $v_{||} = \omega/k$: la velocidad de fase de la onda. Para ondas con velocidades de fase mucho más grande que la velocidad térmica de las partículas esta tangente será muy pequeña. Esto sugiere que podemos escribir $\omega = \omega_r + i\omega_i$ y que podamos tratar a ω_i y \mathcal{E}_2 como cantidades muy pequeñas. Entonces

$$\mathcal{E}_1(\omega_r + i\omega_i) + i\mathcal{E}_2(\omega_r + i\omega_i) \approx \mathcal{E}_1(\omega_r) + i\omega_i \frac{\partial \mathcal{E}_1}{\partial \omega_r} + i\mathcal{E}_2(\omega_r)$$

Vemos de aquí que la parte real de la frecuencia es una solución de

$$(2.12) \quad \mathcal{E}_1(\omega_r) = 0$$

y que la parte imaginaria está dada por

$$(2.13) \quad \omega_i = \gamma_L = - \frac{\epsilon_2(\omega_r)}{\frac{\partial \epsilon_1}{\partial \omega_r}}$$

Intentaremos ahora encontrar expresiones aproximadas para ϵ_1 , ω_r y γ_L . A altas frecuencias ($\omega \gg kv_T$, v_T : velocidad térmica de la distribución de partículas) se puede desarrollar el denominador de la ec.(2.10) y encontramos

$$(2.14) \quad \begin{aligned} \epsilon_1(k, \omega) &= 1 + \frac{\omega_p^2}{k\omega} \int dv_{||} \frac{\partial F_0}{\partial v_{||}} \left[1 + \frac{kv_{||}}{\omega} + \left(\frac{kv_{||}}{\omega}\right)^2 + \dots \right] \\ &\simeq 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \left[1 + \frac{3k^2 \langle v_{||}^2 \rangle}{\omega^2} + \dots \right] \end{aligned}$$

Haciendo $\epsilon_1(k, \omega) = 0$ y resolviendo por iteración obtenemos

$$(2.15) \quad \omega \simeq \omega_p \left(1 + \frac{3}{2} \frac{k^2 \langle v_{||}^2 \rangle}{\omega_p^2} \right)$$

De la ec. (2.14) se obtiene también

$$\frac{\partial \epsilon_1}{\partial \omega} \simeq \frac{2}{\omega}$$

encontrándose finalmente para $\omega_i = \gamma_L$

$$(2.16) \quad \gamma_L = \frac{\pi}{2} \frac{\omega \omega_p^2}{k^2} \left(\frac{\partial F_0}{\partial v_{||}} \right)_{v_{||} = \omega/k}$$

Este es el famoso coeficiente de amortiguamiento de Landau. Si F_0 es una función que decrece monótonamente entonces $\partial F_0 / \partial v_{||}$ es negativa, y por consiguiente γ_L es negativo lo que indica un amortiguamiento. Sin embargo si $F_0(v_{||})$ tiene la forma indicada en la Fig. (2.1) entonces $\partial F_0 / \partial v_{||}$ será positiva en el intervalo $(v, v + \Delta v)$ y una onda cuya velocidad de fase cae en esta región crecerá exponencialmente. Este es el efecto Landau inverso.

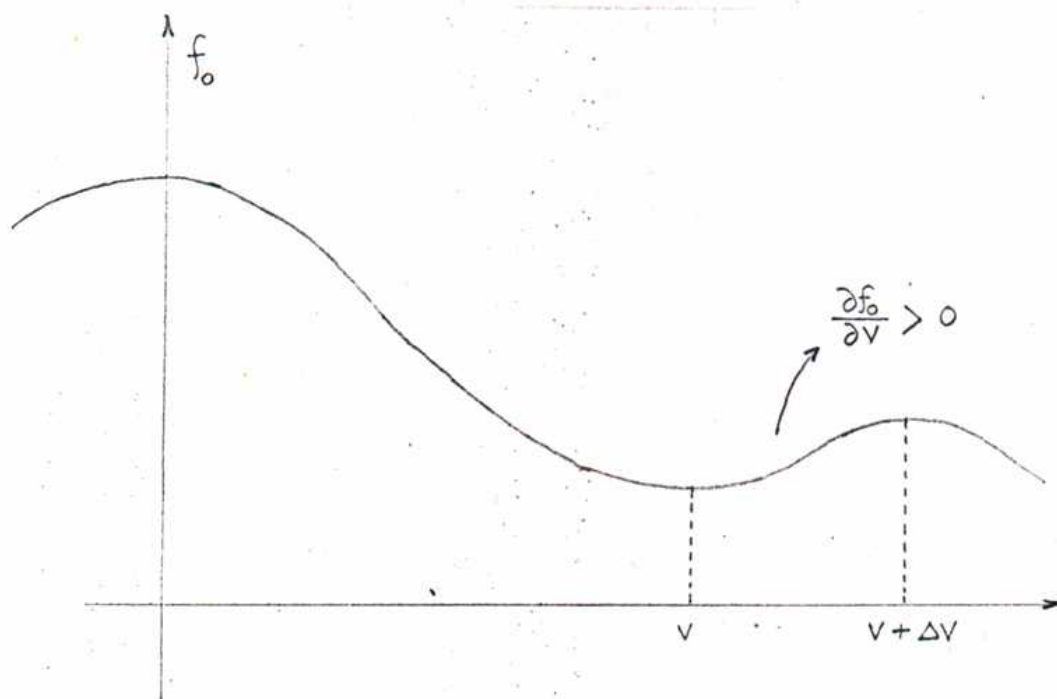


FIG. 2.1 Ejemplo de función de distribución inestable

El efecto Landau es fundamental en el estudio de los plasmas diluidos ya que suministra aún en la ausencia de colisiones un mecanismo de amortiguamiento (o de amplificación) de una onda.

De la ec. (2.16) vemos que una onda puede no ser amortiguada por efecto Landau, independientemente de su amplitud, si la función de distribución forma un "plateau".

Las propiedades del efecto Landau que acabamos de resumir han suscitado un gran número de objeciones, a menudo apasionadas, tanto por los detalles de la demostración como por la interpretación que había que darle (ref. 5). Muchas de estas controversias se han originado a causa de que solamente recién después de 15 años de la publicación del trabajo original de Landau se han podido realizar experiencias de laboratorio (referencias 6 y 7) que han mostrado claramente la realidad del mismo.

2.2 Interpretación física del efecto Landau

Para explicar el mecanismo del amortiguamiento sin colisiones, Dawson (ref. 8) divide a la función de distribución en una parte principal y

y una parte resonante. Por parte resonante se entiende aquí a los electrones que tienen una velocidad cercana a la velocidad de fase de la onda. La parte principal es el resto de la función de distribución como se muestra en la Fig. (2.2).

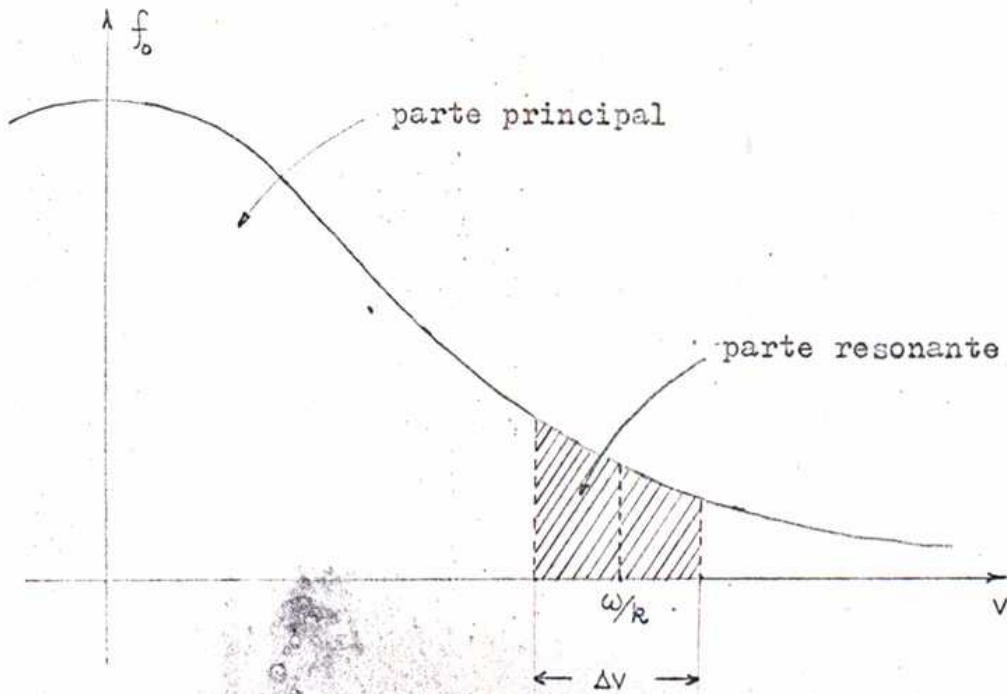


FIG. 2.2 División de la distribución electrónica en partes principal y resonante.

Dawson ha mostrado que la parte principal de la distribución soporta el movimiento oscilatorio de la onda y que la parte resonante la amortigua. Para obtener el coeficiente de amortiguamiento se calcula la velocidad de incremento de la energía cinética de los electrones resonantes. Por conservación de la energía la velocidad de incremento de la energía cinética de las partículas debe ser igual a la velocidad de decrecimiento de la energía de la onda. De esta última cantidad se calcula inmediatamente al coeficiente de amortiguamiento de la onda.

Para hacer estas ideas más cuantitativas consideremos una onda plana con un campo eléctrico

$$(2.17) \quad E(x,t) = E_0 \sin(kx - \omega t)$$

Si trabajamos en un sistema de coordenadas que se mueve con la onda el campo eléctrico se escribe $E_0 \sin kx$ y la velocidad de incremento de la energía cinética puede ser escrita como

$$(2.18) \quad \frac{dT}{dt} = \frac{n m}{2} \int_{-\frac{1}{2}\lambda}^{\frac{1}{2}\lambda} \frac{dx}{\lambda} \int_{-\infty}^{+\infty} dv \left(v + \frac{\omega}{k}\right)^2 \frac{\partial f}{\partial t}$$

donde nm es la densidad de electrones, λ la longitud de onda de la onda y f la función de distribución electrónica en el sistema de la onda. La integración sobre x nos da el promedio espacial de f , de modo que la ec. (2.18) resulta

$$(2.19) \quad \frac{dT}{dt} = \frac{n m}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} dv \left(v + \frac{\omega}{k}\right)^2 \frac{\partial \langle f \rangle}{\partial t}$$

La derivada temporal de $\langle f \rangle$ se obtiene fácilmente haciendo el promedio de la ecuación de Vlasov, ec. (2.1a), para ondas longitudinales

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v \frac{\partial f}{\partial x} - e E_0 \sin(kx) \frac{\partial f}{\partial v} = 0$$

lo que nos da

$$(2.20) \quad \frac{\partial \langle f \rangle}{\partial t} = \left\langle \frac{e}{m} E_0 \sin(kx); \frac{\partial f}{\partial v} \right\rangle$$

Hagamos ahora $f = f_0 + f_1$, donde f_0 es la parte no perturbada de la función de distribución y f_1 es la perturbación causada por la onda. Ya que f_0 es espacialmente homogéneo no hace ninguna contribución a la ecuación (2.20). Para calcular f_1 podemos usar la ecuación linealizada de Vlasov

$$(2.21) \quad \frac{\partial f_1}{\partial t} + v \frac{\partial f_1}{\partial x} = \frac{e}{m} E_0 \sin(kx) \frac{\partial f_0}{\partial v}$$

La solución de la ec. (2.21) es .

$$(2.22) \quad \frac{\partial f_1}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial v} (v, 0) \cos(kx - \omega t) - \frac{e}{m} E_0 \left(\frac{\partial f_0}{\partial v} \right) \cdot \left[\frac{\cos(kv)}{kv} - \frac{\cos(kx - \omega t)}{kv} \right]$$

donde $f_1(v, 0)$ es la dependencia en velocidad de la perturbación. Si llevamos al valor de f_1 a la derecha de la ec. (2.22) obtenemos

$$(2.23) \quad \frac{\partial f_1}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial v} \left\{ \frac{1}{2} \frac{e}{m} f_1(v, 0) E_0 \sin(kvt) + \frac{1}{2} \left(\frac{e}{m} \right)^2 \frac{\partial f_0}{\partial v} E_0^2 \frac{\sin kvt}{kv} \right\}$$

Podemos llevar ahora la ec. (2.23) a la (2.19) que después de integrada por partes nos da

$$(2.24) \quad \frac{dT}{dt} = -\frac{neE_0}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} dv f_1(v, 0) \left(v + \frac{\omega}{k} \right) \cdot \sin(kvt) - \frac{ne^2 E_0^2}{2m} \int_{-\infty}^{+\infty} dv \frac{\partial f_0}{\partial v} \cdot \left(v + \frac{\omega}{k} \right) \cdot \frac{\sin(kvt)}{kv}$$

Después de uno pocos ciclos (esto es $kvt \approx \omega t \gg 1$), la primera integral de la derecha de la ec. (2.24) tiende a cero debido a la mezcla de fases y el integrando de la segunda integral resulta muy picada alrededor de $v = 0$. El ancho de esta función picada es del orden $\Delta v \approx 1/kt = (\omega/k) \cdot 1/\omega t$. Solo aquellos electrones dentro de este intervalo Δv alrededor de $v=0$ hacen una contribución significativa a la velocidad de incremento de la energía cinética. Reemplazando a $\sin(kvt)/kv$ por $\pi \delta(kv)$ obtenemos

$$(2.25) \quad \frac{dT}{dt} = -\frac{\pi}{2} \omega \left. \frac{\omega_p^2}{k^2} \frac{\partial f_0}{\partial v} \right|_{v=0} \cdot \frac{\epsilon_0 E_0^2}{2}$$

Iguando la ec. (2.25) a la velocidad de decrecimiento de la energía de la onda $-\frac{\partial}{\partial t} \left(\epsilon_0 \frac{E^2}{2} \right) = -\gamma_1 \epsilon_0 E^2$ y teniendo en cuenta que $\left. \frac{\partial f_0}{\partial v} \right|_{v=0}$ es igual a la derivada de la función de distribución calculada en la velocidad de fase de la onda encontramos exactamente la fórmula de Landau para el coeficiente

coeficiente de amortiguamiento

$$(2.26) \quad \gamma = \frac{\pi}{2} \omega \frac{\omega_p^2}{k^2} \left. \frac{\partial f_0}{\partial v} \right|_{v = \frac{\omega}{k}}$$

Del resultado de este análisis vemos que el amortiguamiento Landau es un efecto lineal que se debe al hecho de que hay un número mas grande de partículas que toman energía de la onda (partículas con velocidades inferiores a ω/k) que partículas que le ceden energía (partículas con velocidades superiores a ω/k)

2.3 Límite de validez del efecto Landau lineal.

La fórmula (2.26) deja de ser válida cuando lo deja de ser la solución linealizada de la ecuación de Vlasov, esto es cuando $\frac{\partial f_1}{\partial v}$ resulta del mismo orden de magnitud que $\frac{\partial f_0}{\partial v}$. Vamos a determinar ahora cuando ocurre esto.

Si tomamos la derivada de la ec. (2.23) con respecto a v se obtienen términos seculares que crecen como t en la parte principal de la distribución ($v \neq 0$). Como el denominador del segundo término en la ec.(2.23) tiende a cero para $v = 0$ debemos desarrollar el numerador de este término alrededor de $v = 0$ antes de tomar la derivada en esta región. Realizando este desarrollo obtenemos la siguiente expresión para f_1 en la región resonante ($v \approx 0$)

$$(2.27) \quad f_1(x, v, t) \approx f_1(v, 0) \cdot \cos(kx - kv t) + \frac{e}{m} t \frac{\partial f_0}{\partial v} \cdot E_0 \sin(kx) - \frac{e}{m} \frac{kv t^2}{2} \frac{\partial f_0}{\partial v} E_0 \cos(kx)$$

Si tomamos la derivada de la ec. (2.27) con respecto a v obtenemos un término secular que crece como t^2 . Después de unos pocos ciclos este término domina y hará eventualmente que la solución lineal deje de ser válida.

lida. Si llamamos $t = \tau$ al tiempo en el cual $\frac{\partial f_0}{\partial \nu} \sim \frac{\partial f_1}{\partial \nu} \sim \frac{e}{m} E_0 k \tau^2 \frac{\partial f_0}{\partial \nu}$ obtenemos $\tau = (m/eE_0 k)^{1/2}$.

que los términos oscilatorios en la parte principal de la función de distribución crece como t y no como t^2 la solución lineal será válida allí hasta tiempos t tales que $t \approx \tau (w \tau) \gg \tau$. En conclusión el tratamiento lineal será válido para tiempos menores que $\tau = (m/eE_0 k)^{1/2}$. A este tiempo τ se lo suele llamar tiempo de atrapamiento de la partícula en el pozo de potencial de la onda. Un razonamiento elemental nos va a mostrar el origen de este nombre. En un sistema que se desplaza a la velocidad de fase de la onda el movimiento de una partícula está gobernado por la ecuación diferencial

$$\ddot{\chi} + \frac{e}{m} E_0 \sin(kx) = 0$$

Si linealizamos esta ecuación, lo que significa estudiar las oscilaciones en las vecindades del "fondo del pozo" obtenemos

$$\ddot{\chi} + \frac{e E_0 k}{m} \chi = 0$$

Esta ecuación es la de un movimiento armónico cuya frecuencia $\omega_L = (eE_0 k/m)$ es la inversa del tiempo de atrapamiento definido anteriormente. El tiempo de atrapamiento está entonces directamente relacionado con el tiempo de oscilación de una partícula en el pozo de potencial de la onda.

Notemos además que debemos imponer la condición

$$(2.28) \quad \gamma_L > \omega_T = \frac{1}{\tau}$$

para asegurar que el amortiguamiento de la onda tenga lugar en la etapa lineal. En efecto la condición (2.28) determina que la onda se ha amortiguado antes que la partícula haya comenzado a oscilar en el pozo de potencial de la onda. Vemos además que para una velocidad de fase determinada, la condición (2.28), impone un límite superior a la amplitud del campo eléctrico para que el amortiguamiento Landau tenga lugar. Si no se

verifica la condición (2.20) se entra en la etapa no lineal antes que la onda haya sido significativamente amortiguada por efecto Landau. De aquí sacamos la conclusión de que la etapa no lineal que se produce para $t > \tau$ será interesante estudiar solamente si la amplitud de la onda es lo suficientemente grande de modo que $w_{\perp} > \chi_{\perp}$. El análisis de esta etapa no lineal la vamos a realizar en el capítulo siguiente.

REFERENCIAS

1. Vlasov A.; J. Phys. USSR , 9 , 25 (1945)
2. Bohm D. y E. Gross ; Phys. Rev. 75 , 1851 , 1854 , (1949)
3. Landau L. y E. Lifshitz ; Course of Theoretical Physics, Vol. 8 , Electrodynamics of Continuous Media, Pergamon Press (1960), pág. 256
4. Landau L. ; J. Phys. USSR , 9 , 25 (1945)
5. Jablon C. ; Tesis, Universidad de París, EUR-CEA-FC-509 , (1969)
6. Malmberg J. y C. Wharton ; Phys. Rev. Letters , 133, 436 (1964)
7. Malmberg J., C. Wharton y W. Drumond, en Proceedings of a Conference on Plasma Physics and Controlled Nuclear Research, Culham , Inglaterra , IAEA , Vol. I , pág. 485 , (1966)
8. Dawson J. ; Phys. Fluids , 4 , 869 , (1961)

CAPITULO III

AMORTIGUAMIENTO NO LINEAL DE LAS OSCILACIONES DE PLASMA

3.1 Medias experimentales.

La teoría del amortiguamiento lineal de las oscilaciones de plasma que hemos desarrollado en el Capítulo II fue probada experimentalmente con todo detalle (referencias 1 a 6). Recordemos que una de las condiciones que asegura que el amortiguamiento tenga lugar en su etapa lineal está dado por $\omega_p < \gamma_L$, o sea

$$(3.1) \quad \left(\frac{e E_0 k}{m} \right)^{1/2} < \gamma_L$$

Malmberg y Wharton (ref. 7) han realizado mediciones experimentales en las cuales han aumentado progresivamente la amplitud de las ondas de forma tal que la relación (3.1) llegue a invertirse. Los resultados de sus experiencias pueden resumirse en el gráfico de la Fig. (3.1)

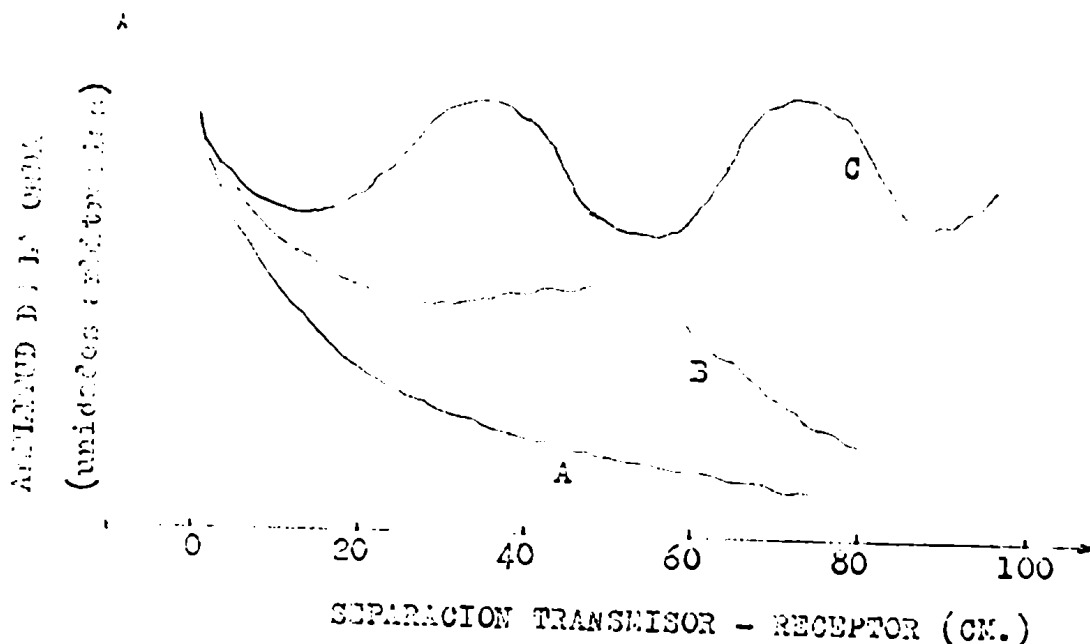


FIG. 3.1 Amplitud de la onda versus posición

A pesar de que las amplitudes iniciales correspondientes a las curvas A, B y C son diferentes se ha tenido el cuidado de mantener la ganancia to_

tal del sistema constante. Es por eso que se las ha dibujado a todas par_ tiendo de un punto común. La curva A se obtiene cuando la amplitud de la onda aplicada satisface la condición (3.1), obteniéndose entonces el amortiguamiento Landau lineal. La curva B se obtiene cuando la condi_ ción (3.1) comienza a ser violada y la curva C cuando la desigualdad se invierte.

Según las consideraciones que hemos hecho en el Capítulo II la inversión de la desigualdad (3.1) significa que el atrapamiento de la partícula por la onda tiene lugar antes de que la onda sea amortiguada por el efecto Landau lineal. Del análisis de la curva C concluimos que el efecto del atrapamiento de las partículas por la onda es evitar su amortiguamiento y hacerla oscilar. Las mediciones realizadas por Malmberg y Wharton han mostrado que la longitud de onda de esta oscilación, $\lambda_{osc.}$, está dada por

$$(3.2) \quad \lambda_{osc.} = \frac{2\pi v_p}{\omega_T}$$

donde v_p es la velocidad de fase y ω_T la frecuencia de atrapamiento. El atrapamiento de partículas por la onda es un fenómeno no lineal y sus efectos sobre el amortiguamiento de la onda van a ser analizados en este capítulo.

3.2 Teoría no lineal del amortiguamiento sin colisiones.

En el Capítulo II, párrafo 3, hemos visto que la solución lineal para la función de distribución en la región resonante dejaba de ser válida para tiempos t del orden del tiempo de atrapamiento τ . En cambio la so_ lución lineal en la región no resonante se mantiene válida aún para tiem_ pos $t \gg \tau$. Para extender la teoría del amortiguamiento sin colisio_ nes para tiempos más grandes que $t = \tau$ vamos a resolver exactamente la ecuación de Vlasov en la región resonante siguiendo el método propuesto por O'Neil (ref. 8). Recordemos, para ello, que la ecuación exacta de Vla_ sov expresa un flujo incompresible en el espacio de las fases. En el ca_

tema de la onda su solución puede ser escrita entonces como

$$(3.3) \quad f(x, v, t) = f[x_0(x, v, t), v_0(x, v, t), 0]$$

donde $f(x, v, 0)$ es la distribución inicial y (x, v_0) es el punto des-
de el cual (x, v) evolucionan. La evolución de este punto está gobernada
por

$$(3.4) \quad m \ddot{x} = -e E_0 \sin kx$$

con las condiciones iniciales $(x, v) = (x_0, v_0)$.

Es necesario remarcar que estamos suponiendo como O'Neil que E_0 no depen-
de del tiempo, o mejor, que $\partial f / \partial v$ cambia mucho más rápido que la amplitud
de la onda. Esto implica que $w_T \gg \delta_L$, o sea

$$(3.5) \quad E_0 \gg \frac{\delta_L^2 m}{e k}$$

Con esta suposición la ec. (3.4) es exactamente soluble en términos de
integrales elípticas.

La primera integral de la ec. (3.4) es la expresión para la conservación
de la energía

$$(3.6) \quad \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - \frac{e E_0}{k} \cos(kx) = W$$

Si usamos la transformación $kx = 2\xi$ y $\kappa^2 = 2eE_0 / (kW + 2E_0)$, la ec. (3.6)
resulta

$$(3.7) \quad \dot{\xi}^2 = \frac{1}{\kappa^2 \tau^2} [1 - \kappa^2 \sin^2 \xi]$$

Cuando $\kappa^2 < 1$ la ec. (3.7) puede ser integrada dando

$$(3.8) \quad F(\kappa, \xi_0) = F(\kappa, \xi) - \frac{t}{\kappa \tau}$$

donde $F(\kappa, \xi)$ es la integral elíptica de primera clase y κ toma el
signo de $\dot{\xi}$.

Cuando $\kappa^2 > 1$, es útil hacer la transformación $\kappa \sin \xi = \sin \zeta$ obte-
niéndose entonces

$$(3.9) \quad \dot{\zeta}^2 = \frac{1}{\tau^2} \left[1 - \frac{1}{\kappa^2} \sin^2 \zeta \right]$$

La ec. (3.9) puede ahora ser integrada, obteniéndose

$$(3.10) \quad F\left(\frac{1}{\mathcal{K}}, \mathcal{E}_0\right) = F\left(\frac{1}{\mathcal{K}}, \mathcal{E}\right) - \frac{\mathcal{E}}{\mathcal{K}}$$

De la definición de \mathcal{K} vemos que $\mathcal{K}^2 < 1$ significa que $eE_0/k < U$, es decir que la energía de la partícula es mayor que el valor máximo de la energía potencial de la onda. Estas partículas no pueden entonces ser atrapadas y las vamos a llamar en lo sucesivo partículas pasantes. Las partículas para las cuales $\mathcal{K}^2 > 1$, por el contrario, se encuentran atrapadas en el pozo de potencial de la onda.

De la ec. (2.27) se sigue que la distribución inicial puede ser escrita como

$$(3.11) \quad f(x_0, v_0, 0) = f_0(v_0) + f_1(v_0, 0) \cos(kx_0)$$

donde

$$x_0 = \frac{2\mathcal{E}_0}{k} = \frac{2}{k} \operatorname{am} \left[F(\mathcal{E}, \mathcal{K}) - \frac{\mathcal{E}}{\mathcal{K}}, \mathcal{K} \right]$$

(3.12)

$$v_0 = \frac{2\dot{\mathcal{E}}_0}{k} = \frac{2}{k} \operatorname{dn} \left[F(\mathcal{E}, \mathcal{K}) - \frac{\mathcal{E}}{\mathcal{K}}, \mathcal{K} \right]$$

y donde $\operatorname{am}(u, \mathcal{K})$ y $\operatorname{dn}(u, \mathcal{K})$ son las funciones elípticas de Jacobi de módulo \mathcal{K} .

La ec. (3.11) junto con la (3.12) nos determina la evolución de la función de distribución en el tiempo.

Hasta aquí hemos tratado a la amplitud de la onda como si fuera una constante y hemos calculado el cambio en la función de distribución producido por la onda. Podemos usar ahora este cambio en la función de distribución para calcular la pequeña corrección a la amplitud de la onda. Esta corrección es del orden $\Delta E_0 \sim (\gamma \mathcal{K}) E_0$, de modo que podemos considerar este procedimiento como un desarrollo en serie en términos del parámetro $(\gamma \mathcal{K})$. Para proceder al cálculo del coeficiente de amortiguamiento vamos a hacer uso del teorema de conservación de la energía, como lo hemos hecho en la teoría lineal, igualando la velocidad de crecimiento de la energía ciné-

ción

$$(3.13) \quad \frac{dW}{dt} = \frac{4\pi n_0}{\nu} \int_0^k \frac{dk}{k} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\nu + \frac{\omega}{k}\right)^2 \frac{\partial f}{\partial \pm} dv$$

o la velocidad de decrecimiento de la energía de la onda.

$$(3.14) \quad -\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\epsilon_0 E^2}{2} \right) = -\epsilon_0 \gamma(t) E^2$$

En (3.13) la función de distribución f viene dada por las ecs. (3.11) y (3.12), y en (3.14) hemos supuesto que E^2 puede escribirse como

$$E^2 \exp \left[2 \int_0^t \gamma(t') dt' \right]$$

El cálculo de los integrales de la ec. (3.13) es muy laborioso. Algunos detalles del mismo pueden ser consultados en el trabajo de O'Neil.

FIG.

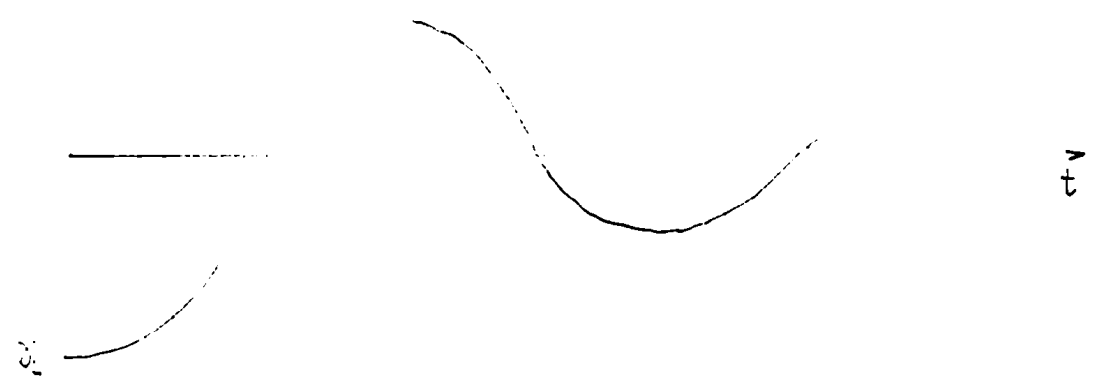


FIG. 3.2 Dependencia temporal del coeficiente de amortiguamiento

El coeficiente de amortiguamiento, ver Fig. (3.2), comienza con el valor predicho por la teoría lineal de Landau, $\gamma_1 = \frac{\pi}{2} \frac{\omega \omega_p^2}{2k^2} \left. \frac{\partial f}{\partial v} \right|_{v=\omega/k}$ y luego oscila con un periodo del orden τ , el periodo promedio de oscilación de un electrón en el pozo de potencial de la onda. Finalmente para $t \gg \tau$ el coeficiente de amortiguamiento tiende a cero. La expresión analítica del coeficiente de amortiguamiento viene dada por

$$(3.15) \quad \gamma(t) = \gamma_L \sum_{n=0}^{\infty} \frac{64}{\pi} \int dx \left\{ \frac{2n\pi^2 \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi t}{x F \mathcal{L}} \right)}{2x^5 F^2 (1+q^{2n})(1+q^{-2n})} \right. \\ \left. + \frac{(2n+1)\pi^2 x \operatorname{sen} \left[\frac{(2n+1)\pi t}{2 F \mathcal{L}} \right]}{F^2 (1+q^{2n+1})(1+q^{-2n-1})} \right\}$$

donde F como antes, es la integral elíptica de primera especie, $F' = F[(1-x^2)^{1/2}, \pi/2]$ y $q = e^{\pi F'/F}$.

En conclusión la teoría que venimos de desarrollar explica satisfactoriamente las experiencias de Malmberg y Wharton que han sido descritas en el parágrafo 3.1.

3.3 Interpretación Física

La interpretación física de los resultados del parágrafo anterior puede

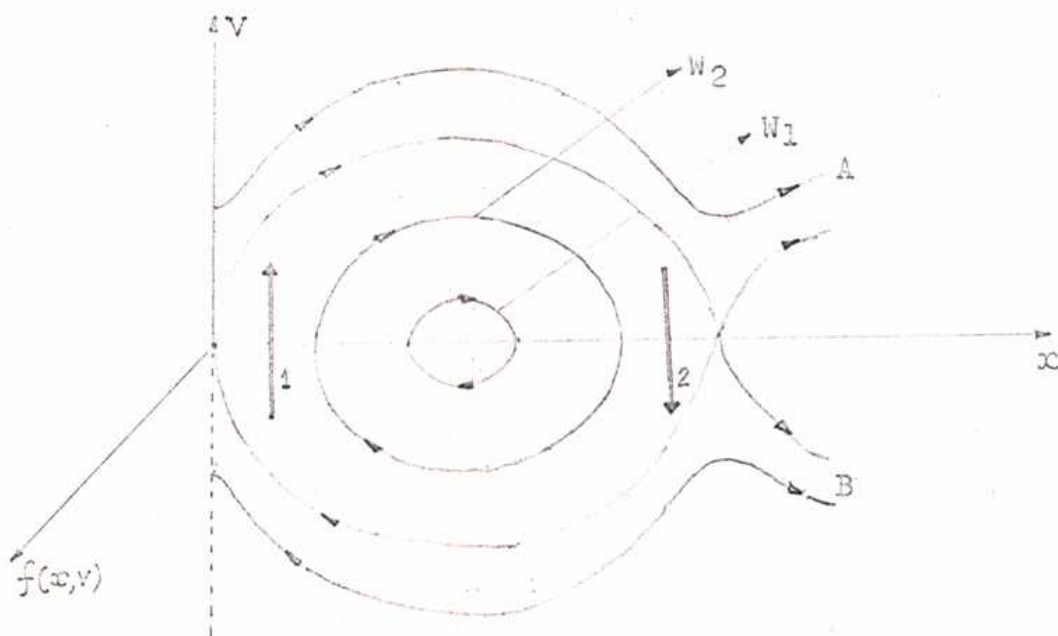


FIG. 3.3 Trayectorias en el espacio de las fases de los electrones resonantes.

ser vista fácilmente considerando las trayectorias de los electrones en el espacio de las fases. En un sistema que se desplaza con la velocidad de fase de la onda las trayectorias son como las mostradas en la Fig.(3.3).

Como ya mencionamos con la Fig. (3.3) vamos a considerar primero la teoría del amortiguamiento sin colisiones. Sabemos que solamente aquellos electrones cuyas velocidades son tales que $kvt \lesssim 1$ (ver parágrafo 2.2) pueden suministrar una contribución significativa a la velocidad de cambio de la energía cinética, de modo que podemos focalizar nuestra atención a aquellos electrones que se encuentran entre dos trayectorias tales como las A y B. Entre estas dos trayectorias hay un flujo neto hacia arriba a lo largo del vector 1 y un flujo neto hacia abajo a lo largo del vector 2. Para el caso en que la onda se amortigua, la distribución inicial (dibujada afuera del papel en la Fig. (3.3)) decrece en función de la velocidad. Consecuentemente, una región de alta densidad se mueve para arriba a lo largo del vector 1 y una región de relativamente baja densidad se mueve para abajo a lo largo del vector 2. Esto da como resultado un incremento neto en la energía cinética de los electrones resonantes y consecuentemente un amortiguamiento de la onda. Sobre una escala de tiempo no lineal los electrones atrapados hacen ciclos completos con un período de orden τ . Estos electrones transportan con ellos la densidad de sus posiciones originales y causan así una variación cíclica de la densidad en cualquier punto. Es esta variación en la densidad la que causa el comportamiento oscilatorio, con un período de orden τ , en el coeficiente de amortiguamiento.

Para comprender el comportamiento asintótico del coeficiente de amortiguamiento es conveniente introducir las variables energía - ángulo, (W, Θ) , donde W define una trayectoria particular y Θ un punto a lo largo de esa trayectoria, y expresar a la función de distribución en términos de estas variables, $f = f(\Theta, W)$. Como es bien sabido, f puede ser independiente del tiempo solamente si depende de Θ , es decir si f es constante a lo largo de las trayectorias de las partículas.

En nuestro problema f es inicialmente una función de Θ y W pero está cambiando lentamente en el tiempo hacia una solución que no depende de W, que en lo sucesivo lo denominaremos función ergódica.

Para ver esto vamos a considerar una distribución inicial limitada a una pequeña región representada por el área rayada en la Fig. (3.4).

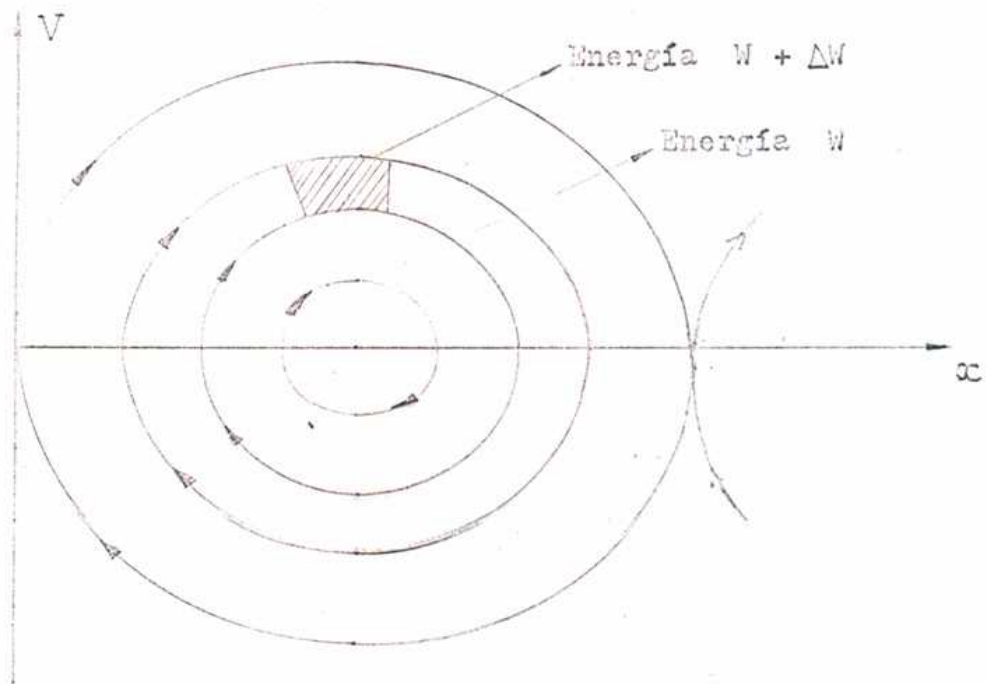


FIG. 3.4 La distribución inicial de electrones está representada por el área rayada en la figura.

Los electrones con energía W tienen un período más corto que aquellos con energía $W + \Delta W$ y esto hace que se adelanten respecto de los últimos. El área rayada se estira entonces a lo largo formando una espiral fibrosa que llena la región entre las dos trayectorias. Es claro entonces que la función que se obtiene promediando a la función de distribución sobre elementos del espacio de las fases que son lo suficientemente grande para ser atravesadas por muchas vueltas de la espiral será independiente de Θ . Este argumento puede extenderse a los electrones pasantes siempre que la función de distribución inicial sea periódica espacialmente.

Para encontrar a la distribución ergódica sobre cualquier trayectoria necesitamos entonces simplemente promediar a la distribución inicial sobre esta trayectoria. En la región resonante podemos aproximar a la distribución inicial por

$$f_2(\gamma) \approx f_2(\omega/\nu) + \frac{\partial f_2}{\partial \gamma} \Big|_{\gamma=\omega/\nu} (\gamma - \omega/\nu)$$

Como el promedio sobre el segundo término se anula para trayectorias correspondientes a electrones atrapados es evidente que la función ergódica $f_2(\gamma)$ es el mismo valor para todas estas trayectorias (esto es $f_2 = f_2(\omega/\nu)$). En otras palabras se forma un "plateau" en la región del espacio de las fases que corresponde a los electrones atrapados. La formación de este "plateau" implica el comportamiento asintótico de $\chi(t)$.

3.4 El fenómeno del amortiguamiento Landau de la amplitud de la onda.

En el párrafo anterior hemos desarrollado una teoría que prevé la saturación o desaparición del amortiguamiento Landau para ondas de gran amplitud. Esta saturación, como lo hemos indicado, no ha sido verificada experimentalmente. Sin embargo otros trabajos experimentales (ref. 7) e investigaciones numéricas (refs. 9 y 10) han encontrado que para grandes amplitudes, la onda sufre un amortiguamiento inicial mucho más fuerte que el que predice la teoría lineal de Landau y luego aunque la onda oscila en la longitud de atrapamiento, se amortigua gradualmente. En la Fig.(3.5) se indica esquemáticamente el comportamiento de las ondas en estas circunstancias (compare con la curva 3 de la Fig. (3.1)).

El fenómeno puede explicarse cualitativamente de la forma siguiente: sabemos que en la etapa lineal la onda acelera a las partículas con velocidades menores que su velocidad de fase, a velocidades iguales o más grandes que su velocidad de fase. Esta aceleración absorbe energía de la onda y la amortigua. Cuando la amplitud de la onda crece, el número de partículas que interactúan fuertemente con la onda incrementan rápidamente, ya que si la distribución es por ejemplo Maxwelliana éstas incrementan exponencialmente al movernos hacia las velocidades más bajas. Consecuentemente el amortiguamiento puede ser muchas veces más grande que el que predice la teoría lineal.

Laval et al (ref. 11) han mostrado que la teoría de O'Neil es válida siempre que se pueda considerar a la función de distribución con pendiente constante en la región resonante.

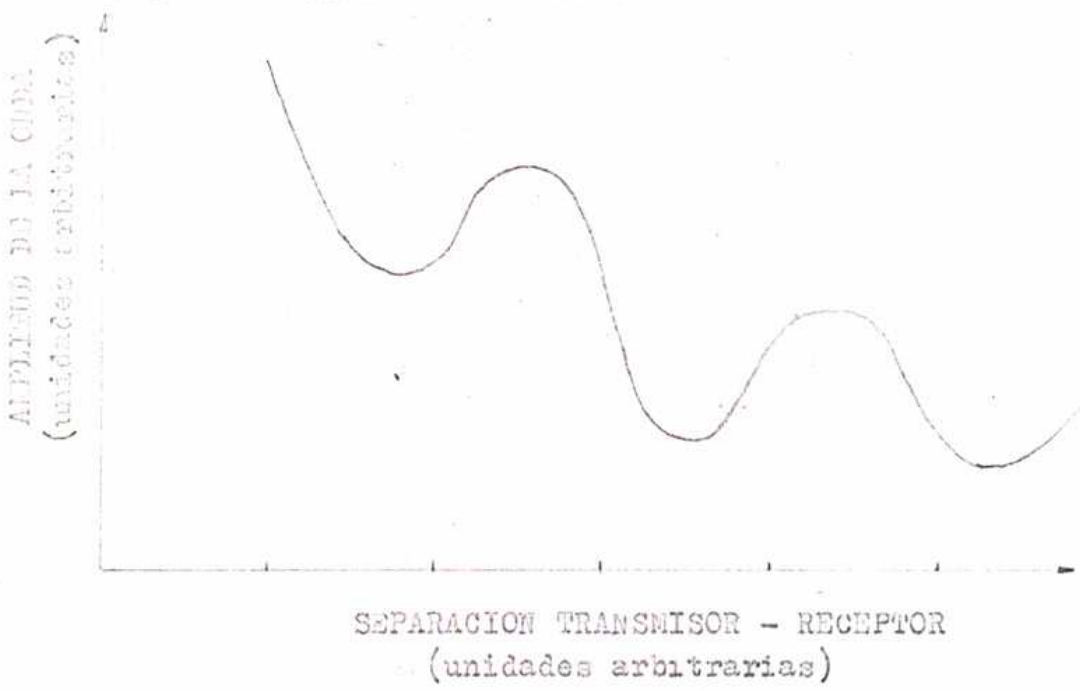


FIG. 3.5 Variación de la amplitud de la onda con la distancia para el caso $E(x=0) > m/ek \cdot (kV_T)^2 \cdot (kV_T/w)^2$

Si desarrollamos a la función de distribución alrededor de la velocidad de fase de la onda, es decir haciendo $v = \omega/k + w$, obtenemos

$$(3.17) \quad f(v) = f(\omega/k) + w \cdot \left. \frac{\partial f}{\partial v} \right|_{v=\omega/k} + \frac{w^2}{2} \cdot \left. \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} \right|_{v=\omega/k} + \dots$$

De la ec. (3.17) vemos que la función de distribución será aproximadamente lineal en la región resonante siempre que

$$(3.18) \quad w \frac{\partial f}{\partial v} \gg \frac{w^2}{2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}$$

Si f es maxwelliana esta condición se escribe

$$(3.19) \quad \frac{\omega_T \omega}{k^2 v_T^2} \ll 1$$

donde v_T es la velocidad térmica y ω_T/k es del orden de la velocidad resonante en el sistema de la onda.

teoría de O'Hail será aplicable entonces siempre que la amplitud de la onda verifique la condición

$$(3.29) \quad E_0 < \frac{m}{ek} (kv_T)^2 \left(\frac{c\beta_T}{\omega} \right)^2 = E_{O'Hail}$$

A partir de la ec. (3.29) se ve que si $E_0 > E_{O'Hail}$, la onda atrapa a una gran porción de las partículas que componen el plasma, lo que podría explicar su fuerte amortiguamiento.

La conclusión según sea la amplitud de la onda el amortiguamiento de la misma puede tener los comportamientos siguientes:

- (i) Si $E_0 < \frac{1}{2} m/ek$ la onda se amortigua con el coeficiente de amortiguamiento calculado con la teoría lineal de Landau.
- (ii) Si $\frac{1}{2} m/ek < E_0 < m/ek (kv_T)^2 (kv_T/w)^2$ la onda se amortigua con el coeficiente calculado con la teoría de O'Hail.
- (iii) Si $E_0 > m/ek (kv_T)^2 (kv_T/w)^2$ la onda se comporta como se indica en la Fig. (3.4)

Para el caso (iii) no se tiene aún una teoría completa que describa el fenómeno. La dificultad teórica reside en el hecho de que para este caso ya no es posible suponer, en la ec. (3.4), que la amplitud de la onda E se mantiene constante. Agreguemos finalmente que en este caso simultáneamente al fuerte decrecimiento de la onda se observa el crecimiento de otras ondas cuyas frecuencias difieren de la frecuencia de la onda inicial por la frecuencia de atrapamiento. A este fenómeno (ref. 12 y 13) se lo conoce como inestabilidad de atrapamiento ("side-band instability" en la literatura inglesa)

3.3 Caso en que el plasma es inicialmente inestable.

Como no hay una teoría completa para el estudio de la evolución de una onda monocromática en un plasma inestable. La dificultad para estudiar este caso es que ya no es mas posible suponer en la ec. (3.4) que la amplitud de la onda es independiente del tiempo. En efecto si el

inerte el campo de la onda crece desde un nivel muy pequeño (limitado por ejemplo por el ruido térmico) hasta un nivel en el cual los mecanismos no lineales producen su saturación. Los cálculos numéricos que se han realizado (ref. 14) indican que la onda se limitará a una amplitud tal que $w_T \sim \gamma_L$, o sea

$$(3.11) \quad E_{sat.} \approx \frac{m_e}{e} k (\gamma_L)^2$$

Finalmente diremos que si el tiempo de autocorrelación de la onda es muy corto comparado al tiempo de crecimiento de la onda, o sea $v \Delta k \gg \gamma_L$, la interacción de las partículas resonantes y las ondas conducen esencialmente a un proceso de difusión de las partículas en el espacio de las velocidades. La teoría que describe este tipo de interacciones se denomina Teoría Cuasi Lineal y será el objeto de estudio de nuestro próximo capítulo.

Referencias

1. Melinberg J. y C. Wharton; Phys. Rev. Letters, 6, 184 (1964) y 17, 115 (1966).
2. Melinberg J., C. Wharton y W. Drumond; Proceedings Second IAEA Conference on Plasma Physics and Controlled Nuclear Fusion Research, Culham 1965, Vol. 1, 485, (1966).
3. van Hoven G.; Phys. Rev. Letters, 17, 169 (1966)
4. Dordner H. y T. Simonen, Phys. Rev. Letters, 17, 72 (1966)
5. Barrett P., R. Franklin y H. Jones, Proceedings of Conference on Physics of Quiescent Plasmas, Frascati, p. 464 (1967)
6. Hong A., N. D'angelo y R. Motley; Phys. Rev., 133, A436 (1964)
7. Melinberg J. y C. Wharton; General Atomic Report GA - 8105, (1967) y Phys. Rev. 160, 775 (1967)
8. O'Neil T., Phys. Fluids, 8, 2255 (1965)
9. Armstrong B., Phys. Fluids, 10, 570 (1965)

- R. ... Phys. Fluids, 11, 1505 (1968)
- ... Phys. Letters, 211, 149 (1969)
- ..., J. ... y R. ...; Phys. Rev. Letters, 23, 810 (1969)
- ... L. ... , R. ... y A. ...; Phys. Rev. Letters, 12, (1969)
- ..., Ann. Phys. Theor. Fiz., 54, 522 (1969)

CAPITULO IV

TURBULENCIA DEBIL - TEORIA CUASI LINEAL

4.1 Introducción.

La inestabilidad de un plasma puede ser definida como una oscilación colectiva que se desarrolla espontáneamente a partir de condiciones iniciales que pueden ser las fluctuaciones térmicas del plasma o cualquier otra perturbación causada por el medio exterior. Un plasma puede ser estable, el caso más simple es la de un plasma homogéneo en el estado termodinámico local y ubicado en un campo magnético uniforme (otro caso es el de un plasma confinado por un campo de gravedad), pero esto son casos excepcionales y se constata que los plasmas de laboratorio y los plasmas naturales son en la mayoría de los casos turbulentos, lo que explica el gran desarrollo de los estudios efectuados sobre las inestabilidades en los últimos quince años.

Notemos que si bien la investigación de las inestabilidades es a priori un problema de la teoría lineal, sus efectos sobre el comportamiento del plasma son esencialmente no lineales. En efecto, la teoría lineal de las microinestabilidades permite determinar las condiciones que debe cumplir un plasma homogéneo y estacionario para ser estable pero no puede describir la evolución de un sistema que es inestable desde el instante inicial. La naturaleza inestable de un sistema depende esencialmente de la forma de la función de distribución de equilibrio f_0 . Para muchos tipos de inestabilidades el sistema puede resultar estable cambiando la forma de la función de distribución en un dominio del espacio de las fases que contenga una fracción muy pequeña del número total de partículas. Drumond y Pines (ref. 1) ; Vedenov y Sagdeev (ref. 2) y otros han demostrado que este cambio puede ser producido por las mismas fluctuaciones y que se puede llegar a la estabilización con un pequeño cambio relativo en la energía de las partículas. En estos casos entonces el nivel de la fluctuación puede permanecer pequeño durante el proceso de estabilización //

y aún podría efectuarse la linealización de las ecuaciones. Es en estos casos en los cuales va a ser posible aplicar la teoría cuasi lineal o teoría de la turbulencia débil.

4.2 Teoría General.

La función de distribución $f(r, v, t)$ de las partículas de un plasma sin colisiones es solución de la ecuación de Vlasov

$$(4.1) \quad \frac{\partial f}{\partial t} + \bar{v} \cdot \frac{\partial f}{\partial \bar{r}} + \frac{q}{m} [\bar{E} + \bar{v} \times \bar{B}]. \frac{\partial f}{\partial \bar{v}} = 0$$

donde \bar{E} y \bar{B} son los campos electromagnéticos.

Vamos a definir el valor medio espacial, f_0 , de f por

$$f_0 = \lim_{V \rightarrow \infty} \frac{1}{V} \int_V f d\bar{v}$$

La ecuación de evolución de f se obtiene haciendo la media espacial de la ec. (4.1)

$$(4.2) \quad \frac{\partial f_0}{\partial t} + \frac{q}{m} [\bar{E}_0 + \bar{v} \times \bar{B}_0]. \frac{\partial f_0}{\partial \bar{v}} + \frac{q}{m} \lim_{V \rightarrow \infty} \frac{1}{V} \int_V [\bar{E}_1 + \bar{v} \times \bar{B}_1]. \frac{\partial f_1}{\partial \bar{v}} d\bar{v} = 0$$

donde \bar{E}_0 y \bar{B}_0 son los valores medios espaciales de los campos electromagnéticos y $f_1 = f - f_0$, $\bar{E}_1 = \bar{E} - \bar{E}_0$ y $\bar{B}_1 = \bar{B} - \bar{B}_0$.

Restando (4.2) de la (4.1) se obtiene

$$(4.3) \quad \frac{\partial f_1}{\partial t} + \bar{v} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial \bar{r}} + \frac{q}{m} [\bar{E}_0 + \bar{v} \times \bar{B}_0]. \frac{\partial f_1}{\partial \bar{v}} + \frac{q}{m} [\bar{E}_1 + \bar{v} \times \bar{B}_1]. \frac{\partial f_0}{\partial \bar{v}} + \frac{q}{m} [\bar{E}_1 + \bar{v} \times \bar{B}_1]. \frac{\partial f_1}{\partial \bar{v}} - \frac{q}{m} \lim_{V \rightarrow \infty} \frac{1}{V} \int_V [\bar{E}_1 + \bar{v} \times \bar{B}_1]. \frac{\partial f_1}{\partial \bar{v}} d\bar{v} = 0$$

Recordemos aquí (ver Cap. II) que en la teoría lineal se hacen las dos

aproximaciones siguientes: 1°) se supone que f_1 , \bar{E}_1 y \bar{B}_1 permanecen pequeñas comparadas con las cantidades homogéneas y se desprecian en la ec. (4.3) los términos no lineales comparados con los términos lineales en f_1 , \bar{E}_1 y \bar{B}_1 ; y 2°) se supone que f_0 es independiente del tiempo. Esta última suposición limita la escala de tiempo sobre el cual el cálculo tendrá sentido. La teoría cuasi lineal consiste en prolongar el cálculo lineal sobre una escala de tiempo lo suficientemente larga como para que la variación temporal de f_0 no sea despreciable. Si f_0 evoluciona en un sentido tal que el sistema tienda a su estabilización las amplitudes de E_1 , B_1 y f_1 pueden permanecer lo suficientemente pequeños como para que uno tenga el derecho de despreciar los términos no lineales que aparecen en la ec. (4.3) durante toda la duración de la evolución. Si f_0 permanece constante o si no se tiende a la estabilidad será necesario entonces hacer intervenir a los dos últimos términos de la ec. (4.3).

Las soluciones de la ec. (4.3) linealizadas dependen fuertemente de las condiciones iniciales elegidas. Si en el instante $t = 0$, los campos electromagnéticos \bar{E}_1 y \bar{B}_1 y la función de distribución son cantidades localizadas en el espacio y tales que la integral que figura en la ec. (4.2) sea convergente, la teoría cuasilineal no será aplicable ya que entonces

$$\lim_{v \rightarrow \infty} \frac{1}{V} \int [\bar{E}_1 + \bar{v} \times \bar{B}_1] \cdot \frac{\partial f_1}{\partial \bar{v}} = 0$$

y f_0 no evolucionará. Los términos despreciados en la ec. (4.3) deberán intervenir entonces para hacer limitar la amplitud de la onda.

Al contrario, si las condiciones iniciales son periódicas o casi periódicas el límite que figura en la ec. (4.3) tenderá hacia un límite no nulo y la ec. (4.2) no se reducirá entonces a la ecuación no perturbada. Es decir que en este caso las ondas podrán modificar a la función de distribución homogénea. Estas condiciones iniciales corresponden, sea a una onda monocromática de una longitud de coherencia muy grande o a fluctuaciones incoherentes excitadas uniformemente en todos los puntos del plasma por las partículas. Como en estos casos la transformada de Fourier sobre

el espacio no es cómoda, vamos a utilizar un desarrollo en serie de Fourier suponiendo que el período es del orden de $V^{1/3}$, que hacemos luego tender a infinito.

Se tiene entonces, despreciando los términos no lineales

$$(4.4) \quad \frac{\partial f_0}{\partial t} + \frac{q}{m} [\bar{E}_0 + \bar{v} \times \bar{B}_0] \cdot \frac{\partial f_0}{\partial \bar{v}} + \frac{q}{m} \sum_{\bar{k}} [\bar{E}_{\bar{k}} + \bar{v} \times \bar{B}_{\bar{k}}] \cdot \frac{\partial f_{-\bar{k}}}{\partial \bar{v}} = 0$$

$$(4.5) \quad \frac{\partial f_{\bar{k}}}{\partial t} + i\bar{k} \cdot \bar{v} f_{\bar{k}} + \frac{q}{m} [\bar{E}_0 + \bar{v} \times \bar{B}_0] \cdot \frac{\partial f_{\bar{k}}}{\partial \bar{v}} + \frac{q}{m} [\bar{E}_{\bar{k}} + \bar{v} \times \bar{B}_{\bar{k}}] \cdot \frac{\partial f_0}{\partial \bar{v}} = 0$$

donde si U es una función de r se ha definido a $U_{\bar{k}}$ por

$$U(\bar{r}) = \sum_{\bar{k}} U_{\bar{k}} e^{i\bar{k} \cdot \bar{r}}, \quad U_{\bar{k}} = \frac{1}{V} \int_V U(\bar{r}) e^{-i\bar{k} \cdot \bar{r}} d\bar{v}$$

Las condiciones que impusimos a la forma espacial de las perturbaciones son equivalentes a la hipótesis de que U permanezca finito cuando V tiende a infinito.

4.3 Ecuación de difusión de las partículas resonantes.

Supongamos que en un plasma han sido excitadas ondas electrostáticas, sea debido por una antena o por una inestabilidad. Vamos a establecer la ecuación de evolución de f . Las ecuaciones (4.4) y (4.5) se reducen a

$$(4.6) \quad \frac{\partial f_0}{\partial t} + \frac{q}{m} \sum_{\bar{k}} E_{-\bar{k}} \frac{\partial f_{\bar{k}}}{\partial v} = 0$$

$$(4.7) \quad \frac{\partial f_{\bar{k}}}{\partial t} + ikv f_{\bar{k}} = - \frac{q}{m} E_{\bar{k}} \frac{\partial f_0}{\partial v}$$

La integración de (4.7) nos da

$$(4.8) \quad f_k(t) = f_k(0) e^{-ikvt} - \frac{q}{m} \int_0^t E_k(t') \frac{\partial f_0(t')}{\partial v} e^{ikv(t'-t)} dt'$$

Supongamos ahora que

$$(4.9) \quad E_k(t) = \hat{E}_k(t) \cdot e^{-iS_k(t)}$$

donde $s_k(t=0) = 0$, $ds_k/dt = w_k(t)$ es la parte real de la frecuencia que se obtiene resolviendo la ecuación de dispersión, (eo. (2.8)), con la función de distribución $f_0(t)$.

Introduciendo (4.8) en (4.6) y teniendo en cuenta (4.9) obtenemos

$$(4.10) \quad \begin{aligned} \frac{\partial f_0}{\partial t} = & -\frac{q}{m} \sum_k \hat{E}_{-k}(t) \frac{\partial}{\partial v} \left(f_k(0) e^{-ikvt + iS_k(t)} \right) \\ & + \frac{q^2}{m^2} \sum_k \hat{E}_{-k}(t) \frac{\partial}{\partial v} \int_0^t dt' \hat{E}_k(t') \frac{\partial f_0(t')}{\partial v} \cdot \exp [ikv(t'-t) - i(S_k(t') - S_k(t))] \end{aligned}$$

Vamos a expresar ahora las condiciones para que la ecuación cinética (4.10) sea "markoffiana". Antes vamos a notar que haciendo el cambio de variables $t - t' = \tau$, la ecuación (4.10) puede escribirse

$$(4.10a) \quad \begin{aligned} \frac{\partial f_0}{\partial t} = & -\frac{q}{m} \sum_k \hat{E}_{-k}(t) \frac{\partial}{\partial v} \left(f_k(0) e^{-ikvt + iS_k(t)} \right) \\ & + \frac{q^2}{m^2} \sum_k \hat{E}_{-k}(t) \frac{\partial}{\partial v} \int_0^t d\tau \hat{E}_k(t-\tau) \frac{\partial f_0(t-\tau)}{\partial v} \cdot \exp [-ikv\tau - i(S_k(t-\tau) - S_k(t))] \end{aligned}$$

Si definimos ahora a $\bar{w}_k(t)$ por $\bar{w}_k(t) = s_k(t)/t$ al primer término del segundo miembro de la eo. (4.10a) lo podemos escribir como

$$(4.11) \quad \sum_k A_k(t) \exp -ig(k,t) t$$

donde $g(k,t) = kv - \bar{w}_k$

y

$$A_k = \hat{E}_k(t) \frac{\partial}{\partial v} [f_k^{(0)} e^{-igt}] e^{igt}$$

La frecuencia $w_k(t)$ depende de las propiedades promedio del plasma (ver ec. (2.15)), tales como la densidad y temperatura. Como nosotros suponemos que f_0 sufrirá sólo pequeños cambios podemos concluir entonces que también $w_k(t)$ variará poco cuando t varía. Si el espectro de las fluctuaciones excitadas tiene un ancho medio Δk y está centrado en k_0 podemos introducir la correspondiente variación característica de $g(k,t)$ sobre el espectro :

$$\Delta g(k,t) = g(k_0 + \Delta k, t) - g(k_0 - \Delta k, t) = \frac{1}{T_c}$$

Este tiempo T_c puede ser considerado como el tiempo de coherencia de los campos para las partículas resonantes. Este es el tiempo característico para la variación del campo eléctrico en un sistema de referencia que se mueve a la velocidad w_{k_0}/k_0 . Cuando $t \gg T_c$, $\exp -ig(k,t)t$ será una función rápidamente oscilante de k . Como $A_k(t)$ varía sin embargo lentamente con k entonces la expresión (4.11) tenderá rápidamente a cero. Esto puede verse también de otra forma : si $L \rightarrow \infty$ podemos escribir a (4.11) como

$$\sum_k A_k \exp -ig(k,t)t = L \int dk A(k) \exp -ig(k,t)t$$

Si $t \gg T_c$ podemos aplicar el método de los descensos rápidos para calcular esta integral, encontrándose entonces que la integral tiende a cero excepto para el valor de k que haga $\partial g/\partial k = 0$, esto es $v = \partial w/\partial k$. Por el momento vamos a suponer que esto no se cumple en el rango de interés.

De la misma manera se puede demostrar que el integrando del segundo término de la ec. (4.10a) tiende a cero cuando $\tau \gg T_c$. Entonces si τ_E y τ_{f_0} son los tiempos característicos de evolución de \hat{E}_k y f_0 , podemos reemplazar en (4.10a) a $\hat{E}_k(t - \tau)$ y $\partial f/\partial v(t - \tau)$ por

$\hat{E}_k(t)$ y $\partial E/\partial v(t)$ siempre que $\tau_E \gg T_c$ y $\tau_{f_0} \gg T_c$.

Al hacer esta aproximación estamos modificando al integrando solamente para valores de τ que no contribuyen al valor de la integral. La ec. (4.10a) se reduce entonces a

$$(4.12) \quad \frac{\partial f_0}{\partial t} = \frac{q^2}{m^2} \frac{\partial}{\partial v} \sum_k |\hat{E}_k|^2 \int_0^t d\tau \frac{\partial f_0}{\partial v} \exp[-ikv\tau + i\omega_k(t)\tau]$$

donde hemos usado también la aproximación $s_k(t-\tau) = s_k(t) - w_k(t)\tau$ para $\tau \ll \tau_{f_0}$.

Ahora siempre que $v(\Delta k t) \gg 1$ podemos utilizar la aproximación

$$\int_0^t d\tau \exp -i(kv - \omega_k) = P.P. \frac{1}{i(kv - \omega_k)} + \pi \delta(kv - \omega)$$

Reteniendo sólo a los términos pares en k obtenemos finalmente

$$(4.13) \quad \frac{\partial f_0}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial v} \left(\sum_k \frac{\pi q^2}{m^2} |E_k|^2 \delta(kv - \omega) \right) \cdot \frac{\partial f_0}{\partial v}$$

Esta es la ecuación de difusión en el espacio de las velocidades para las partículas resonantes. Notemos que no hemos usado ninguna suposición acerca de la estabilidad o inestabilidad del sistema. La ecuación de difusión (4.13) será válida entonces para ambos casos.

Por último podemos ver que la ec. (4.13) describe un comportamiento irreversible de f_0 . En efecto, si multiplicamos a la ec. (4.13) a ambos miembros por f_0 y si integramos sobre la velocidad obtenemos

$$\frac{\partial}{\partial t} \int f_0^2 dv = -\frac{2q^2}{m} \int dv \sum_k \pi |E_k|^2 \delta(kv - \omega_k) \left| \frac{\partial f_0}{\partial v} \right|^2 \leq 0$$

Ya que f_0^2 es definida positiva, la solución asintótica para $t \rightarrow \infty$ debe corresponder o bien a una función de distribución f_0 tal que $\partial f_0/\partial v = 0$ para las partículas resonantes o bien a un amortiguamiento completo de las fluctuaciones de modo que $\sum_k |E_k|^2 = 0$.

4.4 Partículas no resonantes.

Hemos supuesto que las partículas resonantes representan una pequeña fracción del número total de partículas. Las partículas no resonantes son aquellas partículas tales que su velocidad v no puede satisfacer la condición $\omega_k - kv = 0$ para ningún valor k del espectro de las fluctuaciones excitadas. Al más bajo orden encontramos que su función de distribución no varía con el tiempo. Por consiguiente será necesario tener en cuenta términos de orden superior. En la ec. (4.10a) debemos entonces retener un término más en el desarrollo de \hat{E}_k , f_0 y s_k . Obtendremos entonces en lugar de la (4.12)

$$(4.14) \quad \frac{\partial f_0}{\partial t} = \frac{q^2}{m^2} \sum_k \hat{E}_{-k}(t) \frac{\partial}{\partial v} \int_0^t d\tau \left[\hat{E}_k(t) \frac{\partial f_0(t)}{\partial v} - \tau \frac{\partial}{\partial t} \left(\hat{E}_k(t) \frac{\partial f_0(t)}{\partial v} \right) \right] \times \\ \exp \left[-i(kv - \omega_k)\tau - i \frac{\tau^2}{2} \frac{\partial \omega_k}{\partial t} \right]$$

Por simplicidad vamos a suponer que $\tau_c^2 \frac{\partial \omega_k}{\partial t} \ll 1$, a pesar de que la teoría puede desarrollarse sin esta aproximación. Entonces (4.14) resulta

$$(4.15) \quad \frac{\partial f_0}{\partial t} = \frac{q^2}{m^2} \frac{\partial}{\partial v} \sum_k \frac{\hat{E}_{-k}(t) \frac{\partial}{\partial t} \hat{E}_k(t) \frac{\partial f_0(t)}{\partial v}}{(\omega_k - kv)^2}$$

donde hemos utilizado la relación

$$\int_0^t \tau e^{-i(kv - \omega_k)\tau} d\tau = -i \frac{\partial}{\partial \omega_k} \int_0^t e^{-i(kv - \omega_k)\tau} d\tau$$

En la mayoría de los casos, para las partículas no resonantes se verifica la desigualdad

$$\frac{\partial f_0}{\partial v} \frac{\partial \hat{E}_k}{\partial t} \gg \hat{E}_k \frac{\partial^2 f_0}{\partial v \partial t}$$

entonces obtenemos

$$(4.16) \quad \frac{\partial f_0}{\partial t} = \frac{q^2}{m^2} \frac{\partial}{\partial v} \frac{\sum_{k>0} \frac{\partial}{\partial t} |\hat{E}_k|^2}{(\omega_k - kv)^2} \cdot \frac{\partial f_0}{\partial v}$$

Esta ecuación no es una ecuación de difusión propia ya que $\partial f_0 / \partial t$ está vinculada a $\frac{\partial}{\partial t} |\hat{E}_k|^2$. Sin embargo esta ecuación puede considerarse que describe la variación adiabática de la función de distribución. Esta ecuación tiene en cuenta las modificaciones introducidas a la función de distribución por las oscilaciones no resonantes de las partículas con las ondas. Estos movimientos causan un aparente incremento en la dispersión de las velocidades cuando E_k^2 incrementa (y viceversa).

4.5 Espectro del Campo Eléctrico.

Para encontrar una ecuación para $\hat{E}_k(t)$ debemos usar la ecuación de Poisson. A partir de (4.8) obtenemos $f_k(t)$ y entonces

$$(4.17) \quad ikE_k = \frac{q}{\epsilon_0} \int_{-\infty}^{+\infty} f_k(t=0) e^{-ikvt} dv - \frac{q^2}{m\epsilon_0} \int_{-\infty}^{+\infty} dv \int_0^t E_k(t-z) \frac{\partial f_0(t-z)}{\partial v} e^{-ikvz} dz$$

El primer término del segundo miembro de la ec. (4.17) tiende a cero para $t \gg (k \Delta v)^{-1}$ donde Δv es la escala típica de variación de $\partial f_0 / \partial v$ en el espacio de las velocidades. Si suponemos $\tau_E \ll (k \Delta v)^{-1}$ y $\tau_f \ll (k \Delta v)^{-1}$ podemos desarrollar al integrando en la vecindad de $\tau = 0$ y obtendremos

$$(4.18) \quad ik \hat{E}_k(t) = \frac{iq^2}{m\epsilon_0} \hat{E}_k(t) \int dv \frac{\partial f_0(t)}{\partial v} \left[P.P. \frac{1}{kv - \omega_k} + i\pi \delta(kv - \omega_k) \right] - \frac{q^2}{m\epsilon_0} \frac{\partial}{\partial t} \hat{E}_k \int \frac{\partial f_0 / \partial v}{(\omega_k - kv)^2} dv$$

donde la integral que aparece en último término debe realizarse solamente sobre las partículas no resonantes. Ya que ω_k es la solución de la ecuación de dispersión, la ec. (4.18) puede escribirse

$$\frac{2q^2}{m\epsilon_0} |E_k|^2 \pi \int dv \frac{\partial f_0(t)}{\partial v} \delta(kv - \omega_k) + \frac{q^2}{m\epsilon_0} \frac{\partial |E_k|^2}{\partial t} \int dv PP \frac{1}{(\omega_k + kv)} \frac{\partial f_0}{\partial v} = 0$$

o sea

$$(4.19) \quad \frac{\partial |E_k|^2}{\partial t} = 2 \gamma_k(t) |E_k|^2$$

donde $\gamma_k(t)$ es el valor del coeficiente de crecimiento que se obtiene de la ecuación de dispersión con la función de distribución $f_0(t)$.

4.6 Inestabilidad Plasma-Maces . Teoría Lineal .

Para ilustrar el proceso de estabilización cuasi lineal vamos a aplicar la teoría que hemos desarrollado a ondas electrostáticas unidimensionales. Supongamos que la función de distribución inicial es la suma de una función gaussiana en reposo y un flujo débil, tal que

$$f_0(t=0) = \frac{n_0}{\sqrt{\pi} v_T} \exp\left(-\frac{v^2}{v_T^2}\right) + \frac{n_1}{\sqrt{\pi} \Delta U} \exp\left(-\frac{(v-U)^2}{\Delta U^2}\right)$$

con $n_1 \ll n_0$, $v_T \ll U$, $\Delta U < U$. Esta función de distribución está representada esquemáticamente en la Fig 4.1 .

Las ondas inestables tienen frecuencias muy próximas a ω_p y velocidades de fase mucho más grandes que v_T . El coeficiente de amplificación viene dado por la fórmula de Landau (ver ec. (2.16))

$$(4.20) \quad \frac{\gamma_k}{\omega_k} = \frac{\pi \omega_p^2}{2 n_0 k |k|} \left. \frac{\partial f_0}{\partial v} \right|_{v = \frac{\omega}{k}}$$

la que implica que $\frac{\omega_r}{k} \left. \frac{\partial f_0}{\partial v} \right|_{v=\frac{\omega}{k}}$ debe ser positiva para que las ondas sean inestables.

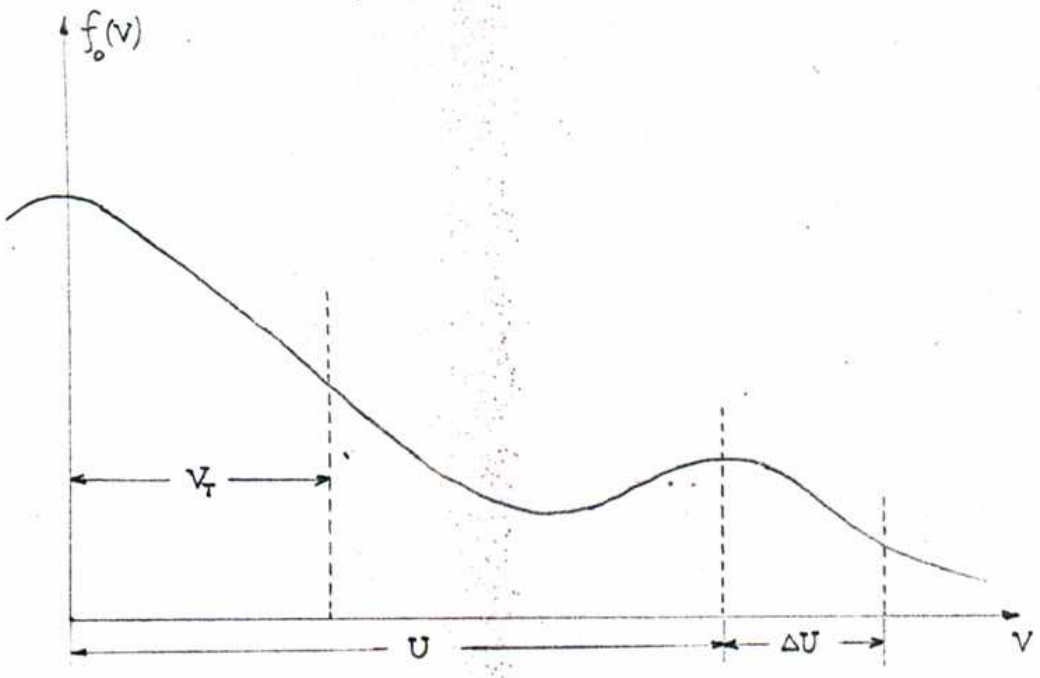


FIG. 4.1 Superposición de una distribución maxwelliana y un haz de partículas

De la Fig. 4.1 vemos que las ondas que tienen una velocidad de fase comprendidas entre $U - \Delta U$ y U serán inestables. Por otra parte la fórmula (4.20) será aplicable solamente si

$$(4.21) \quad \frac{U^3}{(\Delta U)^3} \frac{n_1}{n_0} \ll 1 ,$$

lo que implica que el polo debe estar muy próximo al eje real. Esta desigualdad también puede deducirse de la desigualdad $\tau_E \ll (k \Delta v)^{-1}$ que hemos supuesto en el parágrafo 4.3.

4.7 Inestabilidad Plasma - Haces . Teoría Cuasi Lineal .

Debemos resolver las ecuaciones acopladas (4.13) y (4.19) para f_0 y E_r^2 . Antes vamos a utilizar la transformación $\sum_k \rightarrow \frac{L}{2\pi} \int dk$. Las ecuaciones (4.13) y (4.19) resultan entonces :

$$(4.22) \quad \frac{\partial f_0}{\partial t} = \frac{q^2}{m^2 \epsilon_0} \cdot \frac{L}{2} \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\mathcal{E}(v)}{v} \frac{\partial f_0}{\partial v} \right)$$

$$(4.23) \quad \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} = 2 \gamma(v) \mathcal{E}(v)$$

donde

$$(4.24) \quad \mathcal{E}(v) = \frac{\epsilon_0}{2} E_k^2 \Big|_{k = \omega_k/v}$$

$$(4.25) \quad \gamma(v) = \frac{\pi \omega_p}{2 n_0} |v| v \frac{\partial f_0}{\partial v}$$

Utilizando las ecs. (4.25) y (4.23) podemos encontrar una expresión para $\partial f_0 / \partial v$ que al sustituirla en la eo. (4.22) nos da finalmente

$$(4.26) \quad \frac{\partial}{\partial t} \left[f_0 - \frac{\omega_p L}{m\pi} \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\mathcal{E}}{v^3} \right) \right] = 0$$

Como en $t = 0$ las fluctuaciones del campo eléctrico son muy pequeñas, al integrar la ec. (4.26) obtendremos

$$(4.27) \quad f_0(t) - \frac{\omega_p L}{m\pi} \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\mathcal{E}(t)}{v^3} \right) = f_0(t=0)$$

o ,

$$(4.28) \quad \frac{\omega_p L}{m\pi} \frac{\mathcal{E}(v)}{v^3} = \int_{v_0}^v [f_0(t) - f_0(t=0)] dv$$

donde v_0 es la velocidad de fase más pequeña del espectro excitado. Hemos visto que en el estado asintótico final, o la función de distribución

de las partículas resonantes evoluciona hacia un plateau o la amplitud de las ondas tienden hacia cero. En el caso unidimensional que nos preocupa aquí hay formación de plateau como se puede ver estudiando cualitativamente la solución de las ecuaciones.

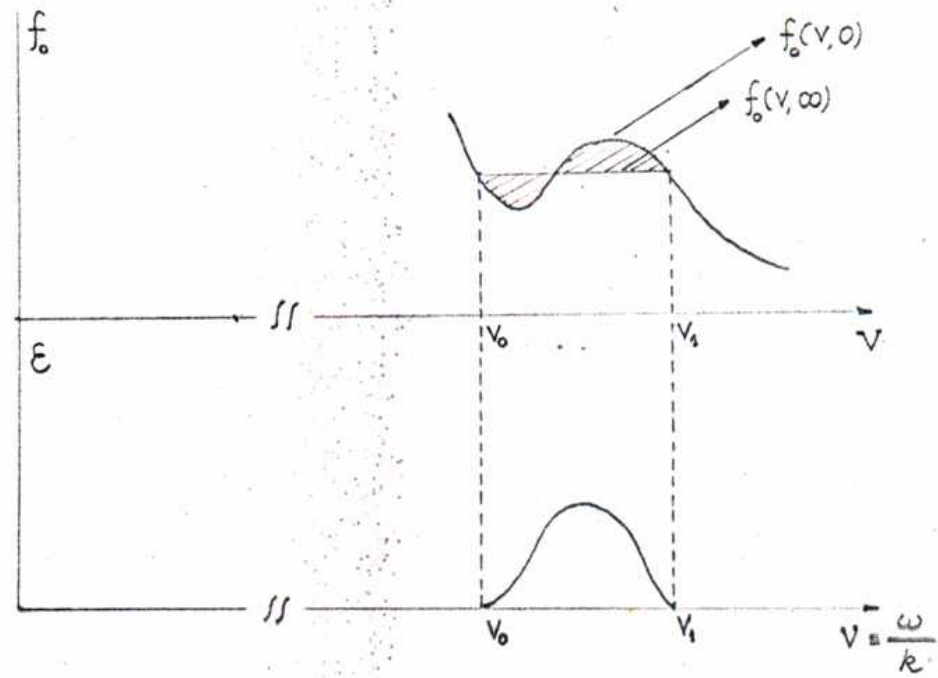


FIG. 4.2 Función de distribución f_0 y densidad del ruido espectral ϵ en un plasma inestable

Es fácil determinar la forma asintótica de f_0 teniendo en cuenta que de la ec. (4.28) se deduce

$$\int_{v_0}^{v_1} f_0(t) dv = \int_{v_0}^{v_1} f_0(t=0) dv$$

donde v_1 es el valor más grande de las velocidades de fases de las ondas excitadas. Digamos por otra parte que esta última condición expresa la conservación del número total de las partículas resonantes. Por otra parte para $t \rightarrow \infty$ se tiene que $\partial f_0 / \partial v = 0$ para $v_0 < v < v_1$. La única función que satisfase estas condiciones se obtiene nivelando la función de distribución, como se indica en la Fig. (4.2), de forma tal que las dos áreas rayadas sean iguales. Es de esperar además que el plateau comience a formarse en las vecindades del punto de velocidad de crecimiento máximo del coeficiente de amplificación.

La relación (4.28) permite calcular el orden de magnitud de la amplitud asintótica del campo eléctrico,

$$(4.29) \quad \frac{L}{\pi} \mathcal{E}(t=\infty) \simeq \frac{n_e m U^3}{\omega_p}$$

y la energía electrostática

$$(4.30) \quad W = \sum_k \epsilon_0 \frac{|E_k|^2}{2} \simeq \frac{L}{2\pi} \mathcal{E} \Delta k \simeq n_e m U \Delta U$$

donde Δk es la dispersión de los vectores de ondas. Debemos notar que si $\Delta U \ll U$ la energía electrostática es mucho menor que la energía del flujo. La energía electrostática puede llegar a ser sin embargo comparable o mayor que la energía térmica del plasma principal.

Para la parte no resonante de la función de distribución tenemos $w_k \gg kv$ de modo que la ec. (4.16) se reduce a

$$(4.31) \quad \frac{\partial f_0}{\partial t} = \frac{q^2}{2m^2 \omega_p^2} \frac{\partial}{\partial t} \sum_k |E_k|^2 \frac{\partial^2 f_0}{\partial v^2}$$

o

$$(4.32) \quad \frac{\partial f_0}{\partial W} = \frac{1}{n_e m} \frac{\partial^2 f_0}{\partial v^2}$$

La solución de la ec. (4.31) es

$$(4.33) \quad f_0 = \frac{n_0}{\sqrt{\pi(v_T^2 + \frac{4W}{m})}} \exp \left[-\frac{v^2}{(v_T^2 + \frac{4W}{m})} \right]$$

Vemos de la ec. (4.32) que las fluctuaciones incrementan la temperatura del plasma pero preservan la forma gaussiana de la función distribución. De las ecs. (4.13) y (4.31) obtenemos

$$\int_{\text{partículas resonantes}} \frac{1}{2} m v^2 \frac{\partial f_0}{\partial t} dv = -e \frac{\partial W}{\partial t}$$

mientras que

$$\int_{\text{partículas no resonantes}} \frac{1}{2} m v^2 \frac{\partial f_0}{\partial t} dv = \frac{\partial W}{\partial t}$$

De estas expresiones vemos que la pérdida de energía del flujo se transfiere en partes al campo fluctuante y a las partículas no resonantes.

El flujo también pierde momento, y en una razón que viene dada por

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\text{part. resonantes}} m v f_0 dv = \sum_k \epsilon_0 \frac{k}{\omega_k} \frac{\partial}{\partial t} E_k^2$$

Este momento se transfiere enteramente a las partículas no resonantes ya que el momento de las ondas electrostáticas es cero.

4.8 Rango de Validez de la Teoría Cuasi Lineal .

Vamos a establecer las condiciones de validez de la teoría cuasi lineal para el ejemplo particular que hemos desarrollado en el párrafo anterior. Vamos a recordar que nosotros ya hemos supuesto que

$$(4.34) \quad \frac{n_1}{n_0} \ll \left(\frac{\Delta U}{U} \right)^3$$

En este caso no tenemos ningún problema con la velocidad de grupo, ya que la velocidad de grupo de las ondas de plasma es mucho menor que la velocidad térmica v_T .

Debemos comprobar además que

$$(4.35) \quad \tau_E \gg [\nu \Delta k + \Delta \omega_k]^{-1} \simeq [\nu \Delta k]^{-1}$$

$$(4.36) \quad \tau_{f_0} \gg [\nu \Delta k + \Delta \omega_k]^{-1} \simeq [\nu \Delta k]^{-1}$$

La condición (4.35) es equivalente a la condición $\gamma_L \ll k \Delta v$ que hemos encontrado antes y que se verifica cuando (4.34) se verifica.

Para examinar la condición (4.36) vamos a introducir el tiempo $\tau_p = (m/e\langle k \rangle E)^{1/2}$, donde $E^2 = \sum E_k^2$ y $\langle k \rangle$ es el valor promedio de los números de onda del espectro. Este tiempo característico es, como ya hemos visto en capítulos anteriores, el período de oscilación de una partícula en el pozo de potencial de una onda sinusoidal de número de onda $\langle k \rangle$ y de amplitud E . De (4.26) deducimos la relación

$$\frac{\tau_E}{\tau_{f_0}} = \frac{n_0}{n_1} \cdot \frac{1}{\tau_p^4} \cdot \frac{1}{k^2 U^2 \Delta k \omega_p}$$

Si ΔU es la dispersión de la velocidad del flujo, tenemos de (4.23) que

$$\tau_E \approx \frac{n_0}{n_1} \cdot \left(\frac{\Delta U}{U}\right)^2 \frac{1}{\omega_p}$$

de donde

$$\tau_{f_0} \approx k^3 U^3 \Delta k \left(\frac{\Delta U}{U}\right)^2 \tau_p^4 \approx \tau_p^4 (\langle k \rangle \Delta U)^3$$

La condición (4.36) puede escribirse entonces como

$$(4.37) \quad \tau_p (\langle k \rangle \Delta U) \gg 1$$

La condición (4.37) tiene una interpretación física simple. Significa que en el sistema que se mueve con la velocidad $w_r/\langle k \rangle$ el campo eléctrico varía tan rápidamente que hace que el atrapamiento sea imposible.

De (4.30) podemos deducir que al finalizar el proceso de estabilización

τ_p está dado por

$$(4.38) \quad \tau_p \sim \frac{1}{\langle k \rangle} \left(\frac{n_0}{n_1}\right)^{3/4} \frac{1}{U^{3/4} (\Delta U)^{1/4}}$$

Introduciendo (4.38) en (4.37) volvemos a encontrar la condición (4.34). Si la condición (4.34) se satisface inicialmente seguirá cumpliéndose en

el transcurso del tiempo ya que la dispersión en velocidad del flujo se incrementa durante el proceso de estabilización. Por consiguiente podemos concluir que el rango de validez de la teoría está determinado por la condición (4.34) .

4.9 Ecuación de Fokker - Planck para las Partículas Resonantes.

Vamos a desarrollar brevemente, en esta sección, otro método que en ciertas condiciones es el más simple para obtener la ec. (4.13) que describe la difusión de las partículas resonantes. Para ello vamos a utilizar la ecuación de Fokker-Planck. La ecuación de Fokker-Planck ha sido utilizada inicialmente para el estudio del movimiento Browniano. La mecánica estadística clásica y la física de plasmas han utilizado este formalismo para el cálculo de los coeficientes de transporte.

Vamos a hacer primeramente una deducción elemental de la ecuación de Fokker Planck.

Sea $P(\bar{v}, \Delta\bar{v})$ la probabilidad de que una partícula cambie su velocidad de \bar{v} a $\bar{v} + \Delta\bar{v}$ en el intervalo de tiempo Δt debido a las colisiones múltiples (recordemos que en un plasma las colisiones predominantes son aquellas que producen una deflexión muy débil). Si el único mecanismo efectivo para modificar a la función de distribución (a la que suponemos espacialmente uniforme) son las colisiones, entonces su valor en el tiempo t estará dado por

$$(4.39) \quad f(\bar{v}, t) = \int f(\bar{v}-\Delta\bar{v}, t-\Delta t) P(\bar{v}-\Delta\bar{v}, \Delta\bar{v}) d^3\Delta v$$

Si las colisiones son tales que $\Delta\bar{v}$ es pequeño cuando lo es Δt , entonces se puede desarrollar al segundo término de la ec. (4.39) en la forma :

$$(4.40) \quad \int \left\{ f(\bar{v}, t) P(\bar{v}, \Delta\bar{v}) - \Delta t \frac{\partial f}{\partial t} P(\bar{v}, \Delta\bar{v}) - \Delta\bar{v} \frac{\partial}{\partial \bar{v}} [f(\bar{v}, t) P(\bar{v}, \Delta\bar{v})] + \frac{1}{2} \Delta v_i \Delta v_k \frac{\partial^2}{\partial v_i \partial v_k} [f(\bar{v}, t) P(\bar{v}, \Delta\bar{v})] + \dots \right\} d^3 \Delta v$$

La probabilidad de que alguna transición tome lugar es igual a uno. Esto significa que

$$(4.41) \quad \int P(\bar{v}, \Delta\bar{v}) d^3 \Delta v = 1$$

Vamos a definir al cambio de la velocidad promedio por unidad de tiempo como

$$(4.42) \quad \frac{\langle \Delta\bar{v} \rangle}{\Delta t} = \frac{1}{\Delta t} \int f(\bar{v}, t) P(\bar{v}, \Delta\bar{v}) \Delta\bar{v} d^3 \Delta v$$

y

$$(4.43) \quad \frac{\langle \Delta v_i \Delta v_k \rangle}{\Delta t} = \frac{1}{\Delta t} \int f(\bar{v}, t) P(\bar{v}, \Delta\bar{v}) \Delta v_i \Delta v_k d^3 \Delta v$$

Despreciando en (4.40) los términos de orden superior obtenemos

$$(4.44) \quad \left. \frac{\partial f}{\partial t} \right|_{col.} = - \frac{\partial}{\partial v_i} \left[\frac{\langle \Delta v_i \rangle}{\Delta t} f(\bar{v}, t) \right] + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial v_i \partial v_k} \left[\frac{\langle \Delta v_i \Delta v_k \rangle}{\Delta t} f(\bar{v}, t) \right]$$

Esta es la conocida ecuación de Fokker-Planck. En general las v_i pueden ser cualquier conjunto de coordenadas dinámicas de la partícula.

Esta ecuación también puede ser aplicada a las interacciones ondas partículas si el tiempo de correlación τ es lo suficientemente corto de modo que $\Delta v_i = v(t+\tau) - v(t)$ permanezca pequeño delante de v_i . Entonces el proceso estocástico puede ser considerado "markofiano" sobre un inter-

vale de tiempo $\Delta t \gg \tau$ si aún sobre el mismo se verifica que $\Delta v_j \ll v_j$.
 Estas suposiciones son precisamente las condiciones de validez para la
 teoría que a línea l. Esperamos encontrar entonces la misma ecuación de di-
 fusión si aplicamos la ec. (4.44) a la interacción onda-partícula.

La ecuación de Fokker-Planck representada por la ec. (4.44) no tiene la
 forma de una ecuación de difusión. Recientemente Leval y Pellat (ref. 3)
 han demostrado que, cuando la evolución de f es debida solamente a la in-
 teracción entre partículas y campos electromagnéticos fluctuantes, existe
 la siguiente relación entre el coeficiente de fricción $\frac{\langle \Delta v_j \rangle}{\Delta t}$ y el
 tensor de difusión $\frac{\langle \Delta v_j \Delta v_k \rangle}{\Delta t}$;

$$(4.45) \quad \frac{\langle \Delta v_j \rangle}{\Delta t} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial v_j} \frac{\langle \Delta v_j \Delta v_j \rangle}{\Delta t}$$

En estos casos la ec. (4.44) se transforma en

$$(4.46) \quad \frac{\partial f}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial v_j} \left[\frac{\langle v_j v_j \rangle}{\Delta t} \cdot \frac{\partial f}{\partial v_j} \right]$$

Notemos que el tensor de difusión que aparece en la ec. (4.46) es defini-
 do positivo. La ec. (4.46) no puede entonces describir el cambio adiabá-
 tico de la función de distribución de las partículas no resonantes. Este
 efecto está obviamente fuera del alcance de la ecuación de Fokker-Planck
 ya que no hay ningún efecto estocástico en ese caso.

La ec. (4.46) puede ser aplicada a numerosos casos. En este capítulo tra-
 taremos el caso simple de ondas electrostáticas unidimensionales y vamos
 a comparar la ecuación de difusión resultante con la ecuación que hemos
 obtenido previamente utilizando la teoría cuasi lineal clásica.

La ecuación de movimiento de la partícula, al orden uno, viene dada por

$$(4.47) \quad \frac{dv_j}{dt} = \sum_k \frac{q}{m} E_k e^{i(kx - \omega_k t)}$$

donde $\mathbf{x} = \mathbf{v}_0 t + \mathbf{v}_0 \tau$, $\mathbf{v} = \mathbf{v}_0$ en la trayectoria no perturbada de la partícula, entonces

$$(4.47) \quad \langle \Delta \mathbf{v} \rangle = \sum_{\mathbf{k}} \frac{q^2}{m^2} \frac{e^{i(\mathbf{k}\mathbf{v}_0 - \omega_k \tau)} - 1}{i(\mathbf{k}\mathbf{v}_0 - \omega_k \tau)}$$

$$\langle \Delta \mathbf{v}^2 \rangle = \sum_{\mathbf{k}} \frac{q^2}{m^2} |\mathbf{E}_{\mathbf{k}}|^2 \frac{[1 - \cos(\mathbf{k}\mathbf{v}_0 - \omega_k \tau)]^2 + \omega_k^2 (\mathbf{k}\mathbf{v}_0 - \omega_k \tau)^2}{(\mathbf{k}\mathbf{v}_0 - \omega_k \tau)^2}$$

$$\sum_{\mathbf{k}} \frac{q^2}{m^2} |\mathbf{E}_{\mathbf{k}}|^2 \frac{[1 - \cos(\mathbf{k}\mathbf{v}_0 - \omega_k \tau)]}{(\mathbf{k}\mathbf{v}_0 - \omega_k \tau)^2}$$

lo que nos da

$$(4.48) \quad \frac{\langle \Delta \mathbf{v}^2 \rangle}{\tau} = \sum_{\mathbf{k}} \frac{q^2}{m^2} |\mathbf{E}_{\mathbf{k}}|^2 2\pi \delta(\omega_k - \mathbf{k}\mathbf{v}_0)$$

La ec. (4.48) toma entonces la forma

$$(4.50) \quad \frac{\partial \mathbf{f}_0}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \left[\sum_{\mathbf{k}} \pi \frac{q^2}{m^2} |\mathbf{E}_{\mathbf{k}}|^2 \delta(\mathbf{k}\mathbf{v} - \omega_k) \frac{\partial \mathbf{f}_0}{\partial \mathbf{v}} \right],$$

lo que coincide con la ecuación de difusión para las partículas resonantes que hemos obtenido en el párrafo 4.3.

REFERENCIAS

1. Drummond W. y D. Pines ; Proceedings of the International Conference on Plasma Physics and Controlled Thermonuclear Fusion , Salzburg , Paper N° 134 (1961)

2. Medvedev A. L. , M.P. Velikov y R.Z. Sagdeev ; Proceedings of the International Conference on Plasma Physics and Controlled Thermonuclear Fusion, Salzburg , Paper N° 1 (1961)

3. Inaki G. y R. Pell "Boule de la Recherche" , 7 (1970) , -

4. ...

EFFECTO DE LA INHOMOGENEIDAD DEL PLASMA SOBRE EL AMORTIGUAMIENTO NO
LINEAL DE LAS ONDAS MONOCROMÁTICAS

5.1 Introducción.

Desarrollaremos aquí una teoría no lineal de las interacciones resonantes entre una onda monocromática y partículas en un plasma inhomogéneo. En un plasma inhomogéneo la velocidad de fase de la onda varía, lo cual da lugar a nuevos efectos (que no ocurren en un medio homogéneo). Algunos de ellos han sido estudiados recientemente. Swift (1968) ha sugerido que, debido a la variación de la velocidad de fase de la onda, las partículas atrapadas pueden ser sustancialmente aceleradas. Gary et al (1968) y Swift (1970) han realizado cálculos numéricos que han confirmado esta hipótesis. Laval y Pellat (1970) han calculado un invariante adiabático para las partículas atrapadas en una onda que se acelera. Ellos han dado las condiciones en las cuales las partículas inicialmente atrapadas pueden continuar atrapadas. Más recientemente Mann (1971) ha resuelto numéricamente la ecuación de movimiento de una partícula interactuando con una onda monocromática. Mann ha remarcado el hecho aparentemente paradójico de que el signo del coeficiente de amplificación (o de amortiguamiento) no depende del signo de la variación de la velocidad de fase de la onda. Nosotros vamos a calcular aquí las expresiones analíticas asintóticas para el coeficiente de amortiguamiento espacial de una onda monocromática que se propaga en un plasma inhomogéneo y daremos una interpretación física de los resultados obtenidos.

5.2 Formación de Poisson en un Plasma Inhomogéneo.

Para el cálculo del coeficiente de amortiguamiento debemos utilizar la ecuación de Poisson, la cual debe ser extendida para el caso en que el plasma sea inhomogéneo.

Consideremos un plasma inhomogéneo con una densidad de plasma frío

varia a lo largo de las líneas del campo magnético exterior. Para ondas electrostáticas la ecuación de Poisson puede escribirse

$$(5.1) \quad \nabla_{\perp}^2 \bar{\phi} + \frac{\partial^2 \bar{\phi}}{\partial x^2} = \frac{e}{\epsilon_0} \left[\int_{NR} f d\psi + \int_R f d\psi \right]$$

donde x está medida a lo largo del campo magnético, ∇_{\perp}^2 es el operador laplaciano en la dirección perpendicular a x , $\bar{\phi}$ es el potencial escalar, e y ϵ_0 tienen su significado usual, $f = F - \langle F \rangle_L$ es la función de distribución perturbada y F es la función de distribución total de los electrones. Los subíndices N.R. y R. indican que la integración debe realizarse sobre la parte no resonante y la resonante de la función de distribución en el sentido definido por Dawson (1961). Como es usual a la parte no resonante de la función de distribución se la puede suponer fría, la cual es una buena aproximación cuando la velocidad térmica de las partículas es mucho más pequeña que la velocidad resonante. Si la frecuencia de plasma ω_p es mucho más pequeña que la girofrecuencia electrónica, podemos escribir a la ecuación de Poisson de la forma siguiente

$$(5.2) \quad \nabla_{\perp}^2 \bar{\phi} + \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \right) \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial x} \right] = \frac{e}{\epsilon_0} \int_R f d\psi$$

donde ω es la pulsación de la onda.

Suponiendo que $\nabla_{\perp}^2 \bar{\phi} = -k_{\perp}^2 \bar{\phi}$ y que la dependencia del potencial $\bar{\phi}$ a lo largo del eje x sea de la forma $\bar{\phi}(x) \sin(\omega t - \int_0^x k_{\parallel}(x') dx')$, podemos deducir de la ec. (5.2) la variación de la componente paralela al eje x del campo eléctrico

$$(5.3) \quad k_{\parallel} \frac{\partial E_{\parallel}}{\partial x} - k_{\parallel}^2 \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{E_{\parallel}(x)}{k_{\parallel}^2} \right] = - \frac{e}{\epsilon_0} \int_R f d\psi$$

donde k es el número de onda paralelo al eje x y $\epsilon = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} + \frac{\omega_{ce}^2}{\omega^2}$

de la constante dielectrica del plasma para ondas electrostaticas.

Notamos que en la ausencia de particulas resonantes se obtiene de la ec. (5.3) la variación espacial WKB para el campo eléctrico en un plasma frío, $E_{\parallel} \sim (k_{\parallel})^{3/2}$.

Multiplicando a la ec. (5.3) por $E_{\parallel}(x)$ y promediando sobre un periodo de la onda se obtiene

$$(5.4) \quad \frac{1}{2} k_{\parallel} \frac{\partial \epsilon}{\partial k_{\parallel}} \cdot k_{\parallel}^3 \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\langle E_{\parallel}^2 \rangle_{\pm}}{k_{\parallel}^3} \right] = - \frac{e}{\epsilon_0} \int_{\mathcal{R}} \langle f E_{\parallel} \rangle_{\pm} dv$$

Para simplificar la escritura, en lo que sigue vamos a omitir el subíndice "||" para k y E .

La ecuación (5.4) será usada para calcular el amortiguamiento espacial en el caso de inhomogeneidad fuerte. En el caso de inhomogeneidad débil es más conveniente trabajar con una ecuación equivalente

$$(5.5) \quad \frac{1}{2} k \frac{\partial \epsilon}{\partial k} \cdot k^3 \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\langle E^2 \rangle_{\pm}}{k^3} \right] = - \frac{1}{\epsilon_0} \frac{\partial}{\partial x} \int \frac{1}{2} m v^2 \langle F \rangle_{\pm} dv$$

que expresa la conservación del flujo de momento.

5.3 Interacción de una onda con una partícula en un plasma inhomogéneo.

En un plasma inhomogéneo se puede suponer que el campo eléctrico tiene la dependencia WKB siguiente

$$E(x,t) = \bar{E}(x) \sin \left[\omega t - \int_0^x k(x') dx' \right]$$

donde $k(x)$ está relacionado con la frecuencia de la onda ω por intermedio de la relación de dispersión del plasma.

En el sistema de laboratorio la ecuación de movimiento de un electrón en el campo eléctrico de la onda electrostatica está dado por

$$(5.6) \quad \frac{dv}{dt} = - \frac{e E(x)}{m} \sin \left[\omega t - \int_0^x k(x') dx' \right]$$

Focalizando nuestra atención sobre las partículas resonantes, haremos el siguiente cambio de variables

$$(5.7) \quad v = \frac{dx}{dt} = \frac{dX}{dt} + \frac{dy}{dt}$$

donde X está definido por

$$(5.8) \quad \frac{dX}{dt} = \frac{\omega}{k(x)}$$

Escrito en el sistema de la onda, la ecuación (5.6) resulta

$$(5.9) \quad \frac{d^2 y}{dt^2} = \frac{\omega^2}{k^3} \frac{dk}{dX} - \frac{e}{m} E(x+y) \sin \int_X^{X+y} k(x') dx'$$

Si $y \ll X$, podemos obtener una primera integral de esta ecuación

$$(5.10) \quad \frac{1}{2} \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 = -\Gamma y + \frac{e E(x)}{m k(x)} \cos k(x)y + \Xi$$

con $\Gamma = -\frac{\omega^2}{k^3} \frac{dk}{dX}$ y Ξ es una constante de integración del movimiento. De la ec. (5.10) vemos que para estudiar el movimiento de la partícula debemos analizar el siguiente potencial efectivo

$$(5.11) \quad (V) = -\Gamma y + \frac{e E}{m k} \cos(ky)$$

De la ec. (5.11) vemos inmediatamente que si

$$(5.12) \quad \frac{\Gamma m}{e E} = \Gamma k \tau^2 > 1$$

el potencial es monótono y la partícula no puede ser atrapada por la onda.

En lo que sigue cuando esto ocurra diremos que nos encontramos en el caso de una inhomogeneidad fuerte.

Cuando $\Gamma k \tau^2 < 1$, al contrario, el atrapamiento de la partícula por la onda es posible ya que el potencial tiene crestas y valles. En este caso diremos que la inhomogeneidad es débil.

En el Capítulo III hemos visto que el atrapamiento de la partícula por la onda modificaba sustancialmente al coeficiente de amortiguamiento de Landau. En el análisis simple que hemos hecho arriba hemos demostrado que la inhomogeneidad del plasma puede modificar los mecanismos de atrapamiento de la partícula por la onda. Es de esperar entonces que la inhomogeneidad del plasma, por más pequeña que esta sea, tenga un efecto profundo sobre el amortiguamiento (o amplificación) de la onda.

5.4 Inhomogeneidad fuerte y amortiguamiento de Landau.

Cuando la inhomogeneidad es fuerte, $\Gamma k \tau^2 > 1$, no hay partículas atrapadas. Esto nos va a permitir utilizar aquí la teoría de perturbación habitual si suponemos que la amplitud de la onda es pequeña. Si suponemos que el plasma es inicialmente uniforme entonces la función de distribución es función solamente de las velocidades iniciales :

$$(5.13) \quad F(v, x, t) = F[v_0(x, v, t)]$$

A la velocidad de la partícula la podemos desarrollar en potencias sucesivas del campo eléctrico

$$(5.14) \quad v = v_0 + \Delta v^{(1)} + \Delta v^{(2)} + \dots$$

Podemos hacer igualmente un desarrollo en serie de Taylor de la función de distribución alrededor de $v = v$.

$$(5.15) \quad F(v_0) = F(v) - \sum_i \Delta v^i \left. \frac{\partial F}{\partial v_0} \right|_v$$

Llevando esta expresión de F en la eo. (5.4) nos queda

$$(5.16) \quad \frac{1}{2} k \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial k} \cdot k^3 \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\langle E^2 \rangle_t}{k^3} \right] = \frac{n_0 e}{\epsilon_0} \int_{R.} dv \left\langle \sum_i \Delta v^{(i)} E \right\rangle_t \cdot \frac{\partial F}{\partial v_0}$$

Para calcular las $\Delta v^{(i)}$ utilizaremos las ecuaciones de movimiento

$$(5.17) \quad \frac{dx}{dt} = v(t)$$

$$(5.18) \quad \frac{dv}{dt} = - \frac{e}{2} \exp i \left\{ \omega t - \int_0^{x(t)} k(x) dx \right\}$$

con $\mathcal{E} = eE/m$.

De las ecs. (5.17) y (5.18) obtenemos para $x(t)$, $v(t)$ y Δv

$$(5.19) \quad x(t) = v(t-t_0) + \int_0^{t-t_0} \Delta v(t'+t_0) dt'$$

$$(5.20) \quad v(t) = v_0(x, v, t) + \Delta v$$

$$(5.21) \quad \Delta v(t) = - \frac{e}{2} \int_0^{t-t_0} dt' A \exp -i \left[k \int_0^{t'} \Delta v(t''+t_0) dt'' \right]$$

donde

$$(5.22) \quad A dt' = \exp \left[-i\omega\theta + i\omega t + i\omega \left(t' - \int_0^{vt'} k(x) dx \right) \right] dt'$$

$$(5.23) \quad \theta = t - t_0(x, v, t)$$

y para $t = t_0$, $x = 0$ y $v = v_0$.

Vamos a desarrollar a Δv en potencias de ϵ suponiendo por el momento que Θ es independiente de ϵ . Este desarrollo nos da

$$(5.24) \quad \Delta v^{(1)} = -\frac{\epsilon}{2} \int_0^{\Theta} dt_1 (A + A^*)$$

$$(5.25) \quad \Delta v^{(2)} = -\epsilon^2 \frac{k}{4} \int_0^{\Theta} dt_1 (A - A^*) \int_0^{t_1} dt_2 \int_0^{t_2} dt_3 (A + A^*)$$

$$(5.26) \quad \Delta v^{(3)} = \epsilon^3 \frac{k^2}{16} \left\{ \int_0^{\Theta} dt_1 (A + A^*) \left[\int_0^{t_1} dt_2 \int_0^{t_2} dt_3 (A + A^*) \right]^2 \right. \\ \left. + \int_0^{\Theta} dt_1 (A - A^*) \int_0^{t_1} dt_2 \int_0^{t_2} dt_3 (A - A^*) \int_0^{t_3} dt_4 (A + A^*) \right\}$$

Para obtener Δv hasta el tercer orden en ϵ (hay que ir hasta el tercer orden ya que demostraremos que la contribución de $\Delta v^{(2)}$ es nula) es necesario desarrollar Θ hasta el segundo orden lo que implica que hay que calcular x hasta el segundo orden

$$(5.27) \quad \frac{x}{v} = \Theta - \epsilon \frac{1}{2v} \int_0^{\Theta} dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 (A + A^*) \\ - \epsilon^2 \frac{ik}{4v} \int_0^{\Theta} dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 (A - A^*) \int_0^{t_2} dt_3 \int_0^{t_3} dt_4 (A + A^*)$$

De la eo. (5.27) obtenemos

$$(5.28) \quad \Theta^{(0)} = \frac{x}{v}$$

$$(5.29) \quad \Theta^{(1)} = \frac{\epsilon}{2v} \int_0^{x/v} dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 (A + A^*)$$

$$(5.30) \quad \Theta^{(2)} = \frac{\epsilon^2}{4v^2} \int_0^{x/v} dt_1 (A + A^*) \int_0^{x/v} dt_3 \int_0^{t_3} dt_4 (A + A^*)$$

$$- i \frac{\epsilon^2 \omega}{4v^2} \int_0^{x/v} dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 (A - A^*) \int_0^{x/v} dt_3 \int_0^{t_3} dt_4 (A + A^*)$$

Es evidente de las ecs. (5.16), (5.25) y (5.30) que $\Delta v^{(2)}$ no dará ninguna contribución al coeficiente de amortiguamiento espacial.

En este trabajo vamos a interesarnos solamente en el comportamiento asintótico del coeficiente de amortiguamiento y por consiguiente es necesario retener en $\Delta v^{(3)}$ solamente a los términos más divergentes en x que son

$$(5.31) \quad \Delta v^{(3)} = \frac{\epsilon^3 k^2}{8} \left\{ \int_0^{x/v} dt_1 \left[\int_0^{t_1} dt_2 (A + A^*) \right]^2 \int_{t_1}^{x/v} dt_3 \int_0^{t_3} dt_4 (A + A^*) \right.$$

$$+ \int_0^{x/v} dt_1 \left[\int_0^{t_1} dt_2 (A - A^*) \right]^2 \int_{t_1}^{x/v} dt_3 \int_0^{t_3} dt_4 (A + A^*)$$

$$- \int_0^{x/v} dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 (A - A^*) \int_0^{t_2} dt_3 (A + A^*) \int_{t_1}^{x/v} dt_4 \int_0^{t_4} dt_5 (A - A^*)$$

Introduciendo (5,31) en (5.16) y después de cálculos muy laboriosos (Asseo et al, 1973) se obtiene finalmente la expresión analítica asintótica para el coeficiente de amortiguamiento $\Lambda(x)$ que está definido por

$$\begin{aligned}
 (5.32) \quad \Lambda(x) &= \frac{k^3}{2\langle E^2 \rangle_t} \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\langle E^2 \rangle_t}{k^3} \right] = - \frac{\pi}{2} \frac{\omega_p}{k^2} \cdot \frac{1}{\left(\frac{\partial E}{\partial k} \right)_{k=\omega/v}} \cdot \frac{\partial F}{\partial \sigma_0} \Big|_{\sigma_0 = \omega/v} \times \\
 &\left\{ 1 - \frac{3}{4} \frac{\omega_T^4}{v^2} \left[-2\beta \frac{x^2}{v^2} \frac{\sqrt{2\pi}}{2\beta(\sqrt{2\beta})^2} \int_0^{\frac{x}{2v}\sqrt{2\beta}} d\left(\frac{x}{2v}\sqrt{2\beta}\right) \left[\mathcal{C}\left(\frac{x}{2v}\sqrt{2\beta}\right) \cos\left(\frac{2\beta x^2}{4v^2}\right) + \right. \right. \right. \\
 &+ \left. \left. \mathcal{F}\left(\sqrt{2\beta} \frac{x}{2v}\right) \sin\left(\frac{2\beta x^2}{4v^2}\right) \right] + \frac{1}{2\beta} \frac{x^2}{2v} \left[\frac{\pi}{2} + S_i\left(2\beta \frac{x^2}{v^2}\right) \right] \right. \\
 &+ \left. \frac{\sqrt{2\pi}}{2\beta\sqrt{2\beta}} \frac{2x}{v} \left[\mathcal{C}\left(\sqrt{2\beta} \frac{x}{v}\right) \sin\left(\frac{2\beta x^2}{4v^2}\right) - \mathcal{F}\left(\sqrt{2\beta} \frac{x}{2v}\right) \cos\left(\frac{2\beta x^2}{4v^2}\right) \right] \right. \\
 &+ \left. \left. \frac{1}{(2\beta)^2} \left[\cos 2\beta \frac{x^2}{\beta^2} - 1 \right] \right\}
 \end{aligned}$$

donde S_i es la función seno integral, \mathcal{C} y \mathcal{F} las integrales de Fresnel y $2\beta = v^2 dk/dx$.

Nos interesa sobre todo el comportamiento de $\Lambda(x)$ cuando βx sea grande, lo que significa inhomogeneidad fuerte, y gran distancia del punto en el cual se emitió la onda ($x = 0$)

En estos casos la eo. (5.32) se reduce a

$$(5.33) \quad \Lambda(x) = \Lambda_{\text{hom.}} \left\{ 1 - \frac{3}{16} \sqrt{\pi} \frac{\omega_T^4}{\beta^2} \frac{x}{v} \sqrt{\beta} \left[\sin\left(\frac{2\beta x^2}{4v^2}\right) - \cos\left(\frac{2\beta x^2}{4v^2}\right) \right] \right\}$$

donde γ_{hom} es el coeficiente de amortiguamiento lineal de Landau correspondiente al caso homogéneo.

De la expresión (5.33) para $\gamma(x)$ vemos que cuando $\omega_T^4 \beta^{-2} \ll 1$ (lo que significa $k \Gamma \tau^2 \gg 1$), es decir cuando la inhomogeneidad es fuerte, el coeficiente de amortiguamiento se reduce al coeficiente correspondiente al caso lineal homogéneo. A este resultado se lo puede interpretar físicamente de la forma siguiente: en el caso de inhomogeneidad fuerte no hay partículas atrapadas y por consiguiente no hay ninguna limitación al amortiguamiento Landau de la onda. Remarquemos que la expresión (5.33) es el límite asintótico del coeficiente de amortiguamiento y recordemos que este mismo límite es cero en el caso homogéneo (ver Cap. III). Esto implica que una onda cuya amplitud sea tal que $\omega_T \sim \gamma_L$ continuará amortiguándose (a diferencia del caso homogéneo en que cesa de amortiguarse) con el coeficiente de amortiguamiento lineal de Landau siempre que $k \Gamma \tau^2 > 1$.

5.5 Inhomogeneidad débil y amortiguamiento Landau.

Para obtener al coeficiente de amortiguamiento espacial usaremos la ecuación (5.5) promediada sobre un período de oscilación de la onda

$$(5.34) \quad k \frac{\partial E}{\partial k} k^3 \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{e_0 \langle E^2 \rangle}{2k^3} \right] = \frac{\partial}{\partial x} \Delta T$$

donde ΔT es la variación de la energía cinética de las partículas resonantes en el sistema de laboratorio

$$(5.35) \quad \Delta T = \frac{\omega}{2\pi} \frac{m}{2} \left[\int_{R.} dt dv v^2 F(x, v, t) - \int_{R.} dt_0 dv_0 v_0^2 F(v_0) \right]$$

donde $F(x, v, t) = F[v_0(x, v, t)]$.

Con la ayuda de la identidad $v dv dt = v_0 dv_0 dt_0$ podemos escribir a ΔT de la forma siguiente

$$(5.36) \quad \Delta T = \frac{\omega}{2\pi} \frac{m}{2} \int_{R_1} dt_0 dv_0 v_0 (v - v_0) F(v_0)$$

En el sistema de laboratorio

$$(5.37) \quad v_0(x) = \frac{\omega}{k(x)} + w_0(x)$$

De esta última ecuación vemos que para que la partícula se encuentre en el punto x con una velocidad correspondiente a la región resonante, la velocidad inicial, en el sistema de la onda, de la partícula, $w_0(x)$, debe ser tal que

$$w_0(x) - \frac{\Gamma x}{v_\phi} \approx \frac{\omega_T}{k}$$

donde v_ϕ es la velocidad de fase de la onda y $\frac{\Gamma x}{v_\phi}$ es la variación de la velocidad de fase de la onda causada por la inhomogeneidad del medio. Para calcular la integral en la ec. (5.36) podemos hacer un desarrollo en serie de Taylor alrededor de la velocidad de resonancia local

$$(5.38) \quad F(v_0) = F \left[\frac{\omega}{k(x)} + \frac{\Gamma x}{v_\phi} + w_0(x) - \frac{\Gamma x}{v_\phi} \right] \\ \approx F \left[\frac{\omega}{k(x)} + \frac{\Gamma x}{v_\phi} \right] + (w_0(x) - \frac{\Gamma x}{v_\phi}) \frac{\partial F}{\partial v} \Bigg|_{\frac{\omega}{k(x)} + \frac{\Gamma x}{v_\phi}}$$

Notemos que este desarrollo es válido solamente cuando la segunda derivada de la función de distribución puede ser despreciada en la región resonante. Vamos a calcular aquí al coeficiente de amortiguamiento en el caso en que $\frac{\Gamma x}{v_\phi} > \frac{\omega_T}{k}$. En este caso la variación de la velocidad de fase de la onda $\frac{\Gamma x}{v_\phi}$, resulta importante. El primer término del desarrollo de la ecuación (5.38) es entonces el más importante, ya que como se puede demostrar

el segundo término contribuye con términos de orden superior en el parámetro $\Gamma k \tau^2$ considerado pequeño en el caso de inhomogeneidad débil. Entonces :

$$(5.39) \quad \Delta T = -\frac{m}{2} \int (v - v_0) v_0 \left[F\left(\frac{\omega}{k(v_0)} + \frac{\Gamma x}{v_0}\right) - F\left(\frac{\omega}{k(v_0)}\right) \right] dv_0$$

El primer término del corchete representa la variación de energía de las partículas pasantes y el segundo representa la variación de energía de las partículas atrapadas.

Podemos suponer además que $v - v_0 \approx \frac{\Gamma x}{v_0}$. Entonces la integral de la ecuación (5.39) se integra fácilmente obteniéndose la expresión siguiente para el coeficiente de amortiguamiento espacial

$$(5.40) \quad \Lambda(x) = \frac{k^3}{2\langle E^2 \rangle} \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\langle E^2 \rangle}{k^3} \right] \approx \frac{\delta_L}{v_g} (\Gamma k \tau^2)^2 \frac{\omega_T x}{v_0}$$

donde $v_g = \frac{\partial \omega}{\partial k}$ es la velocidad de grupo de la onda.

5.6 Conclusión.

Cuando la inhomogeneidad es lo suficientemente fuerte, $k \Gamma \tau^2 > 1$, no hay partículas atrapadas y se reobtiene como límite asintótico al coeficiente de amortiguamiento (amplificación) de Landau. Esto es una consecuencia del hecho de que el fenómeno de atrapamiento, al no estar presente en este caso, no limita al intercambio de energía entre la onda monocromática y las partículas del plasma. En el caso inestable la amplitud de la onda crecerá exponencialmente siempre que $k \Gamma \tau^2 \geq 1$. Cuando $k \Gamma \tau^2 < 1$ la amplitud de la onda continuará creciendo pero ahora solamente en forma proporcional a alguna potencia de la distancia. Como la amplificación en el caso de inhomogeneidad débil es mucho menor que en el caso de inhomogeneidad fuerte podemos considerar prácticamente que el límite no lineal para la amplifi-

cación de la onda en un medio inhomogéneo viene dado por $\omega_T^2 \approx k\Gamma$. Es interesante remarcar que este límite para la amplitud de la onda es muy superior al que se obtiene en un medio homogéneo en el cual el límite se calcula con la relación $\omega_T \approx \gamma_L$ (ver parágrafo 3.5). Recientemente Roux et al (1973) han comprobado que la amplitud de saturación de las ondas iónicas ciclotrónicas que se propagan en la magnetosfera terrestre están determinadas por la relación $\omega_T^2 \approx k\Gamma$. Además de esta primera aplicación de la teoría que acabamos de desarrollar podemos afirmar que la misma abre la vía a toda una serie de investigaciones teóricas nuevas en el dominio de los plasmas inhomogéneos. Algunas de ellas van a ser estudiadas en el Capítulo VI de este trabajo.

Referencias.

1. Asseo, E., G.Laval, R.Welti, R.Pellat y A.Roux; J. Plasma Phys. 8, 341 (1972)
2. Dawson, J. ; Plasma Phys. , 4 , 869 (1961)
3. Gary S., D. Montgomery, D.Swift ; J. Geophys. Res., 73 , 7524 , (1968)
4. Laval G. y R. Pellat ; J. Geophys. Res., 75 , 3255 (1970)
5. Nunn D.; J. Plasma Phys. 8 , 291 , (1971)
6. O'Neil, T. M. ; Phys. Fluids, 8 , 2255 (1965)
7. Roux A., R. Gendrin, N. Wehrlin, R.Pellat y R. Welti; J. Geophys. Res., 78 , 3176 (1973)
8. Swift, D.; J. Geophys. Res., 75 , 6324 (1970)

CAPITULO VI

ONDAS MONOCROMATICAS Y EFECTOS DE LA INHOMOGENEIDAD. APLICACIONES A LA GEOFISICA EXTERNA.

6.1 Introducción.

Es bien conocido que las interacciones ondas partículas juegan un papel importante en las pérdidas o aceleraciones del plasma magnetosférico. Una gran variedad de ondas obserbadas con satélites o por observatorios ubi-^vcados en tierra son debidas a las interacciones ondas partículas. Aquí va-
mos a restringirnos a ondas circularmente polarizadas que se propagan a lo largo de las líneas de campo magnético terrestre.

De la teoría lineal de la inestabilidad ciclotrónica (Sagdeev y Shafranov, 1961) se deducen muchas consecuencias de interés geofísico (ver por ejemplo Gendrin, 1972, y las referencias que allí se citan).

En lo que a pérdidas de partículas se refiere es esencial estudiar el nivel de saturación no lineal de estas ondas. El equilibrio entre los electrones energéticos y las bandas de frecuencia MBF (muy baja frecuencia) y BF (baja frecuencia) ha sido extensivamente estudiado (ver Kennel y Petschek, 1966). Estos estudios han sido hechos dentro del esquema de la aproximación cuasi lineal (ver Capítulo IV). Sin embargo muchas de las ondas obserbadas tienen un espectro casi monocromático y amplitudes muy grandes lo que hace imposible la aplicación de la teoría cuasi lineal. En este capítulo vamos a estudiar el desarrollo no lineal de estas ondas monocromáticas.

Para las ondas monocromáticas que estamos considerando la inestabilidad ciclotrónica puede limitarse por tres procesos diferentes :

(i) Si las ondas son de relativamente pequeña amplitud podemos ignorar el atrapamiento. En el parágrafo 6.6 mostraremos que las múltiples "colisiones" entre partículas y ondas monocromáticas dan lugar a una difusión en el espacio de las velocidades que depende fuertemente de la inhomogeneidad a lo largo de las líneas de campo. Este mecanismo da lugar a la creación

de ondas satélites de la inicial.

(ii) Si el campo magnético de la onda no puede considerarse pequeño las partículas pueden ser atrapadas en el pozo de potencial de la onda. Este efecto reduce considerablemente al proceso de amplificación aún en un medio inhomogéneo.

(iii) Cuando el atrapamiento es eficiente sobre muchas longitudes de atrapamiento a lo largo de la línea de campo magnético, los movimientos de las partículas atrapadas pueden acoplarse al modo inestable dando lugar a ondas de frecuencias muy poco diferentes de la inicial. Esta es la llamada inestabilidad de partículas atrapadas la que puede modificar la amplificación de la onda y dar lugar a satélites de la onda inicial.

6.2 Efecto de la inestabilidad del medio sobre el atrapamiento.

Vamos a examinar aquí los efectos de la inhomogeneidad del medio sobre el atrapamiento de las partículas en resonancia con una onda monocromática de gran amplitud. Vamos a obviar aquí muchos de los detalles del cálculo ya que son esencialmente los mismos que hemos realizado en el Capítulo V. para las ondas electrostáticas.

El movimiento de las partículas resonantes con una onda electromagnética circularmente polarizada (Dysthe, 1971) puede ser reducida a una oscilación unidimensional en el sistema resonante, encontrándose para la misma una ecuación muy similar a la ec. (5.9)

$$(6.1) \quad \frac{d^2 \Psi}{dt^2} + \omega_T^2 \Psi = -k_{||} \Gamma$$

donde $\omega_T = [k_{||} v_{\perp} e B_1 / m]^{1/2}$ es la frecuencia de atrapamiento, $v_{\perp} = [v_x^2 + v_y^2]^{1/2}$ y $v_{||}$ son las componentes perpendiculares y paralelas al campo magnético de la velocidad, $\Psi = \varphi - \omega t + \int k_{||}(z) dz$, $\varphi = \arctg(v_y/v_x)$ y B_1 y $k_{||}$ son la amplitud y número de onda de la onda. Γ es una fuerza que aparece en el sistema resonante debido al cambio no galileano

de sistema que se ha hecho. Γ toma la siguiente expresión en nuestro caso :

$$(6.2) \quad \Gamma = v_R \frac{dv_R}{dt} + \mu \frac{\partial B_0}{\partial z}$$

donde v_R es la velocidad resonante, μ el primer invariante adiabático (el momento magnético) y B_0 es el campo magnético terrestre.

En un medio homogéneo $\Gamma = 0$ y la ec. (6.1) se reduce a la ecuación de un péndulo que describe las oscilaciones de las partículas atrapadas en el pozo de potencial de la onda. A la fuerza restauradora por unidad de masa que da lugar a estas oscilaciones vamos a llamarla "fuerza de atrapamiento"

$$F_T = \frac{\omega_T^2}{k_{\parallel}} \cdot$$

Si examinamos la ec. (6.1) vemos que siempre que $F_T > |\Gamma|$ las partículas permanecen atrapadas, mientras que si $F_T < |\Gamma|$ todas las partículas son liberadas.

6.3 Efecto del atrapamiento sobre el nivel de saturación de la onda.

Debido a que las partículas oscilan en el pozo de potencial de la onda sus ángulos de fase ψ tienen la misma probabilidad de incrementar o de crecer. Por consiguiente en un régimen dominado por el atrapamiento el intercambio de energía entre la partícula y la onda tiende a ser nulo. Si la onda es inicialmente inestable se alcanza este régimen cuando la frecuencia de resonancia (o frecuencia de atrapamiento), que es proporcional a la raíz cuadrada de la frecuencia, llega al límite

$$(6.3) \quad \omega_T \sim \gamma_L$$

donde γ_L es el coeficiente de amplificación lineal de la onda.

En un medio inhomogéneo, como se ha visto en los párrafos (5.5) y (6.2),

el atrapamiento y la inhomogeneidad compiten para gobernar el movimiento de la partícula. La transposición de los resultados del Capítulo V a ondas electromagnéticas es bastante directa. Aquí solamente vamos a resumir sus conclusiones principales en lo que se refiere a la evolución de la amplitud de la onda.

Vamos a suponer que el medio es inicialmente inestable y que la inestabilidad es tal que Γ es monótono. Siempre que $|\Gamma| > F_T$, la onda crece exponencialmente en la razón fijada por la teoría lineal (a pesar de que las ondas tengan una amplitud finita). Cuando $F_T > |\Gamma|$ la onda continúa creciendo pero muy lentamente (el crecimiento deja de ser exponencial). El crecimiento espacial no lineal viene dado por

$$(6.4) \quad K_{NL} = \frac{1}{2} \frac{k_{||}}{B_1^2} \cdot \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{B_1^2}{k_{||}} \right] = \frac{\gamma_L}{v_g} \cdot \left(\frac{\Gamma}{F_T} \right)$$

donde v_g es la velocidad de grupo. Si $\gamma_L = 0$, la ec. (6.4) describe la variación WKB de la amplitud de la onda a lo largo de las líneas de campo ($B_1 \propto \sqrt{k_{||}}$). Cuando $\gamma_L \neq 0$, esta ecuación describe la evolución promedio (sobre longitudes de atrapamiento) de la amplitud de la onda. Como $F_T \propto B_1$ la amplitud de la onda crecerá linealmente con la distancia como se puede ver de la ec. (6.4)

Estos resultados se resumen en la figura 6.1, donde se muestra la evolución esquemática del cuadrado de la frecuencia de atrapamiento (que es proporcional a la amplitud de la onda) versus la distancia. Por simplicidad se supone que el parámetro de la inhomogeneidad, Γ , es constante en dicha figura. En un medio homogéneo la saturación se alcanza cuando $\omega_T^2 \sim \gamma_L^2$. Debido a la inhomogeneidad la amplitud de la onda continuará creciendo en la razón fijada por la teoría lineal hasta que $\omega_T^2 \sim k_{||} \Gamma$. Estrictamente, según la ec. (6.4) la onda continuará creciendo pero ahora en una razón muy inferior, lo que justifica tomar a $\omega_T^2 \sim k_{||} \Gamma$ como la condición de saturación en un medio inhomogéneo (ver Fig. 6.1).

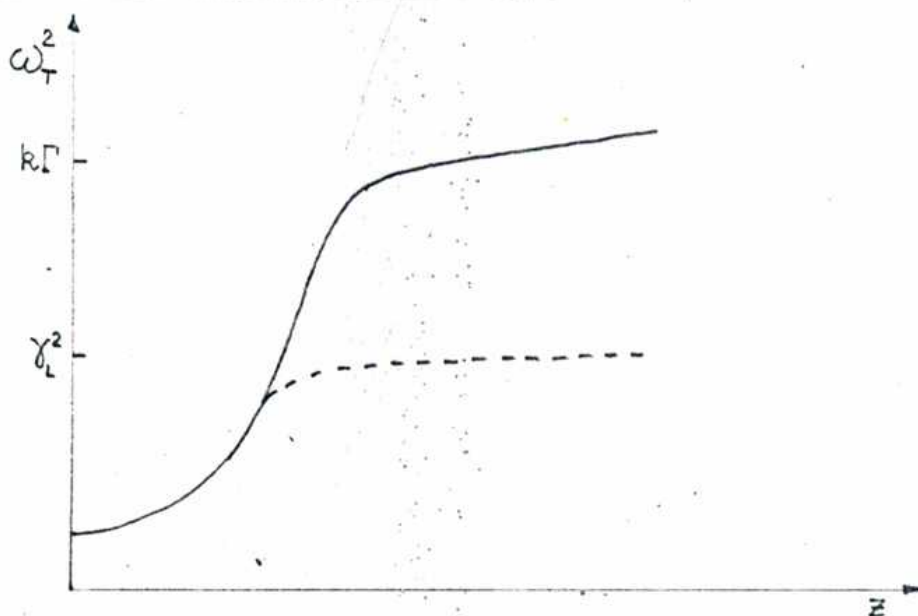


FIG. 6.1 Diagrama esquemático de la variación de la amplitud de la onda. En trazo continuo para medios inhomogéneos; en línea de trazos para medios homogéneos

Vamos a estudiar ahora en detalle las consecuencias de esta nueva saturación en la geometría particular de las líneas de campo terrestres. Todas las cantidades de las ecuaciones previas dependerán de la distancia con respecto al ecuador. En el ecuador el atrapamiento tenderá a dominar, (la variación del campo magnético sobre la línea es la mínima en esta zona), mientras que lejos del ecuador no habrá atrapamiento ya que $|\Gamma| \gg F_T$. El punto exacto donde $|\Gamma| \sim F_T$ dependerá de la amplitud de la onda, pero debemos hacer notar que dependerá muy poco del ángulo de ataque que estamos considerando.

La teoría lineal es válida sobre distancias mucho más pequeñas que la longitud de atrapamiento (una condición espacial equivalente a la condición temporal dada por la ec. (2.28)). Por consiguiente la saturación en la región ecuatorial puede ser eficiente solamente si las partículas sufren al menos una oscilación de atrapamiento antes de ser liberadas. Esto lleva a la condición de que la saturación comienza a ser eficiente cuando la fuerza de atrapamiento domina a la inhomogeneidad sobre al menos media longi-

tud de atrapamiento sobre cada lado del ecuador. Esto puede escribirse como

$$(6.5) \quad \Gamma(z=z_1) = \frac{\omega_T^2}{k_{11}(z_1)} \quad y \quad z_1 = \frac{\mathcal{L}_T}{2} = \frac{\pi \sqrt{R}}{\omega_T}$$

donde \mathcal{L}_T es la longitud de atrapamiento.

La solución de estas ecuaciones nos da el valor mínimo de la amplitud del campo B_1 para que el atrapamiento sea importante. Si $B > B_1$, la amplitud de la onda se reduce considerablemente sobre el intervalo $(+z_1, -z_1)$. Si la amplificación exponencial continúa siendo efectiva afuera de este intervalo la onda puede continuar creciendo por un tiempo.

Liemohn (1967) ha mostrado que el coeficiente de crecimiento lineal decrece rápidamente al alejarse del ecuador. Por consiguiente la saturación por atrapamiento sobre la longitud $|z| < z_1$ da lugar a un gran decrecimiento de la amplificación integrada a lo largo de las líneas de campo. Los valores exactos de z_1 y B_1 donde se alcanza la estabilidad marginal depende de la razón z_1/\mathcal{L} (siendo \mathcal{L} la longitud total de las líneas de campo), del coeficiente de amplificación lineal, y del coeficiente de reflexión de la onda en la ionosfera.

Una aplicación de este mecanismo de saturación al caso particular de interacción de protones con ondas levóginas serán presentadas en el parágrafo 6.5. Debemos notar que este tratamiento es válido solamente para inestabilidades convectivas. La condición de saturación $\omega_T \sim \gamma_L$ es aún válida para inestabilidades absolutas en medios inhomogéneos.

6.4 Difusión por ondas electromagnéticas en un medio inhomogéneo.

Vamos a estudiar ahora la amplificación de la onda y sus efectos sobre la función de distribución de las partículas para amplitudes de la onda mucho más pequeñas que B , lo que significa que el atrapamiento no tiene lugar. Ashour - Abdalla (1972), estudiando la separación en frecuencia de las

emisiones en M.B.F. estimuladas artificialmente, ha mostrado numéricamente que ondas monocromáticas continuas de baja amplitud pueden afectar la distribución electrónica en forma tal de obtener un coeficiente de amplificación para una frecuencia algo diferente de la inicial. Welti et al (1973) han estudiado analíticamente el problema correspondiente para interacciones entre protones y ondas U.L.F. (ultra baja frecuencia). Vamos a discutir ahora brevemente el mecanismo físico. Las partículas, protones en este caso, van y vienen a lo largo de las líneas de campo. Cuando su velocidad paralela

$$(6.6) \quad V_{||} = [v^2 - 2\mu B_0]^{1/2}$$

es igual a la velocidad resonante

$$(6.7) \quad V_R = \frac{\Omega_c(z) - \omega}{k_{||}(z)} \quad (\text{donde } \Omega_c = \frac{eB_0}{m})$$

(lo que puede ocurrir en dos puntos de la línea de campo, simétricos con respecto al ecuador), se produce una fuerte interacción con la onda. Para un modelo parabólico del campo magnético terrestre B_0 y un modelo magnético para la densidad de plasma frío ($N_0 \propto B_0$) se muestra que las partículas resonantes deben tener una velocidad paralela mínima $v_{||} > v_R(z=0)$. La fase relativa entre ondas y partículas es (ver ec. (6.14))

$$\psi = \int_0^z \left(1 - \frac{V_R}{V_{||}}\right) k_{||} dz$$

La resonancia toma lugar cuando

$$\frac{d\psi}{dz} = 0 \quad \text{para } z = z_R$$

Cerca del ecuador, ψ varía lentamente, entonces $\cos\psi$ varía también lentamente, mientras que lejos del ecuador $\cos\psi$ varía rápidamente.

Como el coeficiente de difusión (ver ec. (6.18)) es proporcional a

$\left[\int \cos \psi dz \right]^2$, éste será mucho más grande cerca del ecuador que lejos del mismo.

Vamos a llamar L_i la longitud característica sobre la cual ψ varía un radián. Desarrollando la fase alrededor del ecuador, encontramos que (para ondas levóginas U.L.F. interactuando con protones)

$$(6.8) \quad \frac{L_i}{z_0} = \left[\frac{6}{k_{\parallel} z_0 \left[\frac{3}{1-x} + \frac{V_{\perp 0}^2}{V_{\parallel 0}^2} \right]} \right]^{1/3}$$

donde $x = \frac{\omega}{\Omega_c}(z=0)$ es la frecuencia normalizada y z_0 está definido por el desarrollo parabólico del campo magnético cerca del ecuador

$$(6.9) \quad B(z) = B(z=0) \left[1 + \left(\frac{z}{z_0} \right)^2 \right]$$

$V_{\perp 0}$ y $V_{\parallel 0}$ son las componentes perpendiculares y paralelas del protón en el ecuador.

Se puede mostrar fácilmente que debido al ancho finito de la resonancia, un rango finito de velocidades paralelas ΔV_{\parallel} (alrededor de la velocidad resonante exacta) están interesados por el proceso de difusión. ΔV_{\parallel} viene dado por

$$(6.10) \quad k_{\parallel} \frac{\Delta V_{\parallel}}{V_{\parallel 0}} \approx \frac{L_i^2}{2} \left[\frac{\partial^3 \psi}{\partial z^3} \right]_{ec.}$$

Se puede visualizar en la Fig. 6.2 que la función de distribución tiende hacia las curvas de difusión sobre el ancho ΔV_{\parallel} . Para un módulo fijo de la velocidad, a ΔV_{\parallel} le corresponde una extensión finita en ángulo de ataque $\Delta \alpha$ (donde $\Delta \alpha = \Delta V_{\parallel} / V_{\perp 1}$). Recordemos que el ángulo de ataque es el ángulo entre la velocidad de la partícula y el campo magnético torres tre.

Para simplificar vamos a suponer una difusión solamente en ángulo de ataque. Esto significa que sobre el ancho $\Delta\alpha$, la función de distribución tenderá hacia la isotropía. Fuera del intervalo $\Delta\alpha$ no hay ninguna difusión. Para asegurar la continuidad entonces (ver Fig. 6.2) se debe incrementar la tangente $\partial F/\partial\alpha$ en cada extremo de este intervalo.

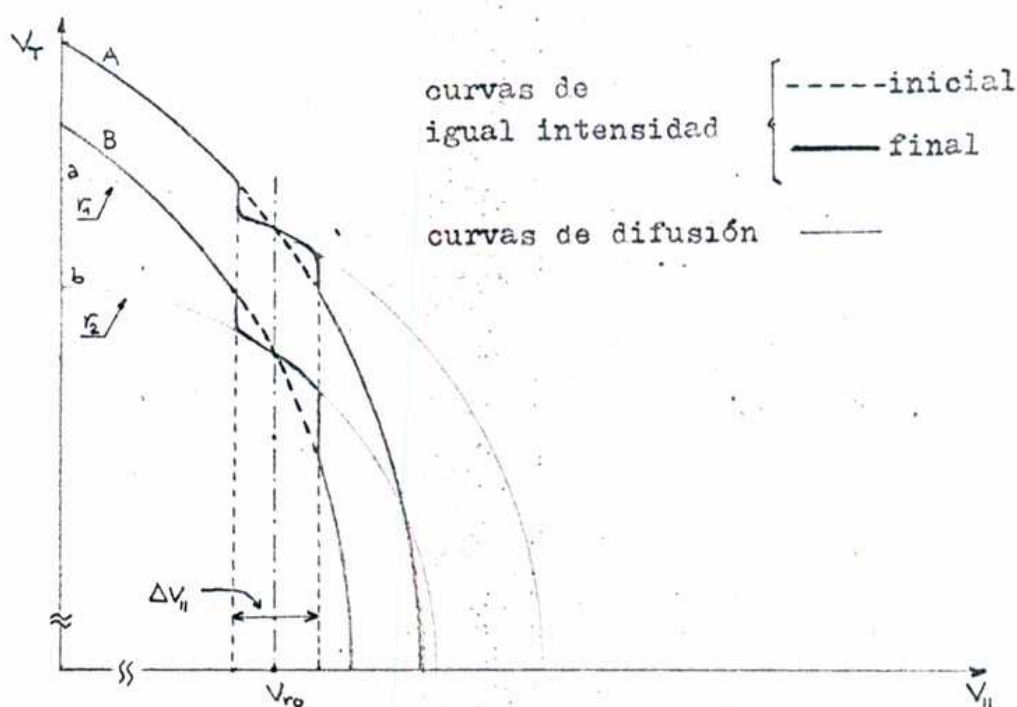


FIG. 6.2 $\partial f_0/\partial\alpha$ se hace más grande en la vecindad de $V_{ro} \pm \Delta V_{II}/2$ debido a la difusión

Consecuentemente uno debe esperar la aparición de ondas satélites con frecuencias $\omega = \omega_0 \pm \Delta\omega$ que serán ahora preferencialmente amplificadas. El valor de $\Delta\omega$ viene dado por (Welti et al, 1973).

$$(6.11) \quad \frac{\Delta\omega}{\Omega_c} = C \frac{[4(1-x)]^{2/3}}{1 + 2/x} \cdot \frac{1}{(k_{II} Z_0)^{2/3}}$$

donde C es una constante cercana a la unidad y que depende lentamente del tiempo.

En el parágrafo 6.6 se estudiará con más detalle la teoría, que aquí hemos resumido, como así también sus condiciones de validez.

Debemos notar que $\Delta\omega$ depende esencialmente de la inhomogeneidad del medio

a lo largo de las líneas de campo, siendo totalmente independiente de la amplitud de la onda.

En un régimen dominado por el atrapamiento, puede tener lugar la inestabilidad de partículas atrapadas (ver parágrafo 3.4) y el corrimiento de frecuencias resultante es proporcional a la raíz cuadrada de la amplitud de la onda.

Estos diferentes mecanismos que pueden dar lugar a la aparición de ondas satélites serán discutidos en detalle en el parágrafo 6.5 donde intentaremos explicar el espectro en frecuencia de los eventos Pcl .

6.5 Interpretación del espectro en frecuencias de las micropulsaciones llamadas "Perlas".

Las "Perlas" son micropulsaciones regulares en la gama de frecuencias Pcl (0,2 a 5 Hz.) . Estas son ondas circularmente polarizadas a izquierda que se propagan a lo largo del campo magnético terrestre y son amplificadas por la anisotropía de temperatura de los protones atrapados en la magnetosfera. En los sonogramas de perlas registradas en laboratorio (ver Roux, 1974) estas comienzan en cada evento siendo muy monocromáticas pero su espectro en frecuencia se ensancha a medida que pasa el tiempo. En algunas ocasiones sin embargo el espectro en frecuencia de las perlas parece estar compuesto de dos o más componentes de frecuencias muy poco diferentes. Como los sonogramas tienen una resolución en amplitud y frecuencia bastante mala, Wehrlin et al (1973) han hecho un análisis mucho más cuidadoso usando un aparato SAICOR que da un gráfico tridimensional (frecuencia - amplitud - tiempo) con una buena resolución. Con este análisis se ha encontrado una estructura fina en todos los eventos que han sido analizados por Wehrlin et al . La separación en frecuencia entre la onda madre e hijas en cada evento ha permanecido constante y es del orden de 5×10^{-2} Hz.

Los análisis realizados por Wehrlin et al muestran las siguientes caracte-

rísticas :

- (i) Cuando aparece la onda "hija", la amplitud de la onda madre decrece.
- (ii) Cuando aparece la onda "hija" la amplitud de la onda madre no está saturada; después del "parto" ésta continúa creciendo hasta alcanzar un nivel significativamente más alto. Este nivel de saturación real es aproximadamente el mismo para todas las componentes del espectro.
- (iii) Todas las separaciones en frecuencias son constantes durante la duración del evento y tienen el mismo orden de magnitud.

Budko et al (1971) han realizado el primer intento para explicar estos hechos. En su teoría ellos consideran que las ondas satélites son debidas al acoplamiento entre el movimiento de la partícula atrapada y la onda inicial. La separación en frecuencias que ellos han encontrado es proporcional a la frecuencia de atrapamiento. En sus cálculos se supone que el medio es homogéneo.

Para que este mecanismo sea válido en un medio inhomogéneo es necesario que las partículas sufran muchas oscilaciones en el pozo de potencial de la onda antes que sean liberadas .

En la ec. (6.5) hemos escrito la condición para que la fuerza de atrapamiento domine a la fuerza de la inhomogeneidad, que se le opone, sobre al menos una longitud de atrapamiento. Esto puede ser visualizado en la Fig. 6.3 donde hemos dibujado L_T la longitud de atrapamiento y ℓ , la distancia donde la fuerza de atrapamiento es igual a la fuerza de la inhomogeneidad, en función de la amplitud de la onda.

Se ve que si $B > B_c$ habrá por lo menos una oscilación en el pozo de potencial de la onda antes que las partículas sean liberadas. Si $B < B_c$ no hay atrapamiento. Concluimos entonces que B_c es el valor mínimo de la amplitud de la onda para que sea aplicable la teoría basada sobre la inestabilidad de las partículas atrapadas.

A partir de las mediciones realizadas en tierra no es posible deducir las correspondientes magnitudes "in situ". Supongamos, sin embargo, por un mo-

mento que la inestabilidad de atrapamiento puede explicar las mediciones hechas por Wehrlin et al . Se podrá deducir entonces el valor que la ampli-

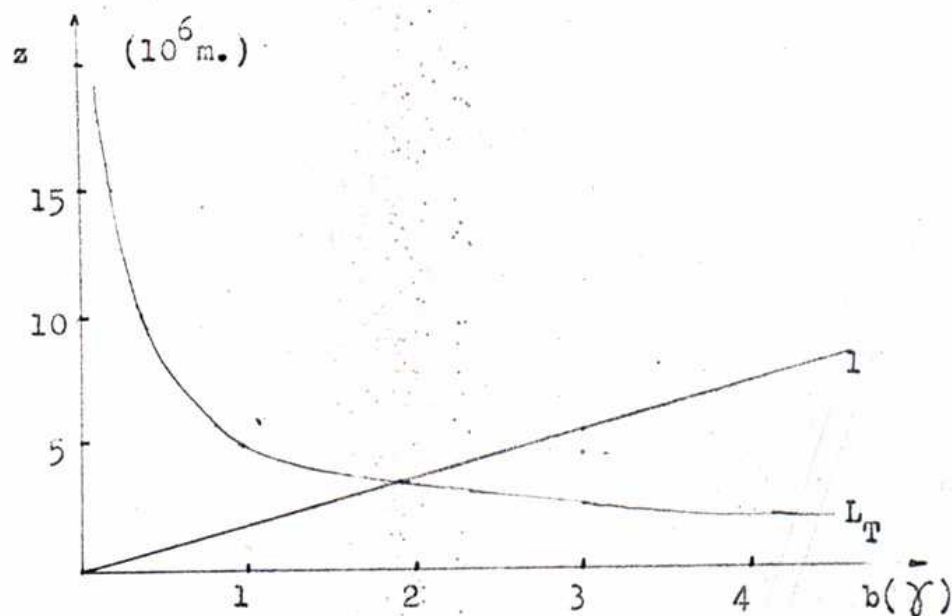


FIG. 6. 3 La longitud de atrapamiento L_T y la distancia l desde el ecuador hasta el punto en que la fuerza de atrapamiento y de inhomogeneidad se hacen iguales, en función de la amplitud de la onda .

tud de la onda tendría en la magnetosfera a partir de las mediciones de las separaciones en frecuencia. Las otras cantidades (tales como la girofrecuencia y la velocidad de grupo) pueden ser deducidas de la propiedad dispersiva de las perlas (Gendrin et al , 1971) . Las amplitudes de las ondas obtenidas de esta forma son siempre mucho mas pequeñas que B_0 . Por consiguiente es imposible que la inestabilidad de atrapamiento explique las mediciones realizadas por Wehrlin et al .

En el parágrafo 6.3 hemos discutido otro mecanismo que por efectos de la inhomogeneidad del medio, generaría, para amplitudes más bajas, ondas satélites de la onda monocromática inicial.

Comparando las separaciones en frecuencias medidas por Wehrlin et al a las obtenidas teóricamente por Welti et al (ver ec. (6.11)) , Roux et al (1973) han mostrado que el acuerdo es muy bueno (ver Fig. 6.4).

Las Δf calculadas teóricamente son siempre del orden de las Δf ob-

serbadas. Debe mencionarse que esta comparación se hecho con más facilidad porque la separación en frecuencias teórica, dada por la ec.(6.11), depende muy poco de la amplitud de la onda. De todos modos para obtener coefi-

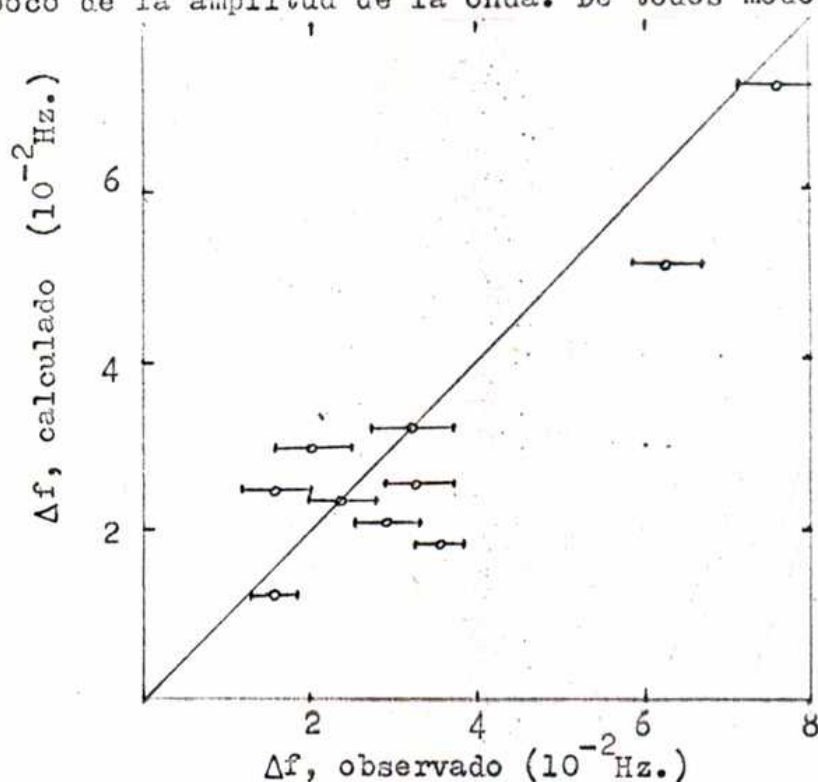


FIG. 6.4 Comparación entre valores experimentales y teóricos de la separación en frecuencia entre la línea "madre" y la línea "hija"

cientes de amplificación suficientemente grandes para las ondas satélites es necesario que la amplitud de la onda inicial supere un cierto límite. Welti et al han mostrado que según los valores de L , (L distancia en radio terrestres del ecuador de la línea magnética al centro de la tierra), esta varía entre 0,3 a 1γ ($\gamma = 10^{-5}$ Gauss). Vamos a llamar a este nivel B_i , donde el subíndice 'i' remarca que es un resultado que se obtiene debido a la inhomogeneidad del medio.

Debemos tener en cuenta que este no es un nivel de saturación absoluto. Después de la generación de las ondas satélites la onda continúa creciendo hasta llegar a un nivel de saturación significativamente más alto. Este posterior crecimiento de la onda madre puede deberse a la restauración de la anisotropía causada por la deriva azimutal y a la difusión inducida por las ondas satélites. Como la onda madre continúa creciendo esta puede lle-

gar eventualmente a un régimen dominado por el atrapamiento. Hemos mostrado en parágrafo 6.3 que cuando la fuerza de atrapamiento supera a la fuerza de la inhomogeneidad sobre al menos una longitud de atrapamiento la amplificación se reduce considerablemente sobre esta longitud (ver ec. (6.6)). Uno se puede preguntar entonces si la amplificación residual fuera de este intervalos lo suficientemente fuerte como para superar a las pérdidas de energía de la onda en la ionosfera. Para poder contestar es necesario conocer el coeficiente de reflexión en la ionosfera, el coeficiente de amplificación lineal y la distancia z_1 (que se definió en la ec. (6.6)). Siendo la primera prácticamente desconocida, vamos a focalizar nuestra atención sobre z_1 . Roux et al (1973) han calculado z_1 y han encontrado que es una fracción apreciable de la longitud de la línea de fuerza, $z_1/R_T \sim 0,5$ donde R_T es el radio terrestre.

De las mediciones se sabe que la onda madre crece muy lentamente lo que significa que no está lejos de la estabilidad marginal. Un gran decrecimiento, sobre una parte significativa de la línea de fuerza, del coeficiente de amplificación parecería entonces ser suficiente para hacer parar el crecimiento de la onda.

Así $B \sim B_s$ puede considerarse para las ondas monocromáticas Pcl como una evaluación realista del nivel de saturación. Como este nivel de saturación depende muy poco de la frecuencia de la onda considerada es clara que debe ser aproximadamente el mismo para todas las componentes del espectro. El valor calculado de B_s es del orden de 1 a 3 γ (dependiendo del valor de L que se tome). Este resultado está en buena concordancia con las mediciones Pcl hechas por Mc Pherron (1973).

Roux et al (1973) han calculado teóricamente la razón B_s/B_c para cada uno de los eventos analizados y han mostrado que están en buen acuerdo con la razón que Mehrlin et al han deducido a partir de sus mediciones. Esta concordancia agregada a las mediciones de Mc Pherron sería una prueba del hecho de que la saturación por atrapamiento ocurre en la mayoría de los casos.

6.6 Teoría de la difusión por ondas electromagnéticas en un medio inhomogéneo.

Una interacción de "girorresonancia" se produce cuando la partícula en el sistema de su centro de guía ve al campo eléctrico de la onda rotar a una frecuencia igual a su propia frecuencia de ciclotrón ; es decir cuando

$\Omega_c = \omega - kV_R$. Vamos a interesarnos aquí en las interacciones protones ondas levóginas, Ω_c es entonces la frecuencia de ciclotrón de los protones, k y ω el número de onda y la frecuencia de la onda y V_R la velocidad resonante. paralela al campo magnético terrestre.

Si fijamos la frecuencia de la onda, k debe variar de acuerdo a la relación de dispersión en medio inhomogéneo. Ω_c está determinado por el modelo de campo dipolar.

Al orden más bajo, el movimiento de la partícula está determinado por la constancia de su energía y del primer invariante adiabático (momento magnético). Es de esperar entonces que la partícula durante su ida y vuelta entre sus puntos espejos resuene con la onda en dos puntos solamente de la línea de fuerza.

Cada resonancia puede ser considerada como una colisión en la cual la energía W y el momento magnético μ cambian; el signo y el valor de $\delta\mu$ y δW dependen de la fase de la partícula respecto de la onda durante la resonancia. Si suponemos que no hay coherencia de fase entre una resonancia y la siguiente se puede calcular al coeficiente de difusión, que hemos utilizado en el parágrafo 6.4 , a partir de la teoría de Fokker - Planck.

En lo que sigue vamos a considerar solamente la difusión en ángulo de ataque. Es posible tener en cuenta igualmente la difusión en energía si se trabaja con un sistema de variables adaptadas a las curvas de difusión (ver Gendrin, 1968). El hecho de aproximar a las curvas de difusión por círculos centrados en el origen introduce para las ondas que consideramos un error muy pequeño. Como el álgebra se haría mucho más complejo, no modificándos-

donde la integración debe ser hecha a lo largo de la línea de fuerza del campo magnético terrestre. A causa de la simetría del problema alrededor del ecuador vamos a efectuar la integración sobre la mitad de la línea de fuerza del campo magnético terrestre, es decir entre 0 e ∞ . Para tener en cuenta la otra mitad vamos a multiplicar a $\langle \Delta V_{||}^2 \rangle$ por dos. El hecho de multiplicar por dos es una consecuencia directa de la suposición que no hay coherencia de fase entre las colisiones sucesivas.

Las interacciones giroresonantes más eficaces van a tener lugar en las proximidades del ecuador donde el campo magnético estático varía lentamente. Para el cálculo de la integral (6.15) vamos a desarrollar a ψ alrededor del ecuador, lo que nos da

$$(6.16) \quad \psi = \psi_0 + q(s-s_1) - p \left(\frac{s^3}{6} - \frac{s_1^3}{6} \right)$$

donde s_1 es un punto próximo del ecuador donde se verifica la condición de resonancia con una fase $\psi = \psi_0$, y

$$q = \left. \frac{d\psi}{ds} \right|_0 = k_0 \left(1 - \frac{V_R}{V_{||}} \right)$$

$$p = - \left. \frac{d^3\psi}{ds^3} \right|_0$$

El desarrollo (6.16) es válido siempre que el modelo parabólico (ec.(6.9)), sea una buena aproximación del campo dipolar terrestre.

Introduciendo (6.16) en (6.15) se obtiene

$$(6.17) \quad \Delta V_{||} = -\Omega_0 \frac{V_{\perp} 2^{1/3}}{V_{||}} \operatorname{Re} \left\{ \left[\frac{1}{p^{1/3}} \exp(\psi_0 - q k_0 s_1 - \frac{p s_1^3}{6}) \right] \times \int_0^{\infty} h \exp i \left[\frac{s^3}{3} + \frac{2^{1/3}}{p^{1/3}} k_0 q s \right] ds \right\}$$

donde $\Omega_0 = \frac{q B(s=0)}{m}$ y $h = \frac{B_1}{B(s=0)}$.

El cálculo del coeficiente de difusión es ahora inmediato

$$(6.18) \quad D_{\alpha-\alpha} = \frac{\Omega_0^2 2^{2/3} \rho^2 \pi^2}{\tau_0 v_{||}^2 \rho^{2/3}} A_i^2 \left[-\frac{2^{1/3} k_0 \rho}{\rho^{1/3}} \right]$$

donde τ_0 es el tiempo de ida y vuelta entre los puntos espejos de la partícula y A_i es la función de Airy definida de la forma siguiente

$$(3a)^{-1/3} \pi A_i \left[\pm (3a)^{-1/3} x \right] = \int_0^{\infty} \cos(at^3 \pm xt) dt$$

Se puede mostrar fácilmente que el coeficiente de difusión (6.18) toma valores apreciables solamente en el intervalo de velocidades paralelas, alrededor de la velocidad resonante, que viene dado por la ec. (6.10).

Vamos a estudiar ahora las condiciones de validez de la ecuación de difusión (6.12) con el coeficiente de difusión dado por la (6.18).

Recordemos que en la teoría cuasi lineal ordinaria (esto es, para la interacción de partículas con ondas de gran dispersión en número de ondas) el proceso de difusión es markoffiano siempre que se verifiquen las desigualdades

$$(6.19) \quad \tau_E, \tau_{f_0} \gg \frac{1}{v_R \Delta k_{||}}$$

donde τ_E, τ_{f_0} son los tiempos característicos de evolución para la amplitud de la onda y la función de distribución, v_R es la velocidad resonante y Δk es el ancho característico del espectro (ver ecs.(4.35) y (4.36))

Para que la teoría cuasi lineal sea aplicable es necesario entonces que

Δk sea bastante grande.

Si entramos a considerar ondas monocromáticas, $\Delta k \rightarrow 0$ y la teoría cuasi

lineal no es aplicable si el medio es homogéneo. La inhomogeneidad del medio produce, como lo mostramos previamente, un ensanchamiento de la resonancia. O si se quiere ver de otra manera la introducción de la inhomogeneidad resuelve el problema de la singularidad que aparece en la ecuación lineal para el movimiento de la partícula. Es así como Welti et al (1973) han podido mostrar que las condiciones de validez de la teoría cuasi lineal en un medio inhomogéneo vienen dadas por

$$(6.20) \quad \tau_E, \tau_{f_0} \gg \frac{L_i}{V_R}$$

donde L_i , la longitud característica de la inhomogeneidad está definida en la ec. (6.8).

REFERENCIAS

1. Ashour-Abdalla, M. ; Planetary Space Sci, 20 , 639 (1972)
2. Budko, N.I., V.I. Karpman y O.A. Pokhotelov ; J. Exp. Theoret. Phys. Letters, 14 , 320 (1971)
3. Dysthe, K.B. ; J. Geophys. Res., 76 , 6915 (1971)
4. Gendrin, R. ; J. atmos. terr. Phys. , 30 , 1313 (1968)
5. Gendrin, R., S.Lacourly, A.Roux, J.Solomon, F.Z. Feigin, M.V. Gokhberg, y V.A. Troitskaya ; Planet. Space Sci., 19 , 165 (1971)
6. Gendrin, R.; en Earth's Magnetospheric Processes, D. Reidel Publishing Co., Dordrecht, Holland, p.311 , (1972)
7. Kennel, C.F. y H.E. Petscheck ; J. Geophys. Res., 71 , 1 (1966)
8. Liehmon, H.B. ; J. Geophys. Res., 72 , 39 (1967)
9. Mc Pherron, R.L. ; comunicación privada, 1973

10. Roux, A. ; en Magnetospheric Physics, D. Reidel Publishing Co., Dordrecht, Holanda, p. 297 , (1974)
11. Sagdeev R.Z. y V.D. Shafranov ; Soviet Phys. JETP 12 , 130 (1961)
12. Mehrlin, N., R. Gendrin, A. Roux y R. Welter ; J. Geophys. Res. 78 , 763 (1973)
13. Welter, R., R. Pellat y A. Roux ; Ann. Geophys., 20 , 263 (1973)

AGRADECIMIENTOS

Los Doctores Guy Laval y René Pellat del Centre de Physique Theorique de l'Ecole Polytechnique (Paris) me han brindado la oportunidad de colaborar estrechamente con ellos y con su Grupo en la investigación de los temas desarrollados en la presente Tesis. Gracias a sus profundos conocimientos de la materia, y a una perseverante tarea de equipo ha sido posible llevar a buen término las investigaciones que forman la base de este trabajo. Vaya pues a ambos mi más reconocido y profundo agradecimiento.

He tenido la suerte de integrarme al grupo que dirigen los Doctores Roger Gendrin y Alain Roux del Groupe de Recherches Ionospheriques (Issy les Moulineaux) lo que me ha permitido confrontar la teoría con la experiencia. Les agradezco que me hayan iniciado en la Geofísica Espacial y dirigido mis trabajos en ese dominio. Sus opiniones autorizadas y justas críticas me han sido de gran valor en los trabajos que me han permitido concretar esta Tesis.

Deseo agradecer particularmente al Dr. Fausto Gratton por haberme iniciado en el conocimiento de la Física de Plasmas. Su rigor científico y sus consejos me han sido extremadamente útiles.

Agradezco igualmente a mis colegas y amigos del Laboratorio de Física de Plasmas de la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales de la Universidad Nacional de Buenos Aires por su ayuda y por el excelente ambiente que siempre he encontrado en el seno del mismo.