Síntesis operatorial de sistemas lineales a base de dilataciones causales y J-isométricas

D'Attellis, Carlos Enrique

1975

Tesis presentada para obtener el grado de Doctor en Ciencias Matemáticas de la Universidad de Buenos Aires

UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES

FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

CARLOS ENRIQUE D'ATTELLIS

SINTESIS OPERATORIAL DE SISTEMAS LINEALES A BASE DE DILATACIONES CAUSALES Y J-ISOMETRICAS

TESIS PRESENTADA PARA OPTAR AL GRADO DE
DOCTOR EN CIENCIAS MATEMATICAS

BUENOS AIRES

DICIEMBRE DE 1975

Deseo agradecer al Profesor Doctor Alberto González Domínguez su ejemplo , su guía , su enseñanza y su apoyo ; y expresar el singular orgullo que siento de ser su discípulo.

También manifestar mi reconocimiento al Ingeniero Santiago F. Pinasco por todas las oportunidades que me ha brindado.

A ambos mi agradecimiento y afecto.

I N D I C E

			página
I	.	Introducción	1
II	.	Notación,definiciones y conceptos fundamentales	3
III	.	Reseña de resultados obtenidos	10
IV	.	Los operadores doblemente activos	14
V	.	Los operadores pasivos	28
VI	.	Los operadores simplemente activos	30
VII	.	Sistemas causales	33
VIII	.	Dilataciones causales	41
	.	Bibliografía	60

I . INTRODUCCION.

1 . Para sistemas lineales caracterizados por su operador de scattering el problema de la síntesis se plantea de la siguiente manera: dado un espacio de Hilbert H y un operador T lineal y acotado definido en H, construir un sistema lineal cuyo operador sea T.

El problema, así planteado, ha sido resuelto por Saeks [35] en el caso en que $\|T\| \leqslant 1$ (sistemas pasivos), y por Levan [19] en el caso en que valgan simultáneamente las dos desigualdades $T^*T - I > 0$ y $TT^* - I > 0$ (sistemas doblemente activos), y también en el caso más general en que valga meramente $\| T \| > 1$ (sistemas simplemente activos. Los métodos de síntesis utilizados en los respectivos casos son distintos. En este trabajo se sistematizan y se generalizan los resultados recién consignados, elaborando un método único de síntesis, válido cuando el operador prefijado pertenece a una cualquiera de las tres categorías.

Siguiendo a Saeks y a Levan consideraremos el problema resuelto si logramos obtener, en cada caso, una "dilatación" adecuada del operador T. Esta "dilatación" es una matriz de operadores cuyo elemento correspondiente al vértice superior de la izquierda es precisamente el operador (cf. Definición 2.5). Una vez construída la dilatación, la síntesis se efectua imitando, mutatis mutandis, los procedimientos de Sacks y Levan; los cuales consisten, esencialmente, en conectar en cascada la dilatación construída con resistencias unitarias (idea original de Belevitch [3], bien conocida en la teoría clásica de circuitos(cf.[28],[2])).

II . NOTACION,DEFINICIONES Y CONCEPTOS FUNDAMENTALES.

2 . Con H designaremos el espacio de Hilbert al que pertenecen las excitaciones y las respuestas del sistema considerado,que se simbolizarán con las letras x,y,... . El sistema mismo se considerará caracterizado por un operador T lineal y acotado,definido en el espacio H. El producto interno (para el que usaremos la notación $\langle .,. \rangle$) tiene la interpretación física de energía. Esto permite clasificar energéticamente los operadores de acuerdo a como se comporte el sistema respecto del mundo exterior;es decir, absorbiendo,entregando o conservando la energía (cf.[35,36]).

Definición 2.1 .

T es pasivo si

$$\|x\|^2 - \|Tx\|^2 \geq 0 \qquad \forall \ x \in H.$$

Esta desigualdad es equivalente a cualquiera de las siguientes (cf. [19,Prop.1]):

$$\|T\| \leq 1 \quad , \quad \|T^*\| \leq 1 \quad ,$$

$$I - T^*T \geq 0 \quad y \quad I - TT^* \geq 0 \ .$$

Definición 2.2 .

T es operador sin pérdidas si

$$\|x\|^2 - \|Tx\|^2 = 0 \qquad \forall \ x \in H.$$

Esto significa que T es una isometría,o sea,

$$T^*T - I = 0 \ .$$

Definición 2.3 .

T es simplemente activo si

$$\|x\|^2 - \|Tx\|^2 < 0 \qquad \forall \quad x \in H.$$

Definición 2.4 .

T es doblemente activo si se verifican simultáneamente las dos desigualdades

$$\|x\|^2 - \|Tx\|^2 < 0 \quad ,$$

$$\|x\|^2 - \|T^*x\|^2 < 0 \quad ;$$

o sea,en forma equivalente,

$$T^*T - I > 0 \quad y \quad TT^* - I > 0 \quad .$$

Esta definición fue introducida por Levan [19] .

Llamaremos al operador T doblemente activo en sentido débil, si las dos desigualdades que preceden se verifican con el signo " $\geqslant$ " en vez del signo " $>$ ".

Para cada uno de los operadores que acabamos de definir construiremos una"dilatación" conveniente.Damos a continuación una definición precisa de este concepto.

Definición 2.5 .

Supongamos que H es subespacio de otro espacio de Hilbert _ K,y que A y B son operadores lineales y acotados definidos en H y K respectivamente.Llamemos P al proyector de K sobre H . B es una dilatación del operador A si

$$AP = PBP$$

Una definición equivalente es válida como consecuencia del hecho de que K puede ser considerado como la suma directa de H y del complemento ortogonal $H^{\perp}$ de H en K; si,de acuerdo con esto, cada elemento z perteneciente a K se identifica con el par (x,y) donde $x = Pz$, $y = (I - P)z$, puede escribirse

$$B = \begin{bmatrix} A & S \\ T & R \end{bmatrix} \quad ;$$

cf. el trabajo [13] de Halmos,que muestra la utilidad de esta interpretación matricial de una dilatación.En este trabajo aparece por primera vez el concepto de "unitary dilation".

3 . Una noción que desempeña papel principal en nuestro enfoque del problema de la síntesis es la de función característica de un operador no autoadjunto. Esta noción, introducida por Livsic ([21] , [22]),ha demostrado ser arma poderosa para el estudio de los operadores no autoadjuntos, y ha sido generalizada en distintas direcciones (cf.[23] ,[5]). Otra definición de función característica,que ha mostrado ser especialmente adecuada para el estudio de los operadores contractivos,ha sido introducida por Nagy y Foias (cf. [26] ,[25]). De la definición de Nagy - Foias se han hecho

recientemente interesantes aplicaciones al problema de la síntesis (cf.[14] ,[15] ,[16] ,[10] ,[19] ,[20] ,[29] ,[30]).Una definición más general de función característica,que comprende a las anteriores es la de Kuzel ([18]). Reza como sigue.

Definición 3.1 (Kuzel) .

Se llama función característica del operador lineal y acotado T la función operatorial

$$\Theta_T\ (\lambda) = TJ - \lambda|Q_{T^*}|^{1/2}(I - \lambda T^*)^{-1}|Q_T|^{1/2} \quad , \qquad (3.1)$$

donde $\overline{\lambda^{-1}} \in \rho(T)$ (designando con $\rho(T)$ el conjunto resolvente del operador T);

$$Q_T = I - T^*T \quad ; \qquad (3.2)$$

$$Q_{T^*} = I - TT^* \qquad (3.3)$$

J es el operador hermitiano parcialmente isométrico que interviene en la representación polar del operador Q :

$$Q_T = J\ |Q_T| \quad ; \qquad (3.4)$$

donde $|Q_T|$ es el operador positivo tal que su cuadrado es igual a Q_T (cf.[12]).

El operador J está relacionado con el proyector P sobre el subespacio Rg Q_T por la fórmula

$$J^2 = P \quad . \qquad (3.5)$$

Una característica del presente trabajo es la utilización de la función característica de Kuzel. La generalidad de esa definición (válida para un operador lineal y acotado arbitrario),nos ha permitido sistematizar y generalizar los resultados conocidos sobre síntesis de los distintos tipos de operadores definidos en el §2.

Antes de describir estos resultados recordaremos otra noción que desempeña papel esencial en nuestras consideraciones:la de espacio de Hilbert con métrica indefinida.(Cf.[17]). Estos espacios,que tienen aplicación en variados capítulos de la física clásica y la física cuántica (cf.[24]),fueron usados por primera vez,para atacar problemas de síntesis,por Levan [19] .

Definición 3.2 .

Una métrica indefinida se da en el espacio de Hilbert H si, además del producto escalar $\langle \, , \, \rangle$,se define otro,que indicamos con el símbolo $[\, , \,]$,que tiene las siguientes propiedades :

1) $[x,y] = [y,x]$;

2) $[\, , \,]$ es lineal con respecto al primer argumento;

3) $[x,x]$ puede tener cualquier signo;

4) $[x,y]$ es una función continua de las dos variables x e y en la topología definida por la métrica del espacio.

En todos los espacios que utilizaremos en este trabajo el producto interno $[\ ,\ ]$ estará definido por una involución(es decir,por un operador J tal que $J^* = J$ y $J^2 = I$),de la siguiente manera :

$$[x,y] = \langle Jx,y\rangle = \langle x,Jy\rangle \quad . \tag{3.6}$$

Estos espacios son los llamados"espacios de Krein".(Cf.[4]).

A partir de este nuevo producto interno se puede establecer una clasificación de los operadores análoga a la que figura en el §2;enunciamos a continuación sólo las definiciones que usaremos más adelante.

<u>Definición 3.3 .</u>

T es J-pasivo (o J-contractivo) si

$$J - T^*JT \geq 0 \quad .$$

<u>Definición 3.4 .</u>

T es J-activo si

$$J - T^*JT < 0 \quad ;$$

y J-doblemente activo (o J-biexpansivo) si se verifican las desigualdades

$$J - T^*JT < 0 \quad ,$$

$$J - TJT^* < 0 \quad .$$

Definición 3.5 .

T es J-sin pérdidas si

$$T^*JT = J \quad ;$$

es decir, el operador T es una J-isometría. Diremos que T es J-unitario si

$$T^*JT = TJT^* = J \quad .$$

Indicaremos con Rg T el conjunto $\{y \in H \;/\; y = Tx\}$, con N(T) el núcleo del operador T, y con $\sigma(T)$ su espectro.

III . RESEÑA DE RESULTADOS OBTENIDOS.

Teorema 4.1 .

Da la forma particular que adquiere la función característica de Kuzel en el caso de operadores doblemente activos. Es éste el primer paso para construir una dilatación del operador T .

Teorema 6.1 .

Se obtiene,utilizando el teorema 4.1 la dilatación construída por Levan,y se demuestra que esta dilatación es K-unitaria (con K se designa una involución).

Los dos teoremas recién consignados permiten obtener una nueva demostración del siguiente teorema,debido a Levan ([19] , teoremaIII).

Teorema 6.2 (Levan).

Todo sistema doblemente activo puede sintetizarse a partir de una dilatación K-unitaria.

Teorema 7.1 .

Es una demostración mejorada y directa del teorema II de Levan [19] ,obtenida mediante desigualdades que verifica la función característica de Kuzel.

Teorema 8.1 .

Da una nueva demostración de un teorema de Saeks sobre la síntesis de operadores pasivos (cf. [35]),utilizando la función característica de Kuzel.

Teorema 9.1 .

Es una generalización del teorema 5.2 ([7] ,[8]). Así se obtiene un método de síntesis de sistemas activos exactamente análogo al dado por Saeks [35] para el caso de operadores pasivos,y al obtenido en el teorema 5.2 para operadores doblemente activos.

De tal manera,los resultados sobre sistemas pasivos,doblemente activos o simplemente activos se obtienen por un método único,caracterizado por la utilización sistemática de la función característica de Kuzel.

Los teoremas demostrados permiten construir dilataciones J-isométricas,a partir de las cuales se logra la síntesis de los distintos tipos de sistemas. Sin embargo, todas ellas contienen en su definición no sólo el operador T ,sino también su adjunto T^* (cf. fórmulas (5.1),(8.2) y (9.1)). Esto plantea el problema a continuación consignado.

En la síntesis desempeña papel esencial el concepto de causalidad: las soluciones obtenidas deben ser causales para ser realizables. Por otra parte, el adjunto de un operador causal puede no ser causal (cf. [35], pág. 928). Las soluciones descriptas en lo que precede son causales siempre que la operación de tomar adjunto de un operador preserve la causalidad; tal es el caso considerado por Carlin (cf. [6]), y por Saeks y Levan que se apoyan en las consideraciones de Carlin.

Es interesante, en consecuencia, la construcción de dilataciones J-isométricas que sean, además, causales.

Los teoremas a continuación consignados permiten construir dilataciones causales de operadores causales pertenecientes a cierta familia de operadores que desigaremos con la letra $\mathscr{C}$ (cf. Definición 14.1).

<u>Lema 13.3 .</u>

Demuestra la existencia de una involución (distinta de -I) definida en el espacio H tal que si T es operador simplemente activo, también es operador J-contractivo.

<u>Lema 14.3 .</u>

Prueba, utilizando el Lema 13.3, que si el operador T pertenece a la familia $\mathscr{C}$ el espectro del operador I - JT^*JT es no negativo.

<u>Teorema 15.1 .</u>

Generaliza un teorema de Nagy-Foias (cf. [25] ,teorema 4.1). Demuestra que todo operador de la familia $\mathcal{C}$ admite una dilatación J-isométrica.

<u>Teorema 16.1 .</u>

Se construye,a partir del teorema 15.1,una matriz de operadores que se utilizará para probar el teorema 17.1 .

<u>Teorema 17.1 .</u>

Prueba que si el operador que caracteriza el sistema que se pretende sintetizar es causal,la dilatación construída (por medio de los teoremas 15.1 y 16.1) también lo es. En la demostración utilizamos los "espacios de Hilbert de resolución.

IV . LOS OPERADORES DOBLEMENTE ACTIVOS.

4 . Comenzaremos estableciendo la forma que adquiere la función característica de Kuzel en el caso de ser el operador T doblemente activo.

TEOREMA 4.1 .

Hipótesis. T es doblemente activo.

Tesis.

$$\Theta_T(\lambda) = -T - \lambda(TT^* - I)^{1/2}(I - \lambda T^*)^{-1}(T^*T - I)^{1/2} . \qquad (4.1)$$

Demostración.

El operador Q_T es autoadjunto,de manera que Q_T^2 también lo es,y además es positivo. Existe entonces un único operador autoadjunto y positivo B tal que

$$B^2 = Q_T^2 \quad ;$$

es decir,

$$B = (Q_T^2)^{1/2} = |Q_T| \quad .$$

Vamos a ver que es válida la fórmula

$$B = T^*T - I \quad .$$

Este operador tiene las siguientes propiedades:

a) B es positivo. En efecto,

$$\begin{aligned} < Bx , x > &= <(T^*T - I)x , x > = \\ &= <T^*Tx , x > - <x , x> = \\ &= <Tx , Tx > - < x,x > > 0 , \end{aligned}$$

ya que T es activo;

b) $B^2 = (T^*T - I)^2 = Q_T^2$.

De esto se concluye inmediatamente que

$$|Q_T| = T^*T - I. \qquad (4.2)$$

Consideremos ahora Q_{T^*} ; si ponemos

$$B_1 = TT^* - I$$

no sólo resulta $B_1^2 = Q_{T^*}^2$ sino también que B_1 es positivo; en efecto

$$< B_1 x , x > = < (TT^* - I)x , x > =$$

$$= < T^*x , T^*x > - <x , x> > 0 ,$$

ya que T es doblemente activo.

Así,

$$|Q_{T^*}| = TT^* - I . \qquad (4.3)$$

Con lo que precede hemos demostrado que los módulos de los operadores Q_T y Q_{T^*} que aparecen en la función característica (3.1),están dados por las fórmulas (4.2) y (4.3). Demostraremos ahora que el operador J que aparece en la fórmula (3.1),tiene en el presente caso el valor

$$J = - I .$$

Como $|Q_T|$ es autoadjunto,$|Q_T|^{1/2}$ también lo es;en consecuencia

$$\| \, |Q_T|^{1/2} x \, \|^2 = < |Q_T|^{1/2} x , |Q_T|^{1/2} x > =$$

$$= \langle \, |Q_T|x \, , \, x \, \rangle \, =$$

$$= \langle \, (T^*T - I)x \, , \, x \, \rangle \, =$$

$$= \| \, Tx \, \|^2 - \| \, x \, \|^2 \tag{4.4}$$

De la (4.4) se concluye que

$$x \in N \, [\, |Q_T|^{1/2}]$$

si y sólo si

$$\| \, Tx \, \|^2 = \| \, x \, \|^2 \quad .$$

Pero como T es doblemente activo,resulta

$$N[\, |Q_T|^{1/2}] \quad = \{ \, 0 \, \}$$

En consecuencia,como

$$\overline{Rg|Q_T|^{1/2}} \quad = N^{\perp}[\, |Q_T|^{1/2}] \qquad , \tag{4.5}$$

obtenemos

$$\overline{Rg|Q_T|^{1/2}} \quad = H \tag{4.6}$$

Por otra parte,si

$$(T^*T - I)x = 0 \tag{4.7}$$

debe ser necesariamente

$$(T^*T - I)^{1/2}x = 0 \tag{4.8}$$

En efecto,admitamos,por reducción al absurdo,que es válida la fórmula

$$(T^*T - I)^{1/2}x = a \neq 0 \tag{4.9}$$

De aquí se concluye que

$$a \in Rg|Q_T|^{1/2} \quad ;$$

por lo tanto,en virtud de (4.5),

$$(T^*T - I)^{1/2} a \neq 0 \quad .$$

Apliquemos ahora el operador $(T^*T - I)^{1/2}$ a ambos miembros de (4.9). Obtenemos

$$(T^*T - I)x = (T^*T - I)^{1/2} a \neq 0,$$

lo cual contradice la (4.7) y prueba la (4.8).

Además,de la fórmula

$$(T^*T - I)^{1/2} x = 0 \quad ,$$

se concluye

$$(T^*T - I)x = 0.$$

Hemos demostrado que

$$N[\,|Q_T|^{1/2}] \quad = \quad N[\,|Q_T|]$$

De esta fórmula,la (4.5) y la (4.6),concluimos

$$\overline{Rg|Q_T|^{1/2}} = \overline{Rg|Q_T|} = \overline{Rg\ Q_T} = H \qquad (4.10)$$

Traigamos ahora a colación la fórmula de representación polar (3.4) . El proyector P (cf. fórmula (3.5)) se reduce a la identidad;por lo tanto (3.5) se escribe

$$J^2 = P = I \quad .$$

De (3.4) y (4.2) se concluye

$$Q_T = J(T^*T - I) \quad ;$$

y por lo tanto,en virtud de (3.2),

$$J = - I \quad . \tag{4.11}$$

Las fórmulas (4.2),(4.3),(4.11) y (3.1) demuestran el teorema.

Nótese que en la demostración de las fórmulas (4.2) y (4.11) ha intervenido sólo la hipótesis de ser el operador T simplemente activo (y no necesariamente doblemente activo). Es útil,para futura referencia,registrar este hecho bajo forma de lema,según hacemos a continuación.

LEMA 4.2 .

Si T es operador simplemente activo,la representación polar del operador Q_T (cf. fórmula (3.4)) está dada por la fórmula

$$Q_T = -I\,(T^*T - I)$$

5 . En la dilatación del operador -T definida por la fórmula a continuación consignada,aparecen los operadores que figuran en el segundo miembro de la fórmula (4.1).

$$S = \begin{bmatrix} -T & -(TT^* - I)^{1/2} \\ (T^*T - I)^{1/2} & T^* \end{bmatrix} . \quad (5.1)$$

El sistema caracterizado por la dilatación S puede esquematizarse de la manera siguiente:

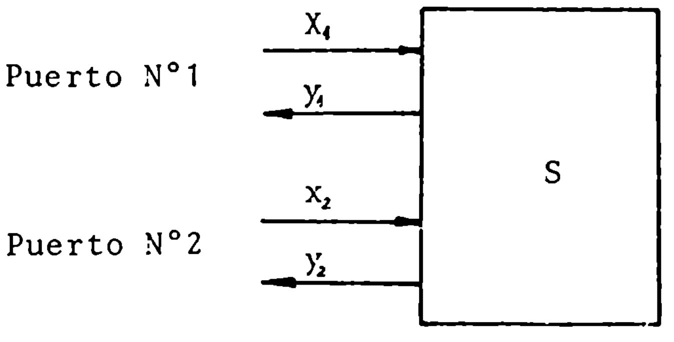

Fig.1

donde $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ es el vector excitación ,

e $\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$ es el vector respuesta,

siendo válida la fórmula

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = S \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

De esta fórmula concluimos

$$y_1 = -Tx_1 - (TT^* - I)^{1/2} x_2 \quad , \tag{5.2}$$

$$y_2 = (T^*T - I)^{1/2} x_1 + T^* x_2 \tag{5.3}$$

Vamos a conectar en cascada el sistema S con el sistema extremadamente simple caracterizado por el operador λI; el esquema representativo de esta conexión en cascada es el siguiente:

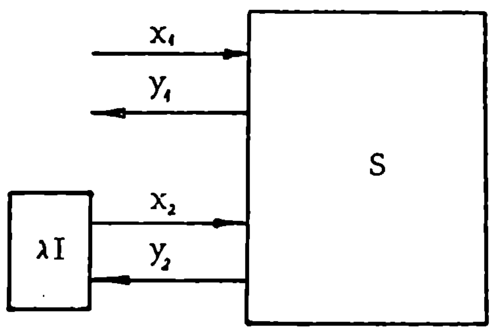

Fig. 2

valiendo la fórmula

$$x_2 = (\lambda I) y_2 \quad . \tag{5.4}$$

De (5.3) y (5.4) obtenemos

$$y_2 = (T^*T - I)^{1/2} x_1 + T^* \lambda y_2 \quad ,$$

o sea

$$y_2 = (I - \lambda T^*)^{-1} (T^*T - I)^{1/2} x_1 \quad , \tag{5.5}$$

donde $\lambda^{-1} \in \rho(T^*)$.

Análogamente, de (5.4) y (5.2), obtenemos

$$y_1 = -Tx_1 - \lambda(TT^* - I)^{1/2} y_2 \quad ;$$

o sea, teniendo en cuenta (5.5),

$$y_1 = [-T - \lambda(TT^* - I)^{1/2}(I - \lambda T^*)^{-1}(T^*T - I)^{1/2}]x_1 \quad . \quad (5.6)$$

Llegamos, pues, a la conclusión interesante de que los vectores x_1 , y_1 que constituyen respectivamente la excitación y la salida que aparecen en el primer puerto del sistema esquematizado en la Figura 2 están ligados por la fórmula (5.6), donde el operador entre corchetes es precisamente la función característica (4.1).

En otros términos : hemos fabricado, procediendo "a la Belevitch" una "extensión" del operador doblemente activo T, que, conectada en cascada con cierto sistema simple, nos hace aparecer en el primer puerto la función característica (4.1).

6 . Vamos ahora a estudiar desde el punto de vista energético las propiedades de la dilatación S que

acabamos de contruir. Para ello nos valdremos de la teoría de los espacios de Krein (cf. Definición 3.2).

TEOREMA 6.1 .

Sea la matriz de operadores

$$K = \begin{bmatrix} -I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} ,$$

donde con I se designa la identidad en H,y con 0 el operador nulo en H.

Tesis. El operador S definido por la fórmula (5.1) es K-unitario (cf. Definición 3.4).

Demostración.

Tenemos

$$SKS^* = \begin{bmatrix} -T & -(TT^* - I)^{1/2} \\ (T^*T - I)^{1/2} & T^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$$

$$\cdot \begin{bmatrix} -T^* & (T^*T - I)^{1/2} \\ -(TT^* - I)^{1/2} & T \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} T & -(TT^* - I)^{1/2} \\ -(T^*T - I)^{1/2} & T^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -T^* & (T^*T - I)^{1/2} \\ -(TT^* - I)^{1/2} & T \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -TT^* + TT^* - I & T(T^*T - I)^{1/2} - (TT^* - I)^{1/2}T \\ (T^*T - I)^{1/2}T^* - T^*(TT^* - I)^{1/2} & -T^*T + I + T^*T \end{bmatrix} \tag{6.1}$$

Está claro que

$$(I - TT^*)T = T(I - T^*T) \quad ;$$

de manera que si $p(s)$ es un polinomio tenemos

$$p(I - TT^*)T = T\, p(I - T^*T) \quad ,$$

y para cualquier función continua $f(s)$ vale la fórmula (cf. [17]),

$$f(I - TT^*)T = T\, f(I - T^*T) \quad ;$$

en particular vale para $f(s) = \sqrt{|s|}$,de manera que

$$T|Q_T|^{1/2} = |Q_{T^*}|^{1/2}\, T \quad ; \tag{6.2}$$

de donde resulta

$$|Q_T|^{1/2}T^* = T^*\, |Q_{T^*}|^{1/2} \tag{6.3}$$

De (6.2) , (6.3) y (6.1) ,obtenemos

$$SKS^* = \begin{bmatrix} -I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} = K \tag{6.4}$$

Análogamente se llega a la fórmula

$$S^*KS = \begin{bmatrix} -T^*T + T^*T - I & -T^*(TT^* - I)^{1/2} + (T^*T - I)^{1/2}T^* \\ -(TT^* - I)^{1/2}T + T(T^*T - I)^{1/2} & -TT^* + I + TT^* \end{bmatrix} \tag{6.5}$$

$$= K$$

Las fórmulas (6.4) y (6.5), en conjunción con el hecho de que K es una involución, demuestran el teorema.

TEOREMA 6.2 (Levan;[19]).

Todo operador doblemente activo puede sintetizarse a partir de su dilatación K-unitaria dada por la fórmula (5.1), conectando esta dilatación en cascada con una resistencia unitaria.

Demostración.

Pongamos $\lambda = 0$ en el esquema de la Figura 1. Ello significa, eléctricamente, que el puerto 2 se ha cerrado en una resistencia unitaria. (Saeks [35] utiliza esta misma idea en el caso de operadores pasivos).

Poniendo $\lambda = 0$ en (4.1) se obtiene

$$-\,\theta_T(0) = T \qquad ;$$

es decir (cf. lo dicho en el último parágrafo de §5),que hemos sintetizado el operador T.

Observemos que nuestra demostración difiere de la de Levan,donde no aparece el concepto de función característica. La idea esencial de nuestra demostración consiste precisamente en la utilización sistemática,para la solución de problemas de síntesis,de la función característica de Kuzel. Veremos a continuación que ella nos permite obtener,con un único método,los resultados conocidos sobre síntesis operatorial,y otros nuevos.

7 . En el teorema a continuación consignado interviene también de manera esencial la función característica de Kuzel.

TEOREMA 7.1 .

La función característica de un operador doblemente activo (cf. fórmula (4.1)) es una función cuyos valores son operadores doblemente activos en sentido débil (cf. Definición 2.4) si $|\lambda| < 1$, y operadores pasivos si $|\lambda| \geq 1$.

Demostración.

Comencemos por consignar cuatro desigualdades debidas a Kuzel [18] :

$$
\begin{aligned}
&\Theta_T(\lambda)\ J\ \Theta_T^*(\lambda) \leq \tilde{J} && \text{si } |\lambda| \leq 1 \ , \\
&\Theta_T(\lambda)\ J\ \Theta_T^*(\lambda) \geq \tilde{J} && \text{si } |\lambda| \geq 1 \ , \\
&\Theta_T^*(\lambda)\ \tilde{J}\ \Theta_T(\lambda) \leq J && \text{si } |\lambda| \leq 1 \ , \\
&\Theta_T^*(\lambda)\ \tilde{J}\ \Theta_T(\lambda) \geq J && \text{si } |\lambda| \geq 1 \ .
\end{aligned}
\tag{7.1}
$$

Observemos que si T es doblemente activo,los operadores J y $\tilde{J}$ que aparecen en las representaciones polares

$$Q_T = J\ |Q_T|$$

y

$$Q_{T^*} = \tilde{J}\ |Q_{T^*}|$$

se reducen a -I. (Cf. Lema 4.2) .

Este hecho,en conjunción con las desigualdades de Kuzel,nos conduce a las fórmulas siguientes:

$$
\begin{aligned}
&\Theta_T(\lambda)\ \Theta_T^*(\lambda) \geq I \ , \\
&\Theta_T(\lambda)\ \Theta_T^*(\lambda) \geq I \ , && \text{si } |\lambda| < 1 \ ; \\
&\Theta_T^*(\lambda)\ \Theta_T(\lambda) \leq I \ , \\
&\Theta_T^*(\lambda)\ \Theta_T(\lambda) \leq I \ , && \text{si } |\lambda| \geq 1 \ .
\end{aligned}
$$

Estas fórmulas demuestran el teorema si se traen a colación las definiciones 2.1 y 2.4.

El teorema que precede mejora un teorema de

Levan ([19] ,Teorema II) [1] . La simplicidad de nuestra demostración es otro ejemplo de la potencia de la función característica de Kuzel.

[1] Levan no demuestra que,en el caso $|\lambda| < 1$,el sistema es doblemente activo.

V . LOS OPERADORES PASIVOS .

8 . No está de más comprobar que el método utilizado en el § IV para sintetizar un sistema doblemente activo permite también, mutatis mutandis, efectuar la síntesis de sistemas pasivos.

Consideremos, pues, un operador pasivo T. En este caso la función característica de Kuzel (fórmula (3.1)), se convierte (cf. [18]) en la función característica de Nagy - Foias, que es la siguiente :

$$\Phi_T(\lambda) = T - \lambda Q_{T*}^{1/2}(I - \lambda T*)^{-1} Q_T^{1/2} \Big|_{RgQ_T} \; ; \qquad (8.1)$$

donde $\overline{\lambda^{-1}} \in \rho(T)$.

Traigamos a colación la dilatación unitaria S de una contracción T [1] según la definición de Halmos (cf. [13] , [41]) :

$$S = \begin{bmatrix} T & -Q_{T*}^{1/2} \\ Q_T^{1/2} & T* \end{bmatrix} \qquad (8.2)$$

Admitamos que esta matriz operatorial es la matriz S que aparece en el esquema representativo de la

---

[1] El operador T es por definición una contracción, si $\| T \| \leqslant 1$.

conexión en cascada de la Figura 2. Procediendo exactamente como lo hicimos en el §5 comprobamos, en este caso, que en el primer puerto del mencionado esquema aparece la función característica (8.1). Utilizando este hecho puede demostrarse el

TEOREMA 8.1 (Saeks; [35]).

Todo operador pasivo puede sintetizarse a partir de su dilatación unitaria dada por la fórmula (8.2), conectando esta dilatación en cascada con una resistencia unitaria.

Demostración.

Es la misma que la del Teorema 6.2 .

Si ponemos $\lambda = 0$ en (8.1), es decir, si cerramos el puerto número dos en una resistencia unitaria, obtenemos

$$\Phi_T(0) = T \quad ;$$

o sea, que hemos sintetizado el operador T.

La demostración precedente difiere de la de Saeks, que no utiliza el concepto de función característica.

VI . LOS OPERADORES SIMPLEMENTE ACTIVOS.

9 . La idea esencial del método de síntesis expuesto en lo que precede consiste en construir una dilatación adecuada. Veremos que el método vale *mutatis mutandis* también para la categoría más general de operadores simplemente activos (cf. Definición 2.3). La diferencia consiste meramente en que en el presente caso la dilatación, que es la clave para la síntesis, es un operador K-sin pérdidas (en el caso de operadores pasivos, la dilatación es unitaria; en el de operadores doblemente activos, K-unitaria). Veremos en efcto que vale el siguiente teorema.

TEOREMA 9.1 .

Un operador simplemente activo puede sintetizarse por medio de una dilatación K-sin pérdidas (cf. Definición 3.4) conectada con resistencias unitarias.

Demostración.

Existe un número k tal que

$$1 < \| T \| < k < \infty$$

Definamos la dilatación

$$N = \begin{bmatrix} T & (k^2 I - TT^*)^{1/2} \\ (k^2 I - T^*T)^{1/2} & -T^* \end{bmatrix} \qquad (9.1)$$

Con el mismo método que nos condujo a mostrar la validez de las fórmulas (6.2) y (6.3) se prueba que son válidas las igualdades siguientes:

$$T(k^2 I - T^*T)^{1/2} = (k^2 I - TT^*)^{1/2} T \quad ,$$

$$(k^2 I - T^*T)^{1/2} T^* = T^*(k^2 I - TT^*)^{1/2} \quad .$$

A base de estas fórmulas, procediendo de manera completamente análoga a como lo hicimos para probar la fórmula (6.4), se demuestra que el operador N es normal. El resultado a que se llega es el siguiente:

$$N\,N^* = N^*\,N = k^2 I_{H^2} \quad ,$$

donde

$$I_{H^2} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$$

Además, N es operador simplemente activo. En efecto

$$\langle (I_{H^2} - N^*N)z \; , \; z \rangle = \langle \, (I_{H^2} - k^2 \; I_{H^2})z \; , \; z \rangle =$$

$$= (1 - k^2)\| \; z \; \|^2 < 0 \qquad \forall z \; ;$$

o sea,

$$I_{H^2} - N^*N < 0$$

Definamos ahora la siguiente matriz de operadores:

$$S = \begin{bmatrix} N & (NN^* - I_{H^2}) \\ (N^*N - I_{H^2}) & N^* \end{bmatrix} ,$$

y consideremos la involución

$$K = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{bmatrix}$$

Por medio de cálculos completamente análogos a los que figuran en la demostración del teorema 6.1 (y que por lo tanto omitimos),puede probarse que vale la fórmula

$$S^* K S = K \quad ;$$

o sea,que S es operador K-sin pérdidas;con lo cual termina la demostración del teorema.

Los teoremas 6.2 , 8.1 y 9.1 muestran,como habíamos anunciado,que la función característica de Kuzel nos permite resolver el problema de la síntesis con un método único,aplicable a los operadores pasivos,doblemente activos y simplemente activos.

VII . SISTEMAS CAUSALES.

10 . Nos ocuparemos en lo que sigue de construir dilataciones "causales". Esto exige como paso previo el definir lo que se entienda por"causalidad" y por "sistema causal" cuando se trata de sistemas definidos por operadores en espacios de Hilbert abstractos. Es lo que hacemos a continuación.

La definición clásica de causalidad es la siguiente (cf. [43]) : un sistema se llama causal si, dadas dos excitaciones arbitrarias iguales para los instantes $t < t_0$,las correspondientes respuestas son iguales para $t < t_0$.

Esta definición es aplicable en el caso de sistemas caracterizados por operadores,cuando los correspondientes espacios de Hilbert son espacios <u>funcionales</u> (v.gr. L^2 ,l^2);en efecto,la causalidad del sistema caracterizado por el operador T significa en este caso que si

$$f_1(t) = f_1(t) \qquad t < t_0 ,$$

entonces

$$[Tf_1](t) = [Tf_2](t) \qquad t < t_0 . \qquad (10.1)$$

Estas fórmulas pueden escribirse equivalentemente en otra forma, más adecuada para motivar la definición de causalidad que daremos dentro de un momento. Para ello introduzcamos los operadores E^t definidos de la siguiente manera:

$$(E^{t_0} f)(t) = \begin{cases} f(t) & \text{si} \quad t < t_0 \ , \\ 0 & \text{si} \quad t \geqslant t_0 \ . \end{cases}$$

Por medio de estos operadores las aserciones (10.1) pueden expresarse de la manera siguiente:

$$\text{si} \quad (E^{t_0} f_1)(t) = (E^{t_0} f_2)(t) \qquad ,$$

entonces

$$(E^{t_0} Tf_1)(t) = (E^{t_0} Tf_2)(t) \quad . \tag{10.2}$$

Estas son las fórmulas a las que queríamos llegar y que nos serán útiles dentro de muy poco.

11 . Consideremos un sistema caracterizado por un operador definido en un espacio de Hilbert general (es decir, no necesariamente funcional); en este caso no resulta evidente lo que deba entenderse por sistema causal. Esto se debe a que el concepto de causalidad está íntimamente ligado con el concepto de tiempo; y en un Hilbert abstracto

el concepto de tiempo (o un concepto equivalente) no figura para nada.

En el caso de los espacios de Hilbert L^2 y l^2 el tiempo está definido en forma natural;pero no está incluído dentro de los axiomas que caracterizan el espacio. Esto mueve a introducir un nuevo ente,el de "espacio de Hilbert de resolución",que posee las propiedades usuales de un espacio de Hilbert y en el que,además,puede introducirse de manera natural un concepto de tiempo (cf. [9] , [39] , [33]).

<u>Definición 10.1</u> (Saeks;[39]).

Un espacio de Hilbert de resolución es una terna (H,G,E), donde:

H es un espacio de Hilbert ;

G es un grupo abeliano ordenado munido de una topología de Hausdorff localmente compacta ;

E es una medida espectral definida sobre los conjuntos de Borel de G,cuyos valores son proyectores definidos en H.[1]

La medida espectral E determina unívocamente

---

[1] En vez de (H,G,E) escribiremos más brevemente (H,E);lo cual es lícito pues el grupo G se mantiene fijo.

una resolución de la identidad;es decir,una familia de proyectores $\{E^t\}$ (donde $E^t = E(-\infty,t)$) continuos por la derecha tal que

$$E^{t_1} \leq E^{t_2} \quad \text{si } t_1 \leq t_2 \ ;$$

$$\lim_{t\to -\infty} E^t = 0 \ ;\text{ (1)}$$

$$\lim_{t\to \infty} E^t = I \ .$$

Utilizaremos las siguientes definiciones.

$$E_t = E(t,+\infty) = I - E^t \ ,$$

$$H^t = \mathrm{Rg}\, E^t \ ,$$

$$H_t = \mathrm{Rg}\, E_t$$

Se puede verificar (cf. [37]),que H^t y H_t son complementos ortogonales y también que valen las fórmulas

$$\left.\begin{array}{l} H^t \to H \,, \\ H_t \to 0 \,, \end{array}\right\} \quad \text{si } t \to \infty$$

$$\left.\begin{array}{l} H^t \to 0 \,, \\ H_t \to H \,. \end{array}\right\} \quad \text{si } t \to -\infty$$

La definición de espacio de Hilbert de resolución permite introducir la causalidad en el estudio de los operadores definidos en espacios de Hilbert generales.

---

(1) En sentido fuerte: $\| E^t x \| \to 0$,$t \to -\infty$,para cada x.

Definición 10.2 (Saeks; [39]) .

Un operador lineal acotado T definido en un espacio de resolución (H,E) es causal si y sólo si,para todo par x,y perteneciente al espacio H,y todo t perteneciente al grupo G tales que

$$E^t x = E^t y \quad ,$$

se verifica que $$E^t Tx = E^t Ty \quad .$$

Para el caso de que el dominio y el codominio del operador sean espacios de resolución distintos (que llamaremos (H,E) y(H_1 , E_1)) ,definidos sobre un mismo grupo G,conviene introducir una nueva definición.

Definición 10.3 .

El operador T es causal si y sólo si,para todos los pares x,y pertenecientes al espacio H y todo t perteneciente al grupo G tales que

$$E^t x = E^t y \quad ,$$

se verifica que

$$E_1^t Tx = E_1^t Ty \quad ;$$

donde con E_1 indicamos la resolución de la identidad definida en el espacio H_1 .

Estas fórmulas constituyen una generalización,en el caso abstracto,de las fórmulas (10.2).

Definiciones equivalentes a las dos que acaban de consignarse son las que figuran a continuación.

Definición 10.4 .

El operador T es causal si los subespacios H_t son subespacios invariantes del operador T;o sea,si

$$T(H_t) \subset H_t \qquad \forall t .$$

Para el caso de que el dominio y el codominio del operador sean espacios de resolución distintos,vale la siguiente

Definición 10.5 .

T es operador causal si

$$T(H_t) \subset H_t \qquad \forall t ,$$

donde $H_t = \mathrm{Rg}\, E_t$.

La equivalencia de las definiciones 10.2 y 10.3 con las definiciones 10.4 y 10.5 ha sido demostrada por Porter ([31] ,[32]) .

12 . Aclarado el concepto operatorial de causalidad y de sistema causal,nos preguntamos ahora: ¿serán causales las dilataciones que hemos construído

en las páginas que anteceden para sintetizar nuestros tres tipos de sistemas (pasivos,doblemente activos o simplemente activos)?. En conexión con este problema,el siguiente lema es irportante (cf. [40]).

LEMA 12.1 .

Sean (H,E) y (H_1, E_1) espacios de Hilbert de resolución. La matriz de operadores

$$S = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix}.$$

es causal con respecto al espacio de resolución

$$(H \oplus H, E \oplus E), \quad ^{(1)}$$

si y sólo si los operadores S_{11}, S_{21} son causales en el espacio (H,E) y los operadores S_{12}, S_{22} son causales en el espacio (H_1, E_1) .

Esto nos dice que las dilataciones que antes hemos construído serán causales si cada uno de sus respec-

(1) $(E \oplus E)(A)$ denota la proyección sobre el producto $E(A) \times E(A)$.

tivos elementos lo son. Aquí aparece una dificultad. En efecto,en las dilataciones que hemos construído aparece siempre el adjunto del operador T (cf. fórmulas (5.1), (8.2),(9.1));y el adjunto de un operador causal puede no ser causal (cf. [35]).(1) Se plantea pues,en el caso de un espacio de Hilbert donde la operación de tomar adjunto no preserva la causalidad,el problema de establecer una solución que sea causal.Este es el problema que resolveremos a continuación.(2)

---

(1) Cabe observar que en todo espacio donde el adjunto de un operador causal resulta causal,la dificultad no aparece (de acuerdo con el Lema que precede).Tal es el caso de los sistemas estudiados por Carlin ([6]).

(2) Para sistemas pasivos caracterizados por operadores,una solución semejante fue establecida por Saeks (cf.[40]),utilizando sus espacios de resolución.

VIII . DILATACIONES CAUSALES.

13 . No hemos logrado demostrar que dado un operador simplemente activo arbitrario puede siempre encontrarse una dilatación causal de ese sistema (y tampoco sabemos si tal cosa es efectivamente posible). Pero sí hemos logrado dar una solución parcial de este problema,determinando una familia de operadores activos para todos cuyos miembros puede construirse siempre una dilatación causal. Esta es la familia de operadores que designaremos con la letra $\mathcal{B}$ (cf. Definición 13.1) .

A fin de establecer las propiedades de los operadores de la familia $\mathcal{B}$ necesitamos algunos resultados que consignamos a continuación en forma de lemas.

LEMA 13.1 .

Si $N(Q_{T^*}) \neq \{0\}$,

entonces $T^*(N(Q_{T^*})) \neq \{0\}$.

Demostración.

Supongamos,por reducción al absurdo,que

$$T^*(N(Q_{T^*})) = \{0\} .$$

Sea y un elemento cualquiera de $N(Q_{T^*})$.

Se concluye que

$$y = TT^*y \quad .$$

Además,como $y \in N(T^*)$, resulta

$$y = TT^*y = 0 \quad ,$$

lo que contradice la hipótesis.

LEMA 13.2 .

Si T es simplemente activo,entonces $N(Q_{T^*}) = \{0\}$.

Demostración.

Admitamos,nuevamente por reducción al absurdo,que

$$N(Q_{T^*}) \neq \{0\} \quad ;$$

de aquí concluímos que existe un $y \neq 0$ tal que

$$y \in N(Q_{T^*}) \quad .$$

Del Lema 13.1 concluimos

$$T^*(\ N(Q_{T^*})\ ) \neq \{0\} \quad ;$$

por lo tanto,existe un $x \neq 0$ tal que

$$x \in T^*(\ N(Q_{T^*})\ ) \quad .$$

Concluimos pues que existe $z \neq 0$ perteneciente al conjunto $N(Q_{T^*})$ tal que

$$x = T^*z \quad . \tag{13.1}$$

Pero $\quad z \in N(Q_{T^*}) \quad \Rightarrow \quad z = TT^*z \quad .$ (13.2)

De (13.1) obtenemos las fórmulas

$$Tx = TT^*z \quad , \qquad (13.3)$$

$$< x , x > = < T^*z , T^*z > =$$

$$= < TT^*z , z > .$$

De esta fórmula,en conjunción con (13.2) y (13.3) obtenemos

$$< x , x > = < TT^*z , TT^*z > =$$

$$= < Tx , Tx > \quad .$$

En definitiva,de la hipótesis $N(Q_T*) \neq 0$ hemos concluído que vale la fórmula

$$\| x \|^2 = \| Tx \|^2$$

para $x \neq 0$;lo cual es absurdo,pues el operador T es por hipótesis simplemente activo;el Lema 13.2 queda,pues, demostrado.

LEMA 13.3 .

Hipótesis. T es operador activo .

Tesis. Existe una involución J ($\neq$ - I) tal que T es una J-contracción.

Demostración.

Del Lema 13.2 concluimos

$$\overline{Rg\ Q_T*} = N^{\perp}(Q_T*) = H \qquad (13.4)$$

Recordemos la representación polar del operador Q_{T^*} ,

$$Q_{T^*} = \tilde{J}\,|Q_{T^*}|$$

De la fórmula (13.4) y de

$$\tilde{J}^2 = P \quad ,$$

concluimos que

$$\tilde{J}^2 = I \quad .$$

Como además $\tilde{J}$ es autoadjunto (cf. [34]) concluimos que $\tilde{J}$ es una involución.

Sea $\Theta_T(\lambda)$ la función característica de Kuzel del operador T Poniendo $\lambda = 0$ en (7.1) y usando el Lema 4.2 , obtenemos

$$T^* \tilde{J}\, T \leq -I \quad . \tag{13.5}$$

Llamemos ahora H_+ y H_- a los espacios propios correspondientes a los dos puntos del espectro de $\tilde{J}$, +1 y -1, y llamemos P_+ , P_- a los proyectores sobre cada uno de estos espacios. Pongamos por brevedad

$$P_+x = x_+ \quad , \quad P_-x = x_- \quad ;$$

obtenemos

$$\tilde{J} = P_+ - P_- \quad , \qquad I = P_+ + P_- \quad ,$$

y

$$< x \,,\, x > = < x_+ \,,\, x_+ > + < x_- \,,\, x_- >$$

$$< \tilde{J}x \, , \, x > \; = \; < x_+ \, , \, x_+ > \; - \; < x_- \, , \, x_- > .$$

Por consiguiente

$$< (\tilde{J} + I)x \, , \, x > \; = \; < \tilde{J}x \, , \, x > \; + \; < x \, , \, x > \; =$$

$$= 2 \; < x_+ \, , \, x_+ > \; \geqslant \; 0 \; .$$

Concluimos que

$$\tilde{J} \geqslant -I \; .$$

De esta fórmula,en conjunción con (13.5),obtenemos

$$T^* \, \tilde{J} \, T \; \leqslant \tilde{J} \qquad ;$$

la cual muestra que T es una J-contracción,con lo cual el Lema 13.3 queda probado.

A continuación damos un ejemplo simple de un operador activo en el cual puede comprobarse a vista que es un operador J-contractivo. Sean T_1 y T_2 dos operadores definidos en H , T_1 activo y T_2 isométrico.

Definamos

$$T \;=\; \begin{bmatrix} T_1 & 0 \\ 0 & T_2 \end{bmatrix}$$

Si llamamos $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$, resulta

$$< x , x > - < Tx , Tx > = \| x_1 \|^2 + \| x_2 \|^2 -$$
$$- \| T_1 x_1 \|^2 - \| T_2 x_2 \|^2 < 0 ;$$

es decir,que T es operador activo.

Si ponemos

$$J = \begin{bmatrix} -I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} ,$$

resulta

$$[x , x] - [Tx , Tx] = - < x_1 , x_1 > + < x_2 , x_2 > +$$
$$+ < T_1 x_1 , T_1 x_1 > - < T_2 x_2 , T_2 x_2 >$$
$$> 0 . ;$$

es decir,que T es operador J-contractivo.

14 . Estamos ahora en condiciones de consignar la definición de la familia $\mathscr{C}$.

<u>Definición 14.1 .</u>

$\mathscr{C}$ es la familia de operadores T,simplemente activos,para los que existe un operador A , J-doblemente activo (cf. Definición 3.4),que satisface para todo x a la relación

$$[Ax , Ax] \geq [x , x] - [Tx , Tx] . \quad (14.1)$$

El producto interno [,] que figura en esta fórmula es el definido por la involución J cuya existencia afirma el Lema 13.3 . Observemos que el segundo miembro es no negativo en virtud del mismo lema.

Quizás no está de más expresar en términos de energía el sentido de la definición que precede : un operador simplemente activo pertenece a la familia si existe un sistema A , J-doblemente activo tal que para cada excitación x ,la energía de la correspondiente respuesta es superior a la diferencia entre la energía de x y la de la respuesta a x por el sistema T. Observemos también que en el J = I,la familia coincide con la familia de los operadores pasivos.

El lema que figura a continuación contiene una aserción importante acerca de los operadores de la clase . Su demostración se basa en resultados contenidos en una memoria de Smulian ([42]) . Comenzaremos por reseñar los resultados de Smulian que luego utilizaremos.

<u>Definición 14.2 (</u>[29]).

Un operador hermitiano H pertenece a la familia J-mayorante, o más brevemente a la familia J-m, si existe un número μ tal que $H \geq \mu J$.

<u>Definición 14.3</u> ([42]).

Un operador H de la clase J-m se llama modular si existe un operador A, múltiplo de un operador J-biexpansivo, tal que vale la fórmula

$$H = A^* J A$$

<u>Proposición 14.1</u> ([42]).

Hipótesis. H_1 y H_2 son operadores J-m ; $H_1 \leq H_2$; H_2 es modular.

Tesis. H_1 es modular.

<u>Proposición 14.2</u> ([42]).

Si H es operador modular, el espectro del operador JH es no negativo.

<u>LEMA 14.3 .</u>

Hipótesis . $T \in \mathscr{C}$.

Tesis. $\sigma\,(I - JT^*JT) \subset [\,0, +\infty\,)$.

<u>Demostración.</u>

De la desigualdad (14.1) obtenemos

$$A^* J A \geq J - T^* J T \geq 0 \quad ,$$

donde la última desigualdad es consecuencia de ser el operador T J-contractivo (cf. Lema 13.3). De esto se concluye (poniendo $\mu = 0$ en la definición 14.2) que los operadores

$$A^* J A \quad y \quad J - T^* J T \tag{14.2}$$

pertenecen a la clase J-m . Pero el operador A es J-doblemente activo. Este hecho,en conjunción con el que acaba de demostrarse,muestra que A^*JA es un operador modular (cf. Definición 14.3).

Aplicando la Proposición 14.1 concluimos que el operador $J - T^*JT$ también es modular . Por último,trayendo a colación la Proposición.14.2 ,en conjunción con la fórmula (14.2),el lema queda demostrado.

15 . Demostraremos ahora que todo operador T de la clase admite una dilatación J-isométrica; y daremos reglas para construir esta dilatación.

Antes de enunciar el respectivo teorema (Teorema 15.1) es conveniente enunciar la definición de dilatación dada por Nagy ([27]).

Dados dos operadores T y S definidos en

los espacios H y $\mathcal{H}$ respectivamente, escribiremos

$$T = \mathrm{pr}\ S$$

si se cumplen las dos relaciones siguientes:

1) H es subespacio de $\mathcal{H}$,

2) $< Tx , y > = < Sx , y > \quad \forall\ x,y \in H.$

La segunda condición es equivalente a esta otra:

$$Tx = PSx \qquad \forall\ x \in H ,$$

donde con P indicamos el proyector sobre H.

Definición 15.1 (Nagy;cf.[27]).

El operador S es una dilatación de T si

$$T^n = \mathrm{pr}\ S^n \quad , \quad n = 1,2,3,\ldots \quad . \qquad (15.1)$$

Ahora podemos enunciar nuestro teorema.

TEOREMA 15.1 .

Hipótesis. $T \in \mathcal{B}$.

Tesis . Existe un espacio $\mathcal{H}$ y un operador S definido en $\mathcal{H}$ tales que

a) H es un subespacio de $\mathcal{H}$;

b) $T^n = \mathrm{pr}\ S^n \quad , n = 1,2,3,\ldots\ldots$;

c) S es una J-isometría.

Demostración.

Definamos

$$\mathcal{H} = \overset{\infty}{\underset{0}{\oplus}} H \quad ;$$

o sea,

$$h \in \mathcal{H} \quad \text{si} \quad h = (h_0, h_1, h_2, \ldots\ldots\ldots) \; ,$$

con $h_i \in H$ y

$$\sum_0^\infty \| h_i \|^2 < \infty \; .$$

El producto interno en este espacio está definido por la fórmula

$$(h , k) = \sum_0^\infty < h_i , k_i >$$

Definamos el operador $G : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ por la fórmula

$$G(h_0, h_1, h_2, \ldots\ldots) = (Jh_0, Jh_1, Jh_2, \ldots\ldots) \; .$$

Está claro que el segundo miembro pertenece al espacio ,

pues

$$\sum_0^\infty \| Jh_i \|^2 = \sum_0^\infty \| h_i \|^2 < \infty$$

El operador G tiene las siguientes propiedades :

a) $$(Gh , k) = \sum_0^\infty < Jh_i , K_i > = \sum_0^\infty < h_i , Jk_i > =$$
$$= (h , Gk) \; ;$$

b) $G^2 = I$,donde I es la identidad en $\mathcal{H}$.

Estas dos propiedades permiten equipar el espacio $\mathcal{H}$ con una métrica indefinida cuya involución es G :

$$[h , k] = (Gh , k) = \sum_0^\infty < Jh_i , k_i > .$$

Está claro que el segundo miembro es convergente. En efecto,

$$\sum_0^\infty |< Jh_i \, , k_i >| \leq \sum_0^\infty \| Jh_i \| \; \| k_i \| \leq$$

$$\leq [\sum_0^\infty \| Jh_i \|^2]^{1/2} [\sum_0^\infty \| k_i \|^2]^{1/2}$$

$$[\sum_0^\infty \| h_i \|^2]^{1/2} [\sum_0^\infty \| k_i \|^2]^{1/2} < \infty \, .$$

Observemos que el operador

$$E = I - J\,T^*\,J\,T \tag{15.2}$$

es J-hermitiano ; en efecto

$$J\,E = J - T^*\,J\,T \, ,$$

$$E^*\,J = J - T^*\,J\,T \, .$$

El ser E J-hermitiano,conjuntamente con el Lema 14.3, muestran que el operador E cumple las condiciones de aplicabilidad de un teorema de Ginzburg ([11])[1] que reza: si A es operador J-hermitiano de espectro no negativo,existe un único operador B,también J-hermitiano y de espectro no negativo,tal que $B^2 = A$.

Este teorema,aplicado al caso del operador E,

---

[1] El teorema de Ginzburg es generalización de un teorema de Potapov,válido cuando H tiene dimensión finita (cf.[34]).

muestra que existe un único operador B con las propiedades enunciadas en el teorema de Ginzburg, tal que vale la fórmula

$$B^2 = I - J\,T^*\,J\,T \tag{15.3}$$

Por lo tanto

$$JB^2 = J - T^*\,J\,T\ .$$

Como el operador B es J-hermitiano, concluimos

$$J\,B^2 = (J\,B)\,B = B^*\,J\,B \quad ;$$

de manera que

$$B^*\,J\,B = J - T^*\,J\,T$$

En particular, si $h_0 \in H$, obtenemos

$$< B^*JBh_0\ ,\ h_0 > = < (J - T^*JT)h_0\ ,\ h_0 > =$$

$$= < Jh_0\ ,\ h_0 > - < T^*JTh_0\ ,\ h_0 > \ ;$$

o sea,

$$< JBh_0\ ,\ Bh_0 > = < Jh_0\ ,\ h_0 > - < JTh_0\ ,\ Th_0 > . \tag{15.4}$$

Definamos ahora el operador $S : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ por la fórmula

$$S(h_0, h_1, h_2, \ldots\ldots) = (Th_0, Bh_0, h_1, h_2, \ldots\ldots) . \tag{15.5}$$

Demostraremos que S es la buscada dilatación J-isométrica del operador T.

Está claro que se satisface la fórmula (15.1) y además que

$$[Sh\ ,\ Sh] = \langle JTh_0\ ,\ Th_0\rangle + \langle JBh_0\ ,\ Bh_0\rangle + \\ + \langle Jh_1\ ,\ h_1\rangle + \langle Jh_2\ ,\ h_2\rangle + \ldots\ldots \tag{15.6}$$

De (15.4) y (15.6) obtenemos

$$\begin{aligned}[Sh\ ,\ Sh] &= \langle JTh_0\ ,\ Th_0\rangle + \langle Jh_0\ ,\ h_0\rangle - \\ &\quad - \langle JTh_0\ ,\ Th_0\rangle + \langle Jh_1\ ,\ h_1\rangle + \\ &\quad + \langle Jh_2\ ,\ h_2\rangle + \ldots\ldots\ldots\ldots \\ &= [h\ ,\ h]\ .\end{aligned}$$

Esta igualdad demuestra el teorema.

<u>Nota.</u>

El teorema 15.1 es generalización de un teorema de Nagy - Foias ([25] ,Teorema 4.1),según el cual toda <u>contracción</u> admite una dilatación isométrica. Para demostrar este hecho pongamos en el teorema 15.1 $J = I$ y admitamos que T es operador contractivo; en tal caso el operador E definido por (15.2) se reduce al operador autoadjunto $I - T^*T$. Por lo tanto su espectro es real y está contenido en el intervalo $[m\ ,\ M]$,donde

$$m = \inf_{\|x\|=1} \langle (I - T^*T)x\ ,\ x\rangle \qquad ,$$

y para M vale una definición análoga,con sup en vez de inf.

Como m es no negativo (pues T es una contracción), el espectro del operador $I - T^{*}T$ está contenido en el intervalo $[0, +\infty)$. Este hecho es precisamente la hipótesis del teorema 15.1 (cf. Lema 14.3); lo cual prueba que en el presente caso nuestra dilatación S coincide con la dilatación cuya existencia afirma el teorema de Nagy - Foias.

16. A los efectos de realizar la síntesis que tenemos en vista es importante el que la dilatación S que acabamos de construir (cf. teorema 15.1) puede escribirse en forma de matriz de operadores. Este hecho es casi inmediato pero quizás convenga registrarlo en forma de teorema para futura referencia.

Pongamos

$$\mathcal{H} = \bigoplus_{1}^{\infty} H \quad , \tag{16.1}$$

y definamos los operadores

$$U : H \to \mathcal{H}$$

$$V : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$$

por las fórmulas

$$U(h_0) = (Bh_0 \, , \, 0 \, , \, 0 \, , \, \ldots\ldots\ldots) \quad ,$$

$$V(\overline{h}) = (\, 0 \, , \, h_1 \, , \, h_2 \, , \, \ldots\ldots\ldots) \quad ;$$

donde

$$\bar{h} = (h_1 \ , h_2 \ , \ ....\ )$$

y B es el operador que figura en la fórmula (15.3).

TEOREMA 16.1 .

La dilatación del operador T construída en el teorema 15.1 admite la representación matricial

$$\Sigma = \begin{bmatrix} T & 0 \\ U & V \end{bmatrix} . \qquad (16.2)$$

Demostración.

De las fórmulas que preceden se concluye en seguida

$$\Sigma \begin{bmatrix} h_0 \\ \bar{h} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T & 0 \\ U & V \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_0 \\ \bar{h} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Th_0 \\ Uh_0 + Vh \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} Th_0 \\ Bh_0 \ , h_1 \ , h_2 \ , \ ..... \end{bmatrix} ;$$

Es decir,que de acuerdo con la fórmula (15.5) la dilatación Σ coincide con la dilatación J-isométrica definida en el teorema 15.1 .

Nota.

La introducción del espacio $\mathcal{H}$ (fórmula (16.1)) es artificiosa sólo en apariencia. En efecto, la dimensión de H es el número cardinal $\alpha \geq \aleph_0$; de modo que la dimensión de $\mathcal{H}$ es el número cardinal $\alpha \aleph_0 = \alpha$. Como ambos espacios tienen la misma dimensión es lícito identificar $\mathcal{H}$ con H ; en particular, cada operador lineal y acotado definido en $\mathcal{H}$ puede considerarse de manera natural como un operador definido en H.

17 . Probaremos finalmente que la dilatación S que figura en los dos teoremas que preceden es <u>causal</u>; con lo cual habremos dado cima al desideratum enunciado al principio del parágrafo 13.

<u>TEOREMA 17.1 .</u>

Hipótesis. T es operador causal con respecto al espacio de resolución (H , E).

Tesis. Existe un espacio de resolución ($\mathcal{H}$, $\mathcal{E}$) tal que la dilatación definida por (16.2) es causal con respecto a este espacio.

<u>Demostración.</u>

Pongamos $$\mathcal{H} = \bigoplus_{1}^{\infty} B(H) \quad ,$$

donde B es el operador definido en (15.3), y escribamos

$$\mathcal{H}_t = \bigoplus_{1}^{\infty} B(H_t) \tag{17.1}$$

Sea $\mathcal{E}_t$ la proyección de $\mathcal{H}$ sobre $\mathcal{H}_t$.

Los proyectores

$$\mathcal{E}^t = I - \mathcal{E}_t \quad ,$$

definen una resolución de la identidad en el espacio $\mathcal{H}$.

Llamemos $\mathcal{E}$ la medida espectral correspondiente a esta resolución de la identidad.

Probaremos que la dilatación (16.1) es causal con respecto al espacio de resolución ($\mathcal{H}$, $\mathcal{E}$) .

Vamos a probar que los operadores U y V que figuran en la matriz (16.2) son causales; con lo cual, de acuerdo con el Lema 12.1, nuestro teorema quedará demostrado.

Probemos primero que U es causal. Tomemos para ello un elemento $h_0 \in H_t$.

Para cada t vale la fórmula

$$Bh_0 \in B(H_t) \quad ;$$

de (17.1) concluímos que vale la fórmula

$$Uh_0 = (Bh_0 \ , 0 \ , 0 \ , \ldots\ldots\ldots \ ) \in \mathcal{H}_t$$

Por lo tanto

$$U(H_t) \subset \mathcal{H}_t \quad .$$

Esta inclusión demuestra que el operador U es causal (cf. Definición 10.5).

Probemos que también V es causal. Sea h un elemento de $\mathcal{H}_t$;entonces

$$h = (h_1 ,h_2 , ...),$$

donde $h_i \in B(H_t)$,para cada t.

En consecuencia

$$Vh = (0, h_1 , h_2 , ...) \in \mathcal{H}_t \quad ;$$

por lo tanto,para cada t ,es válida la fórmula

$$V(\mathcal{H}_t) \subset \mathcal{H}_t \; ;$$

y esta inclusión demuestra el teorema.

A. GONZALEZ DOMINGUEZ

C.E. D'ATTELLIS.

BIBLIOGRAFIA

[1] G.Bachman y L.Narici , Functional Analysis. Academic Press , 1966 .

[2] V.Belevitch , Classical Network theory . Holden-Day , 1968.

[3] V.Belevitch , Synthése des réseaux électriques passifs a n paires de bornes de matrice de répartition prédéterminée . Ann. Télécommun.,Vol.6 , N°11 ,(1951) , pp. 302-312 .

[4] J.Bognar , Indefinite inner product spaces . Spriger-Verlag , 1974 .

[5] M.S.Brodskii y M.S.Livsic , Spectral analysis of non-selfadjoint operators and intermediate systems , Am. Math. Soc. Transl. (2) , Vol. 13 , (1960) , pp. 265 - 346 .

[6] H.J.Carlin , Network theory without circuits elements, Proceedings IEEE , Vol. 55 , N° 4 , (1967) ,pp.482-497.

[7] C.E.D'Attellis , Síntesis de operadores de scattering activos definidos en espacios de Hilbert , Publicaciones del Instituto Argentino de Matemática , Serie I , N°2 , 1974 .

[8] C.E.D'Attellis , Realisability of active scattering operator , Electronic Letters , Vol. 10 , N° 14 , (1974) , p. 286 .

[9] R.M.DeSanctis , Causality and stability in resolution space . Proceedings of the 14th Midwest Symposium on Circuit Theory , University of Denver , 1971 .

[10] R.G.Douglas y J.W.Helton , Inner dilations of analytic matrix functions and Darligton synthesis , Acta Scientiarum Math. (Szegred) , Vol.34 ,(1973),pp.61-67.

[11] J.P.Ginzburg , On J-nonexpansive operators in Hilbert space , Naucn. Zap. Fiz.-Mat. Fak. Odessa Gos. Ped. Inst. , Vol. 22 , N°1 ,(1958) ,pp. 13-20.(En ruso).

[12] I.C.Gohberg y M.G.Krein , Introduction à la théorie des opérateurs linéaires non auto-adjoints dans un espace hilbertien . Dunod , 1971 .

[13] P.R.Halmos , Normal dilations and extensions of operators,Summa Brasiliensis Math. , Vol. 2 , N°9 , (1950) ,pp.125-134.

[14] J.W.Helton , The characteristic function of operator theory and electrical network realization , Indiana Math. Journal , Vol.22 , N°5 , (1972) , pp.403-414.

[15] J.W.Helton , Operator theory techniques for distributed systems . Exposition , Allerton Conference,1973.

[16] J.W.Helton , Discrete time systems,operators models, and scattering theory . Journal of Functional Analysis, Vol. 16 , (1974) , pp. 15-38.

[17] M.G.Krein , Introduction to the geometry of indefinite J-spaces and to the theory of operators in those spaces. Amer. Math. Soc. Transl.(2),Vol.93,(1970),pp.103-176.

[18] O.V.Kuzel , The characteristic operator-function of an arbitrary bounded operator . Amer. Math. Soc. Transl. (2) , Vol.90 , (1970) , pp.225-228 .

[19] N.Levan , Theory and applications of J-lossless scattering systems . Journal Franklin Inst.,Vol.297, N°5 , (1972), pp.313-321 .

[20] N.Levan , Synthesis of active scattering operator by its m^{-1} derived passive operator . IEEE Transactions

on Circuit Theory,Vol. CT-19,N°5, (1972),pp.524-526.

[21] M.S.Livsic , On a certain class of operators in a Hilbert space . Amer. Math. Soc. Transl. (2) ,Vol.13,(1960), pp. 61-83 .

[22] M.S.Livsic , Isometric operators with equal deficiency indices,quasi-unitary operators . Amer. Math. Soc. Transl. (2) , Vol.13,(1960) , PP.85-103.

[23] M.S.Livsic , V.P.Potapov , A theorem on the multiplication of characteristic matrix function . Dokl. Akad. Nauk. SSSR , 72 , (1950), pp.625-628. (En ruso).

[24] M.S.Livsic , Operators,oscillations,waves.Open systems. Transl.Math. Monographs, Vol.34,1973.

[25] B.Sz.-Nagy , C.Foias , Analyse harmonique des opérateurs de l'espace de Hilbert.Akadémiai Kiadó, 1967.

[26] B.Sz.-Nagy , C.Foias , Sur les contractions de l'espace de Hilbert:fonctions caractéristiques, modeles fonctionnels, Acta Sci.Math.(Szegred), Vol.25, (1964),pp.38-71.

[27] B.Sz.-Nagy , Sur les contractions de l'espace de Hilbert,Acta Sci. Math.(Szegred),Vol.15,(1953),pp.87-92.

[28] R.W.Newcomb ,Linear multiport synthesis , McGraw-Hill, 1966.

[29] R.W.Newcomb , Operator theory of networks . IEEE Newsletters on Circuit and Systems,Vol.7,N°3,(1974), pp.4-8.

[30] W.A.Porter , Operator theory of systems . IEEE News letters on Circuit and Systems,Vol.7,N°3 , (1974) , pp. 8-12.

[31] W.A.Porter , C.L.Zahm , Basics concepts in system theory . University of Michigan ,Report SEL-44,1972.

[32] W.A.Porter , A basic optimization problem in linear systems , Math.System Theory, Vol. 5 ,N°1 , (1971), pp.20-44.

[33] W.A.Porter ,Some circuit theory concepts revisited, International Journal on Control,Vol.12,(1970), pp.433-448 .

[34] V.P.Potapov , The multiplicative structure of J-contractive matrix functions . Amer. Math. Soc. Transl.(2),Vol.15, (1960),pp.131-243.

[35] R.Saeks ,Synthesis of general linear networks . SIAM Journal on Applied Math.,Vol.16,N°5, (1968), pp.924-930.

[36] R.Saeks , An algebraic time domain approach to linear time-variable networks. Thesis,Cornell Univ. 1967.

[37] R.Saeks , Resolution soace,operators and systems. Lecture Notes N°82,Springer-Verlag,1973..

[39] R.Saeks , Resolution space,a function analytic setting for control theory. Univ. of Notre Dame, Report EE-7106,1971.

[40] R.Saeks , Causality in Hilbert space. SIAM Review, Vol. 12,N°3,(1970),pp.357-383.

[41] J.J.Schafer , On unitary dilations of contractions, Proceed. Amer.Math.Soc.,Vol.6,(1955),p.322.

[42] Ju.L.Smulian , J-mayorizing and modular operators in J-spaces. Amer.Math. Soc. Transl.(2),Vol.97, (1970),pp.145-158.

[43] M.R.Wohlers , Lumped and distributed passive networks, Academic Press,1968.