

Tesis de Posgrado

Estudio de la transferencia de materia en un plano oscilante

Terrizzano, Marcelo Manuel

1973

Tesis presentada para obtener el grado de Doctor en Ciencias Químicas de la Universidad de Buenos Aires

Este documento forma parte de la colección de tesis doctorales y de maestría de la Biblioteca Central Dr. Luis Federico Leloir, disponible en digital.bl.fcen.uba.ar. Su utilización debe ser acompañada por la cita bibliográfica con reconocimiento de la fuente.

This document is part of the doctoral theses collection of the Central Library Dr. Luis Federico Leloir, available in digital.bl.fcen.uba.ar. It should be used accompanied by the corresponding citation acknowledging the source.

Cita tipo APA:

Terrizzano, Marcelo Manuel. (1973). Estudio de la transferencia de materia en un plano oscilante. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad de Buenos Aires. http://digital.bl.fcen.uba.ar/Download/Tesis/Tesis_1435_Terrizzano.pdf

Cita tipo Chicago:

Terrizzano, Marcelo Manuel. "Estudio de la transferencia de materia en un plano oscilante". Tesis de Doctor. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad de Buenos Aires. 1973. http://digital.bl.fcen.uba.ar/Download/Tesis/Tesis_1435_Terrizzano.pdf

UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

ESTUDIO DE LA TRANSFERENCIA DE MATERIA EN
UN PLANO OSCILANTE

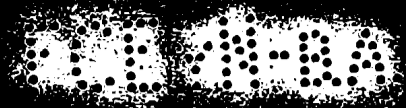
MARCELO MANUEL TERRIZZANO

TESIS PRESENTADA PARA OPTAR AL TITULO DE
DOCTOR EN QUIMICA (ORIENTACION QUIMICA
INDUSTRIAL)

DIRECTORA: DRA. URSULA BÖHM DE BORDENAVE

1973

1435



A mis padres
A mi esposa e hijos

Indice

	página
Introducción	1
Objeto de este trabajo	5
Parte teórica	6
Transferencia de materia	6
Adimensionalización de las ecuaciones diferenciales	7
Solución numérica	10
Trayectorias del fluido	10
Cambio de coordenadas	11
Mecanismo de resolución	11
Cálculo de \bar{Sh}	13
Solución analítica para el caso $L/A \rightarrow \infty$	14
Análisis de la solución numérica	15a
Limitaciones de la solución numérica	15a
Estabilidad de la solución obtenida	15a
Convergencia de la solución	15b
Caso particular L/A tiende a infinito	15b
Resultados obtenidos con la solución numérica	15c
Parte experimental	16
Método de trabajo	16
Descripción de equipos	16
Celda utilizada	16
Electrodos	17
Sistema oscilador	18
Experiencias efectuadas	19
Soluciones electrolíticas usadas	20
Medición de viscosidad	20
Medición de densidad	21
Trabajo experimental realizado	21
Sistema electroquímico desarrollado	23
Celda de Cottrell	23
Principio de funcionamiento de la celda	24
Trabajo experimental con la celda de Cottrell	24
Resultados de las mediciones de difusividad	25
Elaboración de los resultados obtenidos con la celda de Cottrell	25
Cálculo del número de Sherwood	26
Cálculo del número de Reynolds	26
Resultados experimentales	28
Comparación de los resultados obtenidos	31
Conclusiones	34
Bibliografía	35
Notación	37
Apéndices:	

	página
I: Aproximación al movimiento sinusoidal	40
II: Sistema de control	41
III: Frecuencímetro	42
IV: Datos experimentales de difusividad	43
VI: Programa de resolución numérica	44
VII: Datos de computadora	45
V: Microfilm de resultados experimentales	

Introducción

Desde hace tiempo se conoce que las oscilaciones aceleran los procesos de transferencia difusional. Este hecho ha inducido a realizar numerosos trabajos sobre el tema y se pueden dar muchos ejemplos de aplicación industrial:

Bresnajder (1) y Bradford (2) estudiaron el aumento de la velocidad de transferencia en equipos de disolución.

Saint James (3) ha trabajado en sistemas sublimantes, mientras que Behmeiras, Brill y Krumholz (4), Konovalov y Romankov (5) y Smoot y Babb (6), mostraron la mejora en la performance de columnas de extracción líquido-líquido debido a pulsaciones en el fluido.

Otro grupo de trabajos ejemplifica la importancia de las oscilaciones en transferencia de calor; por ejemplo Kalashnikov y Chernenik (7), Anantarayan y Ramanchandran (8) y Sreevisan y Ramanchandran (9) experimentaron acerca de la disipación de calor desde alambres vibrantes.

Sin embargo, esta clase de estudios de aplicación directa a problemas concretos, no permite llegar a conclusiones generales respecto del mecanismo básico de transporte. Por esta razón hay una serie de trabajos que analizan la influencia de las oscilaciones en sistemas con una geometría sencilla, permitiendo esto un mejor conocimiento de la fluidodinámica y de las áreas de transferencia involucradas.

Se han utilizado varios métodos para la generación de oscilaciones; la forma más común consiste en hacer vibrar la fase sólida mediante un sistema mecánico tipo Biela-manivela, mientras que en otros trabajos se vibra el fluido mediante ondas sonoras. Esta última técnica fue utilizada por ejemplo por Fand y Kaye (10) para observar la influencia de un campo sonoro transversal en la transferencia de calor desde un cilindro horizontal, y por Bergles y Newell (11) quienes estudiaron el efecto de ondas ultrasónicas en agua que fluye en un espacio anular.

Los trabajos básicos pueden separarse en dos grupos para su análisis. El primero está constituido por aquellos donde la oscilación se halla superpuesta a un flujo neto; pertenecen a este conjunto las publicaciones de Shiotsuka y Honda (12) y Krasuk y Smith (13) quienes trabajaron con una columna rellena con material soluble y la de Krasuk y Smith (14) sobre la disolución de tubos.

En segundo término agrupamos aquellos trabajos donde se ana-

///

liza la cinética de transferencia en sistemas afectados predominantemente por una oscilación pura. Dado que el presente trabajo se incluye en este grupo, lo veremos más detenidamente.

Las publicaciones más actualizadas sobre el tema se refieren a la transferencia de materia desde cilindros oscilantes, que ha sido la geometría más estudiada.

Lemlich y Levy (15) estudiaron el efecto de la vibración vertical en la velocidad de sublimación de naftaleno; compararon los resultados obtenidos con el coeficiente de transferencia correspondiente a convección natural obteniendo la correlación:

$$\frac{k}{k'} = 0,117 Re_s^{0,85}$$

Donde se define: $Re_s = \frac{2 f H (H + d)}{\nu}$

Por otra parte Goh (16) en un trabajo similar obtuvo valores que correlacionaban aceptablemente con los resultados de Lemlich y Levy.

Los datos experimentales obtenidos en los dos trabajos precedentemente anunciados fueron correlacionados por Knight y Ratkowsky (17) mediante el agregado del adimensional (B/B') según la ecuación empírica:

$$\frac{k}{k'} = 1 = 0,021 Re_v \left(\frac{B}{B'}\right)^2$$

Definiendo: $Re_v = \frac{2 f H d}{\nu}$

Jameson (18) estudió la misma geometría, pero usando una fase líquida; utilizó cilindros de ácido benzoico disolviéndose en mezclas de agua y glicerina. Además elaboró un modelo matemático basado en la teoría de la capa límite obteniendo la expresión:

$$Sh_c = 0,916 Re_v^{\frac{1}{2}} S_c^{1/3} \left(\frac{H}{d}\right)^{1/6}$$

Sin embargo sus resultados experimentales dan números de Sherwood un 50% mayores que los predichos teóricamente.

Posteriormente Rao, Raju y Rao (19), (20), (21) investigaron el mismo sistema utilizando distintas técnicas experimentales; estas fueron: disolución de ácido benzoico en agua, reducción electroquímica de Ferricianuro de potasio y sublimación de naftaleno en aire, ob-

///

teniendo para estos sistemas la siguiente correlación

$$Sh_c = 0,46 Sc^{1/3} Re_v^{0,62}$$

Sugano y Ratkowsky (22) experimentaron con cilindros de naf-taleno y fenol sublimando en aire, correlacionando sus datos por:

$$Sh_c = 0,237 Sc^{1/3} Re_v^{0,633} \left(\frac{y}{d}\right)^{0,243}$$

Donde el exponente del número de Schmidt se tomó a priori como 1/3 en base a los resultados obtenidos por otros autores.

Esta expresión presenta una buena concordancia con los resul-tados experimentales de Jameson; Lemlich y Levy, y Rao Raju y Rao dentro de un rango de 10^3 en el valor del número de Sherwood, siendo hasta el presente la correlación que mejor describe la transferencia de materia desde un cilindro.

Respecto a una geometría plana, como la utilizada en el pre-sente trabajo, poco es lo hecho hasta ahora. Podemos citar la publi-cación de Blankeship y Clark (23), (24), la cual trata el efecto de una oscilación transversal en la convección natural desde una placa vertical calentada eléctricamente. Como es un caso que involucra un flujo neto, lo consideramos poco relacionado con el presente trabajo.

La primera investigación sobre transferencia de materia des-de un plano que oscila se debe a Lombardi (25) quien midió la velo-cidad de sublimación de naftaleno y alcanfor desde una superficie plana horizontal sometida a una oscilación armónica, obteniendo la siguiente correlación:

$$\overline{Sh} = 0,41 Re_p^{1/2} Sc^{1/3}$$

Donde se define: $Re_p = \frac{4 A L f}{\nu}$

Debe destacarse que el exponente del número de Schmidt fue asignado en base a la analogía del mecanismo de transferencia con o-tras geometrías ya estudiadas, ya que la indeterminación del valor de difusividad del alcanfor hacía imposible su determinación experimen-tal.

En una publicación posterior, Lombardi y Krasuk (26) propo-nen un modelo teórico para la descripción del fenómeno, partiendo de las siguientes suposiciones simplificantes:

- 1) La relación geométrica $L/\lambda \ll 1$

///

- 2) El número de Schmidt es pequeño.
- 3) Perfil de velocidad lineal.
- 4) Convección natural despreciable.
- 5) Plano de longitud infinita.

Por integración de la ecuación diferencial correspondiente, obtienen:

$$\bar{Sh} = 0,83 (Re_p)^{1/2} (Sc)^{1/3} \left(\frac{L}{A}\right)^{1/3}$$

Esta expresión predice números de Sherwood un 50% mayores que los valores experimentales de Lombardi, sin embargo el exponente del número de Reynolds deducido concuerda con el calculado de la experiencia.

Objeto de este trabajo

Visto el poco conocimiento actual sobre la transferencia de materia desde superficies planas oscilantes, y la total ausencia de información sobre los sistemas sólido-líquido, se considera importante que se efectúe el estudio de este caso con los siguientes fines:

- 1) Análisis matemático del problema y su posible solución teórica.
- 2) Obtención experimental de una correlación que describa el comportamiento del sistema.
- 3) Determinación del rango de validez y limitaciones de tal correlación.
- 4) Elaboración de los resultados teóricos y experimentales obtenidos en este trabajo y su comparación con los resultados de otros investigadores.

Parte teórica

Fluidodinámica sobre un plano oscilante.

Si consideramos una placa infinita sumergida en un fluido incompresible y newtoniano, la cual oscila según la ley:

$$v(t) = A \cos \omega t \quad (1)$$

La ecuación de Navier-Stokes aplicada a este caso resulta:

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \quad (2)$$

La solución de esta ecuación diferencial con la condición de contorno (1) es conocida de la teoría de la conducción de calor y obtenida por G. Stokes (27) teniendo la forma:

$$v_x(t) = A e^{-U} \cos(\omega t - U) \quad (3)$$

donde: $U = \left(\frac{\omega}{2\nu}\right)^{\frac{1}{2}} z$

Luego la ecuación del perfil de velocidades es:

$$v_x(t) = A e^{-\left(\frac{\omega}{2\nu}\right)^{\frac{1}{2}} z} \cos\left(\omega t - \left(\frac{\omega}{2\nu}\right)^{\frac{1}{2}} z\right) \quad (4)$$

Transferencia de materia.

Consideremos ahora que una porción del plano transfiere materia al seno del fluido; y hagamos las siguientes suposiciones:

- A) La materia transferida no afecta las propiedades hidrodinámicas del fluido, es decir densidad y viscosidad son prácticamente constantes.
- B) La difusividad es constante.
- C) Las dimensiones de la superficie que transfiere son mucho mayores que el espesor de fluido donde esta transferencia ocurre.

La primera hipótesis nos permite utilizar la ecuación (4) como una adecuada descripción de la fluidodinámica del sistema, micn-

///

tras que (C) nos permite simplificar la ecuación general de transferencia de materia, quedando:

$$\frac{\partial c}{\partial t} + v_x(t) \frac{\partial c}{\partial x} = D \frac{\partial^2 c}{\partial z^2} \quad (5)$$

Debe aclararse que en estado estacionario el primer término no es nulo, puesto que se trata de un movimiento periódico.

Esta ecuación diferencial, con $v_x(t)$ dado por la ecuación (4), no tiene solución analítica conocida.

Caso particular de la ecuación (5)

Cuando la longitud L de la superficie transfiriente en la dirección de la oscilación de amplitud A es muy grande, es decir $L \gg A$, en la zona central será $\frac{\partial c}{\partial x} = 0$. Luego la ecuación (5) se reduce a:

$$\frac{\partial c}{\partial t} = D \frac{\partial^2 c}{\partial z^2} \quad (6)$$

que es la segunda ley de Fick; o sea para la zona central la velocidad de transferencia de materia se reduce al caso de flujo unidireccional en un medio semiinfinito, independiente de la fluidodinámica (28).

Adimensionalización de las ecuaciones diferenciales.

Si elegimos los siguientes parámetros característicos del sistema:

velocidad : $A\omega$
tiempo : $1/\omega$
concentración : c_0
longitud : L

podemos definir los parámetros adimensionales:

$$v_x^* (t) = \frac{v_x (t)}{\omega A} \quad t^* = \omega t \quad z^* = \frac{z}{A}$$

$$c^* = \frac{c}{c_0} \quad x^* = \frac{x}{L}$$

Sustituyendo en (2) obtenemos:

$$\left(\frac{\omega A^2}{\nu}\right) \frac{\partial v_x^*(t)}{\partial t^*} = \frac{\partial^2 v_x^*(t)}{\partial z^{*2}}$$

de donde $\Pi_1 = \left(\frac{\omega A^2}{\nu}\right)$

y en la ecuación (5):

$$\left(\frac{\omega A^2}{\nu}\right) \frac{\partial c^*}{\partial t^*} + \left(\frac{\omega A^3}{L D}\right) v_x^*(t) \frac{\partial c^*}{\partial x^*} = \frac{\partial^2 c^*}{\partial z^{*2}}$$

Dividiendo por Π_1 obtenemos:

$$\left(\frac{\nu}{D}\right) \frac{\partial c^*}{\partial t^*} + \left(\frac{\nu}{D}\right) \left(\frac{A}{L}\right) v_x^*(t) \frac{\partial c^*}{\partial x^*} = \left(\frac{\nu}{\omega A^2}\right) \frac{\partial^2 c^*}{\partial z^{*2}} \quad (7)$$

Definiendo:

Número de Schmidt: $Sc = \frac{\nu}{D}$

Número de Reynolds: $Re = \frac{f A^2}{\nu} = \frac{1}{2\pi} \frac{\omega A^2}{\nu}$

Obtenemos:

$$So \frac{\partial c^*}{\partial t^*} + \frac{Sc}{\left(\frac{L}{A}\right)} v_x^*(t) \frac{\partial c^*}{\partial x^*} = \frac{1}{2\pi Re} \frac{\partial^2 c^*}{\partial z^{*2}} \quad (8)$$

Por otra parte el flujo de materia en un punto de la superficie estará dado por:

$$J(x,t) = -D \left(\frac{\partial c}{\partial z}\right)_{z=0} \quad (9)$$

///

El coeficiente de transferencia puntual e instantáneo será:

$$k(x,t) = \frac{J(x,t)}{\Delta c}$$

Definiendo:

$$Sh(x,t) = \frac{k(x,t) dx}{D} = - \frac{1}{\Delta c} \left(\frac{\partial c}{\partial z} \right)_{z=0} dx \quad (10)$$

Luego el número de Sherwood instantáneo será:

$$Sh(t) = \frac{1}{\Delta c} \int_0^L \left(\frac{\partial c}{\partial z} \right)_{z=0} dx \quad (11)$$

y el número de Sherwood en un período:

$$\bar{Sh} = - \frac{1}{\Delta c \bar{v}} \int_0^{\bar{v}} \int_0^L \left(\frac{\partial c}{\partial z} \right)_{z=0} dx dt \quad (12)$$

Donde $\left(\frac{\partial c}{\partial z} \right)_{z=0}$ es una función de Re , Sc , y L/A .

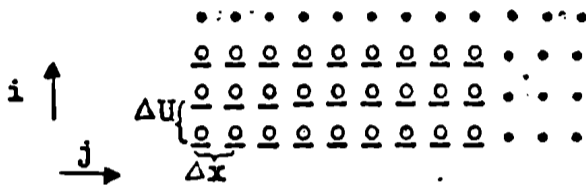
Por lo tanto la cinética del transporte quedará descrita por una ecuación de la forma:

$$\bar{Sh} = f (Re, Sc, L/A)$$

Solución numérica

Se efectuó resolviendo numéricamente la ecuación diferencial (5) planteada en forma de diferencias finitas, de la manera siguiente.

Consideremos que una matriz de puntos forma la representación bidimensional de las concentraciones adimensionales sobre la lámina oscilante.



Las filas están distanciadas en un espesor adimensional ΔU y las columnas separadas por una distancia Δx arbitraria.

La evolución de las concentraciones en cada columna durante un incremento de tiempo Δt estará descrito por la ecuación (6) cuya solución numérica se puede efectuar por el método de Schmidt (40). La solución obtenida tenderá al resultado exacto cuando los incrementos arbitrarios ΔU , Δx y Δt tiendan a cero, debiendo comprobarse de manera numérica la estabilidad y la convergencia de la solución obtenida.

Trayectorias del fluido

Considerando que la fluidodinámica del sistema se encuentra en estado estacionario, obtenemos la ecuación de la trayectoria por integración de la ecuación (3):

$$X'_e = A e^{-U} \text{sen}(\omega t - U) + \text{cte.} \tag{13}$$

Como las trayectorias deben ser simétricas al origen de coordenadas cuando ha transcurrido un semiperíodo π , debe ser:

$$-X'_e = A e^{-U} \text{sen}(\omega t - U + \pi) + \text{cte.} \tag{14}$$

y

///

$$+ X'_e = A e^{-U} \text{sen}(\omega t - U) + \text{cte.} \quad (15)$$

de (14) y (15) se desprende que cte. = 0 luego

$$X'_e = A e^{-U} \text{sen}(\omega t - U) \quad (16)$$

Cambio de coordenadas

Por razones de simplicidad en la aplicación de la resolución numérica conviene efectuar un cambio de coordenadas de las trayectorias. La ecuación (16) da las posiciones respecto a ejes fijos en el espacio, pero conviene tener las posiciones referidas a puntos fijos de la lámina.

La trayectoria de la lámina está dada por la (16) para $U = 0$

$$X'_1 = A \text{sen}(\omega t)$$

Luego las posiciones de los puntos del fluido respecto de la lámina serán:

$$X_e - X_1 = X' = A e^{-U} \text{sen}(\omega t - U) - \text{sen}(\omega t) \quad (17)$$

Mecanismo de resolución

Consideremos que cada elemento de la matriz representa la concentración adimensional en puntos fijos al fluido, definidas por:

$$C_{ij}^* = C_{ij} / C_s$$

En un intervalo de tiempo Δt , la evolución de las concentraciones estará dada según la aproximación de Schmidt:

$$C_{ij}^* \Big|_{t+\Delta t} = \frac{C_{(i-1)j}^* \Big|_t + C_{(i+1)j}^* \Big|_t}{2} \quad (18) \quad ///$$

Salvo para $i = 1$ (superficie del plano) donde:

$$C_{1j}^* \Big|_{t+\Delta t} = \frac{C_{1j}^* \Big|_t + C_{2j}^* \Big|_t}{2} \quad (19)$$

y en los puntos seleccionados para representar la superficie transfiriente donde:

$$C_{1j}^* = 1 \text{ para } p \leq j < p + m \quad (20)$$

Las expresiones (19) y (20) describen las condiciones de borde impuestas por la lámina.

Por otra parte la evolución de las posiciones de los puntos en el intervalo de tiempo Δt se calcula de la siguiente manera:

$$X_s = \text{entero más próximo a } (X')$$

donde X' está definido por la ecuación (17).

Si repetimos este proceso n veces, donde:

$$n = \frac{\zeta}{\Delta t} = \frac{\rho \pi}{\omega \Delta t} \quad (21)$$

la matriz representará las concentraciones en el seno del fluido cuando transcurrió un período.

Por otra parte, la ecuación (18) es válida si:

$$\Delta t = \frac{(\Delta z)^2}{2 D} \quad (22)$$

Sustituyendo en (21) y reordenando:

$$(\Delta z)^2 = \frac{4 \pi D}{\omega n} \quad (23)$$

Pero de (3) Δz está relacionado con ΔU por la expresión:

///

$$\Delta z = \Delta U \left(\frac{\omega}{2\nu} \right)^{-\frac{1}{2}} \quad (24)$$

Sustituyendo en (23) obtenemos:

$$\Delta U = \left(\frac{2\pi}{n S_0} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (24 a)$$

Es decir el espesor adimensional ΔU queda definido por los valores arbitrarios de S_0 y n elegidos.

Cálculo de \bar{Sh}

Si consideramos que el perfil de concentraciones es lineal en el espesor Δz adyacente al plano, el flujo de materia transferida por un elemento de superficie $\Delta y \cdot \Delta x$ será:

$$\frac{w_j}{\Delta t} = D \Delta y \Delta x \frac{(1 - C_{2j}^*)}{\Delta z} c_s \quad (25)$$

donde Δx queda definido por la relación $\Delta x = L/m$ siendo m un número natural arbitrario.

Y en toda la superficie tendremos:

$$\frac{W}{\Delta t} = \frac{D \Delta y \Delta x c_s}{\Delta z} \sum_{j=p}^{p+m} (1 - C_{2j}^*) = \frac{D \Delta y \Delta x c_s}{\Delta z} \sum_{j=p}^{p+m} \Delta C_{2j}^* \quad (26)$$

En un periodo la materia transferida será entonces

$$\sum_0^n \frac{W}{\zeta} = \bar{M} = \frac{D c_s \Delta y \Delta x}{n \Delta z} \sum_0^n \left(\sum_{j=p}^{p+m} \Delta C_{2j}^* \right) \quad (27)$$

Definiendo el coeficiente medio de transferencia

$$\bar{k} = \frac{\bar{M}}{c_s \Delta y L} = \frac{D}{n m \Delta z} \sum_0^n \left(\sum_{j=p}^{p+m} \Delta C_{2j}^* \right) \quad (28)$$

///

el número de Sherwood medio será:

$$\overline{Sh} = \frac{\bar{k} L}{D} = \frac{L}{n \cdot m \Delta z} \sum_0^m \left(\sum_{j=p}^{p+m} \Delta C_{2j}^* \right) \quad (29)$$

Sustituyendo en (29) por las ecuaciones (24) y (24a) obtenemos:

$$\overline{Sh} = \frac{\left(\frac{n}{2\pi}\right)^{\frac{1}{2}}}{n \cdot m} S_o^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\bar{u} f A^2}{v}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{L}{A}\right) \sum_0^n \left(\sum_{j=p}^{p+m} \Delta C_{2j}^* \right) \quad (30)$$

Luego, reagrupando tenemos:

$$\overline{Sh} = Re^{\frac{1}{2}} S_o^{\frac{1}{2}} \left(\frac{L}{A}\right) \frac{1}{(2n)^{\frac{1}{2}} m} \sum_0^n \left(\sum_{j=p}^{p+m} \Delta C_{2j}^* \right) \quad (31)$$

El término $\frac{1}{(2n)^{\frac{1}{2}} m} \sum_0^n \left(\sum_{j=p}^{p+m} \Delta C_{2j}^* \right)$ al que denominaremos ϕ , para el caso de $n, m \rightarrow \infty$, solo es función de las variables L/A y S_o ; y el valor de $\phi(L/A, S_o)$ puede calcularse por computadora con lo cual queda determinada la ecuación (31).

Solución analítica para el caso $L/A \rightarrow \infty$

El flujo másico por difusión unidireccional en un medio semi-infinito (28) está dado por:

$$J = \left(\frac{D}{\pi t}\right)^{\frac{1}{2}} c_s$$

y el coeficiente de transferencia de materia será:

$$k(t) = \frac{J}{c_s} = \left(\frac{D}{\pi t}\right)^{\frac{1}{2}}$$

Definiendo

///

$$Sh(t) = \frac{k(t) L}{D} = \frac{L}{(\pi D t)^{\frac{1}{2}}} = Re^{\frac{1}{2}} Sc^{\frac{1}{2}} \left(\frac{L}{A}\right) \frac{1}{(\pi f t)^{\frac{1}{2}}}$$

ecuación que nos define el término

$$\phi(t) = \frac{1}{(\pi f t)^{\frac{1}{2}}}$$

pero como $f = \frac{1}{\tau}$ y haciendo $q = \frac{t}{\tau}$

donde q es el número de ciclos transcurridos desde que comenzó la transferencia de materia, sustituyendo tenemos:

$$\phi(q) = \frac{1}{(\pi q)^{\frac{1}{2}}}$$

Es decir que para $\left(\frac{L}{A}\right)$ tendiente a infinito, la solución numérica se aproxima al resultado anterior.

También en el caso de Sc tendiente a infinito la solución debe acercarse a la misma función analítica, pues en este caso el espesor donde ocurre el transitorio de transferencia de materia es mucho menor que el espesor fluidodinámicamente afectado por la oscilación.

Análisis de la solución numérica

En base al mecanismo de solución numérica planteado en la parte teórica y utilizando las ecuaciones (17), (18), (19), (20), (24) y (31), se escribió un programa apto para el cálculo del término $\phi(L/A, S_0)$ por computadora (Apéndice VI).

Limitaciones de la solución numérica

Como la capacidad de memoria de la computadora es limitada, y el modelo propuesto es solamente válido en un medio semiinfinito, se consideró que esta condición queda prácticamente cumplida cuando las concentraciones adimensionales en los puntos $C_{i,1}^*$ y $C_{s,j}^*$ (borde de la matriz) eran menores a 10^{-3} . Este limita el número de períodos que pueden efectuarse numéricamente a partir de la condición inicial

$$\begin{aligned} t = 0 & \quad , \quad C_{ij}^* = 0 \text{ para todo } i, j \\ t \geq 0 & \quad , \quad C_{1j}^* = 1 \text{ para } p \leq j < p+m \end{aligned}$$

Esta restricción obligó a elegir un estado pseudoestacionario arbitrario definido por la expresión

$$\frac{\phi(q-1) - \phi(q)}{\phi(q)} \leq \epsilon \quad (37)$$

Siendo ϵ una constante arbitraria y pequeña.

Debe destacarse que si bien es conveniente la elección de ϵ lo menor posible, las limitaciones dadas por las condiciones de borde, imponen a la solución numérica un valor de compromiso. Las pruebas preliminares indicaron que $\epsilon = 0,02$ era un valor conveniente, y con él se efectuó el cálculo.

Para poder disminuir esta cota sería necesario poseer mayor capacidad de memoria (matriz más grande) y naturalmente disponer de mayor tiempo de máquina.

Estabilidad y convergencia de la solución obtenida

Un análisis del algoritmo indica que ϕ debe ser una función monó

///

tonamente decreciente del número de períodos transcurridos q . Esta funcionalidad nos permite verificar la estabilidad de la solución numérica obtenida y por otra parte nos permite utilizar la definición (37) para detener el proceso de cálculo.

A título ilustrativo se adjuntan ejemplos de la relación de ϕ vs. q para distintas condiciones de resolución (figura n° I). Es destacable que la forma de la curva es análoga a la obtenida experimentalmente en el registro gráfico de i_d vs. el tiempo.

Convergencia de la solución

Recordando que la ecuación

$$\phi = \frac{1}{(2n)^{\frac{1}{2}} m} \sum_0^n \left(\sum_{j=p}^{p+m} \Delta c_{ij}^* \right)$$

tiende a dar la solución exacta de la ecuación diferencial (5) cuando $n, m \rightarrow \infty$, la prueba de convergencia se obtuvo variando los valores de n y m , encontrándose que ϕ es prácticamente independiente de los valores usados; como puede verse en la tabla n° 1.

Tabla n° 1

Matriz	Sc	L/A	n	m	ϕ
40x102	1000	0,5	10	6	0,325
40x102	1000	0,5	10	12	0,324
50x134	1000	0,5	12	9	0,329

Caso particular: L/A tiende a infinito

Como se discutió en la parte teórica este caso presenta solución analítica, la cual puesta en la forma usada para obtener la solución numérica nos da la expresión:

$$\phi(q) = \frac{1}{(\pi q)^{\frac{1}{2}}}$$

donde ϕ es independiente de L/A y de Sc. Este caso nos permite obtener

///

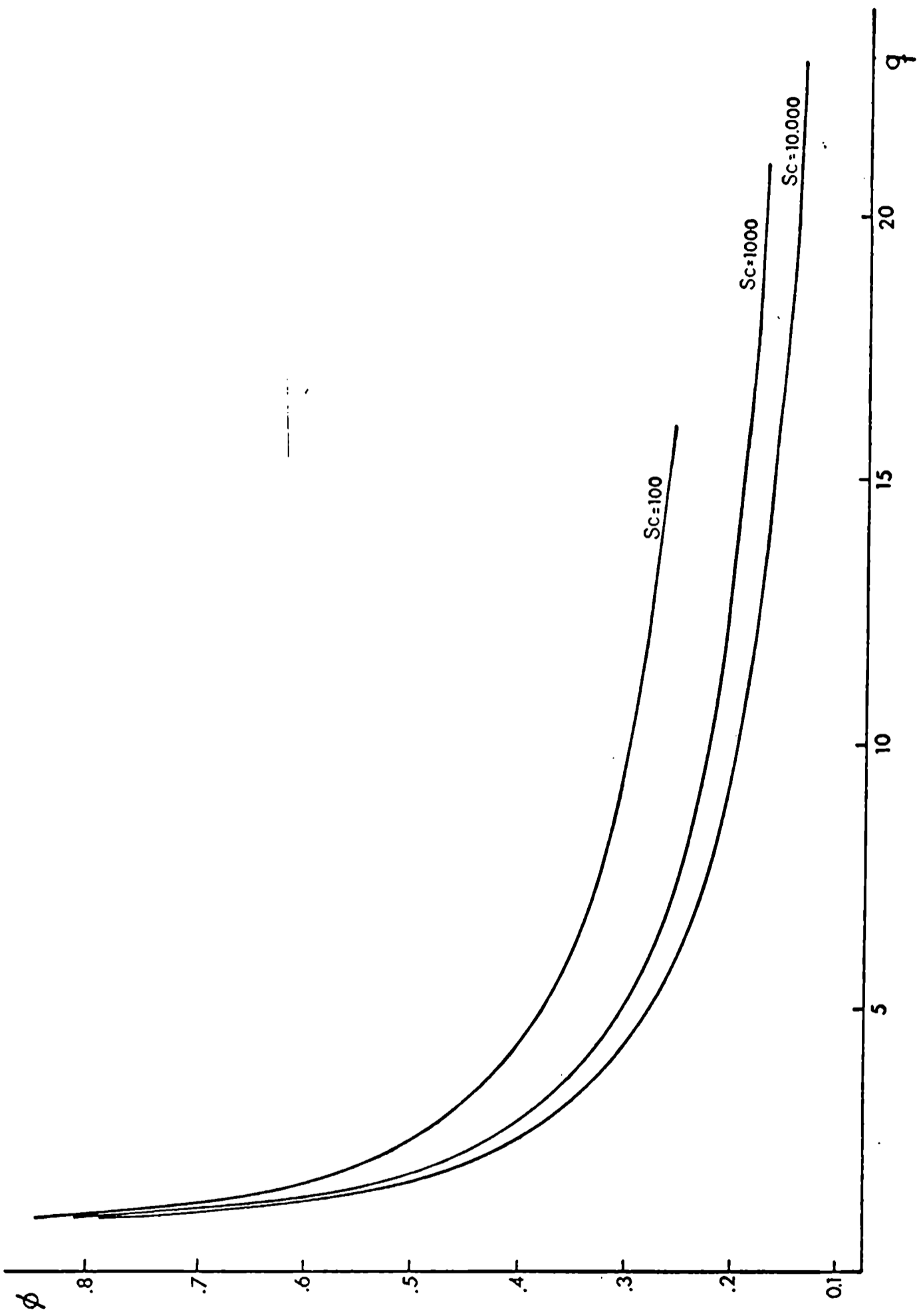


Figura I

Verificación de la estabilidad de la solución numerica

dos resultados importantes; 1) verificar la convergencia de la solución numérica probándola para $\Lambda = 0$ respecto de la solución teórica correspondiente, como puede observarse en la figura n° II, donde a partir de cinco ciclos se obtiene una buena coincidencia entre la solución analítica y la numérica, y 2) nos permite obtener el valor límite al cual tiene ϕ cuando L/Λ o $Sc \rightarrow \infty$.

Resultados obtenidos con la solución numérica

Una vez comprobada la estabilidad y la convergencia del método numérico desarrollado, se calculó ϕ para distintos valores de L/Λ y Sc , con $\epsilon = 0,02$. Los resultados obtenidos están reunidos en el apéndice VII.

Debe aclararse que las limitaciones impuestas por la capacidad de memoria del computador, no hicieron posible el cálculo para $Sc = 1$, pues en ese caso no se cumplía la condición de concentración adimensional despreciable (menor que 10^{-3}) en los bordes de la matriz, indispensable para ajustarse al modelo de medio semiinfinito.

Para generalizar los resultados obtenidos, se graficó ϕ versus Sc (figura n° III) con L/Λ como parámetro y ϕ vs. L/Λ con Sc constante (figura n° IV). Puede verse que ϕ no es una función sencilla de Sc y L/Λ (de la forma $(L/\Lambda)^n (Sc)^m$) puesto que en el gráfico doble logarítmico se obtiene una curva compleja que tiende a asintotarse al valor de $\phi = 0,111$ correspondiente a la solución obtenida para el caso de L/Λ o $Sc \rightarrow \infty$ (con $\epsilon = 0,02$).

Sin embargo estos gráficos permiten obtener una expresión aproximada para el número de Sherwood en determinadas zonas donde las curvas se pueden aproximar a un segmento de recta. Esto permite la comparación a menos de una constante (ya que esta depende del valor arbitrario de ϵ usado) de las correlaciones experimentales con los resultados de la resolución numérica. En la tabla n° 2 se presentan los exponentes de Sc y L/Λ obtenidos a partir de las figuras III y IV y la ecuación 31 para distintos valores y rangos de dichos grupos.

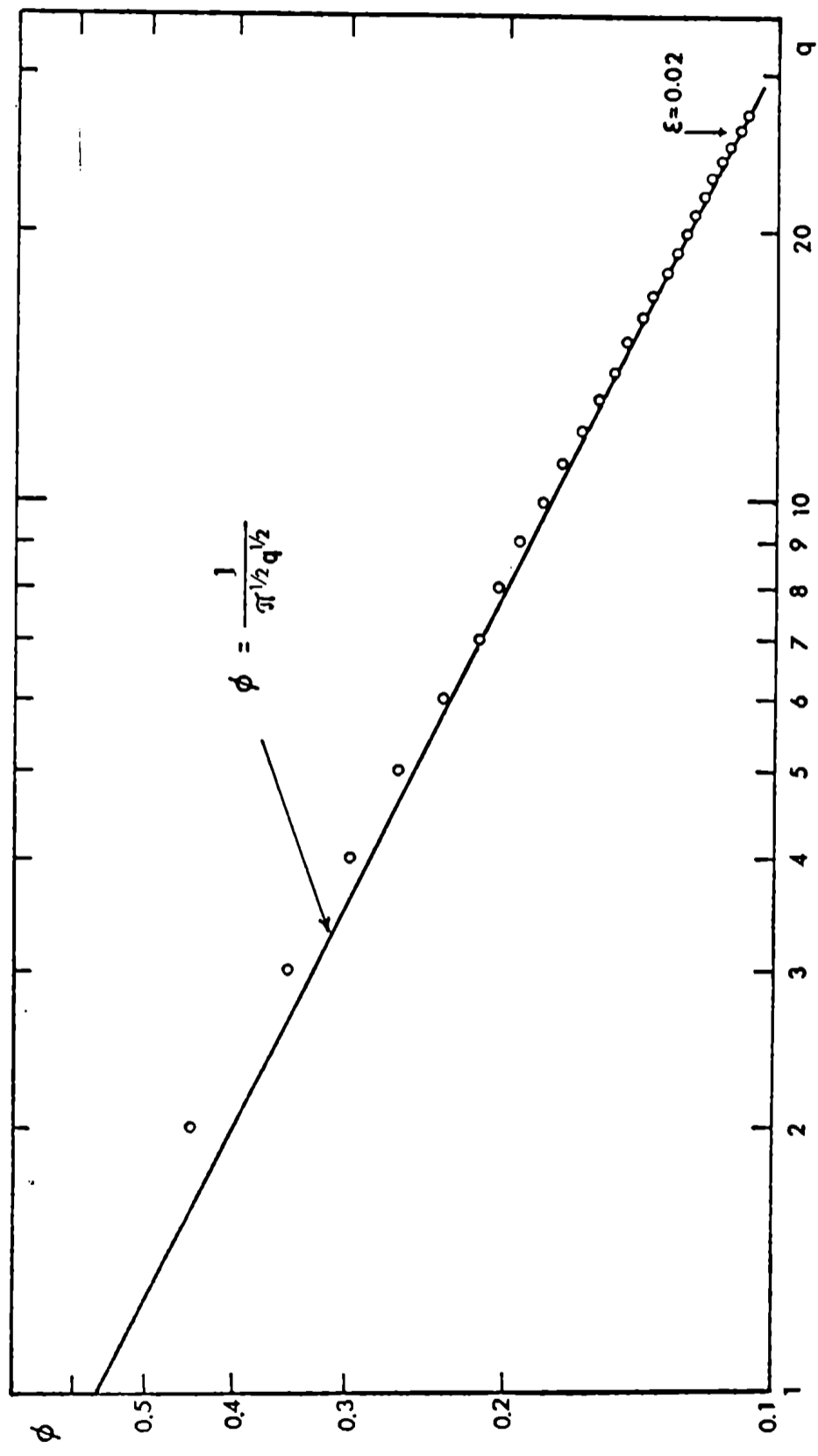


Figura II

Verificación de la convergencia de la solución numerica respecto de la solución analítica para $L/A \rightarrow \infty$

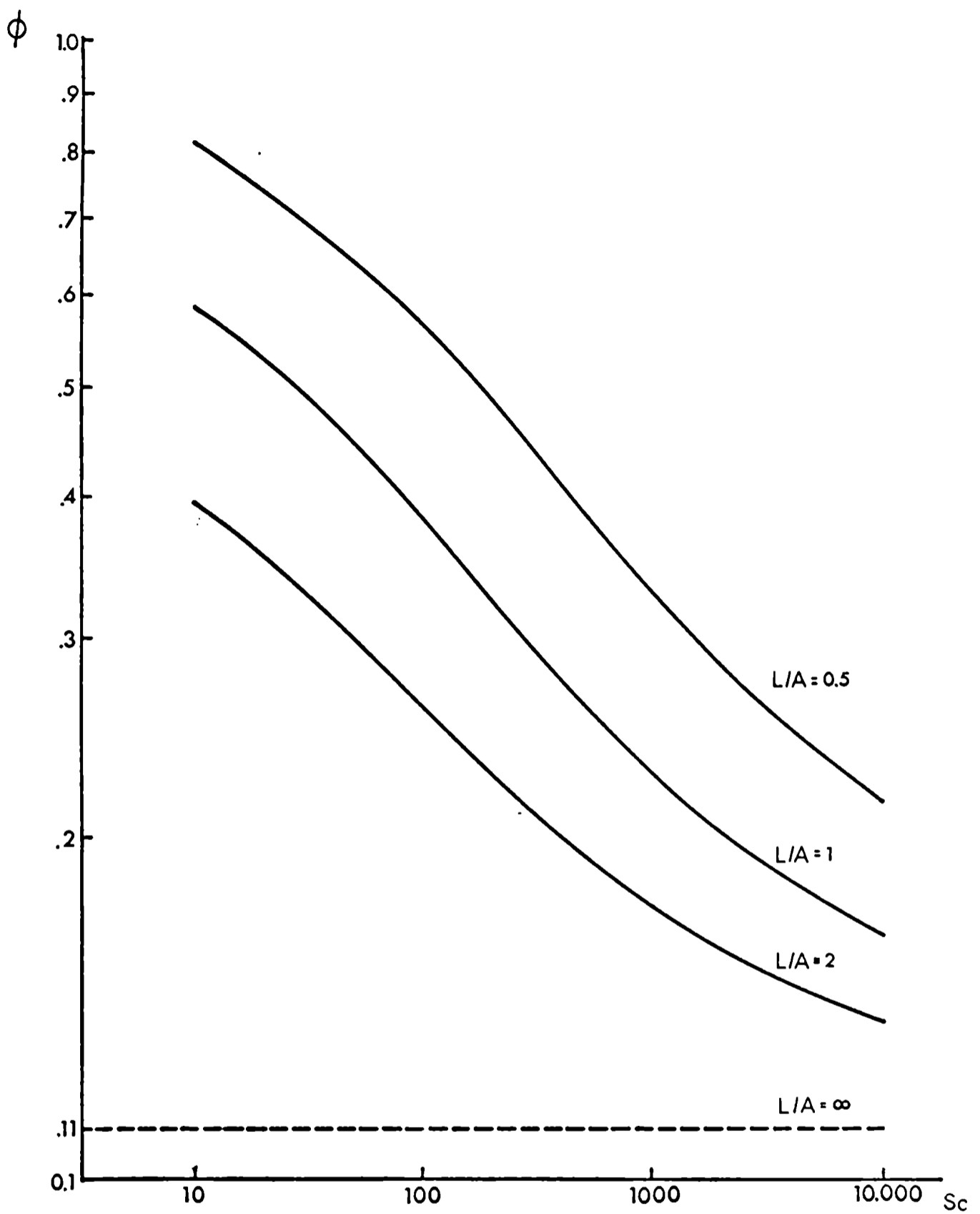


Figura III

Resultado de la solución numerica

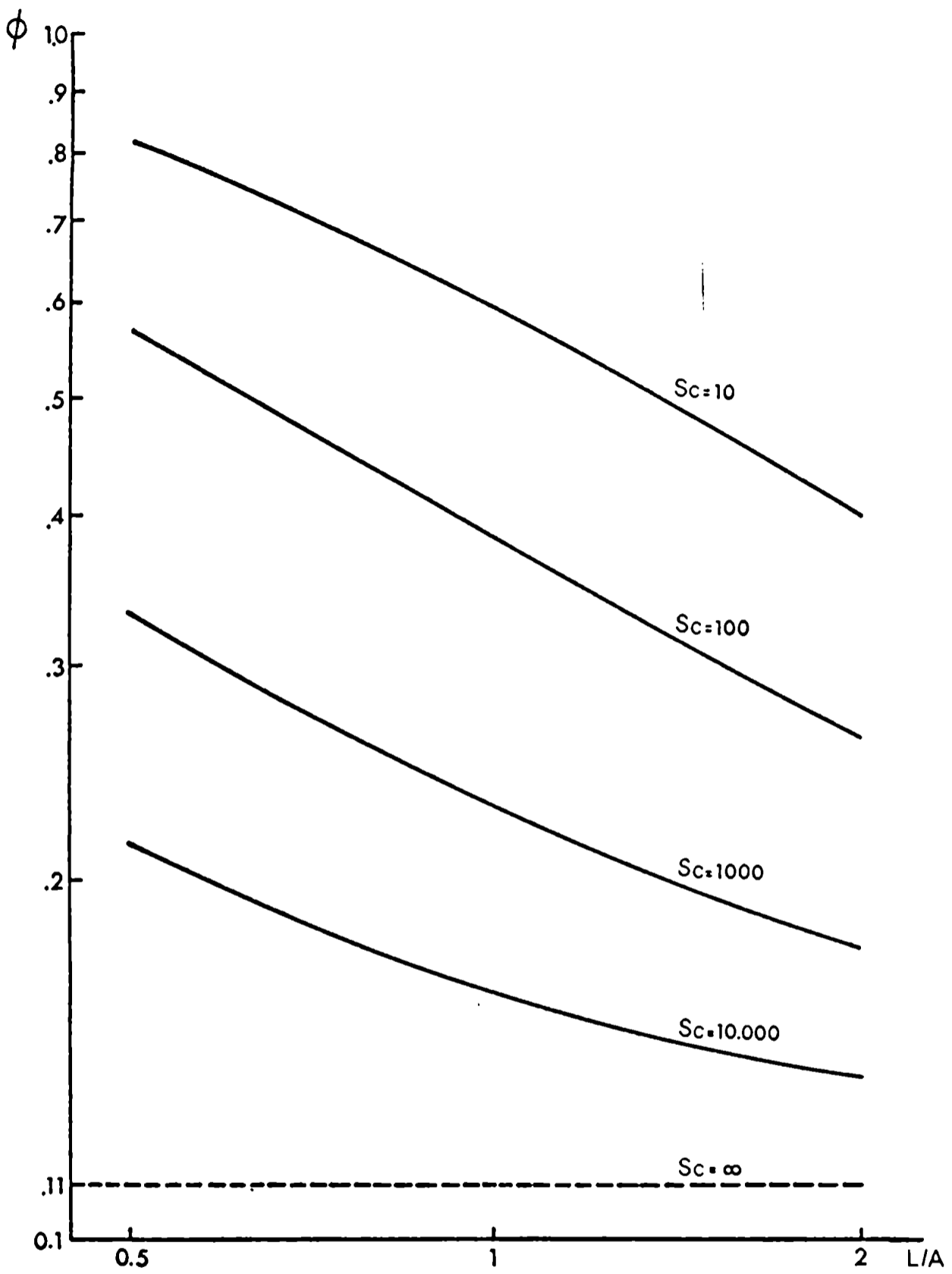


Figura IV

Resultado de la solución numerica

Tabla n° 2

Exponentes de S_c y L/A obtenidos en la solución numérica.

A) Exponente de S_c

L/A	S_c						
	10	10^2	10^3	10^4	$10 - 10^2$	$10^2 - 10^3$	$10^3 - 10^4$
0,5	0,366	0,296	0,270	0,338	0,335	0,278	0,314
1.0	0,350	0,245	0,306	0,396	0,286	0,305	0,356
2.0	0,360	0,280	0,356	0,428	0,325	0,324	0,402

B) Exponente de L/A

S_c	L/A				
	0,5	1.0	2.0	0,5 - 1.0	1.0 - 2.0
10	0,535	0,490	0,360	0,530	0,426
100	0,305	0,455	0,590	0,365	0,530
1.000	0,455	0,510	0,665	0,496	0,596
10.000	0,530	0,645	0,820	0,631	0,760

Parte experimental

Método de trabajo

Para proceder al estudio experimental de la transferencia de materia desde un plano oscilante se decidió utilizar el método electroquímico ampliamente conocido (29), (30), (31), consistente en la medición de la corriente límite para la reducción del ion Ferricianuro en una solución que contiene un gran exceso de Hidróxido de sodio como electrolito soporte.

Esta técnica presenta una serie de ventajas como ser:

- a) Permite seguir el estado transiente del proceso, y con ello se puede asegurar que la medición se realiza en estado estacionario.
- b) Con el sistema electroquímico elegido se pueden realizar distintas corridas (que no impliquen cambio de solución) sin necesidad de desarmar al sistema de estudio pues la reducción del ion Ferricianuro deja inalterado el electrodo.
- c) La velocidad de transferencia de materia determinada por la corriente límite, se puede medir con gran precisión (típico 0,5%).
- d) Se tiene un buen conocimiento previo acerca de esta técnica (32), (33), (34) y de bibliografía (35) se obtienen datos confiables de los parámetros característicos necesarios para el estudio cuantitativo, como ser el coeficiente de densificación, la difusividad y la viscosidad.
- e) Mediante un nuevo sistema electroquímico desarrollado en el presente trabajo, Ferricianuro de potasio/Ferrocianuro de potasio/ Sulfato de sodio/ Carboximetilcelulosa, es posible obtener grandes variaciones en la viscosidad y por ende conocer más precisamente el problema fluidodinámico y la influencia del número de Schmidt.

En base a estas consideraciones, se diseñó una celda de estudio cuya característica principal es que su base plana puede oscilar según una ley sinusoidal de frecuencia y amplitud conocidas y variables a voluntad. Esta placa contiene los electrodos que permiten la medición de la velocidad de transferencia de materia.

Descripción de equipos

Celda utilizada

Se usó una celda construida en acrílico de 4 mm. de espesor cuyo esquema puede verse en la figura (1). A su vez esta celda se encuentra parcialmente encerrada en una caja también de acrílico de 6

///

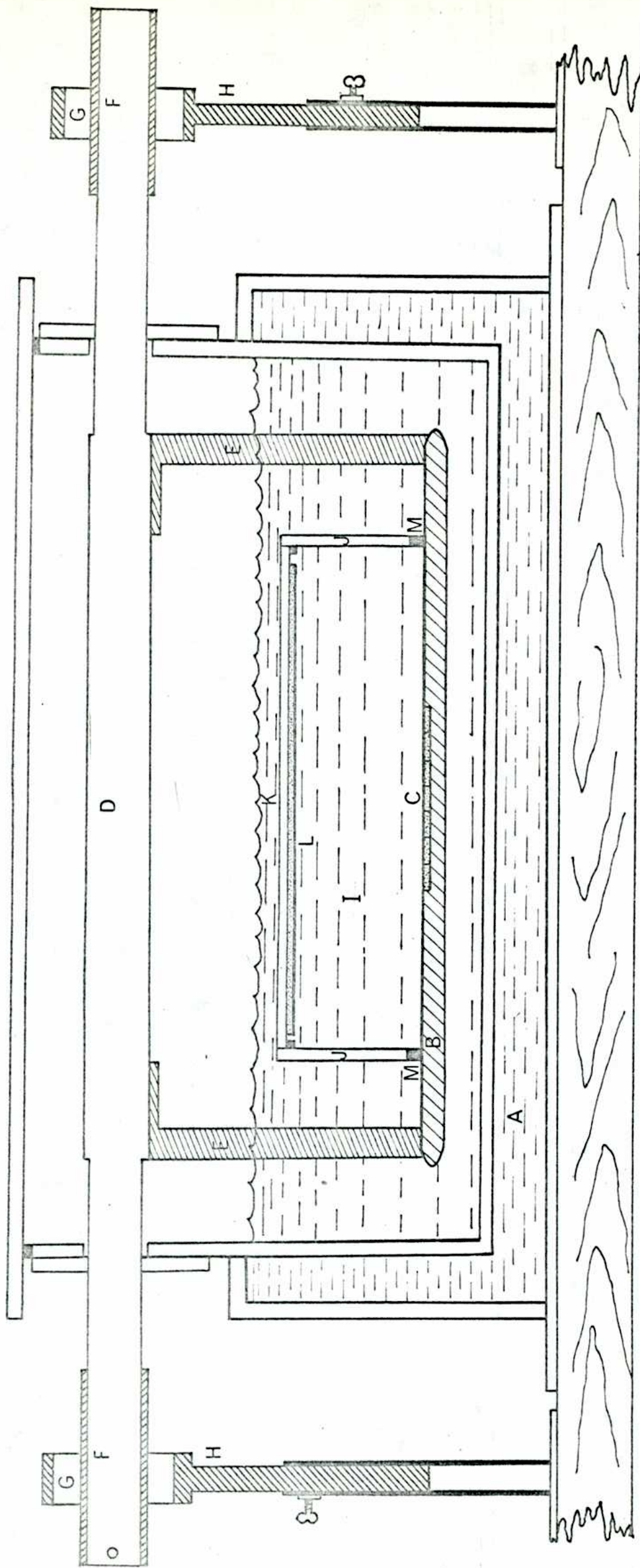


Figura 1 Corte de la celda utilizada. Escala 1:2

mm. de espesor, la que permite una adecuada termostatación por circulación de agua por su interior (A) y por ser transparente, deja observar el interior del sistema.

El objeto de una estricta termostatación es disminuir dentro de lo posible la convección natural originada por gradientes de temperatura. La elección de un material mal conductor del calor como es el acrílico y las dimensiones relativamente grandes de la celda permiten lograr una buena constancia en la temperatura interna, siendo las variaciones observadas menores a 0,1 °C.

El plano de estudio (B) que contiene los electrodos (C) es solidario con una barra de lucite (D) mediante dos vástagos de hierro cubiertos con acrílico (E). Esta barra tiene en sus extremos bujes de bronce (F) que ajustan en cojinetes de aluminio (G), fijados con un soporte (H) que permite una correcta alineación del plano móvil respecto de la celda.

La cámara de estudio (I) está limitada inferiormente por el plano móvil; lateralmente por dos baffles rectangulares de acrílico (J), (encastrados en dos ranuras practicadas en los costados de la celda) y superiormente por una tapa rectangular (K) que apoya en los baffles y que además soporta el ánodo de níquel (L).

El cierre entre los baffles y el plano oscilante se efectúa mediante juntas de espuma de poliuretano (M).

Las dimensiones de la cámara de estudio para la mayoría de los ensayos efectuados son 180x120x50 mm, habiéndose variado la distancia entre baffles por el agregado de otros dos, asegurados a los baffles originales mediante tornillos de acrílico. De forma similar se cambia la altura de la cámara bajando la tapa correspondiente.

La celda está ubicada sobre una pesada base de madera provista de cuatro tornillos pasantes que permiten la nivelación del sistema respecto de la mesa de trabajo.

Electrodos

El cátodo está formado por siete electrodos de níquel electrolítico de 40x10x2 mm. cada uno, incluidos en una única pieza de resina epoxi, polimerizada in situ de tal manera que los siete electrodos forman un rectángulo de 70x40 mm. (figura 2) con una separación entre electrodos menor que 0,1 mm. Esta pieza monolítica fue rectificada a máquina y luego fue pulida a mano sobre un vidrio plano

///

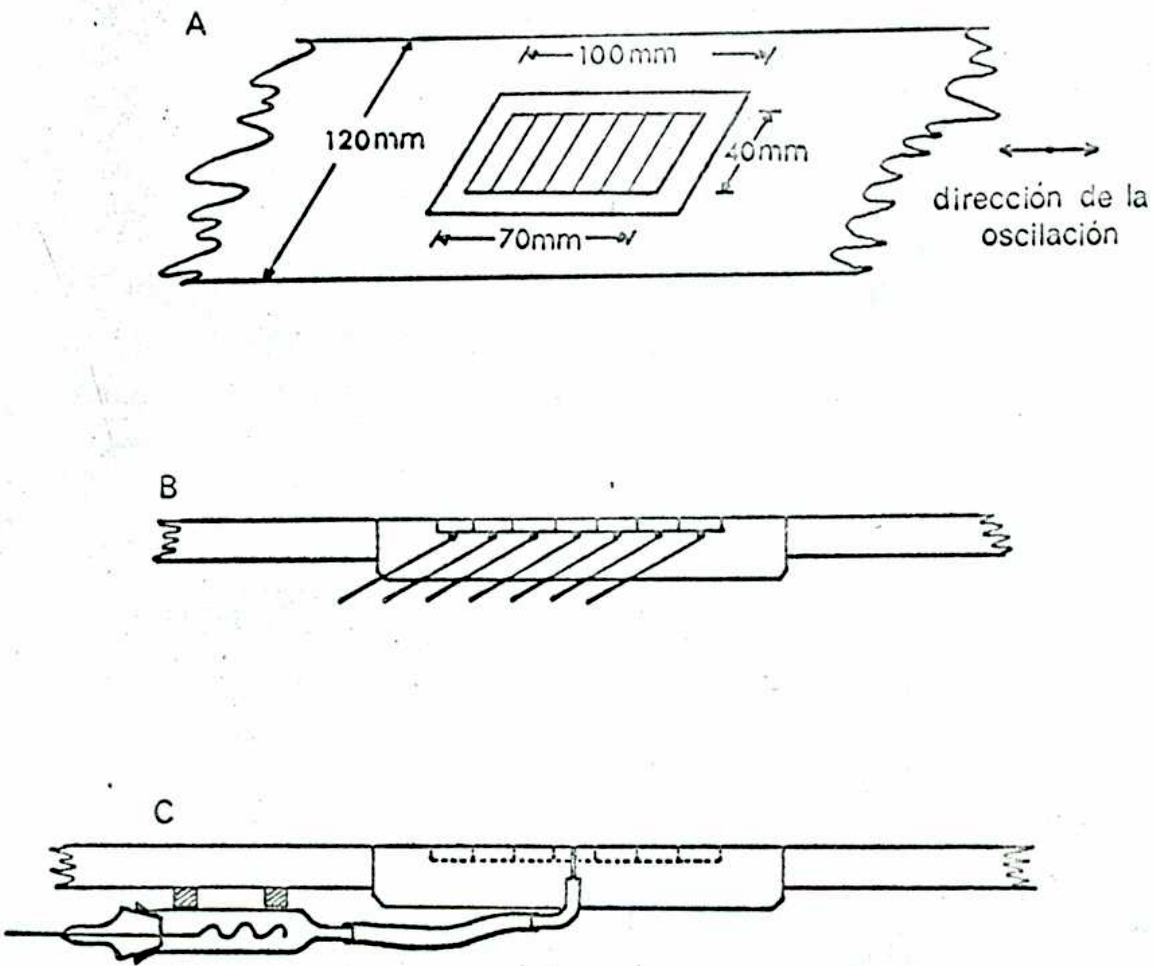
Figura 2

Electrodos utilizados

A Disposición en el plano

B Vista de corte

C Ubicación del electrodo de referencia



usándose como abrasivo primero carborundum y luego esmeril; finalmente se obtuvo un acabado especular mediante lija para joyeros.

La conexión eléctrica de los electrodos está esquematizada en la figura 3; los arrollamientos helicoidales del cable permiten la libre oscilación del plano respecto de la celda fija.

El ánodo (L) está formado por una placa de cobre de 190x120x2mm. niquelado según la técnica descrita por Bertorelle (36). En la serie de experiencias con el sistema electroquímico que usa Sulfato de sodio como electrolito soporte, se usó un ánodo de níquel electrolítico de 150x80x2 mm., para evitar problemas de corrosión.

Para posibilitar el control de la tensión de polarización del cátodo, se agregó un electrodo de referencia de platino (figura 2) el cual hace contacto con la solución a través de un orificio de 0,7 mm. de diámetro practicado cerca del cátodo central.

Sistema oscilador

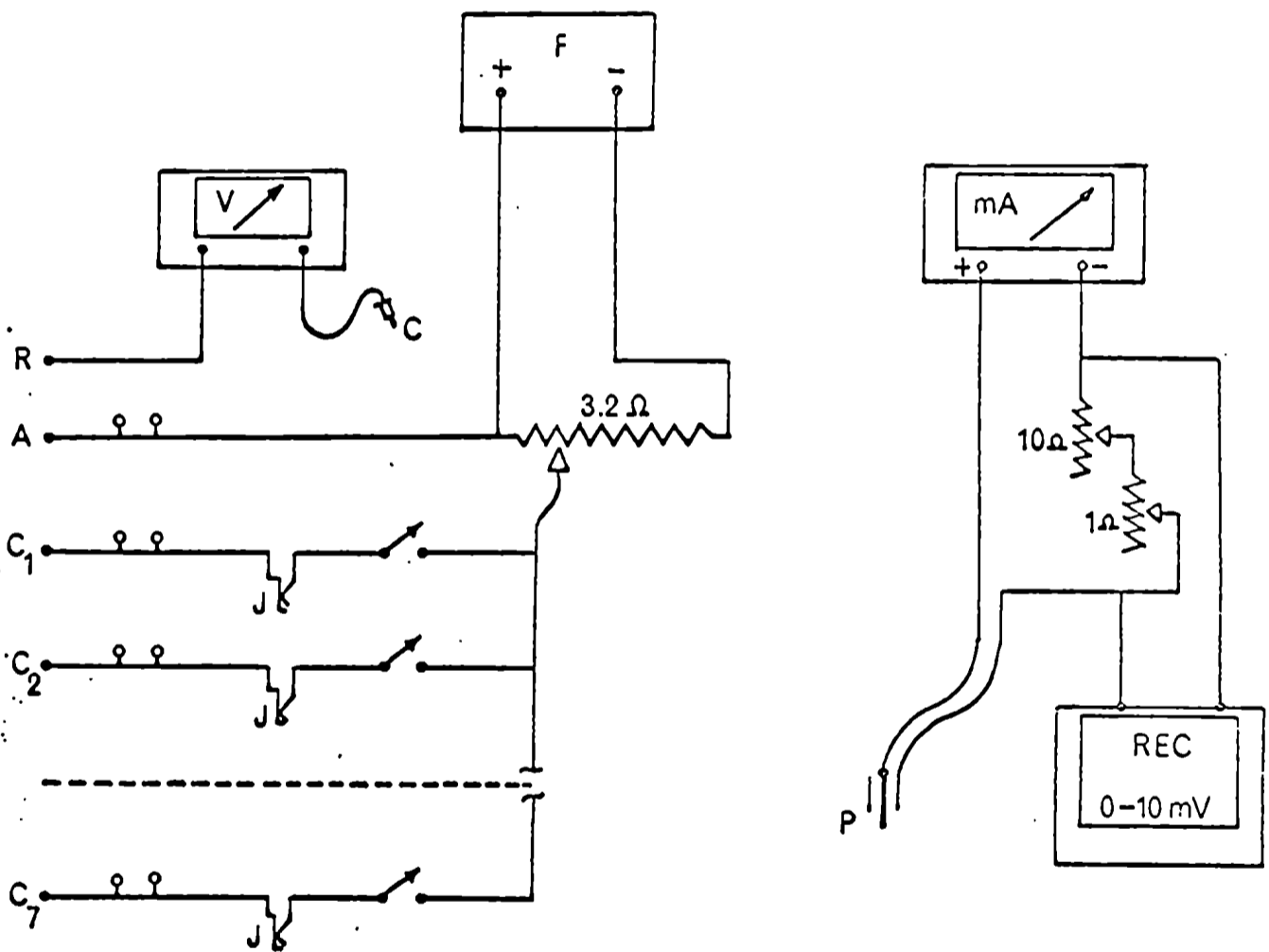
Se usa el sistema mecánico de biela-manivela con una longitud de biela tal que se obtiene una oscilación prácticamente sinusoidal (Apéndice 1)

La velocidad del motor se varía mediante un variaco y se regula con el sistema de control esquematizado en el Apéndice II. La frecuencia de oscilación se mide utilizando el equipo cuyo circuito está en el Apéndice III.

Este equipo se ubicó sobre una base de madera independiente para posibilitar de manera sencilla su alineación con la celda.

Figura 3

Esquema del circuito electrico utilizado

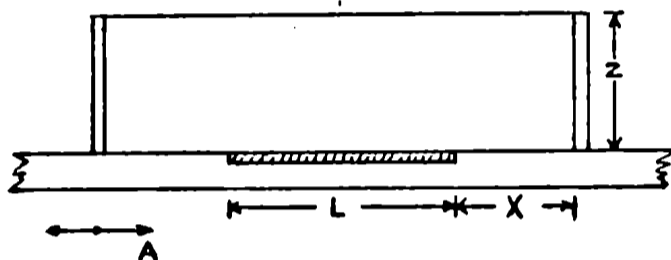


Experiencias efectuadas

Con el equipo anteriormente descrito se realizaron las mediciones cuyos resultados están tabulados en el Apéndice V.

Los parámetros geométricos que se variaron para estudiar su influencia están señalados en la figura 4.

Figura 4.



Las variables estudiadas y su rango de trabajo son:

- f: 0,42 a 7,5 cs/seg.
- A: 0,19 a 2,00 cm.
- L: 1,0 a 7,0 cm.
- X: 1,5 a 9,0 cm.
- Z: 1,9 y 5,0 cm.
- C: 0,025 y 0,05 molar
- \checkmark : 1,26 a 30,8 cst.
- D: $6,13 \times 10^{-6}$ a $5,20 \times 10^{-6}$ cm²/seg.
- T: $25 \pm 0,1$ °C

Para poder estudiar aisladamente el efecto de la oscilación en la transferencia de materia, es necesario anular o disminuir en lo posible causas indeseables que modifiquen la cinética de transferencia. En este sentido la convección natural es el problema más importante; para reducirlo al máximo se adoptó la posición horizontal de los electrodos de estudio, con la cara transfiere hacia arriba, pues el ión Ferricianuro al reducirse genera una solución más densa, la cual queda estabilizada sobre el electrodo; además se trabajó con concentraciones relativamente bajas (0,025 M. y 0,05 M.) para disminuir en lo posible los gradientes de concentración, causa de la convección natural.

///

Soluciones electrolíticas usadas

Para cada serie de corridas se utilizó una solución recién preparada de los siguientes sistemas:

- I) Solución 0,025 M equimolar en Ferrocianuro-Ferricianuro de potasio y 2 M en Hidróxido de sodio.
- II) Solución 0,050 M equimolar en Ferrocianuro-Ferricianuro de potasio y 2 M en Hidróxido de sodio.
- III) Solución 0,025 M equimolar en Ferrocianuro-Ferricianuro de potasio, 0,5 M en Sulfato de sodio con cantidades variables de Carboximetilcelulosa sódica (CMC) como espesante (hasta 1% en peso).

Se usaron en todos los casos agua destilada y reactivos de calidad pro análisis.

Previamente al uso de estas soluciones, se hizo burbujear nitrógeno de calidad tres bandas durante aproximadamente 15 minutos con el objeto de eliminar el oxígeno disuelto en ellas. Esta operación se prolongó a lo largo de toda la experiencia.

Las propiedades físicas de la solución II se obtuvieron de bibliografía (35), mientras que en el caso de las soluciones I y III fueron determinadas experimentalmente.

Medición de viscosidad

Se usó un viscosímetro tipo Ubbelohde de la casa Baird & Tatlock n° 4 calibrado previamente con soluciones standard de Sacarosa (37).

Como es conocido, las soluciones de C.M.C. presentan un comportamiento no newtoniano a altos valores de esfuerzo de corte, por lo que es necesario verificar el comportamiento de la solución de C.M.C. en el viscosímetro.

Si consideramos que el perfil de velocidades en el tubo capilar es:

$$v_z = \frac{p'}{h} \frac{R^2}{4\mu} \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right]$$

///

obtenemos:

$$\left. \frac{\partial v_z}{\partial r} \right|_{r=0} = - \frac{p'}{h} \frac{r}{2} \frac{1}{\mu}$$

luego

$$T_{\text{máx}} = -\mu \left. \frac{\partial v_z}{\partial r} \right|_{\text{máx}} = -\mu \left. \frac{\partial v_z}{\partial r} \right|_{r=R} = \frac{p'}{h} \frac{R}{2} = \frac{\rho R}{2}$$

Calculando con esta ecuación, para nuestro viscosímetro encontramos:

$$T_{\text{máx}} = 20 \text{ dinas/cm}^2$$

En base a los resultados obtenidos por Arvía y Bazán (38) para este valor de T el comportamiento de las soluciones de C.M.C. es realmente Newtoniano y es válido el perfil de velocidades supuesto.

Medición de densidad

Se utilizó una balanza de Mohr marca K. Kolb haciéndose la medición a 25 °C, temperatura a la cual se realizaron todas las experiencias de este trabajo.

Trabajo experimental realizado

La secuencia de trabajo para la obtención de los datos experimentales es la siguiente:

- a) Se limpian y activan catódicamente los electrodos en una solución al 10% de Hidróxido de sodio durante 15 minutos aproximadamente con una densidad de corriente de 10 mA/cm², observándose además el desprendimiento regular de hidrógeno en toda la superficie del electrodo, para verificar su actividad. Para esta operación se utiliza como ánodo un trozo de níquel electrolítico introducido en la celda.
- b) Se vacía la celda, se carga el electrodo de referencia con la solución electrolítica a utilizar y se enjuaga todo con esta misma

///

- solución, luego se procede al llenado de la celda.
- c) Se conecta la línea de nitrógeno previamente purgada hasta obtener un suave burbujeo en el interior de la celda, mientras se procede a la termostatación de la solución.
 - d) Una vez alcanzada la temperatura de 25 °C se hace funcionar el sistema mecánico de oscilación.
 - e) Se conecta luego el circuito de medición, ajustándose el voltaje aplicado hasta obtener entre el electrodo de referencia y el cátodo una tensión de 600 mV. Cuando en el registrador se constata la obtención de estado estacionario, se controla la tensión aplicada y se efectúa la lectura de corriente límite y frecuencia.

Sistema electroquímico desarrollado

La necesidad planteada en este trabajo de variar el número de Schmidt implicó una revisión de los sistemas electroquímicos usuales.

El sistema $\text{SO}_4\text{Cu}/\text{SO}_4\text{H}_2$ /glicerina, comúnmente utilizado para analizar la influencia del número de Schmidt, se debió descartar por no ser experimentalmente admisible una deposición de cobre sobre los electrodos.

Se ensayó entonces con el sistema propuesto por Bazán y Arvia (38) el cual está compuesto por Ferricianuro-Ferrocianuro de potasio, cloruro de potasio como electrolito soporte y C.M.C. como espesante, encontrándose que este sistema es altamente corrosivo para el níquel, metal utilizado en la factura de los electrodos.

Este hecho motivó la búsqueda de un electrolito soporte, encontrándose que el sulfato de sodio cumple con la condición de no atacar al níquel, y tiene una solubilidad suficiente como para dar una alta concentración electrolítica.

Para poder utilizar este sistema era necesario medir la difusividad del ión Ferricianuro, para lo cual se construyó la celda de Cottrell que se describe a continuación.

Celda de Cottrell

En base a las referencias bibliográficas, (39) se construyó una celda torneada en acrílico esquematizada en la figura 5. constituida por un tubo de 5,0 mm de diámetro y 40 mm de longitud cerrado en su extremo inferior por un cátodo de níquel pulido (A). En su parte superior el tubo se ensancha para alojar al ánodo (B) de níquel, que es un disco de 12 mm de diámetro soportado por un vástago de níquel del cual sale la conexión eléctrica.

Esta celda munida de una plomada, usada para controlar su verticalidad, va enroscada en un soporte de acrílico (D) solidario a un pie de bronce (E), mediante tornillos que permiten la nivelación.

Para asegurar la homogenización del electrolito antes de comenzar la experiencia, se agregó un agitador (F) de plástico, el cual pasa por un pequeño orificio practicado en el ánodo.

///

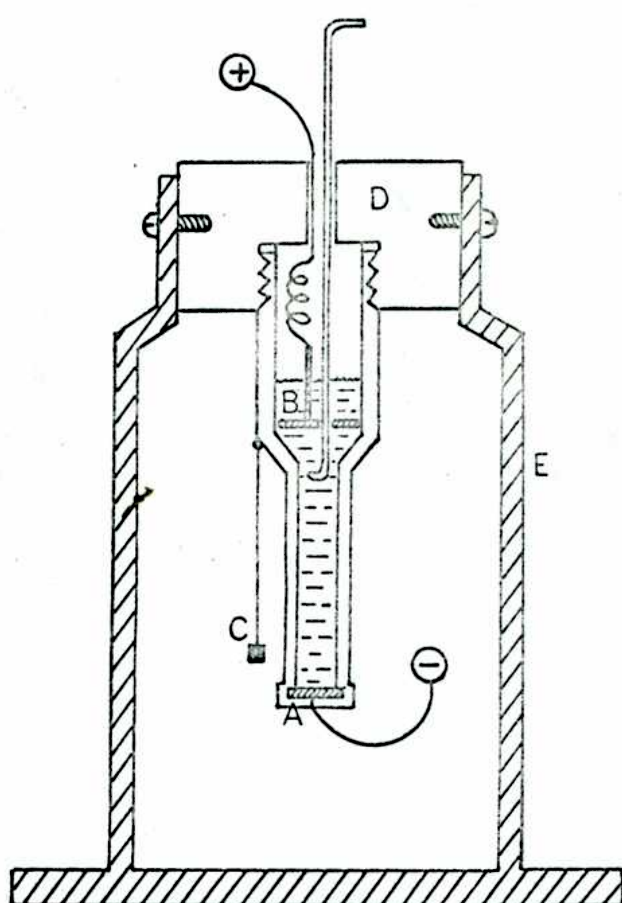


Fig. 5. Celda de Cottrell utilizada

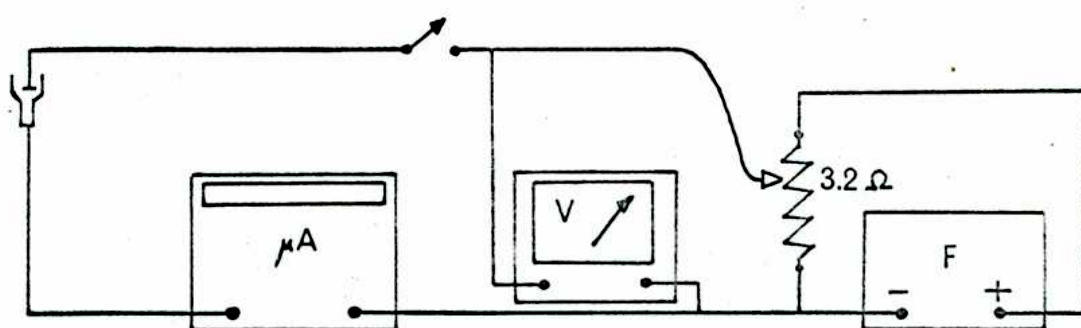


Fig. 6. Circuito eléctrico de la celda de Cottrell

Para asegurar el equilibrio térmico de la celda, esta va sumergida en un baño de agua termostatzada a $25 \pm 0,1$ °C.

El circuito eléctrico usado está esquematizado en la figura 6.

Principio de funcionamiento de la celda

La gran longitud del capilar de la celda permite aproximarnos, usando tiempos moderadamente cortos, al modelo de difusión unidireccional en un medio semiinfinito. La integración de la 2ª ley de Fick (39) nos permite derivar para este caso la expresión:

$$\left(\frac{dc}{dz}\right)_{z=0} = \frac{c_s}{\pi^{\frac{1}{2}} (Dt)^{\frac{1}{2}}} \quad (32)$$

Que nos permite calcular el flujo másico en la interfase electro-solución;

$$J = -D \left(\frac{dc}{dz}\right)_{z=0}$$

La corriente resultante de la reducción de un ión sobre el electrodo será:

$$I = \pm n^+ F S D \left(\frac{dc}{dz}\right)_{z=0} \quad (33)$$

de (32) y (33) obtenemos para la reducción del ión Ferricianuro para el cual $n^+ = 1$;

$$I^2 t = \frac{F S c_s}{\pi} D = cte \quad (34)$$

Trabajo experimental con la celda de Cottrell

Con el equipo previamente descrito se realizaron las mediciones procediendo de la siguiente manera:

///

- a) Se activan los electrodos de la manera habitual ya descripta.
- b) Se vacía y se lava la celda con la solución electrolítica previamente desoxigenada, por lo menos tres veces a fin de asegurar su composición y homogeneidad.
- c) S_c termostatiza la celda y se procede a su nivelación.
- d) Una vez asegurado el equilibrio térmico, se ajusta la tensión hasta 0,60 Volt y se cierra el interruptor en el instante de poner en marcha un cronómetro de doble aguja.
- e) Se mide la corriente en función del tiempo.
- f) Se homogeneiza la solución mediante el agitador de plástico y se repite la medición en la forma descripta en (d) y (e).

Resultados de las mediciones de difusividad

Experiencia previa

Se verificó la constante teórica de la celda, midiendo la difusividad del ión Ferricianuro en el sistema Ferricianuro-Ferrocianuro de potasio, hidróxido de sodio.

El resultado obtenido es concordante con el correspondiente de bibliografía (35) por lo cual se decidió utilizar el valor de la constante teórica al efectuar los cálculos.

Elaboración de los resultados

obtenidos en la celda de Cottrell

Se efectuó el promedio aritmético de $I^2 t$ obtenidos en cada corrida, y a partir de ese valor se calculó D mediante la ecuación 34.

Los valores de D se correlacionaron de manera empírica respecto de $\log v$ ya que la ley de Stokes-Einstein no es válida en soluciones que contienen macromoléculas, como en este caso (38).

La regresión por cuadrados mínimos dió la siguiente expresión (figura N° 7), con una desviación media de 1,7%.

$$D = [6,640 - 0,483 \log v] \times 10^{-6}$$

donde D en cm^2/seg

///

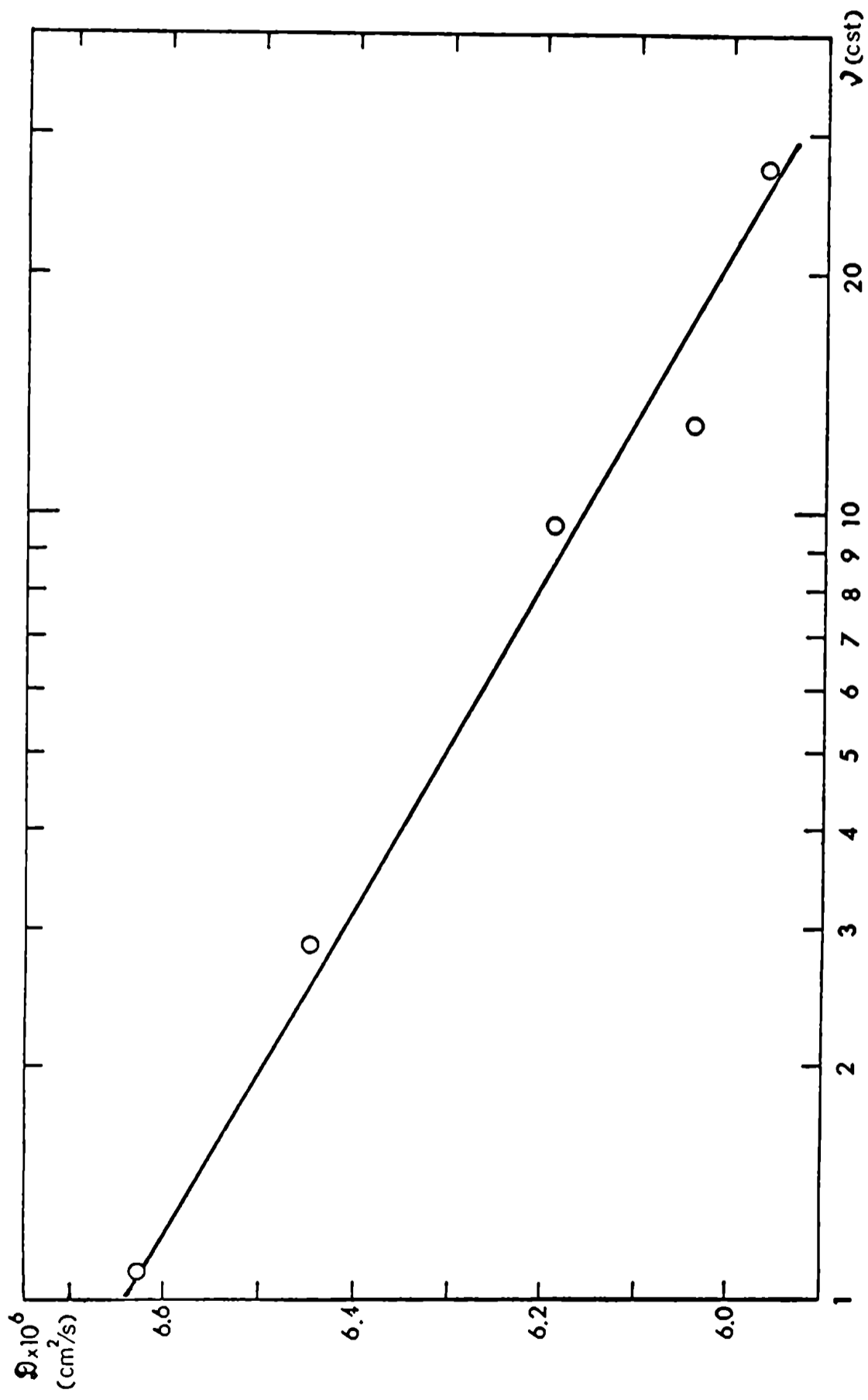


Figura 7 Difusividad del ion ferricianuro en funcion de la viscosidad cinematica en el sistema electroquimico desarrollado

y ν en cm^2/seg

Los datos experimentales correspondientes se encuentran tabulados en el Apéndice IV.

Elaboración de los resultados experimentales obtenidos con el plano oscilante.

Cálculo del número de Sherwood

Como la reducción catódica del ión Ferricianuro es cuantitativa y no hay descarga del electrolito soporte, el flujo molar sobre el electrodo está dado por:

$$J = \frac{i_d}{n^+ F}$$

Luego el coeficiente de transferencia k para el sistema Ferricianuro-Ferrocianuro para el cual $n^+ = 1$ será:

$$k = \frac{J}{\Delta c} = \frac{i_d}{F \Delta c}$$

Como la concentración de Ferricianuro sobre el electrodo polarizado es prácticamente nula, tendremos:

$$k = \frac{i_d}{F c_s}$$

Entonces, definiendo el número de Sherwood medio en base a la densidad de corriente media, este queda explícito por:

$$\overline{Sh} = \frac{k L}{D} = \frac{i_d L}{F c_s D}$$

Cálculo del número de Reynolds

Al adimensionalizar la ecuación diferencial (2) que describe la fluidodinámica del sistema, encontramos el grupo $\omega \Delta^2 / \nu$, sin embargo para simplificar la elaboración numérica se utilizó la ex-

///

presión:

$$\frac{f A^2}{\nu} = \frac{1}{2\pi} \frac{\omega A^2}{\nu} = Re$$

La cual solo difiere de la expresión adimensional hallada en el factor constante 2π

Resultados experimentales

Una vez puesto a punto el equipo y comprobada la correcta polarización de los electrodos, se efectuaron corridas variando la frecuencia de oscilación y en forma paramétrica la amplitud.

Se encontró de esta manera que la densidad de corriente es proporcional a la frecuencia elevada a un exponente de aproximadamente $\frac{1}{2}$, salvo a bajas frecuencias y amplitudes donde se observa una ostensible desviación (figura n° 8). Este efecto es debido a la aparición de la convección natural como mecanismo de transporte, que se torna predominante a muy bajas velocidades de transferencia de materia. Por esta causa la desviación es notable a pequeñas amplitudes y frecuencias.

De estas experiencias se deduce que el número de Sherwood (proporcional en este caso a la densidad de corriente, pues se mantiene la concentración de la solución y la longitud de electrodo constante) depende del número de Reynolds elevado a una potencia de aproximadamente $\frac{1}{2}$, cuando el mecanismo de transporte es predominantemente convectivo, debido al fenómeno oscilatorio.

Para determinar la influencia del adimensional L/A que interviene en la descripción del fenómeno, se continuó el trabajo experimental variando la longitud de transferencia, L .

Representando $\overline{Sh}/Re^{\frac{1}{2}}$ vs L/A con A como parámetro (figura n° 9) se encontró que el exponente de L/A es aproximadamente $\frac{1}{2}$. Sin embargo se observa una separación neta de los resultados según el valor de A . Este hecho indujo a buscar otra variable geométrica que interviniera en la fluidodinámica del sistema.

Como la principal diferencia del sistema experimental respecto del modelo teórico previamente planteado y del cual se dedujeron las agrupaciones adimensionales, es la longitud necesariamente finita del plano oscilante, se efectuaron experiencias reduciendo la distancia entre baffles, y se elaboraron los datos respecto de la longitud característica baffle-electrodo, llamada X .

Luego, para determinar el exponente del nuevo adimensional A/X , se representó $\overline{Sh}/Re^{\frac{1}{2}} (L/A)^{\frac{1}{2}}$ vs. A/X (figura n° 10) obteniéndose gráficamente el exponente aproximado $1/4$.

O sea, la correlación experimentalmente obtenida es de la forma:

$$\overline{Sh} = a Re^{\frac{1}{2}} \left(\frac{L}{A}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{A}{X}\right)^{1/4} Sc^e \quad ///$$

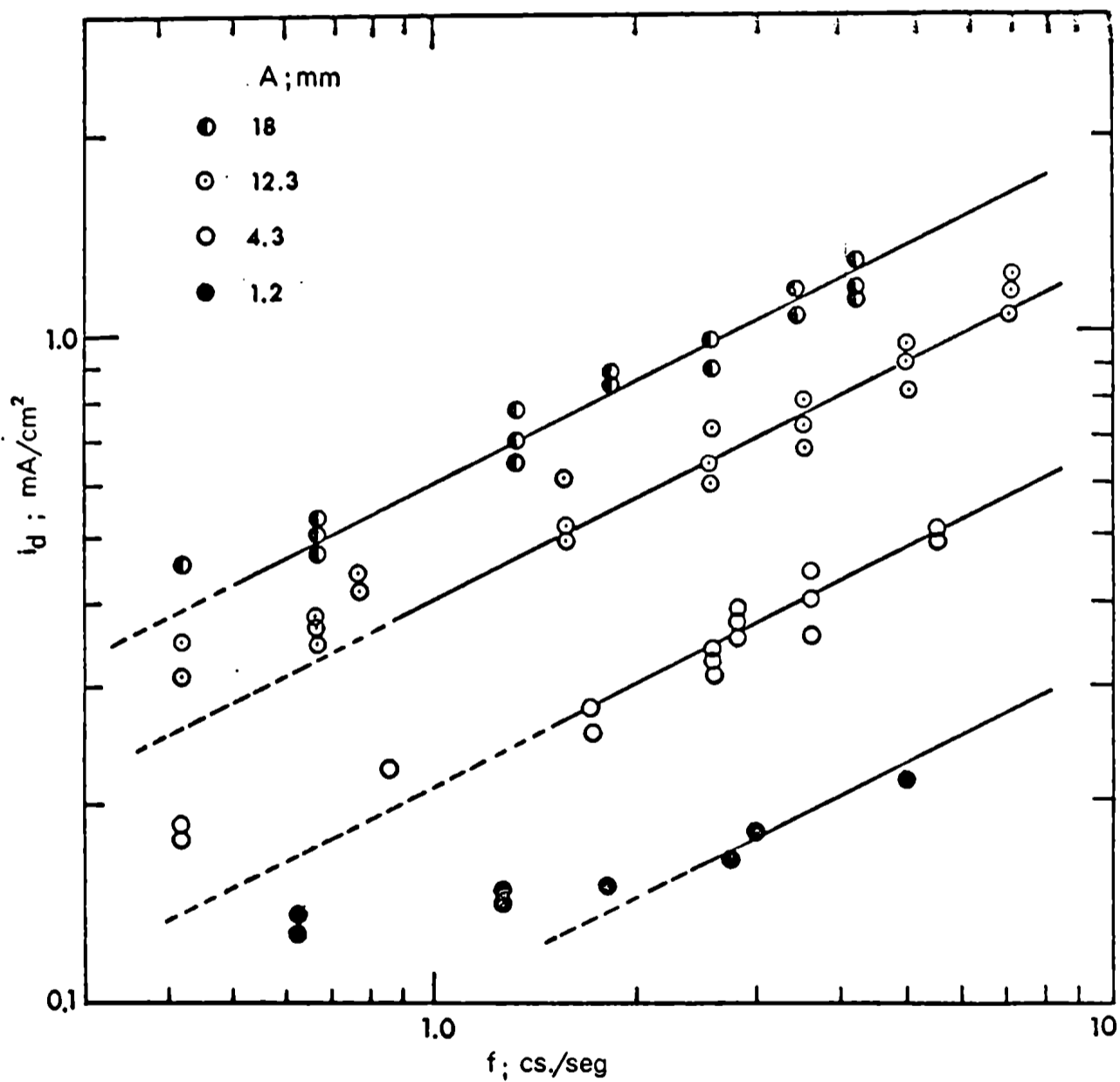


Figura 8

relación entre corriente límite y frecuencia para $L=1$

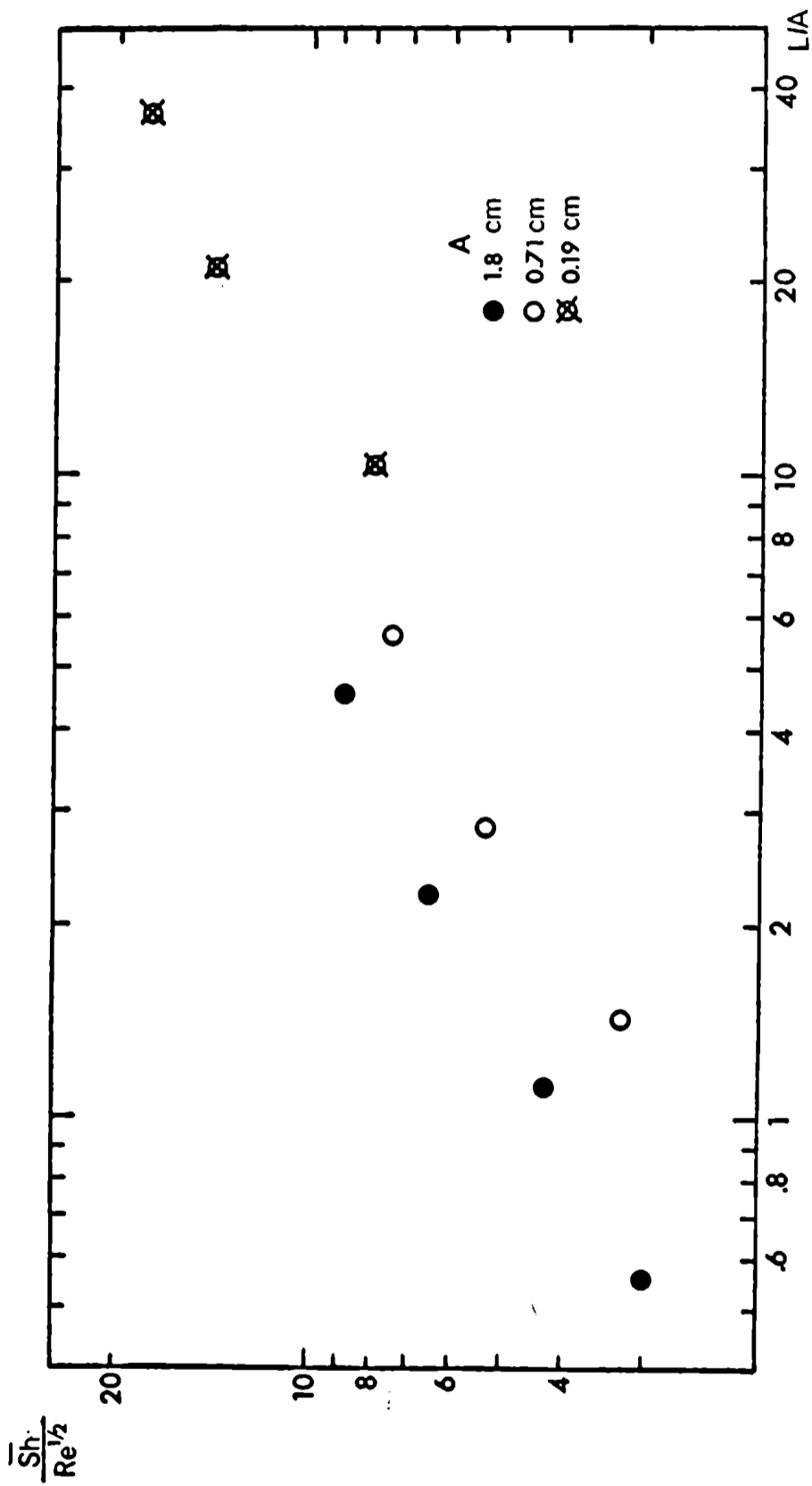


Figura 9

Determinación del exponente de L/A

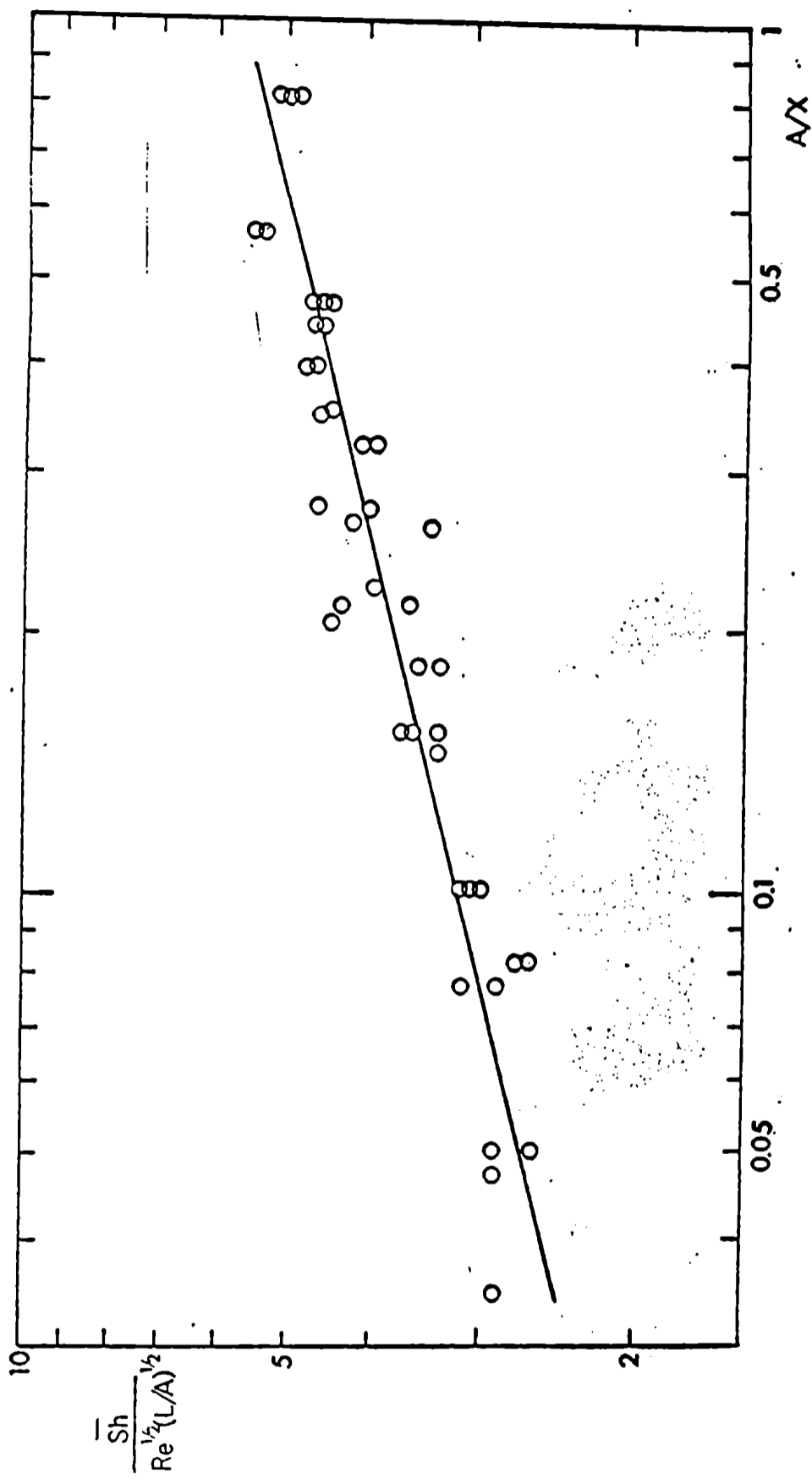


Figura 10

Determinación del exponente de A/X

Para determinar el exponente del número de Schmidt se realizaron además tres series de experiencias utilizando el sistema electroquímico desarrollado en este trabajo.

Todos los datos experimentales, que cubren los siguientes rangos de los adimensionales:

Re: 0,68 - 1920
L/A: 0,5 - 36,8
Sc: 2385 - 52.130
A/X: 0,0237 - 0,82

se correlacionaron mediante regresión múltiple según la ecuación:

$$\overline{Sh} = a Re^b \left(\frac{L}{A}\right)^c \left(\frac{A}{X}\right)^d Sc^e \quad (35)$$

Obteniéndose los siguientes coeficientes:

Error standard de los coeficientes

a: 0,653	
b: 0,496	0,0070
c: 0,527	0,0101
d: 0,245	0,0137
e: 0,278	0,0100

Con un error standard de 5,4 % para la correlación.

No se incluyeron en dicha correlación los datos experimentales afectados por convección natural y que corresponden a condiciones para las cuales $Re/Gr^{\frac{1}{2}} < 0,05$.

A fin de visualizar los resultados obtenidos, se representó el número de Sherwood medido experimentalmente versus el valor correspondiente del Sherwood dado por la ecuación (35)(figura n° 11).

Se verificó que la altura Z de la cámara de estudio no influye en la velocidad de transferencia, para lo cual se efectuó una serie de corridas con Z = 1,9 cm cuyo resultado se muestra en la figura n° 12.

Con el fin de obtener una expresión general que permita extrapolar el resultado experimental al caso del plano infinito, o sea cuando la variable X tiende a un valor muy grande, se hizo una regresión múltiple utilizándose para ello la agrupación adimensional arbitraria $1 + (A/X)$ en lugar de A/X, puesto que esta expresión tiende a 1 cuando la distancia entre los baffles es muy grande.

El resultado de esta regresión múltiple es la ecuación:

///

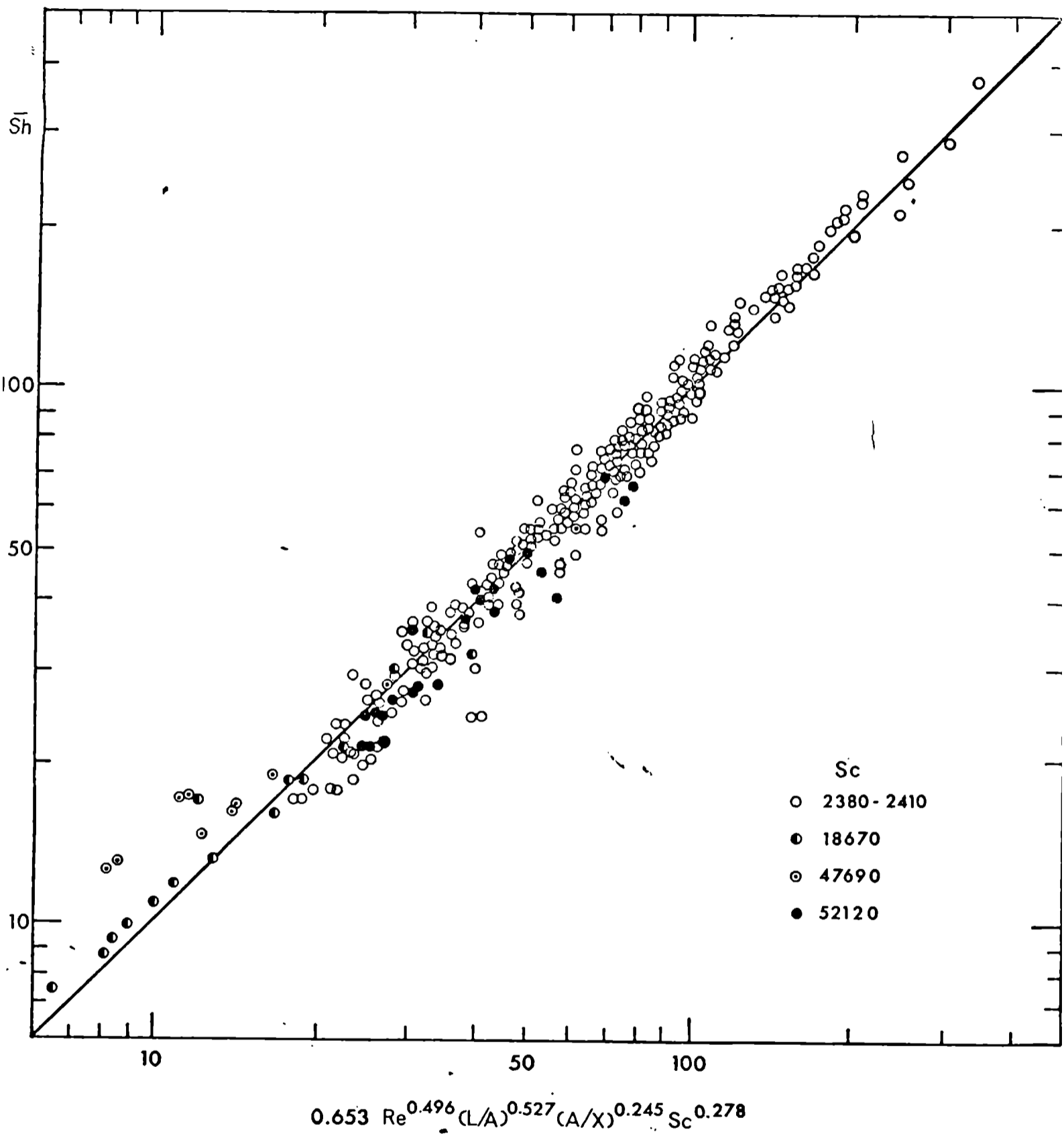


Figura 11

Representación de los valores experimentales de \bar{Sh} versus la correlación obtenida

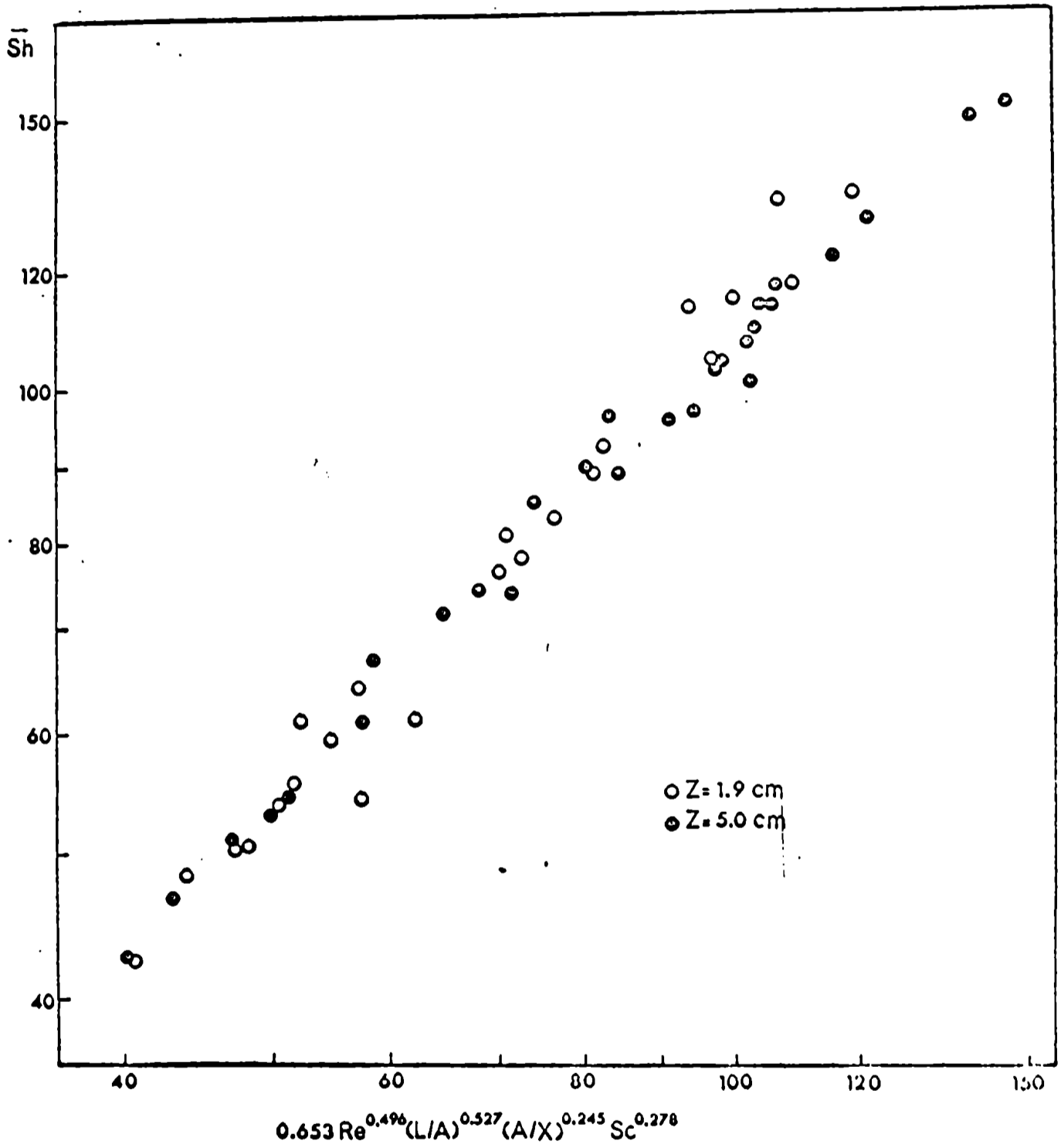


Figura 12

Verificación de que el \bar{Sh} no es función de Z

$$\bar{Sh} = a' Re^{b'} \left(\frac{L}{A}\right)^{c'} \left(1 + \frac{A}{X}\right)^{d'} So^{e'} \quad (36)$$

con los siguientes valores para los coeficientes:

error standard de los coeficientes

a':	0,279	
b':	0,525	0,0078
c':	0,487	0,0112
d':	1,027	0,0791
e':	0,292	0,0143

Con un error standard para la correlación del 6,2 %.

La totalidad de los datos obtenidos en el trabajo experimental se encuentran tabulados en el Apéndice V.

Comparación de los resultados obtenidos

Si expresamos la correlación experimental de Lombardi (25) obtenida midiendo la velocidad de sublimación de naftaleno y alcanfor en aire, en función de los adimensionales usados en este trabajo, ésta se transforma en:

$$\bar{Sh} = 0,82 \operatorname{Re}^{\frac{1}{2}} \left(\frac{L}{A}\right)^{\frac{1}{2}} Sc^{1/3} \quad \begin{array}{l} 2,6 < So < 4 \\ 0,25 < \frac{L}{A} < 2 \end{array}$$

Esta expresión es comparable a la obtenida en la solución numérica para $Sc = 10$, valor más bajo del número de Schmidt que se pudo usar, y $L/A = 1$ como valor promedio, siendo ésta:

$$\bar{Sh} = \text{constante} \operatorname{Re}^{\frac{1}{2}} \left(\frac{L}{A}\right)^{0,49} Sc^{0,35}$$

Al compararse estas dos ecuaciones, se comprueba que hay una buena concordancia entre los exponentes obtenidos por ambos métodos.

Cabe aclarar que, debido a la imposibilidad de una determinación experimental, el exponente $1/3$ del número de Schmidt fue propuesto por Lombardi en base a comparaciones con otros sistemas.

Por otra parte queda claro que dentro del error experimental, es justificable la asociación de los adimensionales Re y L/A en un único adimensional Re_p , utilizado por Lombardi y definido como:

$$Re_p = \frac{4 f L A}{\nu} = 4 \left(\frac{f A^2}{\nu}\right) \left(\frac{L}{A}\right) = 4 Re \left(\frac{L}{A}\right)$$

si bien no es correcto realizarlo a priori.

En un trabajo posterior, Krasuk y Lombardi (26) propusieron la correlación

$$\bar{Sh} = 1,66 \operatorname{Re}^{\frac{1}{2}} \left(\frac{L}{A}\right)^{5/6} Sc^{1/3}$$

obtenida teóricamente con la suposición de $L/A \ll 1$ y Sc próximo a 1.

Si bien no fue posible obtener la solución numérica que cumpliera con estas condiciones, la extrapolación de las curvas de la figura n° IV (y teniendo en cuenta la ecuación 31) sugiere que el exponente de L/A aumenta progresivamente tendiendo a 1 al hacer tender L/A a cero, resul

///

tado que estaría en principio de acuerdo con el obtenido con el modelo teórico de Krasuk y Lombardi.

En la parte experimental del presente trabajo se efectuaron las mediciones de transferencia de materia para valores de Sc muchísimo más altos que el usado por Lombardi (puesto que se usó un sistema sólido-líquido en lugar de sólido-gas), lo cual hace que en principio ambos resultados no sean comparables, según lo sugiere la solución numérica.

Además el sistema estudiado por Lombardi carecía de baffles, aproximándose la geometría del mismo a la del medio semiinfinito.

Los resultados experimentales del presente trabajo se correlacionaron de dos maneras distintas, teniendo la primera de las correlaciones una menor dispersión, siendo:

$$\bar{Sh} = 0,653 Re^{0,496} \left(\frac{L}{A}\right)^{0,527} \left(\frac{A}{X}\right)^{0,245} Sc^{0,278}$$

Si bien la presencia del adimensional A/X indica claramente que el sistema experimental se comporta de acuerdo a un modelo más complejo que el del medio semiinfinito usado en la solución numérica, es notable la coincidencia entre los exponentes del número de Reynolds obtenidos por ambos métodos. Por otra parte, al correlacionarse los datos experimentales de una manera más general, que permita su extrapolación para $X \rightarrow \infty$ (modelo semiinfinito), se obtuvo:

$$\bar{Sh} = 0,279 Re^{0,525} \left(\frac{L}{A}\right)^{0,487} Sc^{0,292} \left(1 + \frac{A}{X}\right)^{1,027}$$

Sin embargo en este caso tampoco es posible una comparación directa de los resultados experimentales y teóricos, dado que la correlación empírica fue obtenida a partir de datos que abarcan un amplio rango de los adimensionales L/A (0,5 - 36,8) y So (2385 - 52.130), y el análisis teórico, sólo pudo efectuarse para un rango limitado de L/A (0,5 - 2,0) y Sc (10 - 10^4).

Con fines comparativos se efectuó la regresión lineal de los datos experimentales con L/A comprendido entre 0,5 y 2,0, correspondientes a $Sc = 2415$ y para X grande (poco efecto de borde) según una ecuación del tipo

$$\bar{Sh} = k Re^{\frac{1}{2}} \left(\frac{L}{A}\right)^n$$

///

obteniéndose un valor de $n = 0,548$, el cual es concordante al resultado de la tabla nº 2.

Por otra parte, analizando los resultados experimentales obtenidos para $Sc = 2415$ y $Sc = 18.660$, con L/A constante y X grande, según una ecuación del tipo

$$\bar{Sh} = k' Re^{\frac{1}{2}} Sc^m$$

se encontró un valor de $m = 0,315$ cuando $L/A = 0,813$

$m = 0,399$ cuando $L/A = 1,41$

variación que está de acuerdo con los valores dados en la tabla nº 2.

De esta forma quedan verificados, dentro de lo posible, los resultados de la solución numérica.

Teniendo en cuenta los resultados del análisis teórico, que indica exponentes variables para Sc y L/A , según el rango de los mismos, se intentó correlacionar los datos experimentales según lo sugiere la ecuación 31, en la forma:

$$\bar{Sh}_{exp} = Re^{\frac{1}{2}} Sc^{\frac{1}{2}} \left(\frac{L}{A}\right) \phi_{exp} (L/A, Sc)$$

La figura nº 13 muestra los valores promedio de ϕ experimental en función de L/A para distintos valores de Sc , indicándose la varianza y variación de A/X correspondiente a cada valor de ϕ .

La línea punteada da la forma de ϕ teórico para $Sc = 2.400$.

Como era de esperar, la dispersión de los resultados es elevada, ya que la ecuación arriba formulada no tiene en cuenta el efecto de A/X .

Además no se observa un cambio notorio de la pendiente de la recta $\lg \phi$ vs. $\lg (L/A)$ para $L/A > 2$, que justifique una correlación de los datos para diversos rangos de dicho parámetro.

Merrill

M. B. S.

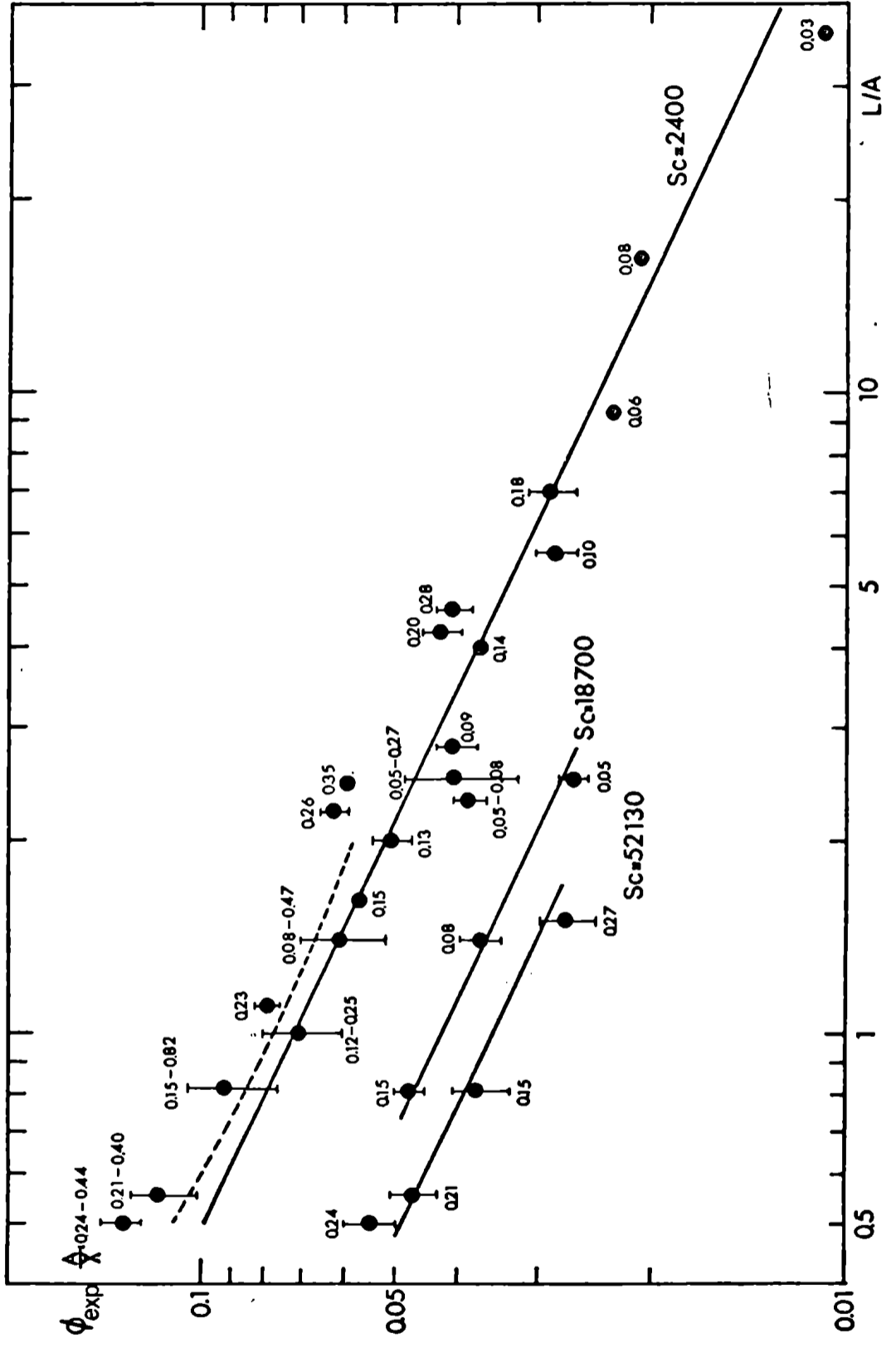


Figura 13 Comparación de ϕ teórico y experimental

Conclusiones

Los resultados teóricos y experimentales más importantes del presente trabajo pueden resumirse en las siguientes conclusiones:

- El análisis de las ecuaciones diferenciales que gobiernan el transporte de materia desde un plano que oscila en un medio semiinfinito indica que las únicas variables adimensionales que describen el fenómeno, son: Sh , Re , Sc y L/A .
- La solución numérica de la ecuación diferencial de transferencia de materia conduce a la relación funcional de dichas variables e indica que la misma varía según el rango de Sc y L/A .
- Estos resultados se han podido verificar en base a datos experimentales.
- Para poder interpretar los resultados experimentales obtenidos en el presente trabajo en un sistema finito, se hace necesario la introducción de un nuevo adimensional, (A/X) , que tiene en cuenta las dimensiones de dicho sistema de estudio.
- Los resultados experimentales indican que dentro del rango del número de Reynolds usado, el régimen es laminar. A muy bajas velocidades de transferencia de materia aparece la convección natural como mecanismo de transporte.
- Se presenta una correlación empírica, útil a los efectos de diseño, que describe la cinética de transferencia sólido-líquido desde un plano oscilante, dentro de un amplio rango de variación de los adimensionales involucrados.

Bibliografia

- (1) S.Bresznajder, L.Lesniewicz, W.Pasiuk Che. Stos 3 275 (1958)
- (2) E.Bradford Princenton University Ph. D.Thesis (1960)
- (3) R.Saint James, G.Graham Genie Xhimique 86 1 (1961)
- (4) J.Behmoiras, K.Brill, P.Krumholz I.E.C. Fundam. 1 64 (1952)
- (5) V.Konovalov, P.Romankov Journal of App. Chem. URSS 2105 (Oct. 1961)
- (6) L.Smoot, A.Babb I.E.C. Fundam. 1 2 (1962)
- (7) N.Kalashnikov, V.Cherniken Doklady Akad. Nauk URSS 119 735 (1958)
- (8) R.Anantarayanan, A.Ramachandran Trans. Amer. Soc. Mech. Engrs. 80 1426 (1958)
- (9) K.Sreevinasan, A.Ramachandran Int. J.Heat & Mass Transf. 3 60 (1961)
- (10) T.Shirotsuka, N.Honda, T.Oba Kagaku Kogaku 22 2 (1958)
- (11) J.Krasuk, J.M.Smith A.I.Ch. Eng. J. 60 759 (1964)
- (12) J.Krasuk, J.M.Smith Chem. Eng. Sci. 18 591 (1963)
- (13) R.Fand, J.Kaye J. Heat Transfer 84 3 245 (1962)
- (14) A.Bergles, P.Newell Int. J.Heat & Mass Transf. 8 1273 (1965)
- (15) R.Lemlich, M.Levy A.I.Ch. Eng. Journal 7 240 (1961)
- (16) T.Goh B.Sc. App. Thesis, University Queensland (1963)
- (17) I.Kniaht, D.Ratkovsky A.I.Ch. Eng. Journal 11 370 (1965)
- (18) G.Jameson Chem. Eng. Sci. 19 793 (1964)
- (19) K.Rao, G.J.Raju, C.V.Rao Trans. Indian Inst. Chem. Engrs. 5 100 (1963)
- (20) K.Rao, G.J.Raju, C.V.Rao Indian Journ. Tech. 3 38 (1965)
- (21) K.Rao, G.J.Raju, C.V.Rao Trans. Indian. Chem. Engrs. 7 59 (1965)
- (22) Y.Sugano, D.Ratkovsky Chem. Eng. Sci. 23 707 (1968)
- (23) V.Blankenship, J.A.Clark Journ. Heat Transf. 86 2 149 (1964)
- (24) V.Blankenship, J.A.Clark Journ. Heat Transf. 86 2 159 (1964)
- (25) J.L.Lombardi Tesis Doctoral F.C.E.yN. U.B.A (1965)
- (26) J.L.Lombardi, J.Krasuk Genie Chim. 98 10 1724 (1967)
- (27) H.Schlichting Boundary Layer Theory Mc. Graw-Hill 4th ed.
- (28) K.Vetter Electrochem. Kinetics Academic Pres N.Y 215 (1967)
- (29) C.Wilke, M.Eisenberg, C.Tobias J.Electrochem Soc. 100 513 (1953)
- (30) P.Grassmann, N.Ibl, J.Trub Chem. Ing. Tech. 33 529 (1961)
- (31) L.Reiss, T.Hanratty A.I.Ch. Eng. J. 8 245 (1962)
- (32) U.Böhm, N.Ibl, A.Frei Electrochim. Acta 11 421 (1966)
- (33) H.E.Lago, U.Böhm, Plachco Int. J.Heat & Mass Transf. 14 813 (1971)
- (34) U.Böhm, O.Mayo Anales Asoc. Quim. Arg. 58 225 (1970)
- (35) H.Eisenberg, C.Tobias, C.Wilke Journ. Electr. Soc. 103 413 (1956)
- (36) E.Bertorelle Tratt. di Galvanotecnica U. Hoepli p431 (1960)
- (37) Hogdman Handbook of Chem. and Phis. 45 ed.
- (38) A.Arvia, J.Bazan, J.Carrozza Electrochem Acta 13 81 (1968)

///

(39) M.Lago Tesis Doctoral F.C.E.yN. U.B.A. (1969)

(40) H.Nickley, T.Sherwood, C.Reed App. Math. in Chem. Eng.
No. Graw-Hill p 350 (1957)

Notación

- A : amplitud de oscilación; cm
- B : área efectiva del cilindro $(\pi d + 2H) M$; cm^2
- B' : superficie del cilindro $\pi d M$; cm^2
- C : concentración; moles/ cm^3
- C_s : concentración en la interfase sólido-fluido; moles/ cm^3
- C^{*} : concentración adimensional C/C_s
- d : diámetro del cilindro; cm
- D : difusividad de materia; cm^2/seg
- f : frecuencia de oscilación; seg^{-1}
- F : constante de Faraday = 96.500; Coulomb
- h : altura del capilar; cm
- H = 2A doble de la amplitud de oscilación; cm
- i : subíndice de fila de una matriz
- i_d : densidad de corriente límite; mA/cm^2
- I : intensidad de corriente; mA
- j : subíndice de columna de una matriz
- J : flujo de materia; $\text{mol}/\text{cm}^2 \text{seg}$
- k : coeficiente de transferencia de materia; cm/seg
- k' : coeficiente de transferencia de materia por convección natural; cm/seg
- \bar{k} : coeficiente medio de transferencia de materia para un ciclo; cm/seg
- L : longitud de la superficie transfiriente en la dirección de oscilación; cm
- m : número de columnas consecutivas con $C_{i,j}^* = 1$
- M : longitud del cilindro; cm
- \bar{M} : flujo medio de materia en un período; moles/seg
- n = $\tau/\Delta t$ número de divisiones efectuadas a un período

///

- n^+ : número de cargas transferidas en la reducción
- p : subíndice de la primera columna con $C_{1,p}^* = 1$
- p' : pérdida de carga en un tubo capilar; dina/cm²
- q : número de ciclos transcurridos desde que comenzó la transferencia de materia
- r : radio genérico del capilar; cm
- R : radio del capilar; cm
- $Re = f A^2 / \nu$: número de Reynolds usado en este trabajo
- $Re_p = \frac{4 f A L}{\nu}$: número de Reynolds para plano
- S : subíndice de la última fila de la matriz
- $Sc = \nu / D$: número de Schmidt
- $Sh = k L / D$: número de Sherwood
- $Sh_c = k d / D$: número de Sherwood para cilindros
- $\bar{Sh} = \bar{k} L / D$: número de Sherwood medio para un período
- t : tiempo; seg
- T : esfuerzo de corte viscoso; dina/cm²
- $U = \left(\frac{w}{2\nu}\right)^{\frac{1}{2}}$ altura adimensional
- v : velocidad; cm/seg
- w : materia transferida por un elemento de superficie; mol
- W : materia transferida por toda la superficie; mol
- x : coordenada paralela al plano en la dirección de la oscilación; cm
- X : longitud característica baffle electrodo; cm
- X' : trayectoria de un punto del fluido respecto al plano; cm
- X'_e : trayectoria de un punto del fluido respecto a ejes fijos; cm
- X'_i : trayectoria del plano respecto a ejes fijos; cm
- y : coordenada paralela al plano, perpendicular a la dirección de oscilación; cm
- z : coordenada perpendicular al plano; cm
- Z : altura de la celda de estudio; cm
- Δ : incremento de una variable

///

ϵ : diferencia relativa entre dos $\phi(q)$ sucesivos

$$\phi = \frac{1}{(2n)^{\frac{1}{2}} m} \sum_0^n \left(\sum_{j=p}^{p+m} \Delta C_{1,j}^* \right) \text{ adimensional}$$

ν : viscosidad cinemática; cm^2/seg

μ : viscosidad dinámica; g/cm seg

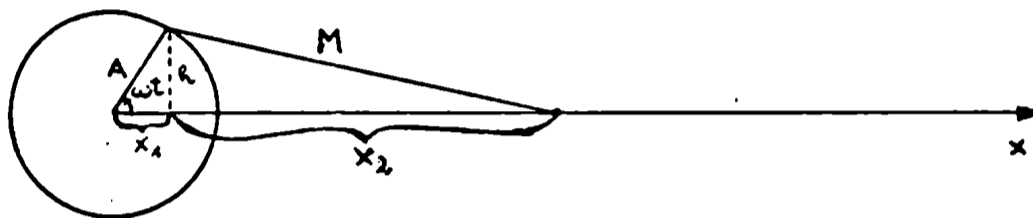
$\omega = 2\pi f$: pulsación de un movimiento oscilatorio; seg^{-1}

$\tau = 1/\omega$: período de una oscilación; seg

Apéndice I

Aproximación a un movimiento sinusoidal mediante un mecanismo de biela-manivela

Sea una biela de longitud M movida por una manivela de amplitud A . La posición del extremo de la biela estará dada por:



$$h = A \operatorname{sen} \omega t$$

$$x_1 = A \operatorname{cos} \omega t$$

$$x_2 = \sqrt{M^2 - h^2} = \sqrt{M^2 - A^2 \operatorname{sen}^2 \omega t} = A \sqrt{\left(\frac{M}{A}\right)^2 - \operatorname{sen}^2 \omega t}$$

$$x = x_1 + x_2 = A \left[\operatorname{cos} \omega t + \sqrt{\left(\frac{M}{A}\right)^2 - \operatorname{sen}^2 \omega t} \right]$$

La velocidad del extremo derecho de la biela será:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \omega A \left[-\operatorname{sen} \omega t - \frac{\operatorname{sen} \omega t \operatorname{cos} \omega t}{\sqrt{\left(\frac{M}{A}\right)^2 - \operatorname{sen}^2 \omega t}} \right]$$

para el caso en que $\left(\frac{M}{A}\right)^2 \gg 1$ podemos aproximar:

$$-v_x \approx \omega A \left[\operatorname{sen} \omega t + \frac{\operatorname{sen} \omega t \operatorname{cos} \omega t}{\frac{M}{A}} \right] = \omega A \left[\operatorname{sen} \omega t + \frac{A}{2M} \operatorname{sen} 2\omega t \right]$$

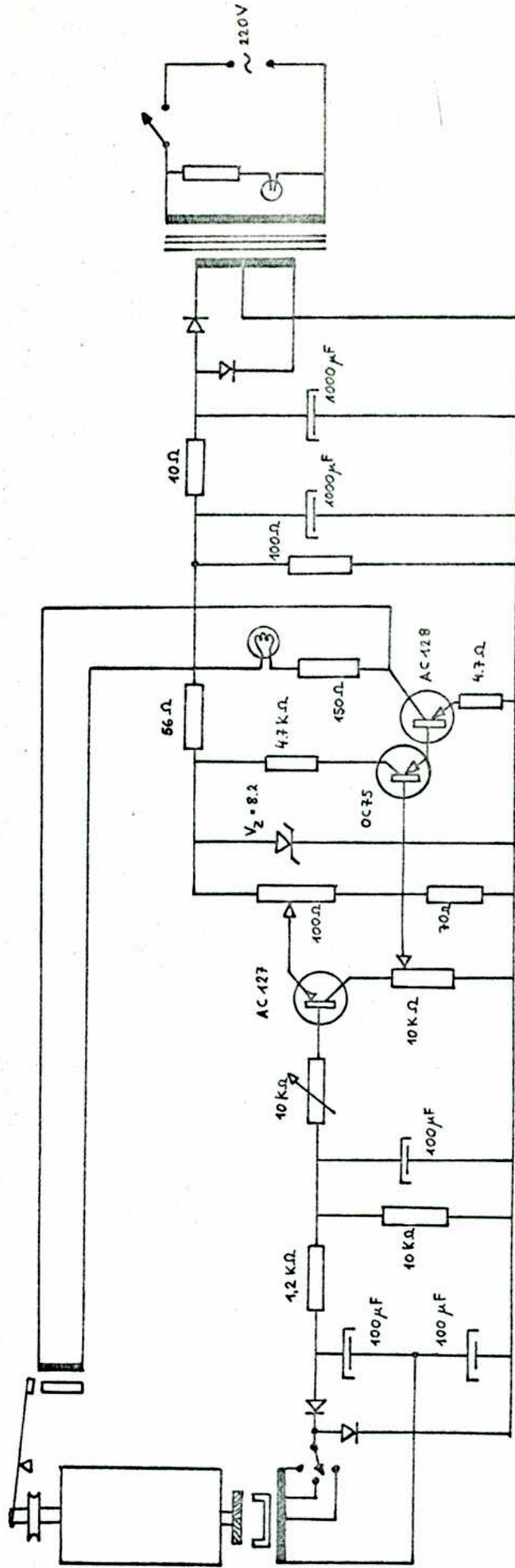
Para el caso experimental más desfavorable tenemos:

$$A = 2,0 \text{ cm}$$

$$M = 50 \text{ cm}$$

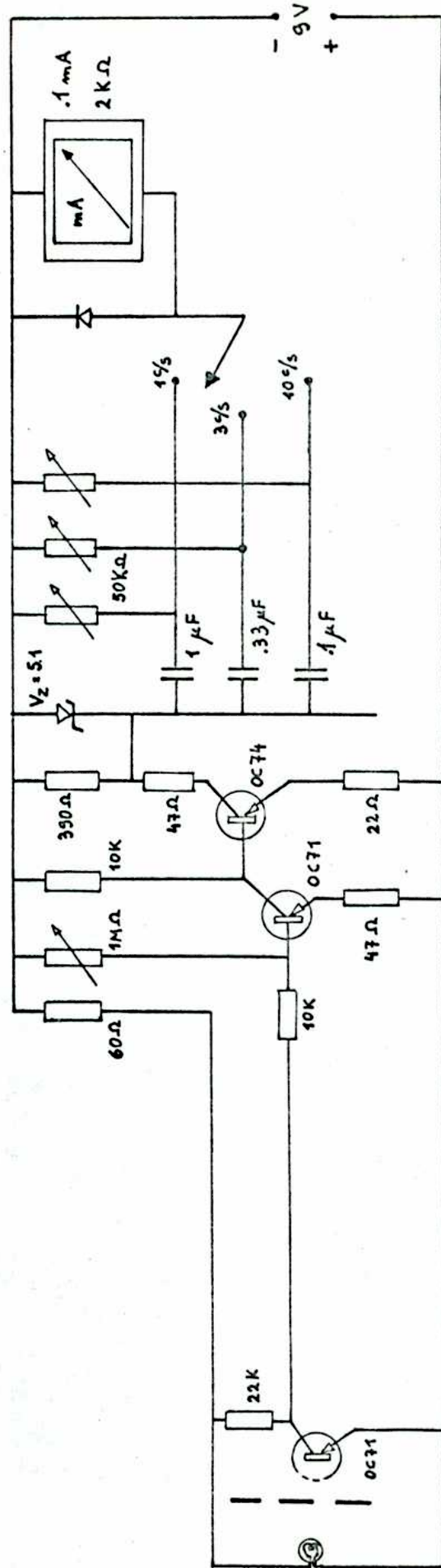
$$\text{Luego } -v_x = \omega A \left[\operatorname{sen} \omega t + 0,02 \operatorname{sen} 2\omega t \right]$$

es decir que el contenido de la armónica en nuestro sistema no supera el 2% de la velocidad fundamental. ///



Apéndice II

Esquema del controlador de frecuencia de oscilación utilizado



Apndice III

Circuito del frecuencimetro utilizado

Datos experimentales de la medición de difusividad

Conc. Ferrocianuro- Ferricianuro de potasio : 0,025 M

i^2t (mA) ² s	$\overline{i^2t}$ (mA) ² s	C. CMC g/100 g	$\nu \cdot 10^2$ cm ² /s	ρ g/cm ³	D.10 ⁶ cm ² /s
0,4750					
0,4755					
0,4697	0,4734	0	1,083	1,082	6,628
0,4635					
0,4596					
0,4584	0,4605	0,5	2,851	1,080	6,447
0,4468					
0,4329					
0,4365					
0,4219					
0,4327					
0,4270	0,4330	0,7	12,94	1,080	6,062
0,4221					
0,4369					
0,4266					
0,4173					
0,4274	0,4260	0,9	27,08	1,076	5,961
0,4559					
0,4502					
0,4434					
0,4275					
0,4317	0,4417	0,75	9,616	1,076	6,184
0,4749					
0,4750					
0,4661	0,4720	0	1,083	1,081	6,615

Programa Fortran de la solución numerica

DOS FORTRAN IV 360N-FO-479 3-1

MAINPGM

DATE 03/05/72

```

C      M.TERRIZZANO DEPTO. INDUSTRIAS
0001  DIMENSION C(40,120)
0002  READ (1,10) A,DIV,E,L,M,N,IP,LIM
0003  10  FORMAT (3F10.0,5I10)
0004  WRITE (3,10) A,DIV,E,L,M,N,IP,LIM
0005  DALFA = 6.283185/DIV
0006  LA = N-2
0007  20  K = (M-L)/2
0008  LU=K+1
0009  LUN=K+L
0010  D=L
0011  SC=1
0012  30  DU = SQRT(DALFA/SC)
0013  WRITE(3,251)L,SC
0014  251 FORMAT (I20,F15.5)
0015  SIGMA = 1000000.
0016  DO 40 I=1,N
0017  DO 40 J=1,M
0018  40  C(I,J)=0
0019  50  ALFA=0
0020  SUM=0
0021  60  ALFA = ALFA + DALFA
0022  DO 90 J=LU,LUN
0023  90  C(1,J)=1
0024  DO 100 J=1,M
0025  BE = 0.5 * (C(1,J) + C(2,J))
0026  DO 100 I =1,LA
0027  BA = 0.5 * (C(I,J)+C(I+2,J))
0028  C(I,J)= BE
0029  100 BE = BA
0030  SU = 0
0031  DO 120 J=LU,LUN
0032  120 SU = SU+C(2,J)
0033  SUM = D - SU + SUM
0034  I = 2
0035  130 H = I
0036  U = DU * (H-1.)
0037  X = A * ((EXP(-U) * SIN(ALFA - U)) - SIN(ALFA))
0038  IF(X)131,132,133
0039  131 X = X - 0.5
0040  GO TO 132
0041  133 X = X + 0.5
0042  132 MA = X
0043  IF (MA)141,142,143
0044  141 MAM=M+MA
0045  DO 600 J=1,MAM
0046  600 C(I,J)=C(I,J-MA)
0047  GO TO 142
0048  143 MAS=M-MA
0049  DO 700 LL=1,MAS
0050  J=M-LL+1
0051  700 C(I,J)=C(I,J-MA)
0052  142 IF (I-N+1) 161,162,162
0053  161 I = I+1
0054  GO TO 130
0055  162 IF (ALFA-6.283) 60,166,166
0056  166 EPSI= (SIGMA-SUM)/SUM
0057  WRITE(3,250)SUM,EPSI
0058  250 FORMAT (F15.5)
0059  IF (EPSI-E) 170,170,171
0060  171 SIGMA = SUM
0061  GO TO 50
0062  170 MID = M-K
0063  WRITE(3,201) ((C(I,J),I=1,N),J=1,MID,IP)
0064  201 FORMAT (10E12.4)
0065  SC = 10. * SC
0066  IF (SC-10000.) 30,30,202
0067  202 L = 2 * L
0068  IF (L-LIM) 20,20,203
0069  203 STOP
0070  END
    
```

Resultados obtenidos con la computadora

$\epsilon = 0,02$

Dimension	n	m	Sc	L/A	$\Sigma_{0,02}$	ϕ
40 102	10	12	100	1	18,11	0,337
40 102	10	12	1000	1	12,21	0,227
40 102	10	6	1000	0,5	8,73	0,325
30 136	12	9	100	0,5	24,42	0,554
50 134	12	9	1000	0,5	14,54	0,329
50 134	12	18	1000	1	20,33	0,231
50 134	12	36	1000	2	30,62	0,174
40 174	12	6	100	0,5	16,62	0,565
40 174	12	12	100	1	22,63	0,385
40 174	12	24	100	2	30,65	0,261
40 174	12	48	100	4	44,40	0,188
60 134	12	6	10000	0,25	8,74	0,297
60 134	12	12	10000	0,5	12,55	0,213
60 134	12	24	10000	1	19,39	0,165
60 134	12	48	10000	2	32,66	0,139
40 198	12	6	10	0,5	23,91	0,813
40 198	12	12	10	1	34,53	0,588
40 198	12	24	10	2	46,32	0,394
40 102	10	12	1000	0,5	17,41	0,324