Sobre soluciones elementales causales de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales con coeficientes constantes

Trione, Susana Elena

1972

Tesis presentada para obtener el grado de Doctor en Ciencias Matemáticas de la Universidad de Buenos Aires

Sobre soluciones elementales causales de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales con coeficientes constantes

SUSANA ELENA TRIONE

UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES

FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES

FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

SOBRE SOLUCIONES ELEMENTALES CAUSALES DE ECUACIONES DIFERENCIALES EN DERIVADAS PARCIALES CON COEFICIENTES CONSTANTES

TESIS

de

SUSANA ELENA TRIONE

PARA OPTAR AL GRADO DE DOCTOR EN MATEMATICA

1972

Este trabajo está dedicado a mi Maestro, el Doctor ALBERTO GONZALEZ DOMINGUEZ, como pequeñísimo agradecimiento a su enseñanza, a su guía y a su total dedicación que me han permitido llevarlo a término.

Agradezco a la señorita dactilógrafa
MARIA ANGELICA TANCREDI su esmeradísimo trabajo.

INDICE

Enunciado de resultados obtenidos

Una clásica fórmula de Böchner expresa la transformada de Fourier n-dimensional de una función radial integrable por medio de una integral unidimensional de Hankel (cf. Apéndice I, Teorema 21). Esta fórmula de Böchner ha sido generalizada por González Domínguez al caso de distribuciones temperadas invariantes por rotación (cf. Apendice I, Teorema 26). En el capítulo I de esta tesis obtenemos (Teorema 2) una generalización de esta versión distribucional de la fórmula de Böchner a cierto tipo de distribuciones causales y anticausales.

En la demostración de este teorema interviene una fórmula que permite calcular más simplemente la transformada de Fourier de distribuciones causales (anticausales) de la forma

$$T(P \pm i\, 0,\lambda) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu(\lambda)\ (P \pm i\, 0)^{\lambda+\nu},$$

(donde $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} a_\nu(\lambda)\ z^\nu$ es función entera de las variables z,λ) por medio de las correspondientes distribuciones invariantes por rotación. Esta fórmula es la siguiente (cf. Toerema I, fórmula (I,1;13)

$$\left\{T(P \pm i\, 0,\lambda)\right\}^{\Lambda} = e^{\mp \frac{\pi}{2} qi} \left\{T(|x|^2,\lambda)\right\}^{\Lambda}_{|y|^2 \to Q \mp i\, 0}$$

En el capítulo I figura también una fórmula que expresa la transformada de Fourier de las distribuciones de la forma $T(P \pm i\,0,\lambda)$ como un producto escalar (Teorema 3, y fórmula (I,2;2). Concluye ese capítulo con dos ejemplos de aplicación del Teorema 1: el cálculo de la transformada de Fourier de $T(P \pm i\,0,\lambda)$ en el caso tetradimensional con lo que se obtiene una versión correcta de la llamada fórmula de reducción de Feinberg y Pais (cf. fórmula (I,3;4)); y el cálculo de la transformada de Fourier de la distribución $G_\alpha(P + i\,0,m,n)$ (cf. fórmula (I,4;5)).

El capítulo II empieza (cf. Teoremas 6, 7, 8, 9 y 10) con teoremas referentes a productos de distribuciones de la forma

$$\lg^r(m^2 + Q \pm i\,0) \quad \lg^s(m^2 + Q \pm i\,0),$$

$$(m^2 + Q \pm i\,0)^\lambda \quad (m^2 + Q \pm i\,0)^\mu,$$

$$\left\{(m^2 + Q \pm i\,0)^\lambda \lg^r(m^2 + Q \pm i\,0)\right\}.$$

$$.\left\{(m^2 + Q \pm i\,0)^\mu \lg^s(m^2 + Q \pm i\,0)\right\}.$$

$$(Q \pm i\,0)^\lambda \quad (Q \pm i\,0)^\mu,$$

$$\left\{(Q \pm i\,0)^\lambda \lg^r(Q \pm i\,0)\right\}.\left\{(Q \pm i\,0)^\mu \lg^s(Q \pm i\,0)\right\}.$$

A continuación se dan teoremas referentes al núcleo

$G_\alpha(P \pm i\,0,m,n)$, que generalizan teoremas relativos al núcleo radial de Aronszjajn-Smith, a saber:

$$\left\{G_\alpha * G_{-2\ell}\right\}^\wedge = (2\pi)^{\frac{n}{2}} \left\{G_\alpha\right\}^\wedge \cdot \left\{G_{-2\ell}\right\}. \quad \text{(cf. Teorema 11);}$$

$$G_\alpha * G_{-2\ell} = G_{\alpha-2\ell} \quad \text{(cf. Teorema 12);}$$

$G_{-2\ell} = K^\ell \delta$ (cf. fórmula (II,5;4) donde K^ℓ denota el operador generalizado de Klein-Gordon iterado ℓ-veces;

$G_0 = \delta$ (cf. fórmula (II,5;5));

$K^k G_{2k} = \delta$ (cf. Teorema 13). Hacemos notar que en el caso particular $n = 4$, $k = 1$, $q = 1$, la distribución $G_{2k}(P \pm i\,0,m,n,q)$ coincide con la llamada "función mágica" o propagador causal de Feynman (cf. fórmulas (II,6;4) y (II,6;5)).

Se consideran a continuación las distribuciones $H_\alpha(P \pm i\,0,n)$ (cf. fórmula (II,7;1)) que constituyen generalizaciones causales (anticausales) del núcleo (elíptico) de Marcel Riesz; obteniéndose teoremas que generalizan teoremas conocidos referentes a este núcleo; cf. Teoremas 14, 15 y 16.

A continuación se registran (fórmulas (II,8;4) y (II,8;5)) las distribuciones $H_\alpha(P \pm i\,0,n)$ en el caso $n = 4$, $k = 1$; $H_2(P + i\,0,4)$ coincide con la llamada delta "fotónica" de Feynman.

Se muestra a continuación (Teorema 17) que las funciones distribucionales pf. $H_{2k}(P \pm i\,0,n)$ son soluciones elementales (causales, anticausales), para todo k, del operador L^k.

Se concluye el capítulo II señalando el hecho curioso de que, si se expresa la medida δ por medio de la fórmula (II,10:1) se obtiene $\delta^2 = 0$.

El capítulo III trata de una generalización del siguiente par de fórmulas recíprocas de Källen:

$$h(s) = \int_0^\infty \bar{\Delta}(s,t)\, f(t)\,dt \quad \text{y}$$

$$f(t) = 16\,\pi^2 \int_0^\infty \bar{\Delta}(t,s)\, h(s)\,ds,$$

donde $\bar{\Delta}(t,s)$ viene dada por la fórmula (III,1;2).

Demostramos nosotros que, si se cumplen ciertas condiciones, valen las fórmulas (cf. Teorema 20 y fórmula (III,3:2))

$$f(t) = \pi^{n-2}\, 2^{2k+n-2} \{(k-1)!\}^2 \int_0^\infty \bar{\Delta}(t,s)\, h(s)\,ds.$$

$$h(s) = \int_0^\infty \bar{\Delta}(s,t)\, f(t)\,dt.$$

Si se pone en estas fórmulas $n = 4$, $k = 1$, se obtienen las fórmulas de Källen recién consignadas.

El trabajo finaliza con dos apéndices; el primero es parte de un trabajo (inédito) de Alberto González Domínguez intitulado "Generalización de una fórmula de Böchner"; en el segundo se obtiene una fórmula de representación de la solución elemental simétrica del operador de Klein-Gordon iterado k-veces, (cf. Teorema 27); esta fórmula es el punto de partida para la generalización de las fórmulas de Källen, que demostramos en el capítulo III.

Julio 1972.

CAPITULO I

Una versión causal del Teorema de Bochner distribucional

1) Sea x un punto de $\mathbb{R}^n$, de coordenadas $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Con $P = P(x)$ designaremos una forma cuadrática de n variables, no degenerada, de la siguiente forma:

$$P = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - x_{p+2}^2 - \ldots - x_{p+q}^2. \tag{I,1;1}$$

Tenemos pues $n = p + q$; p es el número de cuadrados positivos de P, y q es el número de cuadrados negativos. Con $|x|^2$ designaremos la forma cuadrática

$|x|^2 = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2$.

Consideremos la forma cuadrática de coeficientes complejos ($\epsilon > 0$)

$$^{\pm}(x,\epsilon) \triangleq P(x) \pm i\,\epsilon\,|x|^2 .$$

Sea λ un número complejo arbitrario.

Escribiremos

$$(P \pm i\,0)^{\lambda} \triangleq \lim_{\epsilon \to 0} (\,^{\pm}(x,\epsilon))^{\lambda} . \tag{I,1;2}$$

Se demuestra (cfr. [1], p 275) que el límite de las distribuciones que figuran en el segundo miembro existe efectivamente. Se demuestra además que las distribuciones $(P \pm i0)^{\lambda}$ son funciones distribucionales holomorfas de λ, salvo en los puntos $\lambda = -\frac{n}{2} - k$, con $k = 0, 1, 2, \ldots$, donde estas dos funciones distribucionales tienen polos simples. También han calculado Gelfand-Shilov [illegible]sformadas de Fourier de las distribuciones $(P \pm i\,0)^{\lambda}$, [illegible] saber (cfr. [1], pp. 284 y 285)

$$\left\{(P \pm i\,0)^{\lambda}\right\}^{\wedge} = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle x, y\rangle} (P \pm i\,0)^{\lambda}\, dx =$$

$$= \frac{e^{\mp\frac{1}{2}\pi q i}\; 2^{2\lambda+n}\; \pi^{\frac{n}{2}}\; \Gamma(\lambda + \frac{n}{2})}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}\; \Gamma(-\lambda)} (Q \mp i\,0)^{-\lambda-\frac{n}{2}}. \qquad (I,1;3)$$

En esta fórmula hemos puesto

$$Q \triangleq y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_p^2 - y_{p+1}^2 - y_{p+2}^2 - \ldots - y_{p+q}^2 .$$

Sea $f(z, \lambda)$, $z \in \mathbb{C}$, una función entera de las variables

$$f(z, \lambda) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\nu}(\lambda) z^{\lambda}. \qquad (I,1;4)$$

Consideraremos la familia de distribuciones de la forma (cfr. [1], p. 285)

$$T(P \pm i\,0, \lambda) \triangleq (P \pm i\,0)^{\lambda} f(P \pm i\,0, \lambda) \triangleq$$

$$\triangleq (P \pm i\,0)^{\lambda} \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\nu}(\lambda)\, (P \pm i\,0)^{\nu}. \qquad (I,1;5)$$

Consideraremos también las distribuciones invariantes por rotación definidas por la fórmula

$$T(|x|^2, \lambda) = (|x|^2)^\lambda \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu(\lambda) \; |x|^{2\nu} . \tag{I,1;6}$$

Vamos a aplicar la transformación de Fourier a ambos miembros de la fórmula (I,1;5):

$$\left\{T(P \pm i\,0,\lambda)\right\}^\Lambda = \left\{(P \pm i\,0)^\lambda \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu(\lambda) \; (P \pm i\,0)^\nu\right\}^\Lambda . \tag{I,1;7}$$

Como no hemos supuesto que T sea temperada, las transformadas de Fourier que aparecen en la fórmula que precede las consideraremos en el sentido de Gelfand (cfr. [1], p. 190). Comprobaremos que en el segundo miembro de (I,1;7) se puede integrar término a término; es decir, que vale la fórmula

$$\left\{(P \pm i\,0)^\lambda \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu(\lambda) \; (P \pm i\,0)^\nu\right\}^\Lambda =$$

$$= \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu(\lambda) \left\{(P \pm i\,0)^{\lambda+\nu}\right\}^\Lambda . \tag{I,1;8}$$

Para probar que esta fórmula es efectivamente válida procederemos como sigue.

Admitamos provisionalmente que en la fórmula que precede el parámetro λ satisface a la condición $\operatorname{Re} \lambda > -1$. En tal hipótesis, todos los términos de la sucesión $(n = 0,1,\ldots)$

$$\{g_n\} \triangleq \left\{(P \pm i\,0)^{\lambda} \sum_{\nu=0}^{n} a_{\nu}(\lambda)(P \pm i\,0)^{\nu}\right\} \qquad (I,1;9)$$

son funciones localmente integrables; y en virtud de ser, por hipótesis, entera la función $f(z,\lambda)$, se concluye que la sucesión (I,1 [illegible] converge uniformemente en todo compacto $K \subset R^n$.

De esto concluimos, por aplicación de un conocido criterio de Schwartz (cfr. [2], p. 76, Theoreme XVI) que la sucesión $\{g_n\}$ de distribuciones, es convergente en D'. Este hecho, en conjunción con la continuidad de la transformación de Fourier, lleva aparejado que la fórmula (I,1;8) es efectivamente válida (en el caso de que sea Re $\lambda > -1$).

Concluimos por lo tanto, como consecuencia de la (I.1;3), y la (I,1;8) que, para Re $\lambda > -1$ es válida la fórmula

$$\left\{T(P \pm i\,0,\lambda)\right\}^{\Lambda}$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\, e^{\mp\frac{\pi}{2}qi}\; 2^{2\lambda+\nu}\; \pi^{\frac{n}{2}} \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\nu}(\lambda)\; 2^{2\nu}\, \frac{\Gamma(\lambda+\nu+\frac{n}{2})}{\Gamma(-\lambda-\nu)}\,.$$

$$(Q \mp i\,0)^{-\lambda-\nu-\frac{n}{2}} \qquad (I,1;10)$$

La validez de esta fórmula para otros valores de λ se justifica apelando a la prolongación analítica.

Procediendo de manera completamente análoga con la distribución (I,1;6) llegamos a la fórmula

$$\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \quad 2^{2\lambda+\nu} \pi^{\frac{n}{2}} \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu(\lambda) \; 2^{2\nu} \frac{\Gamma(\lambda+\nu+\frac{n}{2})}{\Gamma(-\lambda-\nu)} \left[|y|^2\right]^{-\lambda-\nu-\frac{n}{2}}_{\cdot}$$

(I,1;11)

ra llegar a este resultado hemos utilizado la fórmula fr. [1], p. 194, fórmula (2))

$$x|^\lambda\Big\}^\wedge = \frac{2^{\lambda+n}\pi^{\frac{n}{2}}}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \; \frac{\Gamma(\frac{\lambda+n}{2})}{\Gamma(-\frac{\lambda}{2})} \; |y|^{-\lambda-n}, \qquad \text{(I,1;11')}$$

e es válida para todo λ salvo para $\lambda = -n, -n-2, \ldots,$ nde $|x|^\lambda$ tiene polos simples.

la comparación de (I,1;10) y (I,1;11) concluimos que válida la fórmula

$$(P \pm i\, 0,\lambda)\Big\}^\wedge = e^{\mp\frac{\pi}{2}qi} \left\{T\left[|x|^2,\lambda\right]\right\}^\wedge_{\;|y|^2 \to Q \mp i\, 0} . \qquad \text{(I,1;12)}$$

n el simbolismo adoptado en el segundo miembro significa s que primero debe calcularse la transformada de Fourier $T\left[|x|^2, \lambda\right]$, y en la fórmula obtenida (que es también stribución radial) debe reemplazarse $|y|^2$ por $Q \mp i\, 0$.

fórmula (I,1;12) vale, naturalmente, en el caso partilar en que $T(P \pm i\, 0,\lambda)$ sea temperada. Hemos, pues, destrado la proposición a continuación consignada, en cu- enunciado utilizamos las notaciones introducidas en lo e antecede.

Teorema 1

Hipótesis

Las distribuciones $T(P \pm i\ 0,\lambda)$ son temperadas.

Tesis

Vale la fórmula

$$\Big\{T(P \pm i\ 0,\lambda)\Big\}^{\Lambda} = e^{\mp\frac{\pi}{2}\alpha i}\ \left.\Big\{ T\Big[|x|^2,\lambda\Big]\Big\}^{\Lambda}\right|_{|y|^2 \to 0 \mp i} \qquad (I,1;13)$$

Observemos ahora que la distribucióntemperada $T\Big[|x|^2,\lambda\Big]$ es invariante por rotación. Por lo tanto su transformada de Fourier puede calcularse por medio de la fórmula de Böchner distribucional (cfr. fórmula (A,11) del Apéndice). O sea, que vale la fórmula

$$\Big\{T\Big[|x|^2,\lambda\Big]\Big\}^{\Lambda} = \Big\{\tilde{T}\Big[|x|^2,\lambda\Big]\Big\}. \qquad (I,1;14)$$

De las fórmulas (I,1;13) y (I,1;14) concluimos inmediata mente que vale el siguiente teorema, que es el resultado principal de este capítulo.

Teorema 2

Hipótesis

a) Sea $f(z,\lambda)$ función entera de las variables z,λ.

b) $T(P \pm i\ 0,\lambda) = (P \pm i\ 0)^{\lambda}\ f(P \pm i\ 0,\lambda)\ \varepsilon\ S'$.

Tesis

Vale la fórmula

$$\left\{T(P \pm i\,0,\lambda)\right\}^{\wedge} \qquad \left\{T\left[|x|^2,\lambda\right]\right\}^{\wedge}_{|y|^2 \to Q \mp i\,0} . \qquad (I,1;15)$$

Registraremos ahora un caso particular del Teorema 2 cuya utilidad comprobaremos muy pronto.

Supongamos que la transformada de Fourier de la distribución radial $T\left[|x|^2,\lambda\right]$ admita la representación

$$\left\{T\left[|x|^2\lambda\right]\right\}^{\wedge} = \frac{1}{(2\Pi)^{\frac{n}{2}}} \langle T\left[|x|^2,\lambda\right],\ e^{-i\langle x,y\rangle} \rangle . \qquad (I,2;1)$$

Se comprueba sin dificultad, apelando a la fórmula de cambio de variable en distribuciones (cfr. [3], p. 102), que la fórmula (I,2;1) puede escribirse, equivalentemente, en la forma (cfr. fórmula (A,15))

$$\left\{T\left[|x|^2,\lambda\right]\right\}^{\wedge} = \frac{1}{2} \langle T(t,\lambda),\ t^{\frac{n-2}{2}} R_{\frac{n-2}{2}}\left[\sqrt{t|y|^2}\right]\rangle . \qquad (I,2;2)$$

De (I,1;15) y (I,2;2) obtenemos inmediatamente el siguiente

<u>Teorema 3</u>

<u>Hipótesis</u>

a) La misma que la a) del Teorema 2.

b) La misma que la b) del Teorema 2.

c) Vale la fórmula (I,2;2).

<u>Tesis</u>

Vale la fórmula

$$\left\{T(P \pm i\,0,\lambda)\right\}^{\wedge} = \frac{1}{2}\, e^{\mp\frac{\Pi}{2}qi} \langle T(t,\lambda), t^{\frac{n-2}{2}} R_{\frac{n-2}{2}}\left[\sqrt{t(Q \mp i\,0)}\right]\rangle .$$

$$(I,2;3)$$

Particular interés tienen los dos teoremas anteriores en

partic[illegible]

<u>Teorema 4</u>

<u>Hipótesis</u>

a) $P = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_{n-1}^2 - x_n^2$.

b) La misma que la b) del Teorema 2.

c) La misma que la c) del Teorema 2.

<u>Tesis</u>

Vale la fórmula

$$\left\{T(P \pm i\,0,\lambda)\right\}^{\wedge} = e^{\mp\frac{\pi}{2}i} \left\{T\left(|x|^2,\lambda\right)\right\}^{\wedge}_{|y|^2 \to Q \mp i\,0} \qquad (I,2;4)$$

<u>Teorema 5</u>

<u>Hipótesis</u>

a) $P = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_{n-1}^2 - x_n^2$.

b) Vale la fórmula (I,2;2)

<u>Tesis</u>

Vale la fórmula

$$\left\{T(P \pm i\,0,\lambda)\right\}^{\wedge} = \frac{1}{2}\, e^{\mp\frac{\pi}{2}i} \left\langle \ldots(t,\lambda), t^{\frac{n-2}{2}} R_{\frac{n-2}{2}}\left(\sqrt{t(Q \mp i\,0)}\right)\right\rangle .$$

(I,2;5)

Llamaremos <u>causales</u>, y respectivamente <u>anticausales</u>, las distribuciones de la forma $T(P \pm i\,0,\lambda)$, cuando P tiene la forma $P = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_{n-1}^2 - x_n^2$.

Son particularmente importantes las distribuciones causales tetradimensionales, pues ellas aparecen continuamente en teoría cuántica de campos. Conviene, para futura referencia, enunciar el caso particular del Teorema 5 correspondiente a $n = 4$, $p = 3$, $q = 1$.

Teorema 5'

Hipótesis

a) $P = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2$.

b) Vale la fórmula (I,2;2).

Tesis

Vale la fórmula

$$\left\{T(P \pm i\, 0,\lambda)\right\}^{\wedge} = \frac{1}{2}\, e^{\mp\frac{\Pi}{2}i} \langle T(t,\lambda), t\, R_1\left[\sqrt{t(Q \mp i\, 0)}\right] \rangle .$$

(I,2;4)

Si recordamos la definición de la función $R_m(x)$, a saber, $R_m(x) = \frac{J_m(x)}{x^m}$, se advierte que la fórmula (I,2;4) puede escribirse en la forma equivalente

$$\left\{T(P \pm i\, 0,\lambda)\right\}^{\wedge} = \frac{1}{2}\, e^{\mp\frac{\Pi}{2}i} (Q \mp i\, 0)^{-\frac{1}{2}} \langle T(t,\lambda), t^{\frac{1}{2}} J_1\left[\sqrt{t(Q \mp i 0)}\right] \rangle .$$

(I,3;1)

Si en esta fórmula expresamos simbólicamente el producto escalar con una integral, y hacemos el cambio de variable $t \to S^2$, obtenemos, como expresión simbólica equivalente de la fórmula (I,3;1), la siguiente:

$$\left\{T(P \pm i\, 0,\lambda)\right\}^{\wedge} = e^{\mp\frac{\Pi}{2}i} (Q \mp i\, 0)^{-\frac{1}{2}} .$$

$$\cdot \int_0^{\infty} T(s^2,\lambda).s^2 . \cdot J_1\left[s(Q \mp i\,0)^{\frac{1}{2}}\right] ds. \qquad (I,3;2)$$

Observemos que esta fórmula figura ya en [4], p. 166, fórmulas (8) y (9).

No está de más un comentario sobre esta fórmula. En la memoria [5] de Feinberg y Pais desempeña papel decisivo una fórmula (cfr. [5], p. 2735, fórmula [5.2]) cuyo objeto es el mismo que el de la fórmula (I,3;2), a saber, la evaluación de transformadas de Fourier de distribuciones causales en $\mathbb{R}^4$.

Esta "fórmula de reducción" de Feinberg y Pais se escribe, en nuestra notación, de la manera siguiente:

$$\left\{T(P + i\,0)\right\}^{\wedge} = e^{-\frac{\Pi}{2}i}\ (Q - i\,0)^{-\frac{1}{2}} \cdot$$

$$\cdot \int_0^{\infty} T(s^2)\, s^2\, J_1\left[s(Q - i\,0)^{\frac{1}{2}}\right] ds - e^{-\frac{\Pi}{2}i}\ (Q - i\,0)^{-\frac{1}{2}} \cdot$$

$$\cdot \int_C T(s^2)\, s^2\ H_1^1\left[s(Q - i\,0)^{\frac{1}{2}}\right] ds; \qquad (I,3;3)$$

donde con H_1^1 se denota la bien conocida función de Hankel, y C designa cierta curva del plano complejo s.

Vemos que la fórmula de Feinberg y Pais difiere de la fórmula (I,3;2) en que contiene, en su segundo miembro, un inesperado sumando adicional (la integral curvilínea). La fórmula de Feinberg y Pais es errónea, pues la nuestra es perfectamente correcta. Observación análoga figura en [4].

Terminaremos este capítulo con la evaluación, por medio del Teorema 4, de la transformada de Fourier de una distribución causal que necesitaremos más adelante.
Nos proponemos evaluar la transformada de Fourier de la distribución causal

$$G_\alpha (P + i\,0,m) \triangleq$$

$$\triangleq H_\alpha(m,n)(P + i\,0)^{\frac{1}{2}\left(\frac{\alpha-n}{2}\right)} K_{\frac{n-\alpha}{2}} \left\{\sqrt{m^2 (P + i\,0)}\right\}, \qquad (I,4;1)$$

donde m es un número real positivo, $\alpha \in \mathbb{C}$, K_μ designa la conocida función modificada de Bessel de tercera especie (cfr. [6], p. 78, fórmulas (6) y (7)) y $H_\alpha(m,n)$ designa la constante

$$H_\alpha(m,n) \triangleq \frac{e^{\frac{\pi}{2}i\alpha}\,(2\pi)^{-\frac{n}{2}}\, 2^{1-\frac{\alpha}{2}}\, e^{\frac{\pi}{2}i}\,(m^2)^{\frac{1}{2}\left(\frac{n-\alpha}{2}\right)}}{\Gamma(\frac{\alpha}{2})} \qquad (I,4;2)$$

Observemos que (según se colige del desarrollo en serie de $K_{\frac{n-\alpha}{2}}$), la $G_\alpha(P + i\,0,m)$ cumple todas las condiciones que asegura la validez del Teorema 4, en el caso de que α satisfaga a las condiciones

$$\frac{n-\alpha}{2} \neq \text{entero},\ \alpha < 2. \qquad (I,4;3)$$

Por lo tanto, si se cumplen estas condiciones vale la fórmula.

$$\left\{G_\alpha(P + i\,0,m)\right\}^\wedge = e^{-\frac{\pi}{2}i} \left\{G_\alpha\left(|x|^2,m\right)\right\}^\wedge \Big|_{|y|^2 \to Q-i0} \tag{I,4;4}$$

Traigamos ahora a colación la fórmula (5), p. 288 de [1]; la cual, poniendo en ella $Q = x_1^2 + x_2^2 + \quad + x_n^2$ se escribe equivalentemente, utilizando nuestra definición de transformada de Fourier, con la substitución $\lambda = -\frac{\alpha}{2}$,

$$\left\{G_\alpha\left(|x|^2,m\right)\right\}^\wedge = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} e^{\frac{\pi}{2}i} e^{\frac{\pi i\alpha}{2}} \left(m^2+|y|^2\right)^{-\frac{\alpha}{2}} \tag{I,4;5}$$

De (I,4;3) y (I,4;4) concluimos inmediatamente

$$\left\{G_\alpha\left(P + i\,0,m\right)\right\}^\wedge = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} e^{\frac{\pi i\alpha}{2}} \left(m^2 + Q - i\,0\right)^{-\frac{\alpha}{2}} \tag{I,4;6}$$

Hemos demostrado la validez de esta fórmula si α cumple las restricciones (I,4;3). Observemos ahora que el segundo miembro de (I,4;6) es distribución entera de α: por lo tanto, también es G_α función distribucional entera de α. Por consiguiente, si apelamos al principio de prolongación analítica, concluimos que la (I,4;6) vale pata todo α.

Consideremos ahora la distribución anticausal $M_\alpha(P - i\,0,m)$ definida por la fórmula

$$M_\alpha(P - i\,0,m) = L_\alpha(m,n)(P - i\,0)^{\frac{1}{2}\left(\frac{\alpha-n}{2}\right)} K_{\frac{n-\alpha}{2}}\left(\sqrt{m^2(P - i\,0)}\right), \tag{I,4;7}$$

donde con $L'_\alpha(m,n)$ hemos designado la constante

$$L_\alpha(m,n) \Delta \frac{e^{\frac{\pi i\alpha}{2}} (2\pi)^{-\frac{n}{2}} 2^{1-\frac{\alpha}{2}} e^{-\frac{\pi}{2}iq} (m^2)^{-\frac{1}{2}(\frac{n-\alpha}{2})}}{\Gamma(\frac{\alpha}{2})} .$$

Procediendo de manera completamente análoga a como acaba mos de hacerlo con la distribución G_α, obtenemos, en el presente caso,

$$\left\{M_\alpha(P - i\,0,m)\right\}^\wedge = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} e^{\frac{\pi}{2}i\alpha} \left(m^2 + Q + i\,0\right)^{-\frac{\alpha}{2}} . \quad (I,4;8)$$

CAPITULO II

Soluciones elementales causales de ciertas ecuaciones diferenciales

En este capítulo comenzaremos por utilizar la función distribucional ${}_{\alpha}$, cuya transformada de Fourier hemos calculado en el capítulo precedente, (fórmulas (I,4;5) (I,4;7)) para la obtención de soluciones elementales de cierto tipo, que llamaremos "causales" ("anticausales"), del operador ultrahiperbólico de Klein-Gordon iterado:

$$K^{1}u \triangleq \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1{}^2} + \ldots + \frac{\partial^2}{\partial x_p{}^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2_{p+1}} - \ldots - \frac{\partial^2}{\partial x^2_{p+q}} - m^2\right)^{1} u$$

donde m

Comenzaremos por observar que la función distribucional $G_\alpha\,(P \pm i\,0, m, n)$ (cf. fórmula (I,4;1)), es un correlativo (causal, anticausal) del núcleo introducido por Aronszajn-Smith (cf. [7], p. 386, y [2], p. 286, fórmula (VII,10;15)) definido por la fórmula

$$A\left(|x|^2, m, n\right) \triangleq C(\alpha, m, n)\left(|x|^2\right)^{\frac{\alpha - n}{4}} K_{\frac{n-\alpha}{2}}\left(\sqrt{m^2\,|x|^2}\right): \qquad (II,1;1)$$

donde $m > 0$, n entero ≥ 2, $\alpha \in \mathbb{C}$, y la constante C tiene el valor

$$C = \mathbf{C}(\alpha, m, n) \triangleq \frac{e^{\frac{\pi i}{2}}\; 2^{\frac{\quad}{2}}\; (2\pi)^{-\frac{n}{2}}\; m^{\frac{n-\alpha}{}}}{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$$

Veremos que $G_\alpha(P \pm i\,0, m, n)$, tiene propiedades análogas al núcleo de Aronszajn-Smith. Para establecerlas, haremos uso esencial de una proposición que tiene que ver con las distribuciones $(m^2 + Q \pm i\,0)^\lambda$ cuya definición y algunas de cuyas propiedades comenzaremos por consignar.

Las distribuciones $(m^2 + Q \pm i\,0)^\lambda$ se definen de manera análoga a como se definen las distribuciones $(P \pm i\,0)^\lambda$. Es decir, que pondremos [cf. [1], p. 289]

$$(m^2 + Q \pm i\,0)^\lambda \triangleq \lim_{\varepsilon \to 0} \{m^2 + Q \pm [illegible] |y| [illegible] \qquad (II,1\cdot 2$$

donde es $\varepsilon > 0$.

En esta fórmula hemos escrito

$$Q \triangleq y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_p^2$$

$$|y|^2 = y_1^2 + y_2^2 + \ldots$$

Es útil consignar una definición equivalente de las distribuciones $(m^2 + Q \pm i\,0)^\lambda$.

En ella aparecen las distribuciones

$$(m^2 + Q)_+^\lambda \triangleq \begin{cases} (m^2 + Q)^\lambda & \text{si} \quad m^2 + Q \geq 0, \\ & \quad m^2 + Q < 0 \end{cases}$$

$$
(m^2 + Q)_-^{\lambda} \triangleq \begin{cases} 0 & \text{si} \quad m^2 + Q \\ (-m^2 - Q)^{\lambda} & \text{si} \quad m^2 + Q \leq 0 \end{cases}
$$

Se comprueba sin dificultad que vale la fórmula

$$
(m^2 + Q \pm i\,0)^{\lambda} = (m^2 + Q)_+^{\lambda} + e^{\pm \pi\lambda i}\,(m^2 + Q)_-^{\lambda}.
$$

De esta fórmula se concluye inmediatamente la validez de la relación

$$
(m^2 + Q + i\,0)^{\lambda} = (m^2 + Q - i\,0)^{\lambda} = (m^2 + Q)^{\lambda}, \qquad (II,1;3)
$$

en el caso en que sea

$\lambda = k = \text{entero} \geq 0$.

Esta fórmula nos será útil más adelante.

Observemos que las $(m^2 + Q \pm i\,0)^{\lambda}$ son funciones distribucionales <u>enteras</u> de λ. En esto difieren esencialmente de las distribuciones formalmente análogas, $(Q \pm i\,0)^{\lambda}$, que tienen polos en los puntos $\lambda = -\frac{n}{2} - k$, con $k = 0,1,2,\ldots$

Puede probarse (cf. [8], p. 573, fórmula (2.14) y p. 575, fórmula (3.5)), que vale la fórmula

$$
(m^2 + Q \pm i\,0)^{-k} = \mathrm{pf}\,(m^2 + Q)^{-k} \mp i\pi \frac{(-1)^{k-1}}{(k-1)!}\,\delta^{(k-1)}(m^2 + Q),
$$

$$
(II,1;4)
$$

donde $k = 1,2,3,\ldots$

Esta fórmula es una correlativa multidimensional de la fórmula unidimensional bien conocida (cf. [1], p. 94, fórmulas (6) y (7))

$$(x \pm i\ 0)^{-k} = \mathrm{pf}\ x^{-n} \mp \frac{i\pi(-1)^{k-1}}{(k-1)!}\ \delta^{(k-1)}.$$

2. Para futura referencia conviene consignar algunas fórmulas distribucionales que tienen íntima relación con las distribuciones (II,1;2).

Estas fórmulas son correlativas multidimensionales de relaciones unidimensionales bien conocidas (cf. [1], pp. 93-98).

Pondremos

$$(m + Q \pm i\ 0)^{\lambda} \log^{r} (m + Q \pm i\ 0) \triangleq \frac{\partial^{r}}{\partial \lambda^{r}} (m + Q \pm i\ 0)^{\lambda}. \qquad (\mathrm{II},2;1)$$

Esta fórmula es la análoga multidimensional de bien conocida fórmula unidimensional (cf. [1], pp. 96 y 97). Para $\lambda = 0, r = 1$ obtenemos de (II,2;1)

$$\log (m^2 + Q \pm i0) = \lim_{\lambda \to 0} \frac{\partial}{\partial \lambda} (m^2 + Q \pm i\ 0)^{\lambda} =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \lg (m^2 + Q \pm i\ \varepsilon |x|^2) = \lg |m^2 + Q| \pm i\ \pi\ \cup (-(m^2 + Q));$$

es decir

$$\lg(m^2 + Q \pm i\,0) = \lg|m^2 + Q| \pm i\,\pi\, \cup(-(m^2 + Q)). \tag{II,2;2}$$

En esta fórmula designamos con $\cup$ como de costumbre, la función de Heaviside:

$$\cup(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x > 0 \\ 0 & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$$

La fórmula (II,2;2) que es una análoga multidimensional de fórmula unidimensional bien conocida (cf. [1], p. 95, fórmula (14)), muestra que $(\lg(m^2 + Q \pm i\,0))^r$ es localmente integrable:

$$(\lg(m^2 + Q \pm i\,0))^r \in L_{loc}, \tag{II,2;3}$$

para $r = 1,2,\ldots\ldots$.

Puede demostrarse sin dificultad, explicitando los cálculos (según se hace en [9], p. 707, para la distribución unidimensional $\lg^r(x + i\,0)$), que vale, para $r = 1,2,\ldots$, la fórmula

$$\lg^r(m^2 + Q \pm i\,0) = (\lg(m^2 + Q \pm i\,0))^r. \tag{II,2;4}$$

De la fórmulas (II,2;3) y (II,2;4) concluimos inmediatamente que vale la siguiente proposición, que nos será útil muy pronto.

Teorema 6

Hipótesis

$r, s = 1, 2, 3, \ldots$

Tesis

Vale la fórmula

$$\left[\lg^{r}(m^2 + Q \pm i\,0)\right] \cdot \left[\lg^{s}(m^2 + Q \pm i\,0)\right] = \lg^{r+s}(m^2 + Q \pm i\,0). \qquad \text{(II,2;5)}$$

3. Demostraremos ahora una proposición que desempeña papel esencial en la demostración de los teoremas que figuran en este capítulo.

Su enunciado es el siguiente.

Teorema 7

Hipótesis

$\lambda, \mu \in \mathbb{C}$.

Tesis

Vale la fórmula

$$(m^2 + Q \pm i\,0)^{\lambda} \cdot (m^2 + Q \pm i\,0)^{\mu} = (m^2 + Q \pm i\,0)^{\lambda+\mu} \qquad \text{(II,3;1)}$$

Antes de proceder a la demostración de este teorema, no huelga quizás alguna observación acerca del alcance de su tesis.

Es bien sabido que el producto multiplicativo de distribuciones no existe en general. (cf. [1], p. 117), y ésta es una de las razones que confieren interés a la fórmula multiplicativa que precede. Para convercerse de que la fórmula (II,3;1) no es, ni mucho menos, trivial, basta poner en ella $\lambda = -p$, $\mu = -q$, con $p,q = 1,2,\ldots$. Tenemos en tal caso, de acuerdo con la fórmula (II,1;3),

$$(m^2 + Q \pm i\,0)^{-p}.(m^2 + Q \pm i\,0)^{-q} =$$

$$= \left[pf\ (m^2 + Q)^{-p} \mp \frac{i\Pi(-1)^{p-1}}{(p-1)!}\ \delta^{(p-1)}(m^2 + Q)\right].$$

$$.\ \left[pf\ (m^2 + Q)^{-q} \mp \frac{i\Pi(-1)^{q-1}}{(q-1)!}\ \delta^{(q-1)}(m^2 + Q)\right].$$

Si efectuamos la multiplicación que aparece en el segundo miembro obtenemos formalmente

$$(m^2 + Q \pm i\,0)^{-p}.(m^2 + Q \pm i\,0)^{-q} =$$

$$= \left[pf(m^2 + Q)^{-p}\right].\left[pf(m^2 + Q)^{-q}\right] +$$

$$+ \left[pf(m^2 + Q)^{-p}\right].\left[\mp\frac{i\Pi(-1)^{q-1}}{(q-1)!}\ \delta^{(q-1)}(m^2 + Q)\right] +$$

$$+ \left[\mp\frac{i\Pi(-1)^{p-1}}{(p-1)!}\ \delta^{(p-1)}(m^2 + Q)\right].\left[pf(m^2 + Q)^{-q}\right] +$$

$$+ \left[\pm\frac{i\Pi(-1)^{p-1}}{(p-1)!}\ \delta^{(p-1)}(m_2 + Q)\right].\left[\mp\frac{i\Pi(-1)^{q-1}}{(q-1)!}\ \delta^{(q-1)}(m^2 + Q)\right];$$

Comprobamos en seguida que ninguno de los cuatro sumandos del segundo miembro tiene sentido.

Veremos a continuación que la circunstancia esencial que determina la validez de la fórmula (II,3;1) es la analiticidad, para todo λ, de la función distribucional $(m^2 + Q \pm i0)^\lambda$.

Demostración del Teorema 7

Desarrollemos en serie de Mac Laurin la función distribucional entera $(m^2 + Q \pm i0)^\lambda$.

Obtenemos (cf. [1], pp. 96-98; las consideraciones allí hechas con respecto a las distribuciones unidimensionales $(x \pm i0)^\lambda$ siguen valiendo, mutatis mutandis, en el presente caso),

$$(m^2 + Q \pm i0)^\lambda = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\lambda^r}{r!} \lg^r(m^2 + Q \pm i0), \qquad (II,3;2)$$

y la serie converge para todo $\lambda \in \mathbb{C}$. Análogamente obtenemos la fórmula

$$(m^2 + Q \pm i0)^\mu = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{\mu^s}{s!} \lg^s(m^2 + Q \pm i0), \qquad (II,3;3)$$

válida para todo $\mu \in \mathbb{C}$. la tesis del Teorema 7 (fórmula (II,3;1)), es consecuencia fácil de las fórmulas que anteceden en conjunción con la fórmula (II,2;5). Tenemos en efecto

$$(m^2 + Q \pm i\,0)^{\lambda}.(m^2 + Q \pm i\,0)^{\mu} =$$

$$= \left[\sum_{r=0}^{\infty} \frac{\lambda^r}{r!}\, lg^r(m^2 + Q \pm i\,0)\right].\left[\sum_{s=0}^{\infty} \frac{\mu^s}{s!}\, lg^s(m^2 + Q \pm i\,0)\right] =$$

$$= \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{\lambda^r \mu^s}{r!\,s!}\, lg^{r+s}(m^2 + Q \pm i\,0) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\lambda^r \mu^{n-r}}{r!\,(n-r)!}\, lg^n(m^2 + Q \pm i\,0) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda+\mu)^n}{n!}\, lg^n\,(m^2 + Q \pm i\,0) =$$

$$= (m^2 + Q \pm i\,0)^{\lambda+\mu}.$$

En definitiva, hemos obtenido

$$(m^2 + Q \pm i\,0)^{\lambda}.(m^2 + Q \pm i\,0)^{\mu} = (m^2 + Q \pm i\,0)^{\lambda+\mu} ,$$

que es precisamente la tesis del Teorema 7■

Señalemos que la demostración que precede es la misma, mutatis mutandis, que la que figura en [9], referente al producto de distribuciones unidimensionales de la forma $(x + i\,0)^{\lambda}$.

El teorema siguiente es inmediata consecuencia del Teorema 7.

Teorema 8

Hipótesis

$\lambda, \mu \in \mathbb{C}$; $r, s = 0,1,2,\ldots$.

Tesis

$$\left\{(m^2 + Q \pm i\, 0)^{\lambda}\, lg^{r}(m^2 + Q \pm i\, 0)\right\}.$$

$$.\left\{(m^2 + Q \pm i\, 0)^{\mu}\, lg^{s}(m^2 + Q \pm i\, 0)\right\} =$$

$$= (m^2 + Q \pm i\, 0)^{\lambda+\mu}\, lg^{r+s}(m^2 + Q \pm i\, 0). \qquad (II,3;4)$$

Demostración del Teorema 8

Basta con derivar ambos miembros de (II,3;1), $\underline{r}$ veces con respecto a λ, y $\underline{s}$ veces respecto a μ ∎

4. No está de más sañalar que, en los teoremas que anteceden, la hipótesis de que sea $m > 0$ es esencial. La razón de ello es que, como ya hemos dicho, las funciones distribucionales $(Q \pm i\, 0)^{\lambda}$ no son enteras, como $(m^2 + Q \pm i\, 0)^{\lambda}$, sino meromorfas: tienen polos simples en los puntos

$$\lambda = -\frac{n}{2} - k, \qquad (II,4;1)$$

con $k = 0,1,2,\ldots$,

Por otra parte, si $\lambda \neq -\frac{n}{2} - k$, $k = 0,1,\ldots$, las distribuciones $(m^2 + Q \pm i\, 0)^{\lambda}$ son funciones distribucionales continuas de m^2. Obtenemos pues, sin necesidad de nuevos cálculos, la proposición siguiente.

Teorema 9

Hipótesis

a) $\lambda, \mu, \lambda + \mu \in \mathbb{C}$;

b) Ninguno de los tres complejos $\lambda, \mu, \lambda + \mu$, tiene la forma $-\frac{n}{2} - k$, con $\underline{k}$ entero no negativo.

Tesis

Vale la fórmula

$$(Q \pm i\,0)^{\lambda}.(Q \pm i\,0)^{\mu} = (Q \pm i\,0)^{\lambda+\mu}. \qquad (II,4;2)$$

Demostración del Teorema 9

Basta con tomas límites, para $m^2 \to 0$, en ambos miembros de la fórmula (II,3;1)■

Teorema 10

Hipótesis

a) Los números complejos $\lambda,\mu,\lambda+\mu$, no tienen la forma $-\frac{n}{2}-k$, con $k = 0,1,2,\ldots$;

b) $r,s = 0,1,2,\ldots$

Tesis

Vale la fórmula

$$\left\{(Q \pm i\,0)^{\lambda}\,\lg^{r}(Q \pm i\,0)\right\}.$$

$$\left\{(Q \pm i\,0)^{\mu}\lg^{s}(Q \pm i\,0)\right\} = (Q \pm i\,0)^{\lambda+\mu}\lg^{r+s}(Q \pm i\,0).$$

(II,4;3)

Demostración del Teorema 10

Basta derivar ambos miembros de (II,3;6) r veces con respecto a λ y s veces con respecto a μ ■

Nota. Sería de sumo interés (pues ello tendría aplicaciones muy importantes en electrodinámica cuántica), el obtener sustitutos de los dos teoremas que preceden, en el caso de que no se cumpla la hipótesis a) de ninguno de los dos teoremas.

5. Demostraremos ahora algunos teoremas referentes al núcleo G_α (fórmula (I,4;1)), que son análogos de teoremas bien conocidos referentes al núcleo de Aronszjajn-Smith.

<u>Teorema 11</u>

<u>Hipótesis</u>

a) $\alpha \in \mathbb{C}$;

b) $k = 0,1,2,\ldots$.

<u>Tesis</u>

$$\left\{G_\alpha * G_{-2k}\right\}^\Lambda = (2\pi)^{\frac{n}{2}}\left\{G_\alpha\right\}^\Lambda \cdot \left\{G_{-2k}\right\}^\Lambda . \qquad (II,5;1)$$

<u>Nota</u>. Con el símbolo $*$ designamos, como es habitual, la convolución.

<u>Demostración del Teorema 11</u>

Si ponemos en la fórmula (I,4;5) $\alpha = -2l$, con $l = 0,1,2,\ldots$, y traemos a colación la fórmula (II,1;3), obtenemos

$$\left\{G_{-2l}(P \pm i\,0,m,n)\right\}^\Lambda = \frac{(-1)^l}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}(m^2 + Q)^l . \qquad (II,5;2)$$

Vale por otra parte la fórmula elemental

$$\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}(-1)^l\,(m^2 + Q)^l = \left\{K^l(\delta)\right\}^\Lambda . \qquad (II,5;3)$$

De las dos fórmulas que preceden obtenemos

$$G_{-2l}(P \pm i\,0,m,n) = K^l(\delta). \qquad (II,5;4)$$

Conviene registrar el caso particular, correspondiente a $l = 0$, de la fórmula que precede:

$$G_o(P \pm i\,0,m,n) = \delta. \qquad (II,5;5)$$

Observemos ahora que, G_{-21}, en virtud de la fórmula (II,5;2), es una combinación lineal finita de δ y sus derivadas; concluimos en consecuencia que G_{-21} es un convolutor de D', o sea, una distribución de la clase O'_c. Además $G_\alpha \in S'$ para todo $\alpha \in \mathbb{C}$. COncluimos pues, apelando a clásico teorema de Schwartz ([2], p. 268, fórmula (VII,8,;5)), que vale la fórmula (II,5;1), con lo cual termina la demostración del Teorema 11 ■

Teorema 12

Hipótesis

a) $\alpha \in \mathbb{C}$;

b) $k = 0,1,2,\ldots$

Tesis

Vale la fórmula

$$G_\alpha * G_{-2k} = G_{\alpha-2k}. \qquad (II,5;6)$$

Demostración del Teorema 12

De las fórmulas (I,4;5) y (II,3;1) obtenemos inmediatamente

$$\left\{G_\alpha\right\}^\wedge \left\{G_{-21}\right\}^\wedge = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \left\{G_{\alpha-21}\right\}^\wedge; \qquad (II,5;7)$$

y esta fórmula, en conjunción con la (II,5;1), prueba que es válida la (II,5;6), lo que prueba el Teorema 12 ■

Más generalmente, valen para todo $\alpha,\beta \in \mathbb{C}$ las fórmulas

$$\left\{G_\alpha * G_\beta\right\}^\wedge = (2\pi)^{\frac{n}{2}}\left\{G_\alpha\right\}^\wedge . \left\{G_\beta\right\}^\wedge, \qquad (II,5;8)$$

$$G_\alpha * G_\beta = G_{\alpha+\beta}. \qquad (II,5;9)$$

6. De los resultados que preceden se deduce con facilidad la expresión explícita de una familia de soluciones elementales (causales, anticausales) del operador ultrahiperbólico de Klein-Gordon iterado. Vale en efecto la proposición siguiente.

Teorema 13

Las distribuciones $G_{2k}(P \pm i\,0,m,n)$, donde n = entero > 2, y $k = 1,2,\ldots$, (que llamaremos "distribuciones de Feynman" por razones que se verán más adelante) son soluciones elementales (causales, anticausales) del operador ultrahiperbólico de Klein-Gordon iterado k-veces; o sea

$$G_{2k}(P \pm i\,0,m,n) = \delta. \qquad (II,6;1)$$

Demostración del Teorema 13

La fórmula (II,5;6) puede escribirse equivalentemente, si se tiene en cuenta la (II,5;4)

$$K^k\left\{G_\alpha\right\} = G_{\alpha-2k}. \qquad (II,6;2)$$

Si se pone en esta fórmula $\alpha = -2k$ y se tiene en cuenta la (II,5;5) obtenemos

$$K^{k}\left\{G_{2k}\right\} = \delta, \tag{II,6;3}$$

y esta fórmula demuestra el Teorema 13∎

Observemos que las soluciones elementales $G_{2k}(P \pm i\,0,m,n)$ tienen todas la misma forma, cualquiera que sea el entero $\underline{n} > 2$ (que es el número de dimensiones del espacio de definición). Esto no sucede en el caso de las demás soluciones elementales del mismo operador, cuya forma depende esencialmente de la paridad de $\underline{n}$ (cf. [8], p. 580, y [10], p. 403). Observemos también que el caso particular del Teorema 13, correspondiente a n = 4, k = 1, α = 1, (o sea, el operador de Klein-Gordon), es especialmente interesante. Las correspondientes soluciones elementales se escriben,

$$G_2(P + i\,0,m,4) = -\frac{m\,i}{4\pi^2}\,\frac{K_1\left[\sqrt{m^2(P + i\,0)}\right]}{(P + i\,0)^{\frac{1}{2}}}, \tag{II,6;4}$$

$$G_2(P - i\,0,m,4) = \frac{m\,i}{4\pi^2}\,\frac{K_1\left[\sqrt{m^2(P - i\,0)}\right]}{(P - i\,0)^{\frac{1}{2}}}. \tag{II,6;5}$$

La (II,6;4) es una útil expresión de la famosa "función mágica" o "propagador causal" de Feynman. Este hecho es el que nos ha movido a bautizar de "causales" ("anticausales") las distribuciones $G_\alpha(P \pm i\,0,m,n)$.

Consideraremos ahora la función distribucional

$$H_\alpha(P \pm i\,0,n) \triangleq \frac{e^{\frac{\pi i\alpha}{2}}\,e^{\pm\frac{\pi i q}{2}}\,\Gamma\left(\frac{n-\alpha}{2}\right)\pi^{-\frac{n}{2}}}{2^\alpha\,\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)}\,(P \pm i\,0)^{\frac{1}{2}(\alpha-n)} \tag{II,7;1}$$

donde $\alpha \in \mathbb{C}$, P designa la forma cuadrática definida por la fórmula (I,1;1), y q designa el número de términos negativos de la forma cuadrática P. La función H_α constituye un correlativo causal (anticausal) del núcleo (elíptico) de M. Riesz (cf. [11], pp. 16-21) y tiene propiedades, que utilizaremos para obtener soluciones causales (anticausales) del operador ultrahiperbólico iterado (k entero > 1)

$$L^k \Delta \left\{ \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial x_p^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_{p+1}^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_{p+2}^2} - \dots - \frac{\partial^2}{\partial x_{p+q}^2} \right\}^k . \tag{II,7;2}$$

Comencemos por observar que (debido a la Γ que figura en el numerador) la función H_α tiene polos simples en los puntos $\alpha = n+2l$, con l entero > 0. Esta es una diferencia esencial de H_α con G_α, que es distribución entera.

Necesitaremos en lo que sigue la expresión de la transformada de Fourier de $H_\alpha(P \pm i\,0,m,n)$, que se obtiene sin dificultad aplicando el Teorema 1, y teniendo en cuenta la fórmula (I,1;11'). El resultado a que se llega es el siguiente:

$$\left\{ H_\alpha(P \pm i\,0,n) \right\}^\wedge = \frac{e^{\frac{\pi}{2} i \alpha}}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} (Q \mp i\,0)^{-\frac{\alpha}{2}}; \tag{II,7;3}$$

donde, como de costumbre, hemos puesto

$$Q = y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_p^2 - y_{p+1}^2 - y_{p+2}^2 - \dots - y_{p+q}^2 .$$

Comenzaremos por demostrar el

<u>Teorema 14</u>

<u>Hipótesis</u>

a) $k = 1,2,...$

b) $\alpha \neq n+2r$, $r = 0,1,2,3,....$

<u>Tesis</u>

$$\left\{H_\alpha * H_{-2k}\right\}^\Lambda = (2\pi)^{\frac{n}{2}} \left\{H_\alpha\right\}^\Lambda . \left\{H_{-2k}\right\}^\Lambda . \qquad (II,7;4)$$

Este teorema es el correlativo, referente a H_α, del Teorema 11 (referente a G_α).

<u>Demostración del Teorema 14</u>

Si ponemos $\alpha = -2k$ en la fórmula (II,7;3) y tenemos en cuenta la (II,1;3) obtenemos

$$\left\{H_{-2k}\right\}^\Lambda = \frac{(-1)^k}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} Q^k . \qquad (II,7;5)$$

Vale por otra parte la fórmula elemental

$$\left\{L^k(\delta)\right\}^\Lambda = \frac{(-1)^k}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} Q^k . \qquad (II,7;6)$$

De las dos fórmulas que preceden obtenemos

$$H_{-2k} = L^k(\delta). \qquad (II,7;7)$$

Conviene registrar el caso particular correspondiente a $k = 0$:

$$H_0 = \delta. \qquad (II,7;8)$$

Si tenemos en cuenta que H_{-2k} es un convolutor de D', y que $H_\alpha \in S'$ (pues se cumple la hipótesis b)) concluimos (cf.[2], p. 268, fórmula (VII,8;5)) que vale la fórmula (II,7;4) y el Teorema 14 queda demostrado ▪

Teorema 15

Hipótesis

a) $\alpha \neq n+2r$, r entero ≥ 0;

b) $\alpha-2k \neq n+2l$, l entero ≥ 0.

Tesis

$$H_\alpha * H_{-2k} = H_{\alpha-2k}. \qquad \text{(II,7;9)}$$

Demostración del Teorema 15

De las fórmulas (II,4;2) y (II,7;3) concluimos inmediatamente

$$\left\{H_\alpha\right\}^\wedge \cdot \left\{H_{-2k}\right\}^\wedge = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \left\{H_{\alpha-2k}\right\}^\wedge \qquad \text{(II,7;10)}$$

y esta fórmula, en conjunción con la (II,7;4) prueba la (II,7;9), lo que demuestra el teorema.

Más generalmente: si ninguno de los números α, β, $\alpha+\beta$ es de la forma $n+2r$, $r = 0,1,2,...$ valen las fórmulas

$$H_\alpha * H_\beta = H_{\alpha+\beta}, \qquad \text{(II,7;11)}$$

$$\left\{H_\alpha * H_\beta\right\}^\wedge = (2\pi)^{\frac{n}{2}} \left\{H_\alpha\right\}^\wedge \cdot \left\{H_\beta\right\}^\wedge \qquad \text{(II,7;12)}$$

8. De los teoremas que preceden se deduce con facilidad la

expresión explícita de una familia de soluciones elementales (causales, anticausales) del operador ultrahiperbólico iterado (fórmula (II,7;2)). Vale en efecto la proposición siguiente

Teorema 16

Hipótesis

a) Vale la relación

$$2k \neq n+2r, \quad r = 0,1,2,\ldots \qquad \text{(II,8;1)}$$

Tesis

Las distribuciones $H_{2k}(P \pm i\,0,n)$ son soluciones elementales (causales, anticausales) del operador ultrahiperbólico homogéneo iterado $\underline{k}$ veces: o sea, que vale la fórmula

$$L^k\left\{H_{2k}(P \pm i\,0,n)\right\} = \delta. \qquad \text{(II,8;2)}$$

Demostración del Teorema 16

Basta observar que, en virtud de la hipótesis a), se cumplen, para $\alpha = 2k$, las hipótesis del Teorema 15. Es lícito, por lo tanto, poner en (II,7;9) $\alpha = 2k$, con lo que obtenemos, en virtud de (II,7;8) y (II,7;7)

$$L^k\left\{H_{2k}\right\} = \delta$$

que es la tesis del Teorema 16∎

El Teorema 15 figura en [1], p.280. Nos parece que nuestra demostración es más simple y sugestiva.

El caso más importante, para las aplicaciones, del Teorema que precede, se presenta si $n = 4$, $\alpha = 1$, $k = 1$; y en este caso el operador L^k no es sino el clásico operador de las ondas o lorentziano:

$$\Box = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_4^2}. \qquad (II,8;3)$$

En el presente caso tenemos

$$2k = 2 \neq n+2r = 4+2r, \; r = 0,1,\ldots,$$

se cumple pues la hipótesis del Teorema 16, y por lo tanto las distribuciones $H_2(P \pm i\,0,4)$ son efectivamente soluciones elementales del lorentziano. Conviene registrarlas:

$$H_2(P + i\,0,4) = -\frac{i}{4\pi^2}(P + i\,0)^{-1}; \qquad (II,8;4)$$

$$H_2(P - i\,0,4) = \frac{i}{4\pi^2}(P - i\,0)^{-1}. \qquad (II,8;5)$$

La solución elemental causal H_2 del lorentziano $\Box$ no es sino la famosa "delta fotónica" de Feynman; cf. [12], p. 120, fórmula (14.26)), donde, se la designa con el símbolo $D_0^c(x)$.
La distribución $H_2(P - i\,0,4)$ es la correspondiente delta de Feynman anticausal.

Supongamos que quisiéramos calcular las soluciones elementales del lorentziano iterado dos veces, es decir, las soluciones (causales y anticausales) de la ecuación

$$\Box^2 u = \delta. \qquad (II,9;1)$$

En tal caso tenemos $n = 4$, $k = 2$. Por lo tanto $2k = 4 = 4+2.0$. Es decir, que no se cumple la hipótesis del Teorema 16, y por lo tanto las funciones $H_4(P \pm i\,0,4)$ <u>no</u> son soluciones de (II,9;1).

De la menor generalidad del Teorema 16 con respecto a su correlativo el Teorema 13 es responsable el diferente carácter, con respecto a la analiticidad de las funciones G_α y H_α.

La primera es función distribucional entera de α; H_α es sólo función <u>meromorfa</u> de α.

Es posible establecer un teorema análogo al Teorema 16, y que exhiba la misma generalidad que el Teorema 13; es decir, que dé las soluciones elementales (causales y anticausales) del operador L^k, para <u>todo</u> $k \geq 1$. Este teorema es el siguiente.

<u>Teorema 17</u>

Las funciones distribucionales pf $H_{2k}(P \pm i\,0,n)$ son soluciones elementales, para todo k, del operador L^k.

<u>Demostración del Teorema 17</u>

Bastará considerar (en vista del Teorema 16) el caso en que es

$$2k = n+2r, \quad r = 0,1,\ldots \qquad \text{(II,9;2)}$$

Desarrollemos H_α en serie de Laurent, en un entorno del punto $\alpha = n+2r$:

$$H_\alpha\,(P \pm i\,0,n) = \frac{A_{-1}}{\alpha-n-2r} + A_0 + \sum_{\nu=1}^{\infty} A_\nu(\alpha-n-2r)\,. \qquad \text{(II,9;3)}$$

La distribución A_0 es, por definición, la parte finita de H_α $(P \pm i\, 0,n)$ en el punto $\alpha = n-2r$. De (II,9;3) obtenemos

$$A_0 \triangleq \text{pf } H_{2k} = \lim_{\alpha \to n+2r} \frac{d}{d\alpha} \left\{ (\alpha-n-2r)\ H_\alpha \right\} . \qquad \text{(II,9;4)}$$

Omitiremos consignar el cálculo del límite que figura en el segundo miembro, que es largo y no ofrece mayor interés. Se llega a una fórmula donde aparecen los parámetros $\underline{n}$ y $\underline{r}$. Si en esta fórmula se hace (de acuerdo con (II,9;2), la substitución $r = -\frac{n}{2}+k$, se obtiene en definitiva

$$A_0 = \text{pf } H_{2k}(P \pm i\, 0,n) = C_1^{\pm}(n,k)(P \pm i\, 0)^{-\frac{n}{2}+k} +$$

$$+ C_2^{\pm}(n,k)(P \pm i\, 0)^{-\frac{n}{2}+k} \lg(P \pm i\, 0). \qquad \text{(II,9;5)}$$

No interesa consignar el valor explícito de la constante $C_1^{\pm}(n,k)$. La constante $C_2^{\pm}(n,k)$ vale

$$C_2^{\pm}(n,k) = \frac{\pi^{-\frac{n}{2}}\ e^{\pm\frac{\pi}{2}qi}}{4^k (k-\frac{n}{2})!\,(k-1)!} . \qquad \text{(II,9;6)}$$

De (II,9;5) obtenemos

$$L^k\left\{\text{pf } H_{2k}(P \pm i\, 0,n)\right\} = C_1^{\pm}\, L^k\left[(P \pm i\, 0)^{-\frac{n}{2}+k}\right] +$$

$$+ L^k\left[C_2^{\pm}\ (n,k)(P \pm i\, 0)^{-\frac{n}{2}+k} \lg\ (P \pm i\, 0)\right]. \qquad \text{(II,9;7)}$$

Observemos ahora que, de acuerdo con [1], p. 280, vale la fórmula

$$L^k\left[(P \pm i\, 0)^{-\frac{n}{2}+k}\right] = 0 \cdot \qquad \text{(II,9;8)}$$

También de acuerdo con [1], p. 282, vale la fórmula

$$L^k\left[C_2^{\pm}(n,k)(P \pm i\, 0)^{-\frac{n}{2}+k}\ \lg(P \pm i\, 0)\right] = \delta\ . \qquad \text{(II,9;9)}$$

De (II,9;7), (II,9;8) y (II,9;9) obtenemos finalmente

$$L^k\left[\mathrm{pf}\ H_{2k}(P \pm i\, 0,n)\right] = \delta,$$

y el Teorema 17 está demostrado.■

Conviene señalar que en las fórmulas de [I] de p. 282 que acabamos de consignar (es nuestra fórmula (II,9;9)), falta el factor $\pi^{-\frac{n}{2}}$ en los segundos miembros.

Consignemos que el caso particular del Teorema 17 correspondiente a $q = 1$, $n = 4$, figura en[13] , p.p. 555-556.

10. Consignaremos una observación sobre las funciones G_α y H_α, que tienen interés en teoría cuántica de campos. La primera se refiere a la expresión $\{\delta\}^2$, o más generalmente, $\{\delta\}^n$.

Es sabido que estas expresiones no tienen sentido (δ^2 corresponderia, por ejemplo a una masa infinita en el origen).

Veamos qué aspecto adquieren estas expresiones si elegimos, como representación de la δ, las que resultan de utilizar las funciones distribucionales G_α y H_α. De acuerdo con (II,7;8), vale la fórmula

$$H_0(P \pm i\,0,n) = \delta. \qquad (II,10:1)$$

Pongamos

$$\lim_{\alpha\to 0} \left\{ H_\alpha (P \pm \quad 0,n \right. \qquad (II,10:2)$$

Si substituimos en el primer miembro [illegible]

dada por la fórmula (II,7:1) obtenemos

$$\lim_{\alpha\to 0} \{H_\alpha\}^2 = \lim_{\alpha\to 0} \left\{ \frac{e^{\pi i q}\left\{\Gamma(\frac{\alpha-n}{2})\right\}^2 \pi^{-n}}{2^{2\alpha}\,\Gamma(\frac{\alpha}{2})} \quad \frac{(P \pm i\,0)^{\alpha-n}}{\Gamma(\frac{\alpha}{2})} \right\} =$$

$$\lim_{\alpha\to 0} \left\{ \frac{[illegible]}{2^{2\alpha}\,\Gamma(\frac{\alpha}{2})} \quad \frac{[illegible]\,0)}{\Gamma(\frac{\alpha}{2})} \right\}. \qquad (II,10;3)$$

Ya sabemos que $(P \pm i\,0)^\lambda$ tiene polos simples en los puntos $\lambda = -\frac{n}{2}-k, k = 0,1,\ldots$

Si $\underline{n}$ es impar, por lo tanto, la distribución $(P \pm i\,0)^{-\frac{n}{2}-\frac{n}{2}}$ existe, y consiguientemente vale la fórmula

$$\lim_{\alpha\to 0} \frac{(P \pm i\,0)^{-\frac{n}{2}-\frac{n}{2}+\alpha}}{\Gamma(\frac{\alpha}{2})} = 0. \qquad (II,10;4)$$

Si n es par, la distribución $(P \pm i\,0)^\lambda$ tiene polo simples en el punto $\lambda = -\frac{n}{2}-\frac{n}{2} = -\frac{n}{2}-k$, k entero. Por lo tanto, si $\underline{n}$ es par, tanto el numerador como el denominador del cociente que figura en el segundo factor de la última igualdad de la fórmula (II,10:3) se hacen infinitos; pero como ambos tienen polos simples cuando $\alpha = 0$, concluimos que este cociente es finito; es decir, si n es par vale la fórmula

$$\lim_{\alpha\to 0} \frac{(P \pm i\,0)^{-\frac{n}{2}-\frac{n}{2}-\alpha}}{\Gamma(\frac{\alpha}{2})} = A \neq \infty. \qquad (II,10;5)$$

De (II,10;3), (II,10;4) y (II,10;5) obtenemos

$$\lim_{\alpha\to 0} \{H_\alpha\}^2 = 0;$$

o sea

$$\delta^2 = 0 \qquad (II,10;6)$$

Este resultado es, nuevamente, consecuencia de la analiticidad de H_α

La (II,10;6) sigue valiendo si ponemos (cf. fórmula (II,5;5))

$$\delta = G_0\,(P \pm i\,0,m,n).$$

Terminaremos este capítulo consignando una representación de las soluciones elementales $G_{2k}\{P \pm i\,0,m,n\}$ (cf. Teorema 13) por medio de una integral simple de Fourier simbólica. Luego haremos un comentario acerca del interés que puede tener esta fórmula.

Partiremos de la fórmula conocida (cf. [14], p. 283, fórmulas (39) y (40), y [6], p. 183, fórmula (15)),

$$\int_0^\infty e^{-pt}\,\tfrac{1}{2}\,t^{-\nu-1}e^{-\frac{\alpha}{t}}\,dt \triangleq f(p,\alpha,\nu) = \alpha^{-\frac{\nu}{2}}\,p^{\frac{\nu}{2}}\,K_\nu\left(2\,\alpha^{\frac{1}{2}}\,p^{\frac{1}{2}}\right)dt,$$

$$(II,11;1)$$

que vale si Re $p > 0$, y Re $\alpha > 0$.

Hagamos en esta fórmula los cambios de parámetro

$$p = \pm\, i(m^2 \mp i\,\varepsilon),$$

$$\alpha = \mp \tfrac{1}{4}(P \pm i\,\varepsilon|x|^2),$$

donde $\varepsilon > 0$, $m > 0$, y con P designamos, como lo hemos hecho hasta ahora, la forma cuadrática no degenerada de n variables

$$P = x_1^2 + \ldots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \ldots - x_{p+q}^2.$$

La fórmula (II,1;1) se escribe, con estas substituciones,

$$f(\pm\, i(m^2 \mp i\,\varepsilon), \mp \tfrac{i}{4}(P \pm i\,\varepsilon\,|x|^2), \nu) =$$

$$= 2^\nu e^{\pm\frac{\Pi i \nu}{2}} (m^2 \mp i\,\varepsilon)^{\frac{\nu}{2}} (P \pm i\,\varepsilon\,|x|^2)^{-\frac{\nu}{2}}.$$

$$.\; K_\nu\left(\sqrt{(m^2 \pm i\,\varepsilon)(P \pm i\,\varepsilon\,|x|^2)}\right). \qquad \text{(II,11;2)}$$

Si tomamos límites en ambos miembros de esta fórmula para $\varepsilon \to 0$, el segundo miembro tiende según ya sabemos, a la distribución

$$2^\nu e^{\pm\frac{\Pi i \nu}{2}} m^\nu (P \pm i\,0)^{-\frac{\nu}{2}} K_\nu\left(\sqrt{m(P \pm i\,0)}\right)$$

También tiende, pues, a un límite el primer miembro. Obtenemos por lo tanto

Poniendo en esta fórmula $\nu = \frac{n}{2} - k$, k entero ≥ 1, obtenemos

$$2^{\frac{n}{2}-k+1} e^{\pm\frac{\pi}{2} i(\frac{n}{2}-k)} m^{\frac{n}{2}-k} (P \pm i0)^{-\frac{1}{2}(\frac{n}{2}-k)} K_{\frac{n}{2}-k}\left(\sqrt{m(P \pm i0)}\right) =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0} \int_0^\infty e^{\pm i(m^2 \mp i\varepsilon)t}\, t^{k-\frac{n}{2}-1}\, e^{\mp\frac{i}{4t}(P \pm i\varepsilon|x|^2)} dt. \qquad (II,11;3)$$

Esta fórmula puede escribirse equivalentemente (multiplicando ambos miembros por constantes adecuadas) en la forma

$$\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \frac{(-1)^k\, 2^{-\frac{n}{2}}}{\Gamma(k)} e^{\pm\frac{\pi i q}{2}} e^{\mp\frac{\pi}{2} i(\frac{n}{2}-k)}$$

$$.\lim_{\varepsilon\to 0} \int_0^\infty e^{\pm i(m^2 \mp i\varepsilon)t}\, t^{k-\frac{n}{2}-1} e^{\mp\frac{i}{4t}(P \pm i\varepsilon|x|^2)} dt =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} (-1)^k \frac{1}{\Gamma(k)} e^{\pm\pi i q}\, 2^{1-k} (m^2)^{\frac{1}{2}(\frac{n}{2}-k)}$$

$$K_{\frac{n}{2}-k}\left(\sqrt{m^2(P \pm i0)}\right)$$

$$.(P \pm i0)^{-\frac{1}{2}(\frac{n}{2}-k)} \qquad (II,11;4)$$

De acuerdo con la fórmula definitoria de $G_\alpha(P \pm i\,0,m,n)$, (cf. fórmula (I,4;1)), el segundo miembro de (II,11;4) es precisamente $G_{2k}(P \pm i\,0,m,n)$. Hemos demostrado, pues, el siguiente

Teorema 18

Las soluciones elementales $G_{2k}(P \pm i\,0,m,n)$ admiten la representación

$$B_{2k}(P \pm i\,0,m,n) = C_\pm(n,k,q)\,.$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_0^\infty e^{\pm i(m^2 \mp i\varepsilon)t}\, t^{k-\frac{n}{2}-1}\, e^{\mp\frac{i}{4t}(P \pm i\varepsilon|x|^2)}\,dt, \qquad \text{(II,11;5)}$$

donde las constantes $C_\pm(n,k,q)$ tienen los valores

$$C_\pm(n,k,q) = \frac{1}{(2\Pi)^{\frac{n}{2}}}\, 2^{-\frac{n}{2}}\, e^{\pm\frac{\Pi i q}{2}}\, e^{\mp\frac{\Pi i}{2}(\frac{n}{2}-k)}\, \frac{1}{\Gamma(k)}$$

Vale la pena registrar el caso particular de este teorema, correspondiente a $n = 4, q = 1, k = 1$.

Teorema 19

Las soluciones $G_2(P \pm i\,0,m,4)$ del operador de Klein-Gordon admiten la representación

$$G_2(P \pm i\,0,m,4) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{16\pi^2} \int_0^\infty e^{\pm i(m^2 \mp i\,\varepsilon)t}\, \frac{1}{t^2} \,.$$

$$. \, e^{\mp \frac{i}{4t}(x_1^2 \qquad x_4^2 \pm i\,\varepsilon |x|^2)}\, dt. \qquad (II,11;6)$$

Esta fórmula, en lo que concierne a los signos superio res que en ella figuran, (o sea, en lo que respecta a la representación de la distribución causal $G_2(P + i\,0,m,4)$) ha sido establecida por Bogoliubov y Parasiuk (cf. [15], p. 233) y desempeña papel esencial en la teoría, debida a estos autores, de multiplicación de distribuciones causales.

CAPITULO III

Generalización de una fórmula de Källen

Comenzaremos por registrar la fórmula de Källen a que se hace mención en el epígrafe (cf. [16], p. 413, fórmulas (10 a) y (10 b). Consideremos para ello el operador

$$(-1)\left\{\Box - m^2\right\} = \frac{\partial^2}{\partial x_4^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} + m^2\,., \qquad (III,1;1)$$

o sea, el operador de Klein-Gordon, (correspondiente al caso $q = 1$), (cf. Capítulo II, p. 1), cambiado de signo.(1) La llamada solución elemental simétrica (2) del operador (III,1;1) (que en este capítulo llamaremos "operador de Klein-Gordon" a secas, sin que ello pueda provocar confusión) está definida por la fórmula (cf. [16], p. 412, fórmula (6 a)).

$$\bar{\Lambda}(\sigma^2, m^2) = \frac{1}{4\pi}\,\delta(\sigma^2) + \frac{(-1)m^2 J_1\left\{(m^2\sigma^2)^{\frac{1}{2}}\right\}}{8\pi\sqrt{m^2\sigma^2}} \qquad (III,1;2)$$

En esta fórmula hemos puesto $\sigma^2 = x_4^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2$ el segundo miembro es no negativo, y cero en los demás casos.

(1) En este capítulo le hemos cambiado de signo al operador de Klein-Gordon para adecuarnos a la notación de Källen y facilitar la comparación de sus fórmulas con las nuestras.

(2) simétrica con respecto al origen.

J_1 es la clásica función de Bessel de orden 1 (cf. fórmula (A I, 1:3)).

Vamos a definir una función de dos variables reales s,t, poniendo en (III,1:2), s, m = t. Obtenemos así la función (distribucional)

$$\bar{\Delta}(s,t) \stackrel{def}{=} \frac{1}{4\pi}\,\delta(s) + \frac{(-1)t\ J_1\{\sqrt{st}\}}{8\pi\ \sqrt{st}} \qquad (III,1:3)$$

Si $s,t \geq 0$ e igual a cero si $s,t < 0$.

Consideraciones físicas conducen a Källen (loc.cit) a plantear la ecuación integral

$$h(s) = \int_0 \bar{\Delta}\,(s,t)\ f(t)dt; \qquad (III,1:4)$$

cuya solución (a la que Källen llega ... heurísticas, sin imponer condiciones a la incógnita f(t)) es

$$f(t) = 16\pi^2 \int_0^\infty \Delta(t,s)\ h(s)ds \qquad (III,1:5)$$

En este capítulo nos proponemos generalizar las fórmulas recíprocas (III,1:4) y (III,1:5) en la dirección que a continuación consignamos. Consideremos el operador de Klein-Gordon n-dimensional, iterado k veces:

$$(-1)^k \left\{\Box - m^2\right\} = \left\{\frac{\partial^2}{\partial x_n^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} - \dots - \frac{\partial^2}{\partial x_{n-1}^2} + m^2\right\}^k . \qquad (III,2;1)$$

Llamaremos $\overline{\Delta}(\sigma^2, m^2, k)$ a la solución elemental simétrica del operador (III,2;1), donde σ^2 está definida por la fórmula $\sigma^2 = x_n^2 - x_1^2 - \quad - x_{n-1}^2$, si el segundo miembro es > 0, y cero en los demás casos.

Con ayuda de $\overline{\Delta}(\sigma^2, m^2, k)$ fabricamos, imitando la receta de Källen, la función distribucional $\overline{\Delta}(s,t,k)$; y con ella planteamos la ecuación integral, análoga a la (III,1;5),

$$h(s) = \int_0^\infty \overline{\Delta}(s,t,k)\, f(t)dt. \qquad \text{(III,2;2)}$$

Nuestro propósito es resolver esta ecuación, bajo adecuadas condiciones impuestas a la incógnita f(t); con la esperanza de que su solución venga dada por una expresión que se reduzca, para $n = 4$, $k = 1$, a la fórmula (III,1:5) de Källen. Veremos a continuación que este programa puede llevarse adelante con éxito.

3. Necesitamos ante todo la expresión explícita de la solución elemental simétrica (con respecto al origen) del operador iterado de Klein-Gordon (fórmula III,1;6). Puede probarse (cf. fórmula (A II,7;2)) que en el caso de que sea n entero > 4, par, y k entero, $1 < k < \frac{n-2}{2}$, esta solución elemental, que llamaremos $\overline{\Delta}(x,n,k,m)$ viene dada por la fórmula

$$\overline{\Delta}(x,n,k,m) =$$

$$= \frac{(m^2)^{\frac{n-2k-2}{2}} (-1)^{\frac{n-2k-2}{2}}}{\pi^{\frac{n-2}{2}}\, 2^{n-2}\, (k-1)!} \sum_{\mu=0}^{\frac{n-2k}{2}-1} \frac{(-1)^{\mu}\, 2^{2\mu}\, m^{-2\mu}\, \delta^{[\mu]}(\sigma^2)}{\left(\frac{n-2k}{2} - \mu - 1\right)!} +$$

$$+\frac{(-1)^{\frac{n-2k}{2}}\,(m^2)^{\frac{n-2k}{2}}}{\pi^{\frac{n-2}{2}}\,2^{\frac{2k+n}{2}}\,(k-1)!}\;\frac{J_{\frac{n-2k}{2}}\left\{\sqrt{m^2\ \sigma^2}\right\}}{\left[\sqrt{m^2\ \sigma^2}\right]^{\frac{n-2k}{2}}}\,. \tag{III,3;1}$$

En esta fórmula hemos puesto

$\sigma^2 = x_n^2 - x_1^2 - x_2^2 - \ldots - x_{n-1}^2$ cuando el segundo miembro es no negativo, y cero si es negativo.

Poniendo en (III,3;1) $\sigma^2 = s, m^2 = t$, construimos una función de dos variables reales s,t, a saber

$\bar{\Delta}\,(s,t)$ def

$$\frac{t^{\frac{n-2k-2}{2}}\,(-1)^{\frac{n-2k-2}{2}}}{\pi^{\frac{n-2}{2}}\,2^{n-2}\,(k-1)!}\sum_{\mu=0}^{\frac{n-2k}{2}-1}\frac{(-1)^{\mu}\,2^{2\mu}\,t^{-\mu}\,\delta^{[\mu]}(s)}{\left(\frac{n-2k}{2}-\mu-1\right)!}$$

$$+\frac{(-1)^{\frac{n-2k}{2}}\,t^{\frac{n-2k}{2}}}{\pi^{\frac{n-2}{2}}\,2^{\frac{2k+n}{2}}\,(k-1)!}\;\frac{J_{\frac{n-2k}{2}}\left\{(st)^{\frac{1}{2}}\right\}}{(\sqrt{st})^{\frac{n-2k}{2}}}\,. \tag{III,3;2}$$

Utilizamos la función $\bar{\Delta}\,(s,t)$ para plantear la ecuación integral (análoga a la (III,1;4) de Källen).

$$h(s) = \int_0^{\infty}\Delta\,(s,t)\,f(t)dt. \tag{III,3;3}$$

El objeto de este capítulo es demostrar la proposición a continuación consignada.

Teorema 20

Hipótesis

a) $f(t)$ es derivable en $[0,\infty]$; (III,3;4)

b) $\displaystyle\int_0^\infty |f(t)|^{\frac{n-2k}{2}}\,dt < \infty$; (III,3;5)

c) n es entero > 4, par; (III,3;6)

d) k es entero; $1 \leq k \leq \frac{n-2}{2}$ (III,3;7)

Tesis

Vale la fórmula

$$f(t) = \pi^{n-2}\, 2^{2k+n-2} \{(k-1)!\}^2 \int_0^\infty \bar{\Lambda}(t,s)\, h(s)\,ds. \quad (III,3;8)$$

4. Demostración del Teorema 20

De (III,3;2) y (III,3;8) concluimos

$h(s) =$

$$\frac{(-1)^{\frac{n-2k}{2}-1}}{\pi^{\frac{n-2}{2}}\, 2^{n-2}(k-1)!} \sum_{\mu=0}^{\frac{n-2k}{2}-1} \frac{(-1)^{\mu}\, 2^{'}\, \delta^{[\mu]}(s) \int_0^\infty (t)^{\left(\frac{n-2k-2}{2}-\mu\right)} f(t)\,dt}{\mu\,!} +$$

(III,4;1)

Pongamos, para simplificar la escritura,

$$c_{\mu,n,k} \underline{\underline{\mathrm{def}}} \int_0^{\infty} f(t)\, t^{\frac{n-2k-2}{2}-\mu}\, dt. \qquad \text{(III,4;2)}$$

Con esta notación la fórmula (III,4;1) se escribe

$$h(s) =$$

$$= \frac{(-1)^{\frac{n-2k}{2}-1}}{\pi^{\frac{n-2}{2}}\, 2^{n-2}\, (k-1)!} \sum_{\mu=0}^{\frac{n-2k}{2}-1} \frac{(-1)^{\mu}\, 2^{2\mu}\, c_{\mu,n,k}\, \delta^{[\mu]}(s)}{\left(\frac{n-2k}{2}-1-\mu\right)!} +$$

$$+ \frac{(-1)^{\frac{n-2k}{2}}}{\pi^{\frac{n-2}{2}}\, 2^{\frac{2k+n-2}{2}}\, (k-1)!} \mathcal{H}_{\frac{n-2k}{2}} \{f(t)\} \qquad \text{(III,4;3)}$$

En esta fórmula hemos designado con $\mathcal{H}_{\frac{n-2k}{2}}$ la transforma-da de Hankel de orden $\frac{n-2k}{2}$ de la función $f(t)$, (cf. fórmulas (A I, 3;1) y (A I,3;2)).

5. Antes de seguir adelante recordemos la fórmula (cf [2], p. 122, fórmula (V,3;5) y (V,3;6))

$$s^{\ell}\,\delta^{[\mu]} = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad \ell > \mu\,, \\ (-1)^{\ell}\,\dfrac{\mu!}{(\mu-\ell)!}\,\delta^{[\mu-\ell]} & \text{si} \quad \ell \leq \mu. \end{cases} \tag{III,5;1}$$

Multipliquemos ambos miembros de (III,4;3) por la función (es el núcleo de Hankel),

$$\frac{1}{2}\, s^{\frac{n-2k}{2}}\; \frac{J_{\frac{n-2k}{2}}(\sqrt{st})}{(\sqrt{st})^{\frac{n-2k}{2}}}$$

Obtenemos, en vista de la (III,5;1) y de la clásica fórmula de inversión de Hankel (cf. fórmulas (A I,3;1) y (A I,3;2), multiplicando ambos miembros por constantes adecuadas,

$$f(t) =$$

$$= C_1(n,k) \int_0^{\infty} h(s)\, \frac{(-1)^{\frac{n-2k}{2}}\, s^{\frac{n-2k}{2}}}{\pi^{\frac{n-2}{2}}\, 2^{\frac{2k+n}{2}}\, (k-1)!}\; \frac{J_{\frac{n-2k}{2}}(\sqrt{st})}{(\sqrt{st})^{\frac{n-2k}{2}}}\, ds. \tag{III,5;2}$$

En esta fórmula hemos puesto

$$C_1(n,k) \overset{\text{def}}{=} \pi^{n-2}\, 2^{2k+n-2}\, [(k-1)!]^2. \tag{III,5;3}$$

6. Observemos ahora que si en la fórmula (III,3;2) permutamos la letras s,t, obtenemos

$$\bar{\Delta}(t,s) =$$

$$= \frac{s^{\frac{n-2k}{2}}\,(-1)^{\frac{n-2k}{2}-1}}{\pi^{\frac{n-2}{2}}\,2^{n-2}\,(k-1)!} \sum_{\mu=0}^{\frac{n-2k}{2}-1} \frac{(-1)^{\mu}\,2^{2\mu}\,s^{-\mu}}{\left(\frac{n-2k}{2}-\mu-1\right)!}\,\delta^{[\mu]}(t) +$$

$$+ \frac{(-1)^{\frac{n-2k}{2}}\,s^{\frac{n-2k}{2}}}{\pi^{\frac{n-2}{2}}\,2^{\frac{2k+n}{2}}\,(k-1)!} \; \frac{J_{\frac{n-2k}{2}}(\sqrt{ts})}{(\sqrt{+s})^{\frac{n-2k}{2}}} \qquad \text{(III,6;1)}$$

Si sumamos y restamos, al factor que multiplica a h(s) en el integrando de (III,5;2), el primer sumando del segundo miembro de (III,6;1), comprobamos que la fórmula (III,5;3) puede escribirse

$$f(t) = \pi^{n-2}\,2^{2k+n-2}\,\{(k-1)!\}^{2} \int_{0}^{\infty} \bar{\Delta}(t,s)\,h(s)\,ds +$$

$$- C_{2}(n,k) \sum_{\mu=0}^{\frac{n-2k}{2}-1} \frac{(-1)^{\mu}\,2^{2\mu}\,\delta^{[\mu]}(t)}{\left(\frac{n-2k}{2}-1-\mu\right)!}\,d_{\mu,k,n}. \qquad \text{(III,6;2)}$$

En esta fórmula hemos puesto, para simplificar la escritura,

$$C_{2}(n,k) \overset{\text{def}}{=} \pi^{\frac{n-2}{2}}\,2^{2k}\,(-1)^{\frac{n-2k}{2}-1}\,(k-1)!$$

$$d_{\mu,k,n} \overset{\text{def}}{=} \int_{0}^{\infty} h(s)\,s^{\frac{n-2k-2}{2}-\mu}\,ds. \qquad \text{(III,6;3)}$$

Vamos ahora a evaluar explícitamente la sumatoria que aparece en el segundo miembro de (III,6;2). Para ello evaluaremos los números $d_{\mu,k,n}$, es decir, las integrales (III,6:3). De las fórmulas (III,4;3) y (III,6;3) obtenemos (con $0 \leq \nu \leq \frac{n-2k-2}{2}$)

$$d_{\nu,k,n} = \frac{(-1)^{\frac{n-2k}{2}-1}}{\pi^{\frac{n-2}{2}}\, 2^{n-2}(k-1)!} \cdot$$

$$\sum_{\mu=0}^{\frac{n-2k}{2}-1} \frac{(-1)^{\mu}\, 2^{2\mu} \int_0^{\infty} t^{\frac{n-2k-2}{2}-\mu} f(t)\,dt \int_0^{\infty} s^{\frac{n-2k-2}{2}-\nu}\, \delta^{[\mu]}(s)\,ds}{\left(\frac{n-2k}{2} - 1 - \mu\right)!} +$$

$$+ \frac{(-1)^{\frac{n-2k}{2}}}{\pi^{\frac{n-2}{2}}\, 2^{\frac{2k+n-2}{2}}\,(k-1)!} \int_0^{\infty} s^{\frac{n-2k-2}{2}-\nu} \left\{\mathcal{K}_{\frac{n-2k}{2}}(f(t))\right\} ds \;\underline{\underline{\mathrm{def}}}$$

$$\underline{\underline{\mathrm{def}}}\; I_1(n,k,\nu) + I_2(n,k,\nu). \qquad \text{(III,6;4)}$$

Empecemos por evaluar I_1. Si traemos a colación la fórmula (III,5;1) se comprueba que todos los términos de la sumatoria que aparece en I_1 son nulos, salvo el correspondiente a $\mu = \frac{n-2k2}{2} - \nu$.

Por lo tanto, I_1 se escribe, en definitiva,

$I_1(n,k,\nu) =$

$$= \frac{(-1)^{\frac{n-2k}{2}-1}}{\pi^{\frac{n-2}{2}}(k-1)!} 2^{-2k-2\nu} \frac{\left[\frac{n-2k-2}{2}-\nu\right]!}{\nu!} \int_0^\infty f(t)\, t^{\nu} dt. \quad (III,7;1)$$

con n,k, fijos y

$0 < \nu < \frac{n-2k-2}{2}.$

Ahora calcularemos I_2. Tenemos

$I_2(n,k,\nu) =$

$$= C_3(n,k) \int_0^\infty s^{\frac{n-2k-2}{2}-\nu} ds \int_0^\infty f(t)\, t^{\frac{n-2k}{2}} \frac{J_{\frac{n-2k}{2}}(\sqrt{st})}{(\sqrt{st})^{\frac{n-2k}{2}}} dt.$$

(III,7;2)

donde hemos puesto

$$C_3(n,k) = \frac{(-1)^{\frac{n-2k}{2}}}{\pi^{\frac{n-2}{2}}\, 2^{\frac{2k+n}{2}}\, (k-1)!} \quad (III,7;3)$$

Probaremos en seguida que en la integral iterada que figura en el segundo miembro de (III,7;2) es lícito cambiar el orden de integración. Admitiendo provisionalmente esta licitud, la (III,7;2) puede escribirse

$I_2(n,k,\nu) =$

$$= C_3(n,k)\int_0^\infty f(t)\, t^{\frac{n-2k}{2}} dt \int_0^\infty \frac{s^{\frac{n-2k-2}{2}-\nu} J_{\frac{n-2k}{2}}(\sqrt{st})}{(\sqrt{st})^{\frac{n-2k}{2}}} ds.$$

(III,7;4)

8. Probaremos ahora que es lícito el cambio del orden de integración que nos ha conducido a la fórmula que precede. Para hacerlo, llamemos $I(n,\nu,k)$ la integral iterada que figura en el segundo miembro de (III,7;2). Podemos escribir

$$I(n,\nu,k) =$$

$$= \lim_{a\to\infty}\left\{\int_0^a s^{\frac{n-2k-2}{2}-\nu}\,ds\int_0^\infty f(t)\,t^{\frac{n-2k}{2}}\frac{J_{\frac{n-2k}{2}}(\sqrt{st})}{(\sqrt{st})^{\frac{n-2k}{2}}}\,dt\right\} =$$

$$\underline{\text{def}}\ \lim_{a\to\infty} I_a(n,\nu,k). \qquad \text{(III,8;1)}$$

Probaremos que en la integral iterada $I_a(n,\nu,k)$ es lícito cambiar el orden de integración. Para ello basta probar (en virtud del teorema de Fubini) que vale la fórmula

$$\int_0^\infty |f(t)|\,t^{\frac{n-2k}{2}}\,dt\int_0^a s^{\frac{n-2k-2}{2}-\nu}\left|\frac{J_{\frac{n-2k}{2}}(\sqrt{st})}{(\sqrt{st})^{\frac{n-2k}{2}}}\right|ds < \infty.$$

(III,8;2)

Para probar que vale esta fórmula comencemos por recordar la relación conocida (cf. [6], p. 24, fórmula (1)),

$$\frac{J_\lambda(x)}{x^\lambda} \overset{\text{def}}{=} R_\lambda(x) = \frac{1}{2^\lambda \sqrt{\Pi}\,\Gamma(\lambda+\frac{1}{2})} \int_0^\Pi (\text{sen }\theta)^{2\lambda} e^{-i\,x\cos\theta} d\theta,$$

válida para $\operatorname{Re}\lambda > -\frac{1}{2}$. De esta fórmula concluimos

$$\left| R_{\frac{n-2k}{2}}(\sqrt{st}) \right| \leq \frac{\int_0^\Pi |\text{sen }\theta|^{2n-2k} d\theta}{2^{\frac{n-2k}{2}} \sqrt{\Pi}\,\Gamma\left(\frac{n-2k}{2}+1\right)} \leq$$

$$\leq \frac{\sqrt{\Pi}}{2^{\frac{n-2k}{2}} \left\{\left(\frac{n-2k}{2}\right)!\right\}} \overset{\text{def}}{=} C_{n,k}\,.$$

Como consecuencia de esta fórmula obtenemos

$$\int_0^a s^{\frac{n-2k-2}{2}-\nu} \left| R_{\frac{n-2k}{2}}(\sqrt{st}) \right| ds \leq$$

$$\leq C_{n,k} \int_0^a s^{\frac{n-2k-2}{2}} ds = C_{n,k} \frac{a^{\frac{n-2k}{2}}}{\frac{n-2k}{2}} \overset{\text{def}}{=} B_{n,k}\,.$$

Llegamos pues a la conclusión en vista de la hipótesis (III,3;4), de que

$$\int_0^\infty |f(t)|\, t^{\frac{n-2k}{2}} dt \int_0^a s^{\frac{n-2k-2}{2}-\nu} \left| R_{\frac{n-2k}{2}} \right| (\sqrt{st})\; ds \leq$$

$$\leq B_{n,k} \int_0^\infty |f(t)|\, t^{\frac{n-2k}{2}} dt < \infty\,. \qquad \text{(III,8;3)}$$

Queda, pues, demostrada la fórmula (III,8;2) y también, por lo tanto la (III,7;4).

9. Evaluaremos ahora explícitamente la integral interior del segundo miembro de la fórmula (III,7;4), que para brevedad de escritura llamaremos $L(n,k,\nu,t)$:

$$L(n,k,\nu,t) \overset{def}{=} \int_0^{\infty} s^{\frac{n-2k-2}{2}-\nu} R_{\frac{n-2k}{2}}(\sqrt{st})ds. \qquad (III,9;1)$$

Utilizaremos la fórmula conocida (cf. [17] p. 196, fórmula (7,9,1))

$$\int_0^{\infty} R_{\lambda}(x)\, x^{z-1}\, dx = \frac{2^{z-\lambda-1}\,\Gamma(\frac{z}{2})}{\Gamma(\lambda-\frac{z}{2}+1)}\,, \qquad (III,9;2)$$

válida cuando z pertenece a la faja

$$0 < \operatorname{Re} z < \lambda + \frac{z}{2}\,. \qquad (III,9;3)$$

Poniendo en la fórmula que precede $\lambda = \frac{n-2k}{2}$, obtenemos

$$\int_0^{\infty} R_{\frac{n-2k}{2}}(x)\, x^{z-1}dx = \frac{2^{z-\frac{n-2k}{2}-1}\,\Gamma(\frac{z}{2})}{\Gamma\left(\frac{n-2k}{2}-\frac{z}{2}+1\right)}; \qquad (III,9;4)$$

y esta fórmula es válida en la faja

$$0 < \operatorname{Re} z < \frac{n-2k}{2} + \frac{z}{2}\,. \qquad (III,9;5)$$

10. Hagamos ahora, en la fórmula (III,9;1), el cambio de variable $\sqrt{st} \to x$. Obtenemos

$$L(n,\nu,k,t) = \frac{2}{t^{\frac{n-2k}{2}-\nu}} \int_0^\infty x^{n-2k-2\nu-1} R_{n-2k}(x)dx. \qquad (III,10;1)$$

De (III,9;4) y (III,10;1) obtenemos

$$L(n,\nu,k,t) = \frac{1}{t^{\frac{n-2k}{2}-\nu}} \frac{2^{\frac{n-2k}{2}-2\nu}\,\Gamma\left(\frac{n-2k-2\nu}{2}\right)}{\Gamma(\nu+1)}; \qquad (III,10;2)$$

y esta fórmula es válida, de acuerdo con (III,9;5), si, para n y k fijos, ν satisface a la restricción

$$0 < n-2k-\nu < \frac{n-2k}{2} + \frac{3}{2}. \qquad (III,10;3)$$

11. De (III,7;4), (III,9;1) y (III,10;2) obtenemos

$$I_2(n,\nu,k) = \frac{(-1)^{\frac{n-2k}{2}}\, 2^{-2k}\, 2^{-2\nu}\,\Gamma\left(\frac{n-2k-2\nu}{2}\right)}{\pi^{\frac{n-2}{2}}\,(k-1)!\,\Gamma(\nu+1)} \int_0^\infty f(t)t^{\nu}dt.$$

(III,11;1)

Esta fórmula la hemos obtenido en la hipótesis de que ν satisface a la restricción (III,10;3). Observemos ahora que tanto el primer miembro de (III,11;1) definido por la fórmula (III,7;4)) como el segundo son funciones analíticas de la variable compleja ν. El primer miembro vale para $0 < \nu < \frac{n-2k}{2}-1$; y el segundo tiene también sentido para los mismos valores de ν, como consecuencia de la hipótesis (III,3;5). Por lo tanto, en virtud del principio de la prolongación analítica, la fórmula (III,11;1) vale para todo ν tal que $0 < \nu < \frac{n-2k}{2}-1$.

Observemos que la fórmula (III,11;1) puede escribirse, equivalentemente,

$$I_2(n,\nu,k) = \frac{(-1)^{\frac{n-2k}{2}}\, 2^{-2k-2\nu}}{\pi^{\frac{n-2}{2}}\,(k-1)!}\ \frac{\left\{\left(\frac{n-2k-2}{2}-\nu\right)!\right\}}{\nu!} \int_0^\infty f(t)t^\nu dt.$$

(III,11:2)

12. De (III,7;1) y (III,11:2) obtenemos

$$I_1(n,k,\nu) + I_2(n,k,\nu) = 0 \qquad \text{(III,12;1)}$$

para $0 < \nu < \frac{n-2k}{2}-1$.

De (III,6:4) y (III,12;1) concluimos que vale la fórmula

$$d_{n,k,\nu} = 0 \qquad \text{(III,12;2)}$$

para n,k, fijos y $0 < \nu < \frac{n-2k}{2}-1$.

De (III,12:2) y (III,6:2) obtenemos finalmente

$$f(t) = \pi^{n-2}\, 2^{2k+n-2}\, \{(k-1)!\}^2 \int_0^\infty \bar{\Delta}(t,s)\, h(s)\, ds.$$

Esta fórmula coincide con la tesis (III,3;8) del Teorema 20; el cual queda, pues, demostrado.

Señalemos que las fórmulas recíprocas (III,3;3) y (III,3;8) se convierten, si n = 4, k = 1, en las fórmulas recíprocas (III,1;4) y (III,1;5) de Kállen.

Consignemos para terminar que las fórmulas de Kállen tienen interesantes aplicaciones en teoría cuántica de campos (cf. [16], [18] y [19]).

APENDICE I

Generalización distribucional de una fórmula de Böchner

1. Sea $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ un punto perteneciente al espacio euclideano n-dimensional R^n.

Escribiremos

$$dx = dx_1 \; dx_2 \; \ldots \; dx_n,$$

$$dy = dy_1 \; dy_2 \; \ldots \; dy_n,$$

$$[x,y] = \sum_{\nu=1}^{n} x_\nu \, y_\nu,$$

$$r^2 = |x|^2 = \sum_{\nu=1}^{n} x_\nu^2,$$

$$\rho^2 = |y|^2 = \sum_{\nu=1}^{n} y_\nu^2.$$

Una función $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ la denotaremos con $f(x)$. El signo Λ sobrepuesto a la derecha designa la transformada de Fourier de $f(x)$:

$$\{f(x)\}^\Lambda = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i[x,y]} f(x)dx.$$

En este Apéndice damos una generalización del siguiente teorema, debido a Böchner ([20], pag. 187, fórmula (15)).

Teorema 21 (Böchner).

Sea $f(x) \in L^1(\mathbb{R}^n)$, y sea además f función radial, es decir, $f(x) = h(|x|^2) = h(r^2)$, donde $h(u)$ está definida en $0 < u \leq \infty$.

Nota. Este capítulo es parte de un trabajo inédito de Alberto González Domínguez.

Entonces la transformada de Fourier de f(x) puede expresarse de la siguiente manera:

$$v(y) = g(|y|^2) = \{f(x)\}^{\wedge} = h(|x|^2)$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{\infty} h(t)\, t^{\frac{n-2}{2}}\, R_{\frac{n-2}{2}} \left\{\sqrt{t|y|^2}\right\} dt. \qquad \text{(A I,1;1)}$$

En esta fórmula hemos puesto

$$R_m(t) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{J_m(t)}{t^m}, \qquad \text{(A I,1;2)}$$

donde $J_m(t)$ designa la clásica función de Bessel de orden m, a saber

$$J_m(t) = \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^{\nu} \left(\frac{t}{2}\right)^{m+2\nu} \frac{1}{\nu!\,\Gamma(m+\nu+1)} \qquad \text{(A I,1;3)}$$

Observemos que en el segundo miembro de la fórmula (A I,1;1) de Böchner, figura la <u>transformada de Hankel</u>, de orden $\frac{n-2}{2}$, de orden $\frac{n-2}{2}$, de la función h(t) (cf. fórmula (A I,3;1)). Nuestro objeto es obtener una generalización distribucional de la fórmula de Böchner. Ello requiere, como paso previo, en virtud de la observación recién consignada, el obtener una generalización distribucional de la transformación de Hankel. Es lo que empezamos por hacer. Señalemos que la posibilidad de una generalización de la fórmula de Böchner ha sido sugerida por Schwartz (cf. [2], p. 259).

Sea λ una rotación con centro en el origen y sea $f(x)$ una función continua definida en $\mathbb{R}^n$. Con λf designamos la función $x \to f(\lambda^{-1}x)$.

Diremos que f es invariante por rotación si para cada λ vale la fórmula

$\lambda f = f$.

Con $S_{\mathbb{R}^n}$ designaremos la familia de funciones $f(x) \in S$ que son, además, invariantes por rotación. Con S denotamos, como habitualmente, la familia de funciones $f(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$, infinitamente diferenciables que tienden a cero, conjuntamente con todas sus derivadas, cuando $|x| \to \infty$, más rápidamente que toda potencia de $\frac{1}{|x|}$.

Sea $S_{\mathbb{R}^+}$ el espacio de funciones $f(t)$ definidas en la semirecta positiva $\mathbb{R}^+ : \{t, t \geq 0\}$, y pertenecientes a S.

Entonces valen las siguientes proposiciones

Teorema 22

Sea $f(t) \in S_{\mathbb{R}^+}$. La aplicación

$$f(t) \to f(r^2) \qquad \text{(A I,2:1)}$$

establece un isomorfismo topológico entre $S_{\mathbb{R}^+}$ y $S_{\mathbb{R}^n}$.

Demostración del Teorema 22

Schwartz ([21], Exposé nº 7, pp. 4-5) demuestra que la aplicación (A I,2;1) establece un isomorfismo topológico entre $D_{\mathbb{R}^+}$ y $D_{\mathbb{R}^n}$.

La demostración de Schwartz vale, <u>mutatis mutandis</u>, cuando $f(t) \in S_{\mathbb{R}^+}$ ∎

Sea T una distribución, con λT designamos la distribución definida por la fórmula

$$\langle \lambda T, \phi \rangle = \langle T, \lambda^{-1} \phi \rangle$$

Diremos que T es invariante por rotación si para cada λ vale la fórmula

$\lambda T = T.$

Con $S'_{\mathbb{R}^n}$ designaremos el espacio de las distribuciones temperadas, invariantes por rotación, definidas en $\mathbb{R}^n$.

$S'_{\mathbb{R}^n}$ es el dual de $S_{\mathbb{R}^n}$.

Análogamente, $S'_{\mathbb{R}^+}$, el dual de $S_{\mathbb{R}^+}$, es el espacio de distribuciones temperadas definidas en la semirecta positiva $\mathbb{R}^+$.

<u>Teorema 23</u>

La aplicación traspuesta de la aplicación (A I,2;1) establece un isomorfismo topológico entre $S'_{\mathbb{R}^n}$ y $S'_{\mathbb{R}^+}$

<u>Demostración del Teorema 23.</u>

Es evidente que isomorfismo topológico cuya existencia afirma el Teorema 2 induce, por dualidad , un isomorfismo topológico entre $S'_{\mathbb{R}^+}$ y $S'_{\mathbb{R}^n}$. ■

Sea ahora $\tilde{T}$ la imagen de $T \in S'_{\mathbb{R}^n}$ en $S'_{\mathbb{R}^+}$, definida por la aplicación del Teorema 3. Vale la fórmula

$$\langle \tilde{T}, \phi(t) \rangle = \langle T, \phi(r^2) \rangle \qquad \text{(A I,2;3)}$$

para cada $\phi \in S_{\mathbb{R}^+}$.

Observemos con Schwartz que (como consecuencia de la fórmula que precede, si $f(t)$ es una función definida en $\mathbb{R}^+$, tal que la función $f(r^2)$ define una distribución temperada en $\mathbb{R}^n$, tenemos

$$\widetilde{f(r^2)} = \frac{1}{2}\,\Omega_n\, t^{\frac{n-2}{2}}\, f(t) \subset S'_{\mathbb{R}^+}. \qquad \text{(A I,2;4)}$$

En esta fórmula Ω_n designa el área de la esfera unidad en $\mathbb{R}^n$:

$$\Omega_n = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})}.$$

Recíprocamente, sea $f(t)$ una función definida en $\mathbb{R}^+$, que define una distribución temperada $\in S'_{\mathbb{R}^+}$; si evaluamos su imagen en $S'_{\mathbb{R}^n}$, que designaremos nuevamente con $\tilde{f}(t)$ llegamos, como consecuencia de (A I, 2;3), a la fórmula

$$\tilde{f}(t) = \frac{2}{\Omega_n}\,\frac{1}{r^{n-2}}\, f(r^2). \qquad \text{(A I,2;5)}$$

Nota. La imagen de la función $f(r^2) \in S_{\mathbb{R}^n}$ es la función $f(t)$; pero la imagen de la distribución $f(r^2) \in S'_{\mathbb{R}^n}$ no es la distribución $f(t)$, como lo muestra la fórmula (A I,2;4), sino la distribución

$$\frac{\Omega_n}{2}\, t^{\frac{n-2}{2}}\, f(t) \in S'_{\mathbb{R}^+}.$$

3. Sea $\phi(t)$ una función definida en $\mathbb{R}^+$. La transformada de Hankel da la función $\phi(t)$, es por definición, la función $g(s)$, $0 \leq s < \infty$, definida por la fórmula

$$g(s) = [\mathcal{H}\{\phi(t)\}] = \frac{1}{2}\int_0^\infty \phi(t)\, t^{\frac{n-2}{2}}\, R_{\frac{n-2}{2}}(\sqrt{st})dt. \qquad \text{(A I,3;1)}$$

Es bien sabido (cf. [17], p. 240), que si $\phi(t)$ satisface a adecuadas condiciones (por ejemplo, si $\phi(t) \in S_{\mathbb{R}^+}$) vale la siguiente fórmula:

$$\phi(t) = [\mathcal{H}\{g(s)\}] = \frac{1}{2}\int_0^\infty g(s)\, s^{\frac{n-2}{2}}\, R_{\frac{n-2}{2}}(\sqrt{st})ds. \qquad \text{(A I,3;2)}$$

Necesitaremos fórmulas análogas a las dos fórmulas que preceden cuando ϕ no es una función sino una distribución. Nuestra definición de la transformada de Hankel de una distribución se basa esencialmente en la proposición acontinuación consignada.

Teorema 24

Sea $\phi(t) \in S_{\mathbb{R}^+}$; vale entonces la fórmula

$[\mathcal{H}\{\phi(t)\}] = g(s) \in S_{\mathbb{R}^+}$.

Demostración del Teorema 24. Es consecuencia inmediata del Teorema 22. En efecto, si $\phi(t) \in S_{\mathbb{R}^+}$, entonces (en virtud del Teorema 22), $\phi(r^2) \in S_{\mathbb{R}^n}$; por lo tanto $g(p^2) = (\phi(r^2))^{\wedge} \in S_{\mathbb{R}^n}$; y en virtud de (A I,1;1), que es válida cuando $h(r^2) \in S_{\mathbb{R}^n}$, el Teorema 24 queda demostrado.∎

El Teorema 24 va a permitirnos definir, por un argumento de dualidad, la transformada de Hankel de toda distribución perteneciente a $S'_{\mathbb{R}^+}$.

Sea $U(t) \in S'_{\mathbb{R}^+}$. La transformada de Hankel de $U(t)$ será, por definición, la distribución $V(s) \in S'_{\mathbb{R}^+}$ definida por la fórmula

$$\langle \mathcal{H}\{U(t)\}, \phi(s)\rangle = \langle U(t), [\mathcal{H}\{\phi(s)\}]\rangle \qquad \text{(A I,3;3)}$$

para cada $\phi(s) \in S_{\mathbb{R}^+}$.

Nota. Hay otras definiciones de la transformada de Hankel distribucional. La más conocida es la definición de Zeemanian (cf. [22], p. 141). La definición por nosotros adoptada es la que consideramos más conveniente para el objeto que tenemos en vista; a saber, la generalización distribucional, en varias direcciones de la fórmula de Böchner.

Es fácil probar que vale la siguiente proposición.

Teorema 25

Sea $v(s) = \mathcal{H}\{u(t)\}$. Vale entonces la fórmula

$$u(t) = \mathcal{H}\{v(s)\}. \qquad (A\ I,3;4)$$

Demostración del Teorema 25. La fórmula (A I,3;4) es evidente, en vista de la validez, cuando $\phi(t) \in S_{\mathbb{R}^+}$, de las fórmulas recíprocas (A I,3;1) y (A I,3;2). En efecto, para toda $\phi(t) \in S_{\mathbb{R}^+}$ es válida la siguiente cadena de igualdades:

$$\langle \mathcal{H}[v(s)], \phi(t)\rangle = \langle v(s), [\mathcal{H}\{\phi(t)\}]\rangle =$$

$$= \langle \mathcal{H}\{u(t)\}, [\mathcal{H}\{\phi(t)\}]\rangle = \langle u(t), [\mathcal{H}[\mathcal{H}\{\phi(t)\}]]\rangle =$$

$$= \langle u(t), \phi(t)\rangle . \blacksquare$$

4. Es útil observar que la transformada de Hankel usual de la función $f(t)$, $[\mathcal{H}(f(t))]$ (entre corchetes) que viene dada por la fórmula (A I,3;1), no es idéntica a la transformada de Hankel de la distribución $f(t)$, $\mathcal{H}(f(t))$, (sin corchetes), calculada mediante la fórmula (A I,3;3). Admitamos, en efecto, que la función $f(t)$ tiene una transformada de Hankel absolutamente convergente (definida por la fórmula (A I,3;1)):

$$[\mathcal{H}(f(t))] = \frac{1}{2}\int_0^\infty f(t)\, t^{\frac{n-2}{2}}\, R_{\frac{n-2}{2}}(\sqrt{st})dt.$$

Calculemos la transformada de Hankel (distribucional) de $t^{\frac{n-2}{2}} f(t)$ mediante la fórmula (A I,3;3). Obtenemos

$$\langle \mathcal{H}\,(t^{\frac{n-2}{2}} f(t)), \phi(s)\rangle =$$

$$= \langle t^{\frac{n-2}{2}} f(t), \tfrac{1}{2} \int^{\infty} \phi(s)\, s^{\frac{n-2}{2}} R_{\frac{n-2}{2}} (\sqrt{st})ds\rangle =$$

$$= \langle s^{\frac{n-2}{2}} [\mathcal{H}\,(f(t))], \phi(s)\rangle;$$

en consecuencia

$$\mathcal{H}\left(t^{\frac{n-2}{2}} f(t)\right) = s^{\frac{n-2}{2}} [\mathcal{H}\,(f(t))]. \qquad \text{(A I,4;1)}$$

Vemos que el contenido de esta fórmula puede expresarse diciendo que la transformada de la distribución f(t), es la distribución $[\mathcal{H}\,(f(t))]$.

5. Estamos ahora en condiciones de generalizar la fórmula de Böchner (fórmula A I,1;1).

Teorema 26 (Teorema de Böchner distribucional)

Sea $T \in S'_{\mathbb{R}^n}$. Vale entonces la fórmula

$$\{T\}^{\wedge} = \mathcal{H}\{\tilde{T}\}$$

Demostración del Teorema 26. Sea $\phi(p^2) \in S_{\mathbb{R}^n}$.

$$= \langle \tilde{T}, \frac{1}{2}\int_0^\infty \phi(s)\, s^{\frac{n-2}{2}}\, R_{\frac{n-2}{2}}(\sqrt{st})ds\rangle =$$

$$= \langle \tilde{T}, [\mathcal{H}(\phi(s))]\rangle = \langle \mathcal{H}(\tilde{T}), \phi(s)\rangle = \langle \mathcal{H}(\tilde{T}), \phi(\rho^2)\rangle .$$

Vale, por lo tanto, la fórmula

$$\langle \{T\}^{\wedge} - \mathcal{H}\{\tilde{T}\}, \phi(\rho^2)\rangle = 0. \qquad \text{(A I,4;3)}$$

Esta última fórmula nos dice que la distribución

$M = \{T\}^{\wedge} - \mathcal{H}(\tilde{T})$ es ortogonal a toda $\phi \in S_{\mathbb{R}^n}$. Por otra parte tanto $\hat{T}$ como $\mathcal{H}(\hat{T})$ pertenecen a $S'_{\mathbb{R}^n}$, y en consecuencia $M \in S'_{\mathbb{R}^n}$. Este hecho, conjuntamente con la fórmula (A I, 4;3), implica $M \equiv 0$, lo que demuestra el teorema.■

6. Supongamos que la transformada de Fourier de la distribución radial $T(r^2)$ puede expresarse como un producto escalar:

$$\{T(|x|^2)\}^{\wedge} = \langle T(|x|^2), e^{-i\langle x,y\rangle}\rangle . \qquad \text{(A I,6;1)}$$

Esta fórmula puede escribirse, apelando a la fórmula de cambio de variables para distribuciones (cf., por ejemplo, [31, p. 102]), en la forma

$$\{T(r^2)\}^{\wedge} =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\langle T(r^2), e^{-i\langle x,y\rangle}\rangle = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\langle T(t), \frac{1}{2\sqrt{t}}\int_{r=\sqrt{t}} e^{-i\langle x,y\rangle}ds\rangle,$$

(A I,6;2)

donde ds designa el elemento de área de la esfera de radio $r = \sqrt{t}$.

La integral que aparece en el segundo miembro es bien conocida (cf, por ejemplo, [23], p. 224, fórmula (V,3:17))

$$\int_{r=\sqrt{t}} e^{-i(x,y)}\, ds = (2\pi)^{n/2}\, t^{\frac{n-2}{2}}\, R_{\frac{n-2}{2}}(\sqrt{t\rho^2}).$$

De esta fórmula y de la anterior, obtenemos

$$\{T(r^2)\}^{\wedge} = \frac{1}{2}\,\langle T(t),\, t^{\frac{n-2}{2}}\, R_{\frac{n-2}{2}}(\sqrt{t\rho^2})\rangle . \qquad \text{(A I,6;2)}$$

Esta es la fórmula que deseábamos registrar, que se reduce a la fórmula de Böchner clásica cuando $T(r^2)$ es función integrable.

APENDICE II

La solución elemental simétrica del operador de Klein-Gordon iterado

1. Pondremos, en R^n,

$$S^2 \stackrel{\text{def}}{=} x_n^2 - x_1^2 - \dots - x_{n-1}^2;$$

$$\Gamma \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in R^n;\ S^2 > 0\};$$

$$\Gamma_+ \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in R^n;\ S^2 > 0,\ x_n > 0\};$$

$$\Gamma_- \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in R^n;\ S^2 > 0,\ x_n < 0\};$$

Sea $m > 0$, y $\alpha \in \mathbb{C}$. Consideremos la función distribucional $W_+(x,\alpha,m,n)$ definida por la fórmula

$$W_+(x,\alpha,m,n) \stackrel{\text{def}}{=}$$

$$\stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \dfrac{\{m^{-2}\,S^2\}^{\frac{\alpha-n}{4}}}{\pi^{\frac{n-2}{2}}\ 2^{\frac{\alpha+n-2}{2}}\ \Gamma(\frac{\alpha}{2})}\ J_{\frac{\alpha-n}{2}}(\sqrt{m^2\ S^2}), & \text{si } x \in \Gamma_+; \\[2ex] 0 & \text{si } x \notin \Gamma_+; \end{cases}$$

(A II,1;1)

La función W_+ fue introducida por M. Riesz (cf. [11], p. 89, fórmula (21); y [2], p. 179, segunda fórmula (VI,5;30).

La función distribucional $W_+(x,\alpha,m,n)$ tiene propiedades análogas a las de las funciones $G_\alpha(x,m,n)$ y $H_\alpha(x,m,n)$, consideradas en el capítulo II; y, análogamente a que suceda con estas dos funciones, $W_+(x,\alpha,m,n)$ sirve últimamente para la evaluación efectiva de ciertas soluciones elementales del operador de Klein-Gordon iterado. Siguiendo la notación introducida en el Capítulo III pondremos, en este Apéndice,

$$k \overset{\text{def}}{=} \left\{ \frac{\partial^2}{\partial x_n^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} - \cdots - \frac{\partial^2}{\partial x_{n-1}^2} \right\}. \qquad (\text{A II},1;2)$$

Sea k un entero ≥ 1. Puede comprobarse que la función W_+ tiene las propiedades siguientes:

$$W_+(x,\alpha,m,n) * W_+(x,\beta,m,n) = W_+(x,\alpha+\beta,m,n). \qquad (\text{A II},2;1)$$

La fórmula (A II,2;1) vale cualesquiera que sean los complejos α,β.
Vale también la fórmula

$$\left\{ \frac{\partial^2}{\partial x_n^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} - \cdots - \frac{\partial^2}{\partial x_{n-1}^2} + m^2 \right\}^k W_+(x,2k,m,n) = \delta;$$

(A II,2;2)

$W_+(x,2k,m,n)$ es la (única) solución elemental del operador de Klein-Gordon iterado $\underline{k}$ veces, con soporte en Γ_+. Para la demostración de estas fórmulas cf. [24], pp. 23 y siguientes. La solución elemental $W_+(x,2k,m,n)$ sirve para resolver el problema de Cauchy, en el semiespacio

$x_n \geqslant 0$, referente al operador de Klein-Gordon iterado k veces.

Introducimos ahora la función distribucional

$$W_-(x,\alpha,m,n) \overset{\text{def}}{=}$$

$$\underline{\text{def}} \begin{cases} \dfrac{(m^{-2}\quad S^2)^{\frac{\alpha-n}{4}}}{\pi^{\frac{n-2}{2}}\; 2^{\frac{\alpha+n-2}{2}}\; \Gamma(\frac{\alpha}{2})} \; J_{\frac{\alpha-n}{2}}\{\sqrt{m^2\quad S^2}\} & \text{si } x \in \Gamma_-, \\ \\ 0 & \end{cases}$$

(A II,3:1)

Esta función tiene propiedades completamente análogas a las de W_+. En particular

$$W_-(x,\alpha,m,n) * W_-(x,\beta,m,n) = W_-(x,\alpha+\beta,m,n). \qquad \text{(A II,3:2)}$$

$$\left\{\frac{\partial^2}{\partial x_n^2} \quad \frac{\partial^2}{\partial x_1^2{}_2} \quad\quad \frac{\partial^2}{\partial x_{n-1}^2} + m^2\right\}^k W_-(x,2k,m,n) = \delta .$$

(A II,3;3)

La distribución $W_-(x,2k,m,n)$ es la única solución elemental del operador de Klein-Gordon iterado k veces, con soporte en Γ_-. Esta distribución sirve para resolver el pro blema de Cauchy, en el semiespacio $x_n < 0$, referente al operador de Klein-Gordon iterado.

4. Introducimos ahora una tercera solución elemental del operador de Klein-Gordon iterado, que llamaremos $\bar{\Delta}(x,m,n,k)$.
Es la definida por la fórmula

$$\bar{\Delta}(x,m,n,k) \stackrel{def}{=} \frac{W_{+}(x,2k,m,n) + W_{-}(x,2k,m,n)}{2} . \quad (A\ II,4;1)$$

Esta solución elemental, que es simétrica con respecto al origen, es la que aparece (en un caso particular) en el **Capítulo** III.
También aparece (en el caso particular $n = 4$, $k = 1$) en teoría cuántica de campos; cf. [25], p. 677, fórmula (A 1); y [26], p. 421, tercera fórmula (A 1-7), donde $\bar{\Delta}(x,m,4,1)$ es designada con el símbolo Δ_p.

5. Necesitamos, para los fines del Capítulo III, una expresión explícita de $\bar{\Delta}(x,m,n,k)$, en el caso particular $n > 4$, par y k tal que

$$1 < k < \frac{n-2}{2} \qquad (A\ II,5;1)$$

Para obtenerla, haremos uso de la fórmula definitoria (A II, 4;1), o sea, equivalentemente

$$2\bar{\Delta}(x,m,n,k) = \lim_{\alpha\to 2k}\{W_+(x,\alpha,m,n)\} + \lim_{\alpha\to 2k}\{W_-(x,\alpha,m,n)\}.$$

(A II,5;2)

Empecemos por calcular el primer sumando del segundo miembro de la fórmula que precede. Si se cumplen las hipótesis (A II,5;1), podemos escribir

$$W_+(x,\alpha,m,n) = I_1(x,m,n,\alpha) + I_2(x,m,n,\alpha), \qquad \text{(A II,5;3)}$$

donde hemos puesto

$$I_1(x,m,n,\alpha) \stackrel{\text{def}}{=}$$

$$\stackrel{\text{def}}{=} \frac{(m^{-2}S^2)^{\frac{\alpha-n}{4}}}{\pi^{\frac{n-2}{2}}\, 2^{\alpha+n-2}\, \Gamma(\frac{\alpha}{2})} \sum_{\nu=0}^{\frac{n}{2}-k-1} (-1)^{\nu} \left\{\frac{(m^2 S^2)^{\frac{1}{2}}}{2}\right\}^{\frac{\alpha-n}{2}+2\nu} \frac{1}{\nu!\,\Gamma(\frac{\alpha-n}{2}+\nu+1)},$$

(A II,5;4)

$$I_2(x,m,n,\alpha) \stackrel{\text{def}}{=}$$

$$\stackrel{\text{def}}{=} \frac{(m^{-2}S^2)^{\frac{\alpha-n}{4}}}{\pi^{\frac{n-2}{2}}\, 2^{\alpha+n-2}\, \Gamma(\frac{\alpha}{2})} \sum_{\nu=\frac{n}{2}-k}^{\infty} (-1)^{\nu} \left\{\frac{(m^2 S^2)^{\frac{1}{2}}}{2}\right\}^{\frac{\alpha-n}{2}+2\nu} \frac{1}{\nu!\,\Gamma(\frac{\alpha-n}{2}+\nu+1)}.$$

(A II,5;5)

El segundo sumando tiene un valor finito para $\alpha = 2k$. Haciendo el cambio de índice $\mu = \nu - \frac{n-2k}{2}$ llegamos a la fórmula

$$I_2(x,m,n,k) =$$

$$= \frac{(-1)^{\frac{n-2k}{2}} \{m^2\}^{\frac{n-2k}{2}}}{\pi^{\frac{n-2}{2}} \, 2^{\frac{2k+n-2}{2}} \, (k-1)!} \; \frac{J_{\frac{n-2k}{2}}\left(\sqrt{m^2 \; S^2}\right)}{\left\{\sqrt{m^2 \; S^2}\right\}^{\frac{n-2k}{2}}} \; . \qquad \text{(A II,5;6)}$$

6. Vamos a evaluar ahora I_1. Haremos uso de la fórmula conocida (cf. [1], p. 57, fórmula (11)) donde ℓ = entero ≥ 0,

$$\lim_{\alpha \to -\ell} \frac{x_+^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} = \delta^{[\ell]} \qquad \text{(A II,6;1)}$$

donde hemos puesto

$$x_+^{\alpha-1} = \begin{cases} x^{\alpha-1} & \text{si} \quad x > 0 \, , \\ 0 & \text{si} \quad x < 0 \, . \end{cases}$$

El sumando $I_1(x,m,n,\alpha)$ puede escribirse en la forma equivalente

$$I_1(x,m,n,\alpha) =$$

$$= \sum_{\nu=0}^{\frac{n-2k}{2}-1} (-1)^{\nu} \frac{m^{2\nu}}{\pi^{\frac{n-2}{2}}\, 2^{\alpha+2\nu-1}\, \Gamma(\frac{\alpha}{2})\nu!} \frac{\{S^2\}^{\frac{\alpha-n}{2}+\nu+1-1}}{\Gamma(\frac{\alpha-n}{2}+\nu+1)} .$$

Tomando límites en esta fórmula para $\alpha \to 2k$ obtenemos (si hacemos nuevamente el cambio de índice $\mu = \nu - \frac{n-2k}{2}$)

$$\lim_{\alpha\to 2k} I_1(x,m,n,\alpha) = I_1(x,m,n,2k) =$$

$$= \frac{\{m^2\}^{\frac{n-2k-2}{2}} (-1)^{\frac{n-2k}{2}-1}}{\pi^{\frac{n-2}{2}}\, 2^{n-3}\, (k-1)!} \sum_{\mu=0}^{\frac{n-2k}{2}-1} (-1)^{\mu} \frac{2^{2\mu} m^{-2\mu}}{(\frac{n-2k}{2}-\mu-1)!} \frac{\{S^2\}^{-\mu-1}}{\Gamma(-\mu)} .$$

(A II,6;1)

Si traemos a colación la fórmula (A II,6;1), comprobamos que la fórmula que precede puede escribirse en la forma equivalente

$I_1(x,m,n,2k) =$

$$= \frac{\{m\}^{n-2k-2}(-1)^{\frac{n-2k}{2}-1}}{\pi^{\frac{n-2}{2}}\, 2^{n-3}\,(k-1)!} \sum_{\mu=0}^{\frac{n-2k}{2}-1} (-1)^{\mu} \frac{2^{2\mu}\, m^{-2\mu}}{\left(\frac{n-2k}{2}-\mu-1\right)!}\, \delta^{[\mu]}(S^2).$$

(A II,6;2)

Recordemos que, de acuerdo con la definición (A II,1;1), en la fórmula que precede S^2 tiene el significado

$$S^2 = \begin{cases} x_n^2 - x_1^2 - x_2^2 - \dots - x_{n-1}^2, & \text{si} \quad x \in \Gamma_+ , \\ 0 & \text{si} \quad x \notin \Gamma_+ . \end{cases}$$

Para la definición de $\delta^{[\mu]}(S^2)$, cf. por ejemplo, [1], p. 228.

De (A II,5;3), (A II, 5;6) y (A II,6;2) obtenemos en definitiva

$W_+(x,m,n,2k) =$

$$= \frac{\{m^2\}^{\frac{n-2k-2}{2}}(-1)^{\frac{n-2k-2}{2}}}{\pi^{\frac{n-2}{2}}\, 2^{n-3}\,(k-1)!} \sum_{\mu=0}^{\frac{n-2k}{2}-1} (-1)^{\mu} \frac{2^{2\mu}\, m^{-2\mu}}{\left(\frac{n-2k}{2}-\mu-1\right)!}\, \delta^{[\mu]}(S^2) +$$

$$+ \frac{(-1)^{\frac{n-2k}{2}}\{m^2\}^{\frac{n-2k}{2}}}{\pi^{\frac{n-2}{2}}\, 2^{\frac{2k+n-2}{2}}\,(k-1)!} \; \frac{J_{\frac{n-2k}{2}}\left(\sqrt{m^2 S^2}\right)}{\left\{\sqrt{m^2 S^2}\right\}^{\frac{n-2k}{2}}} . \qquad \text{(A II,6;3)}$$

7. Procediendo con $W_-(x,m,n,\alpha)$ exactamente lo mismo a como acabamos de hacerlo con W_+, llegamos a la fórmula

$$W_-(x,m,n,2k) =$$

$$= \frac{\{m^2\}^{\frac{n-2k-2}{2}} \, (-1)^{\frac{n-2k}{2}-1}}{\pi^{\frac{n-2}{2}} \, 2^{n-3} \, (k-1)!} \sum_{\mu=0}^{\frac{n-2k}{2}-1} (-1)^{\mu} \frac{2^{2\mu} \, m^{-2\mu}}{\left(\frac{n-2k}{2}-\mu-1\right)!} \, \delta^{(\mu)}(s^2) +$$

$$+ \frac{(-1)^{\frac{n-2k}{2}} \, \{m^2\}^{\frac{n-2k}{2}}}{\pi^{\frac{n-2}{2}} \, 2^{\frac{2k+n-2}{2}} \, (k-1)!} \; \frac{J_{\frac{n-2k}{2}}\left\{\sqrt{m^2 \, s^2}\right\}}{\left\{\sqrt{m^2 \, s^2}\right\}^{\frac{n-2k}{2}}} \qquad \text{(A II,7;1)}$$

Señalemos que, en esta fórmula, s^2 tiene el significado

$$s^2 \begin{cases} x_n^2 - x_1^2 - x_2^2 - \dots - x_{n-1}^2 & x \in \Gamma_- \\ 0 \qquad\qquad \text{si} & x \in \Gamma_- \end{cases}$$

De (A II,6;3) y (A II,7;1) obtenemos finalmente, si traemos a colación la fórmula (A II,4;1), la proposición siguiente.

<u>Teorema 27</u>

<u>Hipótesis</u>

a) $n > 4$, par;

b) $< k < \frac{n-2}{2}$.

Tesis

La solución elemental simétrica $\bar{\Delta}(x,m,n,k)$ del operador n-dimensional de Klein-Gordon iterado k veces admite la representación

$$\bar{\Delta}(x,m,n,k) =$$

$$= \frac{\{m^2\}^{\frac{n-2k-2}{2}} \; (-1)^{\frac{n-2k}{2}-1}}{\pi^{\frac{n-2}{2}} \; 2^{n-2} \; (k-1)!} \sum_{\mu=0}^{\frac{n-2k}{2}-1} (-1)^{\mu} \frac{2^{2\mu} \; m^{-2\mu}}{\left(\frac{n-2k}{2} - \mu - 1\right)!} \; \delta^{[\mu]}\{S^2) \; +$$

$$+ \frac{(-1)^{\frac{n-2k}{2}} \; \{m^2\}^{\frac{n-2k}{2}}}{\pi^{\frac{n-2}{2}} \; 2^{\frac{2k+n}{2}} \; (k-1)!} \; \frac{J_{\frac{n-2k}{2}}\left\{\sqrt{m^2 \; S^2}\right\}}{\sqrt{m^2 \; S^2}} \qquad \text{(A II,7;2)}$$

Observemos que, en esta fórmula, S^2 tiene el significado

$$S^2 \begin{cases} x_n^2 - x_1^2 - \cdots - x_{n-1}^2 & \in \Gamma \\ 0 & \notin \Gamma . \end{cases}$$

La fórmula (A II,7;2) coincide con la fórmula (III,3;1) que ha desempeñado un papel decisivo en las consideraciones del Capítulo III.

BIBLIOGRAFIA

[1] I.M. Gelfand and G.E. Shilov. Generalized Functions. Vol. I. Academic Press, New York, 1964.

[2] L. Schwartz. Théorie des distributions. Hermann, Paris, 1966.

[3] J. Leray. Hyperbolic differential equations. Mimeographed lecture notes. Institute of Advanced Study. Princeton, 1952.

[4] C.G. Bollini, J.J. Giambiagi and A. González Domínguez. On the reduction formula of Feinberg and Pais. Journal of Math. Physics, Vol. 6, 1965, pp. 165-166.

[5] G. Feinberg and A. Pais. Phys. Review, Vol. 131, 1963.

[6] G.N. Watson. A treatise on the theory of Bessel functions. Second edition. Cambridge, University Press, 1944.

[7] N. Aronszajn and K.T. Smith. Theory of Bessel potentials. Part I. Ann. Inst. Fourier, 11, 1961, pp. 385-475.

[8] D.W. Bresters. On distributions connected with quadratic forms. S.I.A.M. J. Appl. Math, Vol. 16, 1968, pp. 563-581.

[9] B. Fisher. The generalized function $(x+i0)^{\lambda}$. Proc. Camb. Phil. Soc., Vol. 68, 1970, pp. 707-708.

[10] J.J. Bowman and J.D. Harris. Green's distributions and the Cauchy problem for the iterated Klein-Gordon operator. J. Math. Phys., Vol. 3, 1962, pp. 396-404.

[11] M. Riesz. L' intégrale de Riemann-Liouville et le probleme de Cauchy. Acta Math., Vol. 81, 1949, pp. 1-223.

[12] N.N. Bogoliubov and D.V. Shirkov. Introduction á la théorie quantique des champs. Dunod, Paris, 1960.

[13] C.G. Bollini, J.J. Giambiagi and A. González Domínguez. Analytic regularization and the divergence of the quantum theory of fields. Il Nuovo Cimento, Vol. XXXI, 1964, pp. 550-561.

[14] Bateman Manuscript Project. Tables of integral transforms, Vol. I, Mc. Graw-Hill, New York, 1954.

[15] N.N. Bogoliubov and O.S. Parasiuk. Über die Multiplication der Kausal-funktionen in der Quanten-theorie der Felder. Acta Mathematica, 97, 1957, pp. 227-266.

[16] Relations de dispersion et particules élémentaires. Hermann, Paris, 1960.

[17] E.C. Titchmarsh. Introduction to the theory of Fourier integrals. Oxford. Clarendon Press, 1948.

[18] G. Källen and J. Toll. Integral representations for the vacuum expectation value of three scalar fields. Helvetica Physica Acta, XXXIII, 1960, [illegible]53-772.

[19] Y. Svensson. Relations between Fourier transform and integral representation for two and three point functions. Nuclear Physics, 39, 1962 pp [illegible]-219.

[20] S.Bochner. Vorlesungen über Fouriershe Integrale. Leipzig, Akademische Verlagsgesellschaft, 1932.

[21] Séminaire Schwartz, de la Faculté des Sciences de Paris. Année 1954-1955 (Equations aux dérivées partielles).

[22] A.H. Zemanian. *Generalized Integral transformations*. Interscience Publishers, New York, 1968.

[23] L.Schwartz. *Méthodes mathématiques pour les sciences physiques*. 2ª Edition. Hermann, Paris, 1965.

[24] A. González Domínguez. *Distribuciones*. Curso autobiografiado; segundo cuatrimestre, 1969, en la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales de la Universidad de Buenos Aires.

[25] J. Schwinger. *Quantum Electrodynamics II. Vacuum polarization and self-energy*. Physical Review, Vol. 75, 1949, pp. 651-679.

[26] J.M. Jauch and F. Rohrlich. *The theory of photons and electrons*. Addison-Wesley, Cambridge, Mass, 1955.