

Tesis de Posgrado

Cálculo de factores de forma hadrónicos mediante las reglas de suma dispersivas del álgebra de corrientes y los modelos de Regge y veneziano

Dominguez, Cesáreo Augusto

1971

Tesis presentada para obtener el grado de Doctor en Ciencias Físicas de la Universidad de Buenos Aires

Este documento forma parte de la colección de tesis doctorales y de maestría de la Biblioteca Central Dr. Luis Federico Leloir, disponible en digital.bl.fcen.uba.ar. Su utilización debe ser acompañada por la cita bibliográfica con reconocimiento de la fuente.

This document is part of the doctoral theses collection of the Central Library Dr. Luis Federico Leloir, available in digital.bl.fcen.uba.ar. It should be used accompanied by the corresponding citation acknowledging the source.

Cita tipo APA:

Dominguez, Cesáreo Augusto. (1971). Cálculo de factores de forma hadrónicos mediante las reglas de suma dispersivas del álgebra de corrientes y los modelos de Regge y veneziano. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad de Buenos Aires.
http://digital.bl.fcen.uba.ar/Download/Tesis/Tesis_1385_Dominguez.pdf

Cita tipo Chicago:

Dominguez, Cesáreo Augusto. "Cálculo de factores de forma hadrónicos mediante las reglas de suma dispersivas del álgebra de corrientes y los modelos de Regge y veneziano". Tesis de Doctor. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad de Buenos Aires. 1971.
http://digital.bl.fcen.uba.ar/Download/Tesis/Tesis_1385_Dominguez.pdf

EXACTAS UBA

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales



UBA

Universidad de Buenos Aires

REPUBLICA ARGENTINA

UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES

FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

FCEN-BA.

CALCULO DE FACTORES DE FORMA HADRÓNICOS MEDIANTE
LAS REGLAS DE SUMA DISPERSIVAS DEL ALGEBRA DE
CORRIENTES Y LOS MODELOS DE REGGE Y VENEZIANO

Cesáreo Augusto Dominguez



Tesis para optar al título de Doctor en Física

1385 III

1971

1971

ματαιώτες ματαιώτων

και πάντα ματαιώτες.

San Juan Crisóstomo.

PROLOGO

Uno de los temas de permanente actualidad en la Física Teórica de Altas Energías es sin duda el cálculo de los factores de forma hadrónicos. Ellos no solo proporcionan información acerca de la estructura de las partículas subnucleares sino que también constituyen un "banco de prueba" para muchos de los modelos que intentan describir las interacciones fuertes.

Luego de los trabajos de S. Fubini, ha quedado establecido que las identidades del álgebra de corrientes permiten relacionar factores de forma con amplitudes de dispersión de corrientes sobre hadrones (procesos semi-débiles). Esta relación se logra a través de las llamadas reglas de suma dispersivas. Un paso no trivial ha sido dado por R. Jengo y E. Remiddi al demostrar la compatibilidad entre las identidades del álgebra de corrientes y la descripción de las amplitudes de dispersión de corrientes sobre hadrones por medio de los modelos de Regge y Veneziano para interacciones fuertes. Esta demostración ha sido realizada con relación al cálculo del factor de forma vectorial del pión. En el presente trabajo* hemos generalizado esta idea a los efectos de hallar los factores de forma axiales del pión, vectoriales y axiales del nucleón y del decaimiento leptón-

* Esta Tesis está basada en cuatro publicaciones realizadas en colaboración con el Dr. O. S. Zandron.

nico del kaon ($K_{\ell 3}$). Se han obtenido tambien relaciones de escala generalizadas entre las funciones de vértice piónicas y nucleónicas. En todos los casos los resultados son sumamente satisfactorios encontrándose un excelente acuerdo con los datos experimentales disponibles.

Otro enfoque del problema lo constituye el modelo del espurión desarrollado por Namiki y Ohba para obtener el factor de forma vectorial del pión. Nosotros hemos extendido este modelo al caso de las funciones de vértice axiales y escalar del pión hallando resultados que poseen características poco satisfactorias. Más aún, estos están en desacuerdo con las expresiones obtenidas por medio de las reglas de suma dispersivas y los modelos de Regge y Veneziano. Luego de efectuar un análisis crítico de los resultados concluimos que el modelo del espurión proporciona un método muy limitado y de dudosa validez para el cálculo de factores de forma piónicos.

Los Capítulos 1 - 4 del presente trabajo constituyen una brevísima introducción al tema, y allí se definen los conceptos fundamentales que se utilizan luego en los capítulos siguientes. Esta Introducción dista mucho de ser completa ya que no ha sido la intención escribir un "artículo de review". En cambio, se proporciona una abundante bibliografía citándose los trabajos más significativos.

INDICE

PROLOGO	i
CAPITULO 1: SIMETRIAS UNITARIAS	
1.1 El Grupo $SU(2)$	1
1.2 El Grupo $SU(3)$	5
CAPITULO 2: ALGEBRA DE CORRIENTES	
2.1 Introducci3n.....	16
2.2 T3rminos de Schwinger.....	22
2.3 Reglas de Suma Dispersivas.....	25
CAPITULO 3: MODELO DE REGGE	
3.1 Introducci3n.....	34
3.2 Expansi3n en Ondas Parciales.....	35
3.3 Polos de Regge.....	37
3.4 Transformada de Sommerfeld y Watson.....	41
3.5 Dispersi3n a Alta Energ3a.....	44
CAPITULO 4: MODELO DE VENEZIANO	
4.1 Introducci3n.....	53
4.2 F3rmula de Veneziano.....	58

CAPITULO 5: EL FACTOR DE FORMA VECTORIAL DEL PION

5.1 Introducción..... 64

5.2 Identidad de Ward-Takahashi y Reglas de Suma
 Dispersivas..... 66

5.3 El Caso $k_1^2 \neq 0$ 77

5.4 Aplicación del Modelo de Veneziano..... 79

5.5 Comparación con los Resultados Experimentales..... 84

5.6 El Conmutador de dos Corrientes Vectoriales..... 89

5.7 Conclusiones..... 90

CAPITULO 6: LOS FACTORES DE FORMA AXIALES DEL PION

6.1 Comportamiento Asintótico..... 91

6.2 Aplicación del Modelo de Veneziano..... 94

CAPITULO 7: EL MODELO DEL ESPURION Y LOS FACTORES DE
FORMA VECTORIAL ESCALAR Y AXIALES DEL PION

7.1 Introducción..... 98

7.2 El Factor de Forma Vectorial del Pión..... 100

7.3 Los Factores de Forma Axiales del Pión..... 106

7.4 El Factor de Forma Escalar del Pión..... 108

7.5 Conclusiones..... 110

CAPITULO 8: LOS FACTORES DE FORMA VECTORIALES DEL NUCLEON

8.1 Comportamiento Asintótico..... 111

8.2 Resultados Experimentales..... 119

CAPITULO 9: LOS FACTORES DE FORMA AXIALES DEL NUCLEON

9.1 Comportamiento Asintótico..... 123

9.2 Relaciones de Escala y Resultados Experimentales.. 128

CAPITULO 10: LOS FACTORES DE FORMA DEL DECAIMIENTO

LEPTONICO DEL KAON $K_{\ell 3}$

10.1 Introducci3n..... 132

10.2 Reglas de Suma Dispersivas y Factores de Forma
de $K_{\ell 3}$ 133

10.3 Aplicaci3n del Modelo de Veneziano..... 137

10.4 Comparaci3n con los Resultados Experimentales.... 145

APENDICE..... 150

AGRADECIMIENTOS..... 152

BIBLIOGRAFIA..... 153

CAPITULO 1

SIMETRIAS UNITARIAS *

1.1 El Grupo SU(2)

El principio de independencia de la carga para las fuerzas nucleares (interacciones fuertes) es un hecho bien establecido desde los albores de la Física Nuclear. Nace así la idea de representar a la familia protón-neutrón como a una sola partícula, el nucleón, que puede existir en dos estados posibles (uno correspondiente al protón y el otro al neutrón). Debido a la simetría mencionada existen tres operadores que conmutan con el Hamiltoniano H , a saber: i) Q , porque la carga experimentalmente se conserva, ii) Q^+ , el operador de creación de carga, y iii) Q^- , el operador de destrucción de carga. Las relaciones de conmutación de éstos dos últimos con el Hamiltoniano son las que derivan de la hipótesis de independencia de carga.

Naturalmente la interacción electromagnética rompe la simetría y es probable que a esto se deba la pequeña diferencia de masa entre protón y neutrón.

Es posible resumir todo lo anterior diciendo que las interacciones fuertes son invariantes frente a rotaciones en un espacio abstracto de tres dimensiones, el espacio de carga. Como se sabe, el grupo de rotaciones es homomorfo al grupo SU(2) formado por las matrices unitarias, unimodulares y de 2×2 .

* Ver refs. (1-14).

Las relaciones de conmutación (i.e. el álgebra) de los operadores de isoespín se obtiene a partir de la definición

$$I_i = \frac{\tau_i}{2}$$

donde τ_1 , τ_2 y τ_3 son las matrices de Pauli

$$\tau_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \tau_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \tau_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

En efecto, como

$$[\tau_i, \tau_j] = 2i \epsilon_{ijk} \tau_k,$$

resulta que

$$[I_i, I_j] = i \epsilon_{ijk} I_k.$$

Los dos estados de nucleón, el protón y el neutrón se pueden definir como (los autoestados de I_3)

$$p = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad n = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

y de esta forma, $I_3 = +\frac{1}{2}$ para el protón (o el antineutrón) e $I_3 = -\frac{1}{2}$ para el neutrón (o el antiprotón). Llamando B al número bariónico ($B = +1$ para nucleones y $B = -1$ para antinucleones), resulta la siguiente relación para la carga eléctrica Q

$$Q = I_3 + \frac{B}{2}$$

Cualquier rotación en el isoespacio puede ser caracterizada completamente por su efecto sobre el espinor bidimensional covariante

$$N = \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \end{bmatrix}$$

tal como lo describe la ecuación

$$N' = U N$$

El doblete ($N_1 ; N_2$) de isoespín $I = \frac{1}{2}$ constituye una base para la representación fundamental del grupo SU(2). Además del isoespinor covariante ya definido, es posible definir un isoespinor contravariante

$$\bar{N} = (N^1 \quad N^2) ,$$

que se transforma de tal manera que

$$\bar{N} N = \sum_a \bar{N}^a N_a = \text{invariante.}$$

Así como N describe las propiedades de isotransformación de los estados básicos o "partículas" p y n , \bar{N} describe las del doblete de "antipartículas" \bar{p} y \bar{n} . Es posible construir multipletes de mayor dimensión efectuando productos directos entre los isoespinores N y/o \bar{N} , aunque naturalmente no todos darán lugar a una representación irreducible. Se pueden formar tensores con p índices contravariantes y q covariantes

$$T \begin{matrix} \alpha_1 & \cdots & \alpha_p \\ \beta_1 & \cdots & \beta_q \end{matrix} ,$$

simetrizando luego los índices superiores y los inferiores separadamente y tomando trazas, se construyen tensores irreducibles con $p + q + 1$ componentes independientes que corresponden a isoespín $I = \frac{1}{2} (p + q)$.

1.2 El Grupo SU(3)

A los efectos de explicar las propiedades de nuevas partículas descubiertas en la década del 50, se introduce un nuevo número cuántico, la extrañeza S^* . Al igual que el número bariónico, S se conserva en todos los procesos de interacciones fuertes. En forma muy resumida podemos decir que la característica fundamental de las partículas extrañas es que son producidas via interacción fuerte, pero decaen via interacción débil. Esto es, la vida media resulta muy grande en comparación con la que corresponde a estados que decaen por intermedio de procesos fuertes.

Para generalizar el grupo SU(2) será necesario entonces agregar al menos un ente con $S \neq 0$. De esta manera se completará el cuadro con las partículas extrañas. Por otra parte, como el isospín sigue siendo un buen número cuántico, el nuevo grupo de simetría deberá contener a SU(2) como subgrupo. Luego de muchos intentos ha quedado establecido que la generalización adecuada de SU(2) es el grupo SU(3), caracterizado por las matrices de 3×3 , unitarias y unimodulares. El estado básico de SU(3) es el espinor de tres componentes

$$q = \begin{bmatrix} p \\ n \\ \lambda \end{bmatrix},$$

que frente a transformaciones U de SU(3) se transforma como

* Ver e.g. refs. (13-15).

$$q \rightarrow q' = U q ,$$

donde U es una matriz de 3×3 , unitaria y unimodular.

El espinor q es una generalización del isoespinor N de SU(2), mientras que la generalización de \bar{N} es el espinor contravariante

$$\bar{q} = (\bar{p} \quad \bar{n} \quad \bar{\lambda}) ,$$

que se transforma de tal manera que $\bar{q} q$ sea un invariante. Los tripletes $(p \quad n \quad \lambda)$ y $(\bar{p} \quad \bar{n} \quad \bar{\lambda})$ forman así las bases para las dos representaciones fundamentales de SU(3). Las "partículas" p, n y λ (\bar{p}, \bar{n} y $\bar{\lambda}$) han sido designadas por Gell-Mann⁽³⁾ con el nombre de quarks (antiquarks). Estos tripletes no han sido hallados aún en la naturaleza* ; solo representaciones de mayor dimensión parecen tener existencia real (aquellas con carga, hipercarga y número bariónico enteros).

Los quarks p y n forman un isodoublete ($I = \frac{1}{2}$) de extrañeza $S = 0$, mientras que λ es un isoescalar ($I = 0$) al que se asigna $S = -1$. Es posible mostrar que se necesitan tres quarks para construir un barión y un par quark-antiquark para formar un mesón, y por lo tanto, a cada quark se le asigna un número bariónico $B = 1/3$. De esta forma la hipercarga $Y = S + B$ vale $1/3$ para p y n, y $-2/3$ para λ . La relación de Gell-Mann y Nishijima

$$Q = I_3 + \frac{Y}{2}$$

*Cierta evidencia experimental ha sido obtenida recientemente, ver refs. (16-22).

(que generaliza la correspondiente a SU(2) donde $S = 0$), da entonces las siguientes cargas e_q para los quarks

	B	I	I_3	Y	S	e_q/e
p	1/3	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1/3	0	2/3
n	1/3	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1/3	0	-1/3
λ	1/3	0	0	-2/3	-1	-1/3

donde e es la carga del protón. Naturalmente, cambiando de signo a I_3 , S, B, Y y e_q , se obtienen los correspondientes a los antiquarks.

Es posible representar gráficamente los tripletes básicos de SU(3) de la siguiente forma

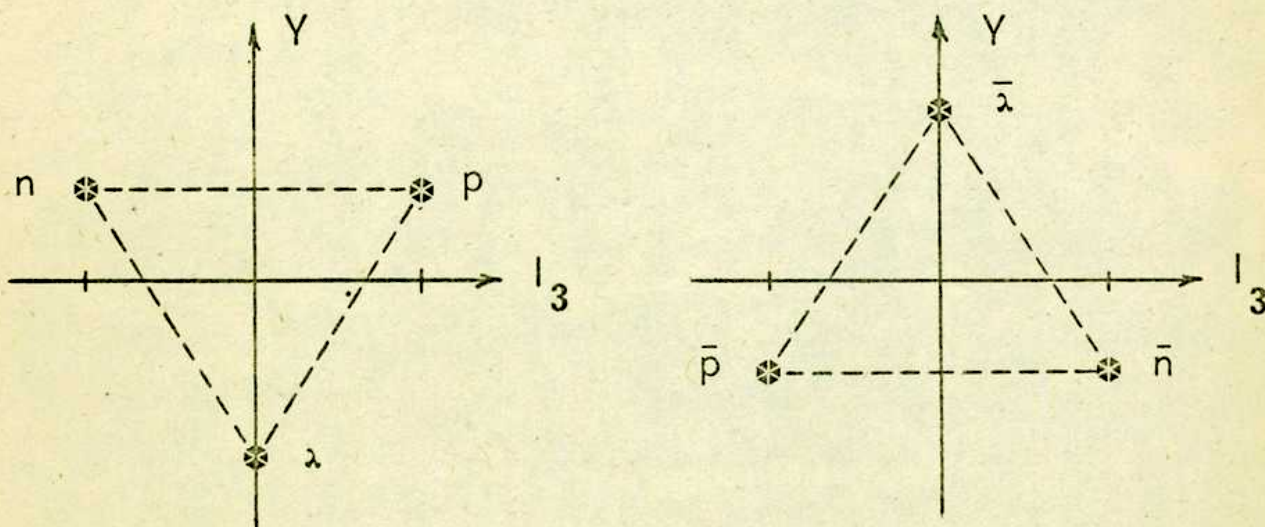


Fig.1

Análogamente al caso de SU(2), es posible obtener representaciones de mayor dimensión de SU(3) formando productos directos entre los espinores básicos q y \bar{q} aplicando el método discutido en la sección anterior. Los resultados son los siguientes:

a) A partir de q y \bar{q} , formando su producto directo se obtiene un singulete y un octeto. Esto corresponde e.g. al noneto de mesones pseudoescalares ($J^P = 0^-$) o de mesones vectoriales ($J^P = 1^-$). En ambos casos no resulta posible asignar en forma terminante la partícula que correspondería al singulete, e.g. para los mesones vectoriales se cree que una combinación lineal de ϕ y ω corresponde al centro del octeto y otra combinación lineal al singulete (Ver figs. 2 y 3).

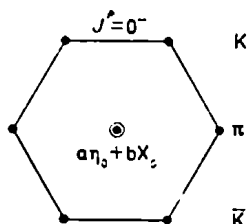


Fig 2

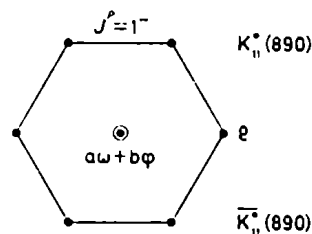


Fig 3

b) A partir de una configuración de tres quarks se obtiene el octeto de bariones ($J^P = \frac{1}{2}^+$) (ver fig. 4), y el decuplete de bariones ($J^P = \frac{3}{2}^+$) (ver fig. 5).

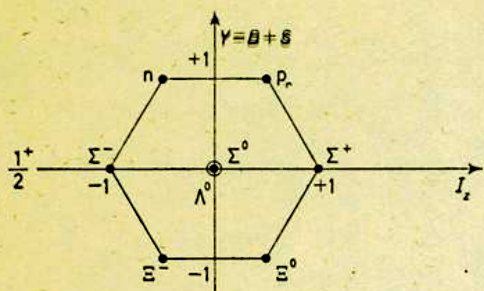


Fig 4

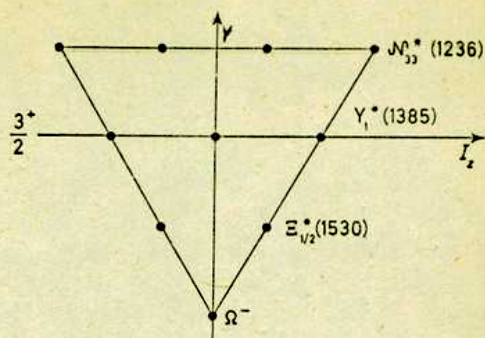


Fig 5

Discutiremos a continuación las características fundamentales del grupo $SU(3)$. Los generadores λ_i de éste grupo se definen como

$$\lambda_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \lambda_2 = \begin{bmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \lambda_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_5 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \lambda_6 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_7 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{bmatrix}, \quad \lambda_8 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

Las λ_i ($i = 1, 2, 3$) generan el SU(2) tal como puede verse de su definición. Los generadores λ_i del grupo SU(3) verifican las siguientes relaciones de conmutación

$$[\lambda_i, \lambda_j] = 2i f_{ijk} \lambda_k,$$

donde las constantes de estructura f_{ijk} de SU(3) generalizan a las totalmente antisimétricas ϵ_{ijk} de SU(2). Las f_{ijk} son también totalmente antisimétricas en i, j, k , siendo los elementos no nulos, los siguientes

i	j	k	f_{ijk}
1	2	3	1
1	4	7	$\frac{1}{2}$
1	5	6	$-\frac{1}{2}$
2	4	6	$\frac{1}{2}$
2	5	7	$\frac{1}{2}$
3	4	5	$\frac{1}{2}$
3	6	7	$-\frac{1}{2}$
4	5	8	$\sqrt{3}/2$
6	7	8	$\sqrt{3}/2$

La forma en que se relacionan los generadores de SU(3) con e.g. el octeto de mesones pseudoescalares y la combinación apropiada de pares de quark - antiquark, se muestra en la tabla de la pag. siguiente. Estos generadores pueden identificarse con las cargas electromagnéticas o débiles, y en la suposición de que SU(3) constituye un modelo de simetría exacta, las relaciones de conmutación

$$[Q_i, Q_j] = i f_{ijk} Q_k$$

serán exactas. Como veremos en la próxima sección, la hipótesis básica del álgebra de corrientes no es más que la generalización de éstas relaciones de conmutación.

Partícula	I	I_3	Y	Combinación de quarks
π^+	1	1	0	$\bar{q} \left(\frac{\lambda_1 + i \lambda_2}{2} \right) q = \bar{q}_1 q_2$
π^0	1	0	0	$\bar{q} \frac{\lambda_3}{\sqrt{2}} q = \frac{1}{\sqrt{2}} (\bar{q}_1 q_1 - \bar{q}_2 q_2)$
π^-	1	-1	0	$\bar{q} \left(\frac{\lambda_1 - i \lambda_2}{2} \right) q = \bar{q}_2 q_1$
K^+	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	$\bar{q} \left(\frac{\lambda_4 + i \lambda_5}{2} \right) q = \bar{q}_1 q_3$
K^0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1	$\bar{q} \left(\frac{\lambda_6 + i \lambda_7}{2} \right) q = \bar{q}_2 q_3$
K^-	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	-1	$\bar{q} \left(\frac{\lambda_4 - i \lambda_5}{2} \right) q = \bar{q}_3 q_1$
\bar{K}^0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	-1	$\bar{q} \left(\frac{\lambda_6 - i \lambda_7}{2} \right) q = \bar{q}_3 q_2$
η^0	0	0	0	$\bar{q} \frac{\lambda_8}{\sqrt{2}} q = \frac{1}{\sqrt{6}} (\bar{q}_1 q_1 + \bar{q}_2 q_2 - 2 \bar{q}_3 q_3)$

Si la simetría SU(3) fuera exacta, todos los miembros de un multiplete tendrían que tener la misma masa. Lo mismo vale naturalmente para SU(2) donde a la pequeña diferencia de masa entre el protón y el neutrón

$$m_n - m_p \approx 1.3 \text{ MeV}$$

se le adscribe un origen electromagnético. De esta forma, a los efectos de las interacciones fuertes, el grupo SU(2) es un grupo de simetría exacta. Sin embargo no sucede lo mismo con el grupo SU(3) debido a que las diferencias de masa son relativamente grandes, e.g. $m_E - m_N \approx 380 \text{ MeV}$. A pesar de esto, dado que las masas de los bariones son mucho mayores que estas diferencias, se ha especulado sobre la existencia de dos clases de interacciones fuertes, a saber :

- i) Interacciones muy fuertes. Estas se supone que son invariantes bajo transformaciones de SU(3) y serían las responsables de la principal contribución a la masa de un barión.
- ii) Interacciones moderadamente fuertes. Romperían la simetría SU(3) siendo responsables de los desdoblamientos de masa.

Suponiendo una forma particular para la interacción responsable del desdoblamiento de masa, es posible obtener en el orden más bajo de teoría de perturbaciones la siguiente fórmula para la masa de una partícula (Gell-Mann y Okubo)

$$m = m_0 + m_1 Y + m_2 \left(I (I + 1) - \frac{Y^2}{4} \right),$$

donde m_0 , m_1 y m_2 son parámetros ajustables. Usando esta expresión se obtiene para el octeto de bariones

$$\frac{m_N + m_{\Xi}}{2} = \frac{3 m_{\Lambda} + m_{\Sigma}}{4},$$

la cual se verifica bastante bien: el término izquierdo vale aproximadamente 1129 MeV y el derecho 1134 MeV, es decir la discrepancia es de solo 5 MeV. En el caso del decuplete de bariones la fórmula de masa predice un espaciamiento constante i.e.

$$\Delta m = \text{constante}.$$

La predicción del Ω^- confirmada posteriormente en forma experimental, con una masa aproximada a la predicha constituyó una confirmación no solo de la fórmula de masa (que depende de la forma en que se rompa la simetría SU(3)) sino de SU(3).

La aplicación al caso del octeto de mesones pseudoescales da resultados compatibles con la experiencia siempre que las masas sean reemplazadas por sus cuadrados (Feynman), viz.

$$\frac{m_K^2 + m_{\bar{K}}^2}{2} = \frac{3 m_{\eta}^2 + m_{\pi}^2}{4}$$

Finalmente en el octeto de mesones vectoriales se obtiene también acuerdo con la experiencia, aceptando la teoría de

la mezcla $\omega - \phi$ ya mencionada.

En conclusión, a diferencia de SU(2), la simetría SU(3) no es exacta para las interacciones fuertes aunque en muchos casos será posible suponer su validez aproximada. Como veremos más adelante hay muchos resultados de interés que no se ven afectados mayormente por el rompimiento de la simetría. En particular, en el caso de mesones las diferencias serán pequeñas.

CAPITULO 2

ALGEBRA DE CORRIENTES *

2.1 Introducción

Los operadores de corrientes juegan un papel primordial en la Física de Partículas, e.g. las interacciones electromagnéticas y débiles se describen en términos de dichos operadores. Estos pueden ser considerados como observables en el siguiente sentido: determinados elementos de matriz de los operadores de corriente están íntimamente vinculados a cantidades directamente medibles tales como amplitudes de decaimiento, secciones eficaces, factores de forma, etc.

Por otra parte, las corrientes aparecen también en relación con grupos de simetría. El teorema de Noether asegura que si el Lagrangiano es invariante respecto de un grupo de simetría generado por un conjunto de operadores Q_1, Q_2, \dots , entonces existe un correspondiente conjunto de corrientes $j_1^\mu(x), j_2^\mu(x), \dots$ conservadas tales que

$$Q_i = \int d^3x j_i^0(\bar{x}, t) \quad i = 1, 2, \dots$$

* Ver refs. (25-42).

Como el álgebra característica del grupo fija sobre sus generadores las siguientes reglas de conmutación

$$(2.1) \quad [Q_i, Q_j] = i C_{ijk} Q_k,$$

ella impondrá también condiciones importantes sobre las corrientes conservadas asociadas a la simetría. Aún cuando el Lagrangiano no sea invariante frente a transformaciones de un dado grupo, el teorema de Noether permite también construir un conjunto de corrientes locales asociadas a los generadores del grupo. En este caso, naturalmente las corrientes no se conservan y los generadores no serán independientes del tiempo. A pesar de esto las relaciones algebraicas del tipo ec.(2.1) que caracterizan la estructura del grupo de transformaciones, más que las propiedades dinámicas del sistema, pueden sobrevivir. Un ejemplo bien conocido de una corriente que representa un observable y al mismo tiempo da origen a una carga que genera un grupo de simetría exacto (SU(2)), es la corriente electromagnética

$$j_{\mu}^{\text{el,Hadron.}} = e \left(j_{\mu}^{(s)} + j_{\mu,3}^{(v)} \right).$$

Otro ejemplo lo proporciona la parte vectorial de la corriente hadrónica débil que conserva extrañeza, definida a través del Hamiltoniano como

$$H_W^{\Delta S = 0}(x) = G \left[j_{\mu}^{(v)}(x) + j_{\mu}^{(A)}(x) \right] x$$

$$(2.2) \quad x \bar{\psi}_e(x) \gamma_{\mu} (1 + \gamma_5) \psi_{\nu}(x) + \text{c.h.}$$

De acuerdo con la hipótesis de la conservación de la corriente vectorial, la carga asociada a ésta corriente **está íntimamente** ligada a los generadores del grupo SU(2), que como ya hemos discutido, constituye una simetría exacta en las interacciones fuertes.

El objetivo del álgebra de corrientes es generalizar estas relaciones entre observables y elementos con propiedades algebraicas simples, al caso más general de un grupo de simetría rota. En otras palabras, generalizar las relaciones de conmutación.

En las interacciones débiles, además de las corrientes vectoriales $j_{\nu}^{(V)}$ aparecen corrientes axiales (pseudovectoriales) $j_{\nu}^{(A)}$ que se transforman como las componentes de un isovector. Por lo tanto, ambas clases de corrientes satisfacen

$$\left[Q_i, j_{\mu, k}(x) \right] = i \epsilon_{ikr} j_{\mu, r}(x) .$$

En analogía con los operadores de isospín (cargas vectoriales) es posible definir de la siguiente manera las cargas axiales:

$$Q_i^5 = \int d^3x j_{0,i}^{(A)}(x)$$

Las corrientes axiales se conservarán solo si

- a) existe una simetría exacta, con las cargas vectoriales y axiales actuando como generadores (SU(2) x SU(2)).
Esto implica que todos los hadrones tendrían que ocurrir como dobletes de paridad, o
- b) existe una simetría espontáneamente rota, i.e. deberían

existir partículas de masa nula con los mismos números cuánticos de los piones.

Ninguna de estas dos posibilidades se da en la naturaleza, pero debido a que la masa del pión es pequeña en comparación con las masas del resto de los hadrones, es posible considerar la posibilidad b) como aproximadamente válida. De esta forma se postula que las cargas axiales dependientes del tiempo satisfacen, en la forma de relaciones de conmutación a tiempos iguales (ETCR), el mismo álgebra que las cargas independientes del tiempo, en el límite de una simetría espontáneamente rota, i.e.

$$(2.3) \quad [Q_i^5(x_0), Q_j^5(x_0)] = i \epsilon_{ijk} Q_k \quad .$$

Este postulado no es nada trivial debido a que se supone que a) existe el límite a tiempos iguales de las relaciones de conmutación entre cargas axiales.

b) Las ETCR tienen la forma (2.3).

Estas hipótesis pueden ser generalizadas al caso de simetrías superiores como e.g. SU(3). De esta manera se puede nuevamente formular la ruptura de simetría como ETCR entre las correspondientes cargas de SU(3). Estas últimas se obtienen, en analogía con SU(2), a partir de

$$(2.4) \quad Q_i = \int d^3x \ j_{0,i}^{(v)}(x) \quad (i=1, \dots, 8).$$

Es necesario introducir además del Hamiltoniano electromagnético

$$H_{el} = e \int j_{\nu}^{el} A^{\nu} \quad ,$$

y del Hamiltoniano débil con $\Delta S = 0$ (ec. (2.2)), el Hamiltoniano H_W con $|\Delta S| = 1$, i.e.

$$H_W^{|\Delta S|=1} = G \left[j_{\nu, 4+i5}^{(V)}(x) + j_{\nu, 4+i5}^{(A)}(x) \right] \cdot x$$

$$x \bar{\psi}_e(x) \gamma_{\nu} (1 - \gamma_5) \psi_{\nu}(x) + \text{c.h.} ,$$

donde $j_{\nu, i}^{(V, A)}$ ($i=1, \dots, 8$) forman un octeto de corrientes (uno vectorial y el otro axial) en el límite exacto de SU(3). En analogía con las cargas vectoriales de SU(3), ec.(2.4), es posible definir las cargas axiales

$$Q_i^5 = \int d^3x j_{0, i}^{(A)}(x) \quad (i=1, \dots, 8).$$

El total de las 16 cargas, ocho vectoriales y ocho axiales, constituirá el álgebra de SU(3)xSU(3) en el límite de simetría. El hecho de que ésta en realidad se rompe es teniendo en cuenta nuevamente requiriendo el álgebra de SU(3) x SU(3) como un álgebra de conmutadores de éstas cargas (dependientes del tiempo) a tiempos iguales, viz.

$$\begin{aligned} [Q_i(x_0), Q_j(x_0)] &= i f_{ijk} Q_k(x_0) \\ (2.5) \quad [Q_i(x_0), Q_j^5(x_0)] &= i f_{ijk} Q_k^5(x_0) \\ [Q_i^5(x_0), Q_j^5(x_0)] &= i f_{ijk} Q_k(x_0) \end{aligned}$$

Naturalmente esto es una hipótesis: la hipótesis fundamental del álgebra de corrientes.

Pasamos ahora a discutir los conmutadores entre las corrientes. En una teoría local de campos, el álgebra de las cargas sólo fija el término proporcional a la función δ tridimensional en los conmutadores entre corrientes, e.g. en el caso de SU(3)

$$\left[j_{0,i}^{(v)}(x), j_{0,k}^{(v)}(y) \right] = i f_{ikr} j_{0,r}^{(v)}(x) \delta(\bar{x} - \bar{y}) + \dots$$

Los términos sucesivos (indicados por la línea de puntos) que eventualmente puedan aparecer son proporcionales a las derivadas de la δ . En la próxima sección analizaremos las condiciones requeridas para que éstos términos puedan ser ignorados. Por el momento supondremos que no aparecen y completamos las hipótesis del álgebra de corrientes con los siguientes conmutadores

$$\begin{aligned} \left[j_{0,i}^{(v)}(x), j_{\mu,k}^{(v)}(y) \right]_{x_0=y_0} &= i f_{ikr} j_{\mu,r}^{(v)}(x) \delta(\bar{x} - \bar{y}) \\ (2.6) \left[j_{0,i}^{(v)}(x), j_{\mu,k}^{(A)}(y) \right]_{x_0=y_0} &= i f_{ikr} j_{\mu,r}^{(A)}(x) \delta(\bar{x} - \bar{y}) \\ \left[j_{0,i}^{(A)}(x), j_{\mu,k}^{(v)}(y) \right]_{x_0=y_0} &= i f_{ikr} j_{\mu,r}^{(A)}(x) \delta(\bar{x} - \bar{y}) \\ \left[j_{0,i}^{(A)}(x), j_{\mu,k}^{(A)}(y) \right]_{x_0=y_0} &= i f_{ikr} j_{\mu,r}^{(v)}(x) \delta(\bar{x} - \bar{y}) \end{aligned}$$

A partir de (2.6) es posible obtener las relaciones de conmutación entre cargas y corrientes.

En conclusión, las relaciones de conmutación (2.5) y (2.6) constituyen el postulado básico del álgebra de corrientes. A partir de los mismos es posible obtener fundamentalmente tres importantes resultados: i) Teoremas de baja energía, es decir predicciones sobre los valores de ciertas amplitudes cerca de los umbrales de reacción; ii) Fórmulas de masa para los hadrones y iii) Reglas de suma para los factores de forma. En todos los casos la concordancia con la experiencia ha sido satisfactoria, por lo que el álgebra de corrientes constituye un modelo dinámico aceptable de las interacciones fuertes. En el presente trabajo discutiremos en detalle sólo la última aplicación, es decir el cálculo de factores de forma hadrónicos a partir de reglas de suma dispersivas. Para los otros tópicos nos remitimos a la bibliografía citada.

2.2 Términos de Schwinger *

Es posible mostrar mediante un ejemplo sencillo que existe cierta inconsistencia en la suposición de la validez de las ecs.(2.6). Para ello consideramos el conmutador entre dos corrientes conservadas

$$\left[j_{0,i}(x), j_{\nu,i}(y) \right]_{x_0=y_0} = 0 \quad , \quad \left[j_{0,i}(x), \bar{\nabla} \cdot \bar{j}_i(y) \right]_{x_0=y_0} = 0$$

donde los índices de simetría interna se han hecho iguales

* Ver en especial refs.(37-39).

por simplicidad. En virtud de la conservación de las corrientes resulta

$$\nabla \cdot \vec{j}_i(y) = - \partial^0 j_{0,i}(y) ,$$

y si $x = y$ se obtiene

$$[j_{0,i}(0), \partial^0 j_{0,i}(0)] = - i [j_{0,i}(0), [H, j_{0,i}(0)]] = 0 .$$

Tomando el valor de expectación de vacío de la ecuación anterior, se tiene

$$0 = \langle 0 | [j_{0,i}(0), [H, j_{0,i}(0)]] | 0 \rangle ,$$

donde H es el Hamiltoniano de las interacciones fuertes, e insertando un conjunto completo de estados intermedios $|n\rangle$ resulta

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_n \langle 0 | j_{0,i}(0) | n \rangle \langle n | [H, j_{0,i}(0)] | 0 \rangle - \\ &- \sum_n \langle 0 | [H, j_{0,i}(0)] | n \rangle \langle n | j_{0,i}(0) | 0 \rangle = \\ &= 2 \sum_n \left| \langle 0 | j_{0,i}(0) | n \rangle \right|^2 E_n , \end{aligned}$$

Es decir

$$\sum_n E_n \left| \langle 0 | j_{0,i}(0) | n \rangle \right|^2 = 0 ,$$

que carece de sentido pues $E_n \geq 0$. La conclusión obvia es que la hipótesis de partida no es correcta y que además del término proporcional a la delta tendrá que haber otros. Esta peculiaridad aparece sólo en los conmutadores entre corrientes, ya que para conmutadores de cargas con cargas, cargas con corrientes y aún densidades de carga con densidades de carga, no existen dificultades. Schwinger ha sugerido que la forma correcta de las relaciones de conmutación podría ser

$$[j_{0,i}(0), \bar{j}_k(\bar{r}, 0)] = i f_{ikr} \bar{j}_r(\bar{r}, 0) \delta(\bar{r}) + C_{ikr} \bar{\nabla} \delta(\bar{r}) + \dots,$$

donde la línea de puntos indica que pueden aparecer derivadas superiores de la función delta. Como mencionamos en la sección anterior, en una teoría local de campos sólo queda determinado el término proporcional a la delta. Es decir, C_{ikr} (y eventualmente los siguientes) es desconocido. Si se supone que los C_{ikr} son sólo números y no operadores, los términos de gradientes no afectarán a las relaciones de conmutación integradas. Debido a que en las reglas de suma dispersivas siempre aparecen conmutadores integrados, los términos de Schwinger no afectarán los resultados, aunque naturalmente habrá que aceptar que aquellos son números.

Lamentablemente es poco lo que se conoce sobre los mencionados términos aún cuando su estudio constituye uno de los temas de permanente actualidad del álgebra de corrientes. En lo que sigue supondremos que los términos de Schwinger pueden ser efectivamente ignorados en las rela-

ciones de conmutación integradas, no ocupándonos más de su existencia. Si se quiere, esta suposición puede agregarse a los postulados del álgebra de corrientes. Esto naturalmente encuentra su justificación en el hecho fundamental de que las predicciones del modelo concuerdan bastante bien con la experiencia.

2.3 Reglas de Suma Dispersivas

Consideraremos la siguiente amplitud definida fuera de la capa de masa

$$(2.7) \quad T_{\mu\nu}^{ij} = i \int d^4x \exp[ik_2x] \theta(x_0) \langle p_2 | [J_\mu^i(x), J_\nu^j(0)] | p_1 \rangle$$

que corresponde al proceso de dispersión de la fig.1, donde J_μ^i y J_ν^j representan corrientes (i, j son índices de simetría interna), y p_1 y p_2 , partículas de espín cero. Por el momento no especificaremos la naturaleza vectorial o axial de las corrientes.

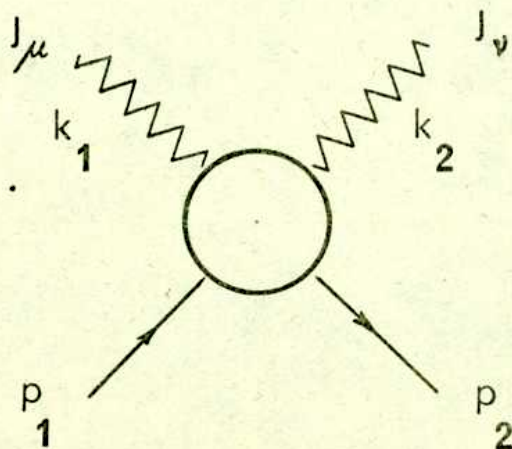


Fig.1

Asociada a la amplitud $T_{\mu\nu}$ definiremos (su parte imaginaria) la siguiente

$$(2.8) \quad t_{\mu\nu}^{ij} = \frac{1}{2} \int d^4x \exp[ik_2 x] \langle p_2 | [J_\mu^i(x), J_\nu^j(0)] | p_1 \rangle .$$

Introducimos ahora las variables cinemáticas

$$P = p_1 + p_2 \quad , \quad Q = k_1 + k_2 \quad , \quad \Delta = p_2 - p_1$$

$$(2.9) \quad \nu = k_1 \cdot P = k_2 \cdot P \quad , \quad t = \Delta^2 .$$

Las amplitudes $T_{\mu\nu}$ y $t_{\mu\nu}$ admiten una descomposición en términos de amplitudes escalares invariantes y libres de singularidades cinemáticas, de la forma

$$(2.10) \quad \begin{aligned} T_{\mu\nu} = & A_0 \xi_{\mu\nu} + A P_\mu P_\nu + A_1 P_\mu Q_\nu + A_2 P_\mu \Delta_\nu + \\ & + A_3 Q_\mu Q_\nu + A_4 Q_\mu P_\nu + A_5 Q_\mu \Delta_\nu + \\ & + C \Delta_\mu P_\nu + C_1 \Delta_\mu Q_\nu + C_2 \Delta_\mu \Delta_\nu \quad , \end{aligned}$$

$$(2.11) \quad \begin{aligned} t_{\mu\nu} = & a_0 \xi_{\mu\nu} + a P_\mu P_\nu + a_1 P_\mu Q_\nu + a_2 P_\mu \Delta_\nu + \\ & + a_3 Q_\mu Q_\nu + a_4 Q_\mu P_\nu + a_5 Q_\mu \Delta_\nu + \\ & + c \Delta_\mu P_\nu + c_1 \Delta_\mu Q_\nu + c_2 \Delta_\mu \Delta_\nu \quad , \end{aligned}$$

donde $A_0, A_1, \dots, a_0, a_1, \dots$, dependen de $\nu, t, k_1^2, y k_2^2$.

La relación matemática entre $T_{\mu\nu}$ y $t_{\mu\nu}$ puede expresarse como

$$(2.12) \quad T_{\mu\nu} = H (t_{\mu\nu}) ,$$

donde H significa transformada de Hilbert con respecto a la variable ν , y (2.12) se entiende válida respecto de las componentes de $T_{\mu\nu}$ y $t_{\mu\nu}$ desarrollada en invariantes según (2.10) y (2.11). En otras palabras, se está suponiendo que todas las amplitudes de la descomposición invariante satisfacen relaciones de dispersión sin subtracciones, viz.

$$(2.13) \quad f_i(\nu, t) = \frac{1}{\pi} \int \frac{d\nu'}{\nu' - \nu} f_i(\nu', t) ,$$

donde

$$\frac{1}{\pi} \int \frac{d\nu'}{\nu' - \nu} \rightarrow H .$$

Esta suposición es esencial para todo el desarrollo futuro ya que en todas las aplicaciones de interés admitiremos la validez de (2.13). Esta está ampliamente justificada siempre que se trate de un proceso original definido a través de un conmutador entre dos corrientes como en (2.7). En el caso de procesos definidos a través de conmutadores entre corrientes y sus divergencias, existen indicios para suponer que las relaciones de dispersión necesitan sustracciones⁽²⁶⁾. Si este fuera el caso, es posible mostrar que

las reglas de suma no resultan útiles y no es factible explotar las identidades del álgebra de corrientes⁽²⁶⁾.

Multiplicando la ec.(2.7) por k_2^μ , resulta

$$\begin{aligned}
 k_2^\mu T_{\mu\nu}^{ij} &= i \int (i\partial^\mu) e^{ik_2x} \theta(x_0) \langle p_2 | [J_\mu^i(x), J_\nu^j(0)] | p_1 \rangle d^4x \\
 &= \int e^{ik_2x} \partial^\mu \theta(x_0) \langle p_2 | [J_\mu^i(x), J_\nu^j(0)] | p_1 \rangle d^4x = \\
 &= \int d^4x e^{ik_2x} \theta(x_0) \langle p_2 | [\partial^\mu J_\mu^i(x), J_\nu^j(0)] | p_1 \rangle + \\
 &+ \int d^4x \delta(x_0) \langle p_2 | [J_0^i(x), J_\nu^j(0)] | p_1 \rangle,
 \end{aligned}$$

donde se ha efectuado una integración por partes. Llamando

$$W_\nu^{ij} = \int d^4x e^{ik_2x} \theta(x_0) \langle p_2 | [\partial^\mu J_\mu^i(x), J_\nu^j(0)] | p_1 \rangle$$

que corresponde al proceso de la fig.2, y haciendo uso de las relaciones de conmutación

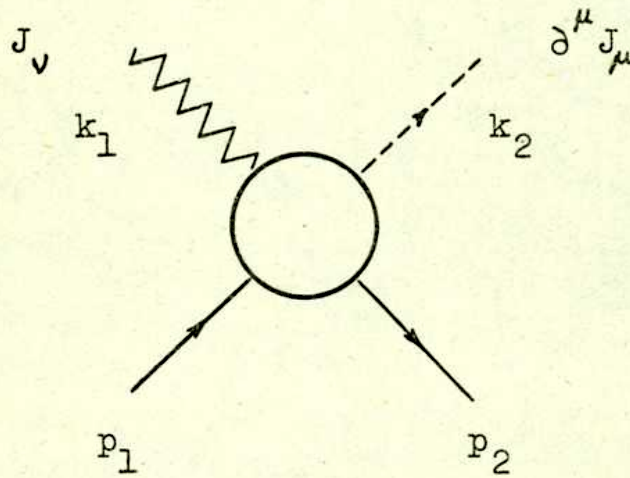
$$(2.14) \quad [J_0^i(x), J_\nu^j(0)] = f^{ijk} J_\nu^k(0) \delta(x)$$

que surgen de las hipótesis fundamentales del álgebra de corrientes, es posible obtener la llamada identidad de Ward-Takahashi, i.e.

$$(2.15) \quad k_2^\mu T_{\mu\nu}^{ij} - W_\nu^{ij} = f^{ijk} \langle p_2 | J_\nu^k(0) | p_1 \rangle.$$

Nuevamente, W_ν admite un desarrollo invariante de la forma

$$(2.16) \quad W_\nu = X_1 P_\nu + X_2 \Delta_\nu + X_3 Q_\nu.$$



El elemento de matriz $\langle p_2 | J_\nu(0) | p_1 \rangle$ no es más que una función de vértice y por lo tanto se puede escribir en términos de los factores de forma como sigue

$$(2.17) \quad \langle p_2 | J_\nu(0) | p_1 \rangle = F_1(t) P_\nu + F_2(t) \Delta_\nu,$$

donde $F_2(t) = 0$ si J_ν se conserva.

Reemplazando (2.10), (2.16) y (2.17) en la identidad de Ward-Takahashi (2.15), y comparando todos los términos que contienen P_ν y Δ_ν , resulta que

$$f^{ijk} F_1^k(t) = \nu A + (k_2 \cdot Q) A_4 + (k_2 \cdot \Delta) C$$

(2.18)

$$f^{ijk} F_2^k(t) = \nu A_2 + (k_2 \cdot Q) A_5 + (k_2 \cdot \Delta) C_2$$

Es evidente que la identidad de Ward-Takahashi en términos de $t_{\mu\nu}$ se reduce a

$$k_2^\mu t_{\mu\nu} - w_\nu = 0 ,$$

donde

$$w_\nu^{ij} = \frac{1}{2} i \int d^4x e^{ik_2 x} \langle p_2 | [\partial^\mu J_\mu^i(x) , J_\nu^j(0)] | p_1 \rangle .$$

Podemos escribir entonces

$$k_2^\mu T_{\mu\nu}^{ij} - H (k_2^\mu t_{\mu\nu}^{ij}) = f^{ijk} \langle p_2 | J_\nu^k(0) | p_1 \rangle ,$$

o lo que es lo mismo

$$(k_2^\mu H - H k_2^\mu) t_{\mu\nu}^{ij} = f^{ijk} \langle p_2 | J_\nu^k(0) | p_1 \rangle .$$

Reemplazando las descomposiciones invariantes (2.10) y (2.11), se obtiene.

$$\begin{aligned}
 & k_2^\mu \frac{1}{\pi} \int \frac{d\nu'}{\nu' - \nu} (a_0 g_{\mu\nu} + a P_\mu P_\nu + \dots) - \\
 & - \frac{1}{\pi} \int \frac{d\nu'}{\nu' - \nu} k_2^\mu (a_0 g_{\mu\nu} + a P_\mu P_\nu + \dots) = \\
 & = f^{ijk} (F_1^k(t) P_\nu + F_2^k(t) \Delta_\nu) ,
 \end{aligned}$$

es decir

$$\begin{aligned}
 & \frac{\nu}{\pi} \int \frac{d\nu'}{\nu' - \nu} a(\nu', t, k_1^2, k_2^2) - \\
 & - \frac{1}{\pi} \int \frac{\nu' d\nu'}{\nu' - \nu} a(\nu', t, k_1^2, k_2^2) = f^{ijk} F_1^k(t),
 \end{aligned}$$

y una expresión similar para $F_2(t)$. Finalmente resulta

$$\begin{aligned}
 & F_1(t) = - \frac{1}{\pi} \int d\nu' a(\nu', t, k_1^2, k_2^2) \\
 (2.19) \\
 & F_2(t) = - \frac{1}{\pi} \int d\nu' a_2(\nu', t, k_1^2, k_2^2) .
 \end{aligned}$$

Estas son las reglas de suma de Fubini que constituyen la consecuencia más general deducible a partir de la hipótesis acerca de la validez de los conmutadores a tiempos iguales ec.(2.14). Dichas reglas de suma constituyen en realidad

una familia infinita debido a que son válidas para valores cualesquiera de k_1^2 y k_2^2 . Además, como el miembro izquierdo sólo depende de t , es posible obtener a partir de (2.19) reglas de suma superconvergentes extrayendo los polos de a y a_2 en k_1^2 y k_2^2 , i.e.

$$0 = \frac{1}{\pi} \int d\nu' a^f(\nu', t, k_1^2 = m_1^2, k_2^2 = m_2^2),$$

y análogamente para a_2 , donde a^f representa ahora la amplitud de interacciones fuertes.

Aunque sólo hemos tratado el caso en que p_1 y p_2 correspondían a partículas de espín cero, la generalización a partículas con espín es inmediata, modificándose sólo la descomposición invariante (2.10) y (2.16) y naturalmente las funciones de vértice. Las reglas de suma dispersivas conservan formalmente la misma forma que (2.19).

Obviamente, a los efectos de obtener resultados concretos será necesario saturar las reglas de suma de alguna manera. Es decir, habrá que sustituir las amplitudes a_i por expresiones obtenidas a partir de algún modelo realista. Una primera aproximación sería saturar las reglas de suma con contribuciones de una sola partícula (modelo isobárico) e.g. mediante un polo, aunque para que el resultado sea válido para cualquier valor de t, k_1^2 y k_2^2 sería necesario considerar un número infinito de tales contribuciones. Como es de esperar, la saturación con un solo polo no da resultados satisfactorios. Las recientes confirmaciones experimentales de los modelos de Regge y Veneziano, unido al hecho de que ambos proporcionan expresiones

para las amplitudes, de características ideales para la saturación de las reglas de suma, nos han conducido a intentar obtener resultados en este sentido. Como veremos en la segunda parte, el modelo de Regge junto con las (2.19) permite hallar factores de forma en la región asintótica $t \rightarrow -\infty$, mientras que a partir del modelo de Veneziano y dichas reglas de suma se obtienen las funciones de vértice para cualquier valor de t . En ambos casos las predicciones concuerdan con la experiencia en forma excelente.

Concluimos esta sección recalcando que las reglas de suma de Fubini están basadas en dos hipótesis fundamentales, a saber:

- a) La hipótesis del álgebra de corrientes acerca de los conmutadores a tiempos iguales, e.g. ec.(2.14).
- b) Las amplitudes escalares invariantes satisfacen relaciones de dispersión sin sustracciones.

CAPITULO 3

MODELO DE REGGE

3.1 Introducción

Debido a la ausencia de una teoría general y exacta que describa todas las propiedades de la dispersión de partículas a alta energía, uno debe conformarse con los numerosos modelos existentes, los cuales naturalmente sólo explican en parte los fenómenos. Entre estos modelos se destaca el de los polos de Regge, que ha sido ampliamente aplicado con un éxito muy satisfactorio. La justificación de los resultados sólo es posible en el marco de la dispersión potencial (no relativista) donde existe una ecuación (la ecuación de Schrödinger) como punto de partida. En el caso relativista sólo será posible extrapolar las conclusiones obtenidas a baja energía en la medida que los resultados concuerden con la experiencia. Afortunadamente esta concordancia resulta ser en promedio muy buena por lo que el modelo de Regge constituye una herramienta de trabajo vastamente aceptada.

A continuación y en breve síntesis resumiremos las características más sobresalientes del modelo.

3.2 Expansión en Ondas Parciales

Consideraremos el proceso $1 + 2 \rightarrow 3 + 4$, donde todas las partículas tienen espín cero. La descomposición en ondas parciales de la amplitud de dispersión es bien conocida de la Mecánica Cuántica ordinaria, viz.

$$(3.1) \quad f(E, \cos \theta) = \frac{1}{p} \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell+1) T(\ell, E) P_{\ell}(\cos \theta),$$

con E, p y θ la energía, momento lineal y ángulo de dispersión en el sistema centro de masa. La sección eficaz diferencial resulta ser

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}(E, \cos \theta) = \left| f(E, \cos \theta) \right|^2,$$

mientras que $T(\ell, E)$ está dada por (únicamente en el caso de dispersión elástica)

$$T(\ell, E) = \frac{e^{2i\delta(\ell, E)} - 1}{2i} = \frac{S(\ell, E) - 1}{2i},$$

donde $S(\ell, E)$ es la llamada matriz S .

La región física para E y ℓ es

$$E \geq E_{\text{umbral}}, \text{ real} \quad \ell = 0, 1, 2, \dots \text{ entero.}$$

Como se sabe, también de la Mecánica Cuántica ordinaria, resulta útil prolongar E al plano complejo aunque naturalmente

la región física estará a lo largo del eje real. La amplitud de onda parcial $T(\ell, E)$ para un dado ℓ puede tener polos para ciertos valores (generalmente complejos) de la energía $E = E_{\ell}$ i.e.

$$\frac{1}{T(\ell, E_{\ell})} = 0.$$

Una ventaja de la mencionada prolongación es que permite visualizar la ubicación y características de los polos de la amplitud de onda parcial. Estos polos obviamente ocurrirán para valores no físicos de E pues en caso contrario la amplitud y en consecuencia la sección eficaz serían infinitas en la región física. Distinguiamos dos casos importantes:

- a) $E < E_{\text{umbral}}$: E_{ℓ} es real y el polo se debe a un estado ligado (partícula estable) como estado intermedio.
- b) $E > E_{\text{umbral}}$: E_{ℓ} tiene una pequeña parte imaginaria negativa, i.e.

$$E_{\ell} = E_{\ell r} - i \frac{\Gamma_{\ell}}{2}$$

El polo corresponde a un estado inestable (partícula inestable, resonancia) como estado intermedio, y Γ es el ancho de decaimiento de la resonancia. En este caso $T(\ell, E)$ está dada por la conocida fórmula de Breit y Wigner, viz.

$$T(\ell, E) = \frac{\frac{1}{2} \sqrt{\Gamma_1 \Gamma_2}}{E_{\ell r} - E - i \frac{\Gamma}{2}},$$

donde Γ_1 y Γ_2 son los anchos parciales de decaimiento de la la resonancia en los vértices inicial y final (ver fig.1).

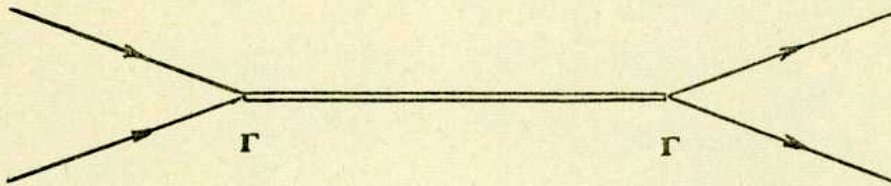
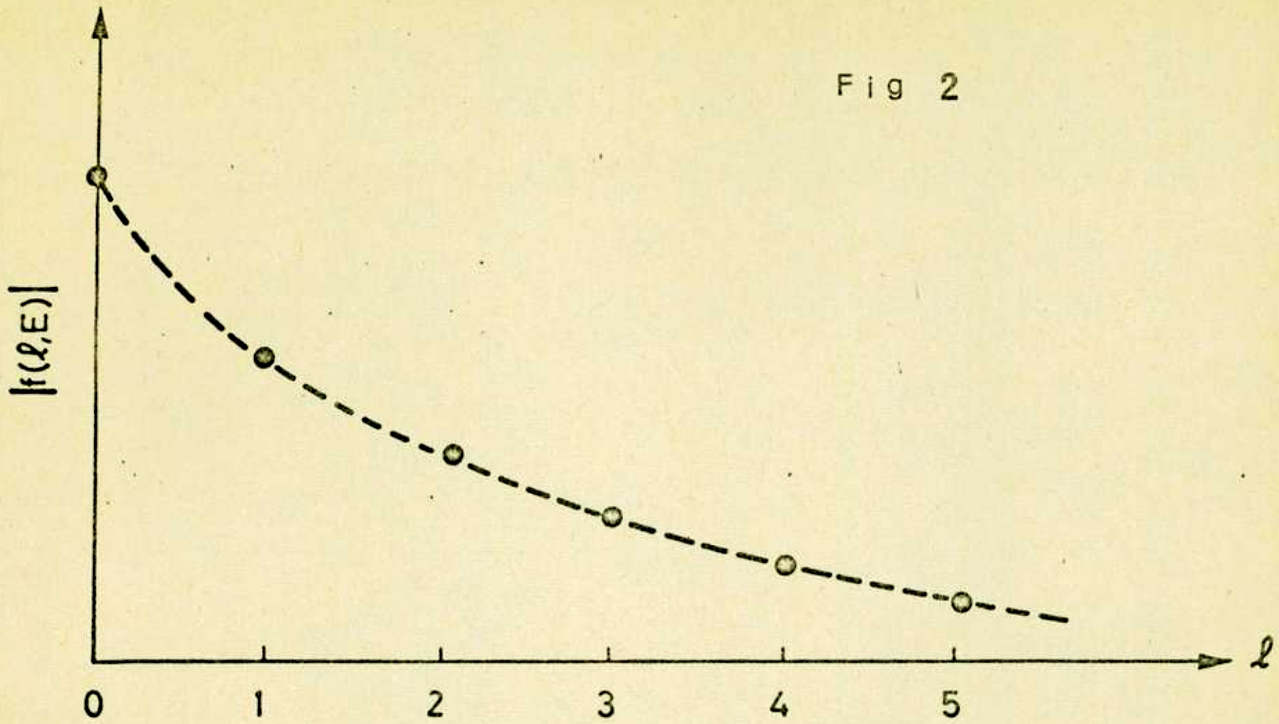


Fig.1

3.3 Polos de Regge

Hasta ahora no ha habido una conexión entre las distintas amplitudes de ondas parciales correspondientes a los valores físicos $\ell = 0, 1, 2, \dots$. La idea de Regge ha sido considerar a $T(\ell, E)$ no sólo como función de E compleja pero también como función del momento angular complejo. De esta forma uno no considera más distintas amplitudes de onda parcial, una para cada valor de ℓ , sino una sola función de E y ℓ . Los valores de $T(\ell, E)$ en los puntos físicos del momento angular quedan así interconectados por medio de la continuación entre un ℓ y el siguiente (fig.2). La continuación analítica a valores complejos del momento angular es posible y está bien definida en el marco de



la dispersión potencial, donde existe la ecuación de Schrödinger radial que está definida y tiene soluciones para valores complejos de l .

Es importante considerar los valores de E y l para los cuales la amplitud de onda parcial exhibe polos, i.e.

$$(3.2) \quad \frac{1}{T(l, E)} = 0 .$$

Resolviendo esta ecuación para l y E se obtienen las posiciones de los polos

$$l = a(E) \quad \text{ó} \quad E = \beta(l) ,$$

i.e. para cada E complejo hay un l complejo $l = a(E)$, o viceversa, tal que se satisface la ec.(3.2). Un polo de

este tipo, que en el plano complejo del momento angular se mueve con la energía (o que en el plano E se mueve con l), se llama polo de Regge. La trayectoria $l = a(E)$ (o $E = \beta(l)$) que describe el polo en el plano l (o E), se conoce con el nombre de trayectoria de Regge. Es importante distinguir los casos siguientes:

a) l real: La fig.3 muestra una trayectoria de Regge en el plano complejo de la energía. El polo se mueve a lo largo de la trayectoria $E = \beta(l)$ a medida que varía l .

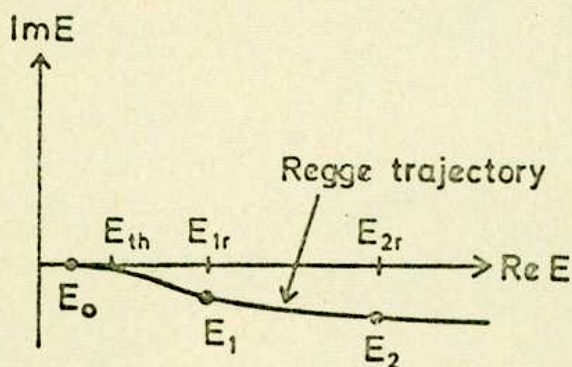


Fig 3

En los puntos E_0, E_1, E_2, \dots donde l toma valores físicos

$l = 0, 1, 2, \dots$, aparecen los polos discutidos en la sección anterior. Es decir los polos en $E = E_0, E_1, E_2, \dots$ de las amplitudes de onda parcial $T(0, E), T(1, E), T(2, E) \dots$ se combinan en un solo polo de Regge.

b) E real (física): En lugar de representar $E = \beta(l)$ para l real en el plano complejo de la energía, es posible moverse a lo largo del eje real de E y representar

$l = a(E)$ en el plano complejo del momento angular (ver fig.4). Las características de la trayectoria son en este caso: para $E < E_u$, $l = a(E)$ es real y crece con E ,

mientras que para $E > E_u$, $l = a(E)$ es complejo con

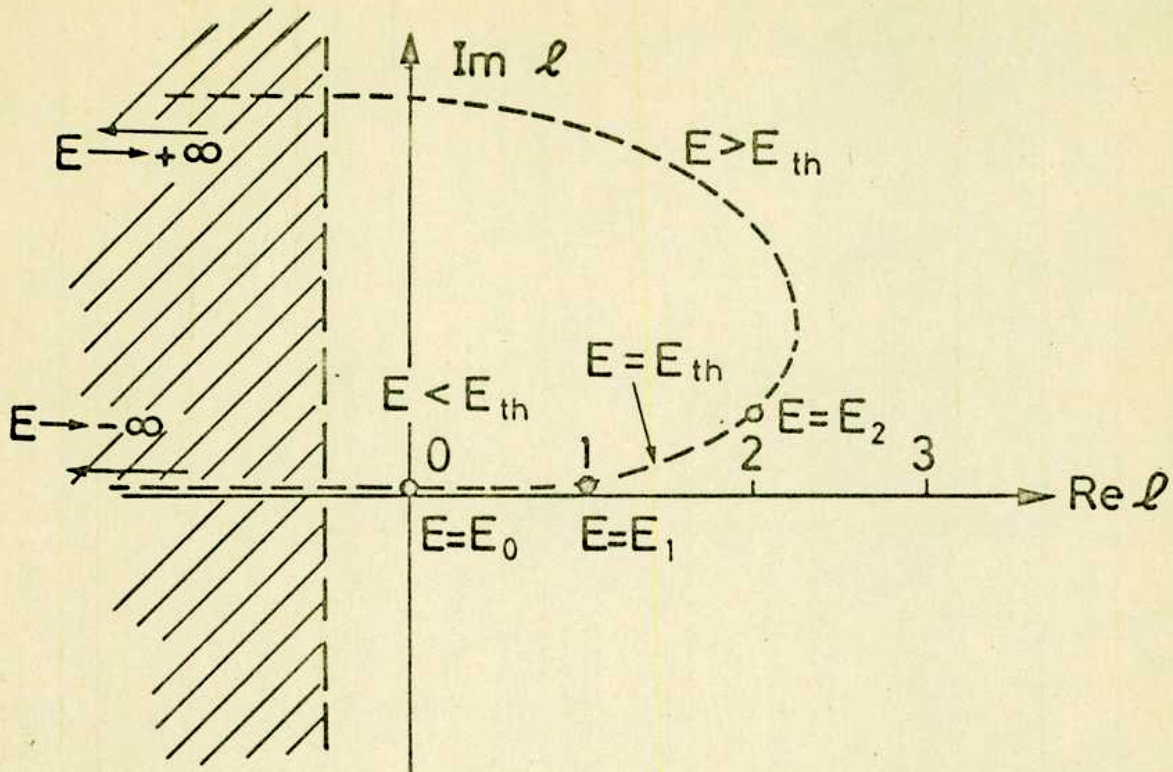


Fig 4

$\text{Im } l > 0$. Naturalmente es posible identificar los polos de la manera usual (ver sección 3.2).

Otra representación gráfica de una trayectoria de Regge que resulta de utilidad es la llamada "gráfica de Chew-Frautschi en la que se representa la trayectoria en el plano

$\text{Re } a(E) - E$ (ver fig.5). En los puntos E_{nr} donde $\text{Re } a(E)$ toma valores enteros, el polo en la amplitud de onda parcial corresponde a una partícula física de espín n y masa E_{nr} como estado intermedio.

Es posible probar en el marco de la dispersión potencial que las trayectorias de Regge tienen la forma indicada en la fig.5, es decir crecen hasta un valor máximo lue-

go del cual decrecen. En cambio, la evidencia experimental hasta el presente indica que en el caso relativista las trayectorias parecen ser siempre crecientes* .

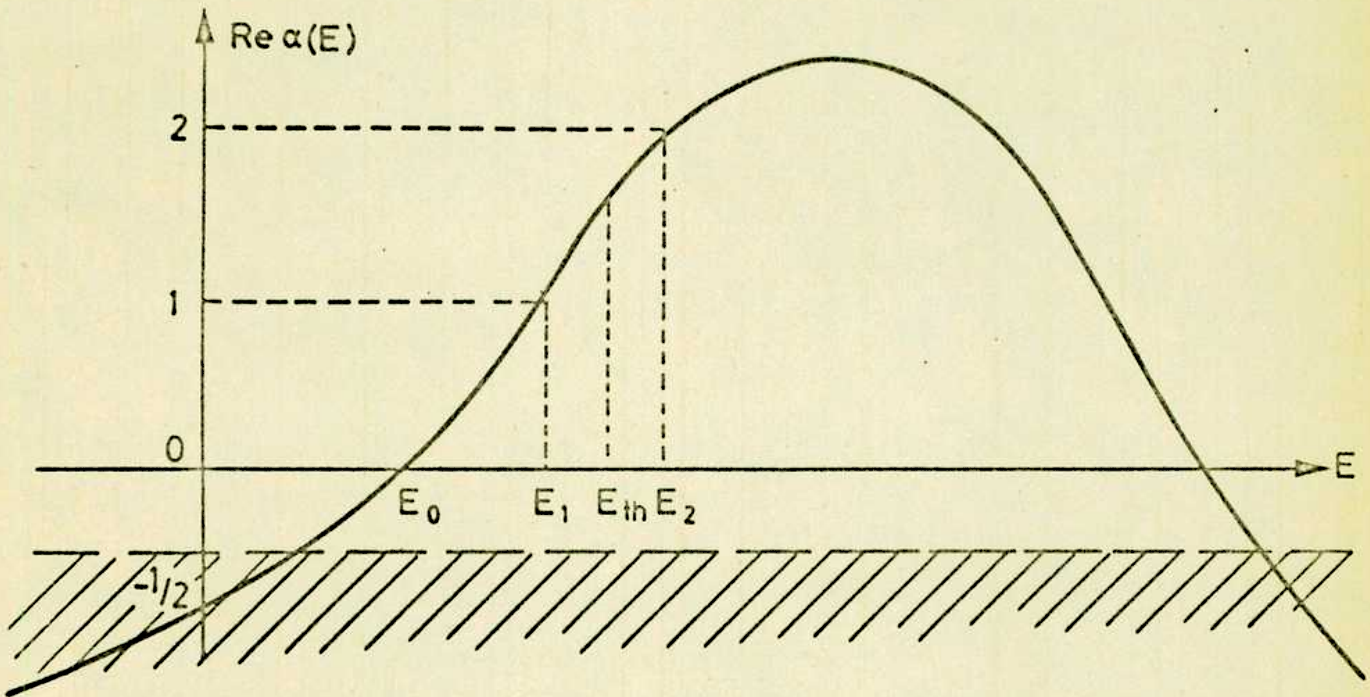


Fig 5

3.4 Transformada de Sommerfeld y Watson

Es posible transformar la ec.(3.1) de tal manera que la suma sobre ℓ se convierta en una integral sobre la variable compleja continua ℓ . Esta transformación se conoce con el nombre de Sommerfeld y Watson y resulta ser

* Se han esgrimido ciertos argumentos para justificar esto, Ver e.g. ref. (66).

$$(3.3) \quad f(E, z) = \frac{i}{2\pi} \int_{C_1} \frac{2\ell + 1}{\sin \pi \ell} T(\ell, E) P_{\ell}(-z) d\ell$$

donde $z \equiv \cos \theta$, y el contorno de integración C_1 se ilustra en la fig.6.

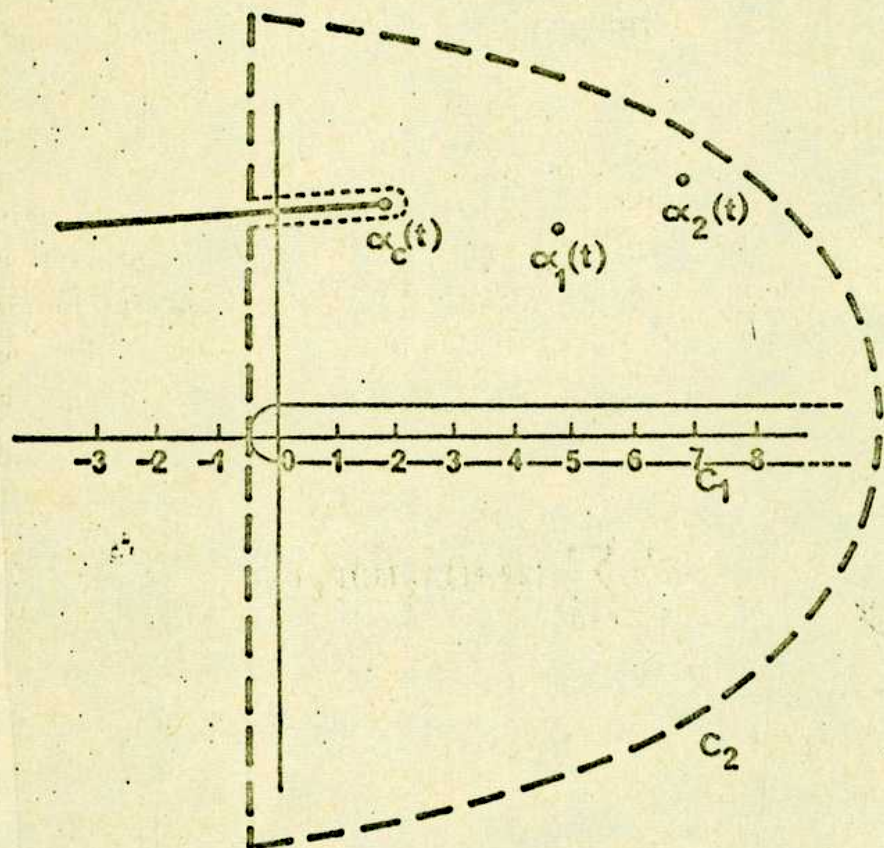


Fig 6

Resulta posible deformatar el contorno C_1 de tal manera que la integral se calcule a lo largo de C_2 (a menos de los polos de Regge), i.e. una recta paralela al eje imaginario a través de $\text{Re } \ell = -\frac{1}{2}$, y un semicírculo al infinito.

Es posible demostrar que la contribución del semicírculo infinito es nula y que $f(E, z)$ está dada por

$$\begin{aligned}
 f(E, z) = & -\frac{\pi}{p} \sum_i \frac{2^{\alpha_i(E) + 1}}{\text{sen } \pi \alpha_i(E)} \beta_i(E) P_{\alpha_i(E)}(-z) + \\
 (3.4) & + \frac{i}{2p} \int_{-\frac{1}{2} - i\infty}^{-\frac{1}{2} + i\infty} \frac{2^{\ell + 1}}{\text{sen } \pi \ell} T(\ell, E) P_{\ell}(-z) d\ell
 \end{aligned}$$

donde $\alpha_i(E)$ denota el i -ésimo polo de Regge, y

$$T(\ell, E) \approx \frac{\beta_i(E)}{\alpha_i(E) - \ell} \quad \text{si } \ell \approx \alpha_i(E).$$

Las ecs.(3.3) y (3.4) son consecuencia directa de las propiedades analíticas de $T(\ell, E)$ (y $f(E, z)$) que pueden obtenerse en el marco de la teoría de la dispersión potencial. La ec.(3.4) que muestra que la amplitud de dispersión es expresable como suma de residuos en los polos de Regge y una "integral de fondo", es sumamente importante para la generalización al caso relativista que discutiremos a continuación.

3.5 Dispersión a Alta Energía

En el caso de dispersión potencial, las trayectorias de Regge y las funciones residuos pueden en principio ser calculadas a partir de la ecuación de Schrödinger una vez dado el potencial. En cambio, en el caso de las interacciones a alta energía, las trayectorias y residuos deben determinarse a partir de ajustes entre el modelo (en contraposición a la teoría) de Regge y los datos experimentales. Esto se debe, obviamente, a la imposibilidad de definir un potencial y al hecho de que la ecuación de Schrödinger pierde validez. Los dos aspectos más importantes del modelo de Regge en altas energías son:

- a) Acomodación de partículas sobre trayectorias de Regge.
- b) Descripción de la dispersión relativista.

La característica a) permite agrupar partículas o resonancias en familias de iguales números cuánticos Q, B, P, S, I, G y distinto espín, los miembros de cada familia conectados por la trayectoria de Regge. En este sentido el modelo de Regge es un poderoso auxiliar de $SU(3)$ donde, como ya vimos, la simetría permitía conectar partículas del mismo espín y distintos números cuánticos Q, S, I , etc. La acomodación de partículas sobre trayectorias de Regge ha sido muy satisfactoria habiéndose identificado una gran cantidad hasta el presente. Como ejemplo representamos en la fig.7 la gráfica de Chew-Frautschi para los mesones vectoriales y tensoriales. A continuación nos ocupamos del aspecto b).

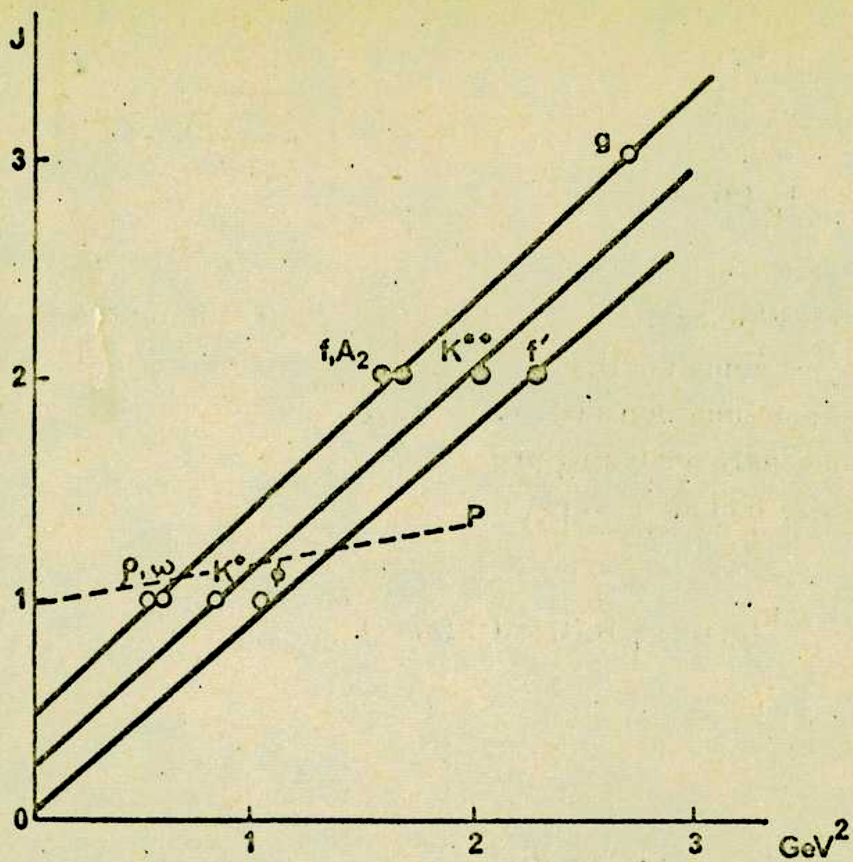


Fig 7

Considerando la reacción $1+2 \rightarrow 3+4$ (fig.8) , donde todas las partículas tienen la misma masa y espín cero, definimos

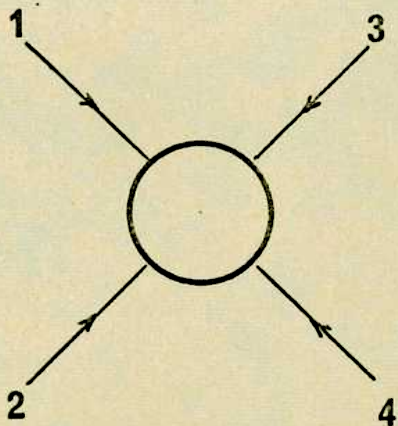


Fig 8

las siguiente variables (de Mandelstam)

$$s = (p_1 + p_2)^2 = (p_3 + p_4)^2 ,$$

$$t = (p_1 + p_3)^2 = (p_2 + p_4)^2 ,$$

$$u = (p_1 + p_4)^2 = (p_2 + p_3)^2 ,$$

$$s + t + u = 4 m^2 .$$

Los tres canales físicos s, t y u de la reacción son

a) $1 + 2 \rightarrow 3 + 4$, Canal s.

$$s = 4 (k_s^2 + m^2) > 4 m^2 ,$$

$$t = - 2 k_s^2 (1 - \cos \theta_s) < 0 ,$$

$$u = - 2 k_s^2 (1 + \cos \theta_s) < 0 .$$

(3.5) b) $1 + \bar{3} \rightarrow \bar{2} + 4$, Canal t.

$$s = - 2 k_t^2 (1 + \cos \theta_t) < 0 ,$$

$$t = 4 (k_t^2 + m^2) > 4 m^2 ,$$

$$u = - 2 k_t^2 (1 - \cos \theta_t) < 0 .$$

c) $1 + \bar{4} \rightarrow \bar{2} + 3$, Canal u

$$s = -2 k_u^2 (1 - \cos \theta_u) < 0 ,$$

$$t = -2 k_u^2 (1 + \cos \theta_u) < 0 ,$$

$$u = 4 (k_u^2 + m^2) > 4 m^2 ,$$

donde k_s , θ_s representan el trimomento y ángulo de dispersión en el canal s, etc. . Las zonas físicas se pueden representar gráficamente en un plano como se ve en la fig.9.

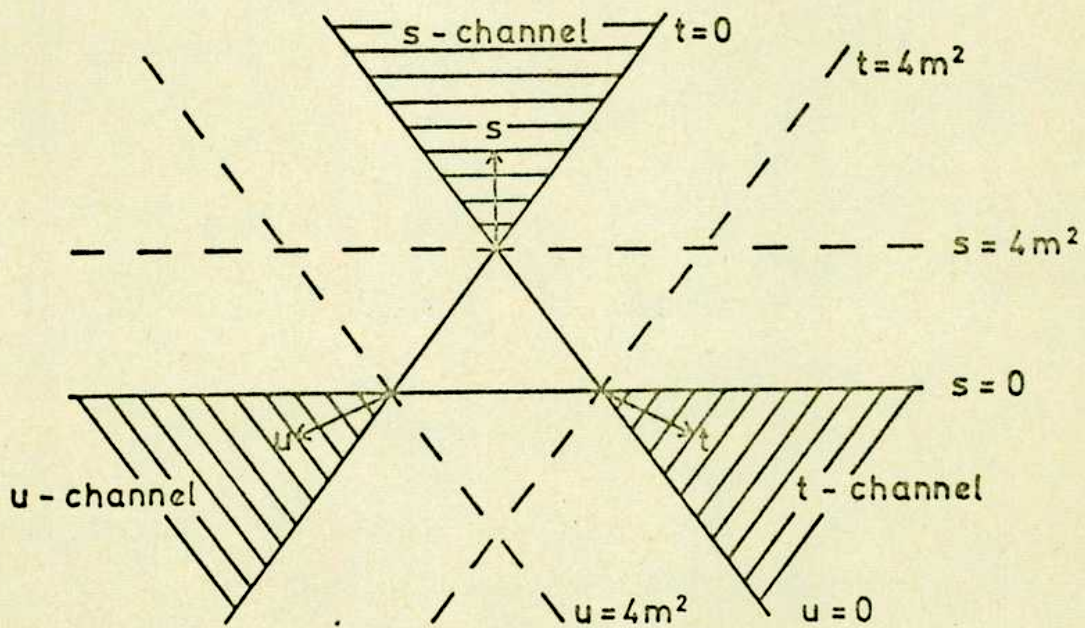


Fig 9

La propiedad de cruce nos dice esencialmente que existe una única amplitud interpolante que describe los tres procesos a), b) y c) en sus respectivas regiones físicas (no superpuestas). En particular, de b) resulta que

$$\cos \theta_t = -1 + \frac{2s}{4m^2 - t},$$

o sea que partiendo de la amplitud correspondiente a b) y fijando $t < 0$ a la vez que $\cos \theta_t \rightarrow \infty$, nos movemos a la región física para la reacción a) con $s \rightarrow \infty$. La simetría de cruce nos dice entonces que el valor de la amplitud así obtenido describe la dispersión en el canal a) para s grande (alta energía). El procedimiento formal resulta ser entonces: Escribir la expansión en ondas parciales (3.1) para el proceso en el canal t , realizar la transformada de Sommerfeld-Watson y obtener la expansión de Regge ec.(3.4), y finalmente tender al límite (no físico) $\cos \theta_t \rightarrow \infty$; de esta forma el (los) polo(s) dominante(s) de Regge describen la dispersión en el canal cruzado s , para s grande y t fijo.

Debido a la existencia del canal u , resulta necesaria una modificación importante. De hecho, en virtud de la simetría de cruce, en lugar de tomar el límite no físico ya mencionado, en el canal t , se podría también hacerlo en el canal u y arribar nuevamente a la región física del canal s . Los canales t y u están simplemente relacionados, i.e. $t \leftrightarrow u$, $\cos \theta_t \leftrightarrow -\cos \theta_u$. Es decir, a los

Regge de T^+ no tienen a priori ninguna conexión con los de T^- * . Resulta así la siguiente descomposición en ondas parciales

$$f(t, \cos \theta_t) = f^+(t, \cos \theta_t) + f^-(t, \cos \theta_t),$$

donde

$$f^{\pm}(t, \cos \theta_t) = \frac{1}{p} \sum_l (2l + 1) T^{\pm}(l, t) \times$$

$$\times \frac{1}{2} \left[P_l(\cos \theta_t) \pm P_l(-\cos \theta_t) \right]$$

Finalmente, la amplitud de Regge resulta ser

$$f^R(t, \cos \theta_t) \sim \beta(t) \frac{e^{-i\pi a(t)} \pm 1}{\sin \pi a(t)} (\cos \theta_t)^{a(t)} +$$

+ integral de fondo .

En el límite $\cos \theta_t \rightarrow \infty$ es posible demostrar (dispersión potencial) que la integral de fondo no contribuye a la amplitud. En el caso relativista, se extrapola este resul-

* Sin embargo de acuerdo con recientes evidencias teóricas y experimentales, parece existir "degeneración de intercambio" en ciertos casos. Volveremos sobre esto en el capítulo siguiente.

tado aún cuando no es posible una demostración. Como siempre esto se encontrará justificado al comparar el modelo con la realidad. Resulta así

$$(3.6) \quad f^R(s, t) = \sum_i \beta_i(t) \xi_i(t) \left(\frac{s}{s_0} \right)^{a_i(t)}$$

donde

$$\xi_i(t) = \frac{e^{-i\pi a_i(t)} + 1}{\text{sen } \pi a_i(t)},$$

es el llamado factor de signatura. La ec.(3.6) es la celebrada fórmula de Regge que da el comportamiento asintótico ($s \rightarrow \infty$) de la amplitud de dispersión en el canal s en términos de las trayectorias intercambiadas en el canal t .

De las relaciones (3.5) surge que la dispersión hacia adelante en el canal s ($\cos \theta_s = 1$) corresponde a $t = 0$, mientras que la dispersión hacia atrás ($\cos \theta_s = -1$) corresponde a $u = 0$. El primer caso (o más generalmente $t \approx 0$ y fijo) es el que hemos ya discutido e implica que $\cos \theta_t \rightarrow \infty$ como $s \rightarrow \infty$, es decir los polos de Regge del canal t son importantes para describir la dispersión a alta energía en el canal s cerca de la dirección hacia adelante. El segundo caso (u fijo ≈ 0) implica $\cos \theta_u \rightarrow \infty$ como $s \rightarrow \infty$ y significa que los polos del canal u describen la dispersión asintótica en el canal s y cerca de la dirección hacia atrás.

Un ejemplo clásico es el de la dispersión pión-nucleón donde los números cuánticos del canal t permiten sólo estados mesónicos y los del canal u sólo estados fermiónicos. De esta forma, las trayectorias de Regge que pasan por los mesones ρ y f^0 describen la dispersión pión-nucleón hacia adelante y las correspondientes al nucleón N y la $\Delta(1238)$ dan cuenta de la dispersión hacia atrás.

Para concluir recalcamos los dos aspectos más sobresalientes del modelo de Regge: clasificación de partículas complementando a $SU(3)$; y descripción de la dispersión a alta energía. En la segunda parte haremos uso extensivo de esta última característica, resumida en la ec.(3.6).

CAPITULO 4

MODELO DE VENEZIANO *

4.1 Introducción

Consideremos el canal s de una reacción de dos partículas a dos partículas. El proceso de dispersión puede caracterizarse de dos maneras, a saber:

- a) Las resonancias que dominan la reacción a baja energía,
- b) el intercambio de polos de Regge en el canal cruzado (t) que dan cuenta de la dispersión a alta energía en el canal s .

Aunque no existe una separación nítida entre ambas zonas, podemos tomar como límite de la primera la energía máxima alcanzada en los análisis de corrimientos de fase, típicamente ≈ 2 GeV, y para la segunda, la energía mínima para la que tienen sentido los ajustes de Regge, viz. 3 - 4 GeV.

Aparentemente no existe vinculación entre las dos descripciones, y esta idea condujo a la formulación del modelo interferencial, i.e. si f es la amplitud de dispersión, formalmente resulta

$$f = f_{\text{res.}} + f_{\text{Regge}}$$

* Ver refs.(67-76) y (64).

Sin embargo, posteriormente este modelo no dio resultados positivos. La solución del dilema provino de las reglas de suma de energía finita, que no son más que relaciones de dispersión de la forma

$$(4.1) \quad \int_0^N \text{Im } f(v, t) \, dv = \sum_i \beta_i(t) \frac{N^{a_i(t) + 1}}{a_i(t) + 1},$$

donde N corresponde al valor típico de energía para la cual termina la zona de resonancias. De esta forma las trayectorias de Regge intercambiadas parecen estar construidas a partir de las resonancias del canal directo y al revés, el intercambio de Regge ya contiene a las resonancias en un sentido promedio. Esta idea se conoce con el nombre de dualidad global y es una consecuencia de la ec.(4.1). Las resonancias del canal s y los polos de Regge del canal t aparecen así como dos medios complementarios para describir una amplitud de dispersión de dos partículas a dos partículas. A pesar que el valor de N en la ec.(4.1) no está claramente definido, el esquema tiene valor predictivo y ha sido aplicado con éxito satisfactorio.

Una extensión interesante y muy promisoría del concepto de dualidad ha sido la aparición de modelos para las amplitudes de dispersión, que incorporan en forma compacta y simple el conjunto infinito de resonancias y trayectorias de Regge requerido para satisfacer la propiedad de dualidad, y que poseen polos resonantes y comportamiento de Regge en todos los canales. Pero antes de entrar en este tema es necesario mencionar dos propiedades que son esenciales para la construcción de estos modelos, viz. a) degeneración de

intercambio y b) naturaleza lineal de las trayectorias de Regge.

El concepto de dualidad tal como surge de las reglas de suma de energía finita conduce directamente a la noción de degeneración de intercambio. La ausencia de resonancias en un canal implica la coincidencia de trayectorias intercambiadas de signatura opuesta, y una relación entre sus funciones residuo. Tales trayectorias se dicen "degeneradas de intercambio". Por ejemplo, la existencia de un canal exótico tal como $\pi^+ \pi^+$ en la dispersión pión-pión, o $K^+ N$ en la dispersión $\bar{K}N$, implica de acuerdo con la (4.1) la degeneración de las trayectorias de Regge que pueden ser intercambiadas en los canales no exóticos. Naturalmente que la particular relación entre los residuos de Regge implicada por la degeneración de intercambio sólo cuando existe un canal exótico, tiene una validez general.

La conexión dual entre resonancias y trayectorias de Regge está además motivada por el hecho de que las primeras pueden ser agrupadas en trayectorias lineales crecientes y de aproximadamente la misma pendiente $\approx 1 (\text{GeV})^{-2}$, tanto para mesones como para bariones. Este hecho ha conducido a la formulación de modelos dinámicos basados en la característica de trayectorias indefinidamente crecientes. Aunque esto está abiertamente en contradicción con el concepto de unitariedad, estos modelos pueden estar lo suficientemente cerca de la realidad como para resultar útiles.

En la fig.1 mostramos la gráfica de Chew-Frautschi para las trayectorias $\Lambda(1115)$ e $Y^*(1385)$. La degeneración de intercambio es requerida para todas las resonancias fuertemente acopladas al sistema $\bar{K}N$, y de hecho, como

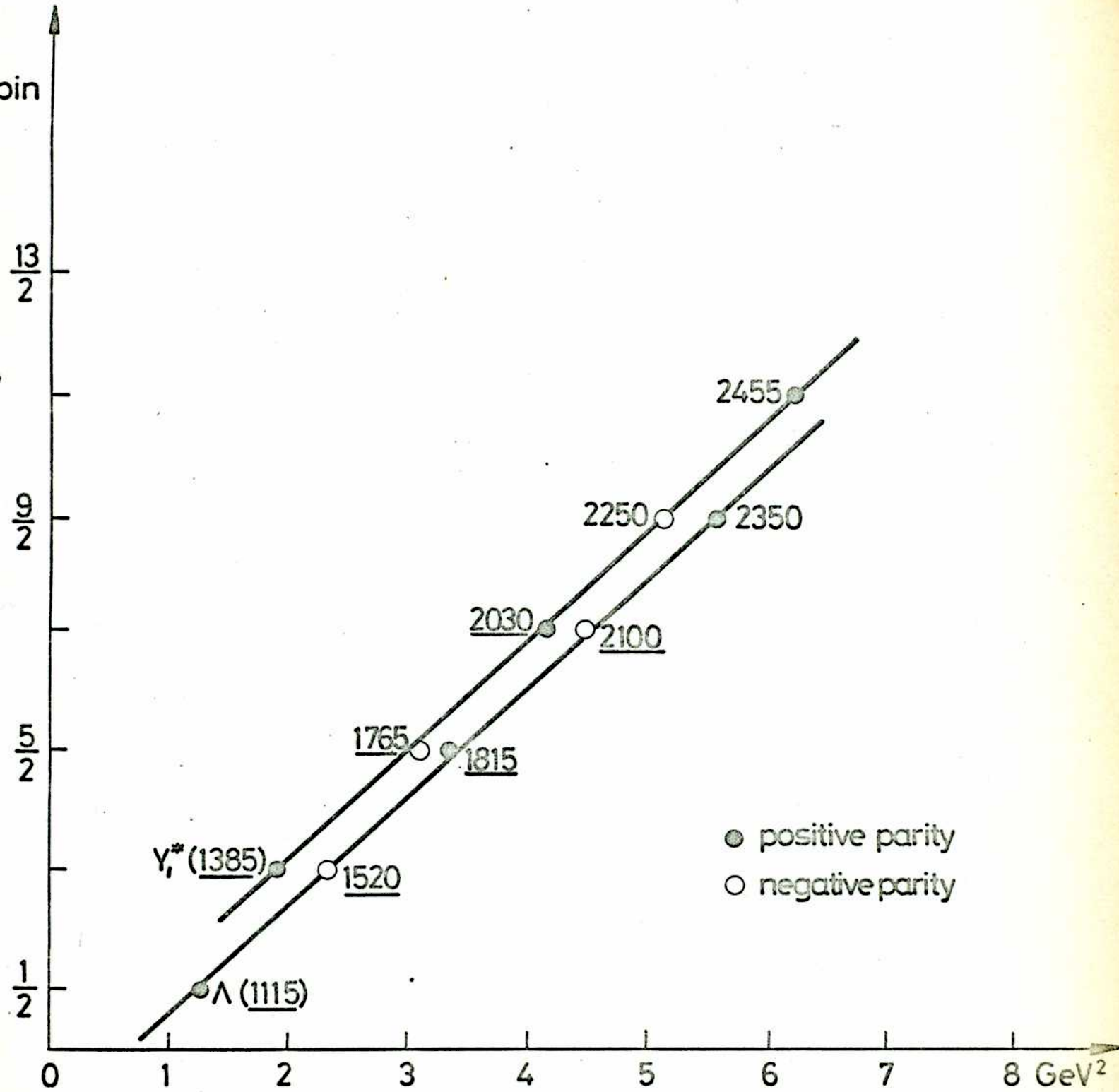


FIG. 1

se aprecia en la figura, los estados de paridad negativa yacen en la misma recta que los de paridad positiva.

La fig.2 muestra la trayectoria del mesón rho. Este es intercambiado en el proceso $\pi^+ \pi^-$ junto con el mesón f^0 , y la ausencia de resonancias en el canal exótico $\pi^+ \pi^+$ requiere la degeneración entre las trayectorias del rho y del f^0 , lo cual se cumple muy bien como puede verse de la figura.

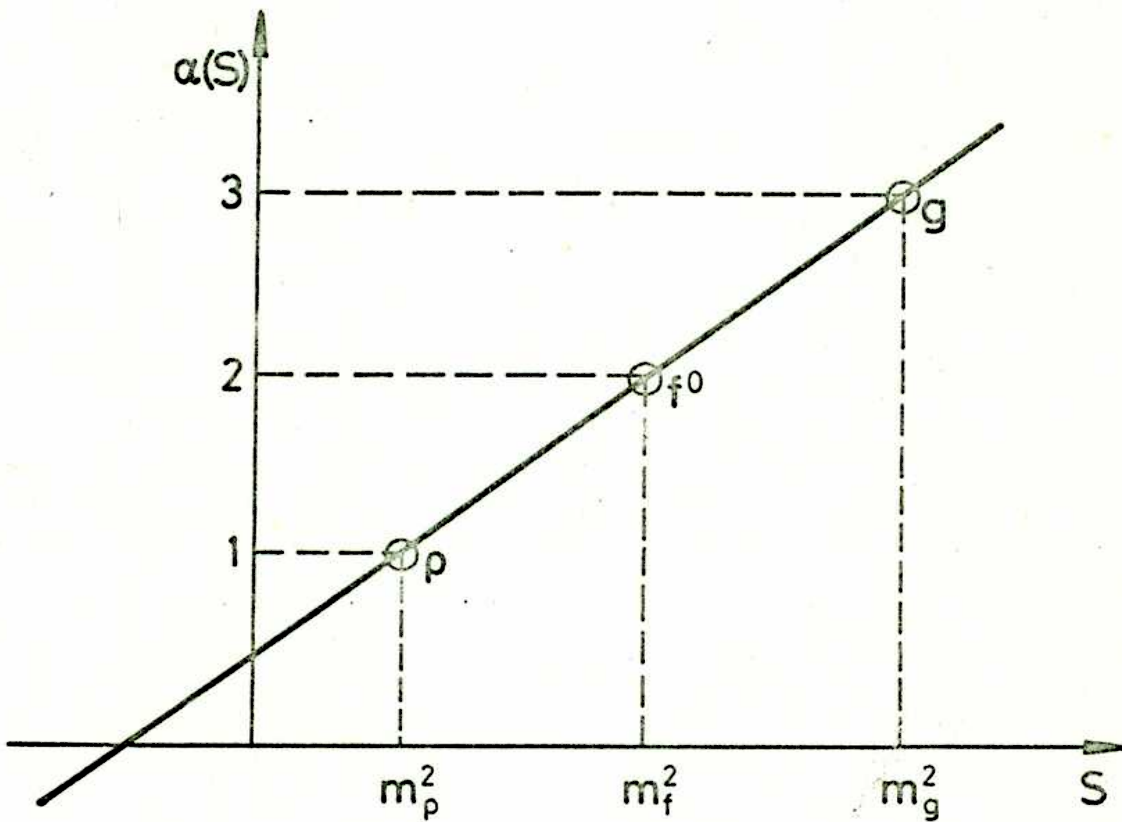


FIG. 2

4.2 Fórmula de Veneziano

Con los ingredientes básicos recién discutidos, i.e. dualidad y trayectorias lineales de Regge

$$(4.2) \quad \alpha(s) = \alpha(0) + \alpha' s \quad ,$$

Veneziano propuso una expresión para las amplitudes de dispersión que ha encontrado eco muy favorable debido a su sencillez y naturalmente al éxito en describir las propiedades generales de las reacciones mesónicas. Posteriormente se ha encontrado una estrecha vinculación entre el modelo de Veneziano y el álgebra de corrientes. Entre las dificultades más importantes de este modelo cabe destacar que i) no satisface la relación de unitariedad y ii) en reacciones entre bariones o bariones con mesones, los resultados están lejos de ser satisfactorios. Pero, a pesar de esto, y como acabamos de mencionar, las predicciones exitosas en el caso de partículas sin espín hacen pensar que el modelo en cuestión puede constituir una apropiada primera aproximación de una teoría más general.

A continuación resumimos las características principales para lo cual consideraremos la situación simple de masas iguales y partículas de espín cero. En este caso la fórmula de Veneziano para la amplitud de dispersión es esencialmente del tipo

$$(4.3) \quad A(s,t) \propto \frac{\Gamma(-\alpha(s)) \Gamma(-\alpha(t))}{\Gamma(-\alpha(s) - \alpha(t))}$$

que no es más que la función beta de Euler. $A(s,t)$ tiene polos cada vez que $\alpha(s)$ o $\alpha(t)$ son iguales a cero o a un entero positivo. Esto es necesario si se intercambian trayectorias lineales en los canales s y t . Más aún, un polo en s (t) deberá ser asociado con las partículas intercambiadas, para lo cual su residuo deberá ser un polinomio en t (s) de orden J si el polo corresponde a $\alpha(s)$ ($\alpha(t)$) = J . Por otra parte, no deberá haber polos dobles, es decir simultáneamente en s y t . Es fácil ver que la ec.(4.2) cumple con todos estos requisitos, i.e. el residuo del polo de $A(s,t)$ en $\alpha(s) = J$ es un polinomio en $\alpha(t)$ de grado J (o bien un polinomio en t de grado J en virtud de (4.2)). Este puede ser descompuesto en serie de polinomios de Legendre de grado $J, J-1, J-2, \dots, 0$, y por lo tanto el polo en $\alpha(s) = J$ es asociado con el intercambio de partículas de espín $J, J-1, J-2, \dots, 0$. Esto corresponde a un conjunto infinito de trayectorias paralelas (ver e.g. la fig.3 para los intercambios en la dispersión pión-pión).

Por otra parte, el comportamiento asintótico de $A(s,t)$ es el que corresponde a una amplitud de Regge, viz.

$$\lim_{|s| \rightarrow \infty} A(s, t) \sim (\alpha' s)^{\alpha(t)}$$

$$\lim_{|t| \rightarrow \infty} A(s, t) \sim (\alpha' t)^{\alpha(s)}$$

excepto por una pequeña cuña alrededor del eje real donde están ubicados los polos. Estos naturalmente tienen un

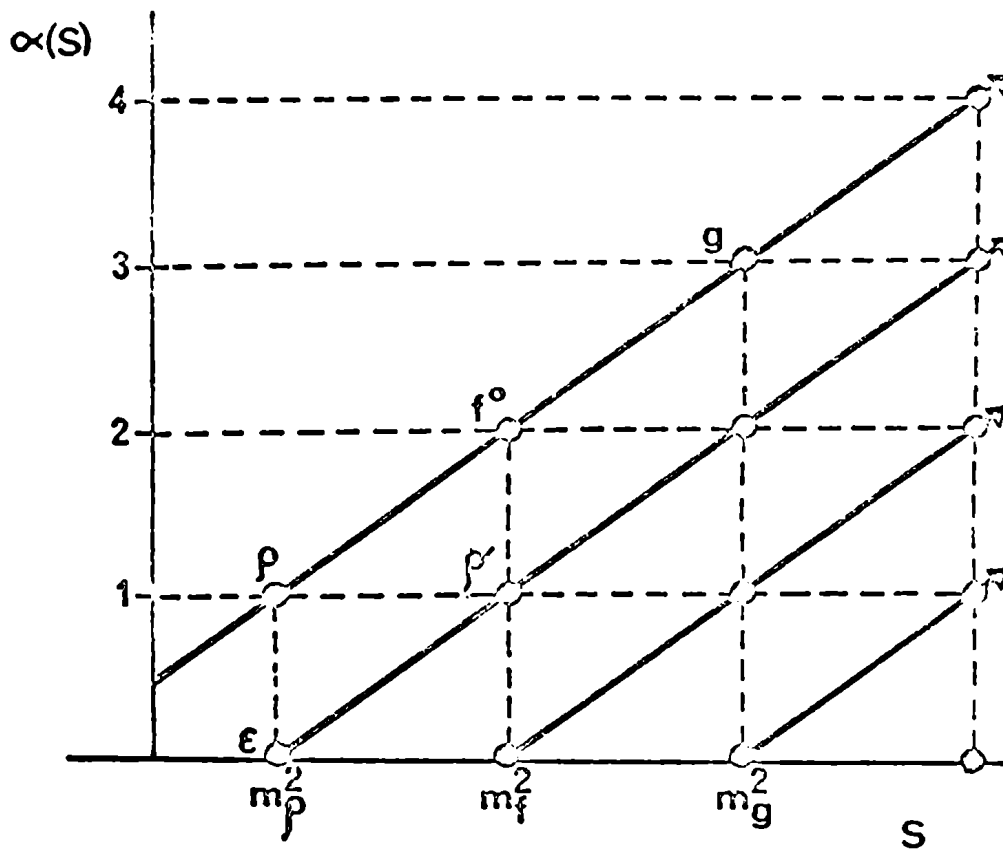


Fig 3

ancho nulo en este modelo (ver ec. (4.2)). Lamentablemente, si se intenta dotar a las resonancias de un cierto ancho(es decir, correr los polos del eje real) se pierden muchas de

las propiedades interesantes del modelo. Hasta el momento todos los intentos realizados para construir un modelo que satisfaga unitariedad y partiendo de e.g. de (4.3) no han tenido un éxito satisfactorio.

Es posible expandir la ec.(4.3) en términos de polos del canal s , i.e.

$$A(s, t) \approx \sum_{J=0}^{\infty} \binom{\alpha(t) + J}{J} \frac{1}{J - \alpha(s)}$$

pero obviamente también es posible hacerlo en términos de polos del canal t . Es decir el conjunto infinito de polos en s ya incluye los polos en t y viceversa, i.e. existe dualidad entre las dos descripciones; el conjunto infinito de resonancias así construido da intercambio de Regge en el mismo canal.

La generalización de la ec.(4.3) es inmediata: si n y p representan los espines más bajos de las partículas intercambiadas en los canales s y t , resulta

$$(4.4) \quad A(s, t) = C \frac{\Gamma(n - \alpha(s)) \Gamma(p - \alpha(t))}{\Gamma(q - \alpha(s) - \alpha(t))},$$

donde $q \leq n + p$ se ajusta para dar el comportamiento de Regge adecuado (y además debe ser tal que prevenga la aparición de polos dobles). Por ejemplo para la dispersión pión-pión, la trayectoria intercambiada es la del rho, y

la fórmula anterior se escribe entonces con $n = p = q = 1$. Este proceso es interesante pues proporciona un ejemplo sencillo de la conexión entre el modelo de Veneziano y el álgebra de corrientes (Lovelace). En efecto, de (4.4) se ve que la amplitud pión-pión se anula cuando e.g.

$$\alpha(s) + \alpha(t) = 1,$$

y esto sugiere que la condición de Adler * puede satisfacerse si e.g.

$$\alpha(m_{\pi}^2) = \frac{1}{2}.$$

De hecho, si se traza una trayectoria lineal a través de la masa del rho (765 MeV), se obtiene

$$\alpha(s) = 0.48 + 0.89 s,$$

mientras que si se ajusta la trayectoria de tal manera que pase por el rho y el $\rho(1650 \text{ MeV})$, resulta

$$\alpha(s) = 0.45 + 0.91 s,$$

con lo cual se obtiene la condición de Adler en forma natural.

Posteriormente, Ademollo, Veneziano y Weinberg generalizaron la función beta de Euler a procesos del tipo $\pi + A \rightarrow B + C$. Luego de requerir la condición de Adler encontraron lo siguiente: siempre que determinadas partículas sobre una trayectoria puedan decaer mediante emisión piónica en partículas de normalidad opuesta sobre otra tra-

* Cuando el cuádr-impulso de alguno de los piones externos tiende a cero y $s=t=u=m_{\pi}^2$, la amplitud debe anularse.

yectoria, las dos trayectorias deben tener la misma pendiente, y ordenadas al origen que difieran en un número semientero. Este resultado puede convertirse a fórmulas de masa tales como e.g.

$$m_{A_1}^2 = 2 m_\rho^2, \quad m_\Delta^2 = m_N^2 + m_\rho^2, \quad m_{K^*}^2 = m_K^2 + m_\rho^2,$$

etc., todas las cuales se satisfacen muy bien.

CAPITULO 5

EL FACTOR DE FORMA VECTORIAL DEL PION

5.1 Introducción

Como vimos en el Capítulo 2, las identidades del álgebra de corrientes permiten hallar relaciones entre un factor de forma y una combinación de amplitudes escalares que describen la dispersión de corrientes sobre hadrones. A partir de las propiedades analíticas de estas amplitudes es posible, al menos en principio, obtener las propiedades de los factores de forma. Jengo y Remiddi⁽⁷⁷⁾ han estudiado la posibilidad de describir a las amplitudes de dispersión de corrientes sobre hadrones (procesos semi-débiles) por medio de los mismos ingredientes que aparecen en las interacciones fuertes, i.e. las mismas resonancias y propiedades analíticas similares. En particular, han mostrado la compatibilidad entre las identidades del álgebra de corrientes y la descripción de las mencionadas reacciones por medio de los modelos de Regge y Veneziano.

La aplicación del modelo de Regge proporciona el comportamiento asintótico del factor de forma ($t \rightarrow -\infty$), mientras que por medio del modelo de Veneziano es posible

obtener la función de vértice para cualquier valor del momento transferido. Aunque Jengo y Remiddi se concentraron al factor de forma vectorial del pión, el método es fácilmente generalizable a otras funciones de vértice tales como e.g. los factores de forma axiales del pión, vectoriales y axiales del nucleón, y del decaimiento leptónico del kaon (K_{l3}).

Un punto interesante es la posibilidad de establecer relaciones de escala entre los factores de forma, con la ventaja de haber sido determinados todos ellos por el mismo método. Más aún, las hipótesis básicas del modelo que nos ocupa son ampliamente aceptadas (identidades del álgebra de corrientes, reglas de suma dispersivas de Fubini y los modelos de Regge y Veneziano), y los resultados que se obtienen concuerdan muy bien con la experiencia.

A continuación describiremos en detalle el cálculo del factor de forma vectorial del pión⁽⁷⁷⁾ a los efectos de establecer claramente las ideas del modelo. En las aplicaciones posteriores daremos por sentados todos los pasos intermedios.

5.2 Identidad de Ward - Takahashi y Reglas de Suma Dispersivas

Consideraremos la siguiente reacción (ver fig.1)

$$A_{\mu}(k_1) + \pi(p_1) \rightarrow A_{\nu}(k_2) + \pi(p_2) ,$$

donde A_{μ} y A_{ν} son corrientes axiales. De acuerdo con lo

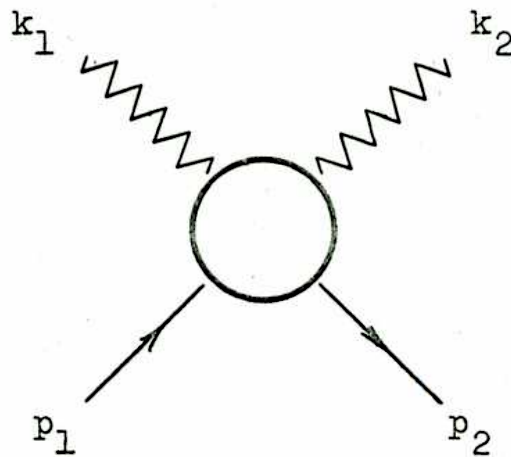


Fig.1

discutido en el Capítulo 2, la identidad de Ward-Takahashi resulta ser

$$\begin{aligned} (5.1) \quad k_1^{\nu} T_{\mu\nu} - W_{\mu} &= \langle p_2 | V_{\mu}(0) | p_1 \rangle = \\ &= F_V(t) (p_1 + p_2)_{\mu} , \end{aligned}$$

donde $T_{\mu\nu}$ y W_{μ} son amplitudes correspondientes a los procesos de las figs. 1 y 2 respectivamente.

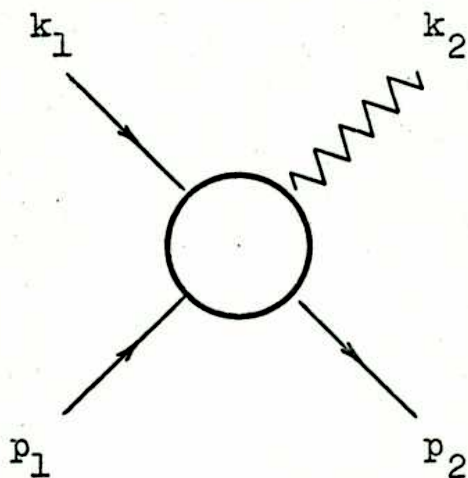


Fig.2

Introducimos a continuación las siguientes variables cinemáticas

$$P = p_1 + p_2 \quad , \quad Q = k_1 + k_2 \quad , \quad \Delta = p_2 - p_1$$

$$s = (p_1 + k_1)^2 \quad , \quad t = (p_2 - p_1)^2 \quad , \quad u = (p_1 - k_2)^2$$

$$v = \frac{s - u}{2} = k_1 \cdot P = k_2 \cdot P \quad ,$$

y la descomposición de $T_{\mu\nu}$ y W_μ en términos de amplitudes escalares libres de singularidades cinemáticas

$$(5.2) \quad T_{\mu\nu} = A(s, t, u, k_1^2, k_2^2) P_\mu P_\nu + \\ + B(s, t, u, k_1^2, k_2^2) k_{2\nu} P_\mu + C(s, t, u, k_1^2, k_2^2) k_{1\nu} P_\mu \\ + (\text{términos sin } P_\mu),$$

$$(5.3) \quad W_\mu = X(s, t, u, k_1^2, k_2^2) P_\mu + X_1(s, t, u, k_1^2, k_2^2) k_{2\mu} + \\ + X_2(s, t, u, k_1^2, k_2^2) k_{1\mu}.$$

Reemplazando (5.2) y (5.3) en la identidad de Ward-Takahashi (5.1) y comparando los términos con P_μ , resulta

$$F_V(t) = (s - m_\pi^2 + \frac{1}{2}t - \frac{1}{2}k_1^2 - \frac{1}{2}k_2^2) A(s, t, u, k_1^2, k_2^2) - \\ (5.4) \quad - \frac{1}{2}(t - k_1^2 - k_2^2) B(s, t, u, k_1^2, k_2^2) + \\ + k_1^2 C(s, t, u, k_1^2, k_2^2) - X(s, t, u, k_1^2, k_2^2)$$

Es importante destacar que a pesar de que cada término de la derecha en la ecuación anterior separadamente depende de s, k_1^2, k_2^2 , el factor de forma es independiente de estas

variables, es decir para un t fijo la identidad (5.4) es válida para cualquier s (ó u), k_1^2 y k_2^2 . Por simplicidad haremos $k_1^2 = 0$ (luego discutiremos el caso $k_1^2 \neq 0$) y no escribimos más las variables de las que dependen las amplitudes.

De acuerdo con lo mencionado en la introducción, la idea ahora es estudiar si la identidad del álgebra de corrientes puede ser satisfecha suponiendo para las amplitudes escalares, propiedades analíticas en el plano complejo del momento angular que sean lo más similares posible a aquellas que corresponden a amplitudes de procesos de interacciones fuertes. Esto no será posible para todas las amplitudes, por ejemplo se sabe que A tiene un polo fijo en el plano J en el canal t ⁽⁷⁸⁻⁸⁰⁾. Es necesario entonces estudiar para cuales amplitudes será posible suponer sólo comportamiento de Regge, i.e. singularidades móviles.

La regla de suma dispersiva para $F_V(t)$ resulta ser (ver Cap. 2)

$$(5.5) \quad - F_V(t) = \frac{1}{4 \pi i} \left(\int D_s A \, ds - \int D_u A \, du \right)$$

donde $D_s A$ ($D_u A$) es la discontinuidad en s (u) de A para t fijo. Estas están relacionadas con las discontinuidades de las otras amplitudes escalares tal como se ve al tomar la discontinuidad en ambos miembros de la ec.(5.4) i.e.

$$(5.6) \quad D_s A = \frac{\frac{1}{2} (t - k_2^2) D_s B + D_s X}{s - m_\pi^2 + \frac{1}{2} (t - k_2^2)}$$

La ecuación (5.6) posee un cero en el denominador (que implicaría una singularidad cinemática en $(t - k_2^2)$ para un s fijo) que debe compensarse con un cero correspondiente en el numerador, implicando una íntima correlación entre las discontinuidades de B y X . Esto sugiere que la descomposición invariante original no resulta la más adecuada si se desean formular hipótesis simples sobre la estructura analítica de las amplitudes escalares. Por lo tanto, descomponemos a la $T_{\mu\nu}$ de la siguiente forma

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu} &= 2 A p_{1\nu} P_\mu + A (p_2 - p_1)_\nu P_\mu + \dots = \\ &= 2 A p_{1\nu} P_\mu + (B - A) k_{2\nu} P_\mu + \\ (5.7) \quad &+ (C + A) k_{1\nu} P_\mu + \dots = \\ &= 2 A p_{1\nu} P_\mu + B_1 k_{2\nu} P_\mu + C_1 k_{1\nu} P_\mu + \dots \end{aligned}$$

Debido a que $2 k_1 \cdot p_1 = s - m_\pi^2$, en lugar de (5.4) y (5.6) (para $k_1^2 = 0$) resultan

$$(5.8) \quad (s - m_\pi^2) A - \frac{1}{2} (t - k_2^2) B_1 - X = F_V(t),$$

$$(5.9) \quad D_s A = \frac{\frac{1}{2} (t - k_2^2) D_s B_1 + D_s X}{s - \frac{m^2}{\pi}}$$

De esta manera, la ec.(5.8) no muestra singularidades cinemáticas y puede ser utilizada para calcular la discontinuidad de A una vez que se tenga un modelo razonable para

$D_s B_1$ y $D_s X$. Es posible generalizar este argumento para estudiar las discontinuidades en las otras variables. Para ello supondremos que cualquiera de las amplitudes escalares e.g. $f(s,t,u)$ puede ser descompuesta a la Mandelstam i.e.

$$f(s,t,u) = f^{st}(s,t) + f^{ut}(u,t) + f^{su}(s,u) ,$$

donde por construcción $f^{st}(s,t)$ tiene singularidades dinámicas sólo para s y t positivos, etc. Es fácil demostrar que los términos del tipo f^{su} contribuyen a lo sumo con una constante a las reglas de suma. Si se calcula la discontinuidad para $t < 0$ de la parte derecha de la ec.(5.5), resulta

$$\int ds D_u D_s A^{su} - \int du D_s D_u A^{su} ,$$

que obviamente se anula. Esto asegura que el factor de forma no tenga singularidades para $t < 0$, tal como debe ser. Por simplicidad supondremos, sin pérdida de generalidad, que la constante, con la que a lo sumo contribuirá la parte f^{su} , es nula y nos ocuparemos en lo que sigue, solamente

te de los términos f^{st} y f^{ut} . Para la contribución del tipo f^{st} escribiremos $T_{\mu\nu}$ como en la ec.(5.7) e interpretaremos a la ec.(5.9) como la determinación de la discontinuidad de A^{st} en términos de las otras amplitudes escalares B_1^{st} y X^{st} , para las cuales será posible suponer modelos simples. Por otra parte, para las contribuciones del tipo f^{ut} descompondremos a la $T_{\mu\nu}$ como sigue

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu} &= 2 A p_{2\nu} P_\mu + A (p_1 - p_2)_\nu P_\mu + \dots = \\ &= 2 A p_{2\nu} P_\mu + (B + A) k_{2\nu} P_\mu + (C-A) k_{1\nu} P_\mu + \\ &+ \dots = 2 A p_{2\nu} P_\mu + B_2 k_{2\nu} P_\mu + C_2 k_{1\nu} P_\mu + \dots \end{aligned}$$

De esta forma, en lugar de (5.4) y (5.6) obtenemos

$$(5.10) \quad - (u - m_\pi^2) A - \frac{1}{2} (t - k_2^2) B_2 - X = F_V(t),$$

$$(5.11) \quad D_u A^{ut} = - \frac{\frac{1}{2} (t - k_2^2) D_u B_2^{ut} + D_u X^{ut}}{u - m_\pi^2}$$

Finalmente, reemplazando (5.9) y (5.11) en la regla de suma (5.5) y recordando la representación dispersiva

$$B_1^{st}(s, t, k_2) = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{D_s B_1^{st}(s', \dots)}{s' - s} ds'$$

resulta

$$(5.12) \quad - F_V(t) = \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{2} (t - k_2^2) \left[B_1^{st}(s = m_\pi^2, t, k_2^2) + B_2^{ut}(u = m_\pi^2, t, k_2^2) \right] + X^{st}(s = m_\pi^2, t, k_2^2) + X^{ut}(u = m_\pi^2, t, k_2^2) \right\} .$$

De acuerdo con la discusión previa no existen restricciones particulares para las propiedades analíticas e.g. en el plano complejo J , de las amplitudes que aparecen en la ec.(5.12). Es posible entonces suponer un comportamiento de Regge puro

$$f(k_2^2) (-t)^{\alpha(s)} ,$$

(t grande y s, k_2^2 fijos) para B_1^{st} y X^{st} , y análogamente para la parte f^{ut} . Resulta así la siguiente expresión asintótica para el factor de forma vectorial del pión

$$F_V(t) \sim \beta_1 (-t)^{\alpha_s(s=m_\pi^2) - n_1} + \beta_2 (-t)^{\alpha_u(u=m_\pi^2) - n_2}$$

Es fácil ver que las trayectorias intercambiadas en los canales s y u corresponden a las del mesón rho. Por otra parte, de acuerdo con los resultados de Ademollo, Veneziano y Weinberg⁽⁸¹⁾

$$\alpha_\rho \left(m_\pi^2 \right) = \frac{1}{2} ,$$

y por lo tanto

$$(5.13) \quad F_V(t) \sim \beta_1 (-t)^{\frac{1}{2} - n_1} + \beta_2 (-t)^{\frac{1}{2} - n_2} .$$

Los enteros n_1 y n_2 (> 0) son introducidos de acuerdo con la idea de que las trayectorias de Regge e.g. en el canal s forman una familia de infinitas trayectorias paralelas (ver Cap.4). En el contexto del presente modelo no es posible dilucidar qué miembro de la familia es el que realmente se acopla a cada amplitud, lo que determinaría así el comportamiento asintótico del factor de forma. Es decir, no es posible obtener una potencia determinada en (5.13). A pesar de esto, hay una idea de suma importancia encerrada en la expresión (5.13) y que surge del hecho de que (aún con n_1 y n_2 indeterminados) $F_V(t)$ tiene un comportamiento asintótico semientero. Debido a esto, el factor de forma estaría construido a partir de la contribución de un número infinito de polos (un número finito de ellos sólo puede dar un comportamiento entero). Como es sabido esta idea es generalmente aceptada en la actualidad.

Discutiremos a continuación la dependencia de k_2^2 de la ec.(5.12). La manera más sencilla de eliminarla es mediante la hipótesis de relaciones de dispersión (sin sustracciones) en k_2^2 . Escribiendo la singularidad en k_2^2 como una suma de polos en ciertas masas m_n^2 , obtenemos e.g. *

* Por simplicidad consideraremos sólo la parte f^{st} de las amplitudes. Los términos del otro tipo pueden ser tratados de manera análoga.

$$(5.14) \quad B_1^{st}(s = m_\pi^2, t, k_2^2) = \sum_n \frac{\bar{B}_n^{st}(s = m_\pi^2, t)}{k_2^2 - m_n^2},$$

y análogamente para X^{st} . Reemplazando (5.14) en (5.12), resulta, de la condición en la singularidad, que

$$(5.15) \quad \frac{1}{2} (t - m_n^2) \bar{B}_n^{st}(s = m_\pi^2, t) + \bar{X}_n^{st}(s = m_\pi^2, t) = 0,$$

o sea

$$(5.16) \quad F_V(t) = \frac{1}{4} \sum_n \bar{B}_n^{st}(s = m_\pi^2, t).$$

Es importante destacar que para $t = m_n^2$ la ec.(5.15) se reduce a

$$\bar{X}_n^{st}(s = m_\pi^2, t = m_n^2) = 0,$$

que no es más que la condición de Adler cuando en el proceso contraído, $k_1 \rightarrow 0$ y A_μ representa un mesón de masa m_n .

De las ecs.(5.15) y (5.16) se ve que el factor de forma queda determinado por la amplitud $\bar{X}_n^{st}(s = m_\pi^2, t)$ correspondiente al proceso contraído

$$\pi(k_1) + \pi(p_1) \rightarrow A(k_2, \epsilon) + \pi(p_2),$$

donde $k_2^2 = m_n^2$ y el único mesón fuera de la capa de masa es el de impulso k_1 . Este hecho nos permitirá representar a

las amplitudes \overline{X}_n^{st} por medio de sencillas fórmulas de Veneziano como veremos más adelante.

Antes de concluir esta sección mostraremos que aún cuando resulta posible suponer un comportamiento de Regge puro para las amplitudes B_1 y X , A tiene un polo fijo en $J = 1$ y en el canal t ⁽⁷⁸⁻⁸⁰⁾. Recordando la representación dispersiva de A^{st} , i.e.

$$A^{st}(s, t, k_2^2) = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{D_s A^{st}(s', t, k_2^2)}{s' - s} ds'$$

y reemplazando la discontinuidad de A^{st} por el valor dado por la ec. (5.9), se obtiene

$$(5.17) \quad A^{st}(s, t, k_2^2) = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{ds'}{s' - s} \frac{1}{s' - m_\pi^2}$$

$$\times \left(\frac{1}{2} (t - k_2^2) D_s B_1^{st}(s', t, k_2^2) + D_s X^{st}(s', t, k_2^2) \right) =$$

$$= \frac{1}{s - m_\pi^2} \left[\frac{1}{2} (t - k_2^2) B_1^{st}(s, t, k_2^2) + X^{st}(s, t, k_2^2) \right] -$$

$$- \frac{1}{s - m_\pi^2} \left[\frac{1}{2} (t - k_2^2) B_1^{st}(s = m_\pi^2, t, k_2^2) + X^{st}(s = m_\pi^2, t, k_2^2) \right]$$

Si suponemos un comportamiento de Regge para B_1 y X , es fácil ver de la ecuación anterior que para $s \rightarrow \infty$ el primer término tiende a

$$s^{\alpha(t) - n} ,$$

mientras que el segundo se comporta como $1/s$, i.e. corresponde a un polo fijo en el plano complejo J del canal t . Como el segundo término no depende de k_2^2 , tal como surge de la ec.(5.12), el polo fijo desaparece al calcular los residuos de los polos en k_2^2 , correspondiendo a procesos fuertes y puros de Regge. Es también posible ver de la ec.(5.17) que la amplitud A no posee el polo del mesón ρ en el canal t ($D_S A \sim s^{\alpha(t) - 2}$) tal como se espera para una amplitud de doble "espín flip".

5.3 El Caso $k_1^2 \neq 0$

Las singularidades en k_1^2 corresponderán a partículas pseudoescalares o axiales. En particular las primeras contribuyen sólo a las amplitudes C y X (ver ecs.(5.2) y (5.3)), mientras que las segundas lo hacen eg. a B_1 y C . A continuación demostraremos que a) el polo del pión de la amplitud C se cancela con el correspondiente en la amplitud X , y b) al estudiar las singularidades correspondientes a partículas axiales, e.g. el mesón A_1 , se recobra formalmente la situación $k_1^2 = 0$. Para ello partiremos de la Ec.(5.12) que cuando $k_1^2 \neq 0$ tiene la forma

$$(5.18) \quad - F_V(t) = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2}(t - k_1^2 - k_2^2) B_1^{st}(s = m_\pi^2, t, k_1^2, k_2^2) + \right. \\ \left. + X^{st}(s = m_\pi^2, t, k_1^2, k_2^2) - k_1^2 C^{st}(s = m_\pi^2, t, k_1^2, k_2^2) \right]$$

donde como siempre nos restringimos a la parte f^{st} . Escribimos ahora las amplitudes C y X como

$$C^{st}(s = m_\pi^2, t, k_1^2, k_2^2) = \frac{\overline{C}_\pi^{st}(s = m_\pi^2, t, k_2^2)}{k_1^2 - m_\pi^2},$$

$$X^{st}(s = m_\pi^2, t, k_1^2, k_2^2) = \frac{\overline{X}_\pi^{st}(s = m_\pi^2, t, k_2^2)}{k_1^2 - m_\pi^2},$$

donde \overline{C}_π y \overline{X}_π son los residuos correspondientes en el polo del pión. Si reemplazamos estas expresiones en (5.18), de la condición en la singularidad resulta

$$\overline{C}_\pi^{st} = \frac{\overline{X}_\pi^{st}}{m_\pi^2},$$

o sea, el polo del pión de la amplitud C se cancela con el de la amplitud X en (5.18).

Análogamente, para la singularidad en e.g. el polo del mesón axial A_1 obtenemos

$$\bar{C}_{A_1}^{st} = \frac{1}{2 m_{A_1}^2} (t - k_2^2 - m_{A_1}^2) \bar{B}_{1 A_1}^{st},$$

o sea

$$- F_V(t) = \frac{1}{2} \left[\left(- \frac{1}{m_{A_1}^2} \right) \frac{1}{2} (t - k_2^2) \bar{B}_{1 A_1}^{st}(s=m^2, t, k_2^2) + X^{st}(s = m^2, t, k_2^2) \right],$$

que es formalmente equivalente al caso $k_1^2 = 0$, ec.(5.12).

5.4 Aplicación del Modelo de Veneziano

De acuerdo con las ecs.(5.15) y (5.16), el factor de forma queda determinado una vez que se conoce la amplitud X^{st} . El modelo de Regge nos permitió obtener el comportamiento asintótico de $F_V(t)$ aunque no fue posible hallar una potencia determinada. Debido a las propiedades analíticas de las amplitudes que determinan el factor de forma (tal como se discutió en la sección 5.2) es posible suponer para ellas una expresión del tipo de Veneziano y encontrar así la función de vértice para todo valor de t . En particular, el

comportamiento asintótico quedará perfectamente determinado.

Por simplicidad supondremos sólo un polo en k_2^2 , i.e. el polo del mesón A_1 , y como siempre haremos $k_1^2 = 0$.

Tal como se vio en la sección 5.2, la amplitud $\bar{X}(s,t)$ pertenece al proceso

$$(5.19) \quad \pi(k_1) + \pi(p_1) \longrightarrow A_1(k_2, \epsilon) + \pi(p_2),$$

donde el pión de impulso k_1 es el único fuera de la capa de masa*. La amplitud W correspondiente a (5.19) es (ver ec.(5.3))

$$W = \bar{X}(s,t) P. \epsilon + \bar{X}_1(s,t) k_1. \epsilon ,$$

y $\bar{X}(s,t)$ tiene el siguiente comportamiento a la Regge⁽⁸⁴⁾

$$\bar{X}(s,t) \sim (s)^{\alpha_\rho(t) - 1} , \quad \bar{X}(s,t) \sim (t)^{\alpha_\rho(s)}$$

$$s \rightarrow \infty , t \text{ fijo}$$

$$t \rightarrow \infty , s \text{ fijo}$$

Una fórmula sencilla de Veneziano para $\bar{X}(s,t)$ puede ser

$$(5.20) \quad \bar{X}(s,t) = \beta \frac{\Gamma(n - \alpha_\rho(s)) \Gamma(1 - \alpha_\rho(t))}{\Gamma(n + 1 - \alpha_\rho(s) - \alpha_\rho(t))} .$$

* Cuando las partículas externas están fuera de la capa de masa, las fórmulas de Veneziano no son en general las mismas que para el caso "sobre la capa de masa". Sin embargo para un solo mesón virtual no hay diferencia(ref.(82-83)).

El denominador de la ecuación anterior quedará determinado una vez que se requiera el comportamiento

$$(s) \quad \alpha_{\rho}(t) - 1 \quad ;$$

un único término de Veneziano se comportará para t grande como

$$(t) \quad \alpha_{\rho}(s) - n \quad , \quad n \geq 1$$

El comportamiento $t^{\alpha_{\rho}(s)}$ puede naturalmente restituirse mediante el agragado de satélites. Jengo y Remiddi ignoraron esta última posibilidad considerando entonces $n = 1$ en la ec.(5.20). Aunque no existe ninguna justificación en el trabajo de los mencionados autores, nosotros hemos podido encontrar argumentos plausibles en favor del caso $n = 1$ sin satélites. La expresión con comportamiento asintótico correcto para $\bar{X}(s,t)$ es de la forma⁽⁸⁵⁻⁸⁸⁾

$$(5.21) \quad \bar{X}(s,t) = a_1 v_{112}^{st} + a_2 v_{122}^{st} \quad ,$$

donde hemos adoptado la siguiente convención, que utilizaremos en el resto de este trabajo,

$$(5.22) \quad v_{npq}^{st} = \frac{\Gamma(n - a(s)) \Gamma(p - a(t))}{\Gamma(q - a(s) - a(t))}$$

La fórmula (5.21) además de proporcionar el comportamiento

de Regge adecuado en ambos canales, da los residuos correctos en el polo del rho, i.e.

$$\text{Res } \bar{X}(s,t) \Big|_{s = m_\rho^2} = a_1 + a_2 (1 - a_\rho(t))$$

$$\text{Res } \bar{X}(s,t) \Big|_{t = m_\rho^2} = a_1 = \text{constante.}$$

A partir del Lagrangiano efectivo para el vértice $A_1 e \pi$ (85;88)

$$\mathcal{L}_{\text{ef}}(A_1 e \pi) = G_S A_{1\mu} \rho^\mu \pi + G_D A_{1\mu} \rho_\nu \partial^\mu \partial^\nu \pi ,$$

es posible relacionar a_1 y a_2 con G_S y G_D (85-88). En particular, la suposición de Jengo y Remiddi, i.e. $a_2 = 0$, implica $G_D = 0$. Aunque este resultado para G_D es aún motivo de largas polémicas⁽⁸³⁾, existe cierta evidencia experimental en favor de un acoplamiento sólo de tipo S en el vértice $A_1 e \pi$, i.e. $G_D = 0$ (89).

Aceptado esto, la ec.(5.20) queda reducida a

$$(5.23) \quad \bar{X}(s,t) = \beta V_{112}^{st} ,$$

y es fácil ver que satisface la condición de Adler debido a que

$$a_\rho(m_\pi^2) = \frac{1}{2} , \quad a_\rho(m_{A_1}^2) = 3/2$$

Como ya vimos, esta condición es equivalente a la ecuación de vínculo (5.15) cuando $t = m_{A_1}^2$. Más aún, este vínculo

asegura que el factor de forma no tenga un polo en $t = m_{A_1}^2$,

el cual naturalmente no puede estar presente en ese canal (ver ecs.(5.15) y (5.16)). Reemplazando la ec.(5.23) en la (5.15) y esta a su vez en la (5.16) que da el factor de forma, resulta finalmente

$$(5.24) \quad F_V(t) = C \frac{\Gamma(1 - \alpha_\rho(t))}{\Gamma(5/2 - \alpha_\rho(t))},$$

con $C = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$, luego de normalizar a $F_V(0) = 1$.

A partir de (5.24) obtenemos el comportamiento asintótico

$$(5.25) \quad F_V(t) \sim (-t)^{-3/2},$$

y comparando con la ec.(5.13) surge que $n_1 = n_2 = 2$.

En este modelo el factor de forma tiene un número infinito de polos (para $t > 0$) correspondientes a las frecuencias de la trayectoria del rho, la cual como siempre, se supone lineal en t . Para $t < 0$, $F_V(t)$ no tiene singularidades y converge asintóticamente según la ley de potencia ec. (5.25).

Fórmulas similares a la (5.24) han sido obtenidas por otros autores mediante otros modelos^(82;83;85;86;90-93).

Nosotros nos ocuparemos en especial del modelo del "espuri3n" en el Cap.7.

5.5 Comparaci3n con los Resultados Experimentales

Cleymans y Rodenberg⁽⁹⁴⁾ han estudiado una expresi3n para $F_V(t)$ del tipo

$$\frac{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}} = \frac{\Gamma(1 - a_\rho(t))}{\Gamma(n/2 - a_\rho(t))}$$

la cual es id3ntica a la ec.(5.24) si $n = 5$. Estos autores han mostrado que para $n > 5$ se obtiene un ajuste razonable en la regi3n $t < 0$, pero resultan valores incorrectos para los acoplamientos a mesones vectoriales. En cambio si $n < 5$ sucede lo inverso, i.e. mal comportamiento asint3tico y buenos acoplamientos. Si $n \approx 5$ se obtiene una situaci3n de compromiso satisfactoria. En las Tablas 1,2, y 3 reproducimos los resultados de Cleymans y Rodenberg para los acoplamientos en funci3n de n como as3 tambi3n los resultados experimentales.

Tabla 1

n	3	17/4	5	13/2	7	Valor experim. (95)
$\frac{g_{\rho\pi\pi}}{g_\rho}$	0.64	1.07	1.26	1.6	1.7	1.07

Tabla 2

n	3	17/4	5	13/2	7
$\frac{g_{e'\pi\pi}}{g_{e'}}$	0.10	- 0.045	-0.21	- 0.66	- 0.85

Tabla 3

n	3	17/4	5	13/2	7	Exp. ⁽⁹⁶⁾
$\left(\frac{g_e}{g_{e'}}\right)^2$	0.055	0.0034	0.055	0.3	0.5	0.05

En conclusión, el valor de $n = 5$ obtenido en la sección anterior es perfectamente compatible con los resultados experimentales para las constantes de acoplamiento a mesones vectoriales.

Otra evidencia proviene de comparar la ec.(5.24) con los datos para $F_V(t)$ cerca de la resonancia del ρ ⁽⁹⁷⁻¹⁰¹⁾. En efecto, introduciendo el ancho Γ del decaimiento del ρ en la función trayectoria de la ec.(5.24), resulta

$$\left| F_V(t) \right|^2 = \left| \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{\Gamma(2-t) \left((t - m_e^2) + i m_e \Gamma \right)} \right|^2$$

que tiene la forma indicada en la fig.2. Los valores disponibles para $m_\rho \Gamma$ son:

a) $m_\rho \Gamma = 0.095 \text{ (GeV)}^2$, de la tabla de Rosenfeld et al.

b) $m_\rho \Gamma = 0.071 \text{ (GeV)}^2$, de Novosibirsk⁽⁹⁷⁻⁹⁸⁾.

c) $m_\rho \Gamma = 0.085 \text{ (GeV)}^2$, de Orsay⁽⁹⁹⁻¹⁰¹⁾,

donde $m_\rho = 0.765 \text{ GeV}$ en común. A partir de estos datos se obtienen las siguientes alturas de pico en la resonancia

$$a') \quad \left| F_V(t) \right|^2 \approx 44$$

$$b') \quad \left| F_V(t) \right|^2 \approx 80$$

$$c') \quad \left| F_V(t) \right|^2 \approx 55 .$$

Como se aprecia en la fig.2 las predicciones a') y c') están en perfecto acuerdo con los datos experimentales ($\left| F_V(t) \right|^2 \approx 35 - 65$).

Para corroborar la aserción de Gleymans y Rodenberg, representamos en la fig.3 la ec.(5.24) para $t < 0$ junto con los datos disponibles⁽¹⁰²⁻¹⁰³⁾.

En resumen, la ec.(5.24) está en muy buen acuerdo con los valores experimentales de a) constantes de acoplamiento a mesones vectoriales, b) $t > 0$ cerca de la resonancia del rho y c) $t < 0$, dando buen comportamiento asintótico.

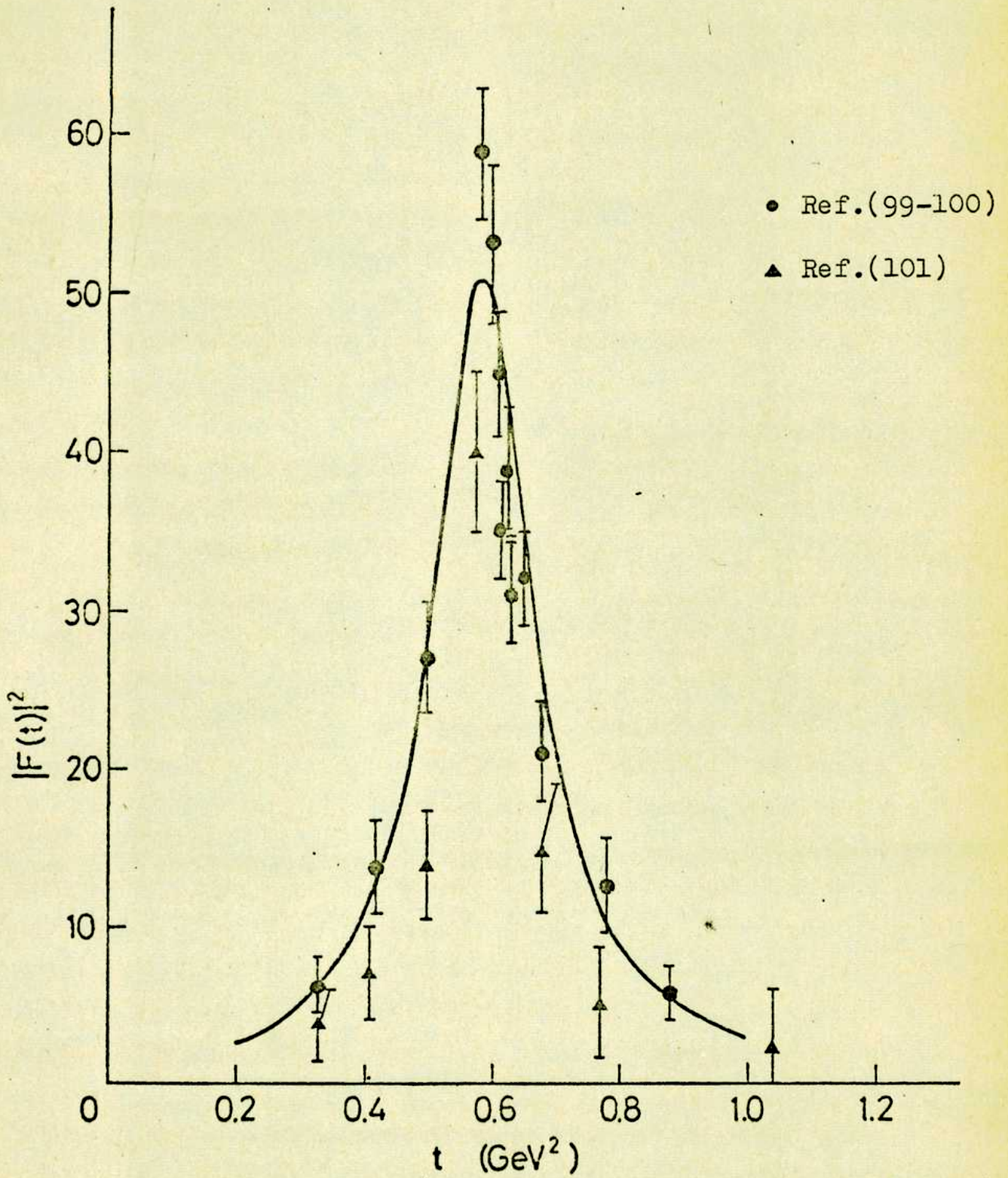


FIG.2

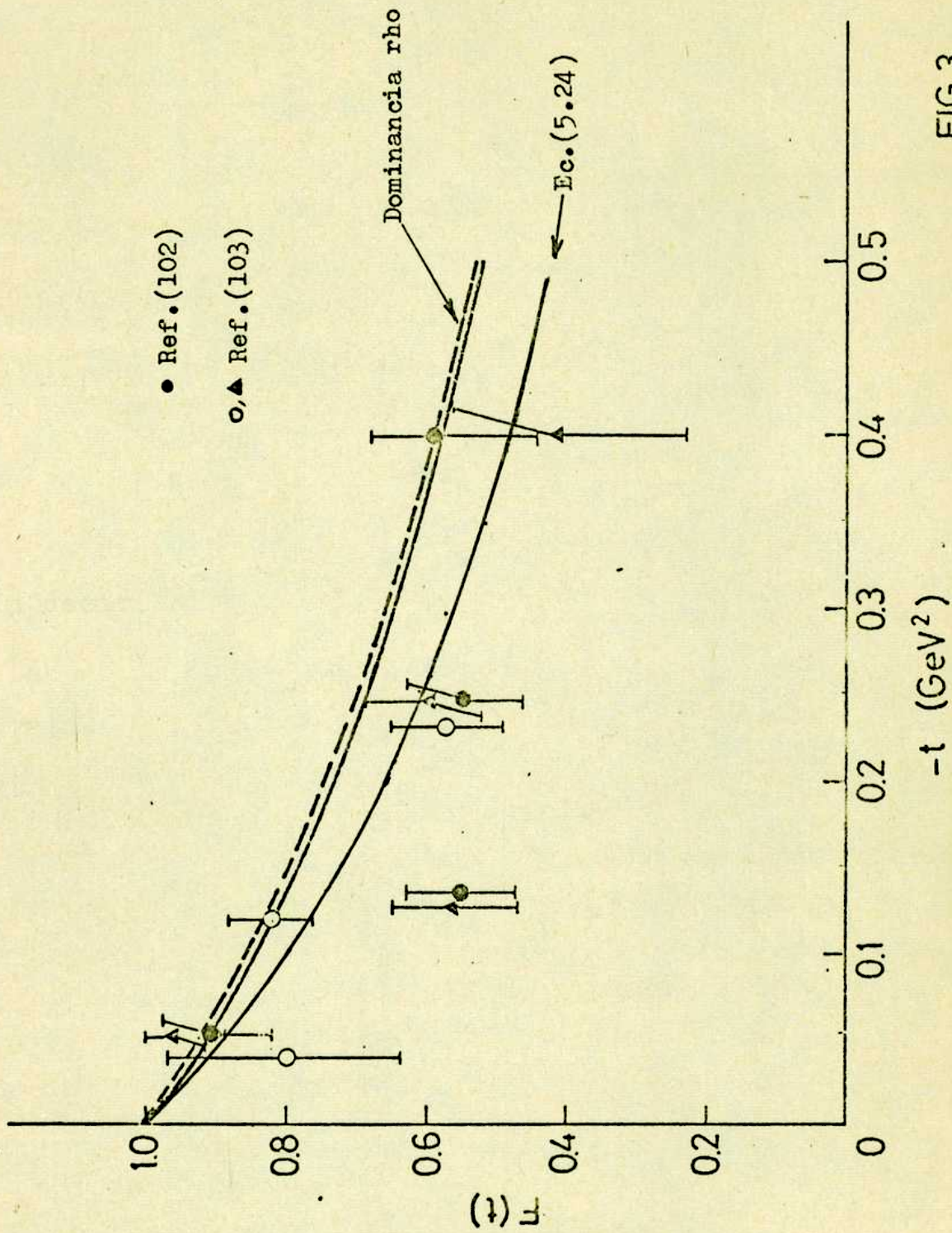


FIG.3

5.6 El Conmutador de Dos Corrientes Vectoriales

Si en lugar de partir de un proceso con dos corrientes axiales como en la sección 5.2, partimos del siguiente

$$V_{\mu}(k_1) + \pi(p_1) \longrightarrow V_{\nu}(k_2) + \pi(p_2),$$

donde V_{μ} y V_{ν} son corrientes vectoriales conservadas, la identidad de Ward-Takahashi (5.1) se reduce a

$$k_1^{\nu} T_{\mu\nu} = F_V(t) P_{\mu}$$

Es decir, el término W_{μ} está ausente debido a la conservación de la corriente vectorial. Otra diferencia con el caso tratado anteriormente es que la amplitud A tiene un polo en $s = m_{\pi}^2$, i.e. la partícula externa aparece también como estado intermedio. Como siempre consideraremos $k_1^2 = 0$ y sólo la parte s - t de las amplitudes. En lugar de la ec.(5.8) resulta en este caso la siguiente

$$(5.26) \quad (s - m_{\pi}^2) A(s, t, k_2^2) - \frac{1}{2}(t - k_2^2) B(s, t, k_2^2) = F_V(t).$$

La idea es estudiar si en la presente situación, se obtiene información nueva respecto del caso anteriormente discutido. Para ello hacemos $s = m_{\pi}^2$ en la ec.(5.26), con lo cual obtenemos

$$(5.27) \quad F(k_2^2) - \frac{1}{2}(t - k_2^2) B(s = m_{\pi}^2, t, k_2^2) = F_V(t),$$

donde $F(k_2^2)$ es el residuo de A en $s = m_\pi^2$, y B no tiene polo del pi3n. Es evidente que para $t = k_2^2$ (regla de suma de Fubini, Furlan y Rossetti⁽¹⁰⁴⁾) se obtiene una identidad en la ec.(5.27).

En conclusi3n, para un proceso con dos corrientes vectoriales no se obtiene ninguna restricci3n para el factor de forma $F_V(t)$, y en particular no hay contradicci3n con los resultados obtenidos en las secciones anteriores.

5.7 Conclusiones

Hemos mostrado siguiendo a Jengo y Alessi que existe compatibilidad entre las identidades del 3lgebra de corrientes y la caracterizaci3n de las amplitudes escalares por medio de los mismos ingredientes que en interacciones fuertes, e.g. los modelos de Regge y Veneziano. Como es f3cil apreciar, el m3todo para obtener los factores de forma es bastante sencillo y elegante, permitiendo controlar perfectamente y paso por paso las hip3tesis supuestas. En particular, estas son ampliamente aceptadas en la actualidad y el 3xito obtenido al comparar el resultado para $F_V(t)$ con la experiencia puede en cierta manera considerarse como una confirmaci3n de la validez del modelo. Esto se ver3 reforzado a medida que vayamos calculando otros factores de forma en los cap3tulos siguientes.

CAPITULO 6

LOS FACTORES DE FORMA AXIALES DEL PION *

6.1 Comportamiento Asintótico

Los factores de forma axiales del pi3n, $F_{A\pm}(t)$, se definen a trav3s del siguiente v3rtice

$$\langle \sigma(p_2) | A_\mu^0(0) | \pi^0(p_1) \rangle = F_{A^+}(t) P_\mu + F_{A^-}(t) \Delta_\mu,$$

donde el mes3n σ de n3meros cu3nticos $I^G = 0^+$, $J^P = 0^+$, y masa $p_2^2 = (700 \text{ MeV})^2$, corresponde a $\eta_{0^+}(700)$, la hija del rho.

A partir del proceso

$$A_\nu(k_1) + \pi(p_1) \longrightarrow V_\mu(k_2) + \sigma(p_2),$$

es inmediato obtener la siguiente identidad de Ward-Takahashi

$$T_{\mu\nu} k_1^\nu - W_\mu = F_{A^+}(t) P_\mu + F_{A^-}(t) \Delta_\mu,$$

* Para m3s detalles ver ref.(105).

donde como siempre $T_{\mu\nu}$ y W_μ corresponden al proceso de partida y al proceso contraído respectivamente.

La descomposición invariante de $T_{\mu\nu}$ y W_μ la escribiremos como sigue

$$(6.1) \quad T_{\mu\nu} = A_0 g_{\mu\nu} + A P_\mu P_\nu + A_1 P_\mu Q_\nu + \\ + A_2 P_\mu \Delta_\nu + A_3 Q_\mu Q_\nu + A_4 Q_\mu P_\nu + A_5 Q_\mu \Delta_\nu + \\ + C \Delta_\mu P_\nu + C_1 \Delta_\mu Q_\nu + C_2 \Delta_\mu \Delta_\nu ,$$

$$W_\mu = X_1 P_\mu + X_2 \Delta_\mu + X_3 Q_\mu$$

De acuerdo con lo discutido en el capítulo anterior, luego de calcular las reglas de suma de Fubini (dos en este caso, una para cada factor de forma), se obtiene ($k_1^2 = 0$)

$$(6.2) \quad -F_{A^+}(t) = \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{2}(t - k_2^2) \left[B^{st}(s = m_\pi^2, t, k_2^2) + \right. \right. \\ \left. \left. + B_1^{ut}(u = m_\sigma^2, t, k_2^2) \right] + X_1^{st}(s = m_\pi^2, t, k_2^2) + X_1^{ut}(u = m_\sigma^2, t, k_2^2) \right\}$$

$$(6.3) \quad -F_{A^-}(t) = \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{2}(t - k_2^2) \left[D^{st}(s = m_\pi^2, t, k_2^2) + \right. \right. \\ \left. \left. + D_1^{ut}(u = m_\sigma^2, t, k_2^2) \right] + X_2^{st}(s = m_\pi^2, t, k_2^2) + X_2^{ut}(u = m_\sigma^2, t, k_2^2) \right\}$$

Las amplitudes B, B_1, D y D_1 están definidas de la siguiente manera

$$B = A_1 - (A_2 + A)$$

$$B_1 = A_1 - (A_2 - A)$$

$$D = C_1 - (C_2 + C)$$

$$D_1 = C_1 - (C_2 - C)$$

Esto asegura que no existan singularidades cinemáticas, las que implicarían correlaciones entre las amplitudes escalares de la descomposición original ec.(6.1).

Suponiendo un comportamiento de Regge $(-t)^{\alpha_\rho(s)}$ y $(-t)^{\alpha_{A_1}(u)}$ para las amplitudes del tipo f^{st} y f^{ut} respectivamente, se obtiene a partir de (6.2) y (6.3), el siguiente comportamiento asintótico de los factores de forma axiales

$$(6.4) \quad F_{A^+}(t) \sim \beta(-t)^{\alpha_\rho(s=m_\pi^2) - n} + \beta(-t)^{\alpha_{A_1}(u=m_\sigma^2) - n'}$$

$$(n, n') \geq 1,$$

y similarmente para $F_{A^-}(t)$. Debido a que $\alpha_\rho(m_\pi^2) = \frac{1}{2}$ y

$\alpha_{A_1}(m_\sigma^2) = \frac{1}{2}$, los factores de forma tienen un comportamiento asintótico semientero, nuevamente de acuerdo con

la idea de que estos resultan de la contribución de un número infinito de polos.

6.2 Aplicación del Modelo de Veneziano

A los efectos de eliminar la dependencia de k_2^2 en las amplitudes que determinan el factor de forma, procedemos como en la sección 5.2, i.e. la singularidad en k_2^2 se escribe como en la ec.(5.14). En lo que sigue supondremos dominancia del polo del rho, de manera que será suficiente considerar sólo este término en la ec.(5.14). Concentrándonos por el momento en la parte f^{st} , la ecuación de vínculo (5.15) para el caso presente es

$$(6.5) \quad \frac{1}{2}(t - m_\rho^2) \overline{B}^{st}(s = m_\pi^2, t) + \overline{X}_1^{st}(s = m_\pi^2, t) = 0,$$

y el factor de forma, e.g. $F_{A^+}(t)$ resulta ser

$$(6.6) \quad F_{A^+}(t) = \frac{1}{4} \overline{B}^{st}(s = m_\pi^2, t)$$

En particular, para $t = m_\rho^2$, la ec.(6.5) se reduce a

$$(6.7) \quad \overline{X}_1^{st}(s = m_\pi^2, t = m_\rho^2) = 0,$$

que no es más que la condición de Adler cuando $k_1 \rightarrow 0$ y J_μ se reemplaza por el mesón rho. Por otra parte, la ec.(6.7) asegura que el factor de forma (6.6) no tenga un polo en $t = m_\rho^2$, el cual naturalmente no puede estar presente en el canal t .

Es inmediato que $F_{A^+}(t)$ y $F_{A^-}(t)$ quedan determina-

dos por las amplitudes \bar{X}_1 y \bar{X}_2 respectivamente, pertenecientes al proceso

$$\pi(k_1) + \pi(p_1) \rightarrow \rho(k_2) + \sigma(p_2) ,$$

donde $\pi(k_1)$ es el único mesón fuera de la capa de masa. De acuerdo con lo discutido en la sección 5.4, podríamos proponer para \bar{X}_1 y \bar{X}_2 fórmulas de Veneziano del tipo V_{112}^{st} y V_{112}^{ut} , donde las trayectorias en los canales u y t corresponden a la del mesón A_1 , y en el canal s se intercambia el rho. Sin embargo, es fácil ver que, como

$$\alpha_{A_1}(m_\rho^2) = \frac{1}{2} , \quad \alpha_\rho(m_\pi^2) = \frac{1}{2} , \quad \alpha_{A_1}(m_\sigma^2) = \frac{1}{2} ,$$

la condición de Adler (6.7) no se satisface con la mencionada elección de bloques de Veneziano. Una solución consiste en agregar satélites de manera de satisfacer la ec.(6.7) sin alterar esencialmente la forma original V_{112} . A partir de esta idea resulta, e.g.

$$(6.8) \quad \begin{aligned} \bar{X}_1^{st} &= \beta (V_{112}^{st} - 4 V_{223}^{st}) \\ \bar{X}_1^{ut} &= \beta (V_{112}^{ut} - 4 V_{223}^{ut}) , \end{aligned}$$

que verifican (6.7) y tienen los mismos comportamientos asintóticos que el bloque V_{112} .

En este caso, mediante las ecs.(6.5),(6.6) y las expresiones (6.8), se obtiene

$$(6.9) \quad F_{A^+}(t) = C_1 \frac{\Gamma(1 - a_{A_1}(t))}{\Gamma(5/2 - a_{A_1}(t))},$$

y una expresión similar para $F_{A^-}(t)$. Los factores de forma axiales tienen así una expresión análoga al factor de forma vectorial (excepto naturalmente la diferencia entre las trayectorias intercambiadas en uno y otro caso), y el mismo comportamiento asintótico. Es posible entonces predecir las siguientes relaciones de escala

$$(6.10) \quad \frac{F_{A^+}(t)}{F_{A^-}(t)} \sim \text{constante}, \quad \frac{F_{A^+}(t)}{F_V(t)} \sim \text{constante}.$$

Lamentablemente no existe información experimental acerca de los factores de forma axiales, de manera que no resulta posible una comparación de (6.9) o aún de las relaciones de escala (6.10), con la experiencia.

Para finalizar mencionamos que la ec. (6.10) se contradice con la obtenida por Frampton⁽⁹³⁾, viz.

$$\frac{F_V(t)}{F_{A^+}(t)} \sim t^{-\frac{1}{2}}$$

Resulta muy difícil hacer una crítica comparativa de este resultado debido a que ha sido obtenido mediante un método completamente distinto. Más aún, este se basa en la postulación "ad-hoc" de la expresión de un factor de forma en

términos de funciones del tipo de Veneziano . Esta postulación está inspirada en la idea de que como el modelo de Veneziano para cuatro partículas (mesones en particular) da resultados satisfactorios, resultaría posible postular fórmulas de Veneziano "ad-hoc" para funciones de vértice (tres partículas). Obviamente no existe un método terminante que permita construir estas expresiones de una manera única. Por este motivo pensamos que los resultados de Frampton presentan ambigüedades y no deben ser considerados muy seriamente. Por otra parte, como veremos en el Cap. 9 los resultados de Frampton para el caso de factores de forma nucleónicos se contradicen con las conclusiones obtenidas por medio del álgebra de corrientes de dos formas distintas.

CAPITULO 7

EL MODELO DEL ESPURION Y LOS FACTORES DE FORMA VECTORIAL ESCALAR Y AXIALES DEL PION

7.1 Introducción

Namiki y Ohba⁽¹⁰⁶⁾ han propuesto un modelo sencillo para obtener funciones de vértice a partir de un proceso de dispersión con cuatro partículas. La idea consiste en partir de una reacción del tipo

$$(7.1) \quad J(k_1) + H(p_1) \rightarrow S(k_2) + H(p_2) ,$$

donde J es una corriente vectorial o axial, H representan hadrones y S posee los números cuánticos del vacío ($I^G=0^+$, $J^P = 0^+$). En el límite $k_2 \rightarrow 0$, (7.1) se reduce al vértice (ver fig.1)

$$(7.2) \quad J(k_1) + H(p_1) \rightarrow H(p_2) .$$

Es esencial que S (llamado espurión) posea los números cuánticos del vacío pues en caso contrario el decaimiento

$J(k_1) \rightarrow H(p_1) + H(p_2)$, resultaría prohibido.

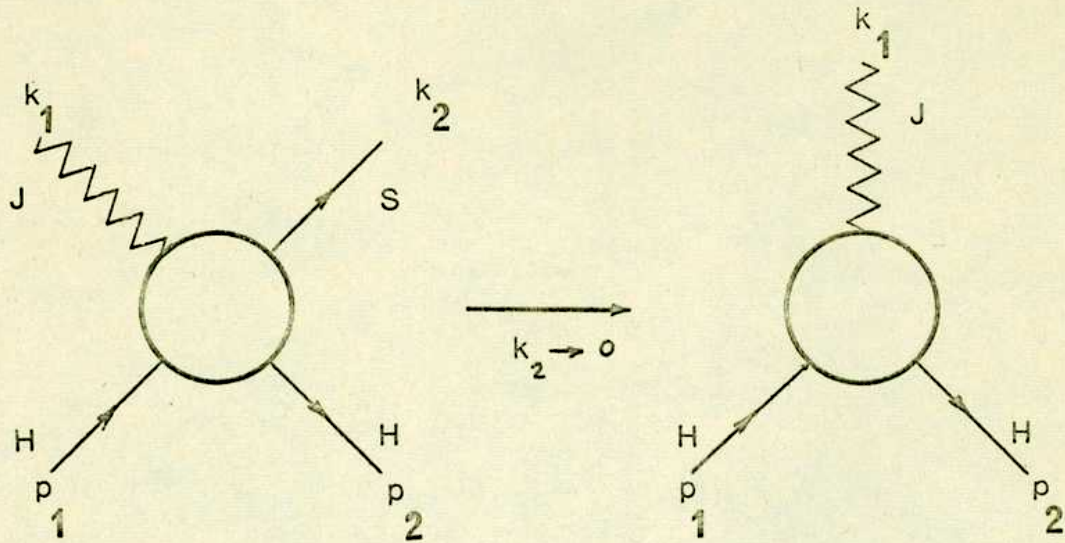


Fig. 1

Una vez conocida la amplitud de Veneziano para el proceso (7.1), mediante el límite $k_2 \rightarrow 0$, t fijo, es posible entonces obtener una representación del vértice (7.2) es decir, una fórmula de Veneziano para tres partículas. En dicho límite la amplitud original resulta dependiente de t , con s y u enclavados en las masas de $H(p_2)$ y $H(p_1)$ respectivamente. Finalmente identificando la amplitud resultante con el factor de forma correspondiente, se obtiene la expresión de este último sólo como función de t .

Namiki y Ohba han aplicado este modelo al cálculo del factor de forma vectorial del pión obteniendo un resultado que, a pesar de estar de acuerdo con la experiencia en una zona restringida de t , posee algunas características indeseables. Posteriormente nosotros hemos extendido el modelo al caso de los factores de forma axiales y escalar del

pión, mostrando que los resultados son poco satisfactorios y en contradicción con las propiedades físicas de un factor de forma⁽¹⁰⁷⁾.

A continuación discutiremos el cálculo de $F_V(t)$ a los efectos de ilustrar ciertos detalles del modelo, y luego nos ocuparemos de los otros factores de forma.

7.2 El Factor de Forma Vectorial del Pión

La reacción de partida es en este caso la siguiente

$$V(k_1, \epsilon) + \pi(p_1) \rightarrow S(k_2) + \pi(p_2) ,$$

donde V es una corriente vectorial y S el espurión.

La amplitud de dispersión se escribe como

$$(7.3) \quad T(s, t, u) = (p_1 + p_2) \cdot \epsilon A(s, t, u) + \\ + (p_1 - p_2) \cdot \epsilon B(s, t, u) ,$$

donde por simplicidad ignoramos los índices de carga. En el límite del espurión ($k_2 \rightarrow 0$, t fijo), el segundo término de la ec.(7.3) viola la condición de invariancia de calibre de manera que nos ocuparemos sólo de la amplitud A . Esta última puede escribirse como

$$(7.4) \quad A(s, t, u) = \frac{\beta}{\pi} (a_1 + a_2 t) (V_{112}^{st} + V_{112}^{ut} + V_{112}^{su}) ,$$

donde las trayectorias de los canales s y u corresponden al

A_1 , y en el canal t se intercambia el rho.

La condición

$$(7.5) \quad \alpha_\rho(t) + \alpha_{A_1}(s) + \alpha_{A_1}(u) = 2 ,$$

permite obtener la signatura correcta para las trayectorias del rho y del A_1 . Parametrizando estas últimas como⁽⁶¹⁾

$$(7.6) \quad \alpha_\rho(t) = 0.48 + 0.89 t$$

$$\alpha_{A_1}(t) = 0.89 t ,$$

se obtiene a partir de (7.6) y (7.5), $m_S \approx 1070$ MeV, es decir el espurión corresponde al mesón η_{o^+} (1060), el hijo del A_1 .

Reemplazando la ec.(7.5) en la (7.4) resulta

$$(7.7) \quad A(s,t,u) = \beta(a_1 + a_2 t) \frac{\Gamma(\alpha_\rho(t) + \alpha_{A_1}(s) - 1)}{\Gamma(\alpha_\rho(t)) \Gamma(\alpha_{A_1}(s))} \times \left[\frac{1 - \exp(-i\pi\alpha_\rho(t))}{\text{sen } \pi\alpha_\rho(t)} + \frac{1 - \exp(i\pi\alpha_{A_1}(s))}{\text{sen } \pi\alpha_{A_1}(s)} \right] .$$

En el límite del espurión, s y u quedan enclavados en m_π^2 , pero resulta necesaria la siguiente aclaración. La ec.(7.5) sólo es válida cuando todas las partículas exter-

nas están sobre sus capas de masa, de manera que en el paso al límite $k_{2\mu} \rightarrow 0$, la ec. (7.5) pierde vigencia y las trayectorias se modifican. Namiki y Ohba han supuesto que para $t = m_e^2$, $\alpha_e(m_e^2)$ sigue valiendo 1 debido a que la función de vértice se convierte en la amplitud física del decaimiento del rho: $\rho \rightarrow \pi\pi$. De esta forma la ec.(7.5) seguiría cumpliéndose en $t = m_e^2$ y la única trayectoria modificada sería la del A_1 , i.e.

$$(7.8) \quad \alpha_\rho(m_\rho^2) + 2 \tilde{\alpha}_{A_1}(m_\pi^2) = 2,$$

y por lo tanto $\tilde{\alpha}_{A_1}(m_\pi^2) = \frac{1}{2}$.

Si bien resulta natural que la trayectoria del A_1 deba modificarse, no está muy claro el motivo por el cual la trayectoria del rho no se altera. El argumento esgrimido por Namiki y Ohba parece razonable pero obviamente no constituye una demostración. Más bien habría que considerarlo una hipótesis de trabajo pues si se modificaran todas las trayectorias no sería posible obtener el nuevo valor de las mismas a partir de una única ecuación, i.e. ec.(7.5).

Teniendo en cuenta (7.8) es fácil ver de la ec.(7.7) que la amplitud A tendría un polo en $\alpha_\rho(t) = \frac{1}{2}$, es decir $t = m_\rho^2$, el cual naturalmente no puede existir en el canal t. Este polo espúreo ha aparecido debido al corrimiento de la trayectoria del A_1 según (7.8), y puede eliminarse fácilmente eligiendo a_1 y a_2 de la siguiente forma

$$\begin{aligned}
 a_1 &= \alpha_\rho(0) + \tilde{\alpha}_{A_1}(m_\pi^2) - 1 \\
 (7.9) \quad a_2 &= \alpha' \approx 1 .
 \end{aligned}$$

Finalmente tomando el límite del espurión en (7.7) y teniendo en cuenta (7.8) y (7.9), resulta la siguiente función de vértice

$$\begin{aligned}
 (7.10) \quad A(t) &= \beta' \frac{\Gamma(\alpha_\rho(t) + \tilde{\alpha}_{A_1}(m_\pi^2))}{\Gamma(\alpha_\rho(t))} \times \\
 &\times \left[\operatorname{tg} \frac{\pi}{2} \alpha_\rho(t) + \operatorname{tg} \frac{\pi}{2} \tilde{\alpha}_{A_1}(m_\pi^2) \right] .
 \end{aligned}$$

Si comparamos ahora el vértice

$$\langle \pi(p_2) | V_\mu(0) | \pi(p_1) \rangle = (p_1 + p_2)_\mu F_V(t)$$

con la ec.(7.10) (ver ec.(7.3)), obtenemos el factor de forma vectorial del pión

$$\begin{aligned}
 (7.11) \quad F_V(t) &= C \frac{\Gamma(\alpha_\rho(t) + \tilde{\alpha}_{A_1}(m_\pi^2))}{\Gamma(\alpha_\rho(t))} \times \\
 &\times \left[\operatorname{tg} \frac{\pi}{2} \alpha_\rho(t) + \operatorname{tg} \frac{\pi}{2} \tilde{\alpha}_{A_1}(m_\pi^2) \right]
 \end{aligned}$$

El único parámetro libre C puede determinarse a partir de la normalización usual $F_V(0) = 1$, resultando $C = 0.94$.

La expresión (7.11) puede ser comparada con los resultados experimentales disponibles para $t > 0$ y $t < 0$ como veremos a continuación.

a) $t > 0$.

La ec.(7.11) tiene un polo simple en $t = m_\rho^2$. Expandiendo el factor de forma alrededor de este punto e introduciendo el ancho de decaimiento tal como en la sección 5.5, se obtienen las curvas de la fig.2.

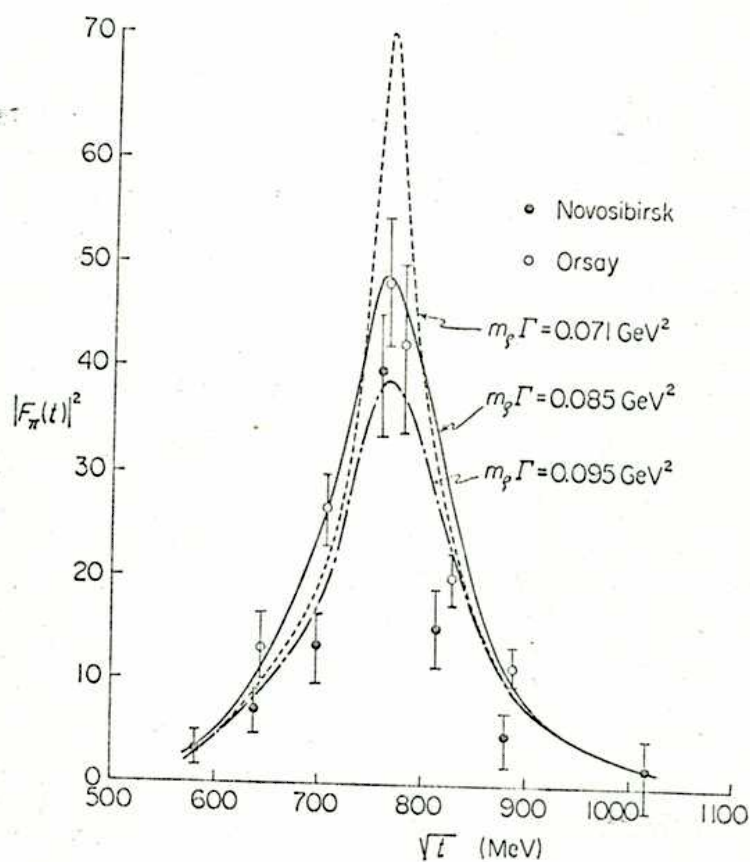


Fig 2

Indudablemente el acuerdo es bastante satisfactorio aunque no superior al de la expresión (5.24) de Jengo y Remiddi.

b) $t < 0$.

En la fig.3 se muestra la predicción del presente modelo para $t < 0$ junto con los datos experimentales^(102,103), apreciándose nuevamente un buen acuerdo.

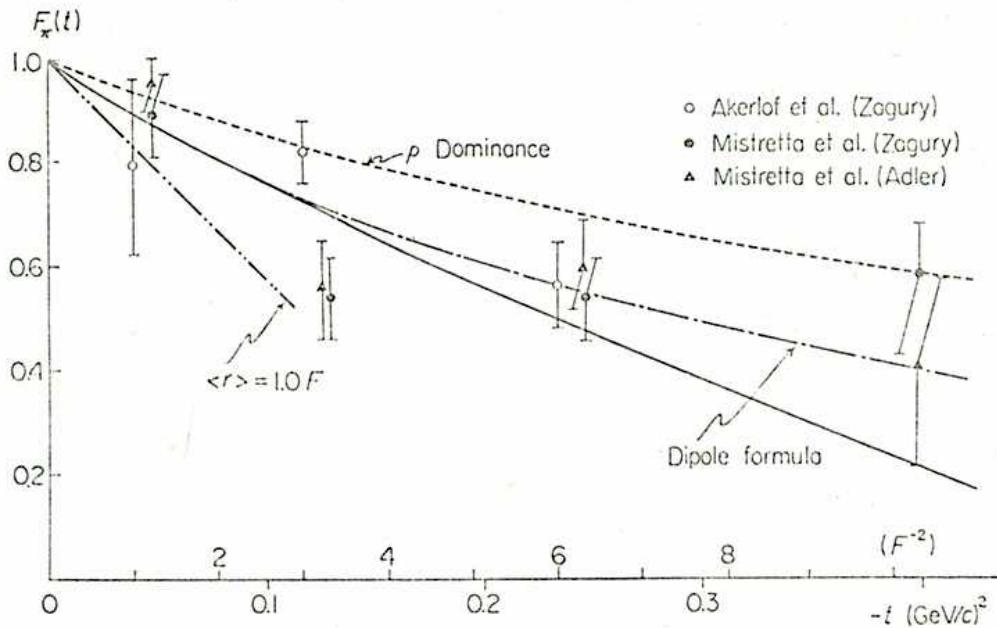


Fig 3

A pesar de todo esto, la ec.(7.11) tiene polos para $t < 0$, e.g. en $t = - 1.10, - 2.23, \dots$ etc. Naturalmente que esta propiedad no es la que se esperaría de un factor de forma, el cual debe exhibir polos sólo para $t > 0$ y poseer un comportamiento asintótico convergente para $t < 0$. El ajuste que proporciona la ec.(7.11) para $t < 0$ no puede entonces ser considerado muy seriamente ya que es válido sólo en un entorno pequeño alrededor de $t = 0$. En otras palabras, la ec.(7.11) es de validez limitada, en contraposición con la ec.(5.24) la cual, además de estar de acuerdo con los datos experimentales, es válida para cualquier valor de t .

7.3 Los Factores de Forma Axiales del Pión

Partiremos de la siguiente reacción

$$(7.13) \quad A_1(k_1) + \pi(p_1) \rightarrow \sigma(k_2) + \sigma(p_2),$$

donde σ tiene los números cuánticos del vacío. La amplitud de dispersión correspondiente al proceso (7.13) tiene la forma

$$(7.14) \quad T(s,t,u) = A(s,t,u) (p_1 + p_2) \cdot \epsilon + B(s,t,u) (p_2 - p_1) \cdot \epsilon$$

En la reacción (7.13) se intercambian $f(1260)$ en el canal s y A_1 en los canales t y u . Las fórmulas de Veneziano para A y B que satisfacen la simetría de cruce $u-t$, y que tienen los comportamientos de Regge adecuados, se pueden escribir como⁽¹⁰⁷⁾

$$(7.15) \quad \begin{aligned} A &= a_1 V_{122}^{ut} + a_2 V_{112}^{ut} \\ B &= a_1 (V_{122}^{ut} - 2 V_{212}^{ut}) - a_2 V_{112}^{ut} \end{aligned}$$

La parte $s-u$ de las amplitudes contribuye sólo con una constante en el límite del espurión, y la parte $s-t$ no modificará para nada las conclusiones a que arribaremos, de modo que es suficiente estudiar sólo la parte $u-t$ dada por la (7.15).

La condición de Adler se satisface si e.g. $\alpha_{A_1}(m_\sigma^2) = 1$, i.e. $\sigma \equiv \eta_{o+}$ (1060).

Al tender al límite del espurión, la reacción original (7.14) se transforma en el vértice $A_1 \pi \sigma$ que es justamente el que determina los factores de forma axiales del pión, viz.

$$(7.16) \quad \langle \sigma(p_2) | A_\mu(0) | \pi(p_1) \rangle \epsilon^\mu = \\ = F_{A^+}(t) (p_1 + p_2) \cdot \epsilon + F_{A^-}(t) (p_2 - p_1) \cdot \epsilon .$$

Tendiendo al límite $k_{2\mu} \rightarrow 0$, t fijo y $u = m_\pi^2$, en la (7.15) y comparando con (7.16), resulta

$$(7.17) \quad F_{A^+}(t) = a_1 + \frac{a_2}{1-t} \\ F_{A^-}(t) = a_1 - \frac{2a_1 + a_2}{1-t} ,$$

donde $\alpha_A(t) \approx t$, y la trayectoria del canal u no sufre modificación de acuerdo con lo discutido en la sección anterior. A partir de (7.17) se obtiene para t pequeño

$$F_{A^+}(t) \simeq a_1 + a_2 \simeq -F_{A^-}(t) ,$$

y asintóticamente, $F_{A^\pm}(t) \sim a_1 = \text{constante}$. Estos resultados además de no tener mucho sentido, están en contradicción con los hallados por medio de las reglas de suma

dispersivas del álgebra de corrientes y el modelo de Veneziano, ec.(6.9). Más aún, de acuerdo con (7.17) los factores de forma tienen un solo polo, el polo del A_1 , en desacuerdo con la idea generalmente aceptada de que deben poseer un número infinito de polos para $t > 0$. Finalmente resulta difícil aceptar un comportamiento asintótico constante. Esto último podría en principio remediarse mediante el agregado de satélites desacoplando los términos predominantes, aunque de todas maneras subsistiría el problema del número finito de polos en los factores de forma.

7.4 El Factor de Forma Escalar del Pión

A los efectos de obtener el factor de forma escalar del pión, i.e.

$$F_S(t) = \langle \pi(p_2) | S(0) | \pi(p_1) \rangle ,$$

donde $S(x)$ es un operador escalar, partiremos de la siguiente reacción⁽¹⁰⁷⁾

$$\sigma(k_1) + \pi(p_1) \rightarrow \sigma(k_2) + \sigma(p_2) ,$$

con σ un mesón que tiene los números cuánticos del vacío. La única amplitud de Veneziano para este proceso ha sido estudiada por Zee⁽¹⁰⁸⁾, y tiene la forma

$$M(s,t,u) = \beta \left(V_{011}^{st} + V_{000}^{su} + V_{011}^{ut} \right) ,$$

donde se ha supuesto degeneración de intercambio $\pi - A_1$ (intercambiados en los canales s y u), y $\rho - \omega$ (intercambiados en el canal t).

La condición de Adler se satisface si $\alpha_\rho(m_\pi^2) = \frac{1}{2}$ y $\alpha_{A_1}(m_\sigma^2) = \frac{1}{2}$, i.e. si $\sigma \equiv \eta_{o+}(700)$, la hija del rho.

Siguiendo a Namiki y Ohba, en el límite del espurión la trayectoria en el canal t no se modificará debido a que la función de vértice corresponde a la amplitud física del decaimiento del $\sigma \rightarrow \pi\pi$, mientras que

$$\tilde{\alpha}_A(m_\pi^2) = \frac{1}{4}$$

En el límite $k_{2\mu} \rightarrow 0$, t fijo y $s = u = m_\pi^2$, la amplitud resultante se convierte en el factor de forma escalar, i.e.

$$(7.18) \quad F_S(t) = C_1 + C_2 \frac{\Gamma(1 - \alpha_\rho(t))}{\Gamma(3/4 - \alpha_\rho(t))} ,$$

que diverge asintóticamente como $(t)^{1/4}$. Aunque no resulta posible en este caso comparar con un resultado obtenido a partir del álgebra de corrientes * , la expresión (7.18)

* Las reglas de suma dispersivas que corresponderían a este caso requieren sustracciones de manera que el procedimiento descrito en el Cap.5 queda invalidado, ref(26).

posee la indeseable característica de ser divergente para $t \rightarrow -\infty$.

7.5 Conclusiones

Hemos visto que a pesar de que la expresión obtenida para $F_V(t)$ concuerda con los resultados experimentales en una zona restringida de t , el resultado no es válido en general, y posee singularidades en $t < 0$. En el caso de los factores de forma axiales, hemos hallado expresiones que poseen sólo un polo, y un comportamiento asintótico constante. Finalmente $F_S(t)$ diverge cuando $t \rightarrow -\infty$.

En resumen, las características de las funciones de vértice calculadas por medio del modelo de Namiki y Ohba están en contradicción con las propiedades que normalmente se suponen para las mismas. Nuestra conclusión es que el modelo del espurión proporciona un método muy limitado(y aún de dudosa validez) para el cálculo de factores de forma piónicos.

CAPITULO 8

LOS FACTORES DE FORMA VECTORIALES DEL NUCLEON

8.1 Comportamiento Asintótico

Las reglas de suma dispersivas del álgebra de corrientes conjuntamente con el modelo de Regge nos permitirán obtener el comportamiento asintótico de los factores de forma vectoriales del nucleón⁽¹⁰⁹⁾. Lamentablemente todos los intentos realizados para describir reacciones en las cuales interviene al menos un barión, mediante el modelo de Veneziano no han dado resultados positivos⁽¹¹⁰⁻¹¹³⁾. Cabe pensar que si este modelo es incapaz de describir una reacción relativamente sencilla como e.g. pión-nucleón, tampoco podrá tener éxito en procesos más complicados como e.g. dispersión de corrientes de espín 1 sobre bariones.

Debemos conformarnos entonces con obtener el comportamiento asintótico de los factores de forma nucleónicos y las relaciones de escala pertinentes.

Partiendo de la reacción

$$A_{\nu} (k_1) + N (p_1) \longrightarrow A_{\mu} (k_2) + N (p_2) ,$$

donde A_μ y A_ν son corrientes axiales y N representa un nucleón, es inmediato obtener la siguiente identidad de Ward-Takahashi

$$(8.1) \quad T_{\mu\nu} k_1^\nu - W_\mu = \langle p_2 \left| v_\mu(0) \right| p_1 \rangle = \bar{u}_{p_2} \left(\Psi_1(t) \gamma_\mu - \Psi_2(t) \frac{P_\mu}{M} \right) u_{p_1},$$

donde u_p son espinores de Dirac, M la masa del nucleón, y como siempre, $T_{\mu\nu}$ y W_μ son las amplitudes definidas fuera de la capa de masa correspondientes al proceso original y al contraído respectivamente. La relación entre los factores de forma $\Psi_1(t)$, $\Psi_2(t)$ y los factores de forma de Sachs, eléctrico y magnético, es la siguiente *

$$(8.2) \quad G_E^V(t) = \Psi_1(t) + \frac{P^2}{M^2} \Psi_2(t)$$

$$G_M^V(t) = \Psi_1(t)$$

La descomposición invariante de $T_{\mu\nu}$ puede escribirse como sigue

* Nuestra convención para estos últimos es la de la ref.(15).

$$\begin{aligned}
 (8.3) \quad T_{\mu\nu} &= A_{\mu\nu} + B_{\mu\nu} \gamma \cdot Q + (C_{\mu}^{(+)} - C_{\mu}^{(-)}) \gamma_{\nu} + \\
 &+ (C_{\nu}^{(+)} + C_{\nu}^{(-)}) \gamma_{\mu} + (D_{\mu}^{(+)} - D_{\mu}^{(-)}) (\gamma_{\nu}, \gamma \cdot Q) + \\
 &+ (D_{\nu}^{(+)} + D_{\nu}^{(-)}) (\gamma_{\mu}, \gamma \cdot Q) + E_1 (\gamma_{\mu}, \gamma_{\nu}) + \\
 &+ E_2 (\gamma_{\mu}, \gamma \cdot Q, \gamma_{\nu}) \quad ,
 \end{aligned}$$

donde *

$$\begin{aligned}
 (8.4) \quad A_{\mu\nu} &= A_{00} g_{\mu\nu} + A_{11} P_{\mu} P_{\nu} + A_{22} \Delta_{\mu} \Delta_{\nu} + \\
 &+ A_{33} Q_{\mu} Q_{\nu} + A_{12}^{(+)} (P_{\mu} \Delta_{\nu} + \Delta_{\mu} P_{\nu}) + \\
 &+ A_{12}^{(-)} (P_{\mu} \Delta_{\nu} - \Delta_{\mu} P_{\nu}) + A_{13}^{(+)} (P_{\mu} Q_{\nu} + Q_{\mu} P_{\nu}) + \\
 &+ A_{13}^{(-)} (P_{\mu} Q_{\nu} - Q_{\mu} P_{\nu}) + A_{23}^{(+)} (\Delta_{\mu} Q_{\nu} + Q_{\mu} \Delta_{\nu}) + \\
 &+ A_{23}^{(-)} (\Delta_{\mu} Q_{\nu} - Q_{\mu} \Delta_{\nu}) \quad ,
 \end{aligned}$$

y una descomposición similar para $B_{\mu\nu}$. Más aún,

$$(8.5) \quad C_{\mu} = C_1^{(\pm)} P_{\mu} + C_2^{(\pm)} \Delta_{\mu} + C_3^{(\pm)} Q_{\mu} \quad ,$$

* $(\gamma \cdot a_1, \gamma \cdot a_2, \dots, \gamma \cdot a_n) = \frac{1}{n!} \sum_{\text{permut.}} (\pm 1) \gamma^{a_{i1}} \gamma^{a_{i2}} \dots$

y una descomposición similar para $D_{\mu}^{(\pm)}$. En cuanto a $W_{\mu}^{(\pm)}$, su descomposición es

$$(8.6) \quad W_{\mu} = A_{\mu} + F_{\mu} \gamma \cdot Q + C \gamma_{\mu} + D (\gamma_{\mu}, \gamma \cdot Q),$$

con

$$(8.7) \quad A_{\mu} = A_1 P_{\mu} + A_2 \Delta_{\mu} + A_3 Q_{\mu},$$

y análogamente para F_{μ} .

Como es fácil ver, las descomposiciones invariantes de amplitudes de dispersión de corrientes sobre bariones son bastante complejas. Es importante destacar que en la ec.(8.3), viz.

$$T_{\mu\nu} = \sum_i^{34} \Phi_i(s, u, t) I_i$$

$$(\Phi_i = A_{ii}, A_{ij}^{(\pm)}, B_{ii}, B_{ij}^{(\pm)}, C_i^{(\pm)}, D_i^{(\pm)}, E_1, E_2),$$

los covariantes I_i no son todos independientes sino que satisfacen las siguientes relaciones lineales

$$\sum_i^{34} c_i^{(\lambda)} I_i = 0 \quad (\lambda = 1, 2)$$

Sin embargo es posible mostrar que no existe ninguna diferencia en cuanto al cálculo del factor de forma se refie-

re, si en lugar de usar (8.3) se utilizara la descomposición en términos del conjunto de amplitudes totalmente independientes⁽¹⁰⁹⁾. En otras palabras, el comportamiento asintótico de los factores de forma no se verá afectado por este hecho.

Al reemplazar (8.3) y (8.6) en la identidad de Ward-Takahashi (8.1), debe de utilizarse la ecuación de Dirac y las propiedades de las matrices γ , a los efectos de reducir algunos de los covariantes I_i . El cálculo es sumamente laborioso y extenso como para ser reproducido aquí, de manera que damos el resultado final (para más detalles consultar las refs.(109,114-115)) i.e.

$$(8.8) \quad - \frac{\Psi_2(t)}{M} = \left[A_{11} - (D_1^{(+)} - D_1^{(-)}) \right] +$$

$$+ \frac{1}{2}(t - k_2^2) (A_{12}^{(+)} + A_{12}^{(-)} - A_{13}^{(+)} - A_{13}^{(-)}) + \frac{1}{2} E_1 - A_1 ,$$

$$(8.9) \quad \Psi_1(t) = (C_1^{(+)} + C_1^{(-)} + E_2) +$$

$$+ \frac{1}{2} (t - k_2^2) (C_2^{(+)} + C_2^{(-)} - C_3^{(+)} - C_3^{(-)}) - M E_1 - C ,$$

donde como siempre, hemos supuesto $k_1^2 = 0$.

Las reglas de suma dispersivas para los factores de forma resultan ser

$$(8.10) \quad \frac{\Psi_2(\tau)}{M} = \frac{1}{4\pi i} \left[\int ds \, D_s(A_{11} - (D_1^{(+)} - D_1^{(-)})) - \right. \\ \left. - \int du \, D_u(A_{11} - (D_1^{(+)} - D_1^{(-)})) \right] ,$$

$$(8.11) \quad - \Psi_1(\tau) = \frac{1}{4\pi i} \left[\int ds \, D_s(C_1^{(+)} + C_1^{(-)} + E_2) - \right. \\ \left. - \int du \, D_u(C_1^{(+)} + C_1^{(-)} + E_2) \right]$$

Al calcular las discontinuidades de las amplitudes que intervienen en las reglas de suma a partir de (8.8) y (8.9), encontramos el mismo problema que en el caso piónico, i.e. se hace necesaria una redefinición de las descomposiciones invariantes originales a los efectos de evitar correlaciones entre las amplitudes escalares. La redefinición correcta es

$$A = A_{11} - (D_1^{(+)} - D_1^{(-)})$$

$$B = - (A_{12}^{(+)} + A_{11} + A_{12}^{(-)}) + A_{13}^{(+)} + A_{13}^{(-)} + D_1^{(+)} - D_1^{(-)}$$

$$X = - \left(\frac{1}{2} E_1 - A_1 \right)$$

$$A' = C_1^{(+)} + C_1^{(-)} + E_2$$

$$B' = C_2^{(+)} + C_2^{(-)} - C_3^{(+)} - C_3^{(-)} + C_1^{(+)} + C_1^{(-)} + E_2$$

$$X' = - M E_1 - C$$

$$B_1 = -(A_{12}^{(+)} - A_{11} + A_{12}^{(-)}) + A_{13}^{(+)} + A_{13}^{(-)} - D_1^{(+)} - D_1^{(-)}$$

$$B_1' = C_2^{(+)} + C_2^{(-)} - C_3^{(+)} - C_3^{(-)} - C_1^{(+)} - C_1^{(-)} - E_2 .$$

Finalmente, luego de calcular las reglas de suma ecs. (8.10) y (8.11), resulta

$$(8.12) \quad \frac{\Psi_2(t)}{M} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{2}(t - k_2^2) \left[B^{st}(s = M^2, t, k_2^2) + \right. \right. \\ \left. \left. + B_1^{ut}(u = M^2, t, k_2^2) \right] + X^{st}(s = M^2, t, k_2^2) + X^{ut}(u = M^2, t, k_2^2) \right\}$$

$$(8.13) \quad \Psi_1(t) = \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{2}(t - k_2^2) \left[B'{}^{st}(s = M^2, t, k_2^2) + \right. \right. \\ \left. \left. + B_1'{}^{ut}(u = M^2, t, k_2^2) \right] + X'{}^{st}(s = M^2, t, k_2^2) + X'{}^{ut}(u = M^2, t, k_2^2) \right\}$$

Es posible ahora suponer un comportamiento de Regge puro para todas las amplitudes que aparecen en las ecs.(8.12) y (8.13), i.e. para t grande y s, k_2^2 fijos, reemplazamos a B^{st}, X^{st}, B'^{st} y X'^{st} por $f(k_2^2) (-t)^{\alpha(s) - \frac{1}{2} n_1}$, y análogamente para la parte ut . De esta forma resulta e.g.

$$(8.14) \quad \Psi_2(t) \sim \beta_1 (-t)^{\alpha(s=M^2) - \frac{1}{2} n_1} + \beta_2 (-t)^{\alpha(u=M^2) - \frac{1}{2} n_2}$$

y una expresión del mismo tipo para $\Psi_1(t)$. Debido a que las trayectorias intercambiadas en los canales s y u son bariónicas, n_1 y n_2 son enteros impares (1,3,5,...). Estos, como siempre, quedan indeterminados en el contexto del presente modelo. Las trayectorias relevantes son las del nucleón(N) y la Δ , cumpliéndose que⁽⁶¹⁾

$$\alpha_{\Delta}(s = M^2) \approx 1 \quad \alpha_N(s = M^2) = \frac{1}{2},$$

y lo mismo para el canal u . A partir de (8.14), y la correspondiente a $\Psi_1(t)$, vemos que el acoplamiento de la trayectoria delta daría como resultado un comportamiento asintótico semientero, mientras que resultaría una potencia entera en el caso de la trayectoria del nucleón. La primera posibilidad es naturalmente la más atractiva y como veremos enseguida, la evidencia experimental apoya esta elección.

A pesar de la indeterminación de n_1 y n_2 , es posible sin embargo, hallar la siguiente relación de escala

$$(8.15) \quad \frac{G_E^V(t)}{G_M^V(t)} \sim \text{constante} \quad ,$$

la cual ha sido ampliamente confirmada experimentalmente⁽¹¹⁷⁾
118)

Para finalizar con esta sección destacamos que si en lugar de partir de un conmutador entre dos corrientes axiales, se partiera de un conmutador entre dos corrientes vectoriales, aún es posible determinar los factores de forma, y naturalmente en los dos casos se obtiene el mismo resultado⁽¹⁰⁹⁾. Existe así una diferencia con el caso del factor de forma $F_V(t)$ donde, como vimos, se obtenía una identidad.

8.2 Resultados Experimentales

Inspirados en las propiedades del modelo de Veneziano, Di Vecchia y Drago⁽¹¹⁹⁾ han mostrado que la expresión

$$(8.16) \quad G(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma(1 - \alpha_\rho(t))}{\Gamma(7/2 - \alpha_\rho(t))} \quad ,$$

ajusta en forma excelente los datos experimentales de los factores de forma (vectoriales) nucleónicos⁽¹²⁰⁻¹²⁶⁾. En efecto, en las figs, 1, 2 y 3 puede apreciarse dicha concordancia.

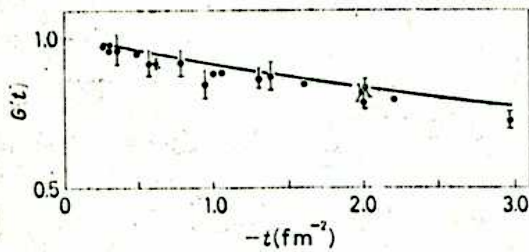


Fig 1

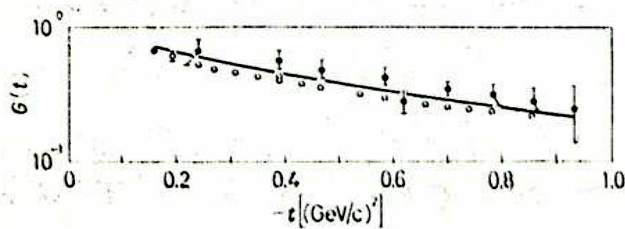


Fig. 2. - Data for $-t \leq 1$ (GeV/c)²: ● HAND *et al.* (12); ○ JANSSENS *et al.* (13).

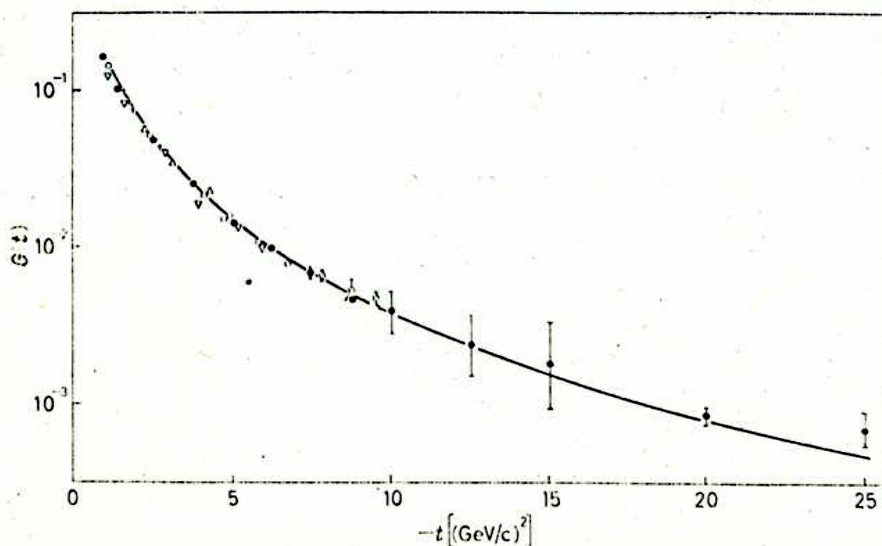


Fig. 3. - Data for $-t > 1$ (GeV/c)²: ▲ BEHRENDTS *et al.* (14); + BARTEL *et al.* (15); ○ ALBRECHT *et al.* (16); ● COWARD *et al.* (17); ▽ GOITEIN *et al.* (18).

A partir de (8.16) se obtiene el siguiente comportamiento asintótico

$$(8.17) \quad G(t) \sim t^{-5/2}$$

Comparando (8.17) con nuestro resultado (e.g. ec. (8.14)), obtenemos n_1 (o n_2) = 7, lo que implica que la trayectoria acoplada sería la correspondiente a la delta.

Desde un punto de vista teórico, una expresión del tipo (8.16) es preferible a e.g. la famosa fórmula empírica (dipolar)

$$(8.18) \quad G(t) = (1 - t/0.71)^{-2},$$

la que posee un polo doble en $t = 0.71$, en lugar de polos simples en las masas de las resonancias conocidas. Más aún, Frampton⁽⁹³⁾ ha mostrado que la función

$$(8.19) \quad G(t) = \frac{(11/4)}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma(1 - \alpha_\rho(t))}{\Gamma(13/4 - \alpha_\rho(t))},$$

proporciona un mejor ajuste a $G_M(t)$ que la fórmula dipolar (8.18). De todas maneras, la ec.(8.14) puede acomodar ambas versiones, i.e. es compatible con (8.16) (asintóticamente desde luego) si se acopla la trayectoria delta, y concuerda con (8.18) en el caso del acoplamiento del N .

En conclusión nuestro resultado no está en contradicción con la experiencia, aunque naturalmente no ha sido posible obtener expresiones sin parámetros libres como e.g.

en el caso de piones donde resulta factible aplicar el modelo de Veneziano * . Por otra parte la predicción (8,15) no es más que la conocida ley de escala, en perfecto acuerdo con los datos actuales⁽¹¹⁷⁻¹¹⁸⁾ .

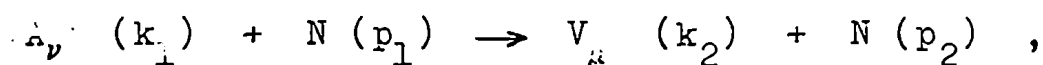
* Konetshny y Majerotto⁽¹²⁷⁻¹²⁹⁾ han intentado aplicar el modelo de Veneziano para pión-nucleón, pión+nucleón-nucleón A_1 y pión+nucleón - nucleón rho, juntamente con el concepto de dominancia de polos a los efectos de obtener los factores de forma nucleónicos. Sin embargo los resultados son muy poco satisfactorios.

CAPITULO 9

LOS FACTORES EN FORMA AXIALES DEL NUCLEON

9.1 Comportamiento Asintótico

A partir de la reacción



resulta inmediato obtener la siguiente identidad de Ward

$$(9.1) \quad T_{\mu\nu} k_1^{\nu} - W_{\mu} = \langle p_2 | A_{\mu} (0) | p_1 \rangle =$$

$$= \bar{u}_{p_2} \left[G_A(t) \gamma_5 \gamma_{\mu} + G_P(t) \gamma_5 \Delta_{\mu} \right] u_{p_1} ,$$

donde $G_A(t)$ y $G_P(t)$ son los factores de forma axiales del nucleón, y $T_{\mu\nu}$ y W_{μ} corresponden a las amplitudes definidas fuera de la capa de masa para los procesos original y contraído respectivamente.

La descomposición invariante de $T_{\mu\nu}$ puede obtenerse en analogía con el caso del capítulo anterior, excepto que ahora se debe multiplicar a cada término por γ_5 ⁽¹⁰⁵⁾, i.e.

$$\begin{aligned}
 (9.2) \quad T_{\mu\nu} &= \gamma_5 A_{\mu\nu} + \gamma_5 B_{\mu\nu} \gamma \cdot Q + \gamma_5 (C_{\mu}^{(+)} - C_{\mu}^{(-)}) \gamma_{\nu} + \\
 &+ \gamma_5 (C_{\nu}^{(+)} + C_{\nu}^{(-)}) \gamma_{\mu} + \gamma_5 (D_{\mu}^{(+)} - D_{\mu}^{(-)}) (\gamma_{\nu}, \gamma \cdot Q) + \\
 &+ \gamma_5 (D_{\nu}^{(+)} + D_{\nu}^{(-)}) (\gamma_{\mu}, \gamma \cdot Q) + \gamma_5 E_1 (\gamma_{\mu}, \gamma_{\nu}) + \\
 &+ \gamma_5 E_2 (\gamma_{\mu}, \gamma \cdot Q, \gamma_{\nu}),
 \end{aligned}$$

donde A, B, C y D ya han sido definidas a través de (8.4) y (8.5). Análogamente, W_{μ} se expresa como ⁽¹³⁰⁻¹³¹⁾

$$(9.3) \quad W_{\mu} = \gamma_5 A_{\mu} + \gamma_5 F_{\mu} \gamma \cdot Q + \gamma_5 C \gamma_{\mu} + \gamma_5 D (\gamma_{\mu}, \gamma \cdot Q),$$

y A y F están dadas por la ec. (8.7).

Reemplazando (9.2) y (9.3) en la identidad de Ward-Takahashi (9.1) y utilizando la ecuación de Dirac para reducir covariantes, se obtiene ($k_1^2 = 0$)

$$\begin{aligned}
 G_A(t) &= \nu (C_1^{(+)} + C_1^{(-)} + E_2) - \frac{1}{2}(t - k_2^2) (C_3^{(+)} + \\
 (9.4) \quad &+ C_3^{(-)} - C_2^{(+)} - C_2^{(-)}) - C
 \end{aligned}$$

$$(9.4) \quad G_P(t) = \nu (A_{12}^{(+)} - A_{12}^{(-)} - D_2^{(+)} + D_2^{(-)}) - \\ - \frac{1}{2} (t - k_2^2) (A_{23}^{(+)} + A_{23}^{(-)} - A_{22}) - A_2$$

Las reglas de suma dispersivas tienen la siguiente forma

$$- G_A(t) = \frac{1}{4 \pi i} \left[\int ds \quad D_s (C_1^{(+)} + C_1^{(-)} + E_2) - \right. \\ \left. - \int du \quad D_u (C_1^{(+)} + C_1^{(-)} + E_2) \right],$$

$$- G_P(t) = \frac{1}{4 \pi i} \left[\int ds \quad D_s (A_{12}^{(+)} - A_{12}^{(-)} - D_2^{(+)} + D_2^{(-)}) - \right. \\ \left. - \int du \quad D_u (A_{12}^{(+)} - A_{12}^{(-)} - D_2^{(+)} + D_2^{(-)}) \right].$$

En lugar de (9.4) resulta más conveniente escribir

$$G_A(t) = (s - M^2) A^{st} - \frac{1}{2} (t - k_2^2) B^{st} - C^{st} \\ (9.5) \quad G_A(t) = - (u - M^2) A^{ut} - \frac{1}{2} (t - k_2^2) B^{ut} - C^{ut}$$

$$G_P(t) = (s - M^2) A'^{st} - \frac{1}{2}(t - k_2^2) B_1^{st} - A_2^{st} \quad (9.6)$$

$$G_P(t) = - (u - M^2) A'^{ut} - \frac{1}{2}(t - k_2^2) B_1'^{ut} - A_2^{ut} ,$$

donde

$$A = C_1^{(+)} + C_1^{(-)} + E_2$$

$$B = C_3^{(+)} + C_3^{(-)} - (C_2^{(+)} + C_1^{(+)}) - (C_2^{(-)} + C_1^{(-)}) - E_2$$

$$B' = C_3^{(+)} + C_3^{(-)} - (C_2^{(+)} - C_1^{(+)}) - (C_2^{(-)} - C_1^{(-)}) + E_2$$

$$A' = A_{12}^{(+)} - A_{12}^{(-)} - D_2^{(+)} + D_2^{(-)}$$

$$B_1 = A_{23}^{(+)} + A_{23}^{(-)} - (A_{22} + A_{12}^{(+)} - A_{12}^{(-)}) + D_2^{(+)} - D_2^{(-)}$$

$$B_1' = A_{23}^{(+)} + A_{23}^{(-)} - (A_{22} - A_{12}^{(+)} + A_{12}^{(-)}) - D_2^{(+)} + D_2^{(-)} ,$$

Como siempre, esta redefinición es necesaria para evitar correlaciones entre las amplitudes escalares.

Calculando las discontinuidades pertinentes a partir de (9.5) y (9.6) y reemplazando en las reglas de suma dispersivas, se obtiene

$$(9.7) \quad -G_A(t) = \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{2}(t - k_2^2) \left[B^{st}(s = M^2, t, k_2^2) + B'^{ut}(u = M^2, t, k_2^2) \right] + C^{st}(s = M^2, t, k_2^2) + C^{ut}(u = M^2, t, k_2^2) \right\} ,$$

$$(9.8) \quad - G_P(t) = \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{2}(t - k_2^2) \left[B_1^{st}(s = M^2, t, k_2^2) + \right. \right. \\ \left. \left. + B_1^{ut}(u = M^2, t, k_2^2) \right] + A_2^{st}(s = M^2, t, k_2^2) + A_2^{ut}(u = M^2, t, k_2^2) \right\}.$$

Suponiendo un comportamiento a la Regge para las amplitudes que intervienen en (9.7) y (9.8), resulta la siguiente expresión asintótica para los factores de forma

$$G_A(t) \sim \beta'_1(-t)^{\alpha(s=M^2) - \frac{1}{2} n'_1} + \beta'_2(-t)^{\alpha(u=M^2) - \frac{1}{2} n'_2}$$

$$(9.9) \quad (n'_1, n'_2) = 3, 5, 7, \dots,$$

y análogamente para $G_P(t)$. Las trayectorias de Regge intercambiadas son las mismas que en el caso vectorial i.e. delta y Nucleón. El acoplamiento de la primera daría como resultado un comportamiento semientero, mientras que se obtendría una potencia entera a partir de la segunda. Aún con n'_1 y n'_2 indeterminados, vale la siguiente relación de escala

$$(9.10) \quad \frac{G_A(t)}{G_P(t)} \sim \text{constante}$$

9.2 Relaciones de Escala y Resultados Experimentales

A pesar de no existir ninguna razón a priori para suponer que los enteros n_1 y n_2 que aparecen en la expresión (8.14) para el factor de forma vectorial, son los mismos que los enteros n'_1 y n'_2 de la ec.(9.9) para el factor de forma axial, es posible demostrar que son iguales. Teniendo en cuenta que las mismas trayectorias N y δ se intercambian en los dos procesos

$$\begin{aligned} A_\nu + N &\longrightarrow A_\mu + N \\ A_\rho + N &\longrightarrow V_\mu + N \end{aligned} ,$$

resulta, asintóticamente (ver ecs.(8.14) y (9.9))

$$\frac{G_{E,M}^V(t)}{G_{A,P}(t)} \sim (-t)^{-\frac{1}{2}(n_1 - n'_1)} ,$$

donde ya hemos usado las relaciones de escala (8.15) y (9.10). Si suponemos que $n_1 \neq n'_1$, como su diferencia es un número par, se tiene

$$(9.11) \quad \frac{G_{E,M}^V(t)}{G_{A,P}(t)} \sim (-t)^{-x} \quad x \geq 1 .$$

Pero esta solución con $x \geq 1$ es rechazada por la evidencia experimental⁽⁹³⁾ ($0 \approx x \leq 0.5$). Concluimos entonces que $n_1 = n'_1$, y por lo tanto obtenemos la siguiente relación de escala

$$(9.12) \quad \frac{G_{E,M}^V(t)}{G_{A,P}(t)} \sim \text{constante}$$

Nambu y Yoshimura⁽¹³²⁾ han determinado el factor de forma $G_A(t)$ hasta $|t| \approx 7 \text{ (GeV/c)}^2$ (ver fig.1) encontrando que puede ajustarse muy bien mediante fórmulas dipolares.

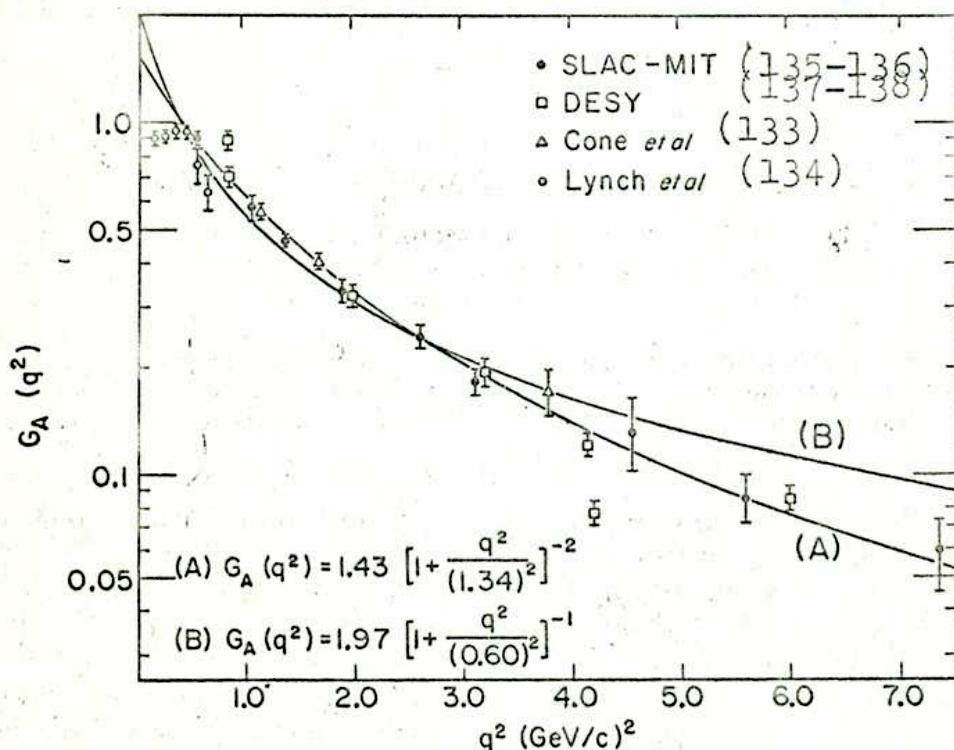


Fig 1

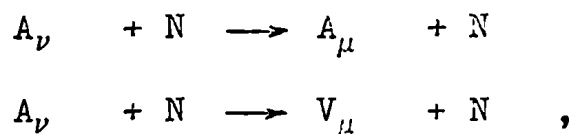
Debido a que en esta zona de t , la fórmula dipolar también ajusta satisfactoriamente al factor de forma vectorial, esto constituye cierta evidencia en favor de la ec.(9.12). Naturalmente, este argumento no es concluyente pues

$|t| \approx 7 \text{ (GeV/c)}^2$ no es precisamente un valor muy asintótico.

Postulando fórmulas de Veneziano "ad-hoc" para $G_A(t)$ y $G^V(t)$, Frampton⁽⁹³⁾ ha obtenido una expresión del tipo (9.11) pero con $x = 0.5$. Según este autor, el ajuste con los datos experimentales es satisfactorio. Sin embargo, y tal como acabamos de decir, la información acerca de $G_A(t)$ puede muy bien estar lejos de la región verdaderamente asintótica. En este caso no habría contradicción con nuestra relación de escala (9.12) pues en una zona no asintótica donde no se espera la dominancia de un único polo de Regge, las trayectorias en (8.14) y (9.9) podrían ser reemplazadas por una trayectoria efectiva tal que

$$\alpha_N(M^2) < \alpha_{\text{ef.}}(M^2) < \alpha_\Delta(M^2) .$$

Permitiendo ahora una pequeña diferencia entre las trayectorias efectivas de los procesos



resultaría la ec.(9.11) con un valor de $x \neq 0$ y eventualmente cercano al de Frampton.

Finalmente es importante destacar que un resultado análogo a (9.12), viz.

$$G_M(t) / G_A(t) \sim \text{constante},$$

ha sido obtenido (139-140) a partir del método de dispersión sobre la masa de Fubini y Furlan.

En conclusión, la ley de escala (9.12) es un resultado deducido a partir del álgebra de corrientes, y de dos formas distintas, que no es incompatible con la evidencia experimental hasta el presente. De todas maneras, será necesario esperar la aparición de nuevos datos para $G_A(t)$ en una región más asintótica, antes de rechazar definitivamente las conclusiones "ad-hoc" de Frampton.

CAPITULO 10

LOS FACTORES DE FORMA DEL DECAIMIENTO LEPTONICO DEL KAON $K_{\ell 3}$

10.1 Introducción

A partir del elemento de matriz de transición para el decaimiento leptónico del kaon ($K_{\ell 3}$)⁽¹⁴¹⁻¹⁴²⁾, i.e.

$$M = G \bar{u}_{\ell} \gamma_{\mu} (1 + \gamma_5) u_{\nu} \langle \pi | V_{\mu}^{\dagger} (0) | K \rangle ,$$

se definen los factores de forma $f_+(t)$ y $f_-(t)$ como e.g.

$$\langle \pi^0(p_2) | V_{\nu}^{\dagger} (0) | K(p_1) \rangle = f_+(t) (p_1+p_2)_{\nu} + f_-(t) (p_1-p_2)_{\nu}$$

donde V_{ν}^{\dagger} son corrientes vectoriales que cambian la extrañeza y no se conservan estrictamente.

El cálculo teórico de estos factores de forma ha despertado gran interés en los últimos años, aunque hasta el

presente son contados los trabajos en los que se logra una concordancia regularmente aceptable con la experiencia. En este último Capítulo calcularemos $f_+(t)$ y $f_-(t)$ a partir de las reglas de suma dispersivas del álgebra de corrientes y de la fórmula de Veneziano⁽¹⁴⁵⁾. El acuerdo con la experiencia resulta excelente, superando las predicciones teóricas conseguidas mediante otros métodos.*

10.2 Reglas de Suma Dispersivas y Factores de Forma de K 23

Consideraremos el siguiente proceso de partida

$$A_\nu(k_1) + K^-(p_1) \longrightarrow A_\mu(k_2) + \pi^0(p_2) ,$$

donde A_μ y A_ν son corrientes axiales con los números cuánticos de los mesones A_1^0 y K_A^+ respectivamente. Suponiendo la siguiente relación de conmutación a tiempos iguales

$$\delta(x_0) [A_0(x), A_\nu(0)] = \frac{1}{\sqrt{2}} V_\nu(x) \delta(x) ,$$

donde $V_\nu(x)$ tiene los números cuánticos de K^{*+} , es inmediato obtener la identidad de Ward - Takahashi, i.e.

* Debido a la enorme cantidad de trabajos publicados sobre este tema, nos referimos a las refs. (143-144) donde es posible encontrar un análisis detallado y de conjunto de toda la bibliografía existente.

$$(10.1) \quad k_2^\mu T_{\mu\nu} - W_\nu = \frac{1}{\sqrt{2}} \langle \pi^0(p_2) | V_\nu(0) | K^-(p_1) \rangle =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[f_+(t) (p_2 + p_1)_\nu + f_-(t) (p_1 - p_2)_\nu \right],$$

$$t = (p_1 - p_2)^2 = \Delta^2, \quad \Delta_\nu = (p_1 - p_2)_\nu$$

La descomposición de $T_{\mu\nu}$ y W_ν en términos de amplitudes escalares y libres de singularidades cinemáticas, se puede escribir como sigue

$$(10.2) \quad T_{\mu\nu} = A_0 g_{\mu\nu} + A P_\mu P_\nu + A_1 P_\mu Q_\nu +$$

$$+ A_2 P_\mu \Delta_\nu + A_3 Q_\mu Q_\nu + A_4 Q_\mu P_\nu + A_5 Q_\mu \Delta_\nu +$$

$$+ C \Delta_\mu P_\nu + C_1 \Delta_\mu Q_\nu + C_2 \Delta_\mu \Delta_\nu,$$

$$(10.3) \quad W_\nu = X_1 P_\nu + X_2 \Delta_\nu + X_3 k_{1\nu}$$

Las reglas de suma dispersivas en este caso son

$$- f_+(t) = \frac{\sqrt{2}}{4\pi i} \left[\int ds D_s A(s, t, u, k_1^2) - \right.$$

$$(10.4) \quad \left. - \int du D_u A(u, t, s, k_1^2) \right],$$

$$\begin{aligned}
 - f_-(t) &= \frac{\sqrt{2}}{4 \pi i} \left[\int ds \quad D_s A_2(s, t, u, k_1^2) - \right. \\
 (10.4) \quad &\left. - \int du \quad D_u A_2(u, t, s, k_1^2) \right] ,
 \end{aligned}$$

donde hemos supuesto $k_2^2 = 0$. Las discontinuidades de las amplitudes que intervienen en las reglas de suma pueden calcularse a partir de

$$\frac{f_+(t)}{\sqrt{2}} = (s - m_\pi^2) A^{st} - \frac{1}{2} (t - k_1^2) B^{st} - X_1^{st} ,$$

$$\frac{f_-(t)}{\sqrt{2}} = (s - m_\pi^2) A_2^{st} - \frac{1}{2} (t - k_1^2) D^{st} - X_2^{st} ,$$

(10.5)

$$\frac{f_+(t)}{\sqrt{2}} = - (u - m_K^2) A^{ut} - \frac{1}{2} (t - k_1^2) B_1^{ut} - X_1^{ut} ,$$

$$\frac{f_-(t)}{\sqrt{2}} = - (u - m_K^2) A_2^{ut} - \frac{1}{2} (t - k_1^2) D_1^{ut} - X_2^{ut} ,$$

donde

$$B = A_4 - (C + A)$$

$$D = A_5 - (C_2 + A_2)$$

$$B_1 = A_4 - C + A$$

$$D_1 = A_5 - C_2 + A_2$$

Esta última redefinición asegura como siempre que no haya correlaciones entre las amplitudes escalares.

A partir de (10.4) y (10.5) obtenemos finalmente

$$(10.6) \quad -f_+(t) = \frac{\sqrt{2}}{2} \left\{ \frac{1}{2} (t - k_1^2) \left[B^{\text{st}}(s=m_\pi^2, t, k_1^2) + \right. \right. \\ \left. \left. + B_1^{\text{ut}}(u = m_K^2, t, k_1^2) \right] + X_1^{\text{st}}(s = m_\pi^2, t, k_1^2) + X_1^{\text{ut}}(u=m_K^2, t, k_1^2) \right\}$$

$$(10.7) \quad -f_-(t) = \frac{\sqrt{2}}{2} \left\{ \frac{1}{2} (t - k_1^2) \left[D^{\text{st}}(s = m_\pi^2, t, k_1^2) + \right. \right. \\ \left. \left. + D_1^{\text{ut}}(u = m_K^2, t, k_1^2) \right] + X_2^{\text{st}}(s = m_\pi^2, t, k_1^2) + X_2^{\text{ut}}(u = m_K^2, t, k_1^2) \right\}$$

10.3 Aplicación del Modelo de Veneziano

Para eliminar la dependencia de k_1^2 en las amplitudes que intervienen en (10.6) y (10.7) procedemos como en la sección 5.2, suponiendo sólo un polo en k_1^2 , i.e. el polo del mesón axial K_A^+ . De esta forma resulta, e.g.

$$(10.8) \quad \frac{1}{2}(t - m_{K_A}^2) \overline{B}_1^{ut}(u = m_K^2, t) + \overline{X}_1^{us}(u = m_K^2, t) = 0 ,$$

$$(10.9) \quad f_{\tau}(\tau) = \frac{\sqrt{2}}{4} \overline{B}_1^{ut}(u = m_K^2, \tau) ,$$

donde por simplicidad trataremos sólo la parte u-t, los términos del tipo f^{st} se consideran de manera análoga y la parte f^{su} , como ya vimos, no contribuye a las reglas de suma. Para $t = m_{K_A}^2$, la ec.(10.8) se reduce a

$$(10.10) \quad \overline{X}_1^{ut}(u = m_K^2, t = m_{K_A}^2) = 0 ,$$

que no es más que la condición de Adler cuando $k_2 \rightarrow 0$ y la corriente inicial se reemplaza por el mesón K_A^+ . Más aún, la ec.(10.10) asegura que el factor de forma (10.9) no tenga el polo del K_A^+ en el canal t, el cual naturalmente no puede aparecer allí.

Es evidente ahora que los factores de forma quedan determinados a partir de las amplitudes \overline{X}_1 y \overline{X}_2 del proceso

$$K_A^+ (k_1, \epsilon) + K^- (p_1) \rightarrow \pi^0 (k_2) + \pi^0 (p_2)$$

donde el pión de momento k_2 está fuera de la capa de masa.

Contrayendo (10.3) con la polarización ϵ ($k_1 \cdot \epsilon = 0$) resulta

$$W = \overline{X}_1 (p_1 + p_2) \cdot \epsilon + \overline{X}_2 (p_1 - p_2) \cdot \epsilon .$$

En virtud de la simetría de cruce u-t, las amplitudes \overline{X}_1 y \overline{X}_2 satisfacen las siguientes relaciones

$$\overline{X}_1(t, u) = \frac{1}{2} (\overline{X}_1(u, t) + \overline{X}_2(u, t))$$

(10.11)

$$\overline{X}_2(t, u) = \frac{1}{2} (3 \overline{X}_1(u, t) - \overline{X}_2(u, t))$$

Las fórmulas de Veneziano para \overline{X}_1 y \overline{X}_2 se pueden escribir como sigue *

$$\overline{X}_1^{ut} = a_1 V_{112}^{ut} - a_2 V_{122}^{ut}$$

(10.12)

$$\overline{X}_2^{ut} = b_1 V_{111}^{ut} + b_2 V_{112}^{ut} + b_3 V_{212}^{ut} + b_4 V_{122}^{ut}$$

donde en los canales u y t se intercambia la trayectoria del K^* , i.e. $a_{K^*}(t) = 0.25 + 0.9 t$ (61).

* Para otro enfoque similar, ver e.g. ref.(88).

A partir de las relaciones de cruce (10.11) se pueden relacionar las constantes b_i de \bar{X}_2 con a_1 y a_2 de \bar{X}_1 , obteniéndose : $b_1 = 0$, $b_2 = a_1$, $b_3 = -2 a_2$, $b_4 = a_2$. De esta manera, la ec.(10.12) se transforma en

$$\begin{aligned} \bar{X}_1^{ut} &= a_1 V_{112}^{ut} - a_2 V_{122}^{ut} \\ (10.13) \quad \bar{X}_2^{ut} &= a_1 V_{112}^{ut} + a_2 (V_{122}^{ut} - 2 V_{212}^{ut}) \end{aligned}$$

que poseen los comportamientos de Regge adecuados, satisfacen las relaciones de cruce u-t como así también la condición de Adler.

A continuación mostraremos de qué forma es posible obtener una relación simple entre a_1 y a_2 en el límite de una simetría SU(3) exacta. Partiremos de la siguiente identidad de campo-corriente

$$A_\mu(x) = \sqrt{2} f_K \partial_\mu K(x) + \sqrt{2} f_{K_A} K_\mu^A(x) \quad ,$$

donde K y K_μ^A son los operadores de campo del kaon y del K_A respectivamente, y hemos suprimido todo índice de isoespín por simplicidad. Los elementos de matriz de estos campos están relacionados con las amplitudes de dispersión a través de

$$W = \left[(k_2 + p_2 - p_1)^2 - m_{K_A}^2 \right] \langle \pi(k_2) \pi(p_2) | A_\mu^A(0) | K(p_1) \rangle \epsilon^\mu$$

(10.14)

$$T = \left[(k_2 + p_2 - p_1)^2 - m_K^2 \right] \langle \pi(k_2) \pi(p_2) | K(0) | K(p_1) \rangle ,$$

donde T es la amplitud del proceso $KK \rightarrow \pi\pi$, e.g. $g^2 V_{111}^{ut}$ (146). Suponiendo que la ec.(10.14) puede ser extrapolada fuera de la capa de masa⁽⁸⁵⁾, obtenemos

$$\begin{aligned} & \langle \pi(k_2) \pi(p_2) | A_\mu(0) | K(p_1) \rangle = \\ & = \frac{\sqrt{2} f_{KA}}{(k_2+p_2-p_1)^2 - m_K^2} \left\{ (p_1-p_2)_\mu \left[a_1 V_{112} + a_2 (V_{122} - \right. \right. \\ & \left. \left. - 2 V_{212}) \right] + (p_1+p_2)_\mu (a_1 V_{112} - a_2 V_{122}) \right\} - \\ & - \frac{\sqrt{2} i f_K}{(p_2+k_2-p_1)^2 - m_K^2} (k_2+p_2-p_1)_\mu (g^2 V_{111}) \end{aligned}$$

(10.15)

Por otra parte, como resultado de PCAC y el álgebra de corrientes, es sabido que en el límite del pión blando se obtiene

$$\begin{aligned} \langle \pi(k_2) \pi(p_2) | A_\mu(0) | K(p_1) \rangle &\xrightarrow[k_2 \rightarrow 0]{} \frac{\sqrt{2} i}{f_\pi} \langle \pi(p_2) | V_\mu(0) | K(p_1) \rangle \\ &= \frac{i}{f_\pi} \left[f_+(t) (p_1 + p_2)_\mu + f_-(t) (p_1 - p_2)_\mu \right] \end{aligned}$$

Debido a que SU(3) no es una simetría exacta, la corriente de cambio de extrañeza $V_\mu(x)$ no se conserva estrictamente. Podemos sin embargo hacer la aproximación de una simetría exacta en cuyo caso $V_\mu(x)$ se conservará y entonces $f_-(t) = 0$, y todos los términos de la ec.(10.15) que contienen el invariante $(p_1 - p_2)_\mu$ deben estar ausentes. Esto implica finalmente que

$$(10.16) \quad \frac{a_1}{a_2} = \frac{3}{2}$$

Como se sabe, las correcciones debidas al rompimiento de la simetría SU(3) son en general pequeñas, de manera que la relación (10.16) puede considerarse como una buena aproximación. Otra evidencia en favor de esto proviene del cociente G'_S / G'_D que puede predecirse a partir de (10.16). En

efecto, escribiendo el Lagrangiano efectivo del vértice $K_A K^* \pi$ como sigue (88)

$$\mathcal{L}_{\text{ef.}} = G'_S K_\mu^A K^{*\mu} \pi + G'_D K_\mu^A K_\nu^* \delta^{\mu\nu} \pi ,$$

es posible hallar

$$\frac{a_1}{a_2} = - 2 \frac{G'_S}{G'_D} ,$$

o sea, usando la ec.(10.16) resulta

$$(10.17) \quad \frac{G'_S}{G'_D} = - 0.75$$

Fayyazuddin y Riazuddin⁽⁸⁸⁾ han encontrado

$$(10.18) \quad \frac{G'_S}{G'_D} = - 0.6 ,$$

en el caso en que los acoplamientos de $K_A K$ con los mesones sigma y kappa sean nulos. Este último no ha sido descubierto en la naturaleza, mientras que las evidencias sobre la existencia del primero no son aún definitivas. Por lo tanto la aproximación $\gamma_{K_A K \sigma} = \gamma_{K_A K \kappa} = 0$ es

bastante razonable. Vemos entonces que la diferencia entre

(10.18) y el resultado de suponer una simetría SU(3) exacta, ec.(10.17), es sólo del orden de 25%.

Reemplazando (10.13) en (10.9) y la correspondiente a $f_-(t)$, y suponiendo la relación (10.16), se obtiene

$$(10.19) \quad f_+(t) = C \frac{\Gamma(1 - \alpha(t))}{\Gamma(5/2 - \alpha(t))} \left(1 + 2 \alpha(t) \right)$$

$$(10.20) \quad f_-(t) = -C \frac{\Gamma(1 - \alpha(t))}{\Gamma(5/2 - \alpha(t))} \left(3 - 2 \alpha(t) \right) .$$

El único parámetro libre C puede determinarse a partir de la normalización $f_+(0) = 1$ (teorema de Ademollo y Gatto⁽¹⁴⁷⁻¹⁴⁹⁾).

En la región física del decaimiento leptónico del kaon, i.e.

$$0 \leq \frac{t}{m_\pi^2} \leq 7 ,$$

el cociente de las funciones gamma en las ecs.(10.19) y (10.20) puede aproximarse muy bien por medio de la siguiente función lineal

$$(10.21) \quad \frac{\Gamma(1 - \alpha(t))}{\Gamma(5/2 - \alpha(t))} \approx 1.08 + 0.04 \frac{t}{m_\pi^2}$$

$$\left(0 \leq \frac{t}{m_\pi^2} < 7 \right)$$

Despreciando términos de segundo orden en t/m_π^2 , obtenemos luego de reemplazar (10.21) en (10.19) y (10.20)

$$(10.22) \quad f_+(t) = \left(1 + 0.06 \frac{t}{m_\pi^2} \right)$$

$$(10.23) \quad f_-(t) = -1.7 \left(1 + 0.02 \frac{t}{m_\pi^2} \right)$$

donde C ya ha sido determinado.

Las expresiones (10.22) y (10.23) dan los factores de forma de K_{l3} en la región física del decaimiento siempre que sea válida la ec.(10.16). Si e.g. usáramos el resultado de Fayyazuddin y Riazuddin obtendríamos en cambio

$$(10.24) \quad f_+(t) = \left(1 + 0.08 \frac{t}{m_\pi^2} \right)$$

$$(10.25) \quad f_-(t) = -2.0 \left(1 + 0.02 \frac{t}{m_\pi^2} \right) .$$

10.4 Comparación con los resultados experimentales

Según la evidencia experimental (143-144), los factores de forma $f_{\pm}(t)$ pueden aproximarse en la región del decaimiento por funciones lineales del tipo

$$(10.26) \quad f_{\pm}(t) = f_{\pm}(0) \left(1 + \lambda_{\pm} \frac{t}{m_{\pm}^2} \right).$$

Más aún, debido a que las pendientes λ_{\pm} son pequeñas, es posible la siguiente parametrización

$$(10.27) \quad \xi(t) = \frac{f_{-}(t)}{f_{+}(t)} = \xi(0) + \Lambda \frac{t}{m_{\pm}^2},$$

donde $\Lambda \approx \xi(0) (\lambda_{-} - \lambda_{+})$.

Comparando (10.22) y (10.23) con (10.25) y (10.27), resulta la siguiente predicción

$$(10.28) \quad \begin{aligned} \xi(0) &= -1.7 \\ \lambda_{+} &= 0.06 \\ \lambda_{-} &= 0.02 \\ \Lambda &= 0.07 \end{aligned}$$

Chounet⁽¹⁴³⁾ ha ajustado todos los datos existentes sobre los decaimientos K_{e3}^+ y $K_{\mu 3}^+$ encontrando los mejores valores

$$\xi(0) = -1.95 \pm 0.55$$

$$\Lambda = 0.21 \pm 0.18 ,$$

determinados a partir de celdas (bins) de momento transferido, y

$$\xi(0) = -1.45 \pm 0.70$$

$$\Lambda = 0.11 \pm 0.15$$

a partir de los datos de polarización del ψ^+ . En las figs. 1 y 2 representamos los datos experimentales, los ajustes de Chounet y nuestra predicción, ec. (10.28). Como se aprecia los resultados del presente modelo concuerdan notablemente con la experiencia.

Por otra parte, determinaciones separadas para λ_+ (con λ_- fijo en $\lambda_- = 0$) dan los siguientes valores medios

$$\lambda_+ = 0.030 \pm 0.007 ,$$

por medio de análisis de gráficas de Dalitz para K_{e3}^+ (ver fig.3), y

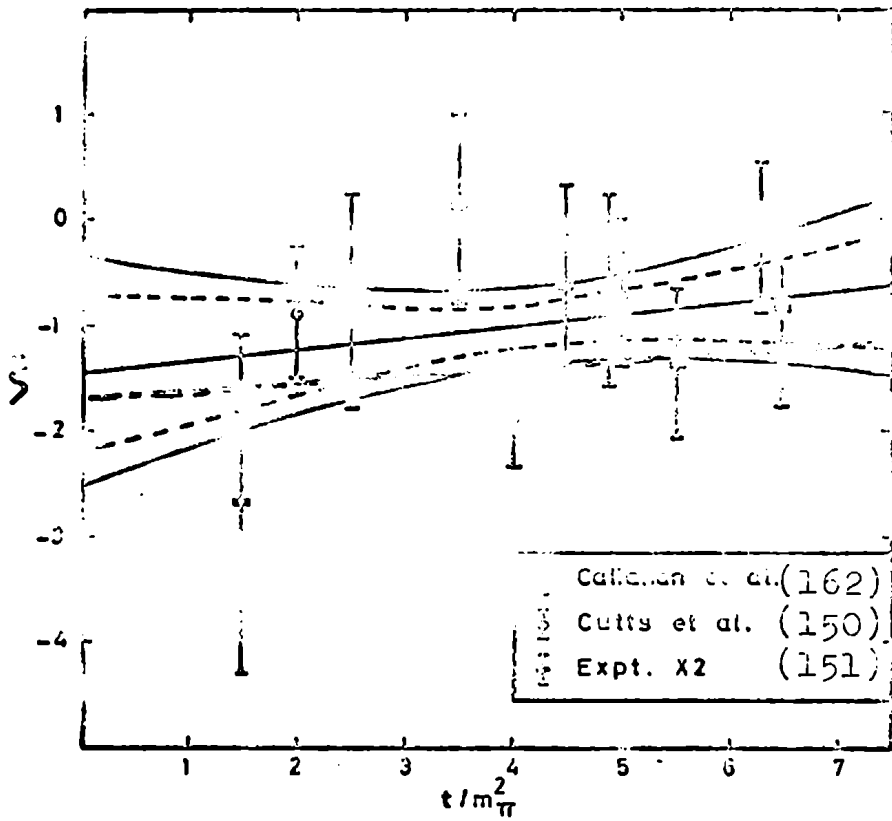


Fig.1 - La línea llena es el ajuste de Chounet, y la línea partida, nuestra predicción.

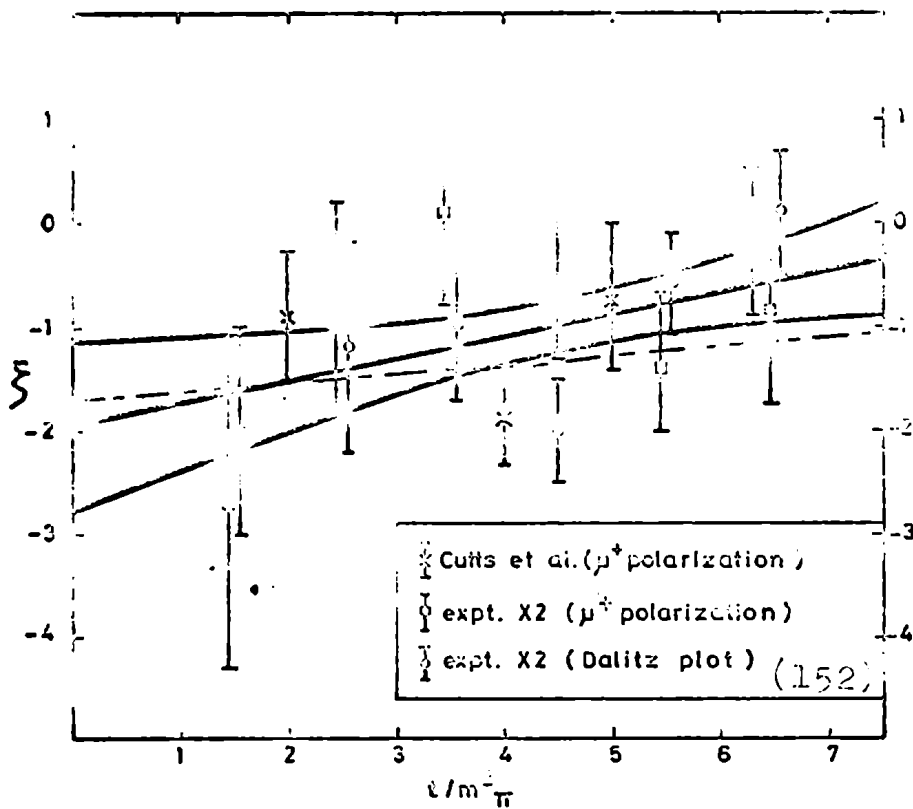


Fig. 2

$$\lambda_+ = 0.045 \pm 0.012$$

por medio de un ajuste global a todos los datos sobre $K_{\mu 3}^+$.

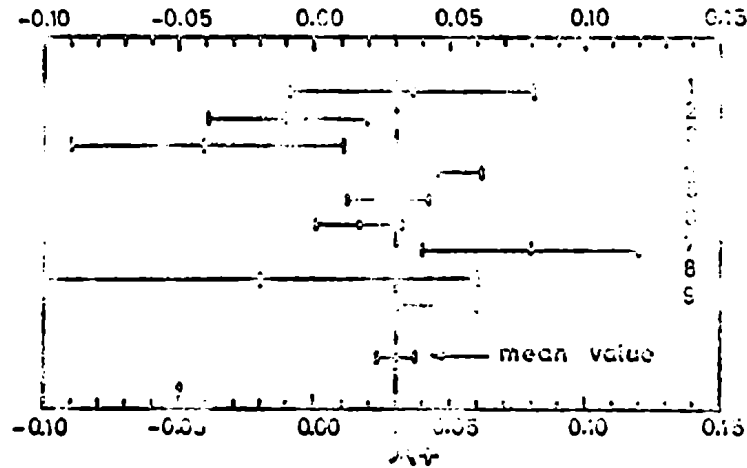


Fig.3 - Los números 1-9 corresponden a las refs. (153-161).

Con respecto a los datos del decaimiento del kaon neutro, la situación es poco clara y no es posible llegar a conclusiones definitivas⁽¹⁴³⁾.

Finalmente notamos que los parámetros que resultan de (10.24) y (10.25) (a partir de la relación de Fayazuddin y Riazuddin (10.18)) no difieren sensiblemente de los (10.28), como era de esperar.

Es importante destacar que las reglas de suma dis-

persivas del álgebra de corrientes conjuntamente con el modelo de Veneziano nos han permitido obtener expresiones para los factores de forma $f_{\pm}(t)$ sin ningún parámetro libre (luego de normalizar de la forma usual). Es decir, ha resultado posible predecir simultáneamente los valores de los cuatro parámetros del decaimiento $K_{\ell 3}$, y en excelente acuerdo con la experiencia. Conviene poner de manifiesto que las predicciones para $\xi(0)$ logradas por medio de otros modelos están muy lejos del valor experimental, en muchos casos la diferencia supera el 100 %.

✧ ✧ ✧ ✧ ✧ ✧ ✧ ✧ ✧

← ATD →

APENDICE

A continuación resumimos las convenciones adoptadas en el presente trabajo*:

- 1) La métrica utilizada es tal que el producto escalar entre dos cuadvectores a y b tiene la forma

$$a_{\mu} b^{\mu} = a^0 b_0 - \vec{a} \cdot \vec{b}$$

- 2) La convención para las matrices γ que satisfacen

$$\{\gamma_{\mu}, \gamma_{\nu}\} = 2 g_{\mu\nu}$$

es tal que γ_0 es hermítica y γ_i antihermítica, i.e.

$$\gamma_0 = \begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix} \quad \gamma_i = \begin{pmatrix} & -\sigma_i \\ \sigma_i & \end{pmatrix}$$

donde las σ_i son las matrices de Pauli definidas en el Cap. 1. Por otra parte,

* Estas convenciones son las mismas que las de Bjorken y Drell, ref.(163).

$$\sigma_{\mu\nu} = \frac{i}{2} [\gamma_{\mu}, \gamma_{\nu}] \quad , \quad y$$

$$\gamma_5 = i \gamma_0 \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3$$

3) La ecuación de Dirac tiene la forma

$$(i \gamma^{\mu} \partial_{\mu} - m) u(p) = 0 \quad ,$$

y los espinores están normalizados de la siguiente manera

$$\bar{u}(p) u(p) = u^{\dagger}(p) \gamma_0 u(p) = 2m$$

Agradecimientos

El Dr. Oscar Zandron me ha brindado la excelente oportunidad de colaborar estrechamente con él en la investigación de los temas desarrollados en la presente Tesis. Gracias a su profundo conocimiento de la materia, y a una perseverante tarea de equipo ha sido posible la concreción de las cuatro publicaciones que forman la base de este trabajo.

Por otra parte, el Dr. Constantino Ferro Fontán ha contribuido fundamentalmente a mi formación en la especialidad a través de sus cursos y seminarios, aunque por sobre todo, por medio de las innumerables consultas personales que supo soportar con admirable paciencia. Su autorizada opinión y justas críticas han sido de gran valor en los trabajos que han permitido concretar esta Tesis.

Vaya pues para ambos mi más reconocido y profundo agradecimiento.

Debo agradecer también al Dr. Luis Másperi y al Grupo de Altas Energías del Centro Atómico Bariloche, como así también al Director del C.A.B. Dr. Héctor Anzuoz, la oportunidad que me brindaron de poder participar en las dos Reuniones realizadas en dicho Centro en los años 1970 y 1971. En esta última oportunidad me fue posible concretar la última parte del trabajo ref.(105) gracias a las oportunas observaciones del Dr. Luis Másperi.

REFERENCIAS

SIMETRIAS UNITARIAS

- (1) M.Hamermesh: Group Theory. Addison Wesley, 1962.
- (2) P.Roman: Theory of Elementary Particles. North Holland 1960.
- (3) M.Gell-Mann e Y.Ne'eman: The Eightfold Way. Benjamin, 1964.
- (4) P.Carruthers: Introduction to Unitary Symmetry. Interscience, 1965.
- (5) M.Gourdin: Some Topics Related to Unitary Symmetry. Springer Tracts in Mod. Phys. 36 (1964).
- (6) M.Gourdin: Unitary Symmetries. Interscience, 1967.
- (7) D.B.Lichtenberg: Lectures delivered at the City College of New York, 1964.
- (8) J.J.J. Kokkedee: The Quark Model. Benjamin, 1969.
- (9) E.M.Levin y L.L. Frankfurt: Soviet Phys. Uspekhi 11, 106 (1968).
- (10) Y.B.Zeldovich: Soviet Phys. Uspekhi 8, 489 (1965).
- (11) G.Faldt: Physics 3, 47 (1967).
- (12) B.T.Feld: CERN preprint, CERN 67-21 (1967).
- (13) F.J.Dyson: Symmetry Groups in Nuclear and Particle Physics. Benjamin, 1966.
- (14) A.Zichichi (editor): Recent Developments in Particle Symmetries. Academic Press, 1966.

NOTA: La ref.(3) contiene una reproducción de los trabajos originales más importantes acerca de SU(3).

PARTICULAS EXTRANAS

- (15) S.Gasiorowicz: Elementary Particle Physics. Wiley, 1966.
- (16) W.Frazer: Elementary Particles. Prentice Hall, 1966.
- (17) R.K.Adair y E.C.Fowler: Strange Particles. Interscience, 1963.

EVIDENCIAS SOBRE LA EXISTENCIA DE LOS QUARKS

- (18) C.B.A. Mc Cusker e I.Cairns: Phys.Rev.Lett. 23, 658 (1969), Phys.Today 20, N° 10, 55 (1969), Phys.Today 23, N° 6, 57 (1970).
- (19) W.T.Chu et al.: Phys.Rev.Lett. 24, 917 (1970).
- (20) R.K.Adair y H.Kasha: Phys.Rev.Lett. 23, 1355 (1969).
- (21) D.C.Rahm y R.I. Louttit: Phys.Rev.Lett. 24, 279 (1970).
- (22) H.Fraunfelder et al.: Phys.Rev.Lett. 24, 33 (1970).
- (23) H.Kasha et al.: Can.J.Phys. 46, 5730 (1968).
- (24) J.Dooher: Phys.Rev.Lett. 23, 1471 (1969).

ALGEBRA DE CORRIENTES (General)

- (25) S.L.Adler y R.F.Dashen: Current Algebra. Benjamin, 1968.
- (26) B.Renner: Current Algebras and Their Applications. Pergamon Press, 1968.
- (27) J.Bernstein: Elementary Particles and their Currents, Freeman, 1968.
- (28) A.O.Barut, H.Leutwyler, H.Pietschmann, H.Pilkuhn, P.Stichel, en : Current Algebra and Phenomenological Lagrange Functions. Springer Tracts in Mod.Phys. 50(1969).

- (29) L.D.Soloviev: Symmetries and Current Algebras for Electromagnetic Interactions. Springer Tracts in Mod.Phys. 46 (1968).
- (30) G.Furlan y C.Rossetti: Acta Phys.Acad.Sci.Hungaricae 22,239 (1967).
- (31) D.Amati: Current Algebra.CERN preprint,TH-732 (1966).
- (32) J.D.Bjorken y M.Nauenberg: Ann.Rev.Nucl.Sci. 18, 229 (1968).
- (33) G.Takeda e Y.Hara (Editores): Fundamental Particle Physics. Tokyo,1966.
- (34) A.Zichichi (Editor): Strong and Weak Interactions. Academic Press,1966.
- (35) B.Zumino: Current Algebra. CERN preprint,TH-1246(1970).
- (36) H.Kleinert: Springer Tracts in Mod.Phys.49 (1969).

TERMINOS DE SCHWINGER (Ver además las refs.grales.)

- (37) J.Schwinger: Phys.Rev.Lett. 3,296 (1959).
- (38) T.Imamura y T.Goto. Progr.Theor.Phys. 1,395 (1955).
- (39) S.Okubo: Nuovo Cimento 44,1015 (1966).

REGLAS DE SUMA DE FUBINI (Ver además las refs.grales.)

- (40) S.Fubini,G.Furlan y C.Rossetti: Nuovo Cimento 40A, 1171 (1965).
- (41) S.Fubini: Nuovo Cimento 43A,475 (1966).
- (42) S.Fubini,G.Furlan y C.Rossetti: ICTP,Trieste preprint IC/65/58,(1965).

DISPERSION POTENCIAL

- (43) H.M.Nussenzweig: Analytic Properties of Non-Relativistic Scattering Amplitudes. Mexico, 1962.
- (44) V.de Alfaro y T.Regge: Potential Scattering. North Holland, 1965.
- (45) R.G.Newton: The Complex J - Plane. Benjamin, 1966.
- (46) A.Martin: Progr. Elem. Particle Cosmic Ray Phys. 8(1965).
- (47) T.Regge: Potential Scattering. IAEA, Vienna, 1963.
- (48) A.Martin: Scattering Theory, Unitarity, Analyticity and Crossing. Lecture Notes in Physics (Springer), 1969.

MODELO DE REGGE EN ALTAS ENERGÍAS

- (49) S.C.Frautschi: Regge Poles and S-Matrix Theory. Benjamin, 1963.
- (50) E.J.Squires: Complex Angular Momenta and Particle Physics. Benjamin, 1963.
- (51) R.L.Omnés y M.Froissart: Mandelstam Theory and Regge Poles. Benjamin, 1963.
- (52) B.E.Y.Svensson: High Energy Phenomenology and Regge Poles. CERN report, CERN-67-24 (1967).
- (53) H.M.Chan: High Energy Reactions and Regge Poles. CERN report, CERN 67-16 (1967).
- (54) E.Leader: Revs.Mod.Phys. 38, 476 (1966).
- (55) R.J.N.Phillips: Proceedings 1966 Int.School Phys. E. Majorana. Academic Press, 1966.
- (56) L.Bertocchi: 1967 Heidelberg Int.Conf.Elem.Part. . North Holland, 1968.
- (57) L.Van Hove: CERN report, CERN-68-31 (1968).

- (58) P.D.B.Collins y J.Squires: Regge Poles in Particle Physics. Springer Tracts in Mod.Phys. 45 (1968).
- (59) R.J.Eden: High Energy Collisions of Elementary Particles. Cambridge (U.K.) 1967.
- (60) V.Barger y D.Cline: Phenomenological Theories of High Energy Scattering. Benjamin,1969.
- (61) G.E.Hite: Revs.Mod.Phys. 41,669 (1969).
- (62) J.N.J.White: Daresbury preprint, DNPL/R5 (1969).
- (63) L.Jauneau: Orsay preprint, L.A.L. 1220 (1969).
- (64) J.D.Jackson: Revs.Mod.Phys. 42,12 (1970).
- (65) W.Schmitz: DESY preprint (1970).
- (66) S.Mandelstam: Comm.Nucl.Part.Phys. 3,65 (1969) y 3, 147 (1969).

MODELO DE VENEZIANO

- (67) E.Preðazzi: Recent Developments in High Energy Physics Indiana preprint,1969.
- (68) M.Jacob: CERN preprint TH.1052 (1969), y TH.1010 (1969).
- (69) J.Yellin: Berkeley preprint UCRL 18637,18664 y 18665 (1969).
- (70) D.Sivers y J.Yellin: Berkeley preprint UCRL 19418, (1969).
- (71) H.Harari: Brookhaven Summer School,1969.
- (72) S.Fubini: Comm.Nucl.Part.Phys. 3,22 (1969).
- (73) S.Weinberg: Comm.Nucl.Part.Phys. 3,28 (1969).
- (74) M.Kugler: Weizmann preprint,1970.
- (75) D.Amati: CERN preprint, TH.1231 (1970).
- (76) K.Kajantie: CERN report, CERN 71-7 (1971)



- (77) K.Jengo y E.Remiddi: Nucl.Phys. B15, (1967).
- (78) J.B.Bronzan et al.: Phys.Rev.Lett. 18,32 (1967).
- (79) V.Singh: Phys.Rev.Lett. 18,36 (1967).
- (80) D.Amati y R.Jengo: Phys.Lett. 24B,108(1967).
- (81) M.Ademollo,G.Veneziano y S.Weinberg: Phys.Rev.Lett. 22,83 (1969).
- (82) J.L.Rosner y H.Suura: Phys.Rev. 187,1905 (1969).
- (83) M.Ida y R.Kubo: Hiroshima preprint,RRK 70-10 (1970).
- (84) V.de Alfaro et al.: Ann.Phys.(N.Y.) 44,165 (1967).
- (85) Y.Oyanagi: Progr.Theor.Phys. 42,898 (1969).
- (86) Y.Oyanagi: Nucl.Phys. B14,375 (1969).
- (87) Fayyazuddin y Riazuddin: Phys.Lett.29B,262B (1969)
- (88) Fayyazuddin y Riazuddin: Ann.Phys.(N.Y.) 55,131(1969).
- (89) D.J.Crennell et al.: Phys.Rev.Lett. 24,761 (1970).
- (90) H.Suura: Phys.Rev.Lett. 23,551 (1969).
- (91) D.A.Geffen: Phys.Rev.Lett. 23,897 (1969).
- (92) I.Gerstein,K.Gottfried y K.Huang:Phys.Rev.Lett. 24, 294 (1970).
- (93) P.H.Frampton: Phys.Rev. D1, 3141 (1970).
- (94) J.Cleymans y R.Rodenberg: Aachen preprint,1971.
- (95) I.J.Sakurai:Proceedings 14th Int.Symp.Electron and Photon Int. at H.E., 1969.
- (96) D.R.Earles et al.: Phys.Rev.Lett. 25,1312 (1970)
- (97) Reporte de Novosibirsk, Int.Symp.Electron and Photon Int.,SLAC ,1967.
- (98) Reporte de Novosibirsk, Heidelberg Int.Conf.Elem.Part. (1967).
- (99) J.E.Augustin et al.: Phys.Lett. 28B,500 (1969).
- (100) J.E.Augustin et al.: Lett.Nuovo Cimento 2,214(1969).
- (101) V.L.Auslander et al.:Phys.Lett. 25B,433 (1967).

- (102) C.W.Akerlof et al.: Phys.Rev. 163,2482 (1967).
- (103) C.Mistretta et al.: Proc.Vienna Int.Conf.High Energy Phys. (1968).
- (104) S.Fubini, G.Furlan y C.Rossetti: Nuovo Cimento 40A, 1171 (1965).
- (105) C.A.Dominguez y O.Zandron: Axial-Vector Form Factors from Current Algebra, Regge Poles and Veneziano Model Nucl.Phys.B (1971), (en prensa).
- (106) M.Namiki e I.Onba: Progr.Theor.Phys. 42,1136 (1969).
- (107) C.A.Dominguez y O.Zandron: Pion Vertex Functions from the Spurion Model and Veneziano Formula, Lett.Nuovo Cimento (1971) (en prensa).
- (108) A.Zee: Phys.Rev. 184,1922(1969).
- (109) C.A.Dominguez y O.Zandron: Asymptotic Nucleon Form Factors from Current Algebra and the Regge Model, Nuovo Cimento A (1971) (en prensa).
- (110) E.Berger y G.C.Fox: Phys.Rev. 188,2120 (1969).
- (111) G.C.Joshi y A.Pagnamenta: Phys.Rev. D1,3117 (1970).
- (112) A.Garcia y L.Másperi: Bariloche preprint CAB/70/2,1970.
- (113) F.R.Paige: Phys.Rev. D2,922 (1970).
- (114) M.Boiti, F.Pempinelli y O.Zandron: Nuovo Cimento 56A, 33 (1968).
- (115) O.Zandron: Tesis, Bariloche, 1969.
- (116) I.S.Gerstein: Phys.Rev. 161,1631 (1967).
- (117) W.K.H.Panofsky: Proc.Vienna Int.Conf.High Energy Phys. Vienna (1968).
- (118) S.D.Drell: Proc.13th Int.Conf.High Energy Phys, Berkeley (1967).
- (119) P.Di Vecchia y F.Drago: Lett.Nuovo Cimento 1,917(1969).
- (120) L.N.Hand et al.: Revs.Mod.Phys. 35,335 (1963).
- (121) T.Janssens et al.: Phys.Rev. 142, 922 (1966).

- (122) H.J.Behrends et al.:Nuovo Cimento 48A,140(1967).
- (123) W.Bartel et al.:Phys.Rev.Lett. 17,608 (1966).
- (124) W.Albrecht et al.:Phys.Rev.Lett. 17,2192 (1966).
- (125) D.H.Coward et al.:Phys,Rev.Lett. 20,292 (1968).
- (126) M.Goiten et al.: Phys.Rev.Lett. 18,1026 (1967).
- (127) W.Konetschny y W.Majerotto:Nuovo Cimento 1A,188 (1971).
- (128) W.Konetschny y W.Majerotto:Lett.Nuovo Cimento 4,
883 (1970).
- (129) W.Konetschny: Vienna preprint (1971).
- (130) J.S.Ball: Phys.Rev. 124,2014 (1961).
- (131) M.Boiti y F.Pempinelli:Nuovo Cimento 54A,108 (1968).
- (132) Y.Nambu y M.Yoshimura:Phys.Rev.Lett. 24,25 (1970).
- (133) A.A.Cone et al.:Phys.Rev. 156,1490 (1967); 163,
1854(E) (1967).
- (134) H.L.Lynch et al.: Phys.Rev. 164,1635 (1967)
- (135) E.D.Bloom et al.: Phys.Rev.Lett. 23,930 (1969).
- (136) L.W.Mo e Y.S.Tsai:Rev.Mod.Phys. 41,205 (1969).
- (137) F.W.Brasse et al.:Nuovo Cimento 55A,679 (1968).
- (138) W.Albrecht et al.: DESY report DESY 68/48, y 69/7.
- (139) D.Gordon y R.D.Peccei:Phys.Rev. 187, 1940 (1969).
- (140) G.Murtaza y M.S.A.Razmi: Phys.Rev. (en prensa).
- (141) L.B.Okun: Weak Interaction of Elementary Particles.
Addison Wesley, 1965.
- (142) C.Rubbia: CERN report CERN 69-7 (1969).
- (143) M.K.Gaillard y L.M.Chounet:CERN report CERN 70-14(1970).
- (144) M.K.Gaillard: CERN preprint CERN TH.1292 (1971).
- (145) C.A.Dominguez y O.Zandron: Current Algebra Sum Rules,
Veneziano Model and $K_{\frac{1}{2}^+}$ Form Factors. Buenos Aires
preprint (1971).

- (146) K.Kawarabayashi, S.Kitakado y H.Yabuki: Phys.Lett. 28B, 432 (1969).
- (147) M.Ademollo y R.Gatto: Phys.Rev.Lett. 13, 264 (1965).
- (148) C.Bouchiat y Ph.Meyer: Nuovo Cimento 34, 1122 (1964).
- (149) J.Nuyts y H.Ruegg: CERN preprint TH.447 (1964).
- (150) D.Cutts et al.: Phys.Rev.Lett. 20, 955 (1968).
- (151) J.Bettels et al.(Expt.X2): Nuovo Cimento 56A, 1106 (1969).
- (152) D.Haidt et al.(Expt.X2): Phys.Rev. (en prensa).
- (153) J.L.Brown et al.: Phys.Rev.Lett. 3, 450 (1962).
- (154) G.L.Jensen et al.: Phys.Rev. 136B, 1431 (1962).
- (155) G.Borrelli et al.: Phys.Lett. 12, 123 (1964).
- (156) E.Bellotti et al.: Nuovo Cimento 52A, 1287 (1967).
- (157) G.Kalmus et al.: Phys.Rev. 159, 1187 (1967).
- (158) R.L.Imlay et al.: Phys.Rev. 160, 1203 (1967).
- (159) D.R.Botterill et al.: Phys.Rev. 171, 1661 (1968).
- (160) F.R.Bisler et al.: Phys.Rev. 169, 1090 (1968).
- (161) D.R.Botterill et al.: Phys.Lett. 31B, 325 (1969).
- (162) A.C.Callahan et al.: Phys.Rev. 150, 1153 (1966).
- (163) J.D.Bjorken y S.D.Drell: Relativistic Quantum Mechanics. McGraw Hill, 1964.