Cohomología relativa de grupos

Martínez, Juan José

1970

Tesis presentada para obtener el grado de Doctor en Ciencias Matemáticas de la Universidad de Buenos Aires ɔs

ɔas y Naturales

C O H O M O L O G I A R E L A T I V A D E G R U P O S

por

Juan José Martínez

Tesis

presentada para optar al títul

Doctor en Ciencias Matemáti ɔ de

1 9 7 0

INTRODUCCION.

Los resultados expuestos en el presente trabajo se apoyan básicamente en la siguiente construcción:[1]

Sea G un grupo. Dado un conjunto unitario U, provisto de su única estructura de G-conjunto, ${}^{G}A$ puede interpretarse como el grupo abeliano $\mathrm{Hom}_G(U,A)$. Más precisamente, son isomorfos los funtores $\mathrm{Hom}_G(U,\ )$, $i^G:\mathcal{M}_G \longrightarrow \mathcal{M}$. Esta situación sugiere generalizar la cohomología ordinaria de grupos, considerando, para cualquier G-conjunto C, el funtor $\mathrm{Hom}_G(C,\ ):\mathcal{M}_G \longrightarrow \mathcal{M}$; entonces queda definida, por derivación a derecha, la cohomología de G relativa a C, $H^*_C(G,\ )$.

El §1 se destina a exponer las propiedades fundamentales de las cohomologías relativas, procurando mantenerse en analogía con la cohomología ordinaria. En la descripción por cocadenas, al estilo de Hochschild, se pone énfasis en la naturaleza simplicial de la cuestión. En último término, se muestra que las cohomologías relativas pueden obtenerse a partir de la cohomología usual, lo que suministra una interpretación de los grados bajos.

En el §2, se comienza por recolectar las cohomologías relativas de G en una construcción que suministra la cohomología global de G, $\mathcal{H}^*(G,\ )$. Si n es un entero y A es un G-módulo, el G-funtor $\mathcal{H}^n(G,A)$ puede ser tratado cohomológicamente, para cada G-conjunto C, mediante su cohomología $\mathfrak{H}^*(C,\ )$. Gracias a un resultado sobre preservación de inyectivos, que se deduce de una situación de adjunción, es posible aproximar la cohomología

(1) Las notaciones de carácter general son aclaradas en los preliminares (p. 12); las restantes, se introducen en los parágrafos correspondientes.

ordinaria, combinando la cohomología global con la cohomología de G-conjuntos. En forma precisa, fijado un G-conjunto C, cada G-módulo A determina la convergencia espectral

$$\mathfrak{H}^p(C,\mathcal{H}^q(G,A)) \Longrightarrow H^n(G,A) \ .$$

En particular, puede considerarse a G provisto de su estructura canónica de G-conjunto, con lo que se obtiene la convergencia

$$\mathfrak{H}^p(G,\mathcal{H}^q(G,A)) \Longrightarrow H^n(G,A) \ ,$$

que suministra relaciones, en grados bajos, entre la cohomología de G, visto como G-conjunto, y la cohomología ordinaria del grupo G.

En el §3, se da una definición, netamente más general, de las cohomologías del tipo $\mathfrak{H}^*(C, \ )$, trabajando en el marco de las categorías abelianas. Las técnicas simpliciales, además de suministrar una descripción explícita, permiten introducir tales funtores cohomológicos prescindiendo de hipótesis restrictivas sobre la categoría de valores. Luego, empleando un resultado que tiene su origen en una situación de adjunción, se reencuentra la interpretación de $\mathfrak{H}^*(C, \ )$ mediante funtores derivados. Finalmente, se introduce un funtor cohomológico límite, que, si bien no amplía la información obtenida para el caso de la cohomología de grupos, aclara el papel previlegiado de G en la categoría de G-conjuntos.

El §4 se destina a analizar el efecto, sobre las tres cohomologías introducidas, de un morfismo entre los objetos de base. En especial, si $f:G'\longrightarrow G$ es un morfismo de grupos, el funtor de restricción de operadores $f^*:\mathcal{M}_G\longrightarrow\mathcal{M}_{G'}$ admite un adjunto a derecha $f_*:\mathcal{M}_{G'}\longrightarrow\mathcal{M}_G$, que se exhibe explícitamente. La importancia de este funtor se manifiesta en la convergencia espectral

$$H^p(G, R^q f_*(A')) \Longrightarrow H^n(G;A') ,$$

donde A' es un G'-módulo, que es formalmente análoga a la convergencia de Leray, determinada por una fibración [4-5-6]. Si N es un subgrupo normal de G y $\pi : G \longrightarrow G/N$ es el morfismo canónico, la convergencia que se deduce de π_* es, precisamente la convergencia de Hochschild-Serre [2], esencialmente debida a Lyndon [7]:

$$H^p(G/N, H^q(N,A)) \Longrightarrow H^n(G,A) ,$$

donde A es un G-módulo. En la dirección opuesta, si S es un subgrupo cualquiera de G y $\rho : S \longrightarrow G$ es el morfismo de inclusión, ρ_* coincide con el funtor de coinducción M^S_G y la convergencia espectral degenera, debido a la exactitud de ρ_*, suministrando el conocido isomorfismo (teorema de Shapiro) [3]

$$H^*(G, \rho_*(\ )) \simeq H^*(S,\ ) .$$

Finalmente, en el §5, dado un G-conjunto C, se define la homología de G relativa a C, $H^C_*(G,\ )$. Los tradicionales argumentos de dualidad permiten reobtener los resultados del §1 en este caso. Se aprovecha la ocasión para exhibir un operador de borde más simétrico y natural que el empleado usualmente.

Las cohomologías relativas tienen mayor grado de libertad que la cohomología ordinaria, en el sentido que dependen de una tercera variable. Este hecho, típico de los desarrollos modernos del álgebra homológica, parece particularmente útil para el tratamiento cohomológico de ciertas cuestiones de la teoría algebraica de números, que merecen una consideración independiente. En este trabajo, se intercalan algunos ejemplos de naturaleza aritmética, destinados a mostrar como, con adecuadas elecciones de clases de divisores, se obtienen los objetos que intervienen en el desarrollo cohomológico clásico de la "class field theory", inaugurado por Artin y Tate [1]. Si bien en el presente trabajo sólo se consideran grupos "discretos", conservando en vista las aplicaciones aritméticas de la cohomología de grupos (consultar [3] y [8]), parece importante analizar el caso de los grupos compactos y totalmente discontinuos (profinitos, en la terminología de [8], de tipo Galois, según [3]). Excluyendo los §§3 y 5, por razones evidentes, es más o menos claro que casi todos los resultados de este trabajo pueden reproducirse en la situación indicada, ya sea por argumentos directos, con las modificaciones pertinentes, o empleando el paso al límite. Notar que, si G es un grupo galoisiano, $\mathcal{S}_G$ debe reemplazarse por la categoría de G-espacios discretos y en consecuencia, el lugar de $\mathcal{M}_G$ debe ser ocupado por la categoría de G-módulos discretos.

[1] E. ARTIN - J. TATE. Class field theory. Math. Lect. Not., Benjamin, New York, 1968.

[2] G. HOCHSCHILD - J. P. SERRE. Cohomology of group extensions. Trans. Amer. Math. Soc., 74 (1953), pp. 110-134.

[3] S. LANG. Rapport sur la cohomologie des groupes. Math. Lect. Not., Benjamin, New York, 1966.

[4] J. LERAY. Structure de l'anneau d'homologie d'une representation. C. R. Acad. Sci. Paris, 222 (1946), pp. 1419-1422.

[5] J. LERAY. L'anneau spectral et l'anneau filtré d'homologie d'un espace localement compact et d'une application continue. J. Math. Pures Appl., 29 (1950), pp. 1-39.

[6] J. LERAY. L'homologie d'un espace fibré donc la fibre est conexe. J. Math. Pures Appl., 29 (1950), pp. 169-213.

[7] R. C. LYNDON. The cohomology of group extensions. Thesis ,

Harvard Univ., 1946.

[8] J. P. SERRE. Cohomologie galoisienne. Lect. Not. Math., 5, Springer-Verlag, Berlin, 1965.

Agradecimientos.

El autor se complace en expresar aquí su gratitud al Prof. E. R. Gentile por la asistencia y dirección que le ha brindado desde el comienzo de sus estudios de matemática. A sus cursos debe gran parte de su formación y conocimientos en álgebra (en particular, su primer contacto con la cohomología de grupos), además de haber encontrado en ellos una vital y centrada concepción de la matemática, y un amplio estímulo de la actitud de investigación.

El autor también desea agradecer al Prof. O. E. Villamayor, de quien ha aprendido importantes temas del álgebra, en especial, los métodos homológicos, y recibido interesantes sugerencias.

PRELIMINARES.

El álgebra homológica en las categorías abelianas es el instrumento formal que se emplea en el presente trabajo. Los resultados básicos de esta técnica, expuestos en los capítulos I y II de [G] (notablemente, en el citado en último término), son de uso sistemático. Ocasionalmente, se recurre a algunas proposiciones clásicas de [CE], ubicadas en los capítulos III y IV.

En cuanto a la cohomología de grupos, el capítulo VII de [S] se emplea con total liberalidad y frecuentemente, sin referencia específica.(1) Por supuesto, se adoptan la notación y la nomenclatura allí establecidas, salvo mención expresa en sentido contrario.

Los métodos simpliciales son empleados en forma (intencionadamente) rudimentaria, que hace inútil dar referencias especiales. Un comentario análogo es válido para las cuestiones de adjunción de funtores.

Este parágrafo está destinado a precisar el significado que se adopta para algunas nociones cuyo sentido varía con los autores, a resaltar ciertos resultados generales muy pertinentes, y a introducir las notaciones de carácter general que no son tradicionales, y aquéllas de uso constante.

i) Objetos graduados. Sea $\mathcal{C}$ una categoría, y sea M un monoide conmutativo, con elemento neutro (usualmente, cancelativo), que se nota aditivamente. Un objeto graduado por M de $\mathcal{C}$ es una familia $(A_i)_{i \in M}$ de objetos de $\mathcal{C}$. Si $d \in M$ y A, B son objetos

(1) En los capítulos X y XII de [CE] puede localizarse, esencialmente, el mismo material.

graduados por M de $\mathcal{C}$, un morfismo, de grado d, de A en B es una familia $(f_i:A_i\longrightarrow B_{i+d})_{i\in M}$ de morfismos en $\mathcal{C}$. Los morfismos de grado cero se dicen, simplemente, morfismos. Notar que el grado de un morfismo está unívocamente determinado, pues M tiene elemento neutro.

ii) Complejos simpliciales. Sea $\mathcal{C}$ una categoría. Un complejo simplicial de cadenas sobre $\mathcal{C}$ es un objeto graduado por $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ de $\mathcal{C}$, digamos S, provisto de una familia $(c_{ni}:S_n\longrightarrow S_{n-1})_{0\leq i\leq n}$ de morfismos en $\mathcal{C}$, para cada entero $n>0$, satisfaciendo las relaciones

$$c_{ni}\circ c_{n+1\,j} = c_{n\,j-1}\circ c_{n+1\,i} \quad , \quad i<j \; .$$

El morfismo estructural c_{ni} se dice el i-ésimo operador de cara, en dimensión n. Una degeneración de un complejo simplicial S es una familia $(d_{ni}:S_n\longrightarrow S_{n+1})_{0\leq i\leq n}$ de morfismos en $\mathcal{C}$, para cada entero $n\geq 0$, que verifica

$$d_{n+1\,i}\circ d_{nj} = d_{n+1\,j+1}\circ d_{ni} \quad , \quad i\leq j$$

$$c_{n+1\,i}\circ d_{nj} = \begin{cases} d_{n-1\,j-1}\circ c_{ni} \; , & i<j \\ id \; , & i=j,j+1 \\ d_{n-1\,j}\circ c_{n\,i-1} \; , & i>j+1 \, . \end{cases}$$

El morfismo d_{ni} se dice el i-ésimo operador de degeneración, en dimensión n. Una aumentación de un complejo simplicial S es un morfismo en $\mathcal{C}$ $e:S_0\longrightarrow A$ tal que $e\circ c_{10} = e\circ c_{11}$. Si S y S' son complejos simpliciales sobre $\mathcal{C}$, un morfismo de S en S' es un morfismo (en el sentido graduado) $f:S\longrightarrow S'$ que satisface

$$c'_{ni}\circ f_n = f_{n-1}\circ c_{ni} \; .$$

La categoría de complejos simpliciales sobre $\mathcal{C}$ será indicada $\underline{S}(\mathcal{C})$.

Si $\mathcal{C}$ es una categoría aditiva y S es un complejo simplicial de cadenas sobre $\mathcal{C}$, puede definirse un complejo ordinario de cadenas sobre $\mathcal{C}$, digamos K, en la forma

$$K_n = \begin{cases} 0, & \text{si } n<0 \\ S_n, & \text{si } n\geq 0, \end{cases}$$

y el operador de borde $d_n : K_n \longrightarrow K_{n-1}$, $n>0$, está dado por la fórmula

$$d_n = \sum_{0\leq i\leq n} (-1)^i c_{ni} \ .$$

Observar que una aumentación simplicial de S es una aumentación de K, en el sentido usual. La asignación de objetos $S \longmapsto K_S$ define un funtor de $\underline{S}(\mathcal{C})$ en la categoría de complejos de cadenas sobre $\mathcal{C}$.

Dualmente, se introduce la noción de *complejo simplicial de cocadenas*.

iii) *Existencia de funtores cohomológicos*. Un resultado fundamental en esa dirección, que formaliza numerosas construcciones tradicionales, se enuncia en el siguiente [1]

TEOREMA (P.1). *Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ categorías abelianas. Dado un funtor aditivo y exacto $F:\mathcal{A}\longrightarrow \underline{K}(\mathcal{B})$, existe un funtor cohomológico h^*, definido sobre $\mathcal{A}$ a valores en $\mathcal{B}$, que satisface:*

i) *Si A es un objeto de $\mathcal{A}$, entonces $h^*(A) = H^*(F(A))$ (igualdad de objetos graduados).*

ii) *Si $f:A\longrightarrow A'$ es un morfismo en $\mathcal{A}$, $h^*(f):h^*(A)\longrightarrow h^*(A')$ coincide con el morfismo $H^*(F(f)):H^*(F(A))\longrightarrow H^*(F(A'))$ inducido en la cohomología por $F(f):F(A)\longrightarrow F(A')$.*

iii) *Si $0\to A'\to A\to A''\to 0$ es una sucesión exacta de objetos de $\mathcal{A}$, el operador de conexión $\partial : h^*(A'')\longrightarrow h^*(A')$ coincide con el operador de conexión $\delta : H^*(F(A''))\longrightarrow H^*(F(A'))$ inducido en*

---

(1) Si $\mathcal{C}$ es una categoría aditiva, con $\underline{K}(\mathcal{C})$ se nota la categoría de complejos de cocadenas sobre $\mathcal{C}$.

la cohomología por la sucesión exacta $0 \to F(A') \to F(A) \to F(A'') \to 0$.

La técnica de los funtores derivados es de uso sistemático, y se expone en el siguiente

TEOREMA (P.2). Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ categorías abelianas, $\mathcal{A}$ con suficientes objetos inyectivos. Si $F:\mathcal{A} \to \mathcal{B}$ es un funtor aditivo, existe un funtor cohomológico R^*F, definido sobre $\mathcal{A}$ a valores en $\mathcal{B}$, tal que, para todo objeto A de $\mathcal{A}$, $R^*F(A) \simeq H^*(F(K))$, siendo $A \to K$ una resolución inyectiva. Además, si F es exacto a izquierda, R^*F es un ∂-funtor universal, caracterizado por las propiedades:

i) R^*F es positivo.

ii) $R^0F \simeq F$.

iii) R^*F es deleble en grados positivos.

R^*F se dice el derivado derecho de F. Los enunciados duales quedan a cargo del lector. Por último, se observa que el empleo de funtores resolventes [G, 2.5, p. 149] suministra variaciones para algunas de las pruebas que aparecen en este trabajo.

iv) Convergencia de sucesiones espectrales. Aquí, se adopta la noción de sucesión espectral debida a Grothendieck [G, 2.4, p. 145], que implica la convergencia en un sentido estricto. A continuación, se enuncian los resultados más útiles sobre sucesiones espectrales, en el marco de las categorías abelianas. Por supuesto, estos resultados se emplean en la presente exposición.

Sea $(E_r)_{r \geq 2}$ una sucesión espectral, de resultado H, sobre una categoría abeliana $\mathcal{A}$. En el caso de "base esférica" (existen conocidas razones geométricas para esta denominación), se tiene la siguiente

PROPOSICION (P.3). Si p, p' y r son enteros tales que $r \geqslant 2$, $p-p' \geqslant r$ y $E_r^{uv}=0$ para $u \neq p, p'$, existe una sucesión exacta de término general

$$E_r^{p\,n-p} \longrightarrow H^n \longrightarrow E_r^{p'\,n-p'} \quad , \; n \in \mathbf{Z} .$$

Para una sucesión espectral de "fibra esférica", la versión correspondiente es

PROPOSICION (P.4). Si q, q' y r son enteros tales que $r \geqslant 2$, $q'-q \geqslant r-1$ y $E_r^{uv}=0$ para $v \neq q, q'$, existe una sucesión exacta de término general

$$E_r^{n-q\,q} \longrightarrow H^n \longrightarrow E_r^{n-q'\,q'} \quad , \; n \in \mathbf{Z} .$$

También se tiene el importante

TEOREMA (P.5). Si $E_2^{pq}=0$ para $p<0$ o $q<0$, y n es un entero positivo tal que $E_2^{pq}=0$ para $0<q<n$, resulta

$$E_2^{io} \simeq H^i \quad , \; i<n,$$

y se tiene una sucesión exacta

$$0 \rightarrow E_2^{no} \rightarrow H^n \longrightarrow E_2^{on} \rightarrow E_2^{n+1\,o} \rightarrow H^{n+1} \quad .$$

que suministra la sucesión exacta de grados bajos:

COROLARIO (P.6). Si $E_2^{pq}=0$ para $p<0$ o $q<0$, se tiene la sucesión exacta

$$0 \rightarrow E_2^{10} \rightarrow H^1 \longrightarrow E_2^{01} \rightarrow E_2^{20} \rightarrow H^2 \quad .$$

En relación con estas proposiciones, puede consultarse [C E, XV.5, p. 238].

El sentido de "convergencia espectral" se deduce en forma obvia de la noción de sucesión espectral aquí adoptada. Considerando grados enteros, sea B un objeto bigraduado de $\mathcal{A}$ y sea C un objeto graduado de $\mathcal{A}$. Se dice que B converge espectralmente a C, indicándolo con la notación

$$B^{pq} \Longrightarrow C^n ,$$

sii existe una sucesión espectral $(E_r)_{r\geq 2}$, de resultado H, sobre $\mathcal{A}$ tal que $E_2 \simeq B$ y $H \simeq C$ (isomorfismo de objetos graduados).

Si $\mathcal{A}$ es una categoría abeliana, $\underline{E}(\mathcal{A})$ nota la categoría de sucesiones espectrales sobre $\mathcal{A}$. Si $\mathcal{B}$ es otra categoría abeliana, se recalca que un funtor espectral de $\mathcal{A}$ en $\mathcal{B}$ es un funtor aditivo de $\mathcal{A}$ en $\underline{E}(\mathcal{B})$. El uso de las sucesiones espectrales en el álgebra homológica se logra, principalmente, através del siguiente

TEOREMA (P.7). Sean $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ y $\mathcal{C}$ categorías abelianas tales que $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ tienen suficientes objetos inyectivos, y sean $F:\mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ y $G:\mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{C}$ funtores aditivos tales que F transforma inyectivos en G-acíclicos y G es exacto a izquierda. Entonces, existe un funtor espectral de $\mathcal{A}$ en $\mathcal{C}$, que induce la convergencia

$$R^pG(R^qF(A)) \Longrightarrow R^n(G\circ F)(A) ,$$

para todo objeto A de $\mathcal{A}$.

La demostración puede consultarse en [G, 2.4.1, p. 148].

v) Notaciones. A continuación, se da una lista de las notaciones no introducidas hasta este momento.

a) Si $\mathcal{C}$ es una categoría, $\mathcal{C}^\circ$ es la categoría dual.

b) La categoría de funtores de una categoría $\mathcal{C}$ en una categoría $\mathcal{D}$ se indica $\mathrm{Hom}(\mathcal{C},\mathcal{D})$.

c) Por razones de comodidad, la categoría de funtores "contravariantes" de $\mathcal{C}$ en $\mathcal{D}$ se nota $\mathcal{F}^1(\mathcal{C},\mathcal{D})$, vale decir, $\mathcal{F}^1(\mathcal{C},\mathcal{D}) = \mathrm{Hom}(\mathcal{C}^\circ,\mathcal{D}) = \mathrm{Hom}(\mathcal{C},\mathcal{D}^\circ)$.

d) Los símbolos $\times$ y $\oplus$ se emplean para indicar las operaciones de producto directo y de suma directa, respectivamente. Si I es un conjunto y C es un objeto de una categoría $\mathcal{C}$, por C^I se entiende la potencia I de C y por $C^{(I)}$, la copotencia I de C.

e) Si G es un grupo y $\mathcal{C}$ es una categoría, $\mathcal{C}_G$ es la categoría de G-objetos de $\mathcal{C}$. En este trabajo, los operadores se consideran por la izquierda, salvo mención expresa en sentido contrario.

f) Sea $\mathcal{C}$ una categoría conjuntos subyacentes (vale decir, provista de un funtor de olvido), y sea C un G-objeto de $\mathcal{C}$. Para evitar conflictos con d), el conjunto de invariantes de C se nota ${}^{G}C$. Se dice que G opera <u>libremente</u> sobre C sii la G-acción es libre de puntos fijos (o sea, si $sx=x$, entonces $s=1$, para todo $s\in G$ y todo $x\in C$).

g) $\mathcal{S}$ es la categoría de conjuntos, y $\mathcal{M}$ es la categoría de grupos abelianos.

h) Por abuso de notación (manifiestamente incorrecto, según e)), $\mathcal{F}_G$ es la categoría $\mathcal{F}(\mathcal{S}_G,\mathcal{M})$. Por abuso de lenguaje (igualmente incorrecto), un objeto de $\mathcal{F}_G$ se dice un G-<u>funtor</u>.

i) Si G es un grupo, el <u>anillo de grupo</u> de G es el álgebra del grupo G sobre el anillo $\mathbf{Z}$ de enteros racionales, y será notado $\mathbf{Z}[G]$. Se tiene, entonces, un funtor $\mathbf{Z}[\ ]$ de la categoría de grupos en la categoría de anillos (con unidad).

§1. COHOMOLOGIAS RELATIVAS.

El procedimiento reseñado en la introducción se desarrolla en la forma siguiente:

Sea G un grupo. Un G-conjunto C define un funtor aditivo $\alpha_C^G : \mathcal{M}_G \longrightarrow \mathcal{M}$ por la asignación de objetos

$$A \longmapsto \mathrm{Hom}_G(C,A) \ .$$

Como $\mathcal{M}_G$ es una categoría con suficientes inyectivos, está definido el funtor cohomológico $R^*\alpha_C^G$, que será notado $H_C^*(G,\ )$ y llamado el *funtor de cohomología* de G *relativa* a C. Sus propiedades formales se sumarizan en la siguiente

PROPOSICION (1.1). $H_C^*(G,\ )$ *es un funtor cohomológico universal, caracterizado por las propiedades:*

i) $H_C^*(G,\ )$ *es positivo.*

ii) $H_C^\circ(G,\ ) \simeq \alpha_C^G$.

iii) $H_C^*(G,\ )$ *es deleble en grados positivos.*

Además, $H_C^*(G,\ )$ *conmuta con productos directos.*

Dem. En la forma usual, se verifica que el funtor α_C^G es exacto a izquierda y que conmuta con límites proyectivos. La proposición sigue, entonces, de los resultados generales sobre ∂-funtores (consultar P.2).

La cohomología ordinaria de G, notada $H^*(G,\ )$ (como se acostumbra), resulta ser un caso particular de las cohomologías relativas.

PROPOSICION (1.2). *Si* U *es un conjunto unitario, provisto de su única estructura de* G-*conjunto, resulta*

$$H_U^*(G,\ ) \simeq H^*(G,\ ) \ .$$

Dem. Si G opera trivialmente sobre un conjunto C y $f: C \longrightarrow D$ es un morfismo de G-conjuntos, entonces $\mathrm{Im} f \subseteq {}^G D$. Luego, es evi dente el isomorfismo de conjuntos

$$\mathrm{Hom}_G(U,D) \simeq {}^G D \ ,$$

que induce un isomorfismo de funtores

$$\alpha_U^G \simeq \imath^G \ ,$$

siendo $\imath^G : \mathcal{M}_G \longrightarrow \mathcal{M}$ el funtor de invariantes $A \longmapsto {}^G A$.

Ahora, se pretende describir las cohomologías relativas a la manera de Hochschild, vale decir, mediante cocadenas, procurando mantener la semejanza con la descripción correspondiente a la cohomología ordinaria [S, VII.2-3, pp. 119-121]. Se requieren algunos resultados previos en torno al funtor que se introduce acto seguido, y que contribuye a clarificar la exposición.

Si C es un G-conjunto, $\lambda_G(C)$ nota el grupo abeliano libre generado por C (o sea, $\mathbb{Z}^{(C)}$), provisto de la G-acción

$$(sf)(x) = f(s^{-1}x) \ .$$

Así, resulta definido un funtor $\lambda_G : \mathcal{S}_G \longrightarrow \mathcal{M}_G$. Por ejemplo, considerando a G munido de su estructura canónica de G-conjunto, $\lambda_G(C)$ es el anillo de grupo de G, visto como G-módulo.

Dado un conjunto cualquiera I, para cada $i \in I$, $e_i : I \longrightarrow \mathbb{Z}$ indica la función característica de $\{i\}$, vale decir, $(e_i)_{i\in I}$ es la base canónica del $\mathbb{Z}$-módulo $\mathbb{Z}^{(I)}$.

LEMA (1.3). Se verifica:

i) Los funtores α_C^G y $\mathrm{Hom}_G(\lambda_G(C),\ )$ son isomorfos.

ii) Si r es una representación de la clase de órbitas de C, $(e_{r(y)})_{y\in\mathcal{O}(C)}$ es una familia de G-generadores de $\lambda_G(C)$. Si G opera libremente sobre C, la familia $(e_{r(y)})_{y\in\mathcal{O}(C)}$ también es G-libre; por lo tanto, $\lambda_G(C)$ es un G-módulo libre.

Dem. i) Si A es un G-módulo, sea $\mu_A : \mathrm{Hom}_G(C,A) \longrightarrow \mathrm{Hom}_G(\lambda_G(C),A)$ el morfismo de grupos abelianos dado por: $\mu_A(f) : \lambda_G(C) \longrightarrow A$ es el morfismo de grupos abelianos

$$\mu_A(f)(e_x) = f(x) \quad ,$$

que resulta un G-morfismo, por serlo f. Recíprocamente, $\nu_A : \mathrm{Hom}_G(\lambda_G(C),A) \longrightarrow \mathrm{Hom}_G(C,A)$ es el morfismo de grupos abelianos

$$\nu_A(g)(x) = g(e_x) \quad .$$

Luego, se tienen definidos morfismos de funtores

$$\alpha_C^G \underset{\nu}{\overset{\mu}{\rightleftarrows}} \mathrm{Hom}_G(\lambda_G(C), \ ) \quad ,$$

que son recíprocos, evidentemente.

ii) Si $x \in C$ e y es la órbita de x, se tiene $x = sr(y)$, para un cierto $s \in G$, con lo cual $e_x = se_{r(y)}$. Considerando que $(e_x)_{x \in C}$ $\mathbb{Z}$-genera $\lambda_G(C)$, resulta claro, entonces, que $(e_{r(y)})_{y \in \mathcal{O}(C)}$ G-genera $\lambda_G(C)$. Ahora, sea la combinación lineal

$$\sum_{y \in \mathcal{O}(C)} a_y e_{r(y)} = 0 \quad , \quad a_y \in \mathbb{Z}[G] \, .$$

Si $a_y = \sum_{s \in G} m_{ys} s$, resulta

$$\sum_{\substack{s \in G \\ y \in \mathcal{O}(C)}} m_{ys} e_{sr(y)} = 0 \quad .$$

Considerando que $(e_x)_{x \in C}$ es $\mathbb{Z}$-libre, para probar que $a_y = 0$, para todo $y \in \mathcal{O}(C)$, basta ver que la aplicación $G \times \mathcal{O}(C) \longrightarrow C$, $(s,y) \longmapsto sr(y)$, es inyectiva. En efecto,

$$sr(y) = tr(z) \implies y \cap z \neq \emptyset \implies y = z \implies sr(y) = tr(y) \quad ;$$

y como G opera libremente sobre C,

$$sr(y) = tr(y) \implies s = t \quad .$$

El siguiente resultado es básico a los efectos anunciados.

PROPOSICION (1.4). <u>Se verifica</u>:

i) $H_C^*(G, \ ) \simeq \mathrm{Ext}_G^*(\lambda_G(C), \ )$.

ii) <u>Si</u> G <u>opera libremente sobre</u> C, <u>el funtor</u> α_C^G <u>es exacto</u>.

<u>Dem</u>. Resulta inmediata, a partir del lema anterior.

"" Ejemplo aritmético. (Para el lenguaje, consultar [W, IV]). Sea $(K,\mathcal{D})$ un cuerpo aritmético ordinario, y sea D su grupo de divisores, notado aditivamente. Se recalca que, si $\mathcal{B}$ es el conjunto de divisores primos del cuerpo K, el grupo Aut(K) opera a derecha de $\mathcal{B}$ según la ley

$$P.\sigma = \sigma^*(P) \quad .$$

Luego, si G es un subgrupo del estabilizador de $\mathcal{D}$ (vale decir, $P.\sigma \in \mathcal{D}$, para todo $P \in \mathcal{D}$ y todo $\sigma \in G$), es claro que $\mathcal{D}$ es un G-conjunto a izquierda, através de su estructura derecha, y que $\lambda_G(\mathcal{D})$ coincide con D, provisto de su estructura usual de G-módulo. En consecuencia, la proposición anterior suministra un isomorfismo de ∂-funtores

$$H^*_{\mathcal{D}}(G,\ ) \simeq \mathrm{Ext}^*_G(D,\ ) \quad .$$

En particular, resulta el isomorfismo de objetos graduados

$$H^*_{\mathcal{D}}(G,D) \simeq \mathrm{Ext}_G(D,D) \quad . \qquad ""$$

Si $\rho_G : \mathcal{M}_G \longrightarrow \mathcal{M}$ es el funtor de olvido, aplicando una conocida fórmula de cambio de anillos [CE, II.6, case 4, p. 29], se obtiene

LEMA (1.5). Si A es un G-módulo coinducido por un grupo abeliano M, los funtores $\mathrm{Hom}_G(\ ,A)$, $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}}(\rho^\circ_G(\ ),M) : \mathcal{M}^\circ_G \longrightarrow \mathcal{M}$ son isomorfos.

En una primera aplicación, este lema permite refinar el resultado obtenido en 1.1,iii) como sigue.

PROPOSICION (1.6). Si A es un G-módulo relativamente inyectivo, A resulta α^G_C-acíclico, para todo G-conjunto C.

Dem. Como un G-módulo relativamente inyectivo es sumando directo de un G-módulo coinducido, puede asumirse, sin pérdida de generalidad, que A es coinducido por un grupo abeliano M. El lema anterior suministra, entonces, el isomorfismo

$$\mathrm{Hom}_G(\ ,A)\simeq \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\rho^\circ_G(\ ),M)\ ;$$

y derivando a derecha, un resultado clásico [ver, por ejemplo, CE, III.6.2, p. 49] permite deducir un isomorfismo de ∂-funtores

$$\mathrm{Ext}^*_G(\ ,A)\simeq \mathrm{Ext}_{\mathbb{Z}}(\rho^\circ_G(\ ),M)\ .$$

Luego, según 1.4,i), se obtiene un isomorfismo de objetos graduados

$$H^*_C(G,A)\simeq \mathrm{Ext}^*_{\mathbb{Z}}(\lambda_G(C),M)\ .$$

La demostración se completa observando que $\lambda_G(C)$ es $\mathbb{Z}$-libre.

Ya están dadas las condiciones para realizar la descripción propuesta, que se lleva a cabo poniendo en relieve su naturaleza simplicial.

Dado un G-conjunto C, teniendo presente 1.4,i), se comienza por construir la

i) Resolución canónica de $\lambda_G(C)$. Sea $S(G,C)$ el complejo simplicial de cadenas en $\mathcal{M}_G$ definido por

$$S_n(G,C)=\lambda_G(G^{n+1}\times C)\ ,\ n\geq 0\ ,$$

donde los morfismos de cara $c_{ni}:S_n(G,C)\longrightarrow S_{n-1}(G,C)$, $n>0$ y $0\leq i\leq n$, están dados por la condición

$$(s_0,\dots,s_n,x)\longmapsto(s_0,\dots,\hat{s}_i,\dots,s_n,x)\ .$$

Se recalca que $S_n(G,C)$ es un G-módulo libre, según 1.3,ii), para todo $n\geq 0$ (G opera libremente sobre sí mismo y $n+1>0$). Aun cuando no será empleado en lo que sigue, conviene observar que $S(G,C)$ admite morfismos de degeneración $d_{ni}:S_n(G,C)\longrightarrow S_{n+1}(G,C)$, $n\geq 0$ y $0\leq i\leq n$, definidos por

$$(s_0,\dots,s_n,x)\longmapsto(s_0,\dots,s_i,s_i,\dots,s_n,x)\ .$$

Así mismo, $S(G,C)$ admite una aumentación $a:S_0(G,C)\longrightarrow\lambda_G(C)$, que es el morfismo

$$(s_0,x)\longmapsto x\ .$$

Si $K(G,C)$ denota el complejo ordinario de cadenas deducido de $S(G,C)$, es claro que su operador de borde $d_n : K_n(G,C) \longrightarrow K_{n-1}(G,C)$ satisface, para $n>0$,

$$d_n(s_o,\ldots,s_n,x) = \sum_{0 \leq i \leq n} (-1)^i (s_o,\ldots,\hat{s}_i,\ldots,s_n,x) \ .$$

Fijado un elemento $t \in G$, si $f : \lambda_G(C) \longrightarrow K_o(G,C)$ es el morfismo definido por

$$x \longmapsto (t,x) \ ,$$

y para cada $n \geq 0$, $h_n : K_n(G,C) \longrightarrow K_{n+1}(G,C)$ es el morfismo definido por

$$(s_o,\ldots s_n,x) \longmapsto (t,s_o,\ldots,s_n,x) \ ,$$

se comprueba fácilmente que (h,f) es una homotopía de contracción para el complejo aumentado $(K(G,C),a)$, vale decir, que se verifica

$$af = id$$

$$d_1 h_o + fa = id$$

$$d_{n+1} h_n + h_{n-1} d_n = id \ , \ n>0 \ .$$

En consecuencia, $(K(G,C),a)$ es acíclico, y define una resolución homológica $R(G,C)$ de $\lambda_G(C)$ por G-módulos libres, que se dice la <u>resolución canónica</u> de $\lambda_G(C)$. El lector habrá observado la analogía que existe entre la construcción precedente y aquélla que se realiza con simples ordinarios.

Si A es un G-módulo, se pasa a considerar las

ii) <u>Cocadenas homogéneas</u>. De $K(G,C)$ se deduce, mediante el funtor $\mathrm{Hom}_G(\ ,A) : \mathcal{M}_G^o \longrightarrow \mathcal{M}$, un complejo de cocadenas en $\mathcal{M}$, notado $\mathrm{Hom}_G(K(G,C),A)$. Los isomorfismos de grupos abelianos

$$\mathrm{Hom}_G(K_n(G,C),A) \simeq \mathrm{Hom}_G(G^{n+1} \times C,A) \ , \ n \geq 0 \ ,$$

suministrados por 1.3,i), inducen una estructura de complejo de cocadenas sobre la sucesión $(\mathrm{Hom}_G(G^{n+1} \times C,A))_{n \geq 0}$, extendida en forma trivial a los enteros negativos, donde el operador de co

$d_n:\mathrm{Hom}_G(G^{n+1}\times C,A)\longrightarrow \mathrm{Hom}_G(G^{n+2}\times C,A)$, está dado por la fórmula, para $n\geq 0$,

$$d_n h\ (s_0,\dots,s_{n+1},x)=\sum_{0\leq i\leq n+1}(-1)^i h(s_0,\dots,\hat{s}_i,\dots,s_{n+1},x).$$

Además, este complejo admite una aumentación

$\varepsilon:\mathcal{A}_G(C,A)\longrightarrow \mathrm{Hom}_G(G^1\times C,A)$ definida por

$$\varepsilon(f)(s_0,x)=f(x)\ .$$

Un elemento $h\in\mathrm{Hom}_G(G^{n+1}\times C,A)$, $n\geq 0$, se dice una <u>cocadena homogénea</u> (de grado n) de G a coeficientes en A, <u>relativa</u> a C.

Finalmente, se definen las

iii) <u>Cocadenas ordinarias</u>. Para cada $n\geq 0$, sea $C^n_C(G,A)$ el grupo abeliano dado por

$$C^0_C(G,A)=A^C$$
$$C^n_C(G,A)=A^{G^n\times C}\ ,\ n>0\ .$$

Si $\mathrm{Hom}_G(G^{n+1}\times C,A)\underset{\psi_n}{\overset{\varphi_n}{\rightleftarrows}}C^n_C(G,A)$ son los morfismos de grupos abelianos

$$\varphi_n(h)(s_1,\dots,s_n,x)=h(1,s_1,\dots,s_1\dots s_n,x)$$
$$\psi_n(f)(s_0,\dots,s_n,x)=s_0.f(s_0^{-1}s_1,\dots,s_{n-1}^{-1}s_n,s_0^{-1}x)\ ,$$

es trivial comprobar que son recíprocos. Luego, los resultados anteriores permiten definir una estructura de complejo de cocadenas sobre la sucesión $(C^n_C(G,A))_{n\geq 0}$, extendida en forma trivial a los enteros negativos, donde el operador de coborde $d_n:C^n_C(G,A)\longrightarrow C^{n+1}_C(G,A)$ es suministrado por la fórmula, para

$$d_n f\ (s_1,\dots,s_{n+1},x)=s_1.f(s_2,\dots,s_{n+1},s^{-1}x)\ +$$
$$+\sum_{1\leq i\leq n}(-1)^i f(s_1,\dots,\underbrace{s_is_{i+1}}_{i},\dots,s_{n+1},x)+(-1)^{n+1}f(s_1,\dots s_n,x).$$

Este complejo, que será notado $C^*_C(G,A)$, admite una aumentación $\varepsilon:\mathcal{A}^G_C(A)\longrightarrow C^0_C(G,A)$ definida por el morfismo de inclusión. Un elemento $f\in C_C^n(G,A)$, $n\geq 0$, se dice una <u>cocadena</u> (de grado n) de G a coeficientes en A, <u>relativa</u> a C.

En consecuencia, apelando a P.1 y por supuesto, a 1.4,i), queda demostrado el siguiente

TEOREMA (1.7). <u>Dado un G-conjunto C, si $\mathcal{M}_G \longrightarrow \underline{K}(\mathcal{M})$ es el funtor $A \longmapsto C_C^*(G,A)$ y $h_C^*(G,\ )$ es el funtor cohomológico que define, se tiene un isomorfismo de ∂-funtores</u>

$$H_C^*(G,\ ) \simeq h_C^*(G,\ )\ .$$

Para la computación de los grupos de cohomología relativa, en grados bajos, es útil el siguiente formulario.

0) $d_0 f\ (s,x) = s.f(s^{-1}x) - f(x)$

$Z_C^\circ(G,A) = \alpha_C^G(A)$

$B_C^\circ(G,A) = 0$

1) $d_1 f\ (s,t,x) = s.f(t,s^{-1}x) - f(st,x) + f(s,x)$

$f\in Z_C^1(G,A) \iff f(st,x) = f(s,x) + s.f(t,s^{-1}x)$

$f\in B_C^1(G,A) \iff \exists g\in A^C\colon\ f(s,x) = s.g(s^{-1}x) - g(x)$

2) $d_2 f\ (s,t,u,x) = s.f(t,u,s^{-1}x) - f(st,u,x) + f(s,tu,x) - f(s,t,x)$

$f\in Z_C^2(G,A) \iff f(s,t,x) + f(st,u,x) = f(s,tu,x) + s.f(t,u,s^{-1}x)$

$f\in B_C^2(G,A) \iff \exists g\in A^{G\times C}\colon\ f(s,t,x) + g(st,x) = g(s,x) + s.g(t,s^{-1}x)$

En situación recíproca a la planteada en 1.2, las cohomologías relativas pueden obtenerse a partir de la cohomología ordinaria. Para demostrarlo, se hace necesario un resultado preliminar.

Si C es un G-conjunto y A es un G-módulo, $\pi_G(C,A)$ es el grupo abeliano A^C provisto de la G-acción

$$(sf)(x) = s.f(s^{-1}x)\ ,$$

con lo cual resulta definido un funtor $\pi_G\colon \mathcal{S}_G^\circ \times \mathcal{M}_G \longrightarrow \mathcal{M}_G$. Es claro que, para todo G-conjunto C, el funtor parcial $\pi_G(C,\ )$ es aditivo, exacto y conmuta con límites proyectivos.

LEMA (1.3) Si C es un G-conjunto, el funtor $\pi_G(C,\ )$ preserva módulos coinducidos y en consecuencia, preserva módulos relativamente inyectivos.

Dem. Se recalca que, si A es un grupo abeliano, $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}[G],A)$ tiene una estructura de G-módulo inducida por la estructura de de $\mathbb{Z}[G]$:

$$(sf)(x) = f(xs) \ .$$

el caso que A es un G-módulo, $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}[G],A)$ también admite la estructura definida por

$$(sf)(x) = s.f(s^{-1}x) \ ,$$

que será notada $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}[G],A)$. Es un hecho bien conocido que ambas estructuras son isomorfas [CE, X.8, form. (2)-(2'), p. 199]. Si M es un grupo abeliano, el isomorfismo canónico de grupos abelianos

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}[G],M^C) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}[G],M)^C$$

resulta un G-morfismo en la situación

$$\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}[G],M^C) \longrightarrow \pi_G(C,\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}[G],M)) \ ,$$

donde M se considera como G-módulo trivial y M^C, con la estructura

$$(sf)(x) = f(s^{-1}x) \ .$$

Luego, es claro que $\pi_G(C,\ )$ preserva módulos coinducidos. Como un módulo relativamente inyectivo es sumando directo de un módulo coinducido, la prueba es completa.

Considerando que $H^*(G,\ )$ es un funtor cohomológico y que $\pi_G(C,\ )$ es un funtor exacto, $H^*(G,\pi_G(C,\ ))$ también es un funtor cohomológico. Este ∂-funtor verifica trivialmente la condición i) de 1.1. Como $\iota^G \circ \pi_G(C,\ ) = \alpha_C^G$, también satisface la condición ii). Además, como $\pi_G(C,\ )$ transforma módulos inyectivos en ι^G-

acíclicos, según el lema anterior, verifica la condición iii). Luego, resulta probado el siguiente

TEOREMA (1.9). <u>Se tiene un isomorfismo de ∂-funtores</u>

$$H^*_C(G,\ ) \simeq H^*(G,\pi_G(C,\ )) ,$$

<u>para todo</u> G-<u>conjunto</u> C.

"" <u>Ejemplo aritmético</u>. (Para el lenguaje, consultar [W , V]). Sea K un cuerpo global, y sea $\mathcal{A}$ el anillo de adèles de K. Si G es un grupo de automorfismos de K, $\mathcal{A}$ es un G-anillo con la acción usual

$$(\sigma.a)_P = \sigma(a_{\sigma^*(P)}) .$$

Luego, el anillo $\mathcal{A}'$ de adèles principales de K también lo es. Ahora bien, si se considera el conjunto $\mathcal{P}$ de los divisores primos de K como G-conjunto a izquierda, a partir de su estructura derecha natural

$$P.\sigma = \sigma^*(P) ,$$

$\pi_G(\mathcal{P},K)$ es $\mathcal{A}'$, visto como G-módulo. Luego, por el teorema anterior

$$H^*_{\mathcal{P}}(G,K) \simeq H^*(G,\mathcal{A}') .$$

Además, el grupo de unidades $\mathcal{J}$ de $\mathcal{A}$, vale decir, el grupo de idèles de K, también es un G-módulo, y un argumento similar suministra

$$H^*_{\mathcal{P}}(G,K^*) \simeq H^*(G,\mathcal{J}') ,$$

donde $\mathcal{J}'$ es el grupo de idèles principales de K. Observar que la situación clásica en "class field theory" es el caso multiplicativo, con K una extensión galoisiana, de grado finito, de un cuerpo global k y G el grupo de Galois de K/k. ""

Conviene observar que el teorema anterior suministra una interpretación, como clasificantes, del primer y segundo grupo de cohomología relativa, en virtud de las descripciones corresponla cohomología ordinaria.

Si C es un G-conjunto trivial, para todo G-módulo A se tiene $\pi_G(C,A) = A^C$, como G-módulos. En consecuencia, es claro el si

COROLARIO (1.10). Si G opera trivialmente sobre C, resulta

$$H_C^*(G,\ ) \simeq H^*(G,\ )^C .$$

§2. COHOMOLOGIA GLOBAL Y COHOMOLOGIA DE G-CONJUNTOS.

Sea G un grupo. En oposición con el §1, aquí se considera pasiva la segunda variable del funtor $\mathrm{Hom}_G(\ ,\ ):\mathcal{S}_G^{\circ}\times\mathcal{M}_G\longrightarrow\mathcal{M}$. Esta medida formal suministra una técnica de globalización, pues equivale a recolectar las cohomologías relativas de G.

En detalle, sea $\beta_G:\mathcal{M}_G\longrightarrow\mathcal{A}_G$ el funtor aditivo dado por la asignación de objetos

$$A\longmapsto \mathrm{Hom}_G(\ ,A)\ .$$

Su derivado derecho $R^*\beta_G$ será notado $\mathcal{H}^*(G,\ )$ y llamado el *funtor de cohomología global* de G (esta denominación resulta justificada por 2.2). Como β_G es un funtor exacto a izquierda, que conmuta con límites proyectivos, el diccionario usual suministra sus propiedades formales, que se enuncian en la

PROPOSICION (2.1). $\mathcal{H}^*(G,\ )$ *es un funtor cohomológico universal, caracterizado por las propiedades:*

i) $\mathcal{H}^*(G,\ )$ *es positivo.*

ii) $\mathcal{H}^{\circ}(G,\ )\simeq\beta_G$.

iii) $\mathcal{H}^*(G,\ )$ *es deleble en grados positivos.*

Además, $\mathcal{H}^*(G,\ )$ *conmuta con productos directos.*

La familia $(H_C^*(G,\ ))_{C\in \mathrm{Ob}\,\mathcal{S}_G}$ de funtores cohomológicos de $\mathcal{M}_G$ en $\mathcal{M}$ define canónicamente un funtor cohomológico $H_{(\ )}^*(G,\ )$ sobre $\mathcal{M}_G$ a valores en $\mathcal{A}_G$ (esta construcción requiere conocer el efecto, al nivel de las cohomologías relativas, de un morfismo de G-conjuntos; consultar 4.i)). Teniendo presente 1.1 y la fórmula

$$\beta_G(A)(C)=\alpha_C^G(A)\ ,$$

es claro que el ∂-funtor $H_{(\ )}^*(G,\ )$ tiene las propiedades características de $\mathcal{H}^*(G,\ )$, enunciadas en 2.1. Luego, es claro el siguiente

COROLARIO (3.2). <u>Se tiene un isomorfismo de</u> ∂-<u>funtores</u>

$$\mathfrak{H}^*(G,\ ) \simeq H^*_{(\ )}(G,\ ) \ .$$

<u>En particular, si</u> A <u>es un</u> G-<u>módulo y</u> C <u>es un</u> G-<u>conjunto, resul</u>

$$\mathfrak{H}^n(G,A)(C) \simeq H^n_C(G,A) \ ,$$

<u>para todo entero</u> n.

Ahora, se pretende someter a $\mathfrak{H}^*(G,\ )$ a un tratamiento cohomológico, que posibilite la aproximación de la cohomología ordinaria de G mediante sucesiones espectrales. Considerando que $\mathfrak{H}^*(G,\ )$ tiene valores en $\mathscr{A}_G$, se hace necesario, entonces, introducir una cohomología a coeficientes en tal categoría.

Sea C un G-conjunto. Si p_i , $i=1,2$, son los morfismos de proyección de $C\times C$, se define un funtor aditivo $\gamma^G_C : \mathscr{A}_G \longrightarrow \mathcal{M}$ por la asignación de objetos

$$F \longmapsto \operatorname{Ker}(F(p_1)-F(p_2)) \ .$$

Como $\mathscr{A}_G$ es una categoría con suficientes inyectivos (consultar 3.2), puede considerarse el funtor cohomológico $R^*\gamma^G_C$, que será notado $\mathcal{H}^*(C,\ )$ y llamado el <u>funtor de cohomología</u> de C. Considerando que γ^G_C es un funtor exacto a izquierda que conmuta con límites proyectivos (e inductivos), en la forma acostumbrada se obtiene la siguiente

PROPOSICION (3.3). $\mathcal{H}^*(C,\ )$ <u>es un funtor cohomológico universal, caracterizado por las propiedades:</u>

i) $\mathcal{H}^*(C,\ )$ <u>es positivo.</u>

ii) $\mathcal{H}^0(C,\ ) \simeq \gamma^G_C$.

iii) $\mathcal{H}^*(C,\ )$ <u>es deleble en grados positivos.</u>

<u>Además,</u> $\mathcal{H}^*(C,\ )$ <u>conmuta con productos directos.</u>

Se requiere, también, un resultado sobre preservación de in yectivos, que es consecuencia de un hecho más profundo: una situación de adjunción, que se pasa a exponer.

Sea $\varepsilon_G : \mathcal{F}_G \longrightarrow \mathcal{M}_G$ el funtor de evaluación en G, vale decir, el funtor definido por la asignación de objetos

$$F \longmapsto F(G)$$

(F es aplicable a G, considerándolo provisto de su estructura canónica de G-conjunto, en tanto que F(G) tiene la estructura de G-módulo inducida, a través de F, por la estructura derecha de G).

TEOREMA (2.4). <u>Las siguientes proposiciones son verdaderas:</u>

i) β_G <u>es un funtor de sección; más precisamente,</u> $\varepsilon_G \circ \beta_G \simeq \mathrm{id}$.

ii) ε_G <u>es adjunto a izquierda de</u> β_G .

<u>Dem.</u> i) Si A es un G-módulo, los morfismos de G-módulos $\mathrm{Hom}_G(G,A) \underset{\nu_A}{\overset{\mu_A}{\rightleftarrows}} A$ dados por

$$\mu_A(f) = f(1) \quad , \quad \nu_A(x)(s) = sx \ ,$$

definen morfismos de funtores $\varepsilon_G \circ \beta_G \underset{\nu}{\overset{\mu}{\rightleftarrows}} \mathrm{id}_{\mathcal{M}_G}$ que, claramente, son recíprocos.

ii) Debe probarse que los funtores

$\mathrm{Hom}_{\mathcal{F}_G}(\ ,\beta_G(\ ))$, $\mathrm{Hom}_G(\varepsilon_G(\ ), \ ) : \mathcal{F}_G^{\circ} \times \mathcal{M}_G \longrightarrow \mathcal{M}$ son isomorfos. Si A es un G-módulo y F es un G-funtor, se define un morfismo de grupos abelianos $\xi_{F,A} : \mathrm{Hom}_{\mathcal{F}_G}(F, \mathrm{Hom}_G(\ ,A)) \longrightarrow \mathrm{Hom}_G(F(G),A)$ por la fórmula

$$\xi_{F,A}(\varphi) = \mu_A \circ \varphi(G) \ .$$

Si C es un G-conjunto y $x \in C$, $m_C^x : G \longrightarrow C$ es el morfismo de G-conjuntos $s \longmapsto sx$. Luego, queda definido un morfismo de grupos abelianos $\eta_{F,A} : \mathrm{Hom}_G(F(G),A) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{F}_G}(F, \mathrm{Hom}_G(\ ,A))$ en la forma:

$\eta_{F,A}(f)$ es el morfismo de funtores definido puntualmente por

$$F(C) \longrightarrow \mathrm{Hom}_G(C,A)$$

$$y \longmapsto \text{"} x \longmapsto (f \circ F(m_C^x))(y) \text{"}.$$

[illegible], [illegible] definidos morfismos de funtores

$\gamma_A^G(\;) \underset{\eta}{\overset{\xi}{\rightleftarrows}} \mathrm{Hom}_G(\mathcal{E}_G(\;),\;)$, que son recíprocos. Los detalles de computación quedan a cargo del lector.

[illegible] que $\mathcal{E}_G$ es un funtor exacto, la proposición ii) anterior hace claro el siguiente

COROLARIO (E.5). __El funtor__ β_G __preserva inyectivos.__

[illegible] del material necesario para aproximar la co-[illegible].

TEOREMA (E.6).[1] __Para [illegible] G-conjunto__ C, __existe un funtor [illegible] de__ $\mathcal{M}_G$ __en__ $\mathcal{M}$ __que induce la convergencia__

$$\mathcal{J}^p(C, \mathcal{H}^q(G,A)) \Longrightarrow H^n(G,A) .$$

__Dem.__ Para todo G-módulo A, [illegible] tiene

$$\gamma_C^G \beta_G(A) = \mathrm{Ker}\ \Theta_A ,$$

[illegible] $\Theta_A : \mathrm{Hom}_G(C,A) \longrightarrow \mathrm{Hom}_G(C \times C, A)$ [illegible] el morfismo inducido por las proyecciones de $C \times C$ en la forma

$$\Theta_A(f)(x,y) = f(x) - f(y) .$$

Como Ker Θ_A tiene por miembros los G-morfismos constantes de C en A, resulta isomorfo a $^G A$. Por lo tanto, queda definido un isomorfismo de funtores

$$\gamma_C^G \circ \beta_G \simeq \varepsilon^G .$$

Considerando que β_G transforma inyectivos en γ_C^G-acíclicos, en [illegible] E.5, la aplicación de P.7 demuestra el teorema.

COROLARIO (E.7). __Existe un funtor espectral de__ $\mathcal{M}_G$ __en__ $\mathcal{M}$ __[illegible] la convergencia__

$$\mathcal{J}^p(G, \mathcal{H}^q(G,A)) \Longrightarrow H^n(G,A) .$$

---

(1) Se obtienen [illegible] interesantes aplicando P.4, en el caso n=2 (notablemente, para q=0 y q'=1), P.5 y P.6.

A continuación, se muestra la relación que existe entre los grados bajos de $\mathfrak{H}^*(G,\ )$ y de $H^*(G,\ )$. Previamente, se tiene el siguiente

LEMA (2.8). *Si* $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ *y* $\mathcal{C}$ *son categorías abelianas tales que* $\mathcal{A}$ *y* $\mathcal{B}$ *tienen suficientes inyectivos, y* $S:\mathcal{A}\to\mathcal{B}$ *y* $T:\mathcal{B}\to\mathcal{C}$ *son funtores aditivos tales que* T *y* $T\circ S$ *son exactos, entonces* $T\circ R^qS=0$, *para* $q>0$.

Dem. Como T es un funtor exacto,

$$R^pT=0,\ \text{si } p>0.$$

Luego, para todo objeto A de $\mathcal{A}$, se verifica

$$R^pT(R^qS(A))=0,\ \text{si } p>0.$$

Por lo tanto, teniendo presente P.7, un segmento de la sucesión exacta suministrada en P.3, para el caso $n=q>0$, $r=p=2$ y $p'=0$, se traduce en

$$0=R^q(T\circ S)(A)\longrightarrow T(R^qS(A))\longrightarrow R^2T(R^qS(A))=0\ ,$$

pues $T\circ S$ es exacto.

Aplicando 2.4,i), se obtiene el siguiente

COROLARIO (2.9). *Si* A *es un* G-*módulo, entonces*

$$\varepsilon_G(\mathscr{H}^q(G,A))=0,\ \text{para } q>0.$$

PROPOSICION (2.10). *Para todo* G-*módulo* A, *se verifica*

$$\mathfrak{H}^1(G,\beta_G(A))\simeq H^1(G,A)$$
$$\mathfrak{H}^2(G,\beta_G(A))\subsetneq H^2(G,A)\ .$$

Dem. Si F es un G-funtor tal que $\varepsilon_G(F)=0$, es claro que

$$\mathfrak{H}^\circ(G,F)=0\ .$$

Luego, 2.9 suministra, para $q>0$,

$$\mathfrak{H}^\circ(G,\mathscr{H}^q(G,A))=0\ .$$

Ahora bien, 2.7 permite aplicar la sucesión exacta de grados bajos (cf. P.6), que se traduce en

$$0 \to \mathfrak{H}^1(G,\beta_G(A)) \to H^1(G,A) \to \underbrace{\mathfrak{H}^0(G,\mathcal{H}^1(G,A))}_{\overset{\shortparallel}{0}} \to \mathfrak{H}^2(G,\beta_G(A)) \to H^2(G,A).$$

Mejorando resultados anteriores, se tiene

PROPOSICION (2.11). Si A es un G-módulo relativamente inyectivo, entonces A es β_G-acíclico, en tanto que $\beta_G(A)$ es γ_C^G-acíclico, para todo G-conjunto C.

Dem. En virtud de 2.2 y 1.6, es claro que A resulta β_G-acíclico, vale decir,

$$\mathcal{H}^q(G,A) = 0 \quad , \quad q>0 \ .$$

Luego, si C es un G-conjunto, para todo entero $q>0$, resulta

$$\mathfrak{H}^p(C,\mathcal{H}^q(G,A)) = 0;$$

y en presencia de 2.6, P.5 permite concluir que

$$\mathfrak{H}^p(C,\beta_G(A)) \simeq H^p(G,A) \ .$$

Por lo tanto, $\beta_G(A)$ es γ_C^G-acíclico.

§3. COHOMOLOGIA EN CATEGORIAS.[1]

En virtud de los resultados del §2, parece importante realizar un estudio más detenido de las cohomologías de G-conjuntos. Empleando técnicas simpliciales, se obtiene una descripción explícita de tales cohomologías, en un contexto más general. Se pasa a detallar esta construcción.

Sea $\mathcal{C}$ una categoría, y sea C un objeto de $\mathcal{C}$ tal que existen los productos C^r, para todo entero $r>0$. Procediendo ordenadamente, se tiene:

i) S(C) es el complejo simplicial de cadenas en $\mathcal{C}$ definido por

$$S_n(C) = C^{n+1} \;,\; n\geq 0 \;,$$

donde el morfismo de cara $c_{ni}:S_n(C)\longrightarrow S_{n-1}(C)$, $n>0$ y $0\leq i\leq n$, es el factorizador de la familia $(p_{nj}:S_n(C)\longrightarrow C)_{\substack{0\leq j\leq n\\ j\neq i}}$, siendo p_{nj} , $0\leq j\leq n$, los morfismos de proyección de $S_n(C)$.

ii) Si $\mathcal{A}$ es una categoría cualquiera, cada funtor $F:\mathcal{C}^\circ\to\mathcal{A}$ transforma a S(C) en un complejo simplicial de cocadenas sobre $\mathcal{A}$, que será notado S(C,F). De esta manera, se obtiene un funtor $\mathcal{F}(\mathcal{C},\mathcal{A})\longrightarrow \underline{S}(\mathcal{A}^\circ)$ con asignación de objetos

$$F\longmapsto S(C,F) \;.$$

iii) Si $\mathcal{A}$ es una categoría aditiva, componiendo con el funtor canónico $\underline{S}(\mathcal{A}^\circ)\longrightarrow\underline{K}(\mathcal{A})$, se deduce un funtor aditivo $\omega_C:\mathcal{F}(\mathcal{C},\mathcal{A})\longrightarrow\underline{K}(\mathcal{A})$.

Por supuesto, interesa el caso en que $\mathcal{A}$ es una categoría abeliana; entonces, $\mathcal{F}(\mathcal{C},\mathcal{A})$ también es abeliana y ω_C es un funtor exacto. Luego, en virtud de P.1, ha quedado demostrado el siguiente

---

(1) La lectura de este parágrafo es inútil para la comprensión del resto del trabajo.

TEOREMA (3.1). Si $\mathcal{A}$ es una categoría abeliana, existe un funtor cohomológico $\mathfrak{H}^*(C,\ )$, definido sobre $\mathcal{F}(\mathcal{B},\mathcal{A})$ a valores en $\mathcal{A}$, tal que

$$\mathfrak{H}^*(C,F)=H^*(\omega_C(F))$$

(igualdad de objetos graduados), para todo funtor $F:\mathcal{B}^\circ\longrightarrow\mathcal{A}$.

$\mathfrak{H}^*(C,\ )$ será llamado el funtor de cohomología de C a valores en $\mathcal{A}$.

Ahora, si p_i , $i=1,2$, son los morfismos de proyección de $C\times C$, se define un funtor aditivo $\hat{\gamma}_C:\mathcal{F}(\mathcal{B},\mathcal{A})\longrightarrow\mathcal{A}$ por la asignación de objetos

$$F\longmapsto \operatorname{Ker}(F(p_1)-F(p_2)) \ .$$

Observar que $\hat{\gamma}_C(F)=\operatorname{Ker} d_o$, donde d_o es el operador de coborde, de grado cero, de $\omega_C(F)$.

A continuación, se exponen los preliminares necesarios para probar que, bajo adecuadas restricciones sobre la categoría de valores, el funtor cohomológico $\mathfrak{H}^*(C,\ )$ puede obtenerse derivando a derecha $\hat{\gamma}_C$.

Si la categoría abeliana $\mathcal{A}$ satisface el axioma AB5) y admite un generador, $\mathcal{F}(\mathcal{B},\mathcal{A})$ hereda tales propiedades, según [G, 1.6.1, 1.9.1, 1.9.2, pp. 131, 134, 135]. Luego, una aplicación de [G, 1.10.1, p. 135] suministra la siguiente

PROPOSICION (3.2). Si $\mathcal{A}$ es una categoría abeliana, que satisface el axioma AB5) y admite un generador, la categoría $\mathcal{F}(\mathcal{B},\mathcal{A})$ tiene suficientes objetos inyectivos.

Por lo tanto, asumiendo tales hipótesis sobre $\mathcal{A}$, es lícito considerar el funtor cohomológico $R^*\hat{\gamma}_C$.

Sea $\mathcal{L}$ una categoría, y sea L un objeto de $\mathcal{L}$ tal que existen las sumas directas $L^{(I)}$, para todo conjunto I.

iv) Sea $\sigma:\hat{\mathcal{L}}\longrightarrow\mathcal{L}$ el funtor definido por la asignación de objetos

$$I \longmapsto L^{(I)} .$$

(Si $f:I \longrightarrow J$ es un morfismo de conjuntos, $L^{(I)} \longrightarrow L^{(J)}$ es el factorizador de la familia $(u_{f(i)}:L \longrightarrow L^{(J)})_{i\in I}$, donde u_j , $j\in J$, son los morfismos de inyección de $L^{(J)}$). Considerando $S(I)$, según se ha definido en i), que es un complejo simplicial de cadenas sobre $\mathcal{S}$, el funtor σ lo transforma en un complejo simplicial de cadenas sobre $\mathcal{L}$, $S(I,\sigma)$. Fijado $p\in I$, si, para cada $n\geq 0$, $f_n:S_n(I) \longrightarrow S_{n+1}(I)$ es el morfismo

$$f_n(i_0,\dots,i_n) = (p,i_0,\dots,i_n)$$

(operador cónico de vértice p, en dimensión n) y $\mathcal{L}$ es una categoría aditiva, $(\sigma(f_n))_{n\geq 0}$ define una homotopía de contracción para el complejo ordinario de cadenas $K(I)$, deducido de $S(I,\sigma)$. En efecto, como el operador de borde $d_n:K_n(I) \longrightarrow K_{n-1}(I)$, está dado por la fórmula, para $n>0$,

$$d_n = \sum_{0\leq i\leq n} (-1)^i \sigma(c_{ni}) ,$$

resulta

$$\sigma(f_{n-1})\, d_n = \sum_{0\leq i\leq n} (-1)^i \sigma(f_{n-1}\, c_{ni})$$

$$d_{n+1}\sigma(f_n) = \sigma(c_{n+1\,0}\, f_n) + \sum_{0\leq i\leq n} (-1)^{i+1}\sigma(c_{n+1\,i+1}\, f_n)$$

y es inmediato comprobar que valen las fórmulas

$$f_{n-1}\, c_{ni} = c_{n+1\,i+1}\, f_n \ , \quad 0\leq i\leq n$$

$$c_{n+1\,0}\, f_n = id \ .$$

Por lo tanto,

$$\sigma(f_{n-1})\, d_n + d_{n+1}\sigma(f_n) = id \ , \quad n>0 \ .$$

Como el caso $I=\emptyset$ es trivial, ha quedado demostrado el siguiente

LEMA (3.3). <u>Si $\mathcal{L}$ es una categoría abeliana, para todo conjunto I se verifica que el complejo de cadenas K(I) es acíclico.</u>

v) Sea $\mathcal{K}$ una categoría cualquiera. Cada objeto K de $\mathcal{K}$ define un funtor $\sigma_K:\mathcal{K}\longrightarrow\mathcal{L}$ por la composición de los funtores σ y $\mathrm{Hom}_{\mathcal{K}}(K,\ )$. Si $\varepsilon_K:\mathrm{Hom}(\mathcal{K},\mathcal{L})\longrightarrow\mathcal{L}$ es el funtor de evaluación en K

$$F\longmapsto F(K)\ ,$$

se tiene

LEMA (3.4).(1) <u>Los funtores</u>

$$\mathrm{Hom}(\sigma_K,\ )\ ,\ \mathrm{Hom}_{\mathcal{L}}(L,\varepsilon_K(\ )):\mathrm{Hom}(\mathcal{K},\mathcal{L})\longrightarrow\mathcal{S}$$

<u>son isomorfos. Si $\mathcal{L}$ es una categoría aditiva, también son isomorfos como funtores a valores en $\mathcal{M}$.</u>

Dem. Para cada funtor $F:\mathcal{K}\longrightarrow\mathcal{L}$, sea $\mu_F:\mathrm{Hom}(\sigma_K,F)\longrightarrow\mathrm{Hom}_{\mathcal{L}}(L,F(K))$ el morfismo de conjuntos (si $\mathcal{L}$ es aditiva, el morfismo de grupos abelianos)

$$\mu_F(\varphi)=\varphi(K)\circ u_{id_K}\ ,$$

donde $(u_f:L\longrightarrow\sigma_K(K))_{f\in\mathrm{Hom}_{\mathcal{K}}(K,K)}$ es la familia de morfismos de inyección. Así mismo, sea $\nu_F:\mathrm{Hom}_{\mathcal{L}}(L,F(K))\longrightarrow\mathrm{Hom}(\sigma_K,F)$ el morfismo de conjuntos (si $\mathcal{L}$ es aditiva, el morfismo de grupos abelianos) definido por: $\nu_F(h):\sigma_K\longrightarrow F$ es el morfismo de funtores tal que, para cada objeto A de $\mathcal{K}$, $\nu_F(h)(A)$ es el factorizador de la familia $(F(f)\circ h:L\longrightarrow F(A))_{f\in\mathrm{Hom}_{\mathcal{K}}(K,A)}$.

De esta manera, quedan definidos morfismos de funtores $\mathrm{Hom}(\sigma_K,\ )\underset{\nu}{\overset{\mu}{\rightleftarrows}}\mathrm{Hom}_{\mathcal{L}}(L,\varepsilon_K(\ ))$ que son recíprocos (los detalles de computación siguen fácilmente).

Ya está recopilada la información necesaria para probar el siguiente

TEOREMA (3.5). <u>Si $\mathcal{C}$ es una categoría abeliana, que satis-</u>

(1) Este resultado se deduce de una conocida situación de adjunción [M, VI.4.3, p. 147]; aquí, se formula una demostración directa.

face el axioma AB5) y admite un generador, se tiene un isomorfismo de ∂-funtores

$$\mathfrak{H}^*(C,\ ) \simeq R^*\gamma_C \ .$$

Dem. El ∂-funtor $\mathfrak{H}^*(C,\ )$ es positivo y por la definición de γ_C , es evidente que $\mathfrak{H}^\circ(C,\ ) \simeq \gamma_C$. Luego, la caracterización de los funtores derivados (se recalca que γ_C es un funtor exacto a izquierda) reduce la demostración a probar que $\mathfrak{H}^*(C,\ )$ es delebLe en grados positivos, vale decir, que el complejo $\omega_C(F)$ es acíclico, para todo objeto inyectivo F de $\mathcal{F}(\mathcal{B},\mathcal{A})$.

Se emplean las notaciones introducidas en los puntos i)-v). Como $\mathcal{A}$ satisface, en particular, el axioma AB3), fijado un objeto L en $\mathcal{A}$, está definido el funtor σ, que suministra el complejo simplicial $S(Hom_{\mathcal{B}}(A,C),\sigma)$, para cada objeto A de $\mathcal{B}$. Como se tiene

$$S_n(Hom\ (A,C)) \simeq Hom_{\mathcal{B}}(A,S_n(C)) \ , \ n\geq 0 \ ,$$

resulta

$$S_n(Hom\ (A,C),\sigma) \simeq \sigma_{S_n(C)}(A) \ , \ n\geq 0 \ .$$

Por lo tanto, $S(Hom_{\mathcal{B}}(A,C),\sigma)$ induce una estructura de complejo simplicial sobre la sucesión $(\sigma_{S_n(C)}(A))_{n\geq 0}$, para todo objeto A de $\mathcal{B}$. De esta manera, la sucesión $(\sigma_{S_n(C)})_{n\geq 0}$ admite un estructura de complejo simplicial. Si K(C,L) es el complejo ordinario asociado, 3.4 suministra el isomorfismo de complejos

$$(\pounds) \quad Hom(K(C,L),F) \simeq Hom_{\mathcal{A}}(L,\omega_C(F)) \ ,$$

para todo objeto F de $\mathcal{F}(\mathcal{B},\mathcal{A})$.

Ahora bien, K(C,L) es un complejo acíclico, pues, para cada objeto A de $\mathcal{B}$, K(C,L)(A) es el complejo que se deduce del complejo simplicial $(\sigma_{S_n(C)}(A))_{n\geq 0}$, de donde

$$K(C,L)(A) \simeq K(Hom_{\mathcal{B}}(A,C))$$

y K(Hom (A,C)) es acíclico, según 3.3. Luego, si F es un inyec tivo de $\mathcal{P}(\mathcal{B},\mathcal{A})$, el complejo $\mathrm{Hom}(K(C,L),F)$ es acíclico, pues $\mathrm{Hom}(\ ,F)$ es un funtor exacto. Por lo tanto, el complejo $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(L,\omega_C(F))$ también es acíclico, para todo objeto L de $\mathcal{A}$, según la fórmula (2). De aquí sigue que $\omega_C(F)$ es un complejo acíclico, como se quería demostrar.

Ahora, se procede a analizar el efecto de un cambio de objetos, sobre el funtor de cohomología definido en este parágrafo. Se supone que D es un objeto de $\mathcal{B}$ tal que también existen los productos D^r, para todo entero $r>0$, y que está dado un morfismo $f:C\longrightarrow D$. Definiendo $S_n(f):S_n(C)\longrightarrow S_n(D)$, $n\geq 0$, como f^{n+1}, se obtiene un morfismo de complejos simpliciales de cadenas sobre $\mathcal{B}$

$$S(f):S(C)\longrightarrow S(D)\ .$$

Si $\mathcal{A}$ es una categoría cualquiera, para cada funtor $F:\mathcal{B}^{\circ}\longrightarrow\mathcal{A}$, este morfismo induce un morfismo de complejos simpliciales de cocadenas sobre $\mathcal{A}$

$$S(f,F):S(D,F)\longrightarrow S(C,F)\ .$$

Suponiendo $\mathcal{A}$ aditiva, se deduce un morfismo de complejos ordinarios de cocadenas sobre

$$\omega_f(F):\omega_D(F)\longrightarrow\omega_C(F)\ .$$

Luego, si $\mathcal{A}$ es abeliana, pasando a la cohomología se obtiene un morfismo de objetos graduados de

$$H^*(\omega_f(F)):H^*(\omega_D(F))\longrightarrow H^*(\omega_C(F))\ ,$$

y aplicando 3.1 se deduce un morfismo de ∂-funtores

$$\mathcal{H}^*(f,\ ):\mathcal{H}^*(D,\ )\longrightarrow\mathcal{H}^*(C,\ )\ .$$

La inducción de morfismos que se ha expuesto es un auténtico cambio de objetos, al nivel del funtor de cohomología, en el siguiente sentido

PROPOSICION (3.6). <u>Si $\mathcal{A}$ es una categoría abeliana y</u>

$f,g:C \longrightarrow D$ <u>son morfismos en $\mathscr{B}$, entonces</u> $\mathfrak{H}^*(f,\ ) = \mathfrak{H}^*(g,\ )$.

<u>Dem</u>. Es suficiente probar que, para todo funtor $F:\mathscr{B}^\circ \longrightarrow \mathscr{A}$, los morfismos de complejos $\omega_f(F), \omega_g(F) : \omega_D(F) \longrightarrow \omega_C(F)$ son homotópicos.

Para cada $n \geqslant 0$, $(p_{nj}:S_n(C) \longrightarrow C)_{0 \leqslant j \leqslant n}$ y $(q_{nj}:S_n(D) \longrightarrow D)_{0 \leqslant j \leqslant n}$ denotan los morfismos de proyección. Sea $h_{ni}:S_n(C) \longrightarrow S_{n+1}(D)$, $0 \leqslant i \leqslant n$, el factorizador de la familia $(v_{nj}:S_n(C) \longrightarrow D)_{0 \leqslant j \leqslant n+1}$, definida por

$$v_{nj} = \begin{cases} f\ p_{nj}\ , & 0 \leqslant j \leqslant i \\ g\ p_{n\,j-1}\ , & i < j \leqslant n+1\ . \end{cases}$$

Se verifican las fórmulas

$$(1) \qquad c_{n+1\,i}\ h_{nj} = h_{n-1\,j-1}\ c_{ni}\ , \quad i<j$$

$$(2) \qquad c_{n+1\,i}\ h_{nj} = h_{n-1\,j}\ c_{n\,i-1}\ , \quad i>j+1$$

En los casos $i=j$, $i=j+1$, se obtiene

$$(3) \qquad c_{n+1\,j}\ h_{nj} = f^j \times g^{n+1-j}$$

$$(4) \qquad c_{n+1\,j+1}\ h_{nj} = f^{j+1} \times g^{n-j}$$

de donde se deduce

$$(5) \qquad c_{n+1\,j+1}\ h_{n\,j+1} = c_{n+1\,j+1}\ h_{nj}, \quad 0 \leqslant j < n$$

$$(6) \qquad c_{n+1\,0}\ h_{n0} = g^{n+1}$$

$$(7) \qquad c_{n+1\,n+1}\ h_{nn} = f^{n+1}$$

Si, para cada $n>0$, se define $h_n:F(S_n(D)) \longrightarrow F(S_{n-1}(C))$ en la forma

$$h_n = \sum_{0 \leqslant i \leqslant n-1} (-1)^i F(h_{n-1\,i})\ ,$$

resulta

$$h_{n+1}\ d_n = \sum_{\substack{0 \leqslant i \leqslant n+1 \\ 0 \leqslant j \leqslant n}} (-1)^{i+j}\ F(c_{n+1\,i}\ h_{nj})$$

$$d_{n-1}\ h_n = \sum_{\substack{0 \leqslant i \leqslant n \\ 0 \leqslant j \leqslant n-1}} (-1)^{i+j}\ F(h_{n-1\,j}\ c_{ni})\ .$$

Ahora, considerando que puede escribirse $d_{n-1}\ h_n$ en la forma

$$d_{n-1}\ h_n = \sum_{\substack{o\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant n}} (-1)^{i+j-1}\ F(h_{n-1\ j-1}\ c_{ni}) ,$$

al efectuar $h_{n+1}\ d_n + d_{n-1}\ h_n$, los términos de $h_{n+1}\ d_n$ con índices en la situación $i<j$ se cancelan con los términos correspondientes de $d_{n-1}\ h_n$, en virtud de (1), siendo sus términos restantes

$$\sum_{\substack{o\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant n\\ i\geqslant j}} (-1)^{i+j-1}\ F(h_{n-1\ j-1}\ c_{ni}) = \sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n+1\\ o\leqslant j\leqslant n-1\\ i\geqslant j+2}} (-1)^{i+j-1}\ F(h_{n-1\ j}\ c_{n\ i-1})$$

que se cancelan con los términos de $h_{n+1}\ d_n$ correspondientes a índices en la situación $i>j+1$, de acuerdo a (2). Por lo tanto, $h_{n+1}\ d_n + d_{n-1}\ h_n$ se reduce a los términos de $h_{n+1}\ d_n$ con índices $i=j$ o $i=j+1$, vale decir,

$$h_{n+1}\ d_n + d_{n-1}\ h_n = \sum_{o\leqslant j\leqslant n} F(c_{n+1\ j} h_{nj}) - F(c_{n+1\ j+1}\ h_{nj}) .$$

Luego, aplicando (5), (6) y (7), se obtiene

$$h_{n+1}\ d_n + d_{n-1}\ h_n = F(g^{n+1}) - F(f^{n+1}) ,\ n>0 ,$$

o sea, queda definida una homotopía $h:\omega_f(F)\longrightarrow\omega_g(F)$.

La proposición anterior brinda la posibilidad de pasar al límite, bajo condiciones adecuadas, en procura de un funtor cohomológico que sólo dependa de la categoría $\mathcal{C}$. Se pasa a describir el procedimiento en cuestión.

Sea $\mathcal{I}$ la clase de objetos de $\mathcal{C}$ provista de la relación de preorden

$$C\leqslant D \iff \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(D,C)\neq\emptyset .$$

Es claro que, si $\mathcal{C}$ es una categoría con productos finitos, hipótesis que se asume de aquí en adelante, entonces el preorden $\leqslant$ es filtrante, vale decir, $\mathcal{I}$ es una clase dirigida. Fijada una categoría abeliana $\mathcal{A}$ y un entero n, si $C,D\in\mathcal{I}$ son tales que $C\leqslant D$, 3.6 suministra un morfismo canónico $h^C_D:\mathfrak{H}^n(C,\ )\longrightarrow\mathfrak{H}^n(D,\ )$.

De esta manera, se obtiene una estructura de sistema inductivo sobre la familia $(\mathfrak{H}^n(C,\ ))_{C\in\mathcal{T}}$, cuyos miembros son objetos de la categoría $\mathrm{Hom}(\mathcal{P}(\mathcal{B},\mathfrak{A}),\mathfrak{A})$. Si $\mathfrak{A}$ es una categoría completa (respecto de límites inductivos), por ejemplo, si $\mathfrak{A}$ satisface el axioma AB3) [G, 1.8.1, p. 133], entonces la categoría $\mathrm{Hom}(\mathcal{P}(\mathcal{B},\mathfrak{A}),\mathfrak{A})$ también es completa, y tiene sentido considerar $\varinjlim_{C\in\mathcal{T}}\mathfrak{H}^n(C,\ )$. En general, el paso al límite inductivo sólo preserva la exactitud a derecha; pero, si $\mathfrak{A}$ satisface el axioma AB5), $\mathrm{Hom}(\mathcal{P}(\mathcal{B},\mathfrak{A}),\mathfrak{A})$ también lo verifica [G, 1.6.1, p.131], y puede garantizarse la exactitud [G, 1.8.1, p. 133]. En consecuencia, teniendo presente 3.1, la familia $(\varinjlim_{C\in\mathcal{T}}\mathfrak{H}^n(C,\ ))_{n\in\mathbf{Z}}$ admite una estructura de funtor cohomológico, y queda demostrado el siguiente

TEOREMA (3.7). *Si $\mathcal{B}$ es una categoría con productos finitos y $\mathfrak{A}$ es una categoría abeliana que satisface el axioma AB5), existe un funtor cohomológico $\underrightarrow{\mathfrak{H}}^*$, definido sobre $\mathcal{P}(\mathcal{B},\mathfrak{A})$ a valores en $\mathfrak{A}$, tal que*

$$\underrightarrow{\mathfrak{H}}^n = \varinjlim_{C\in\mathcal{T}}\mathfrak{H}^n(C,\ ) ,$$

para todo entero n.

$\underrightarrow{\mathfrak{H}}^*$ se dice el *funtor de cohomología límite* de $\mathcal{B}$ a valores en $\mathfrak{A}$. Con adecuadas restricciones sobre la categoría de valores, la cohomología límite puede reencontrarse mediante funtores derivados, según se establece en el siguiente

TEOREMA (3.8). *Si $\mathcal{B}$ es una categoría con productos finitos y $\mathfrak{A}$ es una categoría abeliana, que satisface el axioma AB5) y admite un generador, existe un isomorfismo de ∂-funtores*

$$\underrightarrow{\mathfrak{H}}^* \simeq R^* \varinjlim_{C\in\mathcal{T}} \gamma_C .$$

Dem. Se recalca que tiene sentido derivar a derecha el funtor $\varinjlim_{C\in\mathcal{T}}\gamma_C : \mathcal{P}(\mathcal{B},\mathfrak{A}) \longrightarrow \mathfrak{A}$ (que es exacto a izquierda, [G, 1.8.1, p. 133]), en virtud de 3.2. Aplicando 3.7 y 3.5, resulta

$$\underrightarrow{\mathcal{S}}^{*} \simeq \varinjlim_{C\in\mathcal{F}} R^{*}\mathcal{X}_{C} \ ,$$

pero [G, 3.10.1, p. 181] suministra

$$\varinjlim_{C\in\mathcal{F}} R^{*}\mathcal{X}_{C} \simeq R^{*}\varinjlim_{C\in\mathcal{F}} \mathcal{X}_{C} \ .$$

Conviene observar que este procedimiento de paso al límite no aumenta la información obtenida para el caso de las cohomologías de grupos; pero clarifica la ubicación de G en la categoría de G-conjuntos. En efecto, si se toma $\mathcal{B} = \mathcal{S}_G$, $\emptyset$ es un miembro final de $\mathcal{F}$, y en consecuencia, $\varinjlim_{C\in\mathcal{F}} \mathcal{X}^{G}_{C} \simeq \mathcal{X}^{G}_{\emptyset} = 0$. Ahora bien, si $\mathcal{B}$ es la categoría que se deduce de $\mathcal{S}_G$ suprimiendo $\emptyset$, G resulta un miembro final de $\mathcal{F}$ y en el límite se obtiene el funtor $\mathcal{X}^{G}_{G}$, que ya fue considerado especialmente.

§4. CAMBIO DE GRUPOS Y DE CONJUNTOS.

En primer término, se analiza el cambio de los objetos de base siguiendo el lineamiento acostumbrado.

Sea $f:G'\longrightarrow G$ un morfismo de grupos. La restricción de operadores a través del morfismo f define un funtor $f^{+}:\mathcal{S}_{G}\longrightarrow\mathcal{S}_{G'}$ que, a su vez, induce un funtor aditivo $f^{*}:\mathcal{M}_{G}\longrightarrow\mathcal{M}_{G'}$, trivialmente exacto (observar que f^{*} coincide con el funtor definido por la restricción del anillo de escalares através del morfismo $\mathbb{Z}[f]:\mathbb{Z}[G']\longrightarrow\mathbb{Z}[G]$). f^{+} también induce, por composición, un funtor aditivo y exacto $\mathcal{F}(f):\mathcal{F}_{G'}\longrightarrow\mathcal{F}_{G}$, a saber:

$$F'\longmapsto F'\circ f^{+}.$$

Ahora, se pretende analizar el efecto del morfismo $f:G'\longrightarrow G$ sobre las tres cohomologías definidas.

i) Sea C un G-conjunto. Como es claro que $\alpha^{G}_{C}(A)\subseteq\alpha^{G'}_{f^{+}(C)}(f^{*}(A))$, para todo G-módulo A, resulta inducido un morfismo de funtores

$$H^{o}_{C,f}:H^{o}_{C}(G,\ )\longrightarrow H^{o}_{f^{+}(C)}(G',f^{*}(\ ))\ .$$

Considerando que f^{*} es un funtor exacto, $H^{*}_{f^{+}(C)}(G',f^{*}(\ ))$ es un funtor cohomológico. Luego, apelando al carácter universal de $H^{*}_{C}(G,\ )$, el morfismo de funtores $H^{o}_{C,f}$ admite una única extensión a un morfismo de ∂-funtores

$$H^{*}_{C,f}:H^{*}_{C}(G,\ )\longrightarrow H^{*}_{f^{+}(C)}(G',f^{*}(\ ))\ .$$

Por otra parte, si $g:C\longrightarrow D$ es un morfismo de G-conjuntos, se obtiene, por composición, un morfismo de grupos abelianos $\alpha^{G}_{D}(A)\longrightarrow\alpha^{G}_{C}(A)$, para todo G-módulo A. Así, resulta inducido un morfismo de funtores

$$H^{o}_{g}:H^{o}_{D}(G,\ )\longrightarrow H^{o}_{C}(G,\ )\ ,$$

que se extiende unívocamente a un morfismo de ∂-funtores

$$H^{*}_{g}:H^{*}_{D}(G,\ )\longrightarrow H^{*}_{C}(G,\ )\ ,$$

en virtud de la universalidad de $H^{*}_{D}(G,\ )$. Las dos construccio nes realizadas pueden combinarse empleando la siguiente noción. Si C' es un G'-conjunto, un morfismo de conjuntos $g:C' \longrightarrow C$ se dice compatible con f sii $g:C' \longrightarrow f^{+}(C)$ es un morfismo de G'-conjuntos. En tal caso, por composición se obtiene un morfismo de ∂-funtores

$$H^{*}_{f,g}:H_C(G,\ )\longrightarrow H^{*}_{C'}(G',\ f^{*}(\ ))\ .$$

En forma análoga, si A' es un G'-módulo, un morfismo de grupos abelianos $h:A\longrightarrow A'$ se dice compatible con f sii $h:f^{*}(A)\longrightarrow A'$ es un morfismo de G'-módulos. En tal caso, se tiene un morfismo de objetos graduados

$$H^{*}_{f,h}:H^{*}_{C'}(G',f^{*}(A))\longrightarrow H^{*}_{C'}(G',A')\ .$$

Luego, por composición con $H^{*}_{f,g}(A)$ se obtiene un morfismo de objetos graduados

$$H^{*}_{f,g,h}:H^{*}_{C}(G,A)\longrightarrow H^{*}_{C'}(G',A')\ .$$

ii) Si A es un G-módulo, es claro que $\beta_G(A)(C) \subseteq \beta_{G'}(f^{*}(A))(f^{+}(C)) = \mathcal{P}(f)(\beta_{G'}(f^{*}(A)))(C)$, para todo G-conjunto C, como ya se indicó en i). Luego, se tiene un morfismo de funtores $\beta_G(A)\longrightarrow \mathcal{P}(f)(\beta_{G'}(f^{*}(A)))$, para cada G-módulo A, que, a su vez, induce un morfismo de funtores

$$\mathcal{H}^{\circ}_{f}:\mathcal{H}^{\circ}(G,\ )\longrightarrow \mathcal{P}(f)(\mathcal{H}^{\circ}(G',f^{*}(\ )))\ .$$

Como f^{*} y $\mathcal{P}(f)$ son funtores exactos, $\mathcal{P}(f)(\mathcal{H}^{*}(G',f^{*}(\ )))$ es un funtor cohomológico y entonces, $\mathcal{H}^{\circ}_{f}$ admite una única extensión a un morfismo de ∂-funtores

$$\mathcal{H}^{*}_{f}:\mathcal{H}^{*}(G,\ )\longrightarrow \mathcal{P}(f)(\mathcal{H}^{*}(G',f^{*}(\ )))\ ,$$

pues $\mathcal{H}^{*}(G,\ )$ es un ∂-funtor universal. Observar que, para cada G-conjunto C, $\mathcal{H}^{*}_{f}(\ )(C)$ se identifica a un morfismo de ∂-funtores

$$H^{*}_{C}(G,\ )\longrightarrow H^{*}_{f^{+}(C)}(G',f^{*}(\ ))\ ,$$

en virtud de 2.2. Este morfismo resulta ser $H^{*}_{C,f}$, pues coinci den en grado cero, trivialmente. Si A' es un G'-módulo y $h:A \longrightarrow A'$ es un morfismo compatible con f, a semejanza de i) se obtiene un morfismo de objetos graduados

$$\mathcal{H}^*_{f,h} : \mathcal{H}^*(G,A) \longrightarrow \mathcal{S}(f)(\mathcal{H}^*(G',A')) .$$

iii) Dado un G-conjunto C, como el funtor f^+ preserva productos directos, resulta $\gamma^G_C(\mathcal{S}(f)(F')) = \gamma^{G'}_{f^+(C)}(F')$, para todo G'-funtor F'. Luego, $\gamma^{G'}_{f^+(C)} = \gamma^G_C \circ \mathcal{S}(f)$, y la identidad suministra un morfismo de funtores

$$\mathcal{H}^\circ_{C,f} : \mathcal{H}^\circ(f^+(C),\ ) \longrightarrow \mathcal{H}^\circ(C, \mathcal{S}(f)(\ )) .$$

Como $\mathcal{S}(f)$ es un funtor exacto, $\mathcal{H}^*(C,\mathcal{S}(f)(\ ))$ resulta un funtor cohomológico, y $\mathcal{H}^\circ_{C,f}$ admite una única extensión a un morfismo de ∂-funtores

$$\mathcal{H}^*_{C,f} : \mathcal{H}^*(f^+(C),\ ) \longrightarrow \mathcal{H}^*(C,\mathcal{S}(f)(\ )) ,$$

por la universalidad de $\mathcal{H}^*(f^+(C),\ )$. Por otra parte, si $g:C \longrightarrow D$ es un morfismo de G-conjuntos, para todo G-funtor F, los morfismos de grupos abelianos F(g) y $F(g\times g)$ inducen un morfismo canónico $\gamma^G_D(F) \longrightarrow \gamma^G_C(F)$. De esta forma, se obtiene un morfismo de funtores

$$\mathcal{H}^\circ_g : \mathcal{H}^\circ(D,\ ) \longrightarrow \mathcal{H}^\circ(C,\ ) ,$$

que se extiende unívocamente a un morfismo de ∂-funtores

$$\mathcal{H}^*_g : \mathcal{H}^*(D,\ ) \longrightarrow \mathcal{H}^*(C,\ ) ,$$

pues $\mathcal{H}^*(D,\ )$ es un ∂-funtor universal. Notar que esta construcción ha sido realizada, con mayor generalidad, en el §3. Si $h:F' \longrightarrow F$ es un morfismo <u>compatible</u> con f (en el sentido evidente), por composición con $\mathcal{H}^*_{C,f}(F')$ se obtiene un morfismo de objetos graduados

$$\mathcal{H}^*_{C,f,h} : \mathcal{H}^*(f^+(C),F') \longrightarrow \mathcal{H}^*(C,F) .$$

Además, si C' es un G'-conjunto y $g:C \longrightarrow C'$ es un morfismo compatible con f, como se tiene un morfismo de ∂-funtores

$$\mathfrak{H}^*_{f,g} : \mathfrak{H}^*(C', \ ) \longrightarrow \mathfrak{H}^*(f^+(C), \ ) \ ,$$

combinando con el caso anterior se obtiene un morfismo de objetos graduados

$$\mathfrak{H}^*_{f,g,h} : \mathfrak{H}^*(C', F') \longrightarrow \mathfrak{H}^*(C, F) \ .$$

Ahora, se procede a analizar el cambio de grupos empleando técnicas de adjunción.

Sea $f_* : \mathcal{M}_{G'} \longrightarrow \mathcal{M}_G$ el funtor aditivo dado por la composición $\varepsilon_G \circ \mathcal{P}(f) \circ \beta_{G'}$. Observando los factores, es claro que f_* es un funtor exacto a izquierda, cuya expresión explícita es

$$f_*(A') = \mathrm{Hom}_{G'}(f^+(G), A') \ .$$

Conviene recalcar que $\mathrm{Hom}_{G'}(f^+(G), A')$ aparece considerado como G-módulo, empleando la estructura derecha de G. En consecuencia, f_* no coincide con $\alpha^{G'}_{f^+(G)}$; pero el funtor cohomológico $R^* f_*$ puede ser interpretado mediante la cohomología de G' relativa $f^+(G)$, en la forma siguiente.

PROPOSICION (4.1). <u>Se tiene un isomorfismo de ∂-funtores</u>

$$R^* f_* \simeq H_{f^+(G)}(G', \ ) \ ,$$

<u>considerando el segundo miembro provisto de la G-acción canónica (vale decir, de la inducida por la estructura derecha de G).</u>

<u>Dem</u>. Considerando que $\varepsilon_G \circ \mathcal{P}(f)$ es un funtor exacto, pues cada factor lo es, una conocida regla de derivación suministra

$$R^* f_* \simeq \varepsilon_G \circ \mathcal{P}(f)(R^* \beta_{G'}) \ ;$$

pero, en virtud de 2.2, se tiene

$$\mathcal{B}^*(G', \ )(f^+(G)) \simeq H^*_{f^+(G)}(G', \ ) \ ,$$

y este isomorfismo preserva las G-estructuras de ambos miembros.

La relación esencial entre los funtores f^* y f_* la suministra el siguiente

TEOREMA (4.2). f^* <u>es adjunto a izquierda de</u> f_* .

Dem. Debe probarse que los funtores

$\mathrm{Hom}_G(\ ,f_*(\ ))$, $\mathrm{Hom}_{G'}(f^*(\ ),\ ) : \mathcal{M}_G^\circ \times \mathcal{M}_{G'} \longrightarrow \mathcal{M}$ son isomorfos. En virtud de 1.3,i), se tiene el isomorfismo de funtores

$$\alpha^{G'}_{f^+(G)} \simeq \mathrm{Hom}_{G'}(\lambda_{G'}(f^+(G)),\ ) \ .$$

Como $\lambda_{G'}(f^+(G))$ no es otra cosa que el anillo de grupo $\mathbb{Z}[G]$ considerado como G'-módulo através de $\mathbb{Z}[f]$, resulta inducido el isomorfismo de funtores

$$f_* \simeq \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[G']}(\mathbb{Z}[G],\ ) \ ,$$

donde el segundo miembro está provisto de la G-estructura ordinaria, y en consecuencia,

$$\mathrm{Hom}_G(\ ,f_*(\ )) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[G]}(\ ,\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[G']}(\mathbb{Z}[G],\ )) \ .$$

Ahora, empleando una conocida fórmula de cambio de anillos [CE, II.6, case (4), p. 29], se obtiene

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[G]}(\ ,\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[G']}(\mathbb{Z}[G],\ )) \simeq \mathrm{Hom}_{G'}(f^*(\ ),\ ) \ .$$

Considerando que f^* es un funtor exacto, es claro el siguiente

COROLARIO (4.3). El funtor f_* preserva inyectivos.

En analogía con la definición de f_*, se introduce el funtor $f_+ : \mathcal{S}_{G'} \longrightarrow \mathcal{S}_G$ por la asignación de objetos

$$C' \longmapsto \mathrm{Hom}_{G'}(f^+(G),C') \ .$$

Se recalca que $\mathrm{Hom}_{G'}(f^+(G),C')$ se considera como G-conjunto, empleando la estructura derecha de G. La analogía indicada hace esperable el siguiente resultado.

TEOREMA (4.4). f^+ es adjunto a izquierda de f_+.

Dem. Como siempre, debe probarse que los funtores

$\mathrm{Hom}_G(\ ,f_+(\ ))$, $\mathrm{Hom}_{G'}(f^+(\ ),\ ) : \mathcal{S}_G^\circ \times \mathcal{S}_{G'} \longrightarrow \mathcal{S}$ son isomorfos. Si C es un G-conjunto y C' es un G'-conjunto, se define un morfismo de conjuntos

$\beta_{C,C'} : \mathrm{Hom}_G(C,\mathrm{Hom}_{G'}(f^+(G),C')) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{G'}(f^+(C),C')$ por la fór mula

$$\xi_{C,C'}(\varphi)(x)=\varphi(x)(1)\ .$$

Como ya se ha indicado, si $x\in C$, $m_C^x:G\longrightarrow C$ es el morfismo de G-conjuntos $s\longmapsto sx$. Luego, queda definido un morfismo de conjun

$$\eta_{C,C'}:\mathrm{Hom}_{G'}(f^+(C),C')\longrightarrow \mathrm{Hom}_G(C,\mathrm{Hom}_{G'}(f^+(G),C'))$$ en la forma

$$\eta_{C,C'}(g)(x)=g\circ f\ (m_C^x)\ .$$

De esta manera, se obtienen morfismos de funtores $\mathrm{Hom}_G(\ ,f_+(\ ))\underset{\eta}{\overset{\xi}{\rightleftarrows}}\mathrm{Hom}_{G'}(f^+(\ ),\ )$ que son recíprocos, como lo muestra un cálculo sencillo.

A continuación, el cambio de grupos se trata por métodos es pectrales. El resultado básico está contenido en el siguiente

TEOREMA (4.5). Si $f:G'\longrightarrow G$ y $g:G\longrightarrow G''$ son morfismos de grupos, existe un funtor espectral de $\mathcal{M}_{G'}$ en $\mathcal{M}_{G''}$ que induce la convergencia

$$R^pg_*(R^qf_*(A'))\Longrightarrow R^n(g\circ f)_*(A')\ .$$

Dem. Basta aplicar P.7, teniendo presente que f_* transforma inyectivos en g_*-acíclicos (según 4.3), que g_* es un funtor exacto a izquierda, y que $g_*\circ f_*=(g\circ f)_*$, como lo muestra una computación usual.

Si el grupo G" se reduce a un solo elemento, $\mathcal{M}_{G''}$ se identifica con $\mathcal{M}$, y 4.1 suministra

$$R^*g_*\simeq H^*(G,\ )$$
$$R^*(g\circ f)_*\simeq H^*(G',\ )\ .$$

Luego, del teorema anterior se deduce una convergencia espectral, enunciada a continuación, que está en analogía formal con la sucesión espectral de una fibración, debida a Leray.

TEOREMA (4.6).[1] Si $f:G'\longrightarrow G$ es un morfismo de grupos, e [illegible] $\mathcal{M}_{G'}$ en $\mathcal{M}$ que induce la convergen-

[illegible]

$$[illegible])) \Longrightarrow H^{n}(G',A') \ .$$

[illegible] como caso particular, la sucesión [illegible], según se muestra en el siguien-

[illegible] subgrupo normal de G, existe un [illegible] induce la convergencia

$$\Longrightarrow H^{n}(G,A) \ ,$$

[illegible] por conjugación [2].

[illegible] el morfismo canónico, el teorema an- [illegible] de un funtor espectral de $\mathcal{M}_G$ en [illegible]

$$[illegible]) \Longrightarrow [illegible](G,A) \ ,$$

[illegible] bien, los morfismos de grupos abe- [illegible] dados por

$$[illegible] \ , \quad \eta_A(x)(u) = ux$$

[illegible] sobre [illegible]) definen morfismos de funto- [illegible], donde $\rho: N \longrightarrow G$ es el morfismo de in- [illegible], que son recíprocos. Por lo tanto,

$$[illegible] \simeq [illegible] \circ \rho^{*} \ .$$

[illegible] a derecha, un resultado clásico [CE, III.6.2, p. 49] [illegible] de ∂-funtores

$$[illegible] \ ,$$

[illegible] es Z[N]-libre. Es claro que este i- [illegible] estructuras de ambos miembros, vale

---

[2] [illegible] interesantes aplicando P.4, [illegible] y q'=1), P.5 y P.6.

[illegible] p. 126].

decir, que se tiene

$$R^{*}\pi_{*} \simeq H^{*}(N, \rho_{*}(\ )) ,$$

con G/N operando por conjugación sobre $H^{*}(N, \rho_{*}(\ ))$, y la demostración es completa.

Otro subproducto de la convergencia espectral obtenida es el teorema de Shapiro, como se indica en el siguiente

COROLARIO (4.8). <u>Si</u> S <u>es un subgrupo arbitrario de</u> G <u>y</u> $\rho : S \longrightarrow G$ <u>es el morfismo de inclusión, existe un isomorfismo de</u> <u>∂-funtores</u>

$$H^{*}(G, \rho_{*}(\ )) \simeq H^{*}(S, \ ) .$$

<u>Dem.</u> De acuerdo al teorema anterior, existe un funtor espectral de $\mathcal{M}_S$ en $\mathcal{M}$ que define la convergencia

$$H^p(G, R^q \rho_{*}(B)) \Longrightarrow H^n(S, B) ,$$

para todo S-módulo B. Claramente, ρ_{*} coincide con el funtor de coinducción M_G^S [S, VII.6, Exercise, p. 125], que es exacto. En consecuencia, $R^q\rho_{*} = 0$, para $q>0$, y así,

$$H^p(G, R^q\rho_{*}(B)) = 0 \quad , \quad q>0 .$$

Luego, P.5 suministra

$$H^n(G, \rho_{*}(B)) \simeq H^n(S, B) ,$$

de donde se deduce el isomorfismo de ∂-funtores propuesto.

§5. HOMOLOGIAS RELATIVAS.

Este parágrafo consiste, esencialmente, en la traducción homológica del §1, apelando a tradicionales argumentos de dualidad. Las demostraciones fielmente duales sólo se incluyen por razones expositorias.

Sea G un grupo. Un G-conjunto C define un funtor aditivo $\alpha_G^C : \mathcal{M}_G \longrightarrow \mathcal{M}$ por la asignación de objetos (1)

$$A \longmapsto \lambda_G(C) \otimes_G A$$

(comparar con 1.3,i)). Como $\mathcal{M}_G$ es una categoría con suficientes proyectivos, puede considerarse el funtor homológico $L_*\alpha_G^C$ (derivado izquierdo de α_G^C), que será notado $H_*^C(G,\ )$ y llamado el funtor de homología de G relativa a C.

Considerando que α_G^C es un funtor exacto a derecha, que conmuta con límites inductivos, en la forma usual se obtiene la siguiente

PROPOSICION (5.1). $H_*^C(G,\ )$ es un funtor homológico universal, caracterizado por las propiedades:

i) $H_*^C(G,\ )$ es positivo.

ii) $H_0^C(G,\ ) \simeq \alpha_G^C$.

iii) $H_*^C(G,\ )$ es anulable en grados positivos.

Además, $H_*^C(G,\ )$ conmuta con límites inductivos.

Recalcando que $\alpha_G^C = \lambda_G(C) \otimes_G (\ )$, es clara la siguiente

PROPOSICION (5.2). Se verifica:

i) $H_*^C(G,\ ) = \mathrm{Tor}_*^G(\lambda_G(C),\ )$.

ii) Si G opera libremente sobre C, el funtor α_G^C es exacto.

---

(1) Si A y B son G-módulos, para formar $B \otimes_G A$ se considera B provisto de la estructura derecha

$$xs = s^{-1} x \ .$$

Si $H_*(G,\ )$ es la homología ordinaria de G, se tiene

COROLARIO (5.3). <u>Si</u> U <u>es un conjunto unitario, provisto de su única estructura de</u> G-<u>conjunto, resulta</u> $H_*^U(G,\ ) \simeq H_*(G,\ )$.

<u>Dem.</u> Como $\lambda_G(U) \simeq \mathbb{Z}$, donde $\mathbb{Z}$ se considera provisto de la G-acción trivial, la proposición anterior suministra un isomorfismo de ∂^*-funtores

$$H_*^U(G,\ ) \simeq \mathrm{Tor}_*^G(\mathbb{Z},\ ) \ ;$$

pero es bien sabido que [S, VII.4, p. 122]

$$\mathrm{Tor}_*^G(\mathbb{Z},\ ) \simeq H_*(G,\ ) \ .$$

Observar la analogía de estos dos últimos resultados con 1.4 y 1.2, respectivamente.

Si, como ya se ha indicado, $\rho_G : \mathcal{M}_G \longrightarrow \mathcal{M}$ es el funtor de olvido, aplicando una conocida fórmula de cambio de anillos [CE, II.6, case 2, p. 29] se obtiene, en semejanza con 1.5, el siguiente

LEMA (5.4). <u>Si</u> A <u>es un</u> G-<u>módulo inducido por un grupo abeliano</u> M, <u>los funtores</u> $(\ )\otimes_G A\ ,\ \rho_G(\ )\otimes_{\mathbb{Z}} M : \mathcal{M}_G \longrightarrow \mathcal{M}$ <u>son isomorfos.</u>

Este lema permite refinar el resultado establecido en 5.1, iii) como sigue (comparar con 1.6).

PROPOSICION (5.5). <u>Si</u> A <u>es un</u> G-<u>módulo relativamente proyectivo</u>, [illegible] G.

<u>Dem.</u> Como un G-módulo relativamente proyectivo es factor directo de un G-módulo inducido, puede asumirse, sin pérdida de generalidad, que A es inducido por un grupo abeliano M. El lema anterior suministra, entonces,

$$(\ )\otimes_G A \simeq \rho_G(\ )\otimes_{\mathbb{Z}} M\ ,$$

derivando a izquierda, un resultado clásico [ver, por ejemplo, CE, III.6.2, p. 49] permite deducir un isomorfismo de ∂^*-funtores

$$\mathrm{Tor}^G_*(\ ,A) \simeq \mathrm{Tor}^{\mathbb{Z}}_*(\rho_G(\ ),M) \ .$$

Luego, según 5.2,i), se obtiene un isomorfismo de objetos graduados

$$H^C_*(G,A) \simeq \mathrm{Tor}^{\mathbb{Z}}_*(\lambda_G(C),M) \ .$$

La demostración se completa observando que $\lambda_G(C)$ es $\mathbb{Z}$-libre.

A continuación, se describen las homologías relativas al estilo de Hochschild.

Teniendo presente 5.2,i), se procede de la siguiente manera. Del complejo de cadenas en $\mathcal{M}_G$ $K(G,C)$ (se conservan las notaciones de 1.i)) se deduce, mediante el funtor $(\ )\otimes_G A : \mathcal{M}_G \longrightarrow \mathcal{M}$, un complejo de cadenas de grupos abelianos $K(G,C)\otimes_G A$. La aumentacion a de $K(G,C)$ define una aumentación $a\otimes id_A$ de $K(G,C)\otimes_G A$. Para cada entero $n\geq 0$, sea $C^C_n(G,A)$ el grupo abeliano dado por

$$C^C_0(G,A) = A^{(C)}$$

$$C^C_n(G,A) = A^{(G^n\times C)} \quad , \ n>0 \ .$$

Como los elementos de la forma $(1,s_1,\dots,s_n,x)$, con $s_i\in G$ para $1\leq i\leq n$ y $x\in C$, definen una G-base de $K_n(G,C)$, $n\geq 0$, en virtud de 1.3,ii), empleando el siguiente resultado elemental:

Sea R un anillo con unidad, sea E un R-módulo a izquierda, y sea F un R-módulo a derecha. Si $(b_i)_{i\in I}$ es una base de E, la aplicación $F^{(I)} \longrightarrow E\otimes_R F$, $x \longmapsto \sum_{i\in I} b_i\, x_i$, es un isomorfismo de grupos abelianos.

se obtiene

$$C^C_n(G,A) \simeq K_n(G,C)\otimes_G A \quad , \ n\geq 0 \ .$$

Luego, $K(G,C)\otimes_G A$ induce una estructura de complejo de cadenas sobre la sucesión $(C^C_n(G,A))_{n\geq 0}$, extendida en forma trivial a los enteros negativos, donde el operador de borde

$d_n : C_n^C(G,A) \longrightarrow C_{n-1}^C(G,A)$, $n>0$, está dado por la fórmula

$$d_n f\,(s_1,\dots,s_{n-1},x) = \sum_{t\in G} t^{-1}.f(t,\ ts_1,\dots,ts_{n-1},tx) \ +$$

$$\sum_{1\leqslant i\leqslant n-1} (-1)^i \sum_{t\in G} f(s_1,\dots,s_{i-1},t,s_i,\dots,s_{n-1},x) \ +$$

$$(-1)^n \sum_{t\in G} f(s_1,\dots,s_{n-1},t,x)$$

Este complejo será notado $C_*^C(G,A)$. La aumentación $K(G,C)\otimes_G A$ induce una aumentación $e:C_0^C(G,A)\longrightarrow C_G^C(A)$ de $C_*^C(G,A)$ suministrada por

$$e(f) = \sum_{x\in C} x\otimes f(x)\ .$$

Un elemento $f\in C_n^C(G,A)$, $n>0$, se dice una <u>cadena</u> (de dimensión n) de G a coeficientes en A, <u>relativa</u> a C.

NOTA. En el caso ordinario, hechas las identificaciones pertinentes, el complejo de cadenas $C_*(G,A)$ tiene por dimensiones

$$C_n(G,A) = \begin{cases} 0 \ , & n<0 \\ A \ , & n=0 \\ A^{(G^n)} \ , & n>0 \ , \end{cases}$$

el operador de borde $d_n : C_n(G,A) \longrightarrow C_{n-1}(G,A)$[1] está dado por la fórmula, para $n>0$,

$$d_n f\,(s_1,\dots,s_{n-1}) = \sum_{t\in G} t^{-1}.f(t,ts_1,\dots,ts_{n-1}) \ +$$

$$\sum_{1\leqslant i\leqslant n-1} (-1)^i \sum_{t\in G} f(s_1,\dots,s_{i-1},t,s_i,\dots,s_{n-1}) \ +$$

$$(-1)^n \sum_{t\in G} f(s_1,\dots,s_{n-1},t) \quad ,$$

y la aumentación $e:C_0(G,A)\longrightarrow A_G$ es el morfismo canónico. En consecuencia, si $n>0$, d_n no coincide con el operador de borde ordinario $\partial_n : C_n(G,A)\longrightarrow C_{n-1}(G,A)$, definido en la forma [S ,

(1) El operador d_n también fue hallado por H. M. O'Brien .

VII.4, p. 122]

$$\delta_n f\,(s_1,\ldots,s_{n-1}) = \sum_{t\in G} t^{-1}.f(t,s_1,\ldots,s_{n-1}) \;+$$

$$\sum_{1\leq i\leq n-1} (-1)^i \sum_{t\in G} f(s_1,\ldots,s_{i-1},s_i t,t^{-1},s_{i+1},\ldots,s_{n-1}) +$$

$$(-1)^n \sum_{t\in G} f(s_1,\ldots,s_{n-1},t) \quad .$$

Ahora bien, si φ_n y ψ_n , $n\geq 0$, son los endomorfismos de $C_n(G,A)$ definidos por

$$\varphi_n(f)(s_1,\ldots,s_n) = f(s_1,s_1 s_2,\ldots,s_1\ldots s_n)$$

$$\psi_n(f)(s_1,\ldots,s_n) = f(s_1,s_1^{-1}s_2,\ldots,s_{n-1}^{-1}s_n) \ ,$$

un cálculo fácil muestra que son recíprocos y que $\delta_n = \varphi_{n-1}\circ d_n \circ \psi_n$, para $n>0$. Por lo tanto, los complejos $(C_*(G,A),d)$ y $(C_*(G,A),\delta)$ son isomorfos.

Retomando el caso general, en presencia de P.1 y por supuesto, de 5.2,i), queda demostrado el siguiente

TEOREMA (5.6). Dado un G-conjunto C, si $\mathcal{M}_G \longrightarrow \underline{K}(\mathcal{M}^\circ)$ es el funtor $A \longmapsto C_*^C(G,A)$ y $\mathcal{h}_*^C(G,\ )$ es el funtor homológico que define, se tiene un isomorfismo de ∂^*-funtores

$$H_*^C(G,\ ) \simeq \mathcal{h}_*^C(G,\ ) \ .$$

Por último, quiere mostrarse que las homologías relativas son expresables a partir de la homología ordinaria.

Si C es un G-conjunto y A es un G-módulo, $\sigma_G(C,A)$ es el grupo abeliano $A^{(C)}$ provisto de la G-acción

$$(sf)(x) = s.f(s^{-1}x) \ ,$$

con lo cual resulta definido un funtor $\sigma_G : \mathcal{S}_G^\circ \times \mathcal{M}_G \longrightarrow \mathcal{M}_G$. Es claro que, para todo G-conjunto C, el funtor parcial $\sigma_G(C,\ )$ es aditivo, exacto y conmuta con límites inductivos. En dualidad con 1.8, se tiene el siguiente

LEMA (5.7). Si C es un G-conjunto, el funtor $\sigma_G(C,\ )$ preforma módulos inducidos y en consecuencia, módulos relativamente proyectivos.

Dem. Se recalca que, si A es un grupo abeliano, $\mathbb{Z}[G]\otimes_{\mathbb{Z}}A$ tiene una estructura de G-módulo inducida por la de $\mathbb{Z}[G]$:

$$s(x\otimes y) = sx\otimes y \ .$$

En el caso que A es un G-módulo, $\mathbb{Z}[G]\otimes_{\mathbb{Z}}A$ también admite la estructura definida por

$$s(x\otimes y) = sx\otimes sy \ ,$$

que será notada $\overline{\mathbb{Z}[G]\otimes_{\mathbb{Z}}A}$. Es un hecho bien conocido que ambas estructuras son isomorfas [CE, X.8, form. (1)-(1'), p. 199]. Si M es un grupo abeliano, el isomorfismo de grupos abelianos

$$(\mathbb{Z}[G]\otimes_{\mathbb{Z}}M)^{(C)} \longrightarrow \mathbb{Z}[G]\otimes_{\mathbb{Z}}M^{(C)}$$

resulta un G-morfismo en la situación

$$\sigma_G(C, \overline{\mathbb{Z}[G]\otimes_{\mathbb{Z}}M}) \longrightarrow \overline{\mathbb{Z}[G]\otimes_{\mathbb{Z}}M^{(C)}} \ ,$$

donde M se considera como G-módulo trivial y $M^{(C)}$, con la estructura

$$(sf)(x) = f(s^{-1}x) \ .$$

Luego, es claro que $\sigma_G(C,\ )$ preserva módulos inducidos. Como un módulo relativamente proyectivo es factor directo de un módulo inducido, la prueba es completa.

Considerando que $H_*(G,\ )$ es un funtor homológico y que $\sigma_G(C,\ )$ es un funtor exacto, $H_*(G,\sigma_G(C,\ ))$ también es un funtor homológico. Este ∂^*-funtor verifica trivialmente la condición i) de 5.1. Como $z_G\circ\sigma_G(C,\ )\simeq\alpha_G^C$, donde $z_G:\mathcal{M}_G\longrightarrow\mathcal{M}$ es el funtor de coinvariantes $A\longmapsto A_G$, también satisface la condición ii) de 5.1. Además, como $\sigma_G(C,\ )$ transforma módulos proyectivos en z_G-acíclicos (según el lema anterior), verifica 5.1, iii). Luego, semejanza de 1.9 se tiene el siguiente

TEOREMA (5.3). Se tiene un isomorfismo de ∂^*-funtores

F.C.E.y N.-B.A.

$$H^C_*(G,\ )\simeq H_*(G,\sigma_G(C,\ ))\ ,$$

para todo G-conjunto C.

Si C es un G-conjunto trivial, para todo G-módulo A se tiene $\sigma_G(C,A)\simeq A^{(C)}$, como G-módulos. En consecuencia (comparar con 1.10), es claro el siguiente

COROLARIO (5.9). Si G opera trivialmente sobre C, resulta

$$H^C_*(G,\ )\simeq H_*(G,\ )^{(C)}\ .$$

Universidad de Buenos Aires

REFERENCIAS.

[CE] H. CARTAN - S. EILENBERG. Homological algebra. Princeton Math. Ser., 19, Princeton Univ. Press, Princeton, 1956.

[G] A. GROTHENDIECK. Sur quelques points d'algèbre homologique. Tôhoku Math. J., 9 (1957), pp. 119-221.

[M] B. MITCHEL. Theory of categories. Pure Appl. Math., XVII, Academic Press, New York, 1965.

[S] J. P. SERRE. Corps Locaux. Publ. Inst. Math. Univ. Nancago, VIII, Hermann, Paris, 1962.

[W] E. WEISS. Algebraic number theory. Int. Ser. Pure Appl. Math., McGraw-Hill, New York, 1963.

---oOo---

INDICE.