

## Tesis de Posgrado

# Sobre ciclos críticos de aplicaciones diferenciables y curvatura de variedades

Controu-Carrere, Carlos Enrique

1970

Tesis presentada para obtener el grado de Doctor en Ciencias Matemáticas de la Universidad de Buenos Aires

Este documento forma parte de la colección de tesis doctorales y de maestría de la Biblioteca Central Dr. Luis Federico Leloir, disponible en [digital.bl.fcen.uba.ar](http://digital.bl.fcen.uba.ar). Su utilización debe ser acompañada por la cita bibliográfica con reconocimiento de la fuente.

This document is part of the doctoral theses collection of the Central Library Dr. Luis Federico Leloir, available in [digital.bl.fcen.uba.ar](http://digital.bl.fcen.uba.ar). It should be used accompanied by the corresponding citation acknowledging the source.

**Cita tipo APA:**

Controu-Carrere, Carlos Enrique. (1970). Sobre ciclos críticos de aplicaciones diferenciables y curvatura de variedades. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad de Buenos Aires. [http://digital.bl.fcen.uba.ar/Download/Tesis/Tesis\\_1367\\_ControuCarrere.pdf](http://digital.bl.fcen.uba.ar/Download/Tesis/Tesis_1367_ControuCarrere.pdf)

**Cita tipo Chicago:**

Controu-Carrere, Carlos Enrique. "Sobre ciclos críticos de aplicaciones diferenciables y curvatura de variedades". Tesis de Doctor. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad de Buenos Aires. 1970. [http://digital.bl.fcen.uba.ar/Download/Tesis/Tesis\\_1367\\_ControuCarrere.pdf](http://digital.bl.fcen.uba.ar/Download/Tesis/Tesis_1367_ControuCarrere.pdf)

**EXACTAS** UBA

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales



**UBA**

Universidad de Buenos Aires

Universidad de Buenos Aires

Facultad de Ciencias Exactas  
y Naturales

. / . / . / nos Aires 28 de diciembre de 1970.

Presentada en la fecha.

INTERVINO
<i>[Signature]</i>

*[Signature]*  
HUGO MONTALBETTI  
DEPARTAMENTO DE ALUMNOS  
JEFE

Buenos Aires, 28 de diciembre de 1970.

Pase al Departamento de Matemática para que se sirva con-  
siderar la Tesis presentada por el LICENCIADO D. CARLOS ENRIQUE  
CONTOU-CARRERE. -

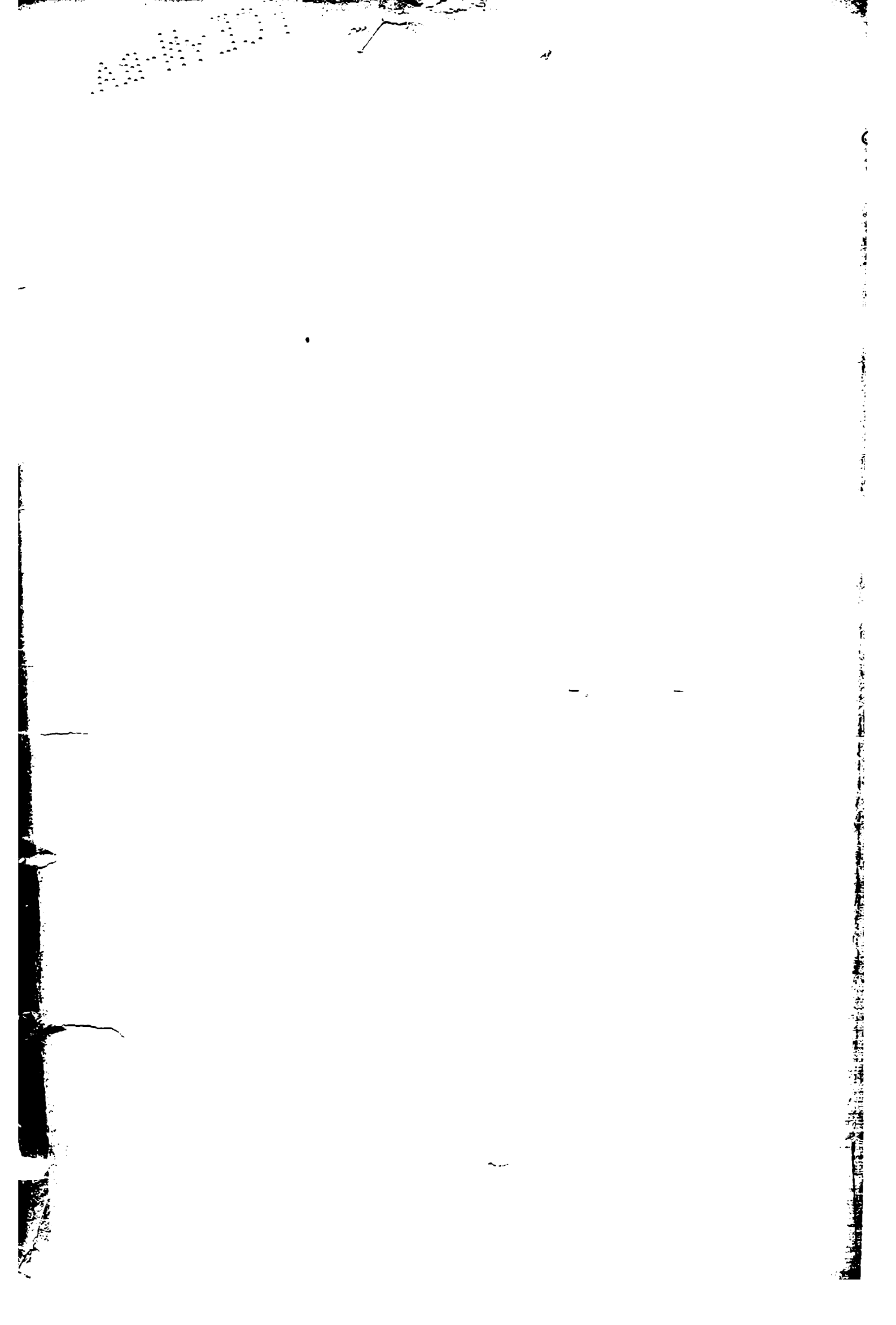
INTERVINO
<i>[Signature]</i>
<i>[Signature]</i>

*[Signature]*  
OSCAR RUIZ HUIDOBRO  
SECRETARIO ACADEMICO

Buenos Aires, 28 de diciembre de 1970.

En la fecha el Jurado designado procedió a conside-  
rar la presente Tesis, resolviendo aceptarla.

*[Signature]* *[Signature]*  
*[Signature]* *[Signature]*



UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES

FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

DEPARTAMENTO DE MATEMATICA

SOBRE CICLOS CRITICOS DE APLICACIONES DIFERENCIABLES Y CURVATURA  
DE VARIEDADES

Carlos Enrique Controu-Carrere

113 67

Tesis para optar al título de Doctor en Ciencias Matemáticas

- 1970 -

UNIVERSITY OF CALIFORNIA

LIBRARY OF THE UNIVERSITY OF CALIFORNIA

BERKELEY, CALIF.

1967

LIBRARY OF THE UNIVERSITY OF CALIFORNIA

UNIVERSITY OF CALIFORNIA LIBRARY

UNIVERSITY OF CALIFORNIA LIBRARY

## PROLOGO

Este trabajo tiene por objeto demostrar una serie de relaciones que es posible obtener entre funciones diferenciables o campos que sea posible definir, sobre una variedad y de que modo influyen sobre su curvatura.

Un ejemplo notable en este orden de ideas lo da el teorema de Gauss-Bonnet que afirma que para toda variedad  $M$  de dimensión par  $2n$  la integral de la curvatura de orden  $2n$  coincide con la característica de Euler Poincaré.

También puede ser demostrado según la teoría de Morse de índices de puntos críticos de funciones definidas sobre una variedad  $M$ . Nos ocupamos de construir un método que permita asociar a una variedad sumergida en un espacio euclídeo una curvatura (dato local) cuyo comportamiento determine condiciones topológicas de la variedad por ejemplo, clases características, relaciones expresadas mediante clases características (datos globales) Esencialmente esto es posible utilizando el comportamiento de las partes lineales de un campo de vectores de una singularidad. (CAP II).

Por ejemplo dada una variedad de dimensión 4 sumergida en  $\mathbb{R}^6$  la integral de la curvatura determina la clase de Pontryaguin En el capítulo III tratamos el problema de obtener la descripción de algunos de los ciclos excepcionales, de una aplicación diferenciable mediante las curvaturas  $K_r$

Mientras que en el capítulo IV demostramos un teorema de aproximación que es utilizado para evaluar clases características relativas de dos fibrados  $E$  y  $F$  mediante los datos locales de las singularidades de una aplicación  $v$  entre  $E$  y  $F$ .

Este resultado prueba una conjetura expuesta por R. Bott (Some remarks on the obstruction to constructing integrable distributions, pre-print) y tiene aplicaciones para establecer relaciones entre el teorema del punto fijo y el de Riemann-Roch.

#### AGRADECIMIENTOS

Al Dr Luis Santaló por su paciencia y buenas sugerencias .

Al Dr Miguel Herrera que fue quien me introdujo en los temas tratados.

C.E.C.C.

## ÍNDICE

	Pg.
<u>Introducción</u> CAP I	
(Primera parte)	
1- Derivación y diferenciación covariante	1
2- Conexiones y traslado paralelo	2
3- Grupo de holonomía	6
4- Conexiones en fibrados principales	6
5- Ecuaciones de estructura	9
6- Ecuación de estructura de una subvariedad	12
(Segunda parte)	
1- Ciclos de Schubert	15
2- Coordenadas locales en $G_{n,N}^{\sim}$	17
3- Análisis de las singularidades de un campo	17
4- Relación con singularidades de funciones	19
5- Índice de un punto crítico de un campo	21
CAP II	
1- Formas invariantes	23
2- Relación entre $dV_{r,n+N-r}$ y la forma de volumen	25
3- Descripción algebraica de $K_r$	28
4- Cálculo de $K_r$	30
6- Relación entre la curvatura $K_2$ y $\bar{P}_4$	31
7- Coordenadas locales para $\bar{\Sigma}(1)$	32
8- Curvatura $K_r$ de una subvariedad de $\mathbb{R}^{n+N}$	34
9- Índice de un punto crítico	37
10- Comparación del índice por $Z$ y $t(M)$ en $\mathbb{R}^{n+N}$ con el que se determina mediante $K_r$	40



	PG
11- Caso de una hipersuperficie en $\mathbb{R}^{n+1}$ (es decir $r=n, N=1$ )	43
12- Relación entre los gradientes de ciertas proyecciones y la curvatura $K_r$	45
13- Caso $r=1, N=n$ cuando $M$ está sumergida en un espacio de dimensión $2n$	46
14- Puntos críticos de funciones diferenciables y curvatura de una subvariedad $M$ de $\mathbb{R}^{n+1}$	48

### CAP III

15- Relaciones entre puntos críticos excepcionales de aplicaciones diferenciable y curvatura de una variedad	53
16- Sobre descripción de la subvariedad $v^{-1}(\gamma)$ , cuando $\gamma \neq$ valor crítico	
17 y 18- Definición de la curvatura $K_r$ en el cono $n > rN$	62
19- Puntos críticos excepcionales y clases de Pontryaguin	
20- Observaciones sobre la curvatura $K_r$	72
21- Clases de Pontryaguin y ciclos orientables	75

### CAP IV

22- Singularidades de aplicaciones entre fibrados	77
23- Condiciones de Schubert y las hipótesis de transversalidad	79
24- Un teorema de aproximación	88
25- El teorema fundamental	94

*INTRODUCCION: Primera parte*

*1. Derivación y diferenciación covariante, relaciones.*

DEFINICION I. Si  $M$  es una variedad diferenciable y  $F$  un fibrado vectorial sobre  $M$ , entonces  $\nabla_X$  es una aplicación  $\nabla_X: \Gamma(F) \rightarrow \Gamma(F)$  tal que para cada campo de vectores tangente a  $M$   $X$  verifica las condiciones:

- 1)  $\nabla_{fX}(S) = f \nabla_X(S)$
- 2)  $\nabla_X$  es  $\mathbb{R}$  lineal
- 3)  $\nabla_X(fS) = f \nabla_X(S) + X(f) S$

$\nabla$  se denomina una derivación covariante.

DEFINICION II. Si  $M$  es una variedad diferenciable y  $F$  es un fibrado vectorial sobre  $M$  entonces si  $D: \Gamma(F) \rightarrow \Gamma(F \otimes T^*(M))$  es tal que verifica:

- 1)  $D$  es  $\mathbb{R}$  lineal
- 2)  $D(fs) = fD(s) + df \otimes s$ .

$D$  se denomina una diferenciación covariante.

TEOREMA. Dar una derivación covariante sobre  $M$  es equivalente a dar una diferenciación covariante.

Demostración: Es suficiente demostrar el teorema localmente.

Sea  $U$  un abierto trivializador de  $T(M)$  y de  $F$  simultáneamente. Sea  $\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$  un sistema de  $n$  campos definidos en  $M$  tales que  $X_{1p}, X_{2p}, \dots, X_{np}$  sean linealmente independientes para todo  $p$  en  $U$ . Y tomamos  $\phi_1, \dots, \phi_n$  un sistema de vectores de  $T^*(M)$  tales que  $\phi_{1p}, \dots, \phi_{np}$  resulte una base dual de  $X_{1p}, \dots, X_{np}$   $p \in U$ . De

finimos  $D(s) = \sum_{i=1}^n \nabla_{X_i}(s) \otimes \phi_i$  en  $U$ . Análogamente si tenemos

$D$  definido sobre  $M$  se define  $\nabla_{X_i}(s) = D_i(s)$  donde  $D_i(s)$  esta determinado univocamente por la ecuación :

$$D(s) = \sum_{i=1}^n D_i(s) \otimes \phi_i .$$

*Q.E.D.*

Para determinar la diferenciación covariante basta conocer la siguiente matriz de  $n \times n$  formas , si

$$D(s_i) = \sum_{j=1}^n \omega_{ij} s_j \quad ; \quad \|\omega_{ij}\|$$

Donde  $s_1, \dots, s_n$  son  $n$  secciones linealmente independientes en todo punto de  $U$ . ( Como ejemplo de las formas  $\omega_{ij}$  consideramos una variedad  $M$  cualquiera y  $F = T(M)$  si  $\nabla$  es una derivación covariante sobre  $M$  ,

$$\nabla_{X_i}(X_j) = \Gamma_{ij}^k X_k \quad \text{si} \quad \{X_i\} \quad i=1, \dots, n$$

es un sistema de vectores que trivializa  $T(M)/U$  , como

$$D(X_j) = \sum_{i=1}^n \nabla_{X_i}(X_j) \otimes \phi_i = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n \Gamma_{ij}^k X_k \otimes \phi_i$$

resulta

$$\omega_{jK} = \sum_{i=1}^n \Gamma_{ij}^k \cdot \phi_i$$

NOTA. Cuando se da una diferenciación o una derivación covariante sobre  $M$  se dice que  $M$  admite una conexión.

## 2. Conexiones y traslado paralelo:

Si  $F$  es un fibrado sobre  $M$  es posible considerar el fibrado principal asociado  $P(M)$  . Mediante  $P(M)$  es posible dar una interpretación geométrica de la *conexión* definida sobre  $M$ .

Si consideramos una carta trivializadora de  $P(M)$  ,  $\psi: P(M)/U \rightarrow$

→  $U \times GL(n, \mathbb{R})$ . Para el espacio tangente en un punto  $(x, \|x_{ij}\|)$  se puede considerar la siguiente base  $\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_m}, \frac{\partial}{\partial x_{11}}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_{nn}}$ . Donde  $(x_1, \dots, x_n)$  es un sistema de coordenadas locales. Por otra parte si sobre  $M$  se ha dado un vector  $a_1 X_1 + \dots + a_n X_n$  y una curva  $\gamma(t)$ , es posible considerar el sistema de  $n$  ecuaciones lineales siguientes:

$$\frac{da_k(\gamma(t))}{dt} + \sum_{i,j=1}^n \Gamma_{ij}^k a_i(\gamma(t)) \gamma_j'(t) = 0, \quad k=1, \dots, n$$

$$\frac{d\gamma(t)}{dt} = \sum_{j=1}^n \gamma_j'(t) X_j.$$

Este sistema tiene sentido en el dominio de definición de  $\{X_1, \dots, X_n\}$ . Existe solución para cada valor inicial  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$  y esas soluciones dependen linealmente de  $a_1, \dots, a_n$ .

Una carta trivializadora de  $P(M)/U$  viene dada por un conjunto de  $n$ -vectores  $X_1, \dots, X_n$  que resulten linealmente independientes en cada punto de  $U$ . Los elementos de  $P(M)$  son pares  $(p, \gamma)$  donde  $p \in U$  y  $\gamma$  es una base de  $T_p$ .

La base  $\gamma$  está constituida de  $n$ -vectores  $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$  linealmente independientes que se pueden escribir así respecto de  $X_{1p}, \dots, X_{np}$ ;  $Y_i = \sum_{k=1}^n Y_{ik} X_{kp}$  donde la matriz  $\|Y_{ik}\|$  de  $n \times n$ , pertenece a cierto grupo estructural  $G$  (= grupo de  $P(M)$ ).

Para cada punto  $(p, \gamma)$  de  $P(M)$  es posible definir una aplicación  $\gamma: T_p \rightarrow T(p, \gamma)$ . Para definirla utilizaremos las ecuaciones anteriores. En  $P(M)/U$  obtenemos coordenadas locales mediante  $X_1, \dots, X_n$  y un sistema de coordenadas locales para  $U$  en  $M$

así:  $(p, \gamma) \longrightarrow (x, \|Y_{ik}\|)$

( En general  $Y_{ik}$  no constituye un sistema de coordenadas locales para  $G$  )

A  $X_1, \dots, X_n$  le corresponde un sistema dual  $dX_1, \dots, dX_n$  en  $U$ . Consideremos los simbolos de la conexi3n  $\Gamma_{ihj}^k$  calculados respecto de  $X_1, \dots, X_n$ . Supongamos que  $\varphi$  sea una curva en  $U$  tal que  $\varphi(0) = p$  y

$$\frac{d\varphi(t)}{dt} \Big|_{t=0} = \sum_{j=1}^n \varphi_j' X_j$$

Luego si planteamos las ecuaciones anteriores obtenemos:

$$\frac{dY_{ik}(\varphi(t))}{dt} + \sum_{h,j=1}^n \Gamma_{hj}^k Y_{ih} \varphi_j' = 0 \quad h, i, j, k = 1, \dots, n$$

La soluci3n de este sistema se puede expresar como  $(\varphi(t), \gamma(t))$ . Es decir, se determina una secci3n sobre  $\varphi(t)$  de  $P(M)$ .

Para evitar la menci3n expl3cita de  $t$ , podemos considerar el sistema de formas

$$dY_{ik} + \sum_{h,j=1}^n \Gamma_{hj}^k Y_{ih} dX_j = 0$$

Podemos suponer que  $P(M)$  tiene grupo estructural  $SO(n)$ , en ese caso  $\|Y_{ik}\|^{-1} = \|Y_{ik}\|^t$  por lo tanto las  $n \times n$ -formas

$$\sum_{k=1}^n Y_{k\ell} \left( dY_{ik} + \sum_{h,j=1}^n \Gamma_{hj}^k Y_{ih} dx_j \right) = 0$$

constituyen las formas  $\|\omega_{ij}\|$  de la conexi3n. El vector tangente a la curva  $(\varphi(t), \gamma(t))$  en  $t=0$  lo denominamos  $\gamma(X)$ ,  $X = d\varphi/dt$ . Finalmente  $\theta: T_p \rightarrow T(p, \gamma)$  se define como la derivada en 0 de  $(\varphi(t), \gamma(t))$ .

#### La conexi3n can3nica que admite una variedad de Riemann:

Si  $M$  es una variedad con un producto de Riemann entonces es posible definir una conexi3n sobre  $T(M)$  del siguiente modo. Sea  $\langle \rangle$  el producto definido sobre  $M$ , entonces vale la siguiente proposici3n.

PROPOSICION. Sobre  $M$  es posible definir una derivación covariante tal que verifique, si  $X, Y, Z$  son campos de vectores tangentes a  $M$  ;

$$1) X \langle Y, Z \rangle = \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_X Z \rangle$$

$$2) \nabla_X(Y) - \nabla_Y(X) - [X, Y] = 0$$

Demostración: Consideramos las igualdades siguientes

$$X \langle Y, Z \rangle = \langle \nabla_X(Y), Z \rangle + \langle Y, \nabla_X(Z) \rangle$$

$$Z \langle Y, X \rangle = \langle \nabla_Z(Y), X \rangle + \langle Y, \nabla_Z(X) \rangle$$

$$Y \langle Z, X \rangle = \langle \nabla_Y(Z), X \rangle + \langle Z, \nabla_Y(X) \rangle$$

y a partir de ellas obtenemos la siguiente relación aplicando la propiedad 2)  $X \langle Y, Z \rangle - Z \langle Y, X \rangle + Y \langle Z, X \rangle = 2 \langle \nabla_X(Y), Z \rangle + \langle Y, [X, Z] \rangle + \langle X, [Y, Z] \rangle - \langle Z, [X, Y] \rangle$  de esta igualdad queda determinada  $\nabla_X(Y)$ .

*Q.E.D.*

De la unicidad de la conexión definida en la proposición anterior resulta que la conexión inducida sobre  $T(M)$  a través de  $t:M \rightarrow \bar{G}_{n,N}$  coincide con esta como veremos luego.

Denotamos por  $F^n(T)$  el fibrado de las  $n$ -uplas de vectores tangentes a  $M$  y ortonormales, es decir el fibrado principal asociado al fibrado tangente a  $M$ . Es útil en  $F^n(T)$  definir  $n$ -formas  $(\omega_1, \dots, \omega_n)$  o una forma con valores en  $\mathbb{R}^n$ , tales que se anulen sobre los vectores verticales de  $F^n(T)$ .

Se define  $\omega_i$  mediante la fórmula siguiente: si  $X$  es un vector tangente a  $F^n(T)$  en  $(e_1^0, \dots, e_n^0)$  entonces  $\omega_i(X) = \langle \pi_*(X), e_i^0 \rangle$  donde  $\pi$  indica la proyección de  $F^n(T)$  sobre  $M$ ;  $\pi:F^n(T) \rightarrow M$ .

### 3. Grupo de Holonomía de una variedad

Sea  $P(M)$  un fibrado principal sobre  $M$  que admite una conexión  $\omega$  a valores en el álgebra de Lie de  $G$ .

Si  $p \in M$  y  $\gamma(t)$  es una curva cerrada por  $p$  es posible considerar sobre  $\pi^{-1}(p)$  el traslado paralelo de cualquier elemento de  $\pi^{-1}(p)$  a lo largo de  $\gamma(t)$  el cual determina una acción de la fibra en la fibra que resulta ser un elemento  $g$  de  $G$ . De esta manera se obtiene un cierto subgrupo  $G' \subset G$ , denominado grupo de *holonomía* asociado a la conexión.

TEOREMA I. El grupo estructural de  $P(M)$  se puede reducir al grupo de holonomía.

Ver demostración en Nomizu [1].

La componente de la identidad del grupo de holonomía corresponde al relevamiento de curvas homotópicas a 0. Por lo tanto el cociente de  $G'$  por la componente de la identidad da el grupo de homotopía de  $M$ .

Del hecho de que  $P(M)$  se pueda reducir a  $G'$  (grupo de holonomía) se deduce que si  $\omega$  es la matriz de la conexión,  $\omega$  toma valores en el álgebra de holonomía.

Nos interesa el caso en que el grupo de holonomía  $G'$  de  $P(M)$  este generado por las  $r$  transformaciones infinitesimales

$$X_{\alpha} = \sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{\alpha ij} \left( x_i \frac{\partial}{\partial x_j} - x_j \frac{\partial}{\partial x_i} \right)$$

Se trata entonces de un subgrupo  $G'$  del grupo ortogonal.

Es conveniente considerar entonces conexiones sobre fibrados principales.

### 4. Conexiones en fibrados principales.

Sea  $M$  una variedad diferenciable y  $F$  un fibrado con grupo es-

estructural  $G$  y  $P$  el fibrado principal asociado.

Supondremos en general que  $G = GL(n, \mathbb{R})$ ,  $GL(n, \mathbb{C})$  o bien  $O(n)$  o  $U(n)$ . Sea  $M = \cup U_\alpha$  con  $U_\alpha$  abiertos trivializadores de  $F$ , para cada abierto  $U_\alpha$  se tiene una aplicación  $\psi_\alpha$  :

$$\psi_\alpha: P/U_\alpha \longrightarrow U_\alpha \times G$$

donde  $\psi_\alpha$  es un isomorfismo de fibrados.

Introducir una conexión en  $P$  significa dar una familia  $\omega_\alpha$  de formas  $C^\infty$ , definidas sobre  $U_\alpha$  respectivamente a valores en  $\mathfrak{g}$  (Algebra de Lie de  $G$ ), tales que cumplen sobre  $U_\alpha \cap U_\beta$  la condición  $dA \cdot A^{-1} + A\omega_\alpha A^{-1} = \omega_\beta$  donde  $A = \psi_\beta^{-1} \cdot \psi_\alpha$ ,  $\psi_\beta^{-1} \cdot \psi_\alpha: U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow G$  por hipótesis ( $\psi_\alpha$  y  $\psi_\beta$  son isomorfismos de fibrados). La igualdad anterior se puede escribir también así :

$$dA \cdot A^{-1} + \text{adj}A \omega_\alpha = \omega_\beta$$

En el caso en que  $G = GL(n, \mathbb{R})$  o  $GL(n, \mathbb{C})$  dar  $\psi_\alpha$  es equivalente a definir sobre  $U_\alpha$ , secciones  $\{s_1, \dots, s_n\}$  tales que  $s_1(x), \dots, s_n(x)$  sean independientes. Entonces la condición anterior se puede enunciar como :

$$S' = A \cdot S \quad dA \cdot A^{-1} + A\omega A^{-1} = \omega'$$

DEFINICION I. Se denomina forma de curvatura  $\Omega$  a la forma definida en  $P$  de la siguiente manera: si  $\omega$  es la forma que define la conexión en  $P$  evaluada en un punto, es  $\Omega = d\omega - \omega \wedge \omega$ . Esta forma de curvatura  $\Omega$  verifica la siguiente propiedad.

TEOREMA I.  $\Omega(S \cdot A) = \text{adj}A^{-1} \Omega$

Demostración: ver Nomizu [1].

El siguiente teorema permite definir una conexión sobre un fibrado vectorial que admita una métrica de Riemann, si es orientable.



TEOREMA II. En  $SO(n+N) / SO(n) \times SO(N) \approx \tilde{G}_{n,N}$  los subespacios orientados de dimensión  $n$  de  $\mathbb{R}^{n+N}$ , existe una conexión canónica del fibrado que viene dado por la matriz de  $n \times n$  1-formas definidas en  $SO(n+N) / SO(N)$  a valores en el álgebra de Lie de las matrices antisimétricas.

Demostración: Para definir una conexión  $\omega$  en  $\tilde{G}_{n,N}$  es suficiente definir una conexión en el fibrado asociado principal  $SO(n+N) / SO(N)$ . Para definir  $\omega$  en  $(e_1^0, \dots, e_n^0)$ : sea  $(e_1(t), \dots, e_n(t))$  una sección del fibrado a lo largo de  $\gamma(t)$ , tal que  $(e_1(0), \dots, e_n(0)) = (e_1^0, \dots, e_n^0)$ .

Sabemos que sobre  $\mathbb{R}^{n+N}$  está definida una forma bilineal canónica y la proyección ortogonal sobre un subespacio está bien definida. Entonces definimos  $\omega$  sobre el vector  $\frac{d}{dt}(e_1(t), \dots, e_n(t)) = v$  mediante la fórmula  $p\left(\frac{d}{dt} e_i(t) \Big|_{t=0}\right) = \sum_j \omega_{ij}(v) e_j^0$  donde  $p$  es la proyección ortogonal sobre el subespacio de  $\mathbb{R}^{n+N}$  generado por  $(e_1^0, \dots, e_n^0)$ . Clásicamente la igualdad anterior se indica así:

$$de_i = \sum_{j=1}^n \omega_{ij} e_j$$

El hecho de que  $\omega$  sea a valores en las matrices antisimétricas resulta de que la proyección ortogonal de  $e_i(t)$  sobre  $\gamma$  resulta dar vectores ortogonales sobre  $\gamma_0$ .

Queda sólo por verificar que si  $(e_1', \dots, e_n') = (e_1, \dots, e_n) \cdot A$  con  $A$  la matriz de cambio entre la sección  $e'$  y  $e$  de  $SO(n+N)/SO(N)$  entonces se verifica  $dA \cdot A^{-1} + \text{adj}A \cdot \omega = \omega'$  siempre que  $\omega$  y  $\omega'$  sean las formas de la conexión definidas a lo largo de  $e$  y  $e'$  respectivamente. Pero esto resulta de una sustitución simple en la ecuación que define  $\omega'$ .

Q.E.D.

COROLARIO. Cualquier fibrado orientado admite una conexión.

Demostración: Basta usar el teorema de clasificación de fibrados

( ver Husemoller [1] ), y el resultado anterior

Recordando que si  $\xi$  y  $\eta$  son fibrados tales que  $\xi = f^*(\eta)$  entonces  $\xi$  admite una conexión  $f^*(\omega)$ , si  $\omega$  es una conexión de  $\eta$ .

### 5. Ecuaciones de estructura de una variedad $M$ de $\mathbb{R}^{n+N}$

con  $\dim M = n$

( Salvo indicación en contrario supondremos que  $M$  esta inmergida en  $\mathbb{R}^{n+N}$  ).

Si  $i: M \rightarrow \mathbb{R}^{n+N}$  es una inmersión de  $M$  en  $\mathbb{R}^{n+N}$  entonces  $i$  induce sobre  $M$  un producto de Riemann que proviene del de  $\mathbb{R}^{n+N}$  por  $i^*$ . El fibrado tangente a  $M$  lo denotamos por  $T(M)$  y el fibrado normal por  $\nu(M)$ . Entonces obtenemos la siguiente relación:

$$T(M) \oplus \nu(M) \simeq i^*(\mathbb{R}^{n+N}) \simeq M \times \mathbb{R}^{n+N}$$

Para cualquier subvariedad de una variedad dada es posible definir el fibrado normal. Además mediante  $i$  es posible definir una aplicación  $T: M \rightarrow \tilde{G}_{n,N}$  ( suponemos que  $M$  esta orientada ) que se define así  $T(i(x)) =$  plano tangente a  $M$  en  $i(x)$ . Si  $\xi_n$  es el fibrado canónico sobre  $\tilde{G}_{n,N}$ , entonces  $T^*(\xi_n) \simeq T(M)$ , es decir,  $T$  es una aplicación clasificante para el fibrado  $T(M)$ . Tenemos así el siguiente diagrama.

$$\begin{array}{ccc} T(M) & \longrightarrow & \xi_n \\ \downarrow & & \downarrow \\ M & \xrightarrow{T} & \tilde{G}_{n,N} \end{array}$$

La 1-forma  $(\omega_1, \dots, \omega_n)$  se suele indicar siguiendo la terminología clásica, de la forma

$$dx = \omega_1 x_1 + \omega_2 x_2 + \dots + \omega_n x_n$$

Sobre  $F^n(T)$  actúa el grupo  $SO(n)$  a la derecha, si  $e' = e.A$  entonces  $\omega' = \omega.A^{-1}$ . Las formas  $\omega$  definen una  $SO(n)$ -estructura sobre  $M$ .

DEFINICION. Un fibrado  $F$  se dice reducible a  $G$  si existe un fibrado  $F'$  con grupo estructural  $G$  y una aplicación  $i:F' \rightarrow F$  que resulta ser un isomorfismo de fibrados.

DEFINICION II.  $M$  se dice que admite una  $G$ -estructura si su fibrado tangente  $T(M)$  es reducible a  $G$ .

Si  $M$  admite una  $G$ -estructura entonces existe un cubrimiento abierto  $\{U_\alpha\}$  de  $M$  tal que sobre cada  $U_\alpha$  hay una 1-forma  $\theta_\alpha$  definida a valores en  $\mathbb{R}^n$  de manera que  $\theta_\beta = \theta_\alpha.A$ , en  $U_\alpha \cap U_\beta$  con  $A \in G$  para cada  $x \in U_\alpha \cap U_\beta$ .

Por ejemplo si  $M$  admite una  $SO(n_1) \times SO(n_2)$ -estructura con  $n_1 + n_2 = n$ , entonces es posible factorizar  $T:M \rightarrow \tilde{G}_{n,N}$  así:

$$\begin{array}{ccc}
 SO(n+N) / SO(n_1) \times SO(n_2) \times SO(N) & \longrightarrow & SO(n+N) / SO(n) \times SO(N) \approx \tilde{G}_{n,N} \\
 & \searrow & \downarrow T' \\
 & & M
 \end{array}$$

El siguiente resultado será útil luego :

PROPOSICION I. Las formas  $\{\omega_i, \omega_{ij}\}_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n; i < j}}$  son independientes

y definen por lo tanto una escisión del fibrado tangente a  $F^n(T)$ .

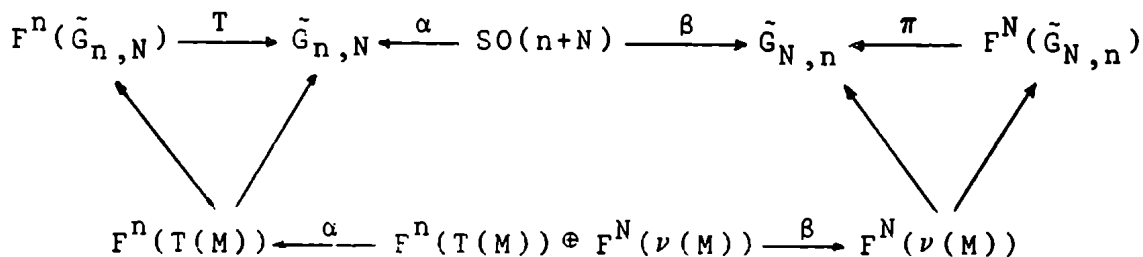
Demostración: Las formas  $\omega_i$  son independientes y las  $\omega_{ij}$  también

y

$$\left( \bigcup_{i=1}^n \text{Ker } \omega_i \right) \cap \left( \bigcup_{\substack{i < j \\ 1 \leq i, j \leq n}} \text{Ker } \omega_{ij} \right) = 0$$

Q.E.D.

Como  $i^*(T(\mathbb{R}^{n+N})) \approx T(M) \oplus \nu(M)$ , tenemos el siguiente diagrama conmutativo:



donde las aplicaciones  $\alpha$  y  $\beta$  se definen así:

$$\alpha(e_1, \dots, e_n, \dots, e_{n+N}) = (e_1, \dots, e_n)$$

$$\beta(e_1, \dots, e_n, \dots, e_{n+N}) = (e_{n+1}, \dots, e_{n+N})$$

análogamente se definen  $\alpha'$  y  $\beta'$ .

Este diagrama es conmutativo y nos permite considerar las siguientes relaciones entre las formas  $\tilde{\omega}$  restringidas a  $F^n(T(M)) \oplus F^N(\nu(M))$ , donde las formas  $\tilde{\omega}$  son las invariantes a izquierda que están definidas sobre  $SO(n+N)$  a valores en el álgebra de Lie de  $SO(n+N)$ . Obtenemos así las relaciones:

$$de_i = \sum_{j=1}^n \omega_{ij} e_j + \sum_{s=n+1}^{n+N} \omega_{is} e_s$$

$$i = 1, \dots, n$$

$$de_s = \sum_{j=1}^n \omega_{sj} e_j + \sum_{t=n+1}^{n+N} \omega_{st} e_t$$

$$s = n+1, \dots, n+N$$

$$\tilde{\omega} = \|\omega_{ij}\| \quad i, j = 1, \dots, n, n+1, \dots, n+N.$$

Como las formas  $\tilde{\omega}$  verifican las ecuaciones de estructura de Maurer-Cartan;  $d\tilde{\omega} - \tilde{\omega} \wedge \tilde{\omega} = 0$  ( $\tilde{\omega}$  es una matriz de formas que define una conexión sobre  $SO(n+N)$  de curvatura nula) se obtiene el siguiente resultado:

II. Si  $\Omega$  es la matriz de curvatura de la conexión inducida por la de  $\tilde{G}_{n,N}$  resulta que  $\Omega_{ij} = \sum_{s=n+1}^{n+N} \omega_{is} \wedge \omega_{sj}$ ;  $i, j = 1 \dots n$ .

Demostración: En  $d\tilde{\omega} - \tilde{\omega} \wedge \tilde{\omega} = 0$ , el término  $(i,j)$  de esa matriz de formas consiste de:

$$d\omega_{ij} - \sum_{h=1}^n \omega_{ih} \wedge \omega_{hj} - \sum_{s=n+1}^{n+N} \omega_{is} \wedge \omega_{sj} = 0 \quad 1 \leq i, j \leq n$$

$$\Omega_{ij} = \sum_{s=n+1}^{n+N} \omega_{is} \wedge \omega_{sj} \quad i, j = 1, \dots, n$$

*Q.E.D.*

La misma proposición anterior vale en el caso más general de una subvariedad  $S$  de una variedad  $M$ .

PROPOSICION III. Si  $S$  es una subvariedad de  $M$  entonces en  $P(T(M)) \oplus P(\nu(M))$  valen las igualdades

$$\Omega_{ij} = \sum_{s=n+1}^{N+n} \omega_{is} \wedge \omega_{sj} + \tilde{\Omega}_{ij}$$

donde  $\|\tilde{\Omega}_{ij}\|$  es la matriz de formas de curvatura de  $M$ . Pero las formas  $\omega_{ij}$  que aparecen se calculan usando la conexión de  $M$  dada por la proposición anterior.

### 6. Ecuación de estructura de una subvariedad $S$ de una variedad $M$ de Riemann.

Si  $M$  es una variedad de Riemann orientable y  $F^n(T(M))$  el fibrado de las bases ortonormales de  $T(M)$ , podemos suponer que su grupo estructural es  $SO(n)$ .

En  $P(M) = F^n(T(M))$  podemos definir una 1-forma  $(\omega_1, \dots, \omega_n)$  a valores en  $\mathbb{R}^n$  como vimos antes.

Ahora nos interesa considerar  $s^*[(\omega_1, \dots, \omega_n)]$ , donde  $s$  es una sección de  $F^n(T(M))$  definida sobre un abierto  $U$  de  $M$ . Por abuso de lenguaje denominamos a  $s^*(\omega_i)$  por  $\omega_i$ .

PROPOSICION I. 
$$d\omega_i = \sum_{h=1}^n \omega_h \wedge \omega_{hi}$$

Demostración: Sean  $X$  e  $Y$  dos campos de vectores

$$X = \sum_{i=1}^n x_i e_i \quad Y = \sum_{i=1}^n y_i e_i$$

donde  $e_1, \dots, e_n$  son los vectores que determinan la sección  $s$ .

Entonces:

$$\begin{aligned} d\omega_i(X, Y) &= X \langle Y, e_i \rangle - Y \langle X, e_i \rangle - \langle [X, Y], e_i \rangle = \\ &= \langle Y, \nabla_X e_i \rangle - \langle X, \nabla_Y e_i \rangle \end{aligned}$$

puesto que  $\nabla_X(Y) - \nabla_Y(X) - [X, Y] = 0$

$$\begin{aligned} d\omega_i(X, Y) &= \sum_{h,j=1}^n y_h x_j [\langle e_h, \nabla_{e_j} e_i \rangle - \langle e_j, \nabla_{e_h} e_i \rangle] \\ d\omega_i &= \sum_{h=1}^n \omega_h \wedge \omega_{hi} \end{aligned}$$

*Q.E.D.*

PROPOSICION II. Si  $S$  es una subvariedad de  $M$  de dimensión  $n$  y  $\dim M = n+N$  entonces :

$$\omega_{is} = \sum_{j=1}^n A_{sij} \omega_j$$

con  $A_{sij}$  únicos y perfectamente determinados, además  $A_{sij} = A_{sji}$

Demostración: Consideremos  $i: S \rightarrow M$  la inclusión de  $S$  en  $M$  e  $i^*(F^{n+N}(T(M))) \simeq F^n(T(S)) \oplus F^N(\nu(S))$ . Es obvio que  $i^*(\omega_{n+1}) = \dots = i^*(\omega_{n+N}) = 0$  por lo tanto  $i^*d\omega_s = i^* \sum_{h=1}^n \omega_h \wedge \omega_{hs} = 0$ ,  $s = n+1, \dots, n+N$ . Es decir  $\sum_{h=1}^n \omega_h \wedge \omega_{hs} = 0$  sobre  $S$  resultará por un lema de Cartan sobre formas diferenciales (ver Sternberg [1], Cap. I) que :

$$\omega_{is} = \sum_{j=1}^n A_{sij} \omega_j, \quad i = 1, \dots, n; s = n+1, \dots, n+N$$

con  $A_{sij} = A_{sji}$  y únicos.

*Q.E.D.*

Utilizando la definición de  $A_{sij}$  y la unicidad obtenemos que

en  $i^*(F^{n+N}(T(M))) \simeq F^n(T(S)) \oplus F^N(\nu(S))$  se verifica la siguiente relación, si  $e'_i = \sum_{h=1}^n a_{ih} e_h$ ,  $e'_t = \sum_{s=n+1}^{n+N} a_{ts} e_s$  entonces

$$A'_{sij} = \sum_{t=n+1}^{n+N} \sum_{\alpha, \beta=1}^n A_{t\alpha\beta} a_{ts} a_{i\alpha} a_{j\beta}$$

A partir de la ecuación de estructura de S se deduce que esta 2ª forma está relacionada con la curvatura de la subvariedad S mediante la relación

$$\Omega_{ij} - \tilde{\Omega}_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{k, m=1}^n \sum_{s=n+1}^{n+N} (A_{sik} A_{sjm} - A_{sim} A_{sjk}) \omega_k \wedge \omega_m$$

Aunque luego no las utilicemos incluimos las ecuaciones de Bianchi de una variedad M :  $d\Omega = [\omega, \Omega]$ , que se demuestran mediante un calculo directo.

■

INTRODUCCION: Segunda parte

1. Ciclos de Schubert de  $\tilde{G}_{n,N}$ ,  
propiedades.

Muchas de las propiedades topológicas de una variedad se obtienen a partir de la aplicación tangente  $T:M \rightarrow \tilde{G}_{n,N}$  con  $N$  suficientemente grande, es decir una aplicación clasificante de su fibra do tangente. Por eso es interesante determinar la cohomología de  $\tilde{G}_{n,N}$  o bien su homología. Resulta que mediante ciertos ciclos bien definidos es posible obtener una descripción de los grupos de homología.

DEFINICION I: Si  $V_1 \subset V_2 \subset \dots \subset V_n$  es una cadena de subespacios en  $\mathbb{R}^{n+N}$  tales que  $\dim V_i = i + \omega(i)$ , entonces denotamos por  $Z$  al conjunto  $Z = \{\gamma / \gamma \in \tilde{G}_{n,N}, \dim(\gamma \cap V_i) \geq i\}$ ,  $Z_\omega$  se denomina el ciclo de Schubert de símbolo  $\omega$ .

NOTA: Usualmente  $\omega$  se suele denotar por

$$[\omega(1), \omega(2), \dots, \omega(n)]$$

Es posible demostrar que  $Z_\omega$  es un ciclo orientable si se restringe a  $\omega$  a verificar ciertas condiciones, luego un ciclo sobre los enteros (de la homología entera). Sin embargo  $Z_\omega$  es siempre un  $Z_\omega$ -ciclo. Para ver esto con más detalle, consultar Pontryagin [1]

Notemos que la función verifica  $\omega(1) \leq \omega(2) \leq \dots \leq \omega(n)$ .

Algunos de estos puntos serán de incremento, eso es, verifican;  $\omega(i+1) \neq \omega(i)$ . Si indicamos por  $i_1, i_2, \dots, i_{h-1}$  los puntos de incremento y ponemos  $i_h = n$ , podemos sustituir la condición anterior



por la siguiente; si en vez de  $V_1 \subset \dots \subset V_n$  y las correspondientes condiciones consideramos  $V_{i_1} \subset \dots \subset V_{i_h}$ ,  $\dim(V_{i_j} \cap \gamma) \geq i_j$   $j = 1, \dots, h$ .

El ciclo  $Z_\omega$  tiene dimensión  $\sum_{i=1}^n \omega(i)$ , por lo tanto determina por dualidad de Poincaré un cociclo de dimensión  $nN - \sum_{i=1}^n \omega(i)$

Consideramos las siguientes diferencias  $\alpha_j = i_j - i_{j-1}$   $j=1, 2, \dots, n$  ponemos  $i_0 = 0$  y  $\beta_j = \omega(i_j) - \omega(i_{j-1})$   $j=1, \dots, n-1$ ,  $\beta_n = N - \omega(k)$ .

Mediante los  $\alpha$  y los  $\beta$  es posible describir las propiedades de orientabilidad de estos ciclos, pues los ciclos que satisfacen las ecuaciones  $\alpha_1 + \beta_1 \equiv \dots \equiv \alpha_{n-1} + \beta_{n-1} \equiv 0 \pmod{2}$  y  $\alpha_1 > 0$  son los únicos orientables ( para más detalles consultar Pontrjaguin [1] ).

A nosotros nos interesan los ciclos orientables que no son de torsión, es decir aquellos que no se anulan al pasar a la cohomología racional.

Podemos suponer que los subespacios  $V_1 \subset \dots \subset V_n$  que describen el ciclo de Schubert vienen dados por las siguientes ecuaciones :

$$V_i = \{ x_\beta = 0 \ ; \ i + \omega(i) \leq \beta \leq n+N \}$$

Supongamos que  $\pi$  sea un subespacio de dimensión  $n$  perteneciente a  $Z_\omega$  y que esté generado por los vectores fila  $\|a_{ij}\|_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n+N}}$

Dado que  $\dim(\pi \cap V_i) \geq i$ , resulta que esa matriz debe verificar la condición siguiente:  $\text{rango} \|a_{i\beta}\| \leq n-i$ ,  $1 \leq i \leq n$ ,  $i + 1 + \omega(i) \leq \beta \leq n+N$ .

## 2. Coordenadas locales de $\tilde{G}_{n,N}$

Dado un subespacio  $\gamma$  de  $\mathbb{R}^{n+N}$  de dimensión  $n$ , podemos encontrar una base de  $\mathbb{R}^{n+N}$  dada por  $e_1, \dots, e_n, e_{n+1}, \dots, e_{n+N}$  de modo que  $e_{n+1}, \dots, e_{n+N}$  sea una base del complemento ortogonal de  $\gamma$  y los  $n$  primeros vectores una base de  $\gamma$ .

Entonces consideramos el abierto  $U_\gamma$  formado por todos los subespacios de  $\mathbb{R}^{n+N}$  tales que se proyectan ortogonalmente sobre  $\gamma$ , preservando la orientación y la dimensión.

Dado un subespacio tal  $\gamma' \in U_\gamma$  queda determinada una base  $e'_1, \dots, e'_n$  que se expresa así :

$$e'_i = e_i + \sum_{s=n+1}^{n+N} \zeta_{is} e_s, \quad i=1, \dots, n.$$

La matriz  $\|\zeta_{is}\|$  de  $n \times N$  resulta ser un sistema de coordenadas sobre  $U_\gamma$ , más aún este abierto  $U_\gamma$  se puede identificar al espacio tangente en  $\gamma$ , de manera natural.

## 3. Análisis de las singularidades de un campo de vectores.

Supongamos que  $u_1(x), \dots, u_m(x)$  sean  $m$  vectores definidos sobre un simple de dimensión  $r$ ,  $E^r$  con valores en un espacio de dimensión  $n$ ,  $\mathbb{R}^n$ .

Para introducir el concepto de *índice* de una singularidad de  $u_1(x), \dots, u_m(x)$  conviene definir la noción de subordinación de  $u_1(x), \dots, u_m(x)$  a una función  $\sigma$  en un punto  $x$ .

Sea  $\sigma$  una función definida sobre el intervalo  $[1, n-1]$  con valores enteros y no decreciente.

**DEFINICION.**  $u_1(x), \dots, u_m(x)$  se dice subordinado a  $\sigma$  si  $m \leq n-1 + \sigma(n-1)$  y si para cada valor  $h=1, \dots, n-1$  el sistema de  $u_1, \dots,$

,  $u_{h+\sigma(h)}$  tiene rango  $h$ . Se dice que  $h=1, \dots, n$  es punto de salto si  $\sigma(h) < \sigma(h-1)$ .

Supondremos que los vectores  $u_1, \dots, u_m$  toman valores en una familia de subespacios  $n$ -dimensionales de  $\mathbb{R}^{n+N}$  que están contenidos en un mismo subespacio de  $\mathbb{R}^{n+N}$ ,  $\mathbb{R}^{n+N-m}$ . También supondremos que existe un único punto  $x$  interior, de  $E^r$ , donde la sucesión  $u_1(x), \dots, u_m(x)$  está subordinada a  $\sigma$ .

Elegimos una base de  $\mathbb{R}^{n+N}$ ,  $g_1, g_2, \dots, g_{n+N}$ , de modo que  $g_1, g_2, \dots, g_{n+N-m}$  sea una base de  $\mathbb{R}^{n+N-m}$ .

Sea  $e_1(x), \dots, e_n(x)$  un conjunto de funciones con valores en  $\mathbb{R}^{n+N-m}$ , tal que  $e_1(x), \dots, e_n(x)$  genere el subespacio  $n$ -dimensional que le corresponde a  $x$ .

Definimos ahora una aplicación  $\theta: E^r \rightarrow \tilde{G}_{n,N}$  así, si

$$e_i^*(x) = e_i(x) + \sum_{j=1}^m e_j(x), u_j(x) g_{n+N-j+1}$$

con  $i=1, \dots, n$ , entonces  $\theta(x)$  será un subespacio orientado de  $\mathbb{R}^{n+N}$  de dimensión  $n$ .

Si  $u_1, u_2, \dots, u_m$  está subordinado a  $\sigma$  en un punto del subespacio  $\theta(x)$  puede generarse mediante un tipo particular de vectores respecto de la base  $g_1, \dots, g_{n+N}$ .

Los vectores  $u_1, u_2, \dots, u_m$  determinan una matriz de  $n \times m$ ,  $\| \langle e_i, u_j \rangle \|$  donde  $\langle e_i, u_j \rangle$  indica el producto escalar en el espacio correspondiente al punto  $x$ .

Del hecho que  $u_1, u_2, \dots, u_m$  esté subordinado a  $\sigma$  se deduce que las siguientes submatrices;  $\| \langle e_\alpha, u_\beta \rangle \|$ , tienen rango  $\leq i$  donde  $1 \leq \alpha \leq n$ ,  $1 \leq \beta \leq i + \sigma(i)$ .

Por lo tanto los vectores  $e_1^*(x), \dots, e_n^*(x)$  generan un subespacio de dimensión  $n$  que pertenece al ciclo de Schubert  $Z_\omega$ , donde  $\omega(i) = N - \sigma(n-i)$ . Esta condición se obtiene rápidamente así: sabemos que la matriz de  $n \times (i + \sigma(i))$  de las últimas  $i + \sigma(i)$  coorde

nadas de los vectores  $e_1^*(x), \dots, e_n^*(x)$  tiene rango  $i$ , por lo tanto buscamos una función  $\omega(1), \dots, \omega(n)$ , tal que verifique:

$$N + n - (n - i) - \omega(n-i) = i + \sigma(i) \Rightarrow N - \omega(n-i) = \sigma(i)$$

También se verifica la propiedad recíproca, es decir,  $x$  será un punto subordinado a la función  $x$  si  $e_1^*(x), \dots, e_n^*(x)$  generan un subespacio que pertenece al ciclo  $Z_\omega$ .

Ahora podemos enunciar el siguiente teorema :

TEOREMA. Los vectores  $u_1(x), \dots, u_m(x)$  estarán subordinados a  $\sigma$  en  $x \Leftrightarrow \theta(x) \in Z_\omega$  donde  $\theta$  se define como vimos antes.

#### 4. Relación con las singularidades de funciones diferenciables.

En general consideramos funciones  $f: M \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $m \leq n = \dim M$ , un punto crítico de  $f$ , es un punto  $x$  donde  $\text{rango } df_x < m$ , denotaremos por  $r$  al número,  $r = m - \text{rango } df_x = \text{co-rango de } f$  en  $x$ . Para escribir las singularidades de  $f$ , suponemos que  $M$  está sumergida en  $\mathbb{R}^{n+N}$ , entonces el  $G(f)$  define una sumersión\* en  $\mathbb{R}^{n+N+m}$ ,  $x \rightarrow (x, f(x))$ .

Los puntos  $x$  donde  $f$  tiene rango  $h$ , o bien lo que es lo mismo los que verifican  $r = m - h$ , se caracterizan así:

PROPOSICION. I. Un punto  $x$  será de rango  $h$  o bien de co-rango  $m-h = r$  si y solamente si el plano tangente a  $G(f)$  en  $x$  corta el subespacio  $y = 0$  (  $y$  representa la últimas  $m$  coordenadas ) en un subespacio de dimensión  $n - h = n - m + r$ .

Demostración: Es trivial.

Consideramos en  $\tilde{G}_{n, N+m}$ , el ciclo de Schubert de todos los subespacios de dimensión  $n$ , que cortan  $y = 0$  según un subespacio

(\*) En realidad para lo que nos interesa a nosotros podemos reemplazar sumersión por inmersión.

de dimensión  $\geq n-h = n-m+r$ . Se puede demostrar siguiendo una regla que veremos más adelante que, este ciclo de Schubert tiene por símbolo ( o bien que los valores de la función  $\omega$  que lo define )

$$[N+m-r, \dots, N+m-r, N+m, \dots, N+m]$$

n-m+r veces          m-r veces

Los puntos  $x$  no singulares donde el plano tangente intersecta a este ciclo constituyen los puntos críticos donde  $f$  tiene tango estrictamente  $n-m+r$

Denominamos  $S_r$  al conjunto donde co-rango  $f \geq r$ . Si la función  $f$  es tal que ese conjunto  $S_r$  resulte triangulable entonces determina un cociclo por dualidad de Poincaré con valores en  $\mathbb{Z}_2$  o  $\mathbb{Z}$  según que sea o no orientable.

Para estudiar cuales de los  $S_r$  son orientables y sin torsión, caracterizamos aquellos ciclos de Schubert del tipo

$$[N+m-r, \dots, N+m-r, N+m, \dots, N+m]$$

que son sin torsión.

Las propiedades de orientabilidad de un ciclo de Schubert como éste vienen caracterizadas por los siguientes pares de números:

$$\alpha_1 = n-m+r \quad \alpha_2 = m-r \quad \beta_1 = r \quad \beta_2 = 0$$

Resulta que el ciclo de arriba es orientable si  $\alpha_1 + \beta_1 \equiv \alpha_2 + \beta_2 \equiv 0 \pmod{2}$  es decir si  $m-n \equiv m-r \equiv 0 \pmod{2}$ , es decir si n, m y r tienen la misma paridad, a su vez este ciclo sera sin torsión si  $\alpha_1$  y  $\beta_1$  son pares, es decir si n, m y r son todos pares.

Obtenemos así el resultado que mas nos interesa:

TEOREMA I. Si n, m y r son pares resulta que el ciclo  $S_r$  es orientable y sin torsión ( Ver Pontrjaguin [1] ).

Este resultado será útil cuando debamos emplear formas diferenciales que caractericen a los  $S_r$ .

La información topológica que se consigue sobre  $S_r$  se basa sobre el mismo orden de ideas del número anterior.

### 5. Índice de un punto crítico de un campo de vectores tangentes a $M$

Si sobre  $M$  tenemos definido un campo de vectores  $u_1, u_2, \dots, u_m$ , en general el rango de este campo de vectores disminuye en algunos puntos de  $M$ .

Supongamos que  $M$  esté triangulada y sea un punto interior de un simple  $E^r$ , de dimensión  $r$ , tal que  $u_1, u_2, \dots, u_m$  este subordinado a  $\sigma$  en solo ese punto de  $E^r$ . Consideramos entonces una inmersión de  $M$  en un espacio  $\mathbb{R}^{n+N}$  y si  $N$  es suficientemente grande podemos considerar la construcción de la función  $\theta$ . Acá  $\theta(x)$  es el subespacio generado por  $e_1^*(x), \dots, e_n^*(x)$  donde  $e_1^*(x) = e_1(x) + \sum_{j=1}^m \langle e_1(x), u_j \rangle g_{n+N-j+1}$  donde  $e_1(x), \dots, e_n(x)$  resulta ser una base del espacio tangente a  $M$  y  $\langle \rangle$  es la métrica de Riemann definida inicialmente.

Esta construcción es lineal en los vectores  $e_i$  por lo tanto el subespacio generado  $\theta(x)$  no depende mas que del espacio tangente a  $M$  y de los vectores  $u_1, \dots, u_m$  en el punto  $x$ .

Sabemos que  $\theta(x) \in Z_\omega$ , donde  $Z_\omega$  es el ciclo de Schubert que asociamos a  $\sigma \Leftrightarrow x$  es un punto en el que  $u_1, \dots, u_m$  está subordinado a  $\sigma$ . Si  $Z_\omega$  es orientable definimos entonces índice de  $\theta(x)$  en  $a$  como el índice de la intersección del ciclo  $\theta(M)$  y  $Z_\omega$  en  $a$ .

Para estudiar la estructura de las singularidades de una función diferenciable construímos antes la aplicación tangente al grafico. Pero resulta que, como veremos mas adelante,

esa construcción corresponde a tomar los gradientes de cada uno de los  
los correspondientes de  $f$  y construir . Esta observación puede ser  
ser útil cuando se quieren estudiar las relaciones entre los ciclos  
críticos de una función y los ciclos característicos.

■

## CAPITULO II

### 1. Formas Invariantes

Como  $SO(n+N)$  es un grupo de Lie podemos definir entonces una forma invariante a izquierda con valores en el álgebra de Lie de  $SO(n+N)$ . Esta forma se define así: si  $X_A$  es un vector tangente a  $SO(n+N)$  en  $A$ ,  $\omega_A(X_A) = L_{A^{-1}}(X_A)$ , donde  $L_{A^{-1}}$  denota el diferencial de la aplicación  $B \rightarrow A^{-1}B$ . Esta forma verifica la siguiente propiedad  $L_B^* \omega_{BA} = \omega_A$  ( $L_A^*$  es la aplicación traspuesta de  $L_A$ ), pues:

$$L_B^* \omega_{BA}(X_A) = \omega_{BA}(L_B X_A) = L_{A^{-1}} L_{B^{-1}} L_B X_A = \omega_A(X_A)$$

A esta forma se la indica usualmente por  $dA \cdot A^{-1}$  o bien utilizando la notación matricial  $\omega = \|\omega_{ij}\|$  donde  $\omega_{ij} = \sum_{h=1}^n a_{ih} da_{jh}$ . La forma verifica también  $R_A^* \omega_A = \text{adj.} A \cdot \omega_{id}$  ya que

$$R_A^* \omega_A(X) = R_A^* \cdot L_{A^{-1}}^* \omega_{id}(X_{id}) = \omega(\text{adj.} A X)$$

Si  $G$  es un grupo de Lie y  $H$  es un subgrupo cerrado, podemos considerar  $G/H$ , sobre este espacio actúa  $G$  a izquierda e interesa considerar las formas diferenciales invariantes a izquierda respecto de esa acción o sea que verifican

$$L_A^* (\omega_{AB}) = \omega_B, \text{ para todo } A \in G.$$

Supongamos que  $\omega$  sea una forma tal con valores en un espacio vectorial  $E$  cualquiera que verifique  $L_A^* (\omega_{AB}) = \omega_B$ , entonces si  $\pi: G \rightarrow G/H$  es la proyección,  $\pi^*(\omega)$  verificará: (1) es invariante a izquierda (2) es invariante a derecha por los elementos



de  $H$ . Por lo tanto  $R_B^*(\omega_B) = \text{adj.} B = \omega_{id}$  lo cual es equivalente a que sea invariante por la acción de  $\text{adj.} B$ ,  $B \in H$ .

Recíprocamente una forma tal que verifique (1) y (2), está necesariamente en la imagen de  $\pi^*$ .

Consideremos en  $SO(n+N)$  la matriz  $\|\omega_{ij}\|$  de formas, y tomemos la submatriz de  $nN$  formas siguientes  $\|\omega_{ij}\|$   $1 \leq i \leq n$ ,  $n+1 \leq j \leq n+N$  y mediante éstas construimos la forma  $dV_{n,N} = (\omega_{1,n+1} \wedge \dots \wedge \omega_{1,n+N}) \wedge \dots \wedge (\omega_{n,n+1} \wedge \dots \wedge \omega_{n,n+N})$ . Esta verifica la propiedad de ser invariante a izquierda, luego proviene de una forma  $dV_{n,N}$  de  $\tilde{G}_{n,N}$ . Esta forma se puede definir más directamente tomando

$$de_i = \sum_{j=1}^n \omega_{ij} e_j + \sum_{s=n+1}^{n+N} \omega_{is} e_s$$

ya sabemos como interpretar las formas  $\omega_{ij}$  mediante  $\omega_{is}$  escribimos  $\wedge \omega_{is} = dV_{n,N}$ , donde  $(i,s)$  están ordenados lexicográficamente como las formas  $\omega_{is}$  son duales del sistema de coordenadas que se puede definir en  $\gamma$ . Ver capítulo I.

El abierto  $U$  que da las coordenadas consiste de todos los subespacios de dimensión  $r$  orientados tales que la proyección sobre  $\gamma$  sea un epimorfismo si  $e_i'$  es una base de un tal  $\gamma'$ , donde

$$e_i' = \sum_{j=1}^n a_{ij} e_j + \sum_{s=n+1}^{n+N} b_{is} e_s \quad \text{y consideramos la base}$$

$$e_i'' = \sum_{j=1}^n v_{ij} e_j + \sum_{s=n+1}^{n+N} \zeta_{is} e_s \quad \text{que se obtiene normalizando}$$

la anterior. Entonces tenemos definidas en  $U$  las coordenadas  $\zeta_{is}$

$$1 \leq i \leq n, \quad n+1 \leq s \leq n+N.$$

## 2. Relación entre la forma $dV_{r,n+N-r}$ y

la fórmula de volumen de  $M$ .

Supongamos que  $M$  sea una subvariedad de  $\mathbb{R}^{n+N}$ , tal que  $\dim M = rN$ . Si consideramos el fibrado  $\tilde{G}_r(M)$ , de los  $r$ -subespacios orientados de  $M$ ,  $\dim \tilde{G}_r(M) = n+r(n-r) = r(n+N-r) = \dim \tilde{G}_{r,n+N-r}$ .

En  $\tilde{G}_r(M)$  podemos considerar dos formas bien definidas,  $dV$  y  $dV_{r,n-r}$ . Consideremos el fibrado  $F^n(T(M))$ , en ese fibrado tenemos definidas las formas  $\{\omega_i\}_{1 \leq i \leq n}$  y  $\{\omega_{ij}\}_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n}$  como vimos antes.

Mediante las  $\omega_i$  definimos  $dV = \omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_n$ , que resulta ser  $\mathbb{R}$ -invariante por la acción de  $SO(n)$  sobre  $F^n(T(M))$  y por lo tanto proviene de una forma de  $M$  (la de volumen)

Las formas  $\{\omega_{ij}\}_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n}$  permiten definir la siguiente así  $dV_{r,n-r} = \omega_{i_1 j_1} \wedge \dots \wedge \omega_{i_r j_r}$ ;  $1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n$  (en orden lexicográfico).

Esta forma  $dV_{r,n-r}$  es invariante por la acción de  $SO(r) \times SO(n-r)$  y por lo tanto define una forma en  $\tilde{G}_r(M)$ . Entonces así definimos dos formas  $dV$  y  $dV_{r,n-r}$ , sobre el fibrado  $\tilde{G}_r(M)$ . Por otra parte tenemos la aplicación  $v: \tilde{G}_r(M) \rightarrow \tilde{G}_{r,n+N-r}$  así definida, si  $\gamma$  es un subespacio tangente a  $M$ ,  $v(\gamma)$  es el subespacio paralelo a  $\gamma$  que pasa por el origen de  $\mathbb{R}^{n+N}$ .

Notamos que  $v$  es una aplicación entre dos variedades de igual dimensión puesto que  $r(n+N-r) = r(n-r) + n$ . Por otra parte interesa calcular el determinante *Jacobiano* respecto de los elementos de volumen respectivos. Introducimos entonces la siguiente:

Definición de  $K_r(\gamma)$ : Si  $\gamma \in \tilde{G}_r(M)$ , la curvatura  $K_r(\gamma)$  está determinada por la relación:

$$v^*(dV_{r,n+N-r}) = K_r(\gamma) dV \wedge dV_{r,n-r} .$$

es decir coincide con el determinante jacobiano de  $v$  calculado respecto de los elementos de volumen de  $\tilde{G}_r(M)$  y  $\tilde{G}_{r,n+N-r}$ .

$$\text{Obviamente } v^*(dV_{r,n+N-r}) = K_r(\gamma) dV \wedge dV_{r,n-r}$$

Para poder calcular  $K_r(\gamma)$  debemos recordar los factores de  $dV_{r,n+N-r}$  y utilizar las ecuaciones de estructura de la subvariedad  $M$ .

Consideramos ahora  $dV'_{r,n+N-r} = (\wedge_{1 \leq i \leq r} \omega_{is}) \wedge (\wedge_{n+1 \leq s \leq n+N} \omega_{ij})$  esta forma esta relacionada con  $dV_{r,n+N-r}$  mediante la ecuación

$$dV_{r,n+N-r} = (-1)^{1/2 N(n-r)r(r+1)} dV'_{r,n+N-r}$$

Recordemos ahora la forma  $\wedge_{1 \leq i \leq r} \omega_{is}$ ,  $n+1 \leq s \leq n+N$  cambiando el orden lexicografico .

LEMA 1.

$$\wedge_{\substack{1 \leq i \leq r \\ n+1 \leq s \leq n+N}} \omega_{is} = (-1)^{1/2 r-N(N-1)(r-1)} \wedge_{1 \leq i \leq r} \omega_{is}$$

Utilizando el orden lexicografico en el segundo subindice.

Demostración : Consideremos la igualdad

$$\begin{aligned} & (\omega_{1,n+1} \wedge \omega_{1,n+2} \wedge \dots \wedge \omega_{1,n+h}) \wedge \omega_{2,n+1} = \\ & = (-1)^{(N-1)} (\omega_{1,n+1} \wedge \omega_{2,n+1} \wedge \omega_{1,n+2} \wedge \dots \wedge \omega_{1,n+N}) \end{aligned}$$

ahora consideramos

$$\begin{aligned} & (\omega_{1,n+2} \wedge \dots \wedge \omega_{1,n+N}) \wedge (\omega_{2,n+2} \wedge \dots \wedge \omega_{2,n+N}) \wedge \omega_{3,n+1} = \\ & = (-1)^{2(N-1)} \omega_{3,n+1} \wedge (\omega_{1,n+2} \wedge \dots) \wedge (\omega_{2,n+2} \wedge \dots \wedge \omega_{2,n+N}). \end{aligned}$$

Repetimos el procedimiento  $r$  veces y obtenemos

$$(-1)^{(1+\dots+(r-1))(N-1)} (\omega_{1,n+1} \wedge \omega_{2,n+1} \dots \wedge \omega_{r,n+1}) \wedge (\dots)$$

El resto cumple la misma condición que la de partida y resulta análogamente:

$$\Lambda \omega_{is} = (-1)^{\frac{(r-1)r}{2} \frac{(N-1)N}{2}} (\omega_{1,n+1} \wedge \omega_{2,n+1} \dots \wedge \omega_{r,n+1}) \wedge (\omega_{1,n+2} \wedge \dots)$$

$$n+1 \leq s \leq n+N$$

$$1 \leq i \leq r$$

Y así queda demostrado el lema .

Q-E-D.

Así llegamos a la igualdad:

$$dV_{r,n+N-r} = (-1)^{\frac{N(n-r)r(r+1)}{2} \frac{(r-1)r(N-1)N}{2 \times 2}} (\Lambda \omega_{i,s}) \wedge (\omega_{ij})$$

$$1 \leq i \leq r \quad 1 \leq i \leq r$$

$$n+1 \leq s \leq n+N \quad n-r \leq j \leq n$$

La primera se calcula siguiendo el orden lexicológico en el 2º subíndice y  $\Lambda \omega_{ij}$  en el primero.

Para calcular  $v^*(dV_{r,n+N-r})$  basta calcular

$$v^*(\omega_{1,n+1} \wedge \omega_{2,n+1} \dots \wedge \omega_{r,n+1})$$

Para eso recordemos que según la ecuación de estructura de una subvariedad tenemos  $\omega_{is} = \sum A_{sij} \omega_j$  con  $A_{sij} = A_{sji}$  y que

$\sum_{s=1+n}^{n+N} \sum_{i,j=1}^n A_{sij} \omega_i \omega_j$  es una forma bilineal definida sobre M que sólo depende de la inmersión de M en  $\mathbb{R}^{n+N}$ .

$$v^*(\omega_{1,n+1} \wedge \dots \wedge \omega_{r,n+1}) = \left( \sum_{j=1}^n A_{n+1ij} \omega_j \right) \wedge \dots \left( \sum_{j=1}^n A_{n+1rj} \omega_j \right) =$$

$$i = \sum_{i_1 < \dots < i_r} D_{i_1 \dots i_r} \omega_{i_1} \wedge \dots \wedge \omega_{i_r}$$

Donde  $D_{i_1 \dots i_r}$  es el subdeterminante de  $r \times r$  que se obtiene de

$$\text{la matriz } \left\| A_{n+1ij} \right\| \quad \begin{matrix} 1 \leq i \leq r \\ 1 \leq j \leq n \end{matrix} \quad \text{considerando las columnas } i_1,$$

$i_2, \dots, i_r$ . Por lo tanto si reemplazamos en el producto y supo

$n^n$  vemos que  $\gamma$  está generado por  $e_1, \dots, e_r$  resulta que, teniendo en cuenta que:

$$N(n-r)r(r+1)(r-1)r(N-1)N = N^2 r^3 (r^2-1)(N^2-1) = n^2 r (r^2-1)(N^2-1)$$

y calculando

$$w_{wv}^*(\omega_{1n+1} \dots) \wedge (\omega_{1,n+2} \dots \omega_{r,n+2}) (\omega_{1n+N} \wedge \dots \wedge \omega_{r,n+N})$$

obtenemos la siguiente expresión para la curvatura  $K_r$ :

$$\varepsilon_{r,N} K_r(\gamma) = \sum \delta_{i_1 \dots j_1 \dots m_r}^{1 \dots n} D_{i_1} \dots D_{i_r} D_{j_1} \dots D_{j_r} D_{m_1} \dots D_{m_r}$$

$$i_1 < \dots < i_r \quad 1 \leq i, h \leq n$$

$$m_1 < \dots < m_r \quad 1 \leq m, h \leq n$$

donde

$$\varepsilon_{r,N} = \frac{n^2 r (r^2-1)(N^2-1)}{n = rN}, \text{ y } \delta_{i_1 \dots i_n}^{1 \dots n} = \det \|\delta_{iiv}\|$$

### 3. Descripción algebraica de $K_n(\gamma)$

Supongamos que  $\mathbb{E}$  sea un espacio vectorial euclídeo orientado y  $\Phi$  una forma bilineal en  $\mathbb{E}$ . Sabemos por álgebra elemental que  $\Phi$  determina en  $\mathbb{E}$  una transformación autoadjunta  $\Phi$  para la cual existe una base ortogonal de  $\mathbb{E}$  respecto de la que  $\Phi$  es diagonal.

Si  $V_1, \dots, V_n$  es una base ortogonal y  $\omega_1, \dots, \omega_n$  su dual,

$\Phi(V_i, V_j) = A_{ij}$  y  $\Phi$  se escribe respecto de  $\omega_1, \dots, \omega_n$ , como

$\sum A_{ij} \omega_i \omega_j$ . La matriz de la transformación autoadjunta resulta ser  $\|\| A_{ij} \|\|$  calculada respecto de esa base.

Sabemos también que  $\Phi$  induce en  $\bigwedge^r \mathbb{E}$  una transformación au-

toad junta que denominamos  $\Phi^r$  y que resulta estar asociada a la forma bilineal que también induce sobre  $\Lambda^r \mathbb{E}$ . Si  $\lambda_1 \dots \lambda_n$  es un orden de los autovalores de  $\Phi$ , tenemos que  $\{\lambda_{i_1} \dots \lambda_{i_r}\}$  resultan ser los autovalores de  $\Phi^r$ .

Además si  $v_1, \dots, v_n$  es la base ortogonal de  $\mathbb{E}$  de antes  $\{v_{i_1} \wedge \dots \wedge v_{i_r}\}$  resulta ser una base ortogonal de  $\Lambda^r \mathbb{E}$  (respecto del producto inducido en  $\Lambda^r \mathbb{E}$  por el  $\langle, \rangle$  de  $\mathbb{E}$ ) y

$$\Phi^r (v_1 \wedge \dots \wedge v_r) = \sum_{i_1 < \dots < i_r} D_{i_1 \dots i_r} v_{i_1} \wedge \dots \wedge v_{i_r}$$

donde  $D_{i_1 \dots i_r}$  es el subdeterminante de la matriz  $\|A_{ij}\|$   $1 < i < r$   $1 < j < n$  que se obtiene considerando las columnas  $i_1, i_2, \dots, i_r$

También tenemos trivialmente que si  $n = rN$  entonces existe una aplicación  $\Gamma: \bigoplus^N (\Lambda^r \mathbb{E}) \longrightarrow \Lambda^n \mathbb{E}$  así definida:

$$\Gamma(\gamma_1 \otimes \dots \otimes \gamma_N) = \gamma_1 \wedge \gamma_2 \wedge \dots \wedge \gamma_N$$

Por otra parte como  $\mathbb{E}$  es euclídeo y orientado  $\Lambda^{rN} \mathbb{E} \approx \mathbb{R}$  mediante un isomorfismo bien determinado (pues  $\Lambda^n \mathbb{E}$  admite una base canónica).

Por lo tanto, si  $\Phi_1, \dots, \Phi_N$  son  $N$  formas bilineales o bien  $N$  transformaciones autoadjuntas de  $\mathbb{E}$ , le podemos asignar una forma multilinear sobre  $\Lambda^r \mathbb{E}$  que se define así:

$$\Gamma \circ (\Phi_1^r \otimes \Phi_2^r \otimes \dots \otimes \Phi_N^r): \bigoplus^N (\Lambda^r \mathbb{E}) \longrightarrow \mathbb{R}$$

Supongamos ahora que  $v_i^s = i$ -ésimo vector de una base ortogonal de autovectores de  $\Phi_s$   $s = 1 \dots N$ ,  $i = 1 \dots n$

Entonces si escribimos :

$$\begin{aligned} \gamma_{i_1}^1 \dots \gamma_{i_r}^1 &= v_{i_1}^1 \wedge \dots \wedge v_{i_r}^1, \gamma_{j_1}^2 \dots \gamma_{j_r}^2 = v_{j_1}^2 \wedge \dots \wedge v_{j_r}^2 \dots \gamma_{m_1}^s \dots \gamma_{m_r}^s = \\ &= v_{m_1}^s \wedge \dots \wedge v_{m_r}^s \end{aligned}$$

Tenemos que:  $\{ \gamma_i \otimes \gamma_j \dots \otimes \gamma_m \}$   $i = i_1 \dots i_r$  con  $i_1 < \dots < i_r$   
 $j = j_1 \dots j_r$  con  $j_1 < \dots < j_r$ , resulta ser una base de  $\otimes^N_r(\Lambda \mathbb{E})$ ,  
 ortogonal respecto del producto inducido por el de  $\Lambda \mathbb{E}$ .

Como resultado de todo lo dicho antes, obtenemos la siguiente proposición:

PROPOSICION : Se tiene la siguiente igualdad:

$$\int_{\mathcal{G}_{r,n-r}} (\Phi_1(\gamma_{i_1}) \otimes \dots \otimes \Phi_N(\gamma_{i_m})) = \sum \delta_{i_1 j_1 \dots i_m j_m} \lambda_{i_1} \lambda_{i_2} \dots \lambda_{j_1} \lambda_{j_2} \dots \lambda_{m_1} \lambda_{m_r}$$

donde  $\lambda_i$  denota el autovalor asociado al autovector  $V_i$ .

Ahora podemos escribir  $Kr$  abreviadamente así:

$$\varepsilon_{N,r} Kr(\gamma) = \Phi_1(e_1 \wedge \dots \wedge e_r) \wedge \Phi_2(e_1 \wedge \dots \wedge e_r) \wedge \dots \wedge \Phi_N(e_1 \wedge \dots \wedge e_r)$$

Suponemos que  $e_1, e_2, \dots, e_r$  es una base ortonormal de

#### 4) Cálculo del promedio de $Kr$ extendido a la fibra de $Gr(M)$

Para esto utilizaremos la proposición anterior. Consideramos  $(e_1 \wedge \dots \wedge e_r) \otimes \dots \otimes (e_1 \wedge \dots \wedge e_r) = \sum \gamma_{ij\dots m} V_i^1 \otimes V_j^2 \dots \otimes V_m^N$

donde los coeficientes  $\gamma_{ij\dots m}$  se calculan expresando  $e_1 \wedge \dots \wedge e_r$  mediante la base  $\{V_i^1\}$ ,  $\{V_j^2\}$  y luego reemplazando en la expresión que que aparece arriba.

Estos coeficientes  $\gamma_{ij\dots m}$  gozan de la siguiente propiedad:

$$\int_{\tilde{\mathcal{G}}_{r,n-r}} \gamma_{ij\dots m} dV_{r,n-r} \text{ independiente de } i,j\dots m = C_{r,N}$$

TEOREMA :  $\int_{\tilde{\mathcal{G}}_{r,n-r}} Kr(\gamma) dV_{r,n-r} =$

$$\varepsilon_{N,r} C_{r,N} \left( \sum \delta_{i_1 \dots j_1 \dots m_r} (\lambda_{i_1} \dots \lambda_{i_r}) (\lambda_{j_1} \dots \lambda_{j_r}) \dots (\lambda_{m_1} \dots \lambda_{m_r}) \right)$$

Demostracion: Basta reemplazar  $(e_1 \wedge \dots \wedge e_r) \otimes \dots$  por su igual, luego

de elegir una base  $V_1^1 \dots V_n^1$  de autovectores para  $\Phi^1 \dots$  y

una base  $v_1 \dots v_n$  de autovectores para  $\Phi^N$

6) Relación entre la curvatura  $K_2$  y  $\bar{P}_4$  (Clase de Pontryaguin normal a M) de una subvariedad  $M(\dim M=4)$  de  $\mathbb{R}^6$

Clases de Pontryaguin: La estructura Kr que hemos definido en el número anterior determina ciertas propiedades topológicas de la variedad M.

En el caso más simple que trataremos ahora, resulta que es posible obtener una fórmula que relaciona la integral de la curvatura Kr extendida a  $\tilde{G}_r(M)$  con la clase de Pontryaguin normal  $\bar{P}_4$  de M.

Para establecer esa relación será útil analizar algunos de los ciclos de Schubert que definen las clases de Pontryaguin de M.

Supongamos que M sea una subvariedad de dimensión n de  $\mathbb{R}^{n+N}$  y denotemos por  $L_0$  y  $L_1$  dos subespacios de dimensión  $N+2k-2$  y  $N-2l+2$  respectivamente, con  $0 \leq k \leq \frac{n}{2}$  y  $0 \leq l \leq \frac{N}{2}$ .

Los subespacios  $L_0$  y  $L_1$  determinan dos ciclos de Schubert en  $\tilde{G}_{n,N}$ ;  $\Sigma(k)$  y  $\bar{\Sigma}(l)$  definidos mediante las condiciones:

$$1) \quad \Sigma(k) = \{ \gamma / \gamma \in \tilde{G}_{n,N} \quad \dim(\gamma \cap L_0) \geq 2k \}$$

$$2) \quad \bar{\Sigma}(l) = \{ \gamma / \gamma \in \tilde{G}_{n,N} \quad \dim(\gamma \cap L_1) \geq 2l \}$$

respectivamente.

Aquí hablamos de que  $\Sigma(k)$  y  $\bar{\Sigma}(l)$  son ciclos de  $\tilde{G}_{n,N}$  sin haberlo efectivamente demostrado, lo cual resultará del lema siguiente:

Lema 1 : a)  $\Sigma(k)$  resulta ser el ciclo de Schubert de símbolo

$$[N-2, N-2, \dots, N-2, N, \dots, N] \quad \dim \Sigma(k) = nN-4k$$

b)  $\bar{\Sigma}(l)$  el ciclo de Schubert de símbolo  $[N-2l, N-2l, \dots, N]$  ( $\dim \bar{\Sigma}(l) = nN-4l$ )

c)  $\bar{\Sigma}(l)$  y  $\Sigma(k)$  son orientables.

Demostración : Para demostrar a) basta encontrar una cadena  $v_1 \subset v_2 \subset \dots \subset v_n$  de subespacios de  $\mathbb{R}^{n+N}$ , tales que  $\dim v_i = i+(N-2)$  si  $1 \leq i \leq 2k$  y  $\dim v_i = i+N$  si  $2k < i \leq n$  de modo que  $\gamma \in \Sigma(k) \iff$



$\longleftrightarrow \dim(\gamma_n V_i) \geq i, i = 1, \dots, n.$

Para ello definimos primero  $V_{2k} = L_0$  y si  $i < 2k$  sea  $V_i$  cualquier subespacio de  $V_{2k}$  de dimensión  $2k-i$  de modo que  $V_i \subset V_{i+1}$ .

Para  $i > 2k$ , sea  $V_i$  cualquier subespacio de dimensión  $i+N$  que contenga a  $L_0$  y a  $V_{i-1}$ . Es claro que si  $\dim(\gamma \cap L_0) \geq 2k$  entonces  $\dim(\gamma \cap V_i) \geq i$  y recíprocamente.

La parte b) se prueba de manera análoga.

Con respecto a c) la demostración del caso más general se puede hallar en PONTRYAGUIN, CHARACTERISTIC CYCLES, TRANSLATIONS A.M.S. serie 1, vol.7 pág. 204

Utilizaremos más adelante las siguientes propiedades sobre la intersección de variedades. Supongamos que  $V_1$  y  $V_2$  son dos subvariedades de una variedad orientada  $V$ , tales que cada una de ellas determina un ciclo orientable, si  $\dim V = \dim V_1 + \dim V_2$  y además se intersecan transversalmente, es muy fácil calcular  $K I (V_1, V_2)$ .

Si  $p \in V_1 \cap V_2$ , sea  $\omega_p$  una forma que determina la orientación de  $V_1$  en  $p$  y  $\omega_p$  una forma análoga para  $V_2$  si  $\omega_p$  es la que da la orientación de  $V$  en  $p$  resulta que  $\omega_p = \lambda \omega_p \omega_p$  siempre que  $V_1$  y  $V_2$  sean transversales en  $p$

Resulta que si  $\lambda > 0$ ,  $p$  aparecerá en  $V_1 \cap V_2$  (visto como un ciclo) con signo +1 y si  $\lambda < 0$  con signo -1.

Aplicaremos estas consideraciones al cálculo de  $\bar{\Sigma}(1) \cap t(M)$

## 7) Coordenadas locales para $\bar{\Sigma}(1)$

Consideramos ahora un subespacio  $\gamma$  de dimensión dos y una base ortogonal de  $\mathbb{R}^6$   $\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$  tal que  $e_1$  y  $e_2$  generen  $\gamma$ . Por otra parte tomamos el subespacio  $S$  de  $\mathbb{R}^6$  generado por

$\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$  y consideramos las coordenadas que determina en  $G_{4,2}$ . Sea  $U$  el conjunto de todos los  $n$ -subespacios que se proyectan ortogonalmente sobre  $S$  preservando la dimensión y la orientación. Si  $S' \in U$ , entonces existe una única base de  $S'$  bien determinada que se escribe como:

$$e'_i = e_i + \sum_{s=5}^6 \zeta_{ises} \quad i = 1, 2, 3, 4$$

Por lo tanto la ecuación de  $U \cap \Sigma(1)$  viene dada por:

$$\zeta_{15} = \zeta_{16} = \zeta_{25} = \zeta_{26} = 0.$$

Ahora consideramos las formas  $\|\omega_{is}\|$  de  $G_{4,2}$  calculadas en  $S$ , respecto de la base ortogonal  $\{e_i\}$   $i = \begin{smallmatrix} 6 \\ 1 \end{smallmatrix}$ . Estas formas  $\|\omega_{is}\|$  son duales a las coordenadas  $\frac{1}{\zeta_{is}}$  en  $S$ , es decir se verifica que  $\omega_{is} = d\zeta_{is}$  en  $S$ .

La matriz de formas  $\|\omega_{is}\|$  restringida a  $\Sigma(1)$  tiene igual a 0 sus dos primeras filas; por otra parte si consideramos sobre  $t(M)$  resulta que las últimas dos filas son combinación lineal de las dos primeras, puesto que:

$(\omega_{15} \wedge \omega_{16}) \wedge (\omega_{25} \wedge \omega_{26}) = k_2 \omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \omega_3 \wedge \omega_4$  y  $k_2 \neq 0$  resultan linealmente independientes.

Por otra parte el elemento de volumen de  $G_{4,2}$  resulta ser igual al producto  $\Lambda \omega_{is}$  en orden lexicográfico, entonces, aplicando la observación anterior llegamos a que:

$\Lambda \omega_{is} = k_2 \omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \omega_3 \wedge \omega_4$  por lo tanto la intersección  $t(M) \cap \Sigma(1)$  en  $S$  tiene signo que dependerá sólo de  $k_2$ . Podemos entonces enunciar el resultado siguiente:

**TEOREMA 1:** Si  $M$  es una subvariedad de dimensión 4 inmersa en  $\mathbb{R}^6$ ,  $t(M) \cap \Sigma(1)$  queda determinado si se conoce la curvatura  $k_2$  de  $M$ .

COROLARIO 1 El número de Pontryaguin normal, que es un invariante topológico de  $M$  queda determinado por el conocimiento de la curvatura de  $K_2$

COROLARIO 2 Si  $\nu : G_2(M) \rightarrow G_{2,4}$  es suryectiva, entonces

$$\text{volumen} \frac{1}{G_{2,4}} \int_{G_2(M)} K_2 dV = \text{invariante topológico} =$$

= número de Pontryaguin normal.

La demostración de este corolario la posponemos al número siguiente.

---

8) Curvatura  $K_n$  de subvariedades  $M$  de  $\mathbb{R}^{n+N}$   
tales que  $rN = n$

En general supongamos ahora que  $M$  es una subvariedad de  $\mathbb{R}^{n+N}$  que verifica  $\dim M = n = rN$ .

Podemos entonces demostrar un resultado análogo al del párrafo anterior. Denotaremos como siempre  $G_{n,N}$  el conjunto de todos los subespacios orientados de  $\mathbb{R}^{n+N}$  y por  $Z$  el ciclo de Schubert determinado por todos los subespacios que contienen a un  $\gamma$ ,  $\dim \gamma = r$ .

Este ciclo, se puede demostrar, tiene el símbolo:

$$\left| \begin{array}{c} 0 \cdot \text{véces} \quad 0 \quad N - r \cdot \text{véces} \cdot N \\ r \cdot \text{véces} \end{array} \right|$$

Si  $M$  está orientada podemos considerar la aplicación tangente  $t: M \rightarrow G_{n,N}$ . Podemos suponer que hay sólo un número finito de puntos de  $M$  en los que  $\gamma$  es tangente,  $p_1, \dots, p_h$ . Además se puede suponer también que  $K_r(\gamma) \neq 0$  en  $p_1, \dots, p_h$ .

Estas dos condiciones se verifican para todos los  $\gamma$  excepto los de un conjunto de medida nula de la imagen de  $\nu$  en

$\tilde{G}_{r, n+N-r}$ , como resulta de una aplicación del teorema de Sard.

TEOREMA: En  $\tilde{G}_{n, N}$  el ciclo intersección  $t(M) \cdot Z$  viene determinado por los valores de  $K_r(\gamma)$  en los puntos donde  $\gamma$  es tangente a  $M$ .

Si  $p_1', \dots, p_h'$  denotan los subespacios tangentes a  $M$  por  $p_1, \dots, p_h$  entonces  $t(M) \cap Z = \sum \epsilon(p_i) p_i'$   $\epsilon(p_i) = \pm 1$  y

$$\epsilon(p_i) = \text{signo } K_r(\gamma) = \frac{K_r(\gamma)}{|K_r(\gamma)|}$$

Demostración: En cada uno de los puntos  $p_1, \dots, p_h$  se verifica que  $K_r \neq 0$ , eso es equivalente a afirmar que  $t/V_i$  (=unentorno de  $p_i$ ) es 1-1. Luego para calcular la intersección basta elegir una orientación de  $Z$  y recordar que  $\omega_1 \dots \omega_n$  fija la orientación de  $M$  y que  $K_r \neq 0$  dice que  $p_i', Z$  y  $t(M)$  son transversales (es decir los planos tangentes a  $Z$  y a  $t(M)$  se cortan sólo en el 1)

Ahora consideraremos en el punto  $p_i$  la matriz  $\| \omega_{is} \|$   $\begin{matrix} i=1 \dots n \\ s=n+1 \dots N \end{matrix}$  calculada respecto de una base  $e_1, \dots, e_r, e_{r+1}, e_n, e_{n+1}, \dots, e_{n+N}$  donde  $e_1, \dots, e_r$  es una base de  $\gamma$  y  $e_{r+1}, \dots, e_{n+N}$  es una base del complemento ortogonal a  $\gamma$  y  $e_1, \dots, e_n$  una base del espacio tangente a  $M$  en  $p_i$ .

Rápidamente se ve que esa matriz restringida a  $Z$  tiene sus  $r$  primeras filas nulas, mientras que restringida a la imagen  $t$  en  $p_i$  las primeras  $r$  filas son  $rN = n$ -formas linealmente independientes pues  $K_r \neq 0$  en  $p$ . Por lo tanto para calcular el signo de la intersección de  $Z \cdot t(M)$  en  $p_i'$  consideramos las formas:

$$\omega_1' = (\omega_{1, n+1} \wedge \dots) \wedge (\omega_{2, n+1} \wedge \dots) \dots \wedge \omega_{r, n+N}$$

$$\omega_2' = (\omega_{r+1, n+1} \wedge \dots) \wedge (\omega_{r+2, n+1} \wedge \dots) \dots \wedge \omega_{n, n+N}$$

$\omega_2'$  fija la orientación de  $Z$  y recordando que  $\omega_1' = K_r(\gamma) \omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_n$  resulta que  $\omega_1'$  difiere de la orientación de  $\gamma$  en  $K_r(\gamma)$ , por

lo tanto  $\omega_1' \wedge \omega_2' = K_r (\omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_n) \wedge \omega_2'$  luego el signo que le corresponde a  $p_i'$  depende del signo de  $K_r$  (más aún, es igual).

Q-E-D.

COROLARIO:

$$\frac{1}{\text{volumen } G_{r, n+N-r}} \int_{G_r(M)} K_r dV_r = K I(t(M) Z)$$

Demostración: Nos interesa tratar sólo el caso en que  $v: G_r(M) \rightarrow G_{r, n+N-r}$  cubre todo  $G_{r, n+N-r}$ . Podemos cubrir (salvo medida nula)

la)  $G_{r, n+N-r}$  mediante subconjuntos  $A_i$  tales que  $v^{-1}(A_i)$  tiene un número finito de componentes sobre cada una de las cuales el signo de  $K_r$  permanece constante. Entonces la integral de  $K_r$  sobre las componentes resultará igual a  $\frac{K_r}{|K_r|} v(A_i^j)$ ; por lo tanto

la integral extendida a todo  $G_r(M)$  será igual a:

$$\sum_{i,j} \frac{K_{rj}}{|K_r|} v(A_i^j) = K I(t(M) Z) \text{ volumen } G_{r, n+N-r}$$

Notamos que hemos supuesto que  $v$  es suryectiva durante la demostración del corolario. Sin embargo el mismo resultado vale en general sustituyendo en el enunciado volumen  $G_{r, n+N-r}$  por volumen de la imagen de  $v$ .

### 9) Índice de un punto crítico

Sea como siempre  $M$  una subvariedad inmersa en  $\mathbb{R}^{n+N}$  tal que verifique  $n = rN$ . Tomamos  $\gamma \in G_{r, n+N-r}$  y sea  $L = \gamma$

Sea  $p: M \rightarrow L$  la proyección ortogonal.

LEMA:

$dp_x$  coincide con  $p|_{T_x}$

Demostración: Por verificación directa.

El gráfico de  $p$  resulta ser una subvariedad inmersa de  $\mathbb{R}^{2(n+N)-r}$ . Esa inmersión viene dada por  $x \rightarrow (x, p(x))$ .

El espacio tangente a  $(x, p(x))$  por el lema anterior está generado por  $e'_i = (e_i, pe_i)$ . Podemos explicitar los vectores  $e'_i$  eligiendo una base ortonormal de  $L$ ,  $\{u_1, \dots, u_{n+N-r}\}$

$$e'_i = e_i + \sum_{j=1}^{n+N-r} \langle e_i, u_j \rangle \sqrt{2(n+N)-r-j+1} u_j$$

Luego de elegir una base  $\{e_i, v_s\}$   $1 \leq i \leq n+N$ , donde  $N+n+1 \leq s \leq 2(n+N)-r$

$e_1, \dots, e_n$  genera el plano tangente a  $M$  en  $x$ .

Por otra parte sobre  $M$  tenemos definido un campo de vectores tangentes  $u'_1, \dots, u'_{n+N-r}$  que se obtienen por proyección ortogonal de  $u_1, \dots, u_{n+N-r}$  sobre cada espacio tangente a  $M$ .

Ahora analizaremos el índice de los puntos  $u'_1, \dots, u'_{n+N-r}$  donde tiene rango  $r$ .

LEMA: Los puntos donde  $u'_1, \dots, u'_{n+N-r}$  tienen rango  $r$  coinciden con aquellos donde  $\text{rango } p = n-r$

Demostración: Resulta como siempre de comparación directa.

El próximo paso es la comparación entre el índice que es posi-

ble asignar a  $u'_1 \dots u'_{n+N-r}$ , con el índice de intersección del ciclo  $Z$  con  $\tau(M)$  en  $x$  (ver el número anterior).

Recordamos que para definir el índice de un campo de vectores  $u'_1, \dots, u'_{n+N-r}$  en un punto donde el rango de  $(u'_1, \dots, u'_{n+N-r}) = n-r$  inmergimos  $M$  en  $\mathbb{R}^{n+k}$  con  $k$  suficientemente grande y consideramos una base  $g_1, \dots, g_{k+n}$  de  $\mathbb{R}^{n+k}$ .

Ahora suponiendo que  $M$  está inmergida en el subespacio de  $\mathbb{R}^{n+k}$  generado por los vectores  $\langle g_1, \dots, g_{k+n-(n+N-r)} \rangle$ , definimos la aplicación  $\theta: M \rightarrow G_{n,k}$  así:

$\theta(x)$  es el subespacio orientado generado por los vectores ordenados  $e'_i = e_i + \sum_{j=1}^{n+N-r} \langle e_i, u'_j \rangle g_{n+k-j+1}$   $1 \leq i \leq n$  donde  $\{e_i\}$  es una base del espacio tangente a  $M$  en  $x$ .

La aplicación  $\theta(x)$  está bien definida y, notando que

$$\langle e_i, u'_j \rangle = \langle e_i, p^{\wedge} u_j \rangle = \langle e_i, u_j \rangle$$

, donde  $p^{\wedge}$  indica la proyección ortogonal sobre el plano tangente a  $M$  en  $x$  en  $\mathbb{R}^{n+N}$ , tenemos el siguiente teorema:

TEOREMA:

Si  $G(p)$  es el gráfico de  $p$  en  $\mathbb{R}^{2(n+N)-r}$  y  $t^{\wedge}$  es la aplicación tangente a  $M$ , resulta que  $t^{\wedge}$  coincide con la aplicación  $\theta$

Analizamos los vectores  $e'_i$  que permiten definir  $\theta(x)$  en un punto donde el sistema tenga rango  $n-r$ . Resultará que si elegimos una base  $e_1, \dots, e_n$  del espacio tangente de modo que  $e_1 \dots e_r$  genere a  $\gamma$ , la matriz de las últimas  $n+N-r$  coordenadas será de la forma:

$$\begin{matrix} r \text{ filas} \\ n-r \text{ filas} \end{matrix} \left\{ \begin{array}{c} \left| \begin{array}{cccc} 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{array} \right| \\ \left| \begin{array}{cc} * & 0 & * & 0 \\ & & & \\ & & 0 & 0 & 0 \end{array} \right| \end{array} \right. \text{ matriz de rango } n-r$$

Pero decir que esa matriz es de esa forma es equivalente a afirmar que el subespacio tangente al gráfico de la proyección en el punto  $x$  interseca al subespacio  $L$  de coordenadas  $Y_{2(n+N)-r-j+1} = 0$   $j=1, \dots, n+N-r$  segun un subespacio de dimensión  $r$ .

El conjunto de todos los  $n$ -subespacios tales que intersecan a  $L$  segun uno de dimensión  $n$  constituye un ciclo de Schubert que tiene por símbolo  $|n+N-r, \dots, n+N-r, n+2N-r, \dots, n+2N-r|$   $r$ -ésimo lugar

Notamos que en el caso  $r=2, N=2, n=4$ , resultará el ciclo de Schubert que tiene por símbolo  $|4, 4, 6, 6|$ , que determina la clase de Pontryaguin normal para fibrados de dimensión 4 (se puede orientar canonicamente).

PROPOSICION:

Para calcular el índice de un punto donde el sistema  $u_1^r, \dots, u_{n+N-r}^r$  tenga rango  $n-r$  basta calcular el índice de intersección  $t^r(M)$  con el ciclo de Schubert de todos los  $n$ -subespacios que intersecan al de ecuación:

$$Y_{2(n+N)-r-j+1} = 0 \quad ; \quad j=1, \dots, n+N-r$$

segun uno de dimensión  $r$ .

---



10) Comparación del índice dado por  $Z \gamma t(M)$  en  $\mathbb{R}^{n+N}$  con el que se determina por medio de  $K_r$  :

Para ello definimos la siguiente aplicación:

$\alpha: \mathbb{R}^{n+N} \rightarrow \mathbb{R}^{2(n+N)-r}$   $x \rightarrow (x, p(x))$  donde  $p$  es la proyección ortogonal de  $\mathbb{R}^{n+N}$  sobre el subespacio generado por  $u_1, \dots, \dots, u_{n+N-r}$ .

La aplicación  $\alpha$  es inyectiva y por lo tanto induce una aplicación  $\alpha: G_{n,N} \rightarrow G_{n, n+2N-r}$ . Así si  $e_1, \dots, e_n$  es una base de un

subespacio entonces una base de  $\alpha(s)$  vendrá dada por :

$$e'_i = e_i + \sum_{j=1}^{n+N-r} e_{i,u_j} \quad V_{2(n+N)-r-j+1}$$

Si  $Z$  es el ciclo de  $G_{n,N}$  formado por todos los subespacios que contienen  $\gamma$ ,  $\alpha(Z)$  ciclo determinado por  $L$  (ver más arriba) igual a  $H$ .

Para conocer el índice de intersección de  $H$  con  $\Theta(t(M))$  basta conocer el de  $Z$  con  $t(M)$ . Recordando que ese número venía determinado por la curvatura  $K_r$ , obtenemos el resultado siguiente:

TEOREMA: Si  $u_1, \dots, u_{n+N-r}$  es el conjunto de vectores ortogonal a

$\gamma$  y  $u'_1, \dots, u'_{n+N-r}$  es el campo de vectores que obtenemos proyectándolos sobre  $M$ , el índice de intersección en un punto  $x$  de  $M$  viene dado por la curvatura de  $K_r(\gamma)$

TEOREMA: Sabemos que  $Z \gamma t(M)$  están en posición general si  $K_r \neq 0$  en los puntos de intersección, por lo tanto  $\alpha(Z)$  y  $H$  estarán en posición general si  $K_r \neq 0$ .

Esto ultimo da un criterio para determinar cuando una aplicación es genérica.

11) Caso de una hipersuperficie en  $\mathbb{R}^{n+1}$ , es decir

$$r = n, N = 1$$

En este caso  $G_r(M) = G_n(M)$  y  $G_{n,1} = S^n$  por lo tanto la aplicación  $v; G_n(M) \rightarrow S^n$  se puede interpretar como definida en  $M$ .

El elemento de volumen de  $G_{n,1}$  resulta ser:

$$(\omega_{1,n+1} \wedge \dots \wedge \omega_{n,n+1})$$

Por lo tanto (1).

Luego de determinar en  $M$  un "reperere"  $e_1, \dots, e_n, e_{n+1}$ , que permite calcular  $v^*(\omega_{i,n+1})$ .

Deducimos de (1) que  $v^*(\omega_{1,n+1} \wedge \dots \wedge \omega_{n,n+1}) = \det |A_{n+1,ij}| \omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_n = \det |A_{n+1,ij}| \omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \dots \wedge \omega_n =$  elemento de volumen de  $M$ . Equivalentemente podemos poner  $v^*(\omega_{1,n+1} \wedge \dots \wedge \omega_{n,n+1}) = \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n \omega_1 \wedge \omega_2 \dots \wedge \omega_n$  donde  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  son los autovalores de la matriz simétrica

$$||A_{n+1,ij}||.$$

Evidentemente el signo de la curvatura  $K_n$  queda completamente determinado si se conoce el número de autovalores negativos de  $||A_{n+1,i,j}||$

Para analizar la curvatura de  $K_n$  desde el punto de vista topológico, recordamos que dada una función diferenciable  $f$  sobre  $M$ , con puntos críticos en los que  $f$  es "no-degenerada" y  $p_1, \dots, p_n$  son esos puntos  $f(p_i) = f(p_j)$ ,  $i \neq j$  resulta que :

$$\chi(M) = \sum_{i=1}^r \epsilon_f(p_i).$$

Donde pusimos  $\epsilon f(p_i) = \pm 1$  según que el índice de  $f$  en  $p_i$  sea par o impar.

Ahora aclaramos que se entiende por índice de una función en un punto crítico no degenerado.

DEFINICION 1: Dada una función  $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ , se denomina hessiano de  $f$  en un punto crítico  $p$  de  $f$  a la forma bilineal  $Hf(,)$  definida sobre  $T_p$  así:  $Hf(X_1, X_2) = \tilde{X}_1(\tilde{X}_2 f)_p = \tilde{X}_2(\tilde{X}_1 f)_p$ ; donde  $\tilde{X}_i$  es cualquier campo de vectores tal que en  $p$   $\tilde{X}_i/p = X_i$

Se lo suele indicar utilizando una notación más general como  $d^2 f/p$ .

DEFINICION 2: Un punto crítico de  $f$  se dice no degenerado si la forma  $d^2 f$  en ese punto es no-degenerada, en ese caso  $d^2 f$  tiene asignado un índice bien determinado que resulta ser  $-1$  si el número de autovalores negativos de  $f$  es impar y  $+1$  en caso contrario.

Dados  $e_1, \dots, e_n$  campos de vectores ortonormales en cada punto de un entorno de  $p$  en  $M$ ,  $Hf$  en  $p$  se puede expresar como :

$$2Hf = \sum_{i,j} e_i(e_j f) \omega_i \omega_j$$

Aquí  $\omega_1, \dots, \omega_n$  resulta ser como siempre los duales de  $e_1 \dots e_n$ .

Si  $V$  es un vector unitario sobre  $M$ , entonces podemos definir la siguiente función diferenciable:  $f(x) = \langle x, V \rangle$ , se verifica fácilmente que su diferencial en un punto resulta ser la proyección ortogonal de  $T_p$  sobre la recta determinada por  $V$  que pasa por el origen. Por lo tanto los puntos críticos de  $f$  resultan ser aquellos puntos  $p_1, \dots, p_n$  donde  $V$  resulta normal al plano tangente

Salvo un subconjunto de  $S^n$  de medida nula, toda  $f$  definida así tiene puntos críticos no degenerados, al menos su hessiano es no degenerado. Eso resulta como siempre del teorema de Sard, si

probamos que la afirmación  $K_n(p) = 0$  es equivalente a que  $f(x) = \langle v, x \rangle$  tiene un punto crítico degenerado en  $p$ . Para eso demostraremos el siguiente:

TEOREMA: Sea  $p_0 \in M \subset \mathbb{R}^{n+1}$  una subvariedad inmersa y  $v_0$  el vector normal a  $M$  en  $p_0$ , entonces la función  $f(x) = \langle x, v_0 \rangle$  tiene un punto crítico en  $p_0$  y su Hessiano en  $p_0$  coincide con la 2ª forma de  $M$  en  $p_0$ .

Demostración: La primera afirmación resulta de lo que vimos más arriba. Para demostrar la 2ª afirmación elegimos un "repere" en un entorno de  $p_0$   $e_1, \dots, e_n, e_{n+1}$  de modo que  $e_{n+1}^0 = v_0^0$ . Sea  $\Pi$  la proyección ortogonal sobre la recta  $\lambda v_0^0$ . Si  $\gamma(t)$  es una curva que pasa por  $p_0$  es decir  $\gamma(0) = p_0$  y la dirección resulta ser  $e_h$  en  $p_0$  entonces:

$$\left. \frac{d e_i(\gamma(t))}{d t} \right|_{t=0} = \sum_{j=1}^n \omega_{ij}(e_h) e_j + \omega_{n+1,i}(e_h) e_{n+1}$$

Por la "Ecuación de Estructura" de la variedad  $M$  en  $\mathbb{R}^{n+1}$ . Pero tendremos

$$\frac{d \Pi e_i(\gamma(t))}{d t} = \omega_{i n+1}(e_h) = A_{n+1 i h}$$

Por otra parte si consideramos  $\langle v, x \rangle = f(x)$ ;  $e_i(f) = \Pi(e_i)$

y comparando con  $2Hf = \sum_{i,j} e_i e_j(f) \omega_i \omega_j$ , vemos que  $e_i e_j(f) = \underline{A_{ij}}$

Por lo tanto queda demostrado el teorema.

Q-E-D.

Como corolario resulta que el índice de la función  $f(x) = \langle x, v \rangle$  en un punto determina, el signo de la curvatura  $K_n$ . Por otra parte por los resultados que vimos antes, el signo de  $K_n$  dependía sólo de la intersección del ciclo de espacios tangentes a  $M$  con el que

determina .

El comportamiento de  $K_n$  está regulado por el del Hessiano de  $q$ , utilizando un argumento anterior se demuestra que  $\int K_n dV = \chi(M)$  volumen de  $S^n$   $\chi(M) =$  característico de Euler Poincaré de  $M$ .

Conviene observar lo siguiente; si  $f(x) = \langle x, v_0 \rangle$  y  $e_1 \dots e_n$  es un repere en un entorno de  $p_0$ , resultaría que la proyección ortogonal de  $v_0$  sobre cada plano tangente se puede expresar así:  $\Pi_p(v_0) = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n$ , donde  $\langle e_i, v_0 \rangle = \alpha_i$ . Luego  $\Pi_p(v_0)$  por dualidad determina una forma  $\alpha_1 \omega_1 + \dots + \alpha_n \omega_n$  que resulta ser el diferencial de  $f(x)$ , por lo tanto  $\Pi_p(v_0)$  es el gradiente de  $q$ , que indicaremos por  $\nabla f$ .

La diferencial covariante de  $\nabla f$  resulta ser un elemento de  $\Gamma(T(M) \otimes T^*(M)) \cong \Gamma(\text{Hom}(TM, TM))$

Nos interesa analizar  $D(\nabla f)$  en un punto crítico de  $f$ . El gradiente de  $f$  viene dado por  $\nabla f = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n$ , por lo tanto,

$$D(\nabla f) = \sum_{j=1}^n (d\alpha_j + \sum_{h=1}^n \alpha_h \omega_{hj}) e_j$$

En un punto crítico  $p_0$  resulta que  $D(\nabla f) = \sum_{j=1}^n d\alpha_j e_j$ , pues

$\alpha_j = 0$ . Pensando  $D(\nabla f)$  en  $p_0$  como elemento de  $T(M) \otimes T^*(M)$

actúa así  $D(\nabla f)(x) = \sum_{j=1}^n d\alpha_j(x) e_j$ . Esta expresión se puede obtener a partir del Hessiano de  $f$  en  $p_0$ ,  $Hf(x, )$  es un elemento de  $T^* p_0$ .

La importancia de estas relaciones se visualiza cuando se quieren generalizar los procedimientos de análisis de singularidades de funciones a las singularidades de secciones.

12) *Relacion entre los gradientes de ciertas proyecciones con la curvatura  $K$  de una subvariedad  $M$  de  $\mathbb{R}^{n+N}$ ,  $n = rN$*

El objeto de esta sección es determinar el signo de la curvatura  $K_r$  en punto de  $G_r(M)$  a partir del comportamiento de ciertas funciones diferenciables que se definen sobre  $M$ .

Consideremos un punto  $p_0$  de  $M$  y  $e_{n+1}^0, \dots, e_{n+N}^0$  una base del subespacio  $\gamma$  normal a  $M$  en  $p_0$ .

Sea ahora  $\Pi: M \rightarrow \gamma$  la proyección ortogonal, claramente resulta ser un punto crítico y  $\text{Ker } d\Pi = T_p$ .

Los vectores  $e_{n+1}^0, \dots, e_{n+N}^0$  definen  $N$  funciones  $f_s(x) = \langle x, e_s^0 \rangle$ ,  $s=n+1, \dots, n+N$ , que componen  $\Pi$ . El Hessiano de cada una de estas funciones se calcula utilizando las ecuaciones de estructura de  $M$ .

Consideremos una curva que pase por  $p_0$  y cuya dirección en  $p_0$  sea  $e_j$ , por el argumento del número anterior, tenemos que:

$$\Pi_s \left. \frac{de_i(\gamma(t))}{dt} \right|_{t=0} = A_{sij}, \quad \text{donde } \Pi_s \text{ es la proyección}$$

ortogonal sobre  $e_s^0 = f_s$ ; por lo tanto  $Hf_s = \sum A_{sij} \omega_i \omega_j$ , es decir el Hessiano de la función  $f_s$  coincide con la segunda forma correspondiente.

Recordemos que la curvatura  $K_r$ , en la dirección del subespacio tangente  $e_1^0 \wedge e_2^0 \wedge \dots \wedge e_r^0$ , se obtiene a partir de  $\Lambda \omega_{is} = K_r \omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \dots \wedge \omega_n$   $i, s$  en orden lexicológico.

Utilizando para calcular  $\omega_{is}$  un repere tal que en  $p_0$ , los

r-primeros vectores coinciden con  $e_1^0, \dots, e_r^0$  y cada  $\omega_{is}$  se reemplaza por  $\omega_{is} = \sum_{j=1}^n A_{sij} \omega_j$  Sabemos entonces que  $K_r = \epsilon_{nN}$

$H_s(e_i)$ ; aquí  $H_s(e_i)$ , con  $s, i$  en orden lexicológico, indica el valor del hessiano de  $x H_s$  en  $e_i$ .

Así obtenemos el teorema:

TEOREMA 1:

Si  $\Pi: M \rightarrow \gamma$  es la proyección ortogonal de  $M$  sobre un subespacio generado por  $e_{n+1}^0, e_{n+2}^0, \dots, e_{n+N}^0$  y  $f_s = \langle x, e_s \rangle$ ,  $s=1, \dots, n$ , entonces  $f_s$  tendrá un punto crítico en cada  $p_0 \in M$  donde  $e_s$  es normal, y en ese punto el Hessiano de  $f_s$ ,  $H_s$  se relaciona con la curvatura así:

$$K_r(e_1 \wedge \dots \wedge e_r) = \epsilon_{nN} \wedge_{s,i} H_s(e_i)$$

13) Caso  $r=1, N=n$ , es decir cuando  $M$  está sumergida en

*un espacio de dimensión  $2n$*

Quando  $M$  es una subvariedad inmersa de un espacio de dimensión  $2n$ ,  $\dim M = n$ , podemos considerar el fibrado de los vectores tangentes unitarios  $G_1(M)$ ; como dimensión de  $G_1(M)$  es igual a  $2n-1$ , tenemos una aplicación de  $v: G_1(M) \rightarrow S^{2n-1}$ . Esta aplicación como siempre consiste en pensar un vector de  $G_1(M)$  como un vector de  $S^{2n-1}$ .

En  $S^{2n-1}$  tenemos la siguiente forma que nos describe su volumen:  $\omega_{12} \wedge \dots \wedge \omega_{12n}$  donde  $\omega_{is}$ ,  $s=2 \dots 2n$  se definen a partir de

la matriz de formas  $\|\omega_{ij}\|$  de  $SO(n)$ , como vimos en general para  $G_{r,n-r}$ .

Como siempre, por el teorema de Sard, resulta que salvo un conjunto de medida nula de  $S^{2n-1}$ ,  $\alpha^{-1}(v)$ , consiste de un número finito de puntos  $p_1, \dots, p_h$ , en los que es posible encontrar un entorno  $V_i$  tal que  $v/V_i$  sea 1-1.

Ahora tratamos de dar un sentido geométrico al signo de  $v$  en cada uno de los puntos. Para eso en primer término es necesario determinar  $v^*(\omega_{12} \wedge \dots \wedge \omega_{12n})$  en un punto  $p_0 \in G_1(M)$ ;  $p_0 = (x_0, V_0)$   $x_0 \in M$  y  $V_0 =$  vector unitario tangente a  $M$  en  $V_0$ .

Elegimos un repere definido en un entorno de  $x$  en  $e_1 \dots e_{2n}$  de modo que en  $x$  se tenga  $e_1^0 = V_0$ . Mediante  $e_1 \dots e_{2n}$  se calculan las formas  $\omega_{ij}$ ,  $1 \leq j \leq n$ , y  $\omega_{1s}$ ,  $n+1 \leq s \leq 2n$ ,

$$\omega_{1s} = \sum_{j=1}^n A_{s1j} \omega_j .$$

Reemplazando en  $\omega_{12} \wedge \dots \wedge \omega_{12n}$  llegamos a que:

$$v^*(\omega_{12} \wedge \dots \wedge \omega_{12n}) = \det \|A_{nti1j}\| \omega_{12} \wedge \dots \wedge \omega_{1n} \wedge \omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_n .$$

Para estudiar el signo de  $\det \|A_{nti1j}\|$  introducimos el siguiente ciclo  $W$  en  $G_{n,n}$ , que consiste de todos los  $n$ -subespacios de  $\mathbb{R}^{2n}$  que están contenidos en el complemento ortogonal a  $V_0$

Como trabajamos con la aplicacion normal a  $M$ , ordenamos los vectores del repere así:  $e_{n+1}, \dots, e_{2n}, e_1, \dots, e_n$ , por lo tanto la matriz de formas que determinan el volumen y la orientación de  $G_{n,n}$  resulta ser:





$$\left| \begin{array}{cccc} \omega_{n+1 \ 1} & \omega_{n+1 \ 2} & \cdots \cdots \cdots & \omega_{n+1 \ n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \omega_{2n \ 1} & \omega_{2n \ 2} & & \omega_{2n \ n} \end{array} \right|$$

Por lo tanto para calcular el número de intersección, entre el ciclo de  $n$ -subespacios normales a  $M$  y el determinado por  $V_0$ , procedemos como siempre.

Sintetizando estos dos resultados obtenemos el siguiente teorema

TEOREMA 1:

La curvatura  $K_1$  de una subvariedad  $M$  de  $\mathbb{R}^n$  verifica las dos siguientes propiedades:

- 1)  $\int_{G_1(M)} K_1 \, dV = (\text{suma de los índices de los puntos críticos de un vector normal a } M) \times \text{volumen de la esfera de dimensión } 2n-1.$

---

14) *Puntos críticos de funciones diferenciables y curvatura de una subvariedad  $M$  de  $\mathbb{R}^{n+1}$ :*

Los resultados que obtenemos sobre la integral de curvaturas resultan siempre de situaciones de este tipo  $\Pi : \mathbb{X} \rightarrow B$ , donde  $\mathbb{X}$  resulta ser un espacio asociado a  $M$  y a alguna grassmaniana. El espacio  $\mathbb{X}$  se trata de algún fibrado asociado a  $T(M)$  o bien a  $\nu(M)$  fibrado normal

La aplicación  $\Pi$ , resulta ser suryectiva y salvo un conjunto de medida nula  $\Pi^{-1}(\gamma)$  es una subvariedad de  $\mathbb{X}$ . La imagen inversa  $\Pi^{-1}(\gamma)$  se puede identificar a algún ciclo crítico, de la restricción a  $\mathbb{M}$  de una función lineal, por ejemplo una proyección ortogonal, etc. (En realidad lo que se identifica a un ciclo crítico resulta ser su proyección sobre  $M$ ).

Como ejemplos podemos considerar el caso  $\mathbb{X} = G_r(M)$  y

$B = \tilde{G}_{r, n+N-r}$ ,  $\Pi^{-1}(\gamma)$ , donde  $\gamma$  resulta ser algún subespacio de dimensión  $r$ -orientado, consiste de los puntos críticos de la proyección ortogonal sobre  $\gamma$ ,  $p: \mathbb{M} \rightarrow \gamma$  donde rango de  $p = n-r$

(Por supuesto suponemos  $N_r = n$ )

Nos queda aún el caso, en que  $rN \leq n$ , es decir cuando tratamos con variedades de dimensión comparativamente alta respecto de  $n + N$ . En el caso último  $\Pi^{-1}(\gamma)$  resulta ser una unión de subvariedades de  $M$ . Sobre éstas subvariedades a su vez podemos considerar la restricción de la proyección ortogonal y estudiar los diversos puntos críticos que por supuesto dependerán de las derivadas segundas de la inmersión.

Lo interesante consiste en describir mediante curvaturas, que dependen localmente de la inmersión, esos ciclos críticos. Para conseguir el resultado notamos que en  $\mathbb{X}$ , tenemos definida una medida, que suele ser el producto de la medida de  $M$  por la de la fibra.

Denotemos por  $dV$  el elemento de volumen en  $\mathbb{X}$ , por  $dV'$  el de  $B$  y  $dV''$  el elemento de volumen en  $x$  de la subvariedad  $\Pi^{-1}(\Pi(x))$ . Entonces en  $x$  tenemos una igualdad de este tipo

$$|K| dV = (\Pi * (dV') \wedge dV'').$$

Para los casos que nos interesan la función  $K$  resultará bien definida salvo un conjunto de medida nula. El  $K$  que aparece

resulta ser una "curvatura" que mide en cuanto difiere la medida de  $X \, dV$ , de la medida producto de  $B$  por la "fibra" de  $\Pi$

Si consideramos una forma diferencial definida en  $M$  tal que su grado sea igual a la dimensión de la imagen inversa de un punto por  $\Pi$  es posible considerar la integral a lo largo de  $\Pi^{-1}(\gamma)$ ,  $\gamma \in B$ .

Tomando esa forma diferencial convenientemente obtendremos información sobre los puntos críticos excepcionales de la aplicación diferencial. Por ejemplo si tomamos una forma  $\phi$  tal que su integral extendida a la subvariedad crítica describa los puntos excepcionales de codimensión máxima, la integral de:

$$\frac{1}{\text{volumen } B} \int_{G_r(M)} \Pi^*(\phi) \wedge \Pi^*(dV') = \text{promedio de los índi-}$$

ces de los ciclos críticos excepcionales de las proyecciones;

$\Pi': X \rightarrow M$  es la proyección de  $X$  sobre  $M$ .

Por otra parte  $\Pi^*(\phi) \wedge \Pi^*(dV')|_x = |K| J_{\Pi} \phi(\Pi_x) dV$  y aquí  $K$  es el que verifica  $K \, dV = \Pi^*(dV') \wedge dV''$ ;  $J_{\Pi}$  es el Jacobiano de  $\Pi'|_{\Pi^{-1}(\Pi(x))}$  en  $x$ , calculado respecto del elemento de volumen  $\Pi^{-1}(\Pi(x))$  y el de  $\Pi'(\Pi^{-1}(\Pi(x)))$ , mientras que  $\phi(\Pi(x))$  se identifica al valor de la forma en  $x$  (pues se trata de una forma de grado máximo sobre  $\Pi(\Pi^{-1}(\Pi(x)))$ ).

Antes de desarrollar en detalle esta cuestión, veamos otros ejemplos. Cuando  $v: G_r(M) \rightarrow G_{r,n+N-r}$  y  $n=rN$  en general (salvo conjunto de medida nula)  $v^{-1}(\gamma)$ ,  $\gamma \in G_{r,n+N-r}$  consta de un número finito de puntos  $p_1, \dots, p_h$ . Esta propiedad se sigue verificando en un abierto  $U$  que contiene a  $\gamma$ ,  $v^{-1}(U)$  consta de un número finito de componentes  $U_1 \cup \dots \cup U_h = v^{-1}(U)$ ; (tomando  $U$  pequeño se puede conseguir que  $U_i \cap U_j \neq \emptyset$  y que  $v|_{U_i}$  sea 1-1).

Esto resulta por ejemplo debido a la estabilidad de los ciclos críticos de aplicaciones diferenciales, genéricas, aunque en este caso basta un argumento más elemental.

Lo que expresa el signo de la curvatura  $K$  en  $p_i$ , es el sentido en que  $v(U_i)$ , cubre a  $U$ . El hecho importante es que esos signos  $\epsilon_i = 1, \dots, h$  sumados dan una invariante de  $M$  que depende de la inmersión, a veces sólo de  $M$ .

Entonces podemos interpretar ahora nuestro resultado anterior así:

sea  $v:G_r(M) \rightarrow G_{r,n+N-r}$ , la imagen inversa de un punto  $\gamma$ ,  $v^{-1}(\gamma)$ ,  $\gamma \neq$  punto crítico consiste de un número finito de puntos, consideramos la proyección de esos puntos sobre  $M$  y en esa subvariedad (discreta) definimos la forma  $\sum_{i=1}^h \epsilon_i p_i$ .

Entonces el teorema aparece finalmente así:

$$\int_{G_r(M)} |K| (\sum \epsilon_i p_i) dV = \int_{G_r(M)} K dV = (\text{vol. } G_{r,n+N-r}) (\sum \epsilon_i)$$


---

CAPITULO III

15) *Relaciones entre puntos críticos excepcionales de aplicaciones diferenciables y la curvatura de una variedad*

Antes de seguir adelante debemos aclarar que es lo que se entiende por puntos críticos excepcionales de una aplicación diferenciable.

Sea  $M$  una variedad de dimensión  $n$  y  $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ , una aplicación diferenciable; consideremos el ciclo  $S_r$  de puntos críticos  $x$  de  $M$  donde  $p$ -rango  $f/x = r$  estrictamente. Este ciclo sabemos que se puede describir a través de la aplicación tangente al gráfico de  $M$ . Supongamos que  $M$  está sumergida en  $\mathbb{R}^{n+N}$ , por lo tanto  $G(f)$  estará sumergido en  $\mathbb{R}^{n+N+p}$ .

Sea la aplicación tangente a  $G(f)$   $t: G(f) \rightarrow G_{n, N+p}$ . Por lo que vimos en el primer capítulo resulta que  $S_r$  es la imagen inversa a través de  $t$ , del ciclo de Schubert, que tiene por símbolo:

$$\left| \begin{array}{cccc} N+p-r, \dots, N+p-r & , & N+p, \dots, N+p \\ n-p+r & & p-r \end{array} \right|$$

formado de todos los subespacios de dimensión  $n$  que intersecan uno de dimensión  $n+N$  según un subespacio de dimensión  $n-p+r$  estrictamente.

Si esta aplicación diferenciable  $t$ , verificara la propiedad de ser transversal a ese ciclo, la imagen inversa determinaría un ciclo en  $M$ .

Suponemos que  $x$  no es punto crítico de  $t$ , y que  $t(x)$  no es punto singular del ciclo de Schubert.

Cuando se verifican las hipótesis anteriores resulta que, la imagen inversa por  $t$ , del ciclo es una subvariedad de  $G(f)$  sin singularidades.

Como veremos luego, esta condición de transversalidad se puede expresar muy fácilmente para el caso de restricción de aplicaciones lineales a  $M$ . Por supuesto si suponemos que  $M$  está inmersa en  $\mathbb{R}^{n+N}$  y  $n$  y  $N$  verifican ciertas condiciones, nos interesa conocer "en general", si la aplicación  $f$  restringida a  $S_r$  tiene rango máximo. Como la dimensión de  $S_r$  es  $n-r(n-p+r)$ , y ese número es inferior a  $n-p$ , para  $r \geq 1$ , resulta que  $f$  no tiene puntos críticos en general "restringida" a  $S_r$ .

Pues la proyección ortogonal de cada plano tangente a  $S_r$  sobre el subespacio de las  $y^*$ , tiene en general dimensión  $p-r$ .

NOTA: en  $\mathbb{R}^{n+N+p}$  utilizamos las coordenadas  $(x_i, y_i)$  con

$1 \leq i \leq n+N$  y  $1 \leq j \leq p$ .

Para estudiar los puntos de  $S_r$ , donde  $f/S_r$ , tiene rango menor a la dimensión de  $S_r = m$ , debemos considerar el fibrado  $H \rightarrow S_r$ , donde la fibra sobre cada  $x \in S_r$  consiste de todos los  $m$ -subespacios tangentes a  $M$ .

Notamos que  $H$  también se puede interpretar como el fibrado de la imagen inversa del  $H \rightarrow G_{n,N}$  cuya fibra sobre  $\gamma \in G_{n,N}$  consiste de todos los subespacios de dimensión  $m$  de  $\gamma$  (no suponemos que sean orientados). En  $H$ , podemos construir ciclos  $Z$ , del siguiente modo: sobre cada fibrado, se puede considerar el conjunto  $F'_r$  de  $m$ -subespacios, que se proyectan sobre el  $\mathbb{R}^{p-r}$  subespacio intersección del subespacio tangente de dimensión  $n$  y de

$\mathbb{R}^P$  con dimensión menor que la de  $S_r$ . Si consideramos el conjunto de todos esos subespacios resulta que determinan un ciclo  $Z$  en  $H$  invariante por la acción del grupo estructural de  $H$ .

Conviene observar que según la condición que se imponga respecto de la proyección de  $\mathbb{R}^{P-r}$ , obtenemos una gama de ciclos que permitirán definir los puntos críticos excepcionales.

DEFINICION 1:

Consideremos la imagen de la sección que determinan los subespacios de dimensión  $m$  tangentes a  $S_r$ , en el fibrado  $H \rightarrow S_r$  (recordemos que estamos suponiendo que  $S_r$  es una subvariedad).

Entonces los puntos críticos excepcionales serán aquellos donde la sección sobre  $S_r$  corte a alguno de los ciclos que definimos.

NOTA: En rigor los puntos críticos excepcionales son la proyección de los que considera la definición. Además es claro que según se elija  $Z$  se obtendrá toda la posible gama de puntos críticos de  $f/S_r$ .

En el caso de una función lineal  $f/M$ , cuando  $M \subset \mathbb{R}^{n+N}$ , como ya observamos varias veces, resulta ser el más simple (y el caso general se puede reducir a este), pues veremos que las condiciones de genericidad se pueden expresar mediante las ecuaciones de estructura de  $M$ .

Sea  $\gamma$  un subespacio de dimensión  $n \neq r$  de  $\mathbb{R}^{n+N}$  y  $p: M \rightarrow \gamma$  la proyección ortogonal sobre el complemento ortogonal a  $\gamma$ .

Entonces se comprende que los puntos de  $M$  donde esta aplicación tiene rango  $n-r$  resultan ser aquellos en los que es tangente a  $M$ . Como dimensión de  $\gamma = n+N-r$  y rango  $p = n-r$ , en un punto donde  $\gamma$  es tangente a  $M$ , resulta que el ciclo crítico que



determinamos coincide con  $S_N$  ( $N+n-r-(n-r) = N$ ).

Si denominamos  $Z_\gamma$  el ciclo de Schubert de  $G_{n,N}$ , de todos los  $n$ -subespacios que contienen al subespacio  $\gamma$  y  $\tau: M \rightarrow G_{n,N}$  a la aplicación tangente a  $M$ , podemos obtener una descripción diferente de  $S_N$ . Evidentemente se tiene que  $t^{-1}(Z_\gamma) = S_N$ .

Por otra parte podemos considerar el gráfico de  $p: \mathbb{R}^{n+N} \rightarrow \mathbb{R}^{n+N-r}$  y tenemos una inmersión de  $M$  en el subespacio  $G(p)$  de  $\mathbb{R}^{2(n+N)-r}$  (igual a  $G(p)$ ).

Por abuso de lenguaje, denominaremos  $G(p)$  al gráfico de la restricción de  $p$  a  $M$ . En  $\mathbb{R}^{2(n+N)-r}$  podemos lograr una caracterización diferente de los puntos críticos de  $p$ , siguiendo el proceso usual de estudiar los planos tangentes a  $G(p)$ .

Sea  $t': G(p) \rightarrow G_{n, 2(n+N)-r}$ , la aplicación tangente de  $G(p)$ .

En  $G_{n, 2(n+N)-r}$  podemos considerar el ciclo de Schubert de todos los  $n$ -subespacios que intersecan el subespacio  $y_1 = \dots = y_{n+N-r} = 0$  según un subespacio de dimensión  $\geq r$ .

El símbolo de Schubert que le corresponde resulta ser:

$$Z'_\gamma = \underbrace{|n+N-r, \dots, n+N-r|}_{r \text{ veces}} \underbrace{|n+2N-r, \dots, n+2N-r|}_{n-r \text{ veces}}$$

A nosotros nos interesan de entre estos ciclos aquellos que resultan orientables. Es decir, los que determinen un ciclo de homología entera. Como siempre determinamos  $\alpha$  y  $\beta$  (ver capítulo I)  $\alpha_1 = r$ ;  $\beta_1 = N$ .

Para que este ciclo sea orientable se debe tener  $\alpha_1 + \beta_1 = 0$  es decir que  $r$  y  $N$  sean de la misma paridad, y para que sean sin torsión, que además sean pares.

Cuando  $Z'_\gamma$  es un ciclo orientable resulta que  $Z_\gamma$ , también lo es, pues si denotamos por  $i$  la aplicación  $i: M \rightarrow G(p)$  tenemos la

fórmula  $i_0 t^{-1}(Z_\gamma) = t^{-1}(Z'_\gamma)$ , y además si queremos interpretar esto mismo utilizando dualidad, los ciclos que determinan  $Z_\gamma$  y  $Z'_\gamma$  sobre  $M$  son los mismos, es decir si denotamos  $\#Z_\gamma$  y  $\#Z'_\gamma$  los duales tenemos la fórmula,  $i^*(\#Z'_\gamma) = \#Z_\gamma$ .

Luego para cada  $\gamma \in G_{r,n}^{n+N-r}$ , tendremos un ciclo bien determinado  $Z_\gamma$ , (En realidad un representante de una clase de homología).

Sabemos que  $Z_\gamma$  es orientable pero no le hemos asignado aún ninguna orientación. Para ello, denotemos por  $t'_\gamma$  la aplicación tangente a  $G(p_\gamma)$ ,  $p_\gamma : M \rightarrow \gamma^\perp$  la proyección ortogonal de  $M$  sobre  $\gamma$ . Como  $Z'_\gamma$  no depende de  $\gamma$ , podemos asignarle una orientación bien determinada y arbitraria. Como también a  $M$  la suponemos orientada,  $i^{-1} \circ t'_\gamma(Z'_\gamma)$  para cada  $\gamma$ , es un ciclo orientado, representante de una misma clase de homología. Pero

$i^{-1} t'_\gamma(Z'_\gamma) = t^{-1}(Z_\gamma)$ , luego llegamos así a determinar una orientación uniforme para cada  $Z_\gamma$ .

Denotemos por  $v: G_r(M) \rightarrow \tilde{G}_{r,n+N-r}$  la aplicación que a cada subespacio  $\gamma$ , tangente a  $M$  orientado,  $\dim \gamma = r$ , le asigna el mismo subespacio como elemento de  $\tilde{G}_{r,n+N-r}$ .

Esta aplicación  $v$  es en general suryectiva, pero en algunos casos no alcanza a cubrir todo  $\tilde{G}_{r,n+N-r}$  (quasi suryectivas en el sentido de Calabi).

Por otro lado, debido al teorema de Sard, resulta que sólo existe en  $\tilde{G}_{r,n+N-r}$  a lo sumo un conjunto de medida nula de valores críticos de  $v$ .

La imagen por  $v$  de  $M$ , es un subconjunto cerrado de  $\tilde{G}_{r,n+N-r}$  y si  $\gamma$  no es un valor crítico de  $v$ , es decir si  $v^{-1}(\gamma)$  carece de puntos críticos, se tiene que  $v^{-1}(\gamma)$  es una subvariedad de  $M$ , o una unión de subvariedades.

Sea ahora el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc}
 G_r(M) & \xrightarrow{\nu} & \tilde{G}_{r,n+N-r} \\
 \Pi \downarrow & & \\
 M & & 
 \end{array}$$

$\Pi$  = la proyección que a cada subespacio tangente a  $M$  de dimensión  $r$  le asigna el punto de tangencia.

**TEOREMA:** Si  $\gamma \in \tilde{G}_{r,n+N-r}$ , entonces o bien  $\nu^{-1}(\gamma) \neq \emptyset$  ó  $\Pi \nu^{-1}(\gamma)$  es una subvariedad de  $M$  ó una unión de subvariedades que no se intersecan.

**Demostración:** Si  $\gamma$  no es un valor crítico de  $\nu$ , entonces resulta que o bien  $\nu^{-1}(\gamma) = \emptyset$  ó  $\nu^{-1}(\gamma)$  es una subvariedad de  $G_r(M)$ , (o una unión de subvariedades).

Todo se reduce a probar ahora que  $\Pi \circ \nu^{-1}(\gamma)$  es una unión de subvariedades de  $M$ , cuando  $\nu^{-1}(\gamma) \neq \emptyset$

Sea  $(\gamma, x)$  un elemento de  $G_r(M)$  tal que  $\nu(\gamma, x) = \gamma$ , determinemos un repere  $e_1, \dots, e_n, e_{n+1}, \dots, e_{n+N}$  de  $M$  en un entorno del punto  $x$ , tal que  $e_1^0, \dots, e_r^0$  genere en  $x$ , y  $e_{n+1}, \dots, e_{n+N}$  generan los planos normales a  $M$ .

Sean las formas de  $G_{r,n+N-r}$  con referencia a  $e_1^0, \dots, e_{n+N}^0$  definidas como  $\|\omega_{is}\|$   $1 \leq i \leq r, r+1 \leq s \leq n+N$

Por otra parte,  $\nu^*(\omega_{ih}) = \omega_{ih}, 1 \leq i \leq r$  y  $r+1 \leq h \leq n$ , mientras que  $\nu^*(\omega_{is}) = \sum_{j=1}^n A_{sij} \omega_j, 1 \leq i \leq r$  y  $n+1 \leq s \leq n+N$ .

Como  $\gamma$  no es un valor crítico resultará que, las formas  $\nu^*(\omega_{is})$  y  $\nu^*(\omega_{ih})$   $i=1 \dots r, s = n+1, \dots, n+N, h = r+1, \dots, n$  son linealmente independientes, en particular las formas  $\nu^*(\omega_{is})$  serán independientes.

Por lo tanto, las  $r \times (n+N-r)$ -formas  $\nu^*(\omega_{is}) = \sum_{j=1}^n A_{sij} \omega_j$ ,

$n+1 \leq s \leq n+N$ ,  $1 \leq i \leq r$  verifican la condición:

$\wedge v^* \omega_{is} \neq 0$  en orden lexicográfico.

Sea en  $G_{n,N}$  el ciclo de Schubert  $Z_\gamma$  de todos los  $n$ -subespacios que contienen a  $\gamma$

Sea  $T_x$  el subespacio tangente a  $M$  en  $X$ , orientado según la orientación de  $M$ . Este está generado por  $e_1^0, \dots, e_n^0$ , por definición del "repere".

Si denotamos por  $U$  el conjunto abierto de  $\tilde{G}_{n,N}$  de todos los subespacios que se proyectan sobre  $T_\gamma$  preservando la orientación y la dimensión, se puede introducir un sistema de coordenadas en

$U \cap Z_\gamma$

Sea  $e_1^0, \dots, e_r^0, e'_{r+1}, \dots, e'_n$  una base del subespacio  $\phi \in Z_\gamma \cap U$  tal que  $p(e'_{r+1}) = e_{r+1}^0, \dots, p(e'_n) = e_n^0$ , donde  $\phi$  indica la proyección ortogonal de  $\phi$  sobre  $T_x$ ,  $p: \phi \rightarrow T_x$

Entonces es posible escribir  $e'_{r+1} = e_{r+1}^0 + \sum_{s=n+1}^{n+N} \xi_{r+1,s} e_s$

$$\vdots$$

$$e'_n = e_n^0 + \sum_{s=n+1}^{n+N} \xi_{n,s} e_s$$

donde la matriz  $\|\xi_{is}\|$   $i=r+1, \dots, n$  está bien definida y  $s=n+1, \dots, n+N$

$\phi \rightarrow \|\xi_{is}\|$ , en  $U \cap Z$  constituye un sistema de coordenadas.

En  $T_x \in Z \cap U$  las formas  $\|\omega_{is}\|$  son las duales de las derivaciones  $\frac{\partial}{\partial \xi_{is}}$ , por definición.

$\frac{\partial}{\partial \xi_{is}}$

Como las formas  $v^*(\omega_{is})$   $1 \leq i \leq r$ ,  $n+1 \leq s \leq n+N$  son independientes, se deduce que la imagen inversa de  $Z \cap U$ , por  $T$  resulta ser una subvariedad de  $M$ .

Q-E-D

Durante la demostración hemos utilizado la siguiente proposición:

PROPOSICION 1: Si  $f: M \rightarrow \mathbb{R}^{h+m}$ , es una aplicación de una variedad  $M$  en  $\mathbb{R}^{h+m}$ , de modo que  $f^*(dx_1)|_0 \dots f^*(dx_h)|_0$  sean linealmente

independientes, resulta que  $f^{-1}(x_1=0 \dots x_h=0)$  es una subvariedad.

Demostración:

Es una simple aplicación del teorema de las funciones implícitas.

Q-E-D

16) Sobre la descripción de la subvariedad  $v^{-1}(\gamma)$ ,

$\gamma \in \tilde{G}_{r, n+N-r}$  cuando  $\gamma \neq$  valor crítico:

Sea  $(\gamma, p)$  un punto de  $G_r(M)$ , en el que  $v$  tiene rango máximo.

Veremos que en un entorno de  $(\gamma, p)$ ,  $v^{-1}(\gamma)$  es una subvariedad integral de un sistema de formas.

Para ello elegimos un "repere"  $e_1, \dots, e_n$  en un entorno  $U$  de  $p$  tal que  $e_1, \dots, e_r$  genere  $\gamma$  en cada uno de los puntos  $p' \in U$  donde  $\gamma$  es tangente a  $M$ .

Fácilmente deducimos que el plano tangente a  $v^{-1}(\gamma)$  en  $(\gamma, p')$ ,  $p' \in U$ , está constituido por el núcleo de las formas,

$$v^*(\omega_{ij}) = 0 \quad 1 \leq i \leq r, r+1 \leq j \leq n, \quad v^*(\omega_{is}) = 0 \quad 1 \leq i \leq r, n+1 \leq s \leq n+N$$

Más exactamente, si consideramos en  $G_r(M)$ , las formas  $\omega_{ij}$  y  $\omega_1, \dots, \omega_n$ , definidas utilizando el repere  $e_1, \dots, e_n$  la subvariedad  $v^{-1}(\gamma) \cap \Pi^{-1}(U)$ , donde  $\Pi: G_r(M) \rightarrow M$  es la integral que pasa por  $(\gamma, p)$  del sistema:

$$\omega_{ij} = 0, \quad \text{y} \quad \sum A_{sij} \omega_j = 0 \quad i = 1, \dots, r$$

Como  $v^*(\omega_{ij}) = \omega_{ij}$  en  $G_r(M)$ , resultará que  $v^{-1}(\gamma)$  es una subvariedad, tal que su plano tangente, es horizontal.

# Definición

Por "horizontal" entendemos que su plano tangente esté contenido en el subespacio del tangente en  $(\gamma, p)$ , a  $G_r(M)$  que se puede definir mediante la conexión de  $M$ .

Aclaremos más este concepto. Sea  $P(M)$  el fibrado principal asociado al fibrado tangente de  $M$ . En  $P(M)$ , dada una curva en  $M$ ,  $\phi(t)$ ,  $-\epsilon < t < \epsilon$  y  $\phi(0) = p$ , y una base  $e_1^0, \dots, e_n^0$  en  $\phi(0)$ , es posible determinar una única sección  $e_1(\phi(t)), \dots, e_n(\phi(t))$ , sobre  $\phi(t)$ , tal que  $e_1^0, \dots, e_n^0$  genere una base tangente en  $p$ .

Entonces definimos como subespacio horizontal en  $(p, \gamma)$ , al generado por todos los vectores tangentes a las curvas que pasan por  $\phi(0)$  y se obtiene así.

Análogamente en  $G_r(M)$ , tomamos una base de  $\gamma$  en  $p$ ,  $e_1^0, \dots, e_r^0$  y la completamos a una base  $e_1^0, \dots, e_r^0, e_{r+1}^0, \dots, e_n^0$ .

Si  $\phi(t)$ ,  $-\epsilon < t < \epsilon$ , es una curva que pasa por  $p$ , tenemos que en  $P(M)$  es posible definir la sección  $e_1(\phi(t)) \dots e_n(\phi(t))$  a partir del valor inicial  $e_1^0, \dots, e_n^0$ .

A ésta le podemos asociar otra  $S$  sobre  $\phi(t)$  en valores en  $G_r(M)$ , así determinada, el valor de  $S$  en  $\phi(t)$  resulta ser "el subespacio generado por  $e_1(t')_r \dots, e_r(t')' = \gamma(t')$ ".

Esta es una buena definición puesto que los vectores

$e_1(\gamma(t)), \dots, e_n(\gamma(t))$  dependen linealmente de las condiciones iniciales  $e_1^0, \dots, e_n^0$ .

Además, como el traslado paralelo preserva el producto de Riemann, tampoco depende del sistema  $e_{r+1}^0, \dots, e_n^0$ , que utilicemos para completar la base  $e_1, \dots, e_r$ .

Por analogía al caso anterior definimos, el subespacio horizontal de  $G_r(M)$  en  $(\gamma, p)$ , como aquel generado por los vectores tangentes de todas las curvas  $\gamma(t)$ .

Ahora notamos, que la condición necesaria y suficiente para que

un vector tangente a  $G_r(M)$  pertenezca al subespacio horizontal en que verifique la propiedad de anular las formas

$$\omega_{ij} = 0 \quad , \quad r+1 \leq j \leq n \quad , \quad 1 \leq i \leq r$$

A partir de todo esto, resulta clara la afirmación que dice: " $v^{-1}(\gamma) \cap \mathbb{H}^{-1}(U)$  es una subvariedad horizontal", ya que entre las formas que anulan a su plano tangente figuran  $\omega_{ij}$ .

Notamos finalmente que todo lo dicho resulta válido aún cuando  $\gamma$  sea un valor crítico de  $v$ , pero suponiendo que el rango de  $v$  en  $(p, v)$  sea máximo.

17) Definición de la curvatura  $K_n$  en el caso  $n \geq rN$ :

Puesto que  $n > rN$ , cada vez que  $\gamma \in G_{r, n+N-r}$ , no sea un valor crítico de  $v: G_r(M) \longrightarrow \hat{G}_{r, n+N-r}$ ,  $v^{-1}(\gamma)$  resultará una subvariedad horizontal de  $G_r(M)$ , de dimensión  $n-rN$ . Además como  $v^{-1}(\gamma)$  consta de una unión de subvariedades orientadas de  $G_r(M)$ ; en cada punto  $(\gamma, p) \in v^{-1}(\gamma)$ , es posible definir el subespacio tangente orientado a  $v^{-1}(\gamma)$ .

Recordamos como era posible orientar cada  $v^{-1}(\gamma)$  de modo uniforme. Fijábamos una orientación del ciclo que denominábamos  $Z'_\gamma$  de  $\hat{G}_{n, n+2N-r}$  (arbitraria), y mediante la de  $M$  podíamos asignarle a  $Z'_\gamma$  una orientación, que resultaba independiente de  $\gamma$  (sólo relacionado con la clase de homología que determina).

Este proceso es solamente local, es decir utilizando este criterio, podemos orientar también el plano tangente a  $v^{-1}(\gamma)$  en  $(\gamma, p)$ , siempre que  $(\gamma, p)$  no sea un punto crítico de  $v$ .

Entonces en cada  $(\gamma, p) \in v^{-1}(\gamma)$  tenemos definida una  $n-rN$  dirección, que indicamos por  $dV_\gamma$ , que debido a la observación

anterior, es posible definir en cualquier  $(\gamma, p)$  donde rango  $v$  sea máximo.

$$\begin{aligned} \text{Sea ahora} \quad dV &= \text{elemento de volumen de } M \\ dV_{r, n-r} &= \quad " \quad " \quad " \quad " \quad G_{r, n-r}^2 \\ dV_{r, n+N-r} &= \quad " \quad " \quad " \quad " \quad G_{r, n+n-r}^2 \end{aligned}$$


---

18) Definición de la curvatura  $K_r$  para el caso en que  $n > rN$

DEFINICION: La curvatura  $K_r$  se obtiene a partir de la siguiente relación en  $(\gamma, p) \in G_r(M)$

$$v^* (dV_{r, n+N-r}) \wedge dV_\gamma = K_r dV \wedge dV_{r, n-r} \quad \text{si } (\gamma, p) \neq \text{ punto crítico de } v \text{ y } 0 = K_r \text{ en } (\gamma, p) = \text{ punto crítico de } v$$

Supongamos ahora que tenemos una forma  $\phi$  de grado  $n-rN$ , definida en  $G_{n-rN, (r+1)N}$ . Si  $v^{-1}(\gamma)$  es una unión de subvariedades orientadas de  $G_r(M)$ , también lo será  $\Pi(v^{-1}(\gamma))$ ;  $\pi: G_r(M) \rightarrow M$ , entonces mediante la aplicación tangente,  $t: \Pi(v^{-1}(\gamma)) \rightarrow G_{n-rN, (r+1)N}$  tomamos  $t^*(\phi) = \text{imagen inversa de } \phi$ .

Supongamos también que  $\int_{\Pi(v^{-1}(\gamma))} \frac{t^*(\phi)}{dV} = \text{un número independiente}$

de  $\Pi(v^{-1}(\gamma))$ , es decir de  $\gamma$ . La integral la tomamos sobre cada una de las componentes de  $\Pi(v^{-1}(\gamma))$ , provista con la orientación que le hemos fijado.

En cada punto  $p \in \Pi(v^{-1}(\gamma))$ , tenemos una función  $f(p)$  bien definida que obtenemos cuando referimos la forma  $t^*(\phi)$  al elemento de volumen  $dV$  de  $\Pi(v^{-1}(\gamma))$ .

Podemos establecer la igualdad  $f(p)dV_\gamma = t^*(\phi)$ , hemos indicado por  $dV_\gamma$  el elemento de volumen de  $\Pi(v^{-1}(\gamma))$ .



Ahora nos interesa probar la relación  $\Pi^*(f dV'_\gamma) = (f \circ \Pi) dV_\gamma$  por.  $\Pi$  indicamos en realidad la restricción de  $\Pi$  a  $v^{-1}(\gamma)$ .

Para ello es suficiente probar que el Jacobiano de  $\Pi$ , referido al elemento de volumen  $dV_\gamma$  y  $d'V'_\gamma =$  elemento de volumen de  $\Pi(v^{-1}(\gamma))$  vale 1.

Pero eso es corolario de la relación  $\Pi^*(\langle, \rangle)$  / subespacio horizontal = restricción del producto de Riemann que es posible definir en  $G_r(M)$  al subespacio horizontal.

Ahora podemos enunciar el siguiente teorema:

TEOREMA:

Supongamos que  $\gamma \in \tilde{G}_{r, n+N-r}$ , es un valor no crítico de  $v$  entonces existe un entorno de  $\gamma$ ,  $U$  donde  $\gamma' \in U \Rightarrow \gamma' \neq$  valor crítico, y la integral

$$\int_{G_r(M)} (f \circ \Pi) K_r dV \wedge dV_{r, n-r} = (\text{vol } U) \times \int_{v^{-1}(\gamma)} t^*(\phi) dV'$$

luego de elegir una orientación de  $M$  adecuada.

Demostración:

Sea  $(\gamma, p) \in v^{-1}(\gamma) \subset G_r(M)$ . En  $(\gamma, p)$  podemos escoger un sistema de coordenadas  $\alpha$ , definido en un abierto  $\Delta_p$

$$\alpha : \Delta_p \longrightarrow I_1 \times I_2 \quad \text{donde}$$

$$I_1 = \{ (x_1, \dots, x_{r(n+N-r)}) \mid |x_i| \leq 1, x_i \in \mathbb{R} \}$$

$$I_2 = \{ (x_1, \dots, x_{n-rN}) \mid |x_i| \leq 1, x_i \in \mathbb{R} \}$$

y de modo que  $\alpha$  sea restricción de un difeomorfismo  $\bar{\alpha}$  entre

$$\Delta_p \subset \Delta'_p \xrightarrow{\bar{\alpha}} I'_1 \times I'_2 \quad \text{con } I'_i \text{ definidos mediante las desigualdades } |x_j| \leq 1 + \epsilon$$

Más aún suponemos  $\alpha$  elegida de modo que el siguiente diagrama, se pueda completar mediante una aplicación  $\alpha'$  que lo haga conmutativo:

$$\begin{array}{ccc}
 A_p & \xrightarrow{\alpha} & I_1 \times I_2 \\
 \downarrow v & & \downarrow p_1 \\
 U_p & \xrightarrow{\alpha'} & I_1
 \end{array}
 \quad (p_1(x,y)=x)$$

con  $v(p) = U_p$ . De tal manera que,  $\alpha'$  verifique la condición

$\alpha' =$  restricción de un sistema de coordenadas  $\overline{\alpha'}$

$U_p \rightarrow I_1'$  que haga conmutativo el diagrama, si se reemplaza  $\alpha$  por  $\overline{\alpha''}$

Supongamos ahora que  $dV \mid v^{-1}(\gamma) \cap A_p = v^*(a(x,y)dx)$

con  $a(x,y) \in C^\infty(I_1 \times I_2)$ ,  $x = (v)(\gamma, p')$ ,  $(\gamma, p') \in A_p$

Por un argumento de compacidad podemos cubrir  $v^{-1}(\gamma)$ , mediante cubos  $(C_i, \alpha_i)$  con  $i = 1, \dots, h$  que verifiquen las condiciones de más arriba y además tales que  $\alpha_i' = \alpha_j'$  para todo  $i, j = 1, \dots, h$

Y las relaciones complementarias siguientes:

- a)  $C_i^o \cap C_j^o = \phi$  para todo  $i, j = 1, \dots, h$
- b)  $v(C_i) = U_i$   $i = 1, \dots, h$

Esto es posible de lograr, por ejemplo, eligiendo un entorno tubular de  $v^{-1}(\gamma)$  y seccionándolo en "rebanadas"

Consideremos ahora la integral:

$$\int_{C_i} b(x) \phi_i(x,y) a_i(x,y) dx \wedge dy, \text{ donde } b(x)dx \equiv \overline{\alpha'}^*(dV_{r,n+N-r})$$

$$\text{y } \phi_i(x,y) = \phi_o \alpha^{-1}, a_i(x,y) = \alpha^{-1}*(dV_{\gamma'}) \quad \alpha' \circ v(\gamma) = x$$

Podemos escribir sintéticamente la siguiente igualdad:

$$\int_{C_i} b(x) a_i(x,y) \phi_i(x,y) dx \wedge dy = \int_U F_i(x) dV_{r,n+N-r}$$

$$\text{donde } F_i(x) = \int a_i(x,y) \phi_i(x,y) dy$$

Tomemos ahora una partición de  $U$ , en pequeños cuadrados dis-  
juntos que cubran  $U$  salvo medida nula :

$\{U_l\}$  ,  $l=1, \dots, m$  para que se verifique:

$$\left| \sum_{l=1}^m F_i(x_l) \mu(U_l) - \int_{C_i} F_i(x) dx \right| < \frac{\epsilon}{h} \quad \text{con } i=1, \dots, h$$

y  $x_l \in U_l$  . Por lo tanto:

$$\left| \sum_{i=1}^h \sum_{l=1}^m F_i(x_l) \mu(U_l) - \int_{v^{-1}(U)} K_r \phi dV_{r, n-r} \right| < \epsilon$$

pero como:  $\sum_{i=1}^h F_i(x_l) = \int_{v^{-1}(\gamma_l)} \phi dV_{\gamma_l}$  ,  $\gamma_l = \alpha^{-1}(x_l)$  resultará

que  $\mu(U) \int_{v^{-1}(\gamma)} \phi dV_{\gamma}$  difiere de la otra integral en menos

de  $\epsilon$ , como éste es arbitrario resultará que coinciden.

Q-E-D.

A partir de este lema podemos evaluar una forma  $\phi$  , tal que su  
integral sobre  $v^{-1}(\gamma)$  , con  $\gamma \neq$  del valor crítico, no dependa  
del  $\gamma$  que se elija.

#### TEOREMA:

Si  $\phi$  es una  $n-r$ -forma tal que su integral:

$\int_{v^{-1}(\gamma)} \phi dV$  , no dependa del  $\gamma$  que se elija, entonces:

$$\int_{G_r(M)} K_r \phi dV \wedge dV_{r, n-r} = \mu(\text{Im } v) \int_{v^{-1}(\gamma)} \phi dV \quad \text{con } \gamma \text{ cual-}$$

quiera, tal que  $\gamma \neq$  valor crítico de  $v$  , luego de elegir una orien-  
tación adecuada de  $M$ .

Demostración: Para ello cubrimos la imagen de  $v$  , por una familia  
finita  $u_1, \dots, u_h$  de abiertos, para los cuales se verifique:

$v^{-1}(U)$  no contiene ningún punto crítico"

Además podemos suponer, gracias al teorema de Sard, que  $\mu(\text{Im } v - \bigcup_{i=1}^h U_i) = 0$ , pues el conjunto de valores críticos de  $v$  tiene medida nula.

Por lo tanto la integral que nos interesa calcular, se podrá expresar como:

$$\int_{G_r(M)} K_r \phi \, dV \wedge dV_{r,n-r} + \int_{\bigcup_{i=1}^h v^{-1}(U_i)} K_r \phi \, dV \wedge dV_{r,n-r} + \int_{v^{-1}(\text{Im } v - \bigcup_{i=1}^h U_i)} K_r \phi \, dV \wedge dV_{r,n-r}$$

Si utilizamos el teorema anterior, nos basta calcular la 2ª integral, pues la primera expresa justamente el resultado buscado. Para evaluar la 2ª integral, nos bastará probar que el subconjunto  $v^{-1}(\text{Im } v - \bigcup_{i=1}^h U_i)$  donde  $K_r \neq 0$ , tiene medida nula.

Pero como sabemos que  $K_r = 0$  si  $x \in \text{Im } v - \bigcup_{i=1}^h U_i$  y  $x$  = punto crítico, será suficiente probar que, para cada  $x \neq$  punto crítico  $\in v^{-1}(\text{Im } v - \bigcup_{i=1}^h U_i)$ , existe un abierto  $U$  entorno de  $x$  tal que

$$\mu(U \cap v^{-1}(\text{Im } v - \bigcup_{i=1}^h U_i)) = 0.$$

Pero si  $U$  es suficientemente pequeño, se podrá expresar como un abierto rectangular de  $\mathbb{R}^{n-rN} \times \mathbb{R}^{r(n+N-r)}$  (ver la demostración del teorema anterior).

Además  $v$  coincidirá con la proyección  $\Pi$  sobre  $\mathbb{R}^{r(n+N-r)}$ , entonces  $U \cap (v^{-1}(\text{Im } v - \bigcup_{i=1}^h U_i))$  se podrá expresar como la imagen inversa de un conjunto de medida nula, respecto de la medida de  $\mathbb{R}^{n-rN} \times \mathbb{R}^{r(n+N-r)}$ .

Pero esa medida es absolutamente continua respecto de la que nos interesa, es decir de la de  $G_r(M)$ , luego así obtenemos el resultado buscado.

## 19) Puntos críticos excepcionales y clases de Pontryaguin

Sea  $M$  una subvariedad de  $\mathbb{R}^{n+N}$ , para la que existe  $r$  tal que se verifica  $rN < n$ .

Consideremos  $v: G_r(M) \rightarrow G_{r, n+N-r}$  y  $\gamma \in G_{r, n+N-r}$  tal que  $\gamma \in \text{Im } v$ ,  $\gamma \neq$  valor crítico, entonces  $p: M \rightarrow \gamma$  determina un ciclo crítico  $S_N$  de dimensión  $n-rN$ , que resulta unión de subvariedades orientables.

Los puntos críticos excepcionales, son, como sabemos aquellos donde  $p/S_N$  posee puntos críticos. En el caso de una proyección ortogonal, se pueden determinar fácilmente.

Sea  $T_{m,p,m} = n-rN$  el plano tangente a  $S_N$ , entonces  $T_{m,p} \subset$  plano tangente a  $M$  en  $p$ , y  $p$  será punto crítico de rango  $\leq r$ , si  $\gamma \cap T_{m,p}$  tiene dimensión mayor o igual que  $m-r$ .

Nos interesan, de entre todos los  $\gamma$ , aquellos que determinen ciclos orientables y sin torsión, pues en ese caso determinarán un ciclo dual (en el sentido de Poincaré).

Una vez conocida una forma  $\phi'$  dual, del ciclo de Schubert que determina  $\gamma$ , podemos reemplazar en los teoremas anteriores  $\phi$  por  $\phi'$  y así obtener información sobre los ciclos críticos excepcionales de dimensión 0 en  $S_N$ .

Para llevar a cabo eso, deberemos estudiar los ciclos de Schubert tales que resultan orientables y sin torsión.

Es posible demostrar (ver Pontryaguin (1)) que los únicos ciclos orientables sin torsión vienen dados por los que se pueden expresar como a continuación.

Sea  $|\omega_{(1)}, \dots, \omega_{(n)}|$  el símbolo de Schubert de un ciclo y escribamos  $\chi = N - \omega$ , entonces  $\chi$  resultará ser una función no decreciente que caracteriza al ciclo.

Entonces el resultado dirá lo siguiente:

Un ciclo de Schubert  $Z\omega$  (o bien  $Z\chi$ ) será orientable y sin torsión si verifica:

$$\begin{aligned} \chi(1) &= \chi(2) = 0 & (2) \\ \dots & \dots & \\ \dots & \dots & \\ \chi(2t-1) &= \chi(2t) = 0 & (2) \\ \chi(2t+1) &= \chi(2t+2) = \dots = \chi(n) = 0 \end{aligned}$$

Para las dimensiones bajas de la homología  $r \leq n+1$  donde  $\chi(i) = r$ , y además  $n$  pequeño en relación a  $N$ ;  $n \leq N-2$

Esta última condición es importante cuando se quieren calcular los números de Pontryaguin utilizando la 2ª forma.

Como corolario inmediato resultará que, para calcular los números de Betti de  $G_{n,N}$  en dimensiones bajas bastará calcular el número de funciones  $\chi$  que verifiquen las condiciones indicadas.

Pero lo que nos será útil en realidad, es el conocimiento de las formas duales, en el sentido de Poincaré.

Para ello es necesario resolver el siguiente problema algebraico:

"Construir una base del espacio vectorial de formas invariantes de  $\hat{G}_{n,N}$  de órdenes  $\leq n+1$ "

Sea  $\gamma \in \hat{G}_{n,N}$  y  $\|\omega_{is}\|$ ,  $i=1, \dots, n$ ;  $s= n+1, \dots, n+N$ , las formas diferenciales que son posibles definir en  $\hat{G}_{n,N}$  utilizando una base  $e_1, \dots, e_{n+N}$  de  $\mathbb{R}^{n+N}$ .

Podemos también considerar la siguiente matriz de  $n \times n$  2-formas:

$$\|\omega_{is}\| \times \|\omega_{si}\| = \|\Omega_{ij}\|$$

Entonces es posible demostrar que mediante las formas:

$$P_{4k} = \sum_{i_1, \dots, i_{2k}} \delta_{j_1, \dots, j_{2k}}^{i_1, \dots, i_{2k}} \Omega_{i_1 i_2} \wedge \dots \wedge \Omega_{i_{2k-1} i_{2k}}$$

se pueden expresar todas las formas invariantes de órdenes  $\leq n+1$  efectuando productos y continuaciones lineales.

Además se consideran todos los productos:

$$P_{4k_1}, P_{4k_2}, \dots, P_{4k_\alpha} \quad ; \quad k_1 \leq \dots \leq k_\alpha$$

Entonces resulta que todos estos productos determinan una base de la cohomología con formas, o de lo que es lo mismo, de las formas invariantes en  $G_{n,N}$ .

Utilizando la relación  $d\omega - \omega \wedge \omega = 0$ , en  $SO_{(n+N)}$ , se deduce rápidamente que la matriz  $\|\Omega_{ij}\|$  que acabamos de introducir, es la matriz de curvatura respecto de la métrica de Riemann, introducida por la de  $\mathbb{R}^{n+N}$ .

Lo interesante es que mediante todas estas formas, se obtiene toda la información posible utilizando clases características a coeficientes reales.

Lo que interesa es aplicar estos resultados para el estudio de los ciclos excepcionales.

Como toda la información que podemos obtener, en cohomología real, sobre los ciclos excepcionales resulta a partir de esas formas, es suficiente estudiar como varían cuando variamos la proyección ortogonal sobre  $\gamma : p:M \rightarrow \gamma$

En realidad nos interesa saber como varían las integrales siguientes:

Sea  $v:G_r(M) \rightarrow \tilde{G}_{r,n+N-r}$  la aplicación de siempre y consideremos una curva  $0 \leq t \leq T$  ( $\gamma_t$ ) en  $\tilde{G}_{r,n+N-r}$  que no pase por ningún valor crítico de  $v$ , y esté en la imagen de  $\tilde{G}_{r,n+N-r}$ , entonces  $v^{-1}(\gamma_t)$  resulta ser una subvariedad con borde de  $\tilde{G}_{r,n+N-r}$  y su borde consiste de las dos subvariedades  $v^{-1}(\gamma_0)$  y  $v^{-1}(\gamma_1)$ .

Ahora si consideramos cualquiera de las clases de Pontryaguin de codimensión 0, sobre  $S_N^0 =$  ciclo crítico de  $p; M \rightarrow \gamma_0$  ó sobre  $S_N^1 =$  ciclo crítico de  $p; M \rightarrow \gamma_1$ , resultará que integradas sobre  $S_N^0$  o sobre  $S_N^1$  serán iguales.

Para demostrar esa afirmación consideramos  $\Pi:G_r(M) \rightarrow M$  la proyección ordinaria, entonces para evaluar los números de Pontryaguin sobre  $S_N^0$  es suficiente hacerlo sobre  $v^{-1}(\gamma_0)$  y, los de  $S_N^1$ , es suficiente hacerlo en  $v^{-1}(\gamma_1)$ .

Pero por la construcción geométrica que acabamos de ver, resulta que  $v^{-1}(\gamma_0)$  y  $v^{-1}(\gamma_1)$  son variedades cobordantes y por lo tanto tienen los mismos números de Pontryaguin.

Así pudimos demostrar que la integral  $\int_{v^{-1}(\gamma)} \phi$  no cambia de valor cuando  $\gamma$  varía en un abierto  $U$  contenido en la imagen de  $v$ .

Pero no podemos deducir que ocurra lo mismo si  $\gamma$  y  $\gamma'$  son dos elementos de la imagen de  $v$ , que puedan ser unibles en  $\text{Im } v$  por una curvatura que corta el conjunto de valores críticos.

En ese caso podríamos modificar  $v$  de manera de seguir preservando la transversalidad, puesto que cabe recordar que puede suceder que el conjunto de valores críticos desconecte a la imagen



20) Algunas observaciones sobre la curvatura  $K_r$  :

Hemos demostrado que  $\int_{G_r(M)} K_r dV \wedge dV_{n-r, r} = (\text{índice del ciclo crítico de un campo de vectores}) \times \text{volumen de la imagen de } \nu$ .

Sin embargo en las demostraciones, hemos eludido el caso  $n+N-r = n$

es decir, cuando  $N = r$ . Ahora trataremos de expresar el ciclo

crítico ese mediante clases características conocidas.

Razonaremos ahora utilizando la cohomología a coeficientes  $Z_2$

en primer lugar para que se comprenda la idea del procedimiento. Dada una familia de vectores  $v_1, v_2, \dots, v_{n+r-1}$ , nos interesa

determinar su ciclo crítico,  $Z$ , y el cociclo dual que determina. Elijamos en  $M$ , un producto de Riemann  $\langle \rangle$  cualquiera, y  $e_1, \dots, e_n$

un repere definido en un abierto  $U \subset M$

Entonces se verifica que  $\text{rango} \|\langle e_i, v_j \rangle\| < n-1$

$\Leftrightarrow \text{rango} [v_1, v_2, \dots, v_{n+r-1}] \leq n-1$

Supongamos la variedad de  $M$ , sumergida en  $\mathbb{R}^{n+N}$ ;

$e \in M \xrightarrow{\mathbb{R}^{n+N}} \mathbb{R}^{2n+N-r-1}$

Construimos en  $\mathbb{R}^{2n+N-r-1}$  una aplicación clasificante, homoto

picamente equivalente a la aplicación tangente a  $M$ ;  $t: M \rightarrow \tilde{G}_{n, n+N+r-1}$

$t(p) =$  plano generado por los vectores siguientes

$t(p) =$  plano generado por los vectores siguientes

$$e'_i = e_i + \sum_{j=1}^{n+r-1} \langle e_i, v_j \rangle g_j \quad i = 1, \dots, n$$

Para determinar la clase de cohomología dual al ciclo crítico de

$v_1, \dots, v_{n+r-1}$ , debemos considerar, el ciclo de Schubert

de todos los subespacios de  $\tilde{G}_{n, n+N+r-1}$  que intersecan a

$\mathbb{R}^{n+N} \xrightarrow{\mathbb{R}^{2n+N+r-1}}$ , según un subespacio de dimensión igual a 1.

Por un razonamiento habitual resulta ser que el símbolo de Schubert

que representa a ese ciclo es:

Por otra parte  $S$  determina un cociclo dual de dimensión  $v$ , describiremos ahora de qué modo. En  $\tilde{G}_{n,N}$  tenemos la siguiente relación entre ciclos de Schubert, de dimensión complementaria:

$$KI ( a_1, a_2, \dots, a_n , [N-a_n \dots N-a_1] ) = 1$$

y

$$KI ( a_1, a_2, \dots, a_n , [N-b_n, \dots, N-b_1] ) = 0$$

en los demás casos, ver Pontryaguin (1)

Si ahora siguiendo la notación de Chern, ver , denominamos por  $\{a_1, \dots, a_n\}$  al cociclo , así definido:

$$\{a_1, \dots, a_n\} [a_1, \dots, a_n] = 1 \quad y$$

$$\{a_1, \dots, a_n\} [b_1, \dots, b_n] = 0 \quad \text{en caso contrario,}$$

resulta que la clase de cohomología dual en el sentido de Poincare al ciclo  $S$  , tiene por símbolo  $\{0, \dots, 0, r\}$

Consideramos ahora un campo sobre  $M$  , formado por  $n+1-r$  vectores

$[v_1, \dots, v_{n-r+1}]$  y determinamos el ciclo crítico de esos vectores así definidos (resultará ser igual) rango:

$$[v_1, \dots, v_{n-r+1}] \leq n-r$$

utilizando un argumento similar al anterior se demuestra que, para estudiar el ciclo crítico debemos considerar la imagen inversa por  $+$  del cociclo de Schubert  $\{0, 0, \dots, 1, 1, \dots, 1\}$   $r$  veces

En el mismo artículo de Chern (2), se demuestra que existe la siguiente relación entre los cociclos  $\omega_i$ ,  $i = 1, \dots, n$  y

$\bar{\omega}_i$ ,  $i = 1, \dots, n$  (o mejor expresado entre sus imágenes inversas por)  $:\sum_{i=0}^n \omega^i \cup \bar{\omega}^{n-i} = 0$  o bien sumando 1 a ambos miembros  $1 + \sum_{i=0}^n \omega^i \cup \bar{\omega}^{n-i} = 1$  , es decir se verifica la siguiente

relación entre las clases de cohomología:

$$(1 + \omega_1 + \dots + \omega_n)^{-1} = 1 + \bar{\omega}_1 + \dots + \bar{\omega}_n$$

Lo que nos será útil más adelante, es la interpretación de esta relación a través de ciclos críticos.

Ahora volvamos a nuestro objetivo inicial, y consideramos sobre  $M$  el campo de  $n+N-r$  vectores  $N > r$ , e investigamos la clase de cohomología dual del ciclo crítico siguiente,

rango  $|v_1, \dots, v_{n+N-r}| \leq n-r$  esta es una clase de codimensión 0

Ese ciclo es imagen inversa del cociclo de Schubert de símbolo siguiente:  $\{0, \dots, 0, \overbrace{N, \dots, N}^{r \text{ veces}}\}$  entonces podemos expresar

$\{0, \dots, 0, N, \dots, N\}$  utilizando la siguiente fórmula

$$\{a_1, \dots, a_n\} \sim \begin{vmatrix} \{a_1\}, \{a_1-1\} \dots \{a_1-(n-1)\} \\ \{a_2+1\} \{a_2\} \dots \{a_2-(n-2)\} \\ \{a_n+(n-1)\} \dots \{a_n\} \end{vmatrix}^* \quad \text{reemplazando}$$

mediante la expresión anterior, logramos el siguiente resultado:

$$\{0, 0 \dots N, N\} \sim \left. \begin{array}{c} \overbrace{\begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ * & & & 1 \\ & & & N & N-1 & \dots & N-r+1 \\ * & & & N+r-1 & \dots & N \end{vmatrix}}^{r \text{ columnas}} \\ \end{array} \right\} r\text{-filas donde para}$$

efectuar el desarrollo se utiliza el producto de cohomología, además hemos reemplazado  $N$  por  $N$ , finalmente:

$$\{0, \dots, 0, \overbrace{N, \dots, N}^{r \text{ veces}}\} = \begin{vmatrix} N & N-1 & \dots & N-r+1 \\ \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot \\ N+r+1 & & & N \end{vmatrix}$$

Desgraciadamente esta fórmula sólo es válida para expresar el índice del campo de vectores, reduciendo módulo 2.

Sin embargo lo interesante, es que podemos lograr una expresión análoga, pero utilizando clase de Pontryaguin, que resultará la que nos interesa a nosotros.

Consideremos el caso en que  $r$  y  $N$  son pares, entonces la clase de cohomología  $\{0, \dots, 0, \overset{r\text{-veces}}{N}, \dots, N\}$  se puede expresar mediante clases de Pontryaguin. Puesto que el ciclo  $\{0, \dots, \overset{\overbrace{n-r \text{ veces}}}{N}, \dots, N\}$  es orientable y sin torsión.

utilizamos la convención  $\{x\} = 1$  si  $x = 0$  y  $\{x\} = 0$  si  $x < 0$ . Pero en este caso la expresión es más complicada que la anterior. Además conviene indicar que las clases que nosotros indicamos más arriba por  $P_{4k}$  defiere de la clase dual de  $[\overset{\overbrace{2 \text{ r veces}}}{N-2}, \dots, N-2, N, \dots, N]$  en un factor, ver Chern( ).

Entonces para lograr un resultado análogo al anterior primeramente expresamos la clase dual de  $[0, \dots, N, \dots, N]$  mediante ciertos coeficientes que se pueden determinar, mediante las integrales de esos campos sobre los ciclos  $Z_x$ .

## 21) Clases de Pontryaguin y ciclos orientables:

Sabemos que, dada una variedad  $M$ , se definen las clases de Pontryaguin de  $M$  como la imagen inversa de las clases duales de cohomología de los ciclos de símbolos

$$[\overset{\overbrace{n-2k}}{N-2}, \dots, N-2, N, \dots, N] \text{ siempre que } M \text{ tenga dimensión divisible por cuatro.}$$

Para investigar los problemas de singularidades, de campos de vectores debemos establecer una relación geométrica, que caracterice a los cociclos, como duales de ciclos de singularidades, de campos de vectores.

### AFIRMACIÓN:

"Si  $[v_1, \dots, v_{n-2k+2}]$ , es un campo de  $n-2k+2$  vectores definido sobre  $M$ , la clase de cohomología dual de su ciclo

crítico, rango  $[v_1 \dots] \leq n-2K$  es la clase de Pontryaguin de dimensión  $4K$ .

Para demostrar esta afirmación, utilizamos la técnica usual, de construir una aplicación clasificante del fibrado tangente de  $M$  conveniente.

Supongamos en principio que  $M$ , está sumergida en  $\mathbb{R}^{n+N}$ . Entonces construimos la aplicación:

$$\tau: M \rightarrow \tilde{G}_{n, 2n+n-2K+2}, \text{ así:}$$

$t(p)$  = subespacio generado por los vectores  $e'_i$  donde

$$e'_i = e_i + \sum_{j=1}^{n-4K+2} \langle v_j, e_i \rangle g_j \quad \text{donde } \{e_i\}, i=1 \dots n \text{ es}$$

cualquier base del espacio tangente a  $M$  en  $P$ .

Como rango  $\|\langle v_j, e_i \rangle\| \leq n-2K \Leftrightarrow [\text{rango } v_1, \dots, v_{n-2K+2}] \leq n-2K$

resulta que los puntos donde el campo tiene rango  $\leq n-2K$  son la imagen inversa del ciclo de Schubert, de símbolo

$$\left[ \overbrace{n+N-2K, \dots, n+N-2K}^{2K \text{ veces}}, \overbrace{n+N-2K+2, \dots, n+N-2K+2}^{n-2K \text{ veces}} \right]$$

Entonces de aquí resulta la afirmación, trivialmente.

Análogamente podemos considerar el ciclo crítico de un campo de  $n+2K-2$  vectores, donde rango  $[v_1, \dots, v_{n+2K-2}] \leq n-2$  y es posible demostrar que ese ciclo es dual, de la clase de Pontryaguin, normal a  $M$ .



## CAPITULO IV

### 22) Singularidades de aplicaciones entre fibrados

Varias veces hemos tenido oportunidad de calcular invariantes topológicos de una variedad utilizando datos locales en las singularidades de funciones definidas sobre la variedad.

Sea  $f: M \rightarrow \mathbb{R}^h$  una aplicación diferenciable que verifique ciertas condiciones de transversalidad, entonces el ciclo crítico de  $f$  donde  $\text{rango } f = h$  es calculable mediante las clases características de  $M$ .

Finalmente con una integral que recopila los datos locales, es posible evaluar el ciclo. El método que hemos utilizado en general consistió en asignar a los puntos críticos de  $f$  un índice  $\pm 1$  calculable a partir del comportamiento de  $f$  en un entorno del punto crítico y analizar luego la condición global que deben verificar los diferentes índices. Esta última depende de la estructura topológica de la variedad  $M$ .

Siguiendo la misma línea de ideas estudiaremos un método general, que permita expresar los ciclos críticos de aplicaciones no ya entre  $M$  y algún espacio euclídeo, sino entre variedades en general. Para eso, ampliamos el problema y resolvemos el caso más general siguiente, propuesto por Bott, en el artículo "On a Topological Obstruction to Integrability".

Sea  $\lambda: F \rightarrow TM$  una aplicación entre el fibrado tangente a  $M$  y un fibrado  $F$  cualquiera, que goce de la siguiente propiedad: en los puntos en donde es no-degenerada, es decir  $\text{rango } \lambda = \text{máximo}$ , la imagen de dos secciones de  $F$  por  $\lambda$ ,  $S_1$  y  $S_2$  verifica

siempre que  $[\lambda S_1, \lambda S_2]$ , es una sección que está en la imagen de  $\lambda$ .

Por otra parte  $F$ , determina como siempre, un polinomio característico  $C = 1 + C_1 + \dots + C_m$  = polinomio de Chern, o bien  $W = 1 + W_1 + \dots + W_m$  = polinomio de Stiefel Whytneye, o el de Pontryaguín  $P = 1 + P_4 + \dots + P_{4k}$ ;  $4k = m$ . Análogamente para  $TM$ , podemos definir los mismos polinomios  $C'$ ,  $W'$ ,  $P'$ , respectivamente.

El problema que resulta ser de importancia es el de determinar en el cociente  $C'.C^{-1}, W'.W^{-1}$  o bien  $P'.P^{-1}$ , los términos de grado estrictamente mayor a  $n-m$ , mediante los conjuntos críticos de  $\lambda$ , es decir mediante los ciclos donde rango  $\lambda < m$ .

En esa dirección, Bott, ha demostrado, según afirma en el trabajo citado, que vale la siguiente fórmula de más abajo(1), en cohomología real, cuando tenemos dos fibrados holomorfos sobre  $M$ ,  $TM$  y  $F$  y  $\lambda$  es holomorfa,  $\dim F = 1$  y  $\lambda$  verifica además la siguiente condición de transversalidad:

"Si  $\lambda(p) = 0$ , entonces tomamos alrededor de  $p$  una sección de  $F$ , no nula en  $p$ ,  $S(p) \neq 0$ ,  $\lambda(S)$  es una sección de  $TM$ , tal que  $D(\lambda S)$  determina una sección de  $TM \otimes TM^* \sim \text{Hom}(TM, TM)$ , no singular en  $p$ ".

He aquí la fórmula: si indicamos por  $L$  el valor de  $D(\lambda S)$  en  $p$  entonces, si indicamos por  $C_1^{\alpha_1} \dots C_n^{\alpha_n}(M) = C^\alpha(M)$ , con  $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n = \dim_{\mathbb{Q}}(M)$ , es decir el número de Chern  $|\alpha|$ -ésimo de  $M$ , tendremos que

$$(1) \quad C^\alpha(M) = \sum_p \frac{C^\alpha(L)_p}{C_n(L)_p}$$

donde la suma está extendida sobre los puntos críticos de  $\alpha$ ,  $p$ ,  
y  $C(L)$  viene determinado por:

$$C^\alpha(L) = C_1^\alpha(L) \dots C_n^\alpha(L)$$

$$\det(1+tL) = \sum t^i C_i(L)$$

Veremos que es posible determinar fórmulas análogas, para el  
caso de tener, que  $\dim L > 1$

Daremos un método consecutivo para fórmulas de este tipo.

Nuestro método de demostración consistirá en utilizar las de-  
finiciones de clases características, como ciclos críticos de  
campos de vectores o cociclos asociados y aproximaciones trans-  
versales se secciones .

---

### 23) Condiciones de Schubert y las hipótesis de transversalidad

Introduciremos ahora algunas nociones auxiliares que nos se-  
rán útiles durante el desarrollo, aún cuando ya hemos tenido o-  
portunidad de utilizarlas antes bajo otro aspecto.

De ahora en adelante indicaremos por  $\sigma$  una función no decre-  
ciente a valores enteros no negativos definida sobre un inter-  
valo de la forma  $|| 0, n-1 ||$  tal que  $\sigma(0) \geq 0$ .

Sea  $E$  un espacio vectorial de dimensión  $n$  real o complejo.

DEFINICIÓN 1: Si  $v_1, \dots, v_m$  son  $m$  vectores arbitrarios de  $E$ ,  
diremos que  $v_1, \dots, v_m$  satisfacen (estrictamente) la condición  
de Schubert asociada a  $\sigma$  si verifican las relaciones:



$$\begin{aligned}
& 1) \text{ rango } |v_1, \dots, v_{\sigma(0)}| \leq 0 \quad (\text{rango } |v_1, \dots, v_{\sigma(0)}| = 0) \\
& \vdots \\
& i) \text{ rango } |v_1, \dots, v_{i+\sigma(i)}| \leq i \quad (\text{rango } |v_1, \dots, v_{i+\sigma(i)}| = i) \\
& \vdots \\
& 0 \leq i \leq m-1
\end{aligned}$$

La nomenclatura se debe a que estas condiciones pueden ser descripciones mediante ciclos de Schubert adecuados.

Análogamente tenemos para un conjunto de secciones de un fibrado vectorial:

DEFINICION 2: Las secciones  $S_1, \dots, S_m$  de un fibrado vectorial  $F$  sobre  $M$  verificarán la condición de Schubert  $\sigma$  en  $x \in M$  (estrictamente) si  $S_1(x), \dots, S_m(x) \in F_x$  satisfacen las condiciones de la definición 1 (estrictamente)

Si  $E$  y  $F$  son fibrados vectoriales de dimensiones  $n$  y  $m$  respectivamente,  $\text{Hom}(E, F)$  es un fibrado vectorial completamente caracterizado por la siguiente condición: El espacio vectorial de las secciones de  $\text{Hom}(E, F)$  definidas sobre un abierto  $U$ ,  $\Gamma_U \text{Hom}(E, F)$  consiste de todos los homomorfismos de  $E$  en  $F$  definidos sobre  $U$ . ( $\Gamma_U$  es el símbolo usual utilizado para indicar todas las secciones definidas sobre  $U$ )

La fibra de  $\text{Hom}(E, F)$  es  $\text{Hom}(K^n, K^m) = K^{n \times m}$  (con  $K = \mathbb{R}$  ó  $\mathbb{C}$ ) y el grupo estructural es  $GL(n, k) \times GL(m, k)$ .

Dado que la acción de  $GL(n, k) \times GL(m, k)$  descompone la fibra  $\text{Hom}(K^n, K^m)$  naturalmente en órbitas que corresponden a las matrices de rango  $\min(n, m), \min(n, m)-1, \dots$  etc, por lo tanto podemos expresar  $\text{Hom}(E, F)$  como una unión de fibrados disjuntos:

$$\text{Hom}(E, F) = \bigcup_{k \geq 0} J_k \text{Hom}(E, F)$$

donde para cada  $0 \leq k \leq \min(n,m)$  la fibra  $J_k \text{ Hom}(E,F)_x$  consiste de todas las aplicaciones lineales de  $E_x$  en  $F_x$  que son de rango  $k$ , luego  $J_k \text{ Hom}(E,F)$  es un fibrado de subvariedades de  $\text{Hom}(E,F)$ .

Mediante esta descomposición de  $\text{Hom}(E,F)$  podemos introducir una noción de transversalidad para secciones de  $\text{Hom}(E,F)$ .

DEFINICION 3: Sea  $v$  una sección de  $\text{Hom}(E,F)$  sobre  $U$ , es decir  $v \in \Gamma_U \text{ Hom}(E,F)$ , entonces  $v$  se dirá transversal si  $v$  es transversal a la subvariedad  $J_k \text{ Hom}(E,F)$  para cada  $k$ , tal que  $\min(n,m) > k \geq 0$

Analíticamente esta condición puede ser expresada así: si  $v(x_0) \in J_k \text{ Hom}(E,F)$ , entonces podemos construir secciones trivializadoras  $\{e_i\}_{i=1}^n$  de  $E/U$  y  $\{f_j\}_{j=1}^m$  de  $F/U$ , con  $x_0 \in U$  de modo que la matriz de  $v$  respecto de estas secciones venga dada por:

$$\|v(x_0)\|_{e,f} = \begin{array}{|c|c|} \hline & \begin{array}{c} \text{A} \\ \hline \end{array} \\ \hline \begin{array}{c} \hline \\ \end{array} & \begin{array}{c} \text{B} \\ \hline \end{array} \\ \hline \end{array}$$

con  $A =$  Matriz de  $K \times K$ , que tiene unos sobre la diagonal y ceros fuera de ella, y  $B$  es una matriz de  $(n-k) \times (m-k)$ .

A cada elemento  $b_{\alpha\beta}$  de  $B$  asociamos de manera natural un menor  $D^{\alpha\beta}$  de  $(k+1) \times (k+1)$ , que se obtiene agregando a  $A$  la línea  $\alpha$  y la columna  $\beta$ . Entonces en un entorno de  $v(x_0)$  obtenemos las siguientes  $(n-k) \times (m-k)$  ecuaciones para la subvariedad  $J_k \text{ Hom}(E,F)$ :

$$D^{\alpha\beta} = 0 \quad k+1 \leq \alpha \leq n; k+1 \leq \beta \leq m$$

Finalmente la condición de transversalidad que debe verificar la sección , se expresa así:

$$v^* |dD^{k+1,k+1} \wedge dD^{k+1,k+2} \wedge \dots \wedge dD^{n,m}| = |db^{k+1,k+1} \wedge \dots \wedge db^{n,m}| \neq 0$$

Por un procedimiento análogo al utilizado para definir  $J_k \text{Hom}(E,F)$  es posible asociar a cada condición de Schubert  $\sigma$  una subvariedad crítica  $J_\sigma \text{Hom}(\mathbb{R}^m, F)$  de  $\text{Hom}(\mathbb{R}^m, F)$  (el procedimiento puede ser usado también si sustituimos  $\mathbb{R}$  por  $\mathbb{C}$ ).

Esta subvariedad será útil para obtener una descripción completa de las singularidades de cualquier sistema de secciones definidas sobre  $F$ .

Introducimos ahora la noción de transversalidad de secciones:

**DEFINICION 4:** Si  $S_1, \dots, S_m$  son  $m$  secciones sobre  $U$ , entonces  $S_1, \dots, S_m$  verifican la condición de transversalidad como secciones si la sección  $v$  que determinan de  $\text{Hom}(\mathbb{R}^m, F)$  ( $v(x)(e_1) = S_1(x)$  ..... ,  $v(x)(e_m) = S_m(x)$  con  $e_1, \dots, e_m$  vectores de la base canónica) intersecan transversalmente cada subvariedad  $J_\sigma \text{Hom}(E, F)$

Evidentemente si  $S_1, \dots, S_m$  verifican las condiciones de la definición 4, también verificarán las de la definición 3, sin embargo la afirmación recíproca no es cierta.

La condición de Schubert sobre un sistema  $S_1, \dots, S_m$  de secciones de un fibrado vectorial  $F$ , se puede expresar mediante las siguientes relaciones algebraicas:

$$1) S_{i_1} \wedge S_{i_2} = 0 \quad \text{con } 1 \leq i_1, i_2 \leq 1+\sigma(1)$$

$$2) S_{i_1} \wedge S_{i_2} \wedge S_{i_3} = 0 \quad \text{con } 1 \leq i_1, i_2, i_3 \leq 2+\sigma(2)$$

$$r) S_{i_1} \wedge \dots \wedge S_{i_{r+1}} = 0 \quad \text{con } 1 \leq i_1, i_2, \dots, i_{r+1} \leq r+1 \quad (r).$$

Sean  $m$  secciones  $s_1, \dots, s_m$  subordinadas a la condición de Schubert  $\sigma$  en  $x_0$  (estrictamente) donde  $\sigma$  se expresa así:

$$\text{rango } [s_1, \dots, s_r] = e' \quad \text{y} \quad \text{rango } [s_1, \dots, s_m] = k \quad \text{con } k \geq e'$$

Entonces podemos determinar una trivialización de  $F/U$  mediante secciones  $f_1, \dots, f_n$  de modo que la matriz de las secciones en  $x_0$  tenga la forma:

$$\begin{array}{c}
 \left. \begin{array}{l} 1' \\ \vdots \\ r \end{array} \right\} \left[ \begin{array}{c|c} \begin{array}{ccc} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{array} & \\ \hline & A \\ \hline & \left[ \begin{array}{ccc} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{array} \right] \\ \hline & B \end{array} \right. \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \right\} k - 1'
 \end{array}
 \quad (1 \geq 1')$$

Sea  $A = \|a_{\alpha\beta}\|$  y la matriz  $B = \|b_{\gamma\delta}\|$ , entonces a cada elemento  $a_{\alpha\beta}$  le podemos asociar un menor  $D^{\alpha\beta}$  de  $(k'+1) \times (k'+1)$  que se obtiene completando la matriz de la esquina superior mediante la fila  $\alpha$  y la columna  $\beta$ , análogamente a cada elemento de la matriz  $B$  le podemos asociar un menor  $D^{\gamma\delta}$ .

Notamos que el menor  $D^{\alpha\beta}$  sobre la imagen de  $v$  se reduce a

Finalmente obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones para la subvariedad  $J_\sigma \text{Hom}(\mathbb{R}^m, F)$  en un entorno del punto

$$(x_0, s_1(x_0), \dots, s_m(x_0)) : D^{\alpha\beta} = 0, \dots, D^{\gamma\delta} = 0$$

Mientras que las condiciones de transversalidad vienen dadas por:

$$v^* (\wedge_{\alpha,\beta} dD^{\alpha\beta}) \wedge (\wedge_{\gamma,\delta} dD^{\gamma\delta}) = (da_{\alpha\beta} \wedge db_{\gamma\delta}) \neq 0$$

Donde  $v$  representa la sección de  $\text{Hom}(\mathbb{R}^m, F)$  que  $s_1, \dots, s_m$  determinan.

Mediante una diferenciación covariante definida en  $F$  es posible expresar las mismas condiciones mas sintéticamente. Observamos primeramente que la condición de Schubert  $\text{rango}[S_1, \dots, S_r] = 1'$  y  $\text{rango}[S_1, \dots, S_m] = 1$  se pueden expresar mediante las siguientes condiciones equivalentes

$$a) S_1 \wedge \dots \wedge S_{1'} \wedge S_j = 0 \quad 1'+1 \leq j \leq r$$

$$b) S_1 \wedge \dots \wedge S_{1'} \wedge S_{r+1} \wedge \dots \wedge S_{r+1-1'} \wedge S_k = 0 \quad 1+r+(1-1') \leq k \leq m.$$

Por otra parte si  $D$  es una diferenciación covariante definida en  $F$  es posible extenderla a una diferenciación en  $\Lambda F = \Lambda^0 F \oplus \Lambda^1 F \oplus \dots \oplus \Lambda^n F$ , si  $(\dim F = n)$ .

La extensión de  $D$  a  $\underbrace{F \otimes \dots \otimes F}_n$  se realiza de manera natural por

$$D(S_1 \otimes S_2 \otimes \dots \otimes S_n) = D S_1 \otimes S_2 \otimes \dots \otimes S_n + \dots + S_1 \otimes \dots \otimes D S_n$$

para obtener la extensión buscada basta observar que  $\Lambda^k F$ , por lo tanto si  $\gamma$  es una sección de  $\Lambda F$ ,  $A^0 D(\gamma) =$  diferencial covariante de  $\gamma$ . Además recordamos que si  $S$  es una sección de  $F$  cuando  $S$  se anula en  $x$ ,  $DS(x)$  no depende de la diferenciación covariante que se elija. La demostración de este hecho es una simple verificación en coordenadas locales.

Sean ahora  $D(S_1 \wedge \dots \wedge S_{1'} \wedge S_j)$  con  $1'+1 \leq j \leq r$ , las diferenciales covariantes de las secciones indicadas, como  $D(S_1 \wedge \dots \wedge S_{1'} \wedge S_j)$  es una sección de  $(\Lambda F) \otimes T^*M$  se puede expresar así:

$$D(S_1 \wedge \dots \wedge S_{1'} \wedge S_j) = \sum_{h=1}^n \alpha_{jh} S_1 \wedge \dots \wedge S_{1'} \wedge f_h, \text{ donde } S_j = \sum_{h=1}^n \alpha_{jh} f_h \text{ y } f_1, \dots, f_n \text{ es un repère de } F \text{ definido en un entorno de } x, \text{ que verifica:}$$

$$f_1 = S_1, \quad f_{1'} = S_{1'}, \quad f_{1'+1} = S_{r+1}, \dots, \quad f_1 = S_r + (1-1').$$

Podemos encontrar expresiones análogas para cada una de las diferenciales covariantes  $D(S_1 \wedge \dots \wedge S_{1'} \wedge S_{r+1} \wedge \dots \wedge S_{1-1'+r} \wedge S_k)$  de manera evidente.

Por otra parte como  $(\Lambda F \otimes T^*M) \cong \text{Hom}(TM, \Lambda F)$ , resulta que en el punto  $x$  donde  $S_1, \dots, S_m$  verifican la condición de Schubert  $\sigma$

cada sección  $S_j$ ,  $l'+1 \leq j \leq r$  determina un homomorfismo  $h_j$  de  $TM_x$  en  $\Lambda F_x$  definido por  $D(S_1 \wedge \dots \wedge S_{l'}, \wedge S_j)_x \in \text{Hom}(TM, \Lambda F)_x$ . Del mismo modo cada sección  $S_k$  con  $l+r+(1-l') \leq k \leq m$  determina un elemento  $h_k$  de  $\text{Hom}(TM, \Lambda F)_x$ .

Por lo tanto la condición de transversalidad en el punto  $x$  podemos expresarla diciendo que la intersección de los núcleos de los homomorfismos  $h_j$  y  $h_k$  tiene codimensión igual a

$$(r-l') \times (n-l') + (m-r-l+1') \times (n-r-l+1').$$

Supongamos ahora que la variedad  $M$  en cuestión está sumergida en un espacio euclídeo de dimensión  $N$ ,  $i: M \rightarrow \mathbb{R}^N$ , y además que tenemos determinada una aplicación para el fibrado  $F$ , es decir

$$\phi: M \rightarrow \tilde{G}_{n, N-n}$$

Bajo esas condiciones a las  $m$  secciones  $S_1, \dots, S_m$  le podemos asociar una aplicación clasificante  $\theta$  que se obtiene modificando  $\phi$ . Supongamos que  $\mathbb{R}^N$  está incluido en  $\mathbb{R}^{N+m}$  como el subespacio  $g_1=0, \dots, g_m=0$ , cuyas  $m$  últimas coordenadas respecto de la base canónica son nulas.

Veremos ahora que la condición de transversalidad de las secciones  $S_1, \dots, S_m$  se puede traducir en término del comportamiento de  $\theta$  respecto de los ciclos de Schubert de  $\tilde{G}_{n, N}$ . Sea  $\langle, \rangle$  un producto de Riemann definido en  $F$  tal que verifique  $\langle S_i, S_j \rangle = \delta_{ij}$ , si  $i, j = 1, \dots, l', r+1, \dots, r+(1-l')$ .

Definimos la aplicación clasificante  $\theta: M \rightarrow \tilde{G}_{n, N}$  por la formula:  $\theta(x)$  = subespacio generado por los vectores  $f_i^!$ ,  $i=1, \dots, n$  donde  $f_i^!(x) = f_i(x) + \sum_{j=1}^m \langle f_i, S_j \rangle_x g_j$ , y  $f_1(x), \dots, f_n(x)$  generan el subespacio  $\phi(x)$  de  $\mathbb{R}^{n+N}$ .

Supongamos como antes que en el punto  $x_0$  de  $M$  los  $m$  vectores  $S_1(x_0), \dots, S_m(x_0)$  están sujetos a verificar la condición  $\sigma$ . Si completamos  $\{f_i^!(x_0)\}_{i=1, \dots, n}$  a una base de  $\mathbb{R}^{n+N}$  podemos obtener un sistema de coordenadas en un entorno de  $\theta(x_0)$ .

Además eligiendo los últimos  $m$ , vectores de modo que coincidan

con  $g_1, \dots, g_m$ , resulta que  $f'_i(x) = f'_i{}^0 + \sum_{j=n+1}^N \xi_{ij} v_j + \sum_{\alpha=1}^m \xi_{i\alpha} g_\alpha$   
 $i=1, \dots, n$ .

Por lo tanto la condición de Schubert  $\sigma$  se traduce en lo siguiente:

$S_1, \dots, S_m$  verificará que a) rango  $[S_1, \dots, S_r] = 1'$

b) rango  $[S_1, \dots, S_m] = 1$  en un

punto  $x_0$  de  $M$ , si y solamente si  $\theta(x_0)$  interseca:

1) al subespacio  $g_1=0, \dots, g_r=0$  según un subespacio de dimensión  $n-1'$ ,

2) al subespacio  $g_1=0, \dots, g_m=0$  según un subespacio de dimensión  $n-1$ .

Ahora nos proponemos establecer las ecuaciones que verifican

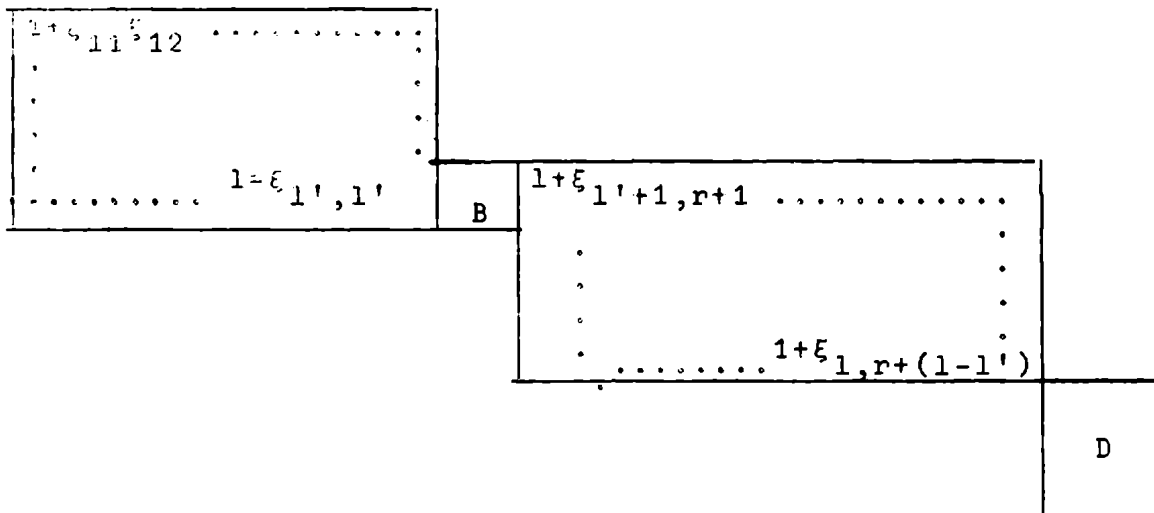
los subespacios de  $G_{n,N}$  que cumplen las condiciones  $\alpha)$  y  $\beta)$ ,

utilizando el sistema de coordenadas  $\|\xi_{ij}\|$ . Para ello consideremos

la siguiente matriz de  $n \times m$  de las últimas  $m$  coordenadas de

un conjunto de  $n$  vectores  $f'_1, \dots, f'_m$ , expresada respecto de la

base canónica de  $\mathbb{R}^{n+N}$ :



A cada uno de los elementos de las matrices B y D, le asociamos un menor de manera obvia, cuya anulación simultánea es la condición necesaria y suficiente para que el subespacio generado por  $\mathbb{P}_n^1$ , verifique las condiciones  $\alpha)$  y  $\beta)$ .

Observamos ahora que esos menores restringidos a la imagen de la aplicación  $\theta$  coinciden con los menores  $D^{\alpha\beta}$  y  $D^{\delta\gamma}$  de más arriba.

Por lo tanto la condición de transversalidad  $\theta^*(dD^{\alpha\beta}\wedge dD^{\delta\gamma}) \neq 0$  es equivalente a la condición anterior  $\nu^*(dD^{\alpha\beta}\wedge dD^{\delta\gamma}) \neq 0$ .

Podemos enunciar entonces el siguiente:

TEOREMA:

La condición necesaria y suficiente que deben verificar las secciones  $S_1, \dots, S_m$  para que sean transversales en el sentido de la definición 4) es que la aplicación clasificante de  $F$  asociada interseque transversalmente a cada uno de los ciclos de Schubert de  $G_{n,N}$ .

Será útil introducir la siguiente notación; si  $S_1, \dots, S_m$  son  $m$  secciones de  $F$  definidas sobre  $VCM$ , entonces el conjunto de puntos  $x \in M$  donde  $S_1, \dots, S_m$  verifican la condición de Schubert asociada a  $\sigma$  lo indicamos por  $: [S_1, \dots, S_m]_{\sigma}$ .

El conjunto de los  $x \in [S_1, \dots, S_m]_{\sigma}$  donde  $S_1, \dots, S_m$  verifiquen estrictamente la condición de Schubert es precisamente la imagen inversa por  $\nu$  de  $J_{\sigma} \text{Hom}(\mathbb{R}^m, F)$ . Si  $S_1, \dots, S_m$  son transversales entonces  $[S_1, \dots, S_m]_{\sigma}$  admite una estructura de subvariedad de  $M$  en un entorno de  $x$ . Sea  $\nu$  una sección de  $\text{Hom}(E, F)$  definida sobre  $V$ .

DEFINICION:

Las  $h$  secciones  $S_1, \dots, S_h$  de  $E$  se dirán transversales a  $\nu$  y satisfacen las condiciones

- 1) para cada  $t$  y cada  $r \leq h$  las secciones  $S_1, \dots, S_t$  y  $\nu(S_1), \dots, \nu(S_r)$  son transversales en  $E$  y  $F$  respectivamente.
- 2) Si  $\sigma_E$  y  $\sigma_F$  son condiciones de Schubert que se le imponen a  $S_1, \dots, S_t$  y a  $\nu(S_1), \dots, \nu(S_r)$  respectivamente entonces  $[S_1, \dots, S_t]_{\sigma_E}$  interseca a  $[\nu S_1, \dots, \nu S_r]_{\sigma_F}$  transversalmente en cada punto  $x$  donde  $S_1, \dots, S_t$  y  $\nu(S_1), \dots, \nu(S_r)$  verifican  $\sigma_E$  y  $\sigma_F$  estrictamente.



### UN TEOREMA DE APROXIMACION:

Dado un fibrado  $E$  sobre  $M$ , al espacio vectorial de todas las secciones de  $E$ , que son al menos  $r$  veces diferenciables,  $\Gamma^r(E)$  es posible asignarle una topología metrizable respecto de la cual es completo. Esta topología puede caracterizarse del siguiente modo, si  $U \subset M$  es un abierto de  $M$  que verifique las condiciones:

a) sobre  $U$  es posible definir un sistema de coordenadas,  $\phi: U \rightarrow \mathbb{R}^n$  (es decir un difeomorfismo de  $U$  con  $\mathbb{R}^n$ , y  
b) la restricción del fibrado  $E$  a  $U$  es trivial y si por  $\phi, E|U \rightarrow U \times \mathbb{R}^m$  denotamos a una trivialización de  $E|U$ , entonces  $\Gamma_U^r(E) \cong C^r(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$  mediante el isomorfismo  $s \rightarrow \phi_* s \circ \phi^{-1}$ , como espacios vectoriales topológicos donde hemos dotado a  $C^r(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$

la topología de la convergencia uniforme sobre compactos de todas las derivadas hasta las de orden  $r$  inclusive.

A esta topología se la suele denominar  $C^r$ .

Esta noción de proximidad con  $r = 1$ , es la que necesitaremos luego para establecer un teorema de aproximación mediante secciones genéricas.

Si  $E$  y  $F$  son dos fibrados sobre  $M$  y  $v: E \rightarrow F$  es un homomorfismo transversal entre  $E$  y  $F$ , es natural preguntarse si dadas  $s_1, \dots, s_h$  secciones de  $E$ , podemos hallar  $s'_1, \dots, s'_h$  secciones de modo que las aproximen en el sentido de la topología definida más arriba y que además sean transversales a  $v$ .

Localmente este problema tiene una solución simple como veremos en el teorema que sigue, mientras que el pasaje al caso global requiere utilizar un teorema de extensión de Whytney y un argumento de categorías (de Baire).

TEOREMA:

Sean  $s_1, \dots, s_h$ ,  $h$  secciones de  $E$  y  $v$  un homomorfismo transversal entre  $E$  y  $F$ . Entonces si  $s_1, \dots, s_t$  y  $v(s_1), \dots, v(s_r)$  verifican estrictamente las condiciones de Schubert  $\sigma_E$  y  $\sigma_F$  en  $x$ , es posible hallar entornos  $U$  y  $U'$  de  $x$  con  $U \supset \bar{U}'$  y secciones  $s'_1, \dots, s'_h$  que verifiquen las siguientes propiedades:

a) Las secciones  $s'_1, \dots, s'_h$  difieren de  $s_1, \dots, s_h$  tan poco como se quiera, en el sentido de la topología  $C^r$  (de la convergencia uniforme sobre compactos de todas las derivadas hasta las  $r$ -ésimal)

b) Las secciones  $s'_1, \dots, s'_t$  y  $vs'_1, \dots, vs'_r$ , restringidas a  $\bar{U}'$  son transversales.

c) Las variedades  $[s'_1, \dots, s'_t]_{\sigma_E}$  y  $[vs'_1, \dots, vs'_r]_{\sigma_F}$  se intersecan transversalmente en  $\bar{U}'$ .

Demostración:

Para simplificar los cálculos durante el curso de la demostración, supondremos sin pérdida de generalidad algunas restricciones sobre las condiciones de Schubert  $\sigma_E$  y  $\sigma_F$ .

En primer término supondremos que  $E$  viene dado por rango

$[s_1, \dots, s_t] = 1$  y rango  $[s_1, \dots, s_r] = 1'$  con  $1 \geq 1'$ . Mientras

que  $\sigma_F$  sea simplemente la condición rango  $[vs_1, \dots, vs_r] = p$

Y sea además rango  $[s_1, \dots, s_{1'}] = 1'$  y

y rango  $|s_1, \dots, s_{1'}, s_{r+1}, \dots, s_{r+(1-1')}| = 1$  junto con

rango  $[vs_1, \dots, vs_p] = p$  con  $p \leq r$ .

En un entorno  $U$  del punto  $x$  podemos hallar  $n$  secciones  $e_1, \dots, e_n$  que trivialicen el fibrado  $E|U$  y que verifiquen:

$e_1 = s_1, \dots, e_{1'} = s_{1'}, e_{1'+1} = s_{r+1}, \dots, e_1 = s_{r+(1-1')}$  y

$m$  secciones  $f_1, \dots, f_m$  del fibrado  $F$  que trivialicen  $F|U$  y

además cumplan  $f_1 = v(s_1), \dots, f_p = v(s_p), f_{p+1} = v(e_{ip+1}), \dots$

$\dots, f_{m-j} = v(e_{m-j})$  (rango de  $v = m-j$ )



La expresión algebraica de las condiciones que  $s_1, \dots, s_t$  y  $v(s_1), \dots, v(s_r)$  deben verificar para que satisfagan la tesis del teorema está dada así:  $x' \in U$  y  $x' \in \left| s_1, \dots, s_t \right|_{\sigma_E} \cap \left| v(s_1), \dots, v(s_r) \right|_{\sigma_F}$  si y solamente si los diferenciales de los coeficientes de las matrices  $A_1, A_2, A_3$  y  $A_4$  son linealmente independientes.

Entonces ahora solo queda por demostrar que es posible modificar las matrices  $A_1, A_2, A_3$  y  $A_4$  de modo que los diferenciales de sus coeficientes sean linealmente independientes en un entorno de  $x$ . En principio notemos que la matriz  $A_4$  verifica esa propiedad debido a que  $v$  es transversal en  $x$ .

Además es posible reemplazar las secciones  $s_{e'+1}, \dots, s_r$  y las secciones  $s_{r+(1-l')_+1}, \dots, s_t$  por otras que defieran de estas tan poco como se quiera y de modo que los coeficientes de las matrices  $dA'_1, dA'_2$  y  $dD$  sean linealmente independientes.

Solo queda por ver que las secciones  $s_{p+1}, \dots, s_{l'}$  pueden ser modificadas para que los coeficientes de  $dA'_3$  resulten ser independientes de los de  $dA'_1, dA'_2$ , y  $dA'_4$ .

Pero es obviamente posible hacerlo utilizando las secciones  $e_{ip+1}, \dots, e_{im-j}$ .

Hemos demostrado que es posible hallar un entorno  $U$  de  $x$  donde el teorema se verifica, el resto es corolario trivial de los teoremas de extensión de Whitney ( ver bibliografía)

Q-E-D

A cada par de condiciones de Schubert  $\sigma_E$  y  $\sigma_F$  de  $\text{Hom}(\mathbb{R}^t, E)$  y  $\text{Hom}(\mathbb{R}^r, F)$  respectivamente es posible asociarle un ciclo de  $J_{\sigma_E} \times J_{\sigma_F}$  de  $\text{Hom}(\mathbb{R}^t, E) \times \text{Hom}(\mathbb{R}^r, F)$ , tal que:

$$(J_{\sigma_E} \times J_{\sigma_F})_* \cong J_{\sigma_E} \text{Hom}(\mathbb{R}^t, E)_* \times J_{\sigma_F} \text{Hom}(\mathbb{R}^r, F)_*$$

Las secciones  $s_1, \dots, s_t$  y  $v(s_1), \dots, v(s_r)$  determinan una sección  $\zeta$  de  $\text{Hom}(\mathbb{R}^t, E) \times \text{Hom}(\mathbb{R}^r, F)$  de manera natural y claramente se verifica la siguiente relación:

$$\zeta^{-1} (J_{\sigma_E} \times J_{\sigma_F}) = |s_1, \dots, s_t|_{\sigma_E} |v(s_1), \dots, v(s_r)|_{\sigma_F}$$

Sea  $\{ J_{\sigma_E}^\alpha \times J_{\sigma_F}^\beta \}$  el conjunto de todos los ciclos asociados a condiciones de Schubert  $\sigma_E^\alpha$  y  $\sigma_F^\beta$ , que tengan codimensión  $\leq i+1$ , si  $\zeta$  fuera transversal a cada uno de los ciclos, es posible hallar un entorno de  $U$  de  $\zeta^{-1}(U J_{\sigma_E}^\alpha \times J_{\sigma_F}^\beta)$ , donde  $\zeta$  intersecta transversalmente a cada uno de los ciclos  $J_{\sigma_E}^\alpha \times J_{\sigma_F}^\beta$  de codimensión menor.

Veremos ahora que  $s_1, \dots, s_t; v(s_1), \dots, v(s_r)$  pueden ser reemplazados por secciones  $s'_1, \dots, s'_t; v(s'_1), \dots, v(s'_r)$  que intersecten transversalmente a cada uno de los ciclos de codimensión  $\leq i$ .

Para ello tomamos un cubrimiento del complemento de  $\bar{U}$  mediante una familia numerable de compactos  $\{K_j\}$   $M - \bar{U} = \cup K_j$ , tales que cada uno de estos verifique de modo excluyente alguna de las dos propiedades siguientes:

a)  $\zeta|_{K_j}$  no corta  $J_{\sigma_E} \times J_{\sigma_F}$ , para todo ciclo de codimensión  $i$ .

b)  $K_j \subset C$  en un abierto que es posible determinar por el teorema anterior, donde se verifiquen las condiciones del enunciado para cada uno de los ciclos de codimensión  $i$ .

Sea  $\overbrace{\Gamma^r(E) \oplus \dots \oplus \Gamma^r(E)}^t$  el espacio de Baire que se obtiene como suma directa de  $t$  copias de  $\Gamma^r(E)$  = secciones globales de  $E$  provista con la topología de la convergencia uniforme sobre compactos de todas las derivadas. A cada uno de los compactos  $K_j$  le asociamos un conjunto  $F_j$  en  $\Gamma^r(E) \oplus \dots \oplus \Gamma^r(E)$  que consiste de todas las secciones  $s_1, \dots, s_t$  tales que  $s_1, \dots, s_t$  y  $v(s_1), \dots, v(s_r)$  no verifica la condición de transversalidad a algún ciclo  $J_{\sigma_E} \times J_{\sigma_F}$  de codimensión  $i$  en algún punto de  $K_j$ . Estos conjuntos son cerrados y además debido al teorema anterior son nunca densos, por lo tanto utilizando el teorema de Baire es posible hallar  $s'_1, \dots, s'_t$  secciones que no pertenezcan a ninguno de los cerrados  $F_j$  y defieran de  $s_1, \dots, s_t$  tan poco como se quiera.

Por lo tanto hemos demostrado el siguiente:

TEOREMA:

Dado  $s_1$ , un homomorfismo transversal  $v$  entre  $E$  y  $F$  y  $s_1, \dots, s_h$  secciones de  $E$  es posible determinar  $h$  secciones  $s'_1, \dots, s'_h$  transversales a  $v$  que defieran de  $s_1, \dots, s_h$  tan poco como se quiere en el sentido de la topología  $C_r$ .

### 3) El teorema fundamental

Recordamos antes algunas relaciones entre clases características y ciclos críticos de secciones, para mayores detalles consultar el artículo de Pontryaguín: "VECTOR FIELDS ON MANIFOLDS", TRANSLATIONS A.M.S., SERIE I, Volumen 7.

Si  $F$  es un fibrado vectorial complejo sobre  $M$ , y  $s_1, \dots, s_{m-h+1}$  son  $m-h+1$  secciones transversales el ciclo crítico rango  $[s_1, \dots, s_{m-h+1}] \leq m-h$  es dual a la clase característica  $c_h$  (en el sentido de la dualidad de Poincaré).

Y análogamente podemos hallar una descripción para las clases normales de Chern, si  $s_1, \dots, s_{m+h-1}$  son  $m+h-1$  secciones transversales entonces el ciclo crítico rango  $[s_1, \dots, s_{m+h-1}] \leq m$  es dual a  $\bar{c}_h$  (la clase de Chern normal de  $F$ , de grado  $h$ ).

Sea  $v$  cualquier homomorfismo transversal entre  $E$  y  $F$  entonces aplicando los resultados del número anterior podemos determinar  $s_1, \dots, s_n$  secciones de  $E$  transversales a  $v$ .

Denotaremos por  $Z_i$  el ciclo definido mediante las condiciones de Schubert siguientes:

rango  $[s_1, \dots, s_{n-i+1}] \leq n-i$ , rango  $[vs_1, \dots, vs_{n-i}] \leq m$  y  
rango  $[s_1, \dots, s_{n-i}] \leq n-i-1$ , este ciclo está por supuesto bien determinado gracias a la hipótesis hecha sobre la transversalidad de las secciones.

Si indicamos los ciclos rango  $[vs_1, \dots, vs_h] \leq m$  y rango  $[s_1, \dots, s_h] \leq h-1$  simplemente por  $[vs_1, \dots, vs_h]$  y  $[s_1, \dots, s_h]$  respectivamente obtendremos las siguientes relaciones de recurrencia:

0)  $[vs_1, \dots, vs_n] \equiv$  ciclo crítico de  $v + Z_0$  (módulo ciclos de dimensión menor)

# TEOREMA

1)  $[vs_1, \dots, vs_{n-1}] [s_1, \dots, s_n] \equiv Z_0 + Z_1$  (módulo ciclo de dimensión menor)

i)  $[vs_1, \dots, vs_{n-i}] [s_1, \dots, s_{n-i+1}] \equiv Z_{i-1} + Z_i$  (módulo ciclos de dimensión menor)

Por lo tanto obtenemos finalmente el siguiente teorema:

## TEOREMA 1:

Si  $v$  es un homomorfismo transversal entre  $E$  y  $F$  y  $\dim(E) = n$  y  $\dim(F) = m$  entonces el ciclo crítico de, es decir donde  $v$  tiene rango menor que  $m-1$ , es homólogo a

$[vs_1, \dots, vs_n] - [vs_1, \dots, vs_{n-1}] [s_1, \dots, s_n] + \dots + [s_1, \dots, s_m] \equiv$   
dual al término  $n-m+1$  del polinomio  $C(E-F)$

De manera análoga podemos demostrar que:

## TEOREMA 2:

Si  $v$  es un homomorfismo transversal entre  $E$  y  $F$  y  $s'_1, \dots, s'_h$ , son  $h$  secciones de  $F$ , entonces el ciclo crítico de  $v$  localmente definido mediante la fórmula=

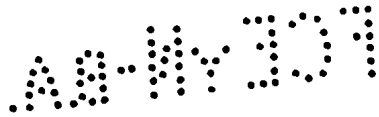
$\text{rango} [ve_1, \dots, ve_n, s'_1, \dots, s'_h] \leq m$  donde  $e_1, \dots, e_h$  es una trivialización de  $E$  es dual a la clase de cohomología  $n-m+h+1$  del polinomio característico  $C(E-F)$ .





## BIBLIOGRAFIA

- 1- Chern S.S. [1] On curvature and characteristic classes of a Riemannian Manifold. ABHANDLUNGEN, UNIV. HAMBURGO, (1956) vol 20, pg 118-126
- [2] On the multiplication of the characteristic ring of a Spieere bundle. ANNALS OF MATHEMATICS , vol 49, (1948) , pag 2
- 2- Chern S.S. y R. Lashof: The total curvature of immersed Manifolds. AMERICAN JOURNAL OF MATHEMATICS, vol 79, (1957) pag 308-318
- 3- Chern S.S y R. Bott: Hermitian vector bundles and the equidistribution of the zeroes of their holomorphic sections. ACTA MATHEMATICA (1965), vol 114 pg 71-112
- 4- Husemoller. D. Fiber bundles, M<sup>C</sup> GRAW HILL, (1966)
- 5- Nomizu K : Lie groups and differential geometry, M.S.JAP (1956)
- 6- Pontryaguin L.S. [1] Characteristic cycles on differentiable manifolds
- [2] Vector fields on a Riemannian manifold
- [3] Vector fields on a Riemannian manifold
- Los tres artículos se encuentran en el volumen 7 de la serie 1 de la colección TRANSLATIONS, A.M.S (1950)
- 7- L. Santaló: Mean values and curvatures PROC. ACAD. SC. ARMENIAN R. (1970) pg 286-295



- 8- S. Sternberg: Lectures on diff. geometry, PRENTICE HALL (1966)
- 9- R. Thom : Les singularités des applications différentiables  
ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER, v<sup>o</sup>l VI (1955)  
pg 43.
- 10- H. Whitney: Analytic extensions of differentiable functions  
defined in closed sets. TRANSACTIONS A.M.S.  
vol 36, (1934) pg 63-89

INDICACIONES

CAPITULO I a) Derivación covariante y conexiones, ver  
3) y 5)

b) Sobre las ecuaciones de estructura, ver 2)  
8) y 5)

c) Ciclos de Schubert ver 6) [1] y [2] y 9)

CAPITULO II Sobre la definición de la curvatura  $K_r$ , ver 7)  
2) y [1] de 1). Además para la aplicación tangente  
ver [2] de 6)

CAPITULO III ver [3] de 6) y 9)

CAPITULO IV ver 9) y [2] de 6)

