

Tesis de Posgrado

Oscilaciones en plasmas de bajo beta en presencia de gradientes de velocidad

Gratton, Julio

1970

Tesis presentada para obtener el grado de Doctor en Ciencias Físicas de la Universidad de Buenos Aires

Este documento forma parte de la colección de tesis doctorales y de maestría de la Biblioteca Central Dr. Luis Federico Leloir, disponible en digital.bl.fcen.uba.ar. Su utilización debe ser acompañada por la cita bibliográfica con reconocimiento de la fuente.

This document is part of the doctoral theses collection of the Central Library Dr. Luis Federico Leloir, available in digital.bl.fcen.uba.ar. It should be used accompanied by the corresponding citation acknowledging the source.

Cita tipo APA:

Gratton, Julio. (1970). Oscilaciones en plasmas de bajo beta en presencia de gradientes de velocidad. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad de Buenos Aires.
http://digital.bl.fcen.uba.ar/Download/Tesis/Tesis_1353_Gratton.pdf

Cita tipo Chicago:

Gratton, Julio. "Oscilaciones en plasmas de bajo beta en presencia de gradientes de velocidad". Tesis de Doctor. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad de Buenos Aires. 1970.
http://digital.bl.fcen.uba.ar/Download/Tesis/Tesis_1353_Gratton.pdf

EXACTAS UBA

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales



UBA

Universidad de Buenos Aires

Universidad de Buenos Aires.

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales.

Oscilaciones en plasmas de bajo β en presencia
de gradientes de velocidad.

Julio Gratton.

Tesis presentada para optar al título de
Doctor en Ciencias Físicas.

Buenos Aires, agosto de 1970.

1353

Indice

1. <u>Introducción.</u>	
1.1 Oscilaciones en plasmas no uniformes.	1.1
1.2 Contenido del presente trabajo.	1.3
2. <u>Fundamentos de la teoría lineal de las oscilaciones de un plasma.</u>	
2.1 Consideraciones generales.	2.1
2.2 Teoría lineal de las oscilaciones de un plasma.	2.6
2.3 Operador dieléctrico de un plasma homogéneo magnetizado.	2.9
2.4 La ecuación de las ondas y la aproximación electrostática.	2.29
3. <u>Modos electrostáticos de un plasma homogéneo semi-infinito.</u>	
3.1 Consideraciones generales.	3.1
3.2 Oscilaciones electrónicas de un plasma frío semi-infinito.	3.3
3.3 Oscilaciones iónicas de un plasma no isotérmico semi-infinito.	3.10
4. <u>Propiedades energéticas de las oscilaciones.</u>	
4.1 Introducción	4.1
4.2 El balance energético del plasma.	4.2
4.3 Ondas superficiales estables.	4.7
4.4 Ondas propagantes.	4.8
4.5 Flujo de energía de ondas electrostáticas.	4.12
4.6 Radiación de ondas electrostáticas.	4.14
4.7 Oscilaciones inestables.	4.16

5. Sobreestabilidad de ondas electrostáticas.

- | | | |
|-----|--|------|
| 5.1 | Las condiciones de contorno para un perfil discontinuo de velocidades. | 5.1 |
| 5.2 | La relación de dispersión. | 5.4 |
| 5.3 | Propiedades de las oscilaciones para modulación longitudinal al campo magnético. | 5.5 |
| 5.4 | Efectos de una modulación transversal. Radiación y sobreestabilidad. | 5.11 |
| 5.5 | Inestabilidades monotónicas en presencia de modulación transversal. | 5.15 |
| 5.6 | Conclusiones. | 5.22 |

6. Oscilaciones iónicas de una discontinuidad tangencial de velocidades.

- | | | |
|-----|--|------|
| 6.1 | La ecuación diferencial para las oscilaciones electrostáticas iónicas. | 6.1 |
| 6.2 | Las condiciones de contorno para un perfil discontinuo de velocidades y la relación de dispersión. | 6.3 |
| 6.3 | Oscilaciones iónicas para modulación longitudinal al campo magnético. | 6.5 |
| 6.4 | Propiedades energéticas de las oscilaciones iónicas. | 6.14 |
| 6.5 | Sobreestabilidad de las oscilaciones iónicas. | 6.16 |
| 6.6 | Inestabilidades monotónicas en presencia de una pequeña modulación transversal. | 6.19 |
| 6.7 | Conclusiones. | 6.24 |
| 6.8 | Posibles conexiones con resultados experimentales. | 6.26 |

A2. Apéndices del Capítulo 2.

- | | | |
|------|--|------|
| A2.1 | Una interpretación heurística del amortiguamiento de Landau. | A2.1 |
| A2.2 | Tensor de susceptibilidad para los electrones en régimen hidrodinámico de bajas frecuencias. | A2.5 |

R. Resumen.

A. Agradecimientos.

1. Introducción.

1.1 Oscilaciones en plasmas no uniformes.

El estudio de las oscilaciones colectivas en los plasmas es de gran interés, sea desde el punto de vista teórico, sea por sus aplicaciones prácticas, ya que muchas de las propiedades de los plasmas (propiedades dispersivas, de transporte, etc.) están esencialmente determinadas, en regímenes de escasas colisiones, por el comportamiento colectivo del sistema (1, 2, 3, 4).

La teoría lineal de las oscilaciones de un plasma uniforme ha sido desarrollada en forma bastante completa y constituye el punto de partida para el estudio de los procesos no lineales y turbulentos que ha adquirido gran impulso en la última década.

Mucho queda por estudiar, sin embargo, en lo que respecta a las oscilaciones en plasmas no uniformes, de gran importancia en la mayoría de las situaciones de plasmas en laboratorio y en la naturaleza. Los mayores progresos se han hecho en el caso de gradientes débiles, en especial de densidad ⁽⁵⁾ (ondas de deriva e inestabilidad universal, ^(6,7) etc.) Muy poco se conoce, en cambio, en lo que respecta a situaciones de gradientes fuertes. Con referencia a estos problemas es notorio que muchas cuestiones básicas quedan aún por resolver. El estudio de las oscilaciones lineales en estructuras autoconsistentes no uniformes se funda sobre un sistema de ecuaciones integro-diferenciales lineales, que han sido muy poco estudiadas hasta el presente. ⁽⁸⁾

Dentro de la gran variedad de posibles inhomogeneidades, una categoría importante comprende a las que se deben a la presencia de gradientes de velocidades. Esta familia de problemas corresponde a la extensión de los clásicos

problemas analizados por Kelvin y Helmholtz en líquidos y gases (9,10). El desarrollo de estas investigaciones en la dinámica de los fluidos neutros y en la magnetohidrodinámica se puede apreciar en el tratado de Chandrasekhar⁽¹¹⁾ y en la reciente monografía de Betchov y Criminale⁽¹²⁾. El interés de este tipo de problemas en la física del plasma reside en sus implicaciones en la física del espacio interplanetario, como por ejemplo, en la interacción del viento solar con la magnetosfera⁽¹³⁾, y en situaciones de plasmas en laboratorio, como por ejemplo, en los experimentos de D'Angelo y Von Goeler^(14,15). Poco es lo que se conoce acerca de este problema fuera de la aproximación magnetohidrodinámica, que no siempre se ajusta a las condiciones experimentales o cósmicas en que se pueden presentar gradientes de velocidad. Algunos progresos recientes con otros modelos para el comportamiento del plasma han sido reseñados por Gerwin⁽¹⁶⁾. En el régimen hidromagnético sin colisiones, un trabajo de Talwar⁽¹⁷⁾ ha sido corregido y ampliado por el autor⁽¹⁸⁾. Para frecuencias correspondientes a oscilaciones electrónicas algunos estudios pueden encontrarse en las refs. (19,20,21,22).

En contraste con la información que se ha venido acumulando en el caso de la dinámica de los fluidos neutros sobre perfiles continuos de velocidad, en los plasmas se carece prácticamente de información a este respecto. Casi todos los trabajos hasta ahora publicados tratan el caso de una discontinuidad tangencial de velocidad.

Los trabajos experimentales de D'Angelo y von Goeler ya mencionados han puesto en evidencia la conexión entre la inestabilidad relacionada con la presencia de gradientes de velocidad y la difusión anómala de partículas a través de las líneas del campo magnético. Esta circunstancia tiene relevancia con respecto de los tiempos de con-

finamiento del plasma. La posible presencia de este tipo de inestabilidades en el Stellarator ha sido señalada por D'Angelo (23).

En presencia de campos magnéticos externos intensos cuando la energía térmica de las partículas es pequeña (en comparación con la energía magnética, i.e., bajo β), las oscilaciones propias del sistema tienden a ser del tipo potencial. Por otra parte, las oscilaciones de esta clase tienen velocidad de fase baja, por lo cual la interacción entre los campos autoconsistentes y las partículas es particularmente efectiva y puede conducir a inestabilidades del sistema. Esto hace que el estudio de las oscilaciones electrostáticas en plasmas no uniformes sea de especial interés.

1.2 Contenido del presente trabajo.

En el capítulo 2 se plantean las ecuaciones de la teoría cinética de un plasma sin colisiones y se discuten con detalle las condiciones de validez y los regímenes físicos en que es aplicable dicho modelo, sobre el cual se basa el presente trabajo. Se desarrolla a continuación un formalismo que permite obtener el operador dieléctrico exacto a todos los órdenes en el radio de Larmor, para un plasma no uniforme, en el cual la inhomogeneidad del plasma puede ser de cualquier índole, pero dependiendo de una sola coordenada. A este efecto, el sistema de ecuaciones integro-diferenciales de la teoría lineal de las oscilaciones se reemplaza por un sistema de ecuaciones diferenciales de orden infinito, a partir del cual es posible plantear en forma sistemática las correcciones de radio de Larmor finito a los distintos órdenes. Se consigue de este modo plantear por primera vez las ecuaciones exactas para las oscilaciones en presencia de gradientes de velocidad (dentro del modelo cinético sin colisiones) con toda generalidad dentro de la geometría prefijada.

Se derivan aproximaciones para regímenes particulares y se plantea, en términos del operador dieléctrico, la ecuación diferencial para las oscilaciones potenciales.

Dentro de la gran variedad de problemas que se pueden plantear con el formalismo introducido, se ha elegido concentrar aquí la atención sobre dos de ellos, a saber, las oscilaciones electrónicas e iónicas de una discontinuidad tangencial.

Con miras a esto, se estudian en el capítulo 3 las propiedades de las oscilaciones electrónicas e iónicas de un plasma semiinfinito, se analizan las propiedades del espectro de modos propagantes, se derivan expresiones para la velocidad de grupo y se dan los intervalos de existencia de oscilaciones de superficie e inestables.

En el capítulo 4 se estudian las propiedades energéticas de oscilaciones en plasmas no uniformes. Se obtienen expresiones generales para el balance energético del plasma. Se dan expresiones para la densidad de energía y flujo de energía de modos propagantes y se pone en evidencia que una parte esencial del flujo de energía de las oscilaciones potenciales es de origen electromagnético. Se analizan las propiedades energéticas de ondas no uniformes. Se comentan algunas de las consecuencias de la existencia de oscilaciones con energía negativa, en particular la posibilidad de radiación e inestabilidad, y se deducen las condiciones energéticas para que se produzca radiación.

Los resultados de los capítulos anteriores se aplican en el capítulo 5 al estudio de las oscilaciones electrónicas de un perfil discontinuo de velocidades. Luego de comentar el significado físico de las condiciones de contorno sobre la discontinuidad, se reseñan las propiedades de las oscilaciones correspondientes a modulaciones de la interfase paralelas al campo magnético. Se determinan las regiones de existencia

correspondientes a radiación en base a los criterios energéticos formulados en el capítulo 4. También se analiza la conexión entre la inestabilidad monotónica y los modos radiantes. Para aclarar la vinculación sugerida en el capítulo 4 en base a consideraciones de balance energético entre la radiación de ondas y la sobreestabilidad, se estudia el efecto de una pequeña modulación transversal al campo magnético exterior y se demuestra que ésta conduce a la localización de las oscilaciones en el entorno de la interfase y en consecuencia a la sobreestabilidad de las mismas. Se determinan las diferentes regiones de existencia de estas sobreestabilidades. Se estudian también las inestabilidades monotónicas en presencia de modulación transversal observándose drásticas modificaciones de las regiones de existencia con respecto de las que corresponden a modulación estrictamente paralela. Se encuentra que estas modificaciones surgen como consecuencia de la localización de los modos estacionarios presentes cuando la modulación es paralela. Se estudia el caso límite de modulación casi perpendicular al campo magnético. Se discuten las regiones de existencia y las propiedades de los modos y se dan en forma gráfica los resultados del cómputo numérico de las frecuencias propias del sistema, para algunos conjuntos de valores de los parámetros.

En el capítulo 6 se estudian las oscilaciones iónicas de un plasma no isotérmico de bajo β en presencia de un perfil discontinuo de velocidades. Se deduce la ecuación diferencial para el potencial electrostático, así como las condiciones de contorno sobre la discontinuidad y se obtiene la relación de dispersión para las frecuencias propias del sistema. Se analiza en detalle el caso en que la interfase está modulada paralelamente al campo magnético, encontrándose que puede haber ondas de superficie estables, radiación de ondas, modos estacionarios (de frecuencia nula) e inestabilidades monotónicas.

La comparación entre la velocidad de las ondas iónicas acústicas y la velocidad relativa del flujo permite definir regímenes de diferentes características. El régimen subsónico presenta analogías con el problema de las oscilaciones electrónicas estudiadas en el capítulo 5. Al aumentar la velocidad relativa el sistema tiende a estabilizarse y para flujo supersónico la inestabilidad desaparece (para modulación paralela al campo magnético). Se dan las regiones de existencia y propiedades de los modos.

Se discuten a continuación las propiedades energéticas de las oscilaciones iónicas y se dan expresiones para el balance de energía. Se encuentra que en este problema se pueden hacer consideraciones enteramente análogas a las que se hicieron para el caso de oscilaciones electrónicas, en lo que se refiere a la interpretación energética de las sobreestabilidades e inestabilidades monotónicas del sistema.

Se estudia el efecto de introducir una pequeña modulación transversal al campo, y se encuentra que se produce la localización y la sobreestabilidad de los modos radiantes, y que la localización de los modos de frecuencia nula da como resultado nuevas inestabilidades monotónicas del sistema, que modifican sustancialmente el panorama de estabilidad respecto del que se tiene para modulación paralela al campo exterior. Se dan las regiones de existencia de los modos inestables, para modulación transversal pequeña en los regímenes subsónico, casi supersónico y supersónico.

Finalmente, se intenta una interpretación de los resultados experimentales de D'Angelo y von Goeler (14,15) en base a la teoría que se ha desarrollado. Hechas las salvedades de que los experimentos mencionados corresponden a un régimen prácticamente isotérmico (mientras que el modelo usado en el presente trabajo corresponde a un plasma no isotérmico), y que los resultados experimentales son algo escuetos, se obtienen concordancias alentadoras en lo referente al orden de magnitud de las frecuencias observadas, las propiedades

espaciales de las oscilaciones, y la condición de estabilidad. En vista de que la escasa información experimental existente, si bien tiende a corroborar el presente estudio teórico, está lejos de permitir un control riguroso del mismo, se sugieren experimentos más decisivos en regímenes que correspondan más estrechamente al modelo teórico.

En el Apéndice 2.1 se expone una interpretación heurística del fenómeno del amortiguamiento de Landau, basada en una analogía con la Mecánica Cuántica y debida a F. Gratton y al autor. Dicha interpretación surgió de discusiones realizadas en las clases del curso para graduados sobre Teoría de Ondas en Plasmas, dictado en esta Facultad por F. Gratton en 1969.

En el Apéndice 2.2 se deduce la expresión del operador de susceptibilidad para los electrones en base a un modelo hidrodinámico, que corresponde usar en el régimen no isotérmico, es decir para las oscilaciones iónicas.

Referencias.

1. A.I. Akhiezer et al., "Collective Oscillations in a Plasma" MIT press, Cambridge, Mass. (1967).
2. V.N. Tsytovich, "Effetti non lineari nel Plasma", traducción italiana, Laboratori Gas Ionizzati, Frascati (1968).
3. A.A. Vedenov, "Theory of Turbulent Plasma", Iliffe Books Ltd., London (1968).
4. B.B. Kadomtsev, "Plasma Turbulence", London (1965).
5. A.A. Rukhadze, V.P. Silin, Soviet Phys. USPEKHI 7 (1964) 209.
6. N.A. Krall, "Drift Waves" en Advances in Plasma Physics, Interscience Pub., New York, 1 (1968) 153.

7. A. A. Rukhadze, V. P. Silin, Soviet Phys. USPEKHI 11 (1969) 659.
8. I. B. Bernstein, "Static Equilibria, Stability and Wave Propagation in Symmetrical Collisionless Plasmas", en Mitchner M. ed. "Radiation and Waves in Plasmas" Stanford, Un. Press (1961).
9. Lord Kelvin, "Mathematical and Physical Papers, iv, Hydrodynamics and General Dynamics", Cambridge (1910), p. 69,76.
10. H. Helmholtz, Wissenschaftliche Abhandlungen, (1882) 146.
11. S. Chandrasekhar, "Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability" , Oxford (1961).
12. R. Betchov, W.O. Criminale Jr., "Stability of Parallel Flows" Academic Press, New York (1967).
13. J.F. Mc Kenzie, Planet. Space. Sci. 18 (1970) 1.
14. N. D'Angelo, S. Von Goeler, Phys. Fluids 8 (1965) 1570
15. N. D'Angelo, S. Von Goeler, Phys. Fluids 9 (1966) 309.
16. R.A. Gerwin, Rev. Mod. Phys. 40 (1968) 652.
17. S.P. Talwar, Phys. Fluids 8 (1965) 1295.
18. S. Duhau, F. Gratton, J. Gratton, Phys. Fluids 13 (1970) 1503.
19. A. Caruso, F. Gratton, Nuovo Cimento 37 (1965) 62.
20. F. Gratton, Tesis. Universidad Nacional de Buenos Aires (1968).
21. F. Gratton, J. Gratton, Nucl. Fusion 8 (1968) 269.
22. F. Gratton, J. Gratton, Acta Científica 1 N°5 (1969) 1.
23. N. D'Angelo, Phys. Fluids 10 (1967) 1363.

2. Fundamentos de la teoría lineal de oscilaciones de un plasma.

2.1 Consideraciones generales.

El estudio teórico de los fenómenos que pueden producirse en un plasma se basa en las ecuaciones cinéticas, que describen el comportamiento de la función de distribución de las partículas que componen el plasma.

Indicaremos con $f^\alpha(\underline{r}, \underline{v}, t)$ a la función de distribución de las partículas de la especie α . La cantidad de partículas de la especie α que, en el instante t se encuentran en el volumen comprendido entre \underline{r} y $\underline{r} + d\underline{r}$ y con velocidades comprendidas entre \underline{v} y $\underline{v} + d\underline{v}$ está dada por $f^\alpha(\underline{r}, \underline{v}, t) d\underline{r} d\underline{v}$.

Sean $\underline{E}(\underline{r}, t)$ y $\underline{B}(\underline{r}, t)$ los campos eléctricos y magnéticos que actúan sobre el plasma, y sean e_α y m_α la carga y la masa de una partícula de la especie α .

La función de distribución f^α satisface la ecuación de Boltzmann, que se puede escribir en la forma general

$$(2.1) \quad \frac{\partial f^\alpha}{\partial t} + \underline{v} \cdot \frac{\partial f^\alpha}{\partial \underline{r}} + \frac{e_\alpha}{m_\alpha} \left(\underline{E} + \frac{\underline{v} \times \underline{B}}{c} \right) \cdot \frac{\partial f^\alpha}{\partial \underline{v}} + \mathcal{L}^\alpha \{ f^\beta \} = 0$$

En esta ecuación, el tercer término describe la variación de la función de distribución debida al efecto de los campos.

Dichos campos son producidos por eventuales fuentes externas y también por las partículas del plasma, y satisfacen a las ecuaciones de Maxwell:

$$(2.2) \left\{ \begin{array}{l} c \nabla \times \underline{E} = -\frac{\partial \underline{B}}{\partial t} \\ c \nabla \times \underline{B} = 4\pi (\underline{j}_{ext} + \underline{j}) + \frac{\partial \underline{E}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \underline{B} = 0 \\ \nabla \cdot \underline{E} = 4\pi (\rho_{ext} + \rho) \end{array} \right.$$

Aquí se han indicado con \underline{j}_{ext} y ρ_{ext} a las densidades de corriente y de carga externas, y con \underline{j} y ρ las densidades de corriente y de carga debidas a las partículas del plasma ⁽¹⁾. La densidad de corriente \underline{j} y la densidad de carga ρ se pueden calcular a partir de las funciones de distribución de las partículas por medio de las expresiones

$$(2.3) \left\{ \begin{array}{l} \underline{j} = \sum_{\alpha} e_{\alpha} \int \underline{v} f^{\alpha} d\underline{v} \\ \rho = \sum_{\alpha} e_{\alpha} \int f^{\alpha} d\underline{v} \end{array} \right.$$

Los campos \underline{E} y \underline{B} se suelen llamar autoconsistentes, porque dependen de las funciones de distribución cuyo comportamiento rigen.

El cuarto término de la ecuación de Boltzmann (2.1), $\mathcal{L}^{\alpha} \{ f^{\beta} \}$ describe la variación de la función de distribución f^{α} por efecto de las colisiones binarias, y es una funcional de las funciones de distribución f^{β} de todas las especies presentes (incluyendo la misma α).⁽²⁾

El término de colisiones se anula para las distribuciones Maxwellianas de equilibrio

$$(2.4) \quad f_0^{\alpha} = n_{\alpha} \left(\frac{m_{\alpha}}{2\pi\theta} \right)^{3/2} e^{-\frac{m_{\alpha} v^2}{2\theta}}$$

(Aquí n_α es la densidad de partículas, y $\theta = kT$, siendo T la temperatura y k la constante de Boltzmann).

Las colisiones binarias son responsables del proceso de relajación, por el cual las funciones de distribución tienden hacia el equilibrio Maxwelliano siempre que inicialmente el sistema se encuentre alejado del equilibrio.

Sin pretender entrar en los detalles del proceso de relajación (cuyo estudio riguroso puede efectuarse tan solo en forma numérica), puede afirmarse, sobre la base de un argumento dimensional, que el orden de magnitud del tiempo característico de relajación está determinado por

$$(2.5) \quad \tau_\alpha \sim \ell / v_\alpha$$

si ℓ es el camino libre medio y $v_\alpha = \sqrt{2\theta/m_\alpha}$ es la velocidad térmica media de las partículas de la especie α . Siempre en base a argumentos dimensionales, el orden de magnitud del camino libre medio puede estimarse como

$$(2.6) \quad \ell \sim \theta^2 / e^4 n_0 \ln(\rho_{max} / \rho_{min})$$

donde ρ_{max} y ρ_{min} son el máximo y el mínimo parámetro de impacto para colisiones coulombianas.⁽²⁾ En orden de magnitud, ρ_{max} está dado por la distancia de apantallamiento de Debye

$$(2.7) \quad \lambda_D = \sqrt{\theta / 4\pi e^2 n_0}$$

y para ρ_{min} se puede tomar el valor del parámetro de impacto que corresponde a un ángulo de deflexión del orden de la unidad, y por lo tanto

$$(2.8) \quad \rho_{min} \sim e^2 / \theta$$

El tiempo de relajación τ_α puede llegar a ser muy grande para bajas densidades y altas temperaturas. Asimismo, debido a la gran diferencia entre las masas de los electrones y de los iones, los intercambios de energía de los electrones

entre sí y de los iones entre sí proceden más rápidamente que los intercambios entre una especie y la otra.

Por consiguiente, si inicialmente un plasma está alejado del equilibrio, se establecerán primero distribuciones de equilibrio para los electrones y para los iones por separado, con diferentes temperaturas eventualmente, y con más lentitud las dos temperaturas tenderán a la igualdad. El tiempo de ecualización de las temperaturas está dado en forma aproximada ⁽³⁾ por

$$(2.9) \quad \tau \approx \frac{m_e m_i}{e^4 n_0 \ln(\rho_{\max}/\rho_{\min})} \left(\frac{\theta_e}{m_e} + \frac{\theta_i}{m_i} \right)^{3/2}$$

si indicamos con m_e, θ_e y m_i, θ_i a las masas y temperaturas de electrones e iones, respectivamente.

Si se estudia un plasma que evoluciona a partir de un estado inicial de no equilibrio en $t=0$, la existencia de un tiempo de relajación τ_α permite fijar una escala de tiempos.

Para tiempos $t \geq \tau_\alpha$, la distribución de las partículas será prácticamente Maxwelliana, cualquiera hubiese sido la función de distribución inicial.

Para tiempos $t \ll \tau_\alpha$, en cambio, las colisiones binarias aún no han alcanzado a producir un efecto apreciable, y el comportamiento de la función de distribución depende en forma esencial de la acción de los campos autoconsistentes. Por efecto de los campos autoconsistentes pueden producirse en el plasma oscilaciones, o también pueden llegar a desarrollarse inestabilidades. Estos fenómenos se deben a la acción conjunta de las partículas del plasma, que se pone de manifiesto en los campos que ellas generan. Se habla entonces de fenómenos colectivos o cooperativos. La existencia de una amplia gama de efectos colectivos en los plasmas constituye quizás su característica más llamativa, y lo que más

diferencia a la física de los plasmas de la física de los gases neutros.

Una escala de tiempos para los procesos colectivos de un plasma puede obtenerse en base a la inversa de la frecuencia de plasma $\omega_{p\alpha}$, dada por

$$(2.10) \quad \omega_{p\alpha} = \sqrt{\frac{4\pi e_{\alpha}^2 n_{\alpha}}{m_{\alpha}}}$$

En la tabla 2.1 se puede comparar el valor de $\tau_{col} \sim 1/\omega_{p\alpha}$ con el valor del tiempo característico de relajación, τ , para sistemas típicos. Se ve que, si lo que interesa es el estudio de fenómenos colectivos de los plasmas, como por ejemplo, oscilaciones, ondas o inestabilidades, será posible, en buena aproximación, ignorar el efecto de las colisiones en la ecuación de Boltzmann, puesto que la duración del fenómeno bajo estudio es suficientemente breve.

	$\tau_{col} (seg)$	$\tau (seg)$	$n (cm^{-3})$	$T (^{\circ}K)$	$1/\Omega_c$
Gas interestelar	10^{-5}	10^4	1	10^4	10^{-1}
Nebulosas gaseosas	10^{-7}	10^{-1}	10^3	10^4	10^{-2}
Corona solar	10^{-8}	10^{-1}	10^6	10^6	10^{-2}
Atmósfera solar	10^{-12}	3×10^{-10}	10^{14}	10^4	10^{-9}
Descargas gaseosas	10^{-12}	3×10^{-10}	10^{14}	10^4	10^{-10}
Plasma denso	10^{-13}	5×10^{-9}	10^{16}	10^6	10^{-10}
Plasma termonuclear	10^{-13}	10^{-6}	10^{16}	10^8	10^{-10}
Plasma caliente	10^{-12}	10^{-8}	10^{14}	10^5	10^{-10}
Plasma enrarecido	10^{-11}	10^{-5}	10^{12}	10^6	10^{-10}

Tabla 2.1. Orden de magnitud de algunos parámetros característicos en los plasmas.

El comportamiento de la función de distribución para tiempos breves, en comparación con los tiempos de relajación se podrá entonces describir por medio de la ecuación de

Boltzmann-Vlasov

$$(2.11) \quad \frac{\partial f^\alpha}{\partial t} + \underline{v} \cdot \frac{\partial f^\alpha}{\partial \underline{r}} + \frac{e_\alpha}{m_\alpha} \left(\underline{E} + \frac{\underline{v} \times \underline{B}}{c} \right) \cdot \frac{\partial f^\alpha}{\partial \underline{v}} = 0$$

que se obtiene de la ecuación de Boltzmann (2.1) omitiendo el término que da cuenta de las colisiones binarias.⁽⁴⁾ Por brevedad, denominaremos "plasma sin colisiones" a un plasma cuyas funciones de distribución satisfacen a la ec.(2.11). La discusión precedente establece los alcances y también las limitaciones de la descripción contenida en la ecuación de Boltzmann-Vlasov.

2.2 Teoría lineal de las oscilaciones de un plasma.

Nos interesaremos en la evolución de la función de distribución bajo la acción de los campos autoconsistentes durante intervalos de tiempo breves con respecto de los tiempos de relajación. Por consiguiente, supondremos que las funciones de distribución satisfacen la ecuación de Boltzmann-Vlasov, ec.(2.11).

Supondremos que la ecuación de Boltzmann-Vlasov admite soluciones estacionarias $f_0^\alpha(\underline{r}, \underline{v})$ que corresponden a situaciones de neutralidad:

$$(2.12) \quad \sum_{\alpha} e_{\alpha} \int f_0^{\alpha} d\underline{v} = 0$$

y de ausencia de corrientes en el seno del plasma:

$$(2.13) \quad \sum_{\alpha} e_{\alpha} \int \underline{v} f_0^{\alpha} d\underline{v} = 0$$

y que no actúan sobre el plasma campos eléctricos de origen exterior. Admitimos, en cambio, que puede estar presente un campo magnético \underline{B}_0 , uniforme y constante en el tiempo, de origen exterior.

Notemos que las soluciones f_0^α pueden corresponder

a estados fuera del equilibrio (en cuyo caso debe tenerse presente, además de la condición $\tau_{col} \ll \tau$, la condición $t \ll \tau$).

Nos interesa estudiar el comportamiento de funciones de distribución f^α que corresponden a que el plasma se ha apartado levemente del estado estacionario caracterizado por las f_0^α . Escribiremos entonces

$$(2.14) \quad f^\alpha(\underline{r}, \underline{v}, t) = f_0^\alpha(\underline{r}, \underline{v}) + f_1^\alpha(\underline{r}, \underline{v}, t)$$

y supondremos que el apartamiento desde la estacionariedad, descrito por f_1^α es pequeño.

Las perturbaciones f_1^α desde el estado estacionario dan lugar a la aparición de densidades de carga y de corriente

$$(2.15) \quad \begin{aligned} \rho_1 &= \sum_{\alpha} e_{\alpha} \int f_1^{\alpha} d\underline{v} \\ \underline{j}_1 &= \sum_{\alpha} e_{\alpha} \int \underline{v} f_1^{\alpha} d\underline{v} \end{aligned}$$

que producen campos \underline{E}_1 y \underline{B}_1 .

Si las perturbaciones son pequeñas, como se ha supuesto, es posible despreciar en la ecuación de Boltzmann-Vlasov los términos cuadráticos en las cantidades de perturbación y obtener ecuaciones linealizadas para las f_1^α de la forma

$$(2.16) \quad \begin{aligned} \frac{\partial f_1^{\alpha}}{\partial t} + \underline{v} \cdot \frac{\partial f_1^{\alpha}}{\partial \underline{r}} + \epsilon_{\alpha} (\underline{v} \times \underline{\Omega}_{\alpha}) \cdot \frac{\partial f_1^{\alpha}}{\partial \underline{v}} = \\ = - \frac{e_{\alpha}}{m_{\alpha}} \left(\underline{E}_1 + \frac{\underline{v} \times \underline{B}_1}{c} \right) \cdot \frac{\partial f_0^{\alpha}}{\partial \underline{v}} \end{aligned}$$

Se han introducido aquí las notaciones:

$$(2.17) \quad \underline{\Omega}_\alpha = \frac{|e_\alpha| B_0}{m_\alpha c} \quad e_\alpha = \varepsilon_\alpha |e_\alpha|$$

$$\varepsilon_\alpha = \begin{cases} +1 & \text{para iones} \\ -1 & \text{para electrones} \end{cases}$$

Los campos \underline{E}_1 y \underline{B}_1 satisfacen las ecuaciones de Maxwell:

$$(2.18) \quad \begin{aligned} c \nabla \times \underline{E}_1 &= - \frac{\partial \underline{B}_1}{\partial t} \\ c \nabla \times \underline{B}_1 &= \frac{\partial \underline{E}_1}{\partial t} + 4\pi \sum_\alpha e_\alpha \int \underline{v} f_1^\alpha d\underline{v} \\ \nabla \cdot \underline{B}_1 &= 0 \\ \nabla \cdot \underline{E}_1 &= 4\pi \sum_\alpha e_\alpha \int f_1^\alpha d\underline{v} \end{aligned}$$

El conjunto de las ecuaciones (2.16) y (2.18), constituyen el punto de partida de la teoría de las pequeñas oscilaciones de un plasma sin colisiones.

El formalismo toma una forma conveniente si se introduce el vector desplazamiento eléctrico, $\underline{D}_1(\underline{x}, t)$ que se vincula con el campo eléctrico $\underline{E}_1(\underline{x}, t)$ por medio de la relación

$$(2.19) \quad \frac{\partial \underline{D}_1}{\partial t} = \frac{\partial \underline{E}_1}{\partial t} + 4\pi \sum_\alpha e_\alpha \int \underline{v} f_1^\alpha d\underline{v}$$

De las ecuaciones (2.16) y (2.18) se desprende que la función f_1^α está vinculada linealmente al campo eléctrico \underline{E}_1 . Por consiguiente, la ecuación (2.19) permite definir una relación lineal entre \underline{D}_1 y \underline{E}_1 que se puede indicar escribiendo

$$(2.20) \quad \underline{D}_1 = \hat{\underline{\underline{\varepsilon}}} \cdot \underline{E}_1$$

siendo $\hat{\underline{\underline{\varepsilon}}}$ un tensor cuyas componentes son operadores integro-diferenciales lineales que actúan sobre las componentes del vector campo eléctrico. ⁽¹⁾ El operador $\hat{\underline{\underline{\varepsilon}}}$ recibe el nombre de operador dieléctrico del plasma.

El conocimiento del operador dieléctrico $\hat{\underline{\underline{\varepsilon}}}$ involucra el haber resuelto la ecuación de Boltzmann-Vlasov (2.16) y por consiguiente en él se resumen las características de la respuesta del plasma al campo eléctrico \underline{E}_1 .

En términos del operador dieléctrico es posible eliminar el campo magnético en las ecuaciones de Maxwell y obtener una ecuación para el campo eléctrico \underline{E}_1 de la forma general

$$(2.21) \quad c^2 \nabla \times \nabla \times \underline{E}_1 + \frac{\partial^2}{\partial t^2} \hat{\underline{\epsilon}} \cdot \underline{E}_1 = 0$$

La solución de la ec.(2.21) a partir de las condiciones iniciales puede darse en términos de los modos propios del sistema. Los modos propios se obtienen proponiendo soluciones de la ec. (2.21) que se comporten en el tiempo como

$$e^{-i\omega t}$$

con ω , en general, complejo. Esto conduce, como veremos, a una relación de dispersión, es decir, a una condición de compatibilidad que determina las frecuencias propias del sistema.

2.3 Operador dieléctrico de un plasma inhomogéneo magnetizado.

De lo dicho en el párrafo anterior se desprende que el primer paso en el estudio de las oscilaciones de un plasma debe ser el de deducir la expresión del correspondiente operador dieléctrico.

Estudiaremos un plasma sumergido en un campo magnético \underline{B}_0 de origen externo, constante en el tiempo y uniforme en el espacio. Por conveniencia, se usará un sistema de coordenadas cartesianas con el eje x en la dirección de \underline{B}_0 . (ver fig.2.1).

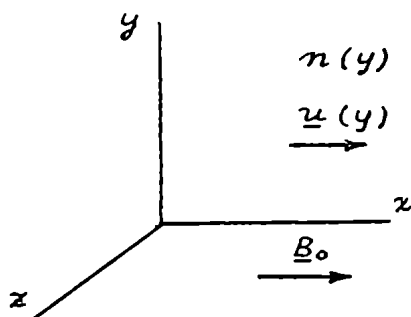


fig.2.1. Sistema de coordenadas utilizado en la descripción del plasma.

Supondremos que en el estado estacionario descrito por las f_0^α , nuestro plasma es homogéneo en las direcciones x y z , pero puede ser inhomogéneo en la dirección y , es decir

$$(2.22) \quad f_0^\alpha = f_0^\alpha(y, \underline{v})$$

y que además puede fluir en la dirección del campo exterior con una velocidad de masa $\underline{u} \equiv (u(y), 0, 0)$. No se especificará por el momento, en qué consiste la inhomogeneidad, que podría deberse, por ej., a un gradiente de densidad, o de temperatura, o de velocidades de masa:

$$(2.23) \quad u_\alpha = \int v_x f_0^\alpha d\underline{v} = u(y)$$

También se acepta que podrían estar presentes a la vez varios de esos gradientes.

Resulta conveniente introducir un sistema de coordenadas cilíndricas en el espacio de velocidades (ver fig.2.2) con eje en la dirección del campo

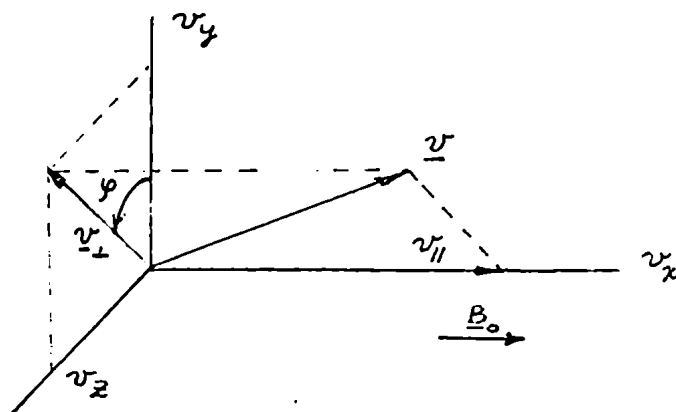


fig.2.2. Sistema de coordenadas en el espacio de las velocidades.

magnético \underline{B}_0 :

$$(2.24) \quad \begin{cases} v_x = v_{||} \\ v_y = v_{\perp} \cos \varphi \\ v_z = v_{\perp} \sin \varphi \end{cases}$$

La ecuación de Boltzmann-Vlasov para el estado estacionario se puede escribir de la forma:

$$(2.25) \quad v_{\perp} \cos \varphi \frac{\partial f_0^{\alpha}}{\partial y} - \varepsilon_{\alpha} \Omega_{\alpha} \frac{\partial f_0^{\alpha}}{\partial \varphi} = 0$$

La solución general de esta ecuación es

$$(2.26) \quad f_0^{\alpha} = f_0^{\alpha}(v_{||}, v_{\perp}^2, c_y) \quad ; \quad c_y = y + \frac{v_{\perp}}{\varepsilon_{\alpha} \Omega_{\alpha}} \sin \varphi$$

Aquí, c_y representa la coordenada y del centro de guía de una partícula que gira alrededor de las líneas del campo \underline{B}_0 con la frecuencia de ciclotrón Ω_{α} y radio de Larmor

$$(2.27) \quad \rho_L^{\alpha} = \frac{v_{\perp}}{\Omega_{\alpha}}$$

Conocidas las f_0^{α} es necesario integrar la ecuación (2.16) para la perturbación f_1^{α} :

$$(2.28) \quad \frac{\partial f_1^{\alpha}}{\partial t} + \underline{v} \cdot \frac{\partial f_1^{\alpha}}{\partial \underline{r}} - \varepsilon_{\alpha} \Omega_{\alpha} \frac{\partial f_1^{\alpha}}{\partial \varphi} = - \frac{e_{\alpha}}{m_{\alpha}} \left(\underline{E}_1 + \frac{\underline{v} \times \underline{B}_1}{c} \right) \cdot \frac{\partial f_0^{\alpha}}{\partial \underline{v}}$$

La ecuación (2.28) se puede integrar con el método de las características.⁽⁵⁾ A tal efecto, se supone que \underline{r} , \underline{v} y t son funciones de un parámetro τ :

$$\underline{r} = \underline{r}(\tau) \quad \underline{v} = \underline{v}(\tau) \quad t = t(\tau)$$

Con esta hipótesis, la ec. (2.28) es equivalente al siguiente sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias:

$$(2.29) \quad \frac{df_1^\alpha}{d\tau} = - \frac{e_\alpha}{m_\alpha} \left(E_1 + \frac{\underline{v} \times \underline{B}_1}{c} \right) \cdot \frac{\partial f_0^\alpha}{\partial \underline{v}}$$

$$(2.30) \quad \frac{dt}{d\tau} = 1 \quad \frac{d\underline{r}}{d\tau} = \underline{v} \quad \frac{d\varphi}{d\tau} = - \epsilon_\alpha \Omega_\alpha$$

$$\frac{dv_{\parallel}}{d\tau} = \frac{dv_{\perp}}{d\tau} = 0$$

Las ecs.(2.30) son las ecuaciones de las órbitas no perturbadas, que se integran, obteniéndose

$$(2.31) \quad \begin{aligned} x(\tau) &= c_x + v_{\parallel} \tau \\ y(\tau) &= c_y - \frac{v_{\perp}}{\epsilon_\alpha \Omega_\alpha} \sin \varphi(\tau) \\ z(\tau) &= c_z + \frac{v_{\perp}}{\epsilon_\alpha \Omega_\alpha} \cos \varphi(\tau) \\ \varphi(\tau) &= c_\varphi - \epsilon_\alpha \Omega_\alpha \tau \end{aligned}$$

En las ecs.(2.31), figuran las constantes de integración c_x , c_y , c_z , v_{\parallel} , v_{\perp}/Ω_α y c_φ que representan la posición inicial del centro de guía, la velocidad del centro de guía, el radio de Larmor de la partícula y su azimut inicial.

El contenido de las ecs. (2.31) es evidente: expresan que una partícula describe órbitas circulares alrededor de un centro de guía que se desplaza con velocidad constante a lo largo de las líneas del campo \underline{B}_0 .

Usando las ecuaciones de las órbitas se puede integrar la ec. 2.29 desde el instante inicial $\tau = t_0$ hasta el instante $\tau = t$, y haciendo el cambio de variable $\tau = \tau' + t$ queda:

$$(2.32) \quad f_1^\alpha(t) = f_1^\alpha(t_0) - \frac{e_\alpha}{m_\alpha} \int_{t_0-t}^0 d\tau' \left[\frac{\partial f_0^\alpha}{\partial \underline{v}} \cdot \left(E_1 + \frac{\underline{v} \times \underline{B}_1}{c} \right) \right]_{\tau = \tau' + t}$$

Puesto que el sistema que estamos considerando es homogéneo en el tiempo y en las coordenadas espaciales x y z , es posible, sin perder generalidad, suponer que toda cantidad de perturbación Q es de la forma:

$$(2.33) \quad Q \equiv Q(y) e^{-i\omega t + ik_x x + ik_z z}$$

Con esta suposición, y eliminando \underline{E}_1 , mediante la ec. (2.18), la ec. (2.32) se puede escribir como

$$(2.34) \quad f_1^\alpha(y(t), \underline{v}(t)) = f_1^\alpha(y(t_0), \underline{v}(t_0)) e^{-i\omega(t-t_0) + ik_x(x(t_0)-x(t)) + ik_z(z(t_0)-z(t))} + \frac{e_\alpha}{m_\alpha} \int_{t_0-t}^0 d\tau' e^{-i\omega\tau' + ik_x(x(\tau)-x(t)) + ik_z(z(\tau)-z(t))} \left\{ \frac{\partial \underline{E}_0^\alpha}{\partial \underline{v}} \cdot \left[\underline{I} \left(1 - \frac{\hat{k} \cdot \underline{v}}{\omega} \right) + \frac{\hat{k} \underline{v}}{\omega} \right] \cdot \underline{E}_1 \right\}$$

donde se ha introducido el operador diferencial

$$\hat{k} \equiv \left(k_x, -i \frac{d}{dy}, k_z \right)$$

que opera sobre las componentes del campo eléctrico.

Corresponde notar aquí que es necesario proceder con cautela al tratar perturbaciones de la forma dada por la ec. (2.33), y tomar recaudos a fin de asegurarse de que el operador dieléctrico que se obtenga satisfaga las condiciones de causalidad de Kramers-Kronig.⁽¹⁾ Esto se puede lograr de varias maneras. El artificio que se utilizara aquí, y que quizás sea el más simple, consiste en agregar una parte imaginaria pequeña y positiva $i\gamma$ a la frecuencia ω :

$$(2.35) \quad \omega \rightarrow \omega + i\gamma \quad ; \quad \gamma > 0$$

que luego se hace tender a cero al final de los cálculos. Este artificio equivale en esencia a considerar las ondas planas inhomogéneas (2.33) como el límite de un paquete de ondas des-

cribe a una perturbación que ha nacido en un instante del pasado y ha crecido en el tiempo. Con la hipótesis (2.35) se puede entonces tomar el límite $t_0 \rightarrow -\infty$ en la ec. (2.34) y resulta:

$$(2.36) \quad f_1^\alpha(y, \underline{v}) = -\frac{e_\alpha}{m_\alpha} \int_{-\infty}^0 d\tau' e^{-i\bar{\omega}\tau' + ik_z(z(\tau) - z(t))} \cdot \left\{ \frac{\partial f_0^\alpha}{\partial \underline{v}} \cdot \left[\underline{I} \left(1 - \frac{\hat{k} \cdot \underline{v}}{\omega} \right) + \frac{\hat{k} \cdot \underline{v}}{\omega} \right] \cdot \underline{E}_1 \right\}_\tau$$

donde se ha usado la notación

$$(2.37) \quad \bar{\omega} = \omega - k_x v_{||}$$

Para evaluar explícitamente la integral sobre $d\tau'$ es preciso poner en evidencia la dependencia en τ' del integrando de la ec. (2.36). El término en la llave se lleva fácilmente a la forma:

$$(2.38) \quad \left[\frac{\partial f_0^\alpha}{\partial v_{||}} + \frac{1}{\omega} \left(v_{||} \frac{\partial f_0^\alpha}{\partial c_L} - v_{\perp} \frac{\partial f_0^\alpha}{\partial v_{||}} \right) (\cos \varphi \hat{k}_y + \sin \varphi \hat{k}_z) \right] E_x(y) + \\ + \frac{1}{\omega} \left(\bar{\omega} \frac{\partial f_0^\alpha}{\partial c_L} + k_z v_{\perp} \frac{\partial f_0^\alpha}{\partial v_{||}} \right) (\cos \varphi E_y(y) + \sin \varphi E_z(y)) + \\ + \frac{1}{\omega \epsilon_\alpha \Omega_\alpha} \frac{\partial f_0^\alpha}{\partial c_y} \left[v_{||} \hat{k}_z E_x(y) + \bar{\omega} E_z(y) + v_{\perp} \cos \varphi (k_z E_y(y) - \hat{k}_y E_z(y)) \right]$$

En (2.38) se ha indicado con $\partial f_0^\alpha / \partial c_L$ y $\partial f_0^\alpha / \partial c_y$ a las derivadas de $f_0^\alpha(v_{||}, v_{\perp}^2, c_y) \equiv \hat{f}_0^\alpha(v_{||}, c_L^2, c_y)$ con respecto del segundo y del tercero de sus argumentos (que son constantes del movimiento).

La expresión (2.38) depende de τ' a través de φ y de y . Si bien no conocemos la dependencia de \underline{E} en y , es posible explicitar formalmente su dependencia en τ' desarrollando $\underline{E}(y(t+\tau'))$ en serie de Taylor. Las expresiones resultan más compactas utilizando notación operacional:

$$\underline{E}(y(\tau'+t)) = c \hat{k}_y \underline{E}(y(t))$$

$$(2.39) \quad \hat{k}_y = -i \frac{d}{d\tau'}$$

Gracias a este artificio es posible expresar toda la dependencia en τ' del integrando de la ec. (2.36) por medio de factores exponenciales del tipo:

$$(2.40) \quad e^{-i\bar{\omega}\tau' + i(y(\tau'+t) - y(t))\hat{k}_y + i(z(\tau'+t) - z(t))} \cdot \begin{cases} e^{i(\varphi(\tau'+t) - \varphi(t))} \\ 1 \\ e^{-i(\varphi(\tau'+t) - \varphi(t))} \end{cases}$$

donde, de (2.31)

$$y(\tau'+t) - y(t) = - \frac{\nu_z}{\varepsilon_\alpha \Omega_\alpha} [\text{sen } \varphi(\tau'+t) - \text{sen } \varphi(t)]$$

$$z(\tau'+t) - z(t) = \frac{\nu_L}{\varepsilon_\alpha \Omega_\alpha} [\text{cos } \varphi(\tau'+t) - \text{cos } \varphi(t)]$$

$$\varphi(\tau'+t) - \varphi(t) = - \varepsilon_\alpha \Omega_\alpha \tau'$$

La expresión (2.40) se puede llevar a una forma cómoda utilizando las fórmulas de Jacobi-Anger.⁽⁶⁾

$$e^{i\xi \text{sen } \xi} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{in\xi} J_n(\xi)$$

$$e^{i\xi \text{cos } \xi} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} i^n e^{in\xi} J_n(\xi)$$

donde con $J_n(\xi)$ se indica la función de Bessel de orden n definida por la serie

$$(2.41) \quad J_n(\xi) = \frac{1}{0!n!} \left(\frac{\xi}{2}\right)^n - \frac{1}{1!(n+1)!} \left(\frac{\xi}{2}\right)^{n+2} + \frac{1}{2!(n+2)!} \left(\frac{\xi}{2}\right)^{n+4} + \dots$$

Es ahora posible evaluar la integral en la ec.(2.36) y se obtiene fácilmente, usando las propiedades de las funciones de Bessel,

$$\begin{aligned}
 f_1^\alpha(y, \underline{v}) &= \frac{i}{\omega} \frac{e_\alpha}{m_\alpha} \sum_{p,q,\kappa,s=-\infty}^{+\infty} i^{p+\kappa} (-)^{\kappa+q} e^{i(p+q+\kappa+\dots)} J_p(\alpha) J_s(\hat{b}). \\
 (2.42) \quad & \cdot \left\{ J_p(\alpha) J_q(\hat{b}) \left[\left(\frac{v_{||}}{v_\perp} \frac{\partial f_0^\alpha}{\partial c_\perp} - \frac{\partial f_0^\alpha}{\partial v_{||}} \right) E_x - \frac{1}{\epsilon_\alpha \Omega_\alpha} \frac{\partial f_0^\alpha}{\partial c_y} E_z \right] + \right. \\
 & \left. - \frac{R^\alpha}{\bar{\omega} + (p+q)\epsilon_\alpha \Omega_\alpha} \left[J_p(\alpha) J_q(\hat{b}) \frac{v_{||}}{v_\perp} E_x - i J_p'(\alpha) J_q(\hat{b}) E_y + i J_p(\alpha) J_q'(\hat{b}) E_z \right] \right\}
 \end{aligned}$$

con

$$\begin{aligned}
 R^\alpha &= \bar{\omega} \frac{\partial f_0^\alpha}{\partial c_\perp} + k_x v_\perp \frac{\partial f_0^\alpha}{\partial v_{||}} + a \frac{\partial f_0^\alpha}{\partial c_y} \\
 a &= \frac{v_\perp k_z}{\epsilon_\alpha \Omega_\alpha} \quad ; \quad \hat{b} = \frac{v_\perp \hat{k}_y}{\epsilon_\alpha \Omega_\alpha}
 \end{aligned}$$

En la ec. (2.42), $J_s(\hat{b})$ y $J_q(\hat{b})$ son operadores diferenciales (lineales) definidos por la serie (2.41) y que operan sobre $\underline{E}(y)$. Con " ' " se indicó la derivada de la función de Bessel con respecto de su argumento.

La ec. (2.42) se puede escribir en forma compacta como:

$$(2.43) \quad f_1^\alpha = \frac{i}{\omega} \frac{e_\alpha}{m_\alpha} \hat{K}^\alpha \cdot \underline{E}$$

donde \hat{K}^α es un vector cuyas componentes son operadores diferenciales lineales. En términos de los \hat{K}^α , el operador dieléctrico definido por la ec.2.20 se puede escribir como

$$(2.44) \quad \hat{\underline{\epsilon}} = \underline{I} + 4\pi \sum_\alpha \hat{K}^\alpha = \underline{I} + 4\pi \hat{\underline{K}}$$

donde

$$(2.45) \quad \hat{\chi}^{\alpha} = \frac{1}{\omega^2} \frac{e_{\alpha}^2}{m_{\alpha}} \int \underline{v} \hat{K}^{\alpha} d\underline{v}$$

El operador $\hat{\chi}$ se denomina operador de susceptibilidad (o de polarizabilidad) eléctrica del plasma, y como lo indica la ec. (2.44) es igual a la suma de los operadores de susceptibilidad eléctrica de todas las especies α presentes en el plasma.

El operador \hat{K}^{α} , y por lo tanto, $\hat{\chi}^{\alpha}$, depende de la función de distribución estacionaria $f_0^{\alpha}(v_{\parallel}, v_{\perp}^2, y)$ aún no especificada. Pese a ello, se puede progresar un poco más en el formalismo, sin perder generalidad, y evaluar explícitamente la integral sobre el azimut φ en el espacio de las velocidades. En efecto, procediendo con la misma técnica usada ya para explicitar la dependencia en τ' del campo eléctrico, se puede escribir

$$(2.46) \quad f_0^{\alpha}(v_{\parallel}, v_{\perp}^2, y + \frac{v_{\perp}}{\epsilon_{\alpha} \Omega_{\alpha}} \text{sen } \varphi) = \sum_{\nu} e^{i\nu\varphi} J_{\nu}(\hat{y}) f_0^{\alpha}(v_{\parallel}, v_{\perp}^2, y)$$

donde \hat{y} es el operador diferencial

$$(2.47) \quad \hat{y} \equiv - \frac{i v_{\perp}}{\epsilon_{\alpha} \Omega_{\alpha}} \frac{\partial}{\partial y}$$

que opera sobre el tercer argumento de la f_0^{α} (se desea mantener la distinción con el operador \hat{b} que opera sobre el campo eléctrico \underline{E}).

Evaluando la integral sobre el azimut φ se obtienen finalmente, luego de algún reordenamiento, las componentes del operador $\hat{\chi}^{\alpha}$:

$$(2.48) \quad \hat{\chi}_{\alpha r}^{\alpha} = - \frac{e_{\alpha}^2}{m_{\alpha}} \frac{2\pi}{\omega^2} \sum \int dv_{\parallel} dv_{\perp} i^{\ell+k+p+q} e^{(-)} J_{\ell+p}(\hat{y}) J_{p+q}(a) J_q(\hat{b}) J_{\ell+k}(a) J_k(\hat{b}) \cdot \left\{ \left(v_{\parallel}^2 \frac{\partial f_0^{\alpha}}{\partial v_{\perp}} + v_{\perp} f_0^{\alpha} \right) - \frac{v_{\parallel}^2}{\bar{\omega} + \ell \epsilon_{\alpha} \Omega_{\alpha}} R^{\alpha} \right\}$$

$$\hat{K}_{xy}^\alpha = -\frac{e_\alpha^2}{m_\alpha} \frac{2\pi i}{\omega^2} \sum \int v_{\parallel} v_{\perp} dv_{\parallel} dv_{\perp} i \frac{i^{\ell+k+p+q} (-)^{\ell}}{\bar{\omega} + \ell \epsilon_\alpha \Omega_\alpha} J_{\ell+p}(\hat{r}) J_{p+q}(a) J_q(\hat{b}) J'_{\ell+k}(a) J_k(\hat{b}) R^\alpha$$

$$\hat{K}_{xz}^\alpha = \frac{e_\alpha^2}{m_\alpha} \frac{2\pi}{\omega^2} \sum \int v_{\parallel} v_{\perp} dv_{\parallel} dv_{\perp} i^{\ell+k+p+q} (-)^{\ell} J_{\ell+p}(\hat{r}) J_{p+q}(a) J_q(\hat{b}) J_{\ell+k}(a) \cdot$$

$$\cdot \left\{ J_k(\hat{b}) \frac{1}{\epsilon_\alpha \Omega_\alpha} \frac{\partial f_0^\alpha}{\partial y} + i J'_k(\hat{b}) \frac{1}{\bar{\omega} + \ell \epsilon_\alpha \Omega_\alpha} R^\alpha \right\}$$

$$\hat{K}_{yz}^\alpha = -\frac{e_\alpha^2}{m_\alpha} \frac{2\pi i}{\omega^2} \sum \int v_{\perp} dv_{\parallel} dv_{\perp} i^{\ell+k+p+q} (-)^{\ell} J_{\ell+p}(\hat{r}) J'_{p+q}(a) J_q(\hat{b}) J_{\ell+k}(a) J_k(\hat{b}) \cdot$$

$$\cdot \left\{ v_{\parallel} \frac{\partial f_0^\alpha}{\partial v_{\perp}} - v_{\perp} \frac{\partial f_0^\alpha}{\partial v_{\parallel}} - \frac{1}{\bar{\omega} + \ell \epsilon_\alpha \Omega_\alpha} v_{\parallel} R^\alpha \right\}$$

$$\hat{K}_{yy}^\alpha = \frac{e_\alpha^2}{m_\alpha} \frac{2\pi}{\omega^2} \sum \int v_{\perp}^2 dv_{\parallel} dv_{\perp} i^{\ell+k+p+q} (-)^{\ell} J_{\ell+p}(\hat{r}) J'_{p+q}(a) J_q(\hat{b}) J'_{\ell+k}(a) J_k(\hat{b}) R^\alpha$$

$$\hat{K}_{yz}^\alpha = \frac{e_\alpha^2}{m_\alpha} \frac{2\pi i}{\omega^2} \sum \int v_{\perp}^2 dv_{\parallel} dv_{\perp} i^{\ell+k+p+q} (-)^{\ell} J_{\ell+p}(\hat{r}) J'_{p+q}(a) J_q(\hat{b}) J_{\ell+k}(a) \cdot$$

$$\cdot \left\{ J_k(\hat{b}) \frac{1}{\epsilon_\alpha \Omega_\alpha} \frac{\partial f_0^\alpha}{\partial y} + i J'_k(\hat{b}) \frac{1}{\bar{\omega} + \ell \epsilon_\alpha \Omega_\alpha} R^\alpha \right\}$$

$$\hat{K}_{zx}^\alpha = \frac{e_\alpha^2}{m_\alpha} \frac{2\pi i}{\omega^2} \sum \int v_{\perp} dv_{\parallel} dv_{\perp} i^{\ell+k+p+q} (-)^{\ell} J_{\ell+p}(\hat{r}) J_{p+q}(a) J'_q(\hat{b}) J'_{\ell+k}(a) J_k(\hat{b}) \cdot$$

$$\cdot \left\{ v_{\parallel} \frac{\partial f_0^\alpha}{\partial v_{\perp}} - v_{\perp} \frac{\partial f_0^\alpha}{\partial v_{\parallel}} - \frac{1}{\bar{\omega} + \ell \epsilon_\alpha \Omega_\alpha} v_{\parallel} R^\alpha \right\}$$

$$\hat{K}_{zy}^\alpha = -\frac{e_\alpha^2}{m_\alpha} \frac{2\pi i}{\omega^2} \sum \int v_{\perp}^2 dv_{\parallel} dv_{\perp} i^{\ell+k+p+q} (-)^{\ell} J_{\ell+p}(\hat{r}) J_{p+q}(a) J'_q(\hat{b}) J'_{\ell+k}(a) J_k(\hat{b}) \cdot$$

$$\hat{K}_{22}^{\alpha} = - \frac{e_{\alpha}^2}{m_{\alpha}} \frac{2\pi i}{\omega^2} \sum \int v_{\perp}^2 dv_{\parallel} dv_{\perp} i^{2+p+q+k} (-)^{\ell} J_{\ell+p}(\hat{\gamma}) J_{p+q}(a) J_q'(\hat{a}) J_{\ell+k}(a) \cdot$$

$$\cdot \left\{ J_k(\hat{b}) \frac{1}{\epsilon_{\alpha} \Omega_{\alpha}} \frac{\partial f_0^{\alpha}}{\partial y} + i J_k'(\hat{b}) \frac{1}{\bar{\omega} + \ell \epsilon_{\alpha} \Omega_{\alpha}} R^{\alpha} \right\}$$

con

$$R^{\alpha} = \bar{\omega} \frac{\partial f_0^{\alpha}}{\partial v_{\perp}} + k_x v_{\perp} \frac{\partial f_0^{\alpha}}{\partial v_{\parallel}} + a \frac{\partial f_0^{\alpha}}{\partial y} \quad ; \quad f_0^{\alpha} = f_0^{\alpha}(v_{\parallel}, v_{\perp}^2, y)$$

Las sumatorias en las ecs.(2.48) se efectúan sobre los cuatro índices ℓ, p, q, k , y se extienden desde $-\infty$ a $+\infty$.

La integral sobre dv_{\perp} se extiende desde 0 a $+\infty$. La integral sobre dv_{\parallel} se extiende desde $-\infty$ a $+\infty$. Como se ha agregado a ω una parte imaginaria positiva $i\gamma$, el camino de integración, para ω real, en el plano de la variable compleja v_{\parallel} , pasa por debajo de los polos, situados en $(\omega + \ell \epsilon_{\alpha} \Omega_{\alpha}) / k_x$ (ver fig.2.3a).

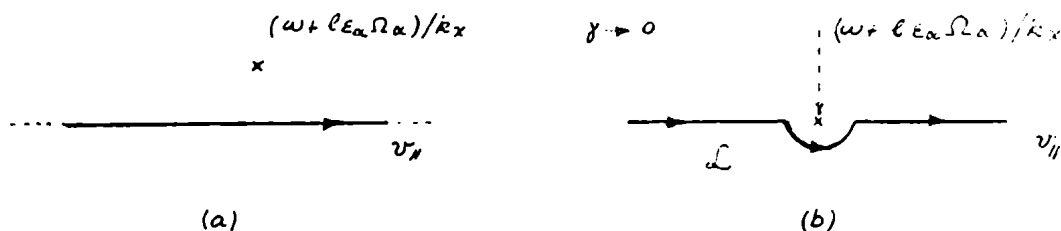


fig.2.3. Camino de integración en el plano complejo v_{\parallel} .

Al tender al límite $\gamma \rightarrow 0$, estos polos tienden a situarse sobre el eje real. Se ve entonces que es preciso deformar

el camino de integración como se indica en la figura 2.3b a fin de tender con continuidad al límite.⁽⁷⁾

Puede pensarse entonces que en las ecs. (2.48) ya se ha puesto $\gamma = \epsilon$, y que las integrales sobre $d\nu_{||}$ se calculan a lo largo de un camino \mathcal{L} que rodea por debajo a los polos situados en $(\omega + l\epsilon_\alpha \Omega_\alpha)/k_x$, los cuales contribuyen por lo tanto con su semirresiduo, de acuerdo con la conocida fórmula

$$(2.49) \quad \lim_{\gamma \rightarrow 0} \frac{1}{x + i\gamma} = \frac{P}{x} - \pi i \delta(x)$$

La extensión analítica a valores complejos de ω se debe hacer calculando las integrales sobre $d\nu_{||}$ a lo largo del camino \mathcal{L} de la fig.2.4

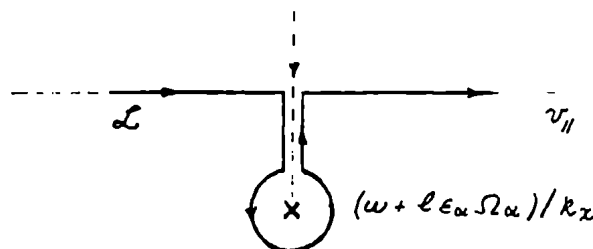


fig.2.4. Camino de integración en el plano complejo $\nu_{||}$ de la prolongación analítica del operador de susceptibilidad a valores complejos de la frecuencia.

Estas contribuciones dan lugar a términos no hermitianos en el tensor dieléctrico, y están relacionadas con un amortiguamiento o amplificación de las oscilaciones. El amortiguamiento (o amplificación) se debe a la interacción entre las partículas y los campos autoconsistentes que lleva a un acoplamiento entre los haces por mediación del haz de partículas que cumplen la condición de resonancia:

$$(2.50) \quad k_x \nu_{||} = \omega + l\epsilon_\alpha \Omega_\alpha \quad (l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

Cuando $\ell = 0$, esta condición coincide con la conocida condición de emisión Cherenkov, y las contribuciones correspondientes dan origen al amortiguamiento (o amplificación) de Landau.⁽⁷⁾ Existen en la literatura varias interpretaciones del amortiguamiento de Landau y su exposición detallada excedería de los propósitos del presente trabajo. En el Apéndice A 2.1 se discute una interpretación heurística debida a F. Gratton y al autor.

Las contribuciones correspondientes a $\ell \neq 0$ dan origen al amortiguamiento (o amplificación) ciclotrónico.⁽⁸⁾

El procedimiento que se ha seguido en la deducción del operador susceptibilidad eléctrica es algo más general que el método usual para un plasma homogéneo.⁽⁹⁾ Los resultados ya conocidos para el caso homogéneo se pueden recuperar fácilmente a partir de las ec. (2.48) poniendo

$\partial f_0^\alpha / \partial y = 0$. En tal caso sólo los términos correspondientes a $J_0(\hat{y})$ contribuyen, y

$$J_0(\hat{y}) f_0^\alpha = f_0^\alpha$$

además, si suponemos que el campo eléctrico depende de y en la forma

$$e^{iyk_y}$$

el efecto de los operadores $J_m(\hat{b})$ se puede calcular:

$$J_m(\hat{b}) \underline{E} = J_m(b) \underline{E} \quad b = \frac{v_x k_y}{\epsilon_x \Omega_x}$$

Es posible entonces aplicar las conocidas reglas de suma de las funciones de Bessel:⁽⁶⁾

$$J_\ell(c) e^{i\ell\beta} = \sum_k J_{\ell+k}(a) J_k(b) i^k$$

con (ver fig. 2.5)

$$c = \frac{v_x k_x}{\epsilon_x \Omega_x} \quad k_x^2 = k_y^2 + k_z^2 \quad \text{ctg } \beta = \frac{k_x}{k_y}$$

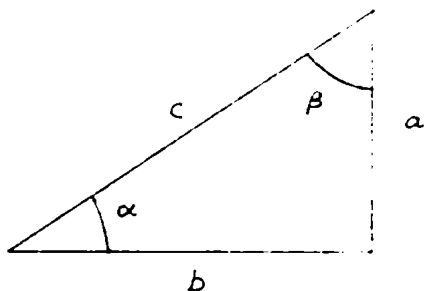


fig.2.5. Regla de suma de las funciones de Bessel.

Procediendo de este modo, las sumatorias en la ec.(2.48) se convierten en sumatorias sobre un único índice y se obtiene el resultado que se da en la literatura.

El resultado (2.48) es exacto (dentro del modelo de plasma sin colisiones), pues no se ha hecho ninguna aproximación en los cálculos previos, y es válido en todas aquellas situaciones en las que f_0^α tiene la forma dada por la ec.(2.26).

Debido a la no homogeneidad del plasma, \hat{K} resulta ser un operador diferencial de orden infinito y en él aparecen, además, las derivadas de la f_0^α con respecto de y a todos los órdenes. Por este motivo, la expresión exacta (2.48) difícilmente sea aplicable en la práctica, pero puede ser punto de partida para una gran variedad de aproximaciones correspondientes a diferentes regímenes y problemas.

Si en (2.48) se desarrollan en serie las funciones de Bessel, se obtiene una serie de términos que corresponden a las potencias de a , b y \hat{y} . La razón entre los términos de un orden y los del orden siguiente dependerá del valor de los parámetros

$$(2.51) \quad \frac{\langle \rho_L \rangle}{\lambda_2} \quad , \quad \frac{\langle \rho_L \rangle}{\lambda_y} \quad , \quad \frac{\langle \rho_L \rangle}{L}$$

siendo $\lambda_z = 2\pi/k_z$, λ_y la distancia característica de variación con la coordenada y de la perturbación, L una distancia característica que da la medida de la dependencia espacial de la inhomogeneidad del plasma y $\langle r_L \rangle$ el radio de Larmor medio de las partículas.

Si la perturbación varía lentamente en el espacio y si los gradientes son suaves en el estado estacionario, o si la temperatura transversal es baja, es decir, si se cumple

$$\frac{\langle r_L \rangle}{\lambda_z} \ll 1 \quad \frac{\langle r_L \rangle}{\lambda_y} \ll 1 \quad \frac{\langle r_L \rangle}{L} \ll 1$$

será posible obtener aproximaciones útiles en la expresión (2.48) del operador \hat{K}_E^α . Al orden más bajo se tendrá la aproximación de temperatura transversal nula (o bien radio de Larmor nulo):

$$\begin{aligned} \hat{K}_{zz}^{\alpha(0)} &= -\frac{e_\alpha^2}{m_\alpha} \int dv_{||} \left\{ \left[\frac{1}{\bar{\omega}^2} + \frac{v_{||}^2}{\bar{\omega}^2} \frac{\hat{k}_y^2 + k_z^2}{\bar{\omega}^2 - \Omega_\alpha^2} \right] F_0^\alpha + \frac{v_{||}^2}{\bar{\omega}^2} \frac{1}{\bar{\omega}^2 - \Omega_\alpha^2} \left(\frac{\epsilon_\alpha \Omega_\alpha}{\bar{\omega}} k_z - i \hat{k}_y \right) \frac{\partial F_0^\alpha}{\partial y} \right\} \\ \hat{K}_{zy}^{\alpha(0)} &= \frac{e_\alpha^2}{m_\alpha \omega^2} \int v_{||} dv_{||} \frac{1}{\bar{\omega}^2 - \Omega_\alpha^2} \left[(i \epsilon_\alpha \Omega_\alpha k_z - \bar{\omega} \hat{k}_y) F_0^\alpha + i \bar{\omega} \frac{\partial F_0^\alpha}{\partial y} \right] \\ \hat{K}_{yz}^{\alpha(0)} &= -\frac{e_\alpha^2}{m_\alpha \omega^2} \int v_{||} dv_{||} \frac{1}{\bar{\omega}^2 - \Omega_\alpha^2} \left[(\bar{\omega} k_z + i \epsilon_\alpha \Omega_\alpha \hat{k}_y) F_0^\alpha + \epsilon_\alpha \Omega_\alpha \frac{\partial F_0^\alpha}{\partial y} \right] \\ (2.52) \quad \hat{K}_{yx}^{\alpha(0)} &= -\frac{e_\alpha^2}{m_\alpha \omega^2} \int v_{||} dv_{||} \frac{1}{\bar{\omega}^2 - \Omega_\alpha^2} (i \epsilon_\alpha \Omega_\alpha k_z + \bar{\omega} \hat{k}_y) F_0^\alpha \\ \hat{K}_{yy}^{\alpha(0)} &= \hat{K}_{zz}^{\alpha(0)} = -\frac{e_\alpha^2}{m_\alpha \omega^2} \int dv_{||} \frac{\bar{\omega}^2}{\bar{\omega}^2 - \Omega_\alpha^2} F_0^\alpha \\ \hat{K}_{yz}^{\alpha(0)} &= \hat{K}_{zy}^{\alpha(0)*} = -\frac{i \epsilon_\alpha}{m_\alpha \omega^2} \int dv_{||} \frac{\epsilon_\alpha \Omega_\alpha \bar{\omega}}{\bar{\omega}^2 - \Omega_\alpha^2} F_0^\alpha \\ \hat{K}_{zx}^{\alpha(0)} &= -\frac{e_\alpha^2}{m_\alpha \omega^2} \int v_{||} dv_{||} \frac{1}{\bar{\omega}^2 - \Omega_\alpha^2} (\bar{\omega} k_z - i \epsilon_\alpha \Omega_\alpha \hat{k}_y) F_0^\alpha \end{aligned}$$

siendo

$$(2.53) \quad F_0^\alpha(v_\parallel, y) = 2\pi \int v_\perp dv_\perp f_0^\alpha(v_\perp, v_\parallel, y)$$

Al orden siguiente se obtienen términos que dan cuenta de efectos de radio de Larmor finito. Como ejemplo se da la expresión de $K_{xx}^{\alpha(2)}$:

$$(2.54) \quad \begin{aligned} \hat{K}_{xx}^{\alpha(2)} = & - \langle \rho_L^2 \rangle \frac{e_\alpha^2}{2m_\alpha \omega^2} \int dv_\parallel \frac{\Omega_\alpha^2}{\bar{\omega}^2 - \Omega_\alpha^2} (\hat{k}_y^2 + k_z^2) \left\{ \frac{2v_\parallel k_x}{\bar{\omega}} \left(1 + \frac{v_\parallel k_x \bar{\omega}}{\bar{\omega}^2 - \Omega_\alpha^2} \right) + \frac{v_\parallel^2 k_x^2}{\bar{\omega}^2} + \frac{3v_\parallel^2}{\bar{\omega}^2 - 4\Omega_\alpha^2} (\hat{k}_y^2 + k_z^2) \right\} G_0^\alpha \\ & - \langle \rho_L^2 \rangle \frac{e_\alpha^2}{2m_\alpha \omega^2} \int dv_\parallel \left\{ \frac{\Omega_\alpha^2}{\bar{\omega}^2 - \Omega_\alpha^2} \left[\frac{2v_\parallel k_x}{\bar{\omega}} \left(1 + \frac{v_\parallel k_x \bar{\omega}}{\bar{\omega}^2 - \Omega_\alpha^2} \right) \left(\frac{\bar{\omega}}{\epsilon_\alpha \Omega_\alpha} k_z - i \hat{k}_y \right) - i \frac{v_\parallel k_x^2}{\bar{\omega}^2} \hat{k}_y + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{6v_\parallel^2}{\bar{\omega}^2 - 4\Omega_\alpha^2} (\hat{k}_y^2 + k_z^2) \left(\frac{\epsilon_\alpha \Omega_\alpha}{\bar{\omega}} k_z - i \hat{k}_y \right) \right] - \frac{v_\parallel^2 k_x^2}{2\epsilon_\alpha \Omega_\alpha \bar{\omega}} (\hat{k}_y^2 + k_z^2) \right\} \frac{\partial G_0^\alpha}{\partial y} \\ & - \langle \rho_L^2 \rangle \frac{e_\alpha^2}{2m_\alpha \omega^2} \int dv_\parallel \left\{ \frac{1}{2} \left[\frac{\omega^2}{\bar{\omega}^2} + \frac{v_\parallel^2}{\bar{\omega}^2 - \Omega_\alpha^2} (\hat{k}_y^2 + k_z^2) + \frac{i v_\parallel^2}{\epsilon_\alpha \Omega_\alpha \bar{\omega}} k_z \hat{k}_y \right] + \right. \\ & \left. + \frac{3v_\parallel^2 \Omega_\alpha}{(\bar{\omega}^2 - \Omega_\alpha^2)(\bar{\omega}^2 - 4\Omega_\alpha^2)} (k_z^2 - \hat{k}_y^2 - 2i \frac{\epsilon_\alpha \Omega_\alpha}{\bar{\omega}} k_z \hat{k}_y) \right\} \frac{\partial^2 G_0^\alpha}{\partial y^2} \\ & - \langle \rho_L^2 \rangle \frac{e_\alpha^2}{2m_\alpha \omega^2} \int dv_\parallel \frac{1}{2} \frac{v_\parallel^2}{\bar{\omega}^2 - \Omega_\alpha^2} \left(\frac{\epsilon_\alpha \Omega_\alpha}{\bar{\omega}} k_z - i \hat{k}_y \right) \frac{\partial^3 G_0^\alpha}{\partial y^3} \end{aligned}$$

con

$$(2.55) \quad \langle \rho_L^2 \rangle G_0^\alpha(v_\parallel, y) = 2\pi \int v_\perp dv_\perp \left(\frac{v_\perp}{\Omega_\alpha} \right)^2 f_0^\alpha(v_\parallel, v_\perp, y)$$

El operador de susceptibilidad $\hat{\chi}_{\parallel}^{\alpha(2)}$ de la ec.(2.52), correspondiente al orden más bajo del desarrollo de $\hat{\chi}_{\parallel}^{\alpha}$ en potencias del radio de Larmor (aproximación de temperatura transversal nula), presenta algunas características que conviene mencionar aquí. La inhomogeneidad del estado no perturbado contribuye solamente a través de la primera derivada de la función de distribución. Estas contribuciones aparecen en forma no hermitiana ⁽¹⁰⁾, lo cual sugiere la posibilidad de que puedan surgir en el plasma inestabilidades asociadas con la presencia de inhomogeneidades, por vía de algún mecanismo que lleve a la acumulación de energía en ciertas regiones del espacio. Esta posibilidad será explorada más adelante.

También se puede observar que el operador (2.52) incluye efectos de dispersión espacial debidos al movimiento de masa y a la temperatura paralela. Las únicas resonancias que aparecen son las que corresponden a $\ell = 0, \pm 1$.

El orden siguiente del desarrollo de $\hat{\chi}_{\parallel}^{\alpha}$, ejemplificado por el término (2.54) es cuadrático en el radio de Larmor. Aparece en este orden la dispersión espacial debida a la temperatura transversal. La inhomogeneidad contribuye con derivadas de orden más elevado. Además de las resonancias correspondientes a $\ell = 0, \pm 1$ aparecen las resonancias con $\ell = \pm 2$.

La aproximación de temperatura transversal nula contiene aún efectos de amortiguamiento (o amplificación) resonante para $\ell = 0, \pm 1$, debidos a la dispersión térmica $v_{\ell\parallel}$ en v_{\parallel} . Si la temperatura paralela es suficientemente pequeña como para que se cumpla la condición

$$(2.56) \quad \left| \frac{\omega - k_x u_{\alpha} + \ell \Omega_{\alpha}}{k_x v_{\ell\parallel}} \right| \gg 1 \quad \ell = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

los haces resonantes tendrán una densidad de partículas muy pequeña y por consiguiente el acoplamiento entre haces por vía

del haz resonante será también pequeño. Esto conduce a que los efectos de amortiguamiento (o amplificación) de Landau y de ciclotrón sean despreciables. ⁽⁹⁾

En consecuencia, si se cumplen las condiciones (2.51) y (2.56) será posible considerar que el plasma está frío.

El operador $\hat{K}_{\alpha}^{\alpha}$ para un plasma frío inhomogéneo se puede obtener de la expresión (2.52) suponiendo F_0^{α} de la forma

$$(2.57) \quad F_0^{\alpha}(v_{\parallel}, y) = n_{\alpha}(y) \delta(v_{\parallel} - u(y))$$

Se obtiene entonces (11)

$$4\pi \hat{K}_{xz}^{\alpha} = -\frac{\omega_{p\alpha}^2}{\bar{\omega}^2} - \hat{k}_y \frac{u^2}{\omega^2} \frac{\omega_{p\alpha}^2}{\bar{\omega}^2 - \Omega_{\alpha}^2} \left(\hat{k}_y + i \frac{\epsilon_{\alpha} \Omega_{\alpha}}{\bar{\omega}} k_z \right) + i k_z \frac{u^2}{\omega^2} \frac{\omega_{p\alpha}^2}{\Omega_{\alpha}^2} \left(\frac{\epsilon_{\alpha} \Omega_{\alpha}}{\bar{\omega}} \hat{k}_y + i k_y \right)$$

$$4\pi \hat{K}_{xy}^{\alpha} = - \left(\hat{k}_y \bar{\omega} - i k_z \epsilon_{\alpha} \Omega_{\alpha} \right) \frac{u}{\omega^2} \frac{\omega_{p\alpha}^2}{\bar{\omega}^2 - \Omega_{\alpha}^2}$$

$$4\pi \hat{K}_{zx}^{\alpha} = - \left(k_z \bar{\omega} + i \hat{k}_y \epsilon_{\alpha} \Omega_{\alpha} \right) \frac{u}{\omega^2} \frac{\omega_{p\alpha}^2}{\bar{\omega}^2 - \Omega_{\alpha}^2}$$

$$(2.58) \quad 4\pi \hat{K}_{yz}^{\alpha} = - \frac{u}{\omega^2} \frac{\omega_{p\alpha}^2}{\bar{\omega}^2 - \Omega_{\alpha}^2} \left(\bar{\omega} \hat{k}_y + i \epsilon_{\alpha} \Omega_{\alpha} k_z \right)$$

$$4\pi \hat{K}_{yy}^{\alpha} = 4\pi \hat{K}_{zz}^{\alpha} = - \frac{\bar{\omega}^2}{\omega^2} \frac{\omega_{p\alpha}^2}{\bar{\omega}^2 - \Omega_{\alpha}^2}$$

$$4\pi \hat{K}_{yz}^{\alpha} = 4\pi \hat{K}_{zy}^{\alpha} = - i \frac{\epsilon_{\alpha} \Omega_{\alpha} \bar{\omega}}{\omega^2} \frac{\omega_{p\alpha}^2}{\bar{\omega}^2 - \Omega_{\alpha}^2}$$

$$4\pi \hat{K}_{zx}^{\alpha} = - \frac{u}{\omega^2} \frac{\omega_{p\alpha}^2}{\bar{\omega}^2 - \Omega_{\alpha}^2} \left(\bar{\omega} k_z - i \epsilon_{\alpha} \Omega_{\alpha} \hat{k}_y \right)$$

donde se ha puesto

$$\bar{\omega} = \bar{\omega}(y) = \omega - k_x u(y) \quad (2.59)$$

$$\omega_{p\alpha}^2 = \omega_{p\alpha}^2(y) = 4\pi e_\alpha^2 n(y) / m_\alpha$$

$$y \quad \hat{k}_y = -i \frac{d}{dy}$$

opera ahora sobre todas las funciones de la coordenada y ($u, \omega_p, \bar{\omega}, \underline{E}$), y no solamente sobre el campo eléctrico como hasta ahora.

El operador (2.58) correspondiente a un plasma frío se puede aplicar también a un plasma con temperatura finita, siempre y cuando se cumplan las condiciones (2.51) y (2.56). El significado de las condiciones (2.51) es que las propiedades del plasma en el estado no perturbado (u, ω_p) y la perturbación \underline{E}_1 deben variar poco (en dirección perpendicular a \underline{B}_0) sobre distancias del orden del radio de Larmor de una partícula con velocidad v_{\perp} del orden de la velocidad térmica media. La condición (2.56) con $\ell=0$ requiere que la componente de la velocidad de fase de la perturbación, en la dirección de \underline{B}_0 , medida en un referencial que se mueve con la velocidad de masa u , $\bar{\omega}/k_z$, sea mucho mayor que la velocidad térmica media $\langle (v_{\parallel} - u)^2 \rangle^{1/2}$. Finalmente, la condición (2.56) con $\ell = \pm 1, \pm 2, \dots$, requiere (cuando la condición (2.56) con $\ell=0$ ya se satisface) que la frecuencia $\bar{\omega}$ no se aproxime demasiado a la frecuencia de ciclotrón o a sus armónicas.

Las oscilaciones de un plasma frío y homogéneo son no amortiguadas. Para un dado vector de onda \underline{k} , existe un número limitado de frecuencias ω , pues la relación de dispersión es algebraica, como se verá más adelante. La agitación térmica de las partículas complica notablemente el panorama respecto del caso frío. Ante todo, empiezan a observarse los efectos de haces

resonantes y se tiene, para un plasma homogéneo, amortiguamiento de Landau y de ciclotrón de los modos fríos. En segundo lugar, aparecen nuevos modos de oscilación. En general, sin embargo, las nuevas oscilaciones que aparecen debido a los efectos térmicos son fuertemente amortiguadas ($\text{Im}(\omega) \sim \text{Re}(\omega)$), y las longitudes de onda son pequeñas (del orden de ρ_{Le} o de ρ_{Li} o de λ_D). Es por eso que, salvo por casos especiales, las oscilaciones que subsisten en un plasma frío son las que concitan el mayor interés. La utilidad del modelo de plasma frío reside precisamente en ser un punto de partida y una conveniente primera aproximación que permite ingresar en el vasto campo de las oscilaciones de un plasma.

Hay casos, que constituyen una excepción respecto de lo anterior, en que el movimiento térmico lleva a oscilaciones débilmente amortiguadas. Un caso que nos interesa es el de las ondas iónicas en un plasma no isotérmico, en el cual la temperatura de los electrones θ_e es mucho mayor que la temperatura de los iones, θ_i . En este caso, pueden darse oscilaciones poco amortiguadas de baja frecuencia, cuya velocidad de fase $v_f = \bar{\omega}/k_x$ satisface la relación

$$(2.60) \quad v_{te} \gg v_f \gg v_{ti} \quad (\theta_e \gg \theta_i)$$

En un régimen de esta clase la susceptibilidad dieléctrica de los iones se puede aproximar con el caso frío, ec.(2.58). En lo que respecta a los electrones, a frecuencias bajas ($\bar{\omega} \ll \omega_{pe}, \Omega_e$) es posible aproximar su comportamiento mediante un modelo hidrodinámico en el cual se han despreciado los efectos de inercia.⁽¹⁰⁾ Se obtiene de este modo el tensor de susceptibilidad para los electrones en la forma (ver la deducción en el Apéndice A2.2):

$$(2.61) \quad 4\pi \hat{K}_{xx}^e = \frac{k_D^2}{k_x^2} - i \frac{\hat{k}_y}{k_x} \frac{\bar{\omega} \omega_{pe}^2}{\omega^2 \Omega_e} \frac{k_z}{k_x} + i \frac{k_z}{k_x} \frac{\bar{\omega} \omega_{pe}^2}{\omega^2 \Omega_e} \frac{\hat{k}_y}{k_x}$$

$$4\pi \hat{K}_{xy}^e = -i \frac{k_z}{k_x} \frac{\bar{\omega} \omega_{pe}^2}{\omega^2 \Omega_e}$$

$$4\pi \hat{K}_{xz}^e = i \frac{\hat{k}_y}{k_x} \frac{\bar{\omega} \omega_{pe}^2}{\omega^2 \Omega_e}$$

$$4\pi \hat{K}_{yx}^e = i \frac{\bar{\omega} \omega_{pe}^2}{\omega^2 \Omega_e} \frac{k_z}{k_x}$$

$$4\pi \hat{K}_{yy}^e = 4\pi \hat{K}_{zz}^e = 0$$

$$4\pi \hat{K}_{yz}^e = 4\pi \hat{K}_{zy}^e = -i \frac{\bar{\omega} \omega_{pe}^2}{\omega^2 \Omega_e}$$

$$4\pi \hat{K}_{zx}^e = -i \frac{\bar{\omega} \omega_{pe}^2}{\omega^2 \Omega_e} \frac{\hat{k}_y}{k_x}$$

con

$$(2.62) \quad k_D \equiv 1/\lambda_D = \sqrt{4\pi e^2 n_0 / \theta_e}$$

En lo que sigue limitaremos nuestro interés a los dos regímenes que se acaban de mencionar, es decir, plasma frío, en cuyo caso se usará la expresión (2.58) para el operador de susceptibilidad de electrones e iones, y plasma no isotérmico, con la condición (2.60), en cuyo caso se usará la expresión (2.58) para los iones y la (2.61) para los electrones.

2.4 La ecuación de las ondas y la aproximación electrostática.

Se vio en el § 2.2 que si se conoce el operador dieléctrico del plasma es posible escribir la ecuación de las ondas para el campo eléctrico en la forma general (2.21) que, para el caso que se está considerando, de un plasma inhomogéneo en la dirección del eje y , se puede escribir en la forma

$$(2.63) \quad \hat{k} \times (\hat{k} \times \underline{E}) + \frac{\omega^2}{c^2} \hat{\underline{\underline{\epsilon}}} \cdot \underline{E} = 0 \quad \underline{E} = \underline{E}(y)$$

La forma del operador $\hat{\underline{\epsilon}}$ queda determinada una vez dadas las propiedades del estado no perturbado del plasma, que para los regímenes que se están considerando se reducen a dar los perfiles de densidad $n(y)$ y de velocidad $u(y)$ y, para el régimen no isotérmico, el valor de k_D . Las ecuaciones (2.63) serán entonces un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias en la variable y , cuyas soluciones dan los modos normales del plasma.

Las condiciones de contorno y de compatibilidad implican, como se verá, que las ec. (2.63) tienen solución solamente para ciertos valores ω_j ($j = 1, 2, \dots$) de la frecuencia, determinados por una relación del tipo

$$(2.64) \quad D(\omega_j, k_x, k_z, \beta_i) = 0$$

donde con β_i se indican en forma genérica los parámetros que caracterizan al plasma.

La relación (2.64) se denomina relación de dispersión. En ella se resume la dinámica del plasma, y de ella se obtienen todas las propiedades de las oscilaciones.

El estudio de las oscilaciones, inestabilidades y ondas en un plasma por vía del análisis de modos normales consiste, en última instancia, en deducir la relación de dispersión correspondiente y en analizar detalladamente las propiedades de sus raíces ω_j .

Entre la variedad de posibles oscilaciones de un plasma, hay cierto tipo de ondas cuyo estudio tiene especial interés. Se trata de aquellos modos que tienen velocidades de fase baja, pues para ellos la interacción entre los campos y las partículas es particularmente eficiente. Esta interacción conduce a una variedad de efectos específicos, como ser un mayor amortiguamiento de las ondas, un mayor nivel de fluctuaciones, el surgimiento de inestabilidades, etc. Por estos motivos, nos limitaremos en lo que sigue al estudio de los modos de este tipo.

Si la velocidad de fase v_f es mucho menor que la velocidad de la luz, ⁽⁹⁾

$$(2.65) \quad \hat{k} \times \underline{E} \approx 0$$

puesto que la componente transversal del campo eléctrico, \underline{E}_\perp es mucho menor que la componente longitudinal $\underline{E}_\parallel = -i \hat{k} \phi$ (ϕ es el potencial electrostático) en la relación

$$(2.66) \quad \frac{E_\perp}{E_\parallel} \sim \left(\frac{v_f}{c}\right)^2 \ll 1$$

$$\underline{E} = \underline{E}_\parallel + \underline{E}_\perp \quad \underline{E}_\parallel = -i \hat{k} \phi \quad \hat{k} \cdot \underline{E}_\perp = 0$$

Por consiguiente, los modos de baja velocidad de fase son potenciales, a menos de términos del orden de $(v_f/c)^2$. Para estos modos cuasi-electrostáticos, la ecuación (2.63) se puede escribir, al orden más bajo en $(v_f/c)^2$, en términos del potencial ϕ en la forma:

$$(2.67) \quad \hat{k} \cdot \hat{\underline{\epsilon}} \cdot \hat{k} \phi = 0$$

La ec. (2.67) da la aproximación electrostática a los modos cuasipotenciales, y será la ecuación básica para los problemas de oscilaciones que se estudiarán en el presente trabajo.

Debe recalcar aquí el carácter aproximado de la aproximación electrostática (2.67). Las oscilaciones del plasma pueden ser puramente longitudinales ($\underline{E}_\perp = 0$) sólo si $(v_f/c)^2 = 0$. Cuando $(v_f/c)^2 \ll 1$ hay (salvo casos particulares) una pequeña componente \underline{E}_\perp del campo eléctrico. Esta componente transversal pese a su pequeñez puede llegar a tener efectos importantes, por ejemplo, en lo que se refiere al transporte de la energía, ⁽¹²⁾ como se verá más adelante.

Referencias

1. A.A. Rukhadze, V.P. Silin, Sov.Phys. USPEKHI 4 (1961)459.
2. L.D. Landau, Phys.Zs.Soviet Un.10 (1937) 154 (Collected Papers, Pergamon, Oxford (1965)p.163).
3. L. Spitzer, "Physics of Fully Ionized Gases" Interscience Publishers, Inc. New York (1956) Cap.5.
4. A.A. Vlasov, Zh. Exsp. i Teor. Fiz.8 (1938) 291.
5. M.N. Rosenbluth, N. Rostoker, "Theoretical Structure of Plasma Equations", Proc. 2d. Intern. Conf. Geneva 31. (1958) 144.
6. A. Erdélyi et al, "Higher Trascendental Functions", Mc.Graw-Hill, New York 1953.
7. L.D. Landau, Zhurn.Exsp.Teor. Fiz.10 (1946) 25.
8. R.Z. Sagdeev, V.D. Shafranov, "Absorption of High Frequency Electromagnetic Energy in a High Temperature Plasma", Proc. 2d.Int.Conf.Geneva 31 (1958) 118.
9. A.I. Akhiezer et al. "Collective Oscillations in a Plasma" M.I.T.Press, Cambridge, Mass. (1967), cap.2.
10. T.H. Stix, "The Theory of Plasma Waves", Mc.Graw-Hill, New York (1962).
11. F. Gratton, J. Gratton, J. Sánchez, "Overstability of Cold Plasma Waves", Ediciones Previas FCEN. Dto.Física, (1970), a publicarse.en Nuclear Fusion 10 n°4 (1970).
12. F. Gratton, J. Gratton, Nuclear Fusion 10 (1970) 97.

3. Modos electrostáticos de un plasma homogéneo semi-infinito.

3.1 Consideraciones generales.

De acuerdo con lo mencionado en el punto 2.3, nos proponemos el estudio de las oscilaciones electrostáticas de un plasma inhomogéneo. Más específicamente, nos ocuparemos del caso en que el perfil de velocidad $u(y)$ y de densidad $n(y)$ del estado no perturbado, tienen la forma que se

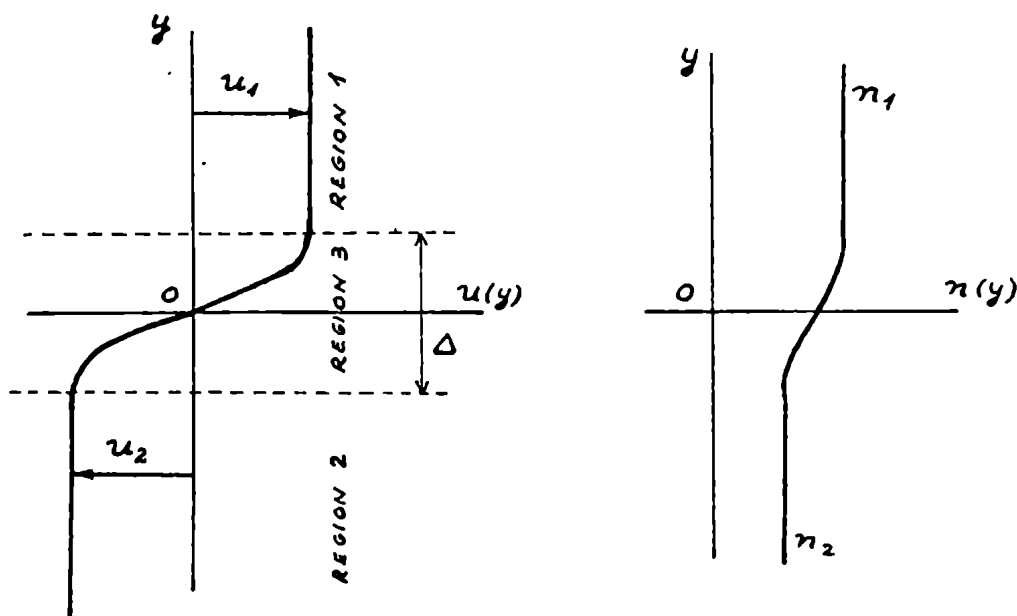


fig.3.1. Perfiles de velocidad y de densidad del plasma.

indica en la fig.3.1, es decir que hay dos regiones del espacio, que llamaremos Región 1 y Región 2, en las que el plasma es homogéneo y tiene densidad n_1 y n_2 y fluye con velocidad u_1 y u_2 respectivamente. (En lo que sigue distinguiremos con los subíndices 1 y 2 a las cantidades que

corresponden, respectivamente, a las Regiones 1 y 2). Las regiones 1 y 2 están separadas por una región de transición, que llamaremos Región 3, cuyo espesor es Δ , y se extienden hasta $y = \pm \infty$.

El potencial electrostático ϕ de la perturbación debe ser solución de la ec. (2.67):

$$(3.1) \quad \hat{k} \cdot \hat{\epsilon} \cdot \hat{k} \phi = 0$$

y debe ser acotado para $y \rightarrow \pm \infty$ para que el campo eléctrico se mantenga finito. Para una geometría como la que se ha descrito, el procedimiento usual para resolver la ec.(3.1) consiste en encontrar las soluciones en las regiones 1, 2, y 3 y empalmarlas oportunamente.

Por consiguiente será oportuno analizar las propiedades de las oscilaciones de un plasma homogéneo semiinfinito, que corresponden a las soluciones de la ec.(3.1) en las regiones 1 y 2.

Para fijar ideas se supondrá que el plasma ocupa el semi-espacio $y > 0$. Las soluciones de la ec.(3.1) se pueden suponer de la forma

$$(3.2) \quad \phi(y) = e^{ik_y y} \phi \quad (\phi = cte)$$

con k_y , en general, complejo. Para que la solución (3.2) sea acotada, se debe requerir

$$(3.3) \quad \text{Im}(k_y) > 0$$

Si se sustituye la expresión (3.2) para ϕ en la ec.(3.1) se obtiene la relación de dispersión de las oscilaciones en la forma

$$(3.4) \quad \underline{k} \cdot \underline{\epsilon}(\omega, \underline{k}) \cdot \underline{k} = 0$$

que relaciona la frecuencia ω con el vector de onda $\underline{k} \equiv (k_x, k_y, k_z)$. En la expresión (3.4), $\underline{\epsilon}(\omega, \underline{k})$ es el tensor dieléctrico de un plasma homogéneo, que se obtiene del operador dieléctrico $\hat{\underline{\epsilon}}(\omega, \hat{\underline{k}})$ sustituyendo

el operador \hat{k}_y por su autovalor k_y (ver el punto 2.3).

Nos interesará estudiar los modos que surgen de la relación de dispersión (3.4) en dos regímenes:

(a) Oscilaciones electrónicas (de alta frecuencia) de un plasma frío.

(b) Oscilaciones iónicas de un plasma no isotérmico.

3.2 Oscilaciones electrónicas de un plasma frío semiinfinito.

Corresponde en este caso usar para iones y electrones las susceptibilidades dadas por la ec.(2.58). La relación de dispersión (3.4) se escribe entonces:

$$(3.5) \quad k_x^2 \left(1 - \sum_{\alpha} \frac{\omega_{p\alpha}^2}{\bar{\omega}^2} \right) + k_{\perp}^2 \left(1 - \sum_{\alpha} \frac{\omega_{p\alpha}^2}{\bar{\omega}^2 - \Omega_{\alpha}^2} \right) = 0$$

$$k_{\perp}^2 = k_y^2 + k_z^2$$

Consideraremos siempre un plasma formado por electrones e iones de una sola especie. Entonces, la ec.(3.5) define las frecuencias $\omega = \omega_j$ de tres modos de oscilación, en función de la relación k_x^2/k_{\perp}^2 . Estas frecuencias se denominan frecuencias resonantes del plasma.⁽¹⁾

A frecuencias altas, $\bar{\omega}^2 \gg \Omega_i^2$, se puede ignorar la dinámica de los iones, y suponer que están fijos formando un fondo neutralizador.

La ec.(3.5) se reduce entonces a

$$(3.6) \quad k_x^2 \left(1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\bar{\omega}^2} \right) + k_{\perp}^2 \left(1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\bar{\omega}^2 - \Omega_e^2} \right)$$

que da las dos frecuencias resonantes electrónicas

$$(3.7) \quad \bar{\omega}_{\pm}^2 = \frac{1}{2} \left\{ (\omega_p^2 + \Omega^2) \pm \sqrt{(\omega_p^2 + \Omega^2)^2 - 4\omega_p^2\Omega^2 k_x^2/k_{\perp}^2} \right\}$$

$$k^2 = k_x^2 + k_{\perp}^2$$

En la ec.(3.7) se han suprimido los subíndices de ω_p y Ω . Como el plasma ocupa el semiespacio $y > 0$, k_x y k_z son reales, pero k_y , y por lo tanto k_\perp , pueden llegar a ser complejos. Para analizar el comportamiento de la ec.(3.7) en el plano complejo k_\perp , introducimos un ángulo complejo ζ definido por

$$(3.8) \quad \frac{k_{||}}{k_\perp} = \operatorname{tg} \zeta \quad \zeta = \theta + i\eta$$

Puesto que

$$(3.9) \quad \operatorname{tg} \zeta = \frac{\operatorname{sen} \theta \cos \theta + i \operatorname{sh} \eta \operatorname{ch} \eta}{\cos^2 \theta \operatorname{ch}^2 \eta + \operatorname{sen}^2 \theta \operatorname{sh}^2 \eta}$$

el semiplano $\eta > 0$ corresponde a $\operatorname{Im}(k_\perp) > 0$, es decir, para $k_z = 0$, modos que se amortiguan para $y \rightarrow +\infty$, el semiplano $\eta < 0$ corresponde a $\operatorname{Im}(k_\perp) < 0$, y el eje real, $\eta = 0$, a valores reales de k_\perp . Por la periodicidad de la función $\operatorname{tg}^2 \zeta$ bastará considerar la franja $-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$ del plano ζ . Sobre las líneas $\theta = 0$ y $\theta = \pm \pi/2$, k_\perp es imaginario puro.

Sobre el eje real $\eta = 0$, la ec.(3.7) se escribe

$$(3.10) \quad \bar{\omega}_\pm^2 = \frac{1}{2} \left\{ (\omega_p^2 + \Omega^2) \pm \sqrt{(\omega_p^2 + \Omega^2)^2 - 4\omega_p^2 \Omega^2 \cos^2 \theta} \right\}$$

Las dos frecuencias resonantes, $\bar{\omega}_\pm$ son reales y su comportamiento se ilustra esquemáticamente en la fig.(3.2) para $\theta > 0$.

Estos valores de $\bar{\omega}_+$ y $\bar{\omega}_-$ corresponden a ondas que se propagan oblicuamente respecto del campo magnético exterior.

Sobre la línea $\theta = 0$, la ec.(3.7) se puede escribir

$$(3.11) \quad \bar{\omega}_\pm^2 = \frac{1}{2} \left\{ (\omega_p^2 + \Omega^2) \pm \sqrt{(\omega_p^2 + \Omega^2)^2 - 4\omega_p^2 \Omega^2 \operatorname{ch}^2 \eta} \right\}$$

$$k_\perp = i k_x \operatorname{th} \eta$$

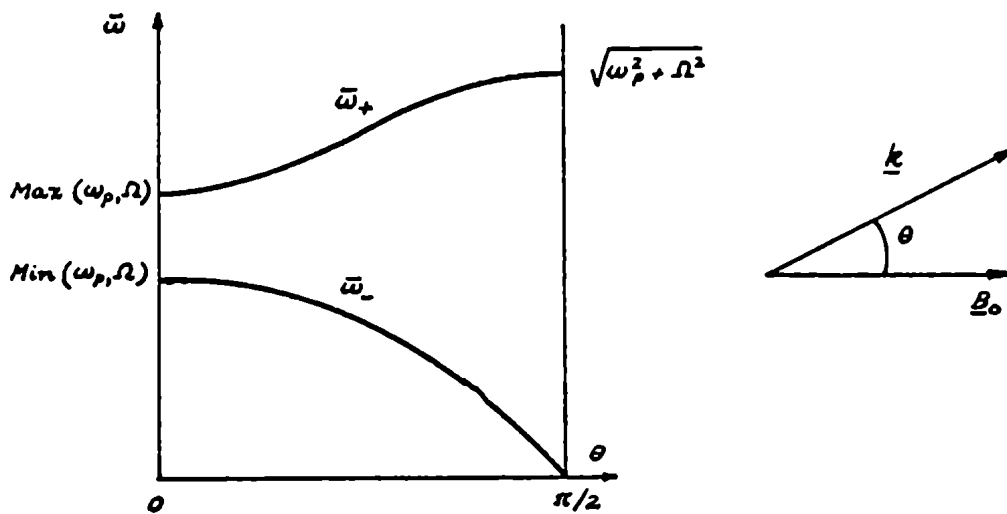


fig.3.2. Comportamiento de las frecuencias resonantes $\bar{\omega}_+$ y $\bar{\omega}_-$ en función de θ .

Ambas frecuencias son reales para valores de $\eta < \eta_{max}$ dado por

$$\text{sh } \eta_{max} = \left| \frac{\omega_p^2 - \Omega^2}{2\omega_p \Omega} \right|$$

Cuando $\eta = \eta_{max}$, $\bar{\omega}_+^2 = \bar{\omega}_-^2 = \frac{1}{2}(\omega_p^2 + \Omega^2)$ y cuando $\eta > \eta_{max}$, $\bar{\omega}_+$ y $\bar{\omega}_-$ son complejos. A medida que η aumenta de 0 a η_{max} , $|k_\perp|$ crece desde 0 a $|k_{\perp max}|$ dado por

$$k_{\perp max}^2 = -k_x^2 \left(\frac{\omega_p^2 - \Omega^2}{\omega_p^2 + \Omega^2} \right)^2$$

Este comportamiento se representa esquemáticamente en la fig.(3.3).

Sobre las líneas $\theta = \pm \pi/2$, la ec.(3.7) se puede poner en la forma

$$(3.12) \quad \bar{\omega}_\pm^2 = \frac{1}{2} \left\{ (\omega_p^2 + \Omega^2) \pm \sqrt{(\omega_p^2 + \Omega^2)^2 + 4\omega_p^2 \Omega^2 \text{sh}^2 \eta} \right\}$$

$$k_\perp = i k_x \text{cth } \eta$$

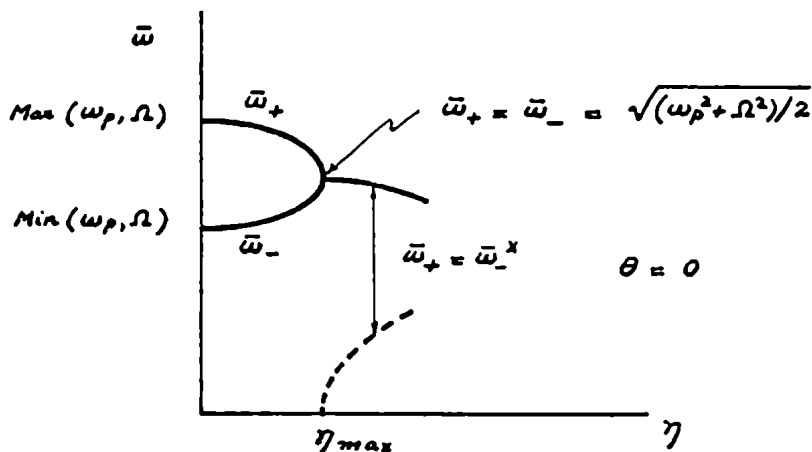


fig.3.3. Comportamiento de las frecuencias resonantes $\bar{\omega}_+$ y $\bar{\omega}_-$ como función de η (para $\theta = 0$).

En este caso, $\bar{\omega}_+$ es siempre real y es función creciente de η a partir del valor $\bar{\omega}_+(\eta=0) = \sqrt{\omega_p^2 + \Omega^2}$; $|k_\perp/k_x|$ tiene un polo en $\eta=0$ y disminuye con η creciente, tendiendo a la unidad, para $\eta \rightarrow \infty$. La frecuencia $\bar{\omega}_-$, en cambio, es siempre imaginaria pura. En la fig.3.4 se ha dibujado cualitativamente la marcha de $\bar{\omega}_\pm$.

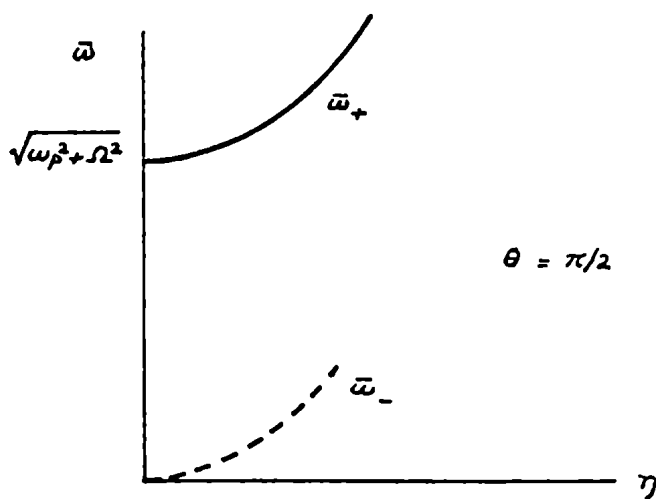


fig.3.4. Comportamiento de las frecuencias resonantes $\bar{\omega}_+$ y $\bar{\omega}_-$ como función de η (para $\theta = \pi/2$).

Para todos los demás valores de θ , es decir, para k_\perp

complejo, las frecuencias $\bar{\omega}_\pm$ resultan complejas.

Del precedente análisis se desprende que la relación de dispersión (3.6) da lugar, para un plasma semiinfinito, a modos inestables ($\bar{\omega}$ complejo) y estables ($\bar{\omega}$ real).

Los modos inestables están siempre asociados a valores complejos de k_y , cosa que es de esperar por razones físicas, puesto que un plasma frío, homogéneo y aislado es estable. Una inestabilidad en un plasma semiinfinito puede provenir solamente de un intercambio de energía debido a la interacción con algún otro sistema. Tales inestabilidades (si las hay) necesariamente darán perturbaciones localizadas alrededor de la región donde se produce el intercambio.⁽²⁾

Los modos estables pueden ser de dos tipos, según que k_\perp sea real o imaginario puro. Modos con k_\perp real representan ondas que se propagan en el seno del plasma, oblicuamente al campo magnético exterior. Los modos con k_\perp imaginario puro corresponden a perturbaciones localizadas en sentido transversal al campo, es decir ondas de superficie.

El espectro de los modos estables está representado cualitativamente en la figura 3.5. Partiendo de $\bar{\omega} = 0$ se encuentra una banda de modos propagantes que se extiende hasta $\bar{\omega} = \text{Min}(\omega_p, \Omega)$. Al comienzo de la banda las ondas se propagan perpendicularmente a \underline{B}_0 y al final se propagan paralelas a él. Superado el valor $\bar{\omega} = \text{Min}(\omega_p, \Omega)$, hay una banda de modos de superficie, que se extiende hasta $\bar{\omega} = \text{Max}(\omega_p, \Omega)$. La distancia de penetración es infinita al comienzo de la banda, disminuye hasta alcanzar su valor mínimo para $\bar{\omega} = \sqrt{(\omega_p^2 + \Omega^2)}/2$ y luego vuelve a aumentar hasta infinito en el extremo superior de la banda. Aparece luego una nueva banda de modos propagantes, que se extiende hasta el valor $\bar{\omega} = \sqrt{\omega_p^2 + \Omega^2}$, para el cual la propagación es perpendicular a \underline{B}_0 . Finalmente, para valores

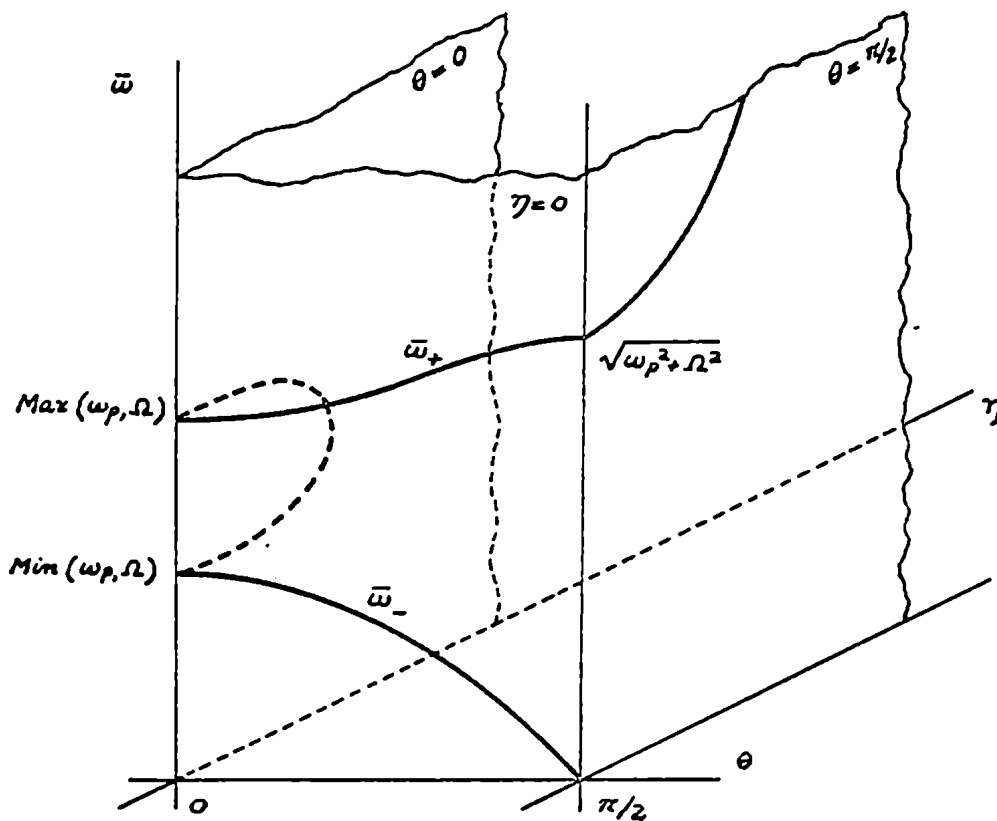


fig.3.5. Espectro de modos electrónicos estables de un plasma semiinfinito. El plano $\eta=0$ corresponde a ondas propagantes y los planos $\theta=0$ y $\theta = \pi/2$ a ondas de superficie.

mayores de $\bar{\omega}$ hay modos superficiales, cuya distancia de penetración es $|2\pi/k_x|$ al comienzo, aument a con $\bar{\omega}$ y tiende asintóticamente a $\lambda_x = 2\pi/k_x$.

Es interesante examinar la velocidad de grupo de los modos propagantes, dados por la ec. (3.10).

En un sistema de referencia que se mueve solidario al plasma, se obtiene fácilmente

$$(3.13) \quad \underline{v}_{g\pm} = \frac{\partial \bar{\omega}_{\pm}}{\partial \underline{k}} = \hat{\theta} \frac{\omega_p^2 \Omega^2}{k \bar{\omega}_{\pm}} \frac{\text{sen } \theta \cos \theta}{(2\bar{\omega}_{\pm}^2 - \omega_p^2 - \Omega^2)}$$

Aquí, $\hat{\theta}$ es un versor normal al vector de onda \underline{k} y contenido en el plano definido por \underline{k} y \underline{B}_0 (ver fig.3.6). Se ve que la velocidad de grupo es perpendicular

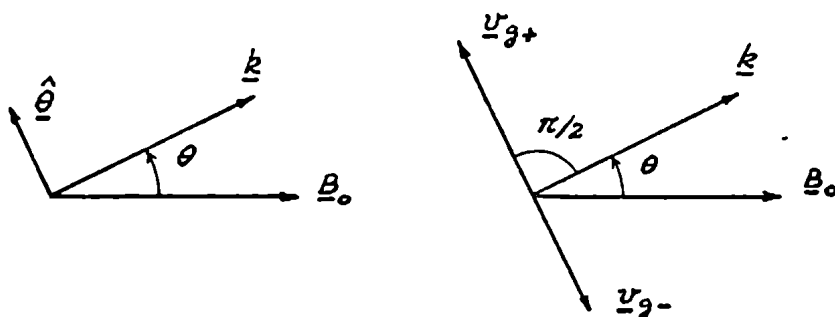


fig.3.6. Dirección de la velocidad de grupo de los modos resonantes.

al vector de onda (y a la velocidad de fase) para ambas resonancias. Para la resonancia superior, $\bar{\omega}_+$, la dispersión paralela (a \underline{B}_0) es negativa, y la dispersión transversal (a \underline{B}_0) es positiva. Viceversa, para la resonancia inferior $\bar{\omega}_-$, la dispersión paralela es positiva y la dispersión transversal es negativa. ⁽³⁾

El comportamiento del módulo de v_g como función de θ se ha representado cualitativamente en la fig. (3.7).

Para finalizar con esta discusión de los modos electrónicos fríos corresponde mencionar ciertas limitaciones a los resultados obtenidos. Ante todo, están las condiciones (2.51) y (2.56):

$$(3.14) \quad |k_{\perp} \rho_L| \ll 1 \quad \left| \frac{\bar{\omega} + \ell \Omega}{k_x v_t} \right| \gg 1 \quad \ell = 0, \pm 1, \dots$$

que requieren $k_x \rightarrow 0$, en el entorno de $\bar{\omega} = \sqrt{\omega_p^2 + \Omega^2}$ (para tener k_{\perp} finito) y restringen la aplicabilidad de los resultados en el entorno de $\bar{\omega} = 0$; $\bar{\omega} = \pm \Omega, \pm 2\Omega, \dots$

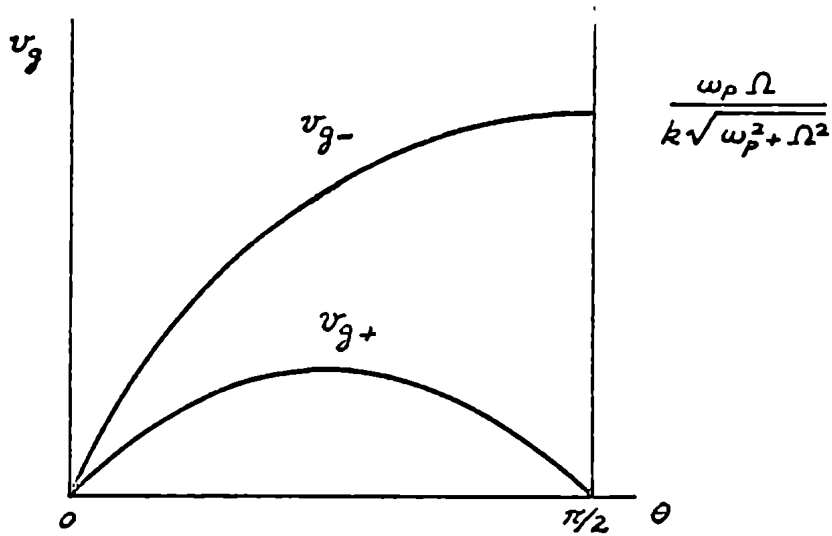


fig.3.7. Velocidad de grupo de los modos resonantes en función de θ .

debido a los efectos de amortiguamiento de Landau y de ciclotrón.

Además, se ha despreciado la dinámica de los iones, lo que trae aparejado que la expresión (3.10) para $\bar{\omega}_2$ puede usarse solamente hasta valores del ángulo θ que cumplan la condición (1)

$$(3.15) \quad |\pi/2 - \theta| \gg \sqrt{m_e/m_i}$$

3.3 Oscilaciones iónicas de un plasma no isotérmico semi-infinito.

En el régimen no isotérmico de bajas frecuencias corresponde usar para los iones la susceptibilidad en la aproximación fría, ec.(2.58) y para el fluido de electrones la susceptibilidad dada por la ec.(2.61), de acuerdo con lo discutido en el punto 2.3. La relación de dispersión (3.4) se puede entonces escribir en la forma

$$(3.16) \quad k_x^2 \left(1 - \frac{\omega_{pi}^2}{\bar{\omega}^2}\right) + k_L^2 \left(1 - \frac{\omega_{pi}^2}{\bar{\omega}^2 - \Omega_i^2}\right) + k_D^2 = 0$$

$$k_L^2 = k_y^2 + k_z^2 \quad k_D^2 = 1/\lambda_D^2 = 4\pi e^2 n_0 / \theta_e$$

siendo θ_e la temperatura de los electrones. La ec.(3.16) determina las frecuencias $\bar{\omega}_\pm$ de dos oscilaciones iónicas:⁽¹⁾

$$(3.17) \quad \bar{\omega}_\pm^2 = \frac{1}{2} \left\{ (\omega_s^2 + \Omega_i^2) \pm \sqrt{(\omega_s^2 + \Omega_i^2)^2 - 4\omega_s^2 \Omega_i^2 k_x^2 / k^2} \right\}$$

$$k^2 = k_x^2 + k_L^2$$

donde se ha usado la notación:

$$(3.18) \quad \omega_s = \frac{\omega_{pi} k}{\sqrt{k^2 + k_D^2}} = \frac{v_s k}{\sqrt{1 + k^2 \lambda_D^2}}$$

$$v_s = \sqrt{\theta_e / m_i}$$

La frecuencia ω_s es la frecuencia de las ondas iónicas acústicas para propagación paralela al campo \underline{B}_0 ($k_\perp = 0$, $k = k_x$)⁽⁴⁾. Su comportamiento como función de k/k_D se ilustra en la fig.3.8.

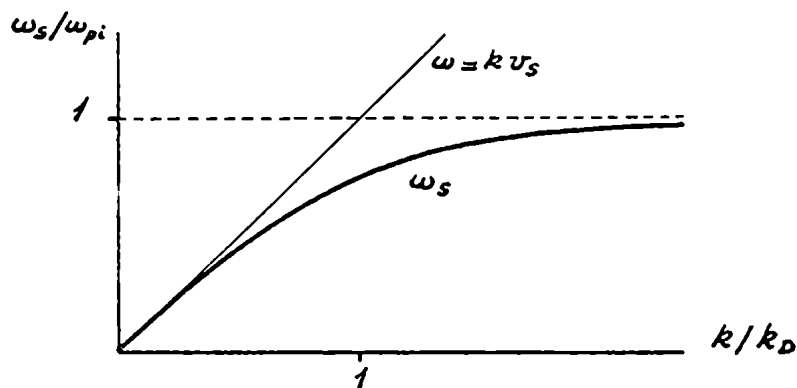


fig.3.8. Dependencia de ω_s en k .

Se ve que para longitudes de onda largas,

$$(3.19) \quad \omega_s \approx k v_s \quad (\lambda \gg \lambda_D)$$

mientras que para longitudes de onda muy cortas, ω_s se vuelve independiente de k :

$$(3.20) \quad \omega_s \approx \omega_{pi} \quad (\lambda \ll \lambda_D)$$

Si se establece la correspondencia $\omega_{pe} \leftrightarrow \omega_s$, $\Omega_e \leftrightarrow \Omega_i$ se puede identificar formalmente la ec.(3.17) con la ec.(3.7) para las resonancias electrónicas. Por consiguiente, las consideraciones que se hicieron en el punto precedente en lo referente a la naturaleza de los modos que pueden darse en un plasma semiinfinito se pueden repetir en este caso, obteniéndose resultados similares.

Análogamente al caso electrónico, de la relación de dispersión (3.16) se pueden obtener modos inestables, asociados siempre a valores complejos de k_{\perp} , y modos estables, que pueden ser ondas con propagación oblicua (k_{\perp} real), o bien ondas superficiales (k_{\perp} imaginario puro).

El espectro de modos con propagación oblicua muestra dos bandas, que se extienden desde $\bar{\omega} = 0$ hasta $\bar{\omega} = \text{Min}(\omega_s, \Omega_i)$ y desde $\bar{\omega} = \text{Max}(\omega_s, \Omega_i)$ hasta $\bar{\omega} = \sqrt{\omega_s^2 + \Omega^2}$ (ver fig.3.9). Las ondas que aparecen en las proximidades de ω_s constituyen la rama acústica iónica, y la rama que aparece en las proximidades de Ω_i corresponde a las ondas iónicas ciclotrónicas (electrostáticas).

La diferencia entre las propiedades de los modos iónicos dados por la ec.(3.17) y los modos electrónicos del punto anterior proviene (además de la diferencia en orden de magnitud de las frecuencias correspondientes) de las diferentes propiedades dispersivas del plasma que están involucradas en la dependencia de ω_s en el número de onda k (ec. 3.18) . Esto

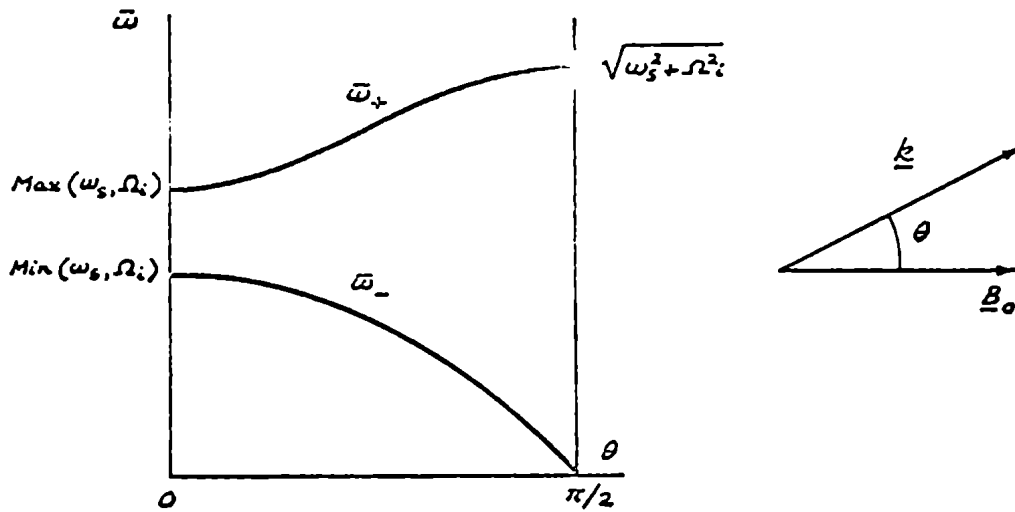


fig.3.9. Frecuencias de los modos iónicos correspondientes a propagación oblicua.

trae aparejado, en particular, que las propiedades del espectro de los modos estables dependen del valor de k .

Estudiaremos las características de los modos estables en función de k_x (real). Para ello conviene escribir la relación de dispersión (3.16) en la forma

$$(3.21) \quad \frac{k_x^2}{k_{x0}^2} + \frac{k_{\perp}^2}{k_{\perp0}^2} = 1$$

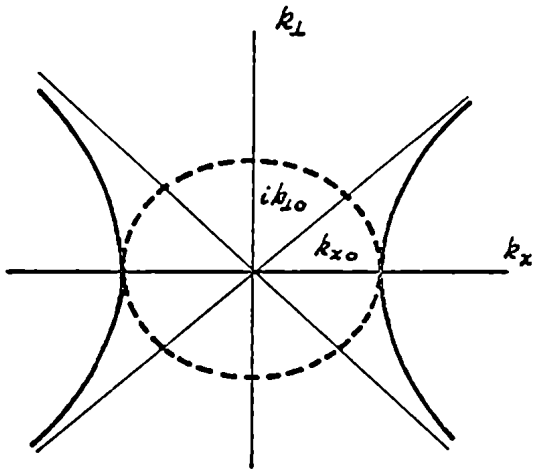
con

$$(3.22) \quad k_{x0}^2 = -\frac{k_D^2 \bar{\omega}^2}{\bar{\omega}^2 - \omega_{p_i}^2} \quad k_{\perp0}^2 = -\frac{k_D^2 (\bar{\omega}^2 - \Omega_i^2)}{\bar{\omega}^2 - \omega_{p_i}^2 - \Omega_i^2}$$

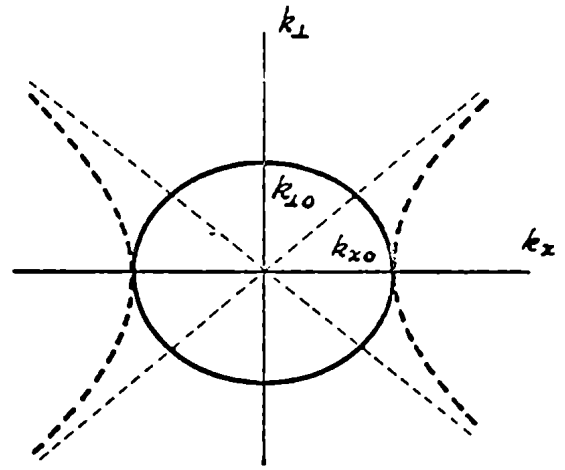
Para un valor fijo de $\bar{\omega}$, la (3.21) representa una cónica. Según sea el valor de $\bar{\omega}$, k_{x0}^2 y $k_{\perp0}^2$ pueden tomar diferentes signos, resultando cuatro casos que se han representado en la fig. 3.10, (i) a (iv).

(i) En el intervalo $0 < \bar{\omega} < \text{Min}(\omega_{p_i}, \Omega_i)$ hay ondas de superficie (k_{\perp} imaginario) para $k_x < k_{x0}$ o, en forma equivalente, para

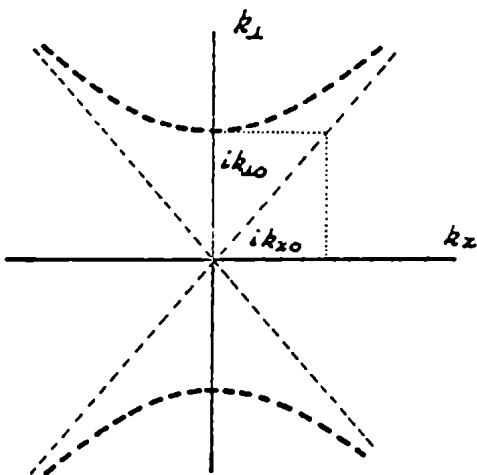
$$\bar{\omega} > \omega_s(k_x)$$



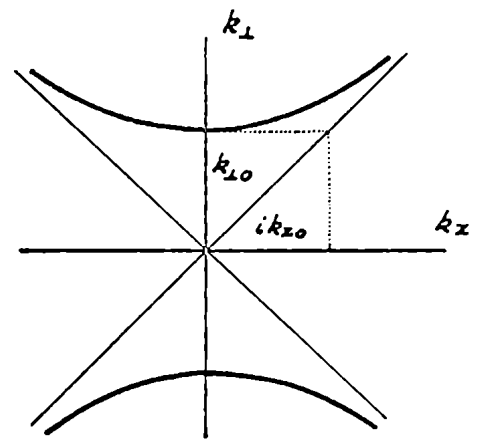
(i) $k_{x0}^2 > 0 ; k_{L0}^2 < 0$
 $\bar{\omega} < \text{Min}(\omega_{pi}, \Omega_i)$



(ii) $k_{x0}^2 > 0 ; k_{L0}^2 > 0$
 $\Omega_i < \bar{\omega} < \omega_{pi}$



(iii) $k_{x0}^2 < 0 ; k_{L0}^2 < 0$
 $\omega_{pi} < \bar{\omega} < \Omega_i ; \sqrt{\omega_{pi}^2 + \Omega_i^2} < \bar{\omega}$



(iv) $k_{x0}^2 < 0 ; k_{L0}^2 > 0$
 $\text{Max}(\omega_{pi}, \Omega_i) < \bar{\omega} < \sqrt{\omega_{pi}^2 + \Omega_i^2}$

fig.3.10. k_L vs. k_x para modos estables.
Las líneas de trazos indican $\text{Im}(k_L)$
para las ondas de superficie.

siendo

$$(3.23) \quad \omega_s(k_x) = \frac{\omega_{pi} k_x}{\sqrt{k_x^2 + k_D^2}}$$

y ondas con propagación oblicua para $k_x > k_0$, o, lo que es lo mismo, para

$$\bar{\omega} < \omega_s(k_x)$$

(ii) Para $\Omega_i < \omega_{pi}$, en el intervalo $\Omega_i < \bar{\omega} < \omega_{pi}$ se tienen ondas oblicuas para $k_x < k_{x0}$ o sea

$$\bar{\omega} < \omega_s(k_x)$$

y ondas de superficie para $k_x > k_{x0}$ ($\bar{\omega} > \omega_s(k_x)$)

(iii) Para $\omega_{pi} < \Omega_i$, en el intervalo $\omega_{pi} < \bar{\omega} < \Omega_i$ se tienen ondas superficiales para todo valor de k_x . Idéntica situación ocurre para $\sqrt{\omega_{pi}^2 + \Omega_i^2} < \bar{\omega}$.

(iv) Para $\bar{\omega}$ en el intervalo $\text{Max}(\omega_{pi}, \Omega_i) < \bar{\omega} < \sqrt{\omega_{pi}^2 + \Omega_i^2}$ hay ondas oblicuas para todo valor de k_x .

En la figura 3.11 se ha representado el espectro de los modos estables para los casos $\omega_{pi} \lesssim \Omega_i$.

La velocidad de grupo de los modos propagantes se puede calcular fácilmente a partir de la ec.(3.16) o la (3.17) y se obtiene (en un referencial solidario al plasma):

$$(3.24) \quad \underline{v}_{g\pm} = \underline{v}_{g\pm}^{\theta} + \underline{v}_{g\pm}^k$$

siendo

$$(3.25) \quad \underline{v}_{g\pm}^{\theta} = \frac{\hat{\theta}}{\bar{\omega}_{\pm}} \frac{\omega_s^2 \Omega_i^2}{k} \frac{\text{sen } \theta \cos \theta}{(2\bar{\omega}_{\pm}^2 - \omega_s^2 - \Omega_i^2)}$$

y

$$(3.26) \quad \underline{v}_{g\pm}^k = \frac{\hat{k}}{\bar{\omega}_{\pm}} \frac{\omega_s^2}{k} \frac{\bar{\omega}_{\pm}^2 - \Omega_i^2 \cos^2 \theta}{(2\bar{\omega}_{\pm}^2 - \omega_s^2 - \Omega_i^2)} \frac{k_D^2}{k^2 + k_D^2}$$

$$\frac{\hat{k}}{\bar{k}} = \frac{k}{k}$$

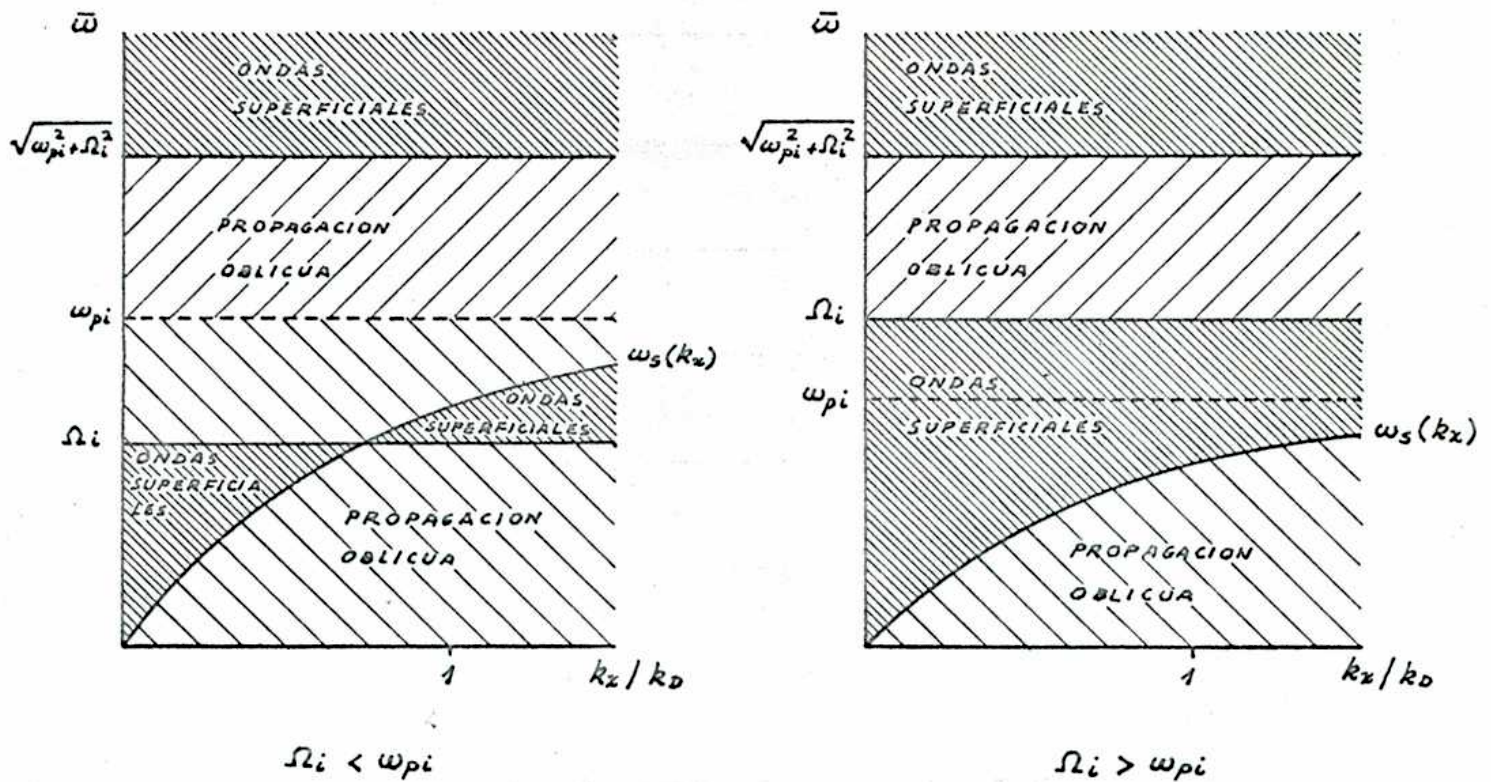


fig.3.11. Espectro de modos iónicos estables de un plasma semiinfinito.

Si se compara este resultado con la expresión de la velocidad de grupo para las ondas electrónicas, ec.(3.13), se ve que el término v_g^o se puede obtener de la ec.(3.13) estableciendo la correspondencia formal $\omega_{pe} \leftrightarrow \omega_s$; $\Omega_e \leftrightarrow \Omega_i$. El término v_g^e , que no tiene contrapartida para las ondas electrónicas, proviene de la dispersión espacial del tensor dieléctrico debido a la temperatura de los electrones.

Se puede comprobar fácilmente que v_g^k no se anula (excepto para $\bar{\omega} = \Omega_i$), para los modos propagantes y que tiene el mismo sentido que \hat{k} . La velocidad de grupo v_g es en general oblicua con respecto del vector de onda, y forma con él un ángulo φ dado por

$$(3.27) \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{\Omega_i \operatorname{sen} \theta \cos \theta}{\bar{\omega}_x^2 - \Omega_i^2 \cos^2 \theta} \left(1 + \frac{k^2}{k_D^2} \right)$$

(ver fig.3.12). Resulta útil también dar una expresión para

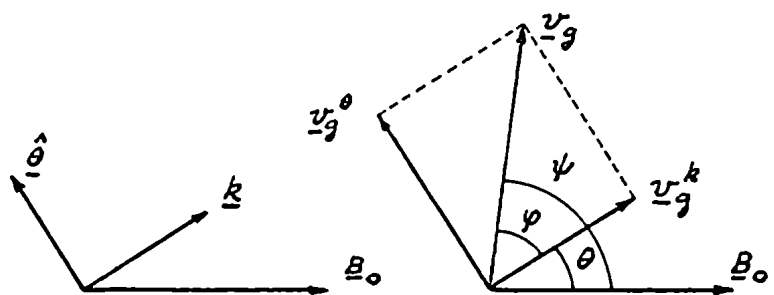


fig.3.12. Velocidad de grupo de las ondas iónicas.

el ángulo ψ entre v_g y el campo magnético.

$$(3.23) \quad \text{ctg } \psi = - \text{ctg } \theta \frac{\Omega_i^2 k^2 \text{sen}^2 \theta - k_D^2 (\bar{\omega}_\pm^2 - \Omega_i^2)}{\Omega_i^2 k^2 \text{cos}^2 \theta + k_D^2 \bar{\omega}_\pm^2}$$

De las ec.(3.27) y (3.28) es fácil verificar que, para la rama inferior, $\bar{\omega}_-$, la dispersión longitudinal (a B_0) es positiva, mientras que la dispersión transversal (a B_0) es negativa. En cambio, para la rama superior $\bar{\omega}_+$, la dispersión longitudinal es negativa para $\bar{\omega} > \omega_{pi}$, y positiva para $\bar{\omega} < \omega_{pi}$, mientras que la dispersión transversal es siempre positiva.

Para concluir este análisis mencionaremos algunas limitaciones a los resultados obtenidos. El uso del modelo frío para los iones y del modelo hidrodinámico para los electrones involucra las condiciones

$$(3.23, a) \quad v_{ti} \ll \frac{\bar{\omega}}{k_z} \ll v_{te}$$

$$(b) \quad \left| \frac{\bar{\omega} - \ell \Omega_i}{k_x v_{ti}} \right| \gg 1 \quad \ell = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

$$(c) \quad |k_\perp \rho_{Li}| \ll 1$$

que aseguran que el amortiguamiento de Landau debido a los electrones del plasma y el amortiguamiento ciclotrónico debido a los iones sean pequeños. Las condiciones (3.29 a) y (3.29 c) se satisfacen si

$$\theta_i \ll \theta_e$$

es decir, si el plasma es no isotérmico.

Las condiciones (3.29) requieren $k_x \rightarrow 0$ en el entorno de $\bar{\omega} = \sqrt{\omega_s^2 + \Omega_i^2}$, a fin de satisfacer la (3.29 c), y restringen la aplicabilidad de los resultados en el entorno de $\bar{\omega} = 0$ y $\bar{\omega} = \Omega_i, 2\Omega_i, \dots$

Además, para que la aproximación electrostática sea válida, se debe cumplir la condición (2.66):

$$(3.30) \quad E_{\perp} \ll E_{\parallel}$$

que implica, como puede verse usando la ec. (2.63) y la expresión (2.61) para \underline{K}^e ,

$$\frac{\bar{\omega} \omega_{pe}^2}{\omega^2 \Omega_e} \ll \frac{k^2 c^2}{\omega^2}$$

Poniendo $\bar{\omega} \sim \Omega_i \sim k v_s$ se ve que la condición (3.30) está satisfecha cuando

$$(3.31) \quad \beta \equiv 8\pi n_0 \theta_e / B_0^2 \ll 1$$

vale decir, cuando el plasma es de bajo β .

Referencias

1. A. I. Akhiezer et al. "Collective Oscillations in a Plasma" MIT Press, Cambridge, Mass. (1967), Cap.2.
2. F. Gratton, J. Gratton, J. Sánchez, "Overstability of Cold Plasma Waves", Ediciones Previas FCEN, Dep.Física (1970) a publicarse en Nuclear Fusion 10 n° 4 (1970).
3. F. Gratton, J. Gratton, Acta Científica 1 n°5 (1968) 5.
4. L. Spitzer, "Physics of Fully Ionized Gases", Interscience Pub., New York (1956) Cap.4.

4. Propiedades energéticas de las oscilaciones.

4.1 Introducción.

Las propiedades de las oscilaciones de un plasma con inhomogeneidades espaciales están determinadas, en buena parte, por la posibilidad de que haya transferencia de energía entre distintas porciones del sistema. Puede ocurrir que esta transferencia lleve, en el transcurso del tiempo, a una acumulación neta de la energía en determinada región del plasma, y por ende, a la inestabilidad del sistema. Es evidente que el aspecto energético no puede soslayarse si se desea lograr una clara interpretación física de las características de los fenómenos de inestabilidad y de propagación de ondas en un plasma.

El presente capítulo está dedicado a discutir las propiedades energéticas de las oscilaciones electrónicas de un plasma frío e inhomogéneo en la configuración que se ha descrito en el punto 3.1, es decir cuando el sistema consiste de dos porciones semiinfinitas (homogéneas en sí) en movimiento relativo, separadas por una capa de transición (ver fig.3.1). En particular, nos interesará el caso en que el espesor Δ de la región de transición es pequeño

$$(4.1) \quad \Delta \ll \lambda$$

respecto de la longitud λ que caracteriza la dependencia espacial de la perturbación:

$$(4.2) \quad \lambda \simeq |\nabla E| / |E|$$

Para respetar las condiciones de validez (2.51) del modelo frío, deberá cumplirse

$$(4.3) \quad \langle \rho_e \rangle \ll \Delta \ll \lambda$$

Por brevedad, al referirnos al caso (4.1) diremos que el plasma tiene un perfil discontinuo de velocidad y/o de densidad.

4.2 El balance energético del plasma.

Las propiedades energéticas de las oscilaciones (ondas planas estables) de un plasma uniforme e infinito son bien conocidas.⁽¹⁾ Cuando el plasma no es infinito, o no es homogéneo, hay una variedad mucho mayor de modos, ya que se admiten oscilaciones inestables y ondas no uniformes (\underline{k} complejo). Las propiedades de estas soluciones en medios anisotrópicos no han sido aún estudiadas en sus detalles.⁽²⁾ Por consiguiente estimamos de cierto interés analizarlas detenidamente.

La energía del sistema puede variar por la acción de campos electromagnéticos debidos a la presencia de fuentes externas. Esta variación de energía está determinada por la interacción del campo electromagnético con las cargas y corrientes del plasma, y se puede calcular en términos del trabajo de los campos sobre las fuentes externas.

Si $\underline{j}_{ext}(\underline{r}, t)$ es la densidad de corriente externa, y $\underline{E}(\underline{r}, t)$ el campo eléctrico, el trabajo total realizado por el campo sobre las corrientes externas en el intervalo de tiempo dt es

$$(4.4) \quad dA = dt \int d\underline{r} \underline{E}(\underline{r}, t) \cdot \underline{j}_{ext}(\underline{r}, t)$$

El principio de conservación de la energía establece que este trabajo debe ser compensado por una variación dW de la energía del sistema. En consecuencia, la variación de la energía en la unidad de tiempo está dada por:⁽³⁾

$$(4.5) \quad \frac{dW}{dt} = - \frac{dA}{dt} = - \int d\underline{r} \underline{E}(\underline{r}, t) \cdot \underline{j}_{ext}(\underline{r}, t)$$

Si se utilizan las ecuaciones de Maxwell (2.2) es posible eliminar las corrientes externas en la ec.(4.5) obteniéndose

$$(4.6) \quad \frac{dW}{dt} = \int d\underline{r} \left\{ \frac{1}{4\pi} \left(\underline{E} \cdot \frac{\partial \underline{D}}{\partial t} + \underline{B} \cdot \frac{\partial \underline{H}}{\partial t} \right) + \frac{c}{4\pi} \nabla \cdot (\underline{E} \times \underline{B}) \right\} = - \frac{dA}{dt}$$

Consideraremos oscilaciones electromagnéticas del plasma de la forma (2.33):

$$(4.7) \quad Q = \text{Re} \left\{ Q(y) e^{-i\omega t + ik_x x + ik_z z} \right\}$$

cuya frecuencia ω será, en general, compleja. En las regiones homogéneas 1 y 2 (ver fig.3.1) se tendrá

$$(4.8) \quad Q(y) \sim e^{\pm ik_y y}, \quad e^{\mp ik_y y} \quad ; \quad \text{Im}(k_{y,2}) \gg 0$$

Si $\text{Im}(k_{y,2}) \neq 0$, el signo en (4.8) se elige de modo que la solución sea acotada en el infinito. Si, en cambio $k_{y,2}$ fuera real, ambos signos son, en principio, admisibles. La frecuencia ω y el número de onda k están vinculados, en cada región, por la correspondiente relación de dispersión:

$$(4.9) \quad \text{Det} \left\{ \hat{k}_j \hat{k}_j - \frac{\omega^2}{k_j^2 c^2} \underline{\underline{\epsilon}}_j \right\} = 0 \quad j = 1, 2$$

En los casos en que $k_{j,j}$ es real, nos interesará la energía contenida en un paralelepípedo de aristas $\lambda_x, \lambda_{y,j}, \lambda_z$. Si, en cambio $k_{y,j}$ fuera complejo, se considerará la energía contenida en un paralelepípedo que se extiende hasta el infinito en la dirección y , cuya sección es un rectángulo de lados λ_x y λ_z . Indicaremos con V al volumen definido de la manera que se acaba de describir (ver fig.4.1).

Sustituyendo las expresiones (4.7) para los campos en la ec. (4.6) e integrando sobre el volumen V se obtiene

$$(4.10) \quad \frac{dW}{dt} = \frac{1}{\lambda_x \lambda_z} \frac{dW}{dt} = \int \frac{dy}{16\pi} \left\{ i\omega^* \underline{\underline{E}} \cdot \hat{\underline{\underline{\epsilon}}}^* \cdot \underline{\underline{E}}^* - i\omega \underline{\underline{E}} \cdot \hat{\underline{\underline{\epsilon}}} \cdot \underline{\underline{E}} - i(\omega - \omega^*) \underline{\underline{S}} \cdot \underline{\underline{S}}^* \right\} = -P$$

Aquí W es la energía media por unidad de sección del paralelepípedo V , y P representa la potencia entregada a las corrientes externas.

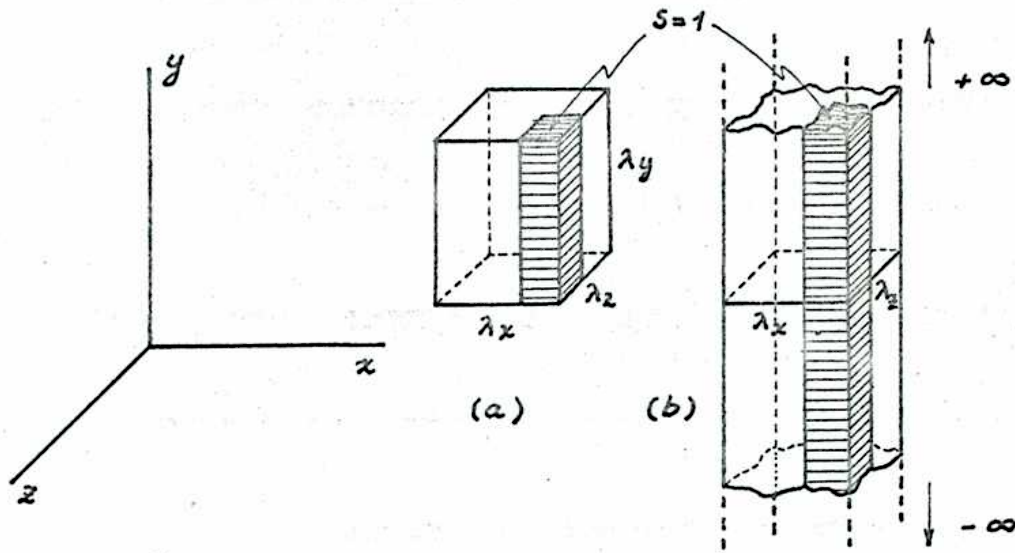


fig.4.1. Volumen V para el caso k_y real (a) y k_y complejo (b). La energía media contenida en los volúmenes sombreados, de sección unitaria, es W .

En el régimen de oscilaciones electrónicas frías que se está considerando, el operador $\hat{\epsilon}$ que interviene en la ec.(4.10) está dado por

$$(4.11) \quad \hat{\epsilon} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{\omega_p^2}{\bar{\omega}^2} + \frac{d}{dy} u g(y) \left(\frac{d}{dy} + \frac{\Omega}{\bar{\omega}} k_z \right) & i \left(\frac{d}{dy} \bar{\omega} - k_z \Omega \right) g(y) & \left(\frac{d}{dy} \Omega - k_z \bar{\omega} \right) g(y) \\ - k_z u g(y) \left(k_z + \frac{\Omega}{\bar{\omega}} \frac{d}{dy} \right) & 1 - \frac{\bar{\omega}^2}{\omega^2} \frac{\omega_p^2}{\bar{\omega}^2 - \Omega^2} & i \frac{\bar{\omega} \Omega}{\omega^2} \frac{\omega_p^2}{\bar{\omega}^2 - \Omega^2} \\ i g(y) \left(\bar{\omega} \frac{d}{dy} + \Omega k_z \right) & - i \frac{\bar{\omega} \Omega}{\omega^2} \frac{\omega_p^2}{\bar{\omega}^2 - \Omega^2} & 1 - \frac{\bar{\omega}^2}{\omega^2} \frac{\omega_p^2}{\bar{\omega}^2 - \Omega^2} \\ - g(y) \left(\bar{\omega} k_z + \Omega \frac{d}{dy} \right) & & \end{pmatrix}$$

con

$$g(y) = \frac{u}{\omega^2} \frac{\omega_p^2}{\bar{\omega}^2 - \Omega^2}$$

$$\bar{\omega} = \omega - k_x u(y)$$

En la (4.11) se ha omitido, para abreviar, el subíndice ϵ en ω_p y Ω .

Nótese que, para valores reales de ω , el operador $\hat{\epsilon}_{ij}$ no cumple la relación

$$(4.12) \quad \hat{\epsilon}_{ij} = \hat{\epsilon}_{ji}^*$$

que se suele citar en la literatura como la condición para que el sistema sea no disipativo. Resulta obvio, sin embargo que (dentro del modelo, por supuesto) el sistema que se considera no tiene disipación. La condición (4.12), que se cumple cuando el plasma es homogéneo, es condición suficiente, pero no necesaria. Para escribir en forma compacta la condición que debe cumplirse en el presente caso para que no haya disipación, conviene introducir un operador asociado $\underline{\underline{\epsilon}}^v$, dado por

$$(4.13) \quad \underline{\underline{\epsilon}}^v = \begin{pmatrix} 1 - \frac{\omega_p^2}{\bar{\omega}^2} - \frac{d}{dy} u g \left(\frac{d}{dy} + \frac{\Omega}{\bar{\omega}} k_2 \right) & -i \left(\frac{d}{dy} \bar{\omega} + k_2 \Omega \right) g & - \left(\frac{d}{dy} \Omega + k_2 \bar{\omega} \right) g \\ - k_2 u g \left(k_2 + \frac{\Omega}{\bar{\omega}} \frac{d}{dy} \right) & & \\ i g \left(\bar{\omega} \frac{d}{dy} + \Omega k_2 \right) & 1 - \frac{\bar{\omega}^2}{\omega^2} \frac{\omega_p^2}{\bar{\omega}^2 - \Omega^2} & i \frac{\bar{\omega} \Omega}{\omega^2} \frac{\omega_p^2}{\bar{\omega}^2 - \Omega^2} \\ - g \left(\bar{\omega} k_2 + \Omega \frac{d}{dy} \right) & -i \frac{\bar{\omega} \Omega}{\omega^2} \frac{\omega_p^2}{\bar{\omega}^2 - \Omega^2} & 1 - \frac{\bar{\omega}^2}{\omega^2} \frac{\omega_p^2}{\bar{\omega}^2 - \Omega^2} \end{pmatrix}$$

La notación d/\underline{dy} indica que, contrariamente a la convención usual, lo que se debe derivar es el argumento que aparece escrito a la izquierda del operador diferencial.

En la (4.16), los subíndices 1 y 2 corresponden a las Regiones 1 ($y > 0$) y 2 ($y < 0$) respectivamente. Los signos \pm y \mp corresponden a los dobles signos en (4.8).

Cuando no actúan las fuentes externas, $P = 0$, y la ec. (4.16) expresa el balance de energía entre las dos regiones semiinfinitas del plasma:

$$(4.17) \quad \frac{dW}{dt} = \frac{dW_1}{dt} + \frac{dW_2}{dt} = 0$$

Se ha visto que en un plasma semiinfinito se pueden tener ondas de superficie estables, oscilaciones inestables y ondas que se propagan oblicuamente. Examinaremos sucesivamente las propiedades energéticas de los tres tipos de oscilaciones (electrostáticas).

4.3 Ondas superficiales estables.

Para estas ondas, ω es real y k_y es imaginario puro. De la ec. (4.16) surge de inmediato que en este caso no hay transferencia neta de energía de una región a otra:

$$(4.18) \quad \frac{dW_1}{dt} = \frac{dW_2}{dt} = 0$$

La energía por unidad de superficie necesaria para generar estas ondas debe entonces ser suministrada por agentes externos. Su valor está dado por

$$(4.19) \quad W = \int_{-\infty}^0 dt P$$

si se supone que las fuentes externas actúan desde el instante inicial, $t = -\infty$, en el cual la perturbación era nula, hasta el instante $t = 0$ en que dejan de actuar. A medida que se va suministrando energía al plasma crece la amplitud de la perturbación. Este incremento se puede tener en cuenta añadiendo una parte imaginaria infinitesimal a la frecuencia ω :

$$(4.20) \quad \omega \rightarrow \omega + i\delta$$

Si sustituimos en la ec.(4.14) y desarrollamos en serie de potencias de δ se obtiene, haciendo uso de las propiedades del operador $\underline{\underline{v}}$:

$$(4.21) \quad \frac{dW}{dt} = \frac{1}{16\pi} \int dy \ 2\delta \underline{\underline{E}}(t) \cdot \frac{\partial}{\partial \omega} (\omega \underline{\underline{v}}) \cdot \underline{\underline{E}}^*(t)$$

$$\underline{\underline{E}}(t) = \underline{\underline{E}} e^{\delta t}$$

La expresión (4.21) se debe aplicar durante la etapa de crecimiento de la onda, en que el sistema evoluciona bajo el efecto de los agentes externos. Está claro que mientras el sistema está siendo forzado, ω y \underline{k} deben considerarse como independientes, ya que la relación de dispersión, que corresponde a las oscilaciones libres, no se cumple. Por este motivo en la ec. (4.21) se ha tomado la derivada parcial con respecto de ω .

La energía por unidad de superficie de las oscilaciones se obtiene integrando en el tiempo la ec.(4.21) y vale

$$(4.22) \quad W = \frac{1}{16\pi} \int dy \ \underline{\underline{E}} \cdot \frac{\partial}{\partial \omega} (\omega \underline{\underline{v}}) \cdot \underline{\underline{E}}^*$$

La fórmula (4.22) es una generalización de la expresión usual⁽¹⁾ de la energía de una onda. Con el agregado del término magnético se puede aplicar para ondas electromagnéticas de superficie.

4.4 Ondas propagantes.

Corresponden estas ondas a valores reales de ω y de \underline{k} . En cada una de las regiones homogéneas semiinfinitas del plasma se puede aplicar la ec.(4.22) para calcular la densidad de energía de estas ondas. Para el caso potencial resulta:⁽⁴⁾

$$W_{1,2} = \frac{|\phi|^2}{8\pi} \frac{\omega}{\bar{\omega}_{1,2}} \left\{ k_{1,2}^2 + k_{\perp 1,2}^2 \frac{\omega_p^2 \Omega^2}{(\bar{\omega}_{1,2}^2 - \Omega^2)^2} \right\} \quad (4.23)$$

$$\underline{k}_{1,2} \equiv (k_x, k_y, k_z) \quad \bar{\omega}_{1,2} = \omega - k_x u_{1,2}$$

Es interesante notar que de la ec. (4.23) se desprende que el cociente

$$I = \frac{W}{\omega} \quad (4.24)$$

es invariante respecto de transformaciones galileianas de coordenadas. Este resultado se puede interpretar mediante una imagen cuántica. En efecto, en términos cuánticos, la energía de una onda es

$$W = n \hbar \omega \quad (4.25)$$

si hay n cuantos presentes. El número de cuantos es obviamente un invariante, y consecuentemente surge la invariancia del cociente (4.24). Más aún, el argumento permite concluir que I es también invariante relativístico.

Otra circunstancia importante de destacar es que la densidad de energía de la onda puede tomar valores negativos si el medio está en movimiento. Esto ocurre toda vez que la componente de la velocidad de fase en la dirección del movimiento del medio es menor que la velocidad de masa:

$$v_{fx} = \frac{\omega}{k_x} < u_{1,2}$$

Las ondas con energía negativa tienen propiedades peculiares que es de interés comentar. Para crear dichas ondas a partir de un estado no perturbado del medio, es preciso extraer energía de él.

A mayor energía liberada por el medio, mayor resulta la amplitud de la onda. Por supuesto, la existencia de ondas de energía negativa es posible porque el medio no está en un estado de equilibrio termodinámico.

Cuando un sistema puede sostener ondas de energía negativa es potencialmente inestable. En efecto, si se lo pone en interacción con otro sistema, toda vez que este último pueda absorber la energía liberada al crecer la onda, se desarrollará la inestabilidad. Un ejemplo de inestabilidad debido a un mecanismo de este tipo, es la clásica inestabilidad de un sistema de dos haces de electrones que se interpenetran ⁽⁸⁾. (Inestabilidad de dos haces).

Volviendo a considerar el sistema de dos semiespacios de plasma en movimiento relativo, de la existencia de ondas de energía negativa, resulta una gama variada de fenómenos que se mencionarán brevemente aquí, dejando para más adelante el estudio más detallado de algunos de ellos.

Un fenómeno que se puede producir es el de la reflexión con amplificación de una onda: ⁽⁹⁾ sea, en efecto, una onda de frecuencia ω , que incide sobre la interfase que separa la región 1 de la región 2. Supongamos, para fijar ideas, que para ese valor de la frecuencia, la densidad de energía (4.23) es positiva en la región 1 y negativa en la región 2. Es evidente que, si las condiciones de contorno sobre la interfase permiten que haya transmisión, la intensidad de la onda reflejada tiene que ser necesariamente mayor que la intensidad incidente (ver fig.4.2a).

Otro fenómeno que se puede dar es el de la radiación de una pareja de ondas, una de las cuales lleva energía positiva y la otra lleva energía negativa (ver fig. 4.2b). Este fenómeno se puede pensar como un caso especial de la reflexión con amplificación, cuando subsiste onda reflejada aún en el límite en que la intensidad incidente es nula.

Un tercer fenómeno que puede ocurrir es el de la emisión de una pareja de ondas no uniformes (\mathcal{E} complejo). En este caso se produce una inestabilidad, ya que la energía transferida de una región a la otra queda localizada alrededor de la interfase.

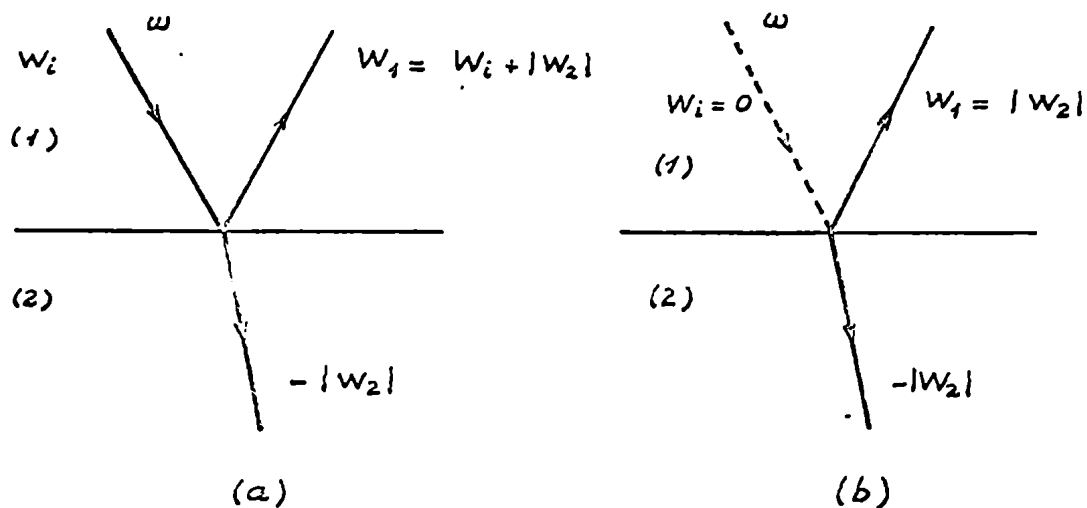


fig.4.2. Reflexión con amplificación (a) y radiación de ondas (b).

Corresponde decir aquí, que fenómenos como los que aquí se han mencionado no son necesariamente privativos de los plasmas. Por lo contrario, es de esperar, al menos en línea de principio, comportamientos análogos toda vez que se pongan en interacción sistemas capaces de sostener ondas de energía negativa. Fuera del contexto de la física del plasma, se podría mencionar, por ejemplo, la reflexión con amplificación de las ondas acústicas que inciden sobre un chorro supersónico.

Cuando la geometría del problema es más compleja, es dable esperar más variantes de los fenómenos mencionados, que pueden conducir a nuevos mecanismos de inestabilidad. Por ejemplo, parece plausible que la reflexión con amplificación induzca la inestabilidad de un chorro, vía reflexiones múltiples.

En el presente trabajo no intentaremos explorar geometrías complejas, restringiendo el análisis de los modos propios de un sistema con una sola interfase. Por consiguiente dejaremos de lado el estudio de la reflexión y transmisión de ondas, limitándonos a considerar la posibilidad de emisión de pares de ondas.

4.5 Flujo de energía de ondas electro státicas.

Para que pueda producirse el proceso de emisión, se requiere que la componente normal a la interfase del vector flujo de energía sea continua.

El flujo de energía de una onda, en las regiones homogéneas 1 y 2, está dado por (por brevedad se omiten los sub-índices 1,2 en lo que sigue)

$$(4.26) \quad \underline{F} = \underline{F}_p + \underline{F}_{em}$$

Siendo \underline{F}_p la contribución debida al flujo de partículas, que se calcula mediante la conocida fórmula

$$(4.27) \quad \underline{F}_p = \frac{1}{16\pi} \underline{E} \cdot \frac{\partial}{\partial \underline{k}} (\omega \underline{E}) \cdot \underline{E}^*$$

y \underline{F}_{em} el flujo de energía electromagnética:

$$(4.28) \quad \underline{F}_{em} = \frac{c}{16\pi} (\underline{E} \times \underline{B}^* + \underline{E}^* \times \underline{B})$$

Para los modos cuasielectrostáticos que se están considerando, es esencial tener en cuenta el flujo electromagnético ya que, pese a que en el límite $v_f/c \rightarrow 0$

$$(4.29) \quad \underline{B} \rightarrow 0 \quad ; \quad v_f/c \rightarrow 0$$

y la onda tiende a ser puramente longitudinal, \underline{F}_{em} tiende a un límite finito ⁽¹⁰⁾.

Para calcular este límite, eliminamos \underline{B} de la ec.(4.28) y queda

$$(4.30) \quad \underline{F}_{em} = \frac{1}{16\pi} \frac{\omega}{k} \left(\frac{c^2 k^2}{\omega^2} \right) \left[\underline{E} \times (\hat{k} \times \underline{E}_\perp^*) + \underline{E}^* \times (\hat{k} \times \underline{E}_\perp) \right]$$

siendo $\hat{k} = \underline{k} / k$. Se ha llamado \underline{E}_\perp a la componente transversal (a \underline{k}) de \underline{E} . La ecuación de las ondas (2.63) se puede escribir, para $(v_f/c)^2 \ll 1$ de la forma

$$(4.31) \quad \underline{E}_\perp = \frac{\omega^2}{k^2 c^2} \underline{\epsilon} \cdot \underline{E}_\parallel + O\left[\left(\frac{\omega^2}{k^2 c^2}\right)^2\right]$$

llamando \underline{E}_\parallel a la componente longitudinal de \underline{E} , se ve de (4.30) y (4.31) que, pese a que $E_\perp / E_\parallel \rightarrow 0$ en el límite $v_f / c \rightarrow 0$, la contribución del orden más bajo (en v_f / c) de \underline{F}_{em} es finita y en el límite

$$(4.32) \quad \underline{F}_{em} \rightarrow -\frac{1}{16\pi} \omega k |\phi|^2 (\underline{\epsilon} + \underline{\epsilon}^x) \cdot \hat{k} \quad ; \quad \frac{\omega^2}{k^2 c^2} \rightarrow 0$$

Para las ondas electrostáticas de un plasma frío se obtiene entonces, de (4.26), (4.27) y (4.32),

$$(4.33) \quad \underline{F} = \underline{u} W - \hat{\theta} \frac{\omega k}{8\pi} \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right) \text{ctg } \theta |\phi|^2 = \underline{u} W + \underline{F}'$$

Aquí θ es el ángulo comprendido entre \underline{B}_0 y \underline{k} , y $\hat{\theta}$ es un versor normal a \underline{k} y en el plano definido por \underline{B}_0 y \underline{k} (ver fig.4.3). Se ve de (4.33) que, a parté por el término de arrastre $\underline{u} W$, el flujo de energía es normal al vector de onda \underline{k} .

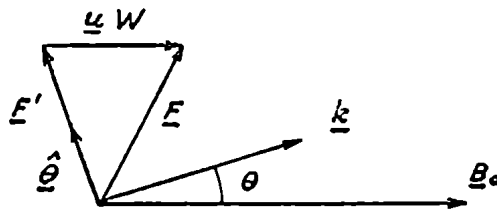


fig.4.3. Flujo de energía de una onda electrostática,

Comparando las expresiones (4.23) de la densidad de energía W y (3.13) de la velocidad de grupo \underline{v}_g con la (4.23) se ve fácilmente que la relación

$$(4.34) \quad \underline{F} = \underline{v}_g W$$

se cumple, como debe ser.

4.6 Radiación de ondas electrostáticas.

Puede escribirse ahora la condición de continuidad de la componente y del flujo de energía, que debe cumplirse para que sea posible la radiación de ondas. De la ec. (4.33) resulta fácilmente:

$$(4.35) \quad k_{y_1} \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega_1^2 - \Omega^2} \right) \pm k_{y_2} \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega_2^2 - \Omega^2} \right) = 0$$

En la ec. (4.35), el signo $+$ corresponde a la elección de soluciones:

$$(4.36) \quad \begin{array}{ll} \text{(a)} & e^{i k_{y_1} y} \quad ; \quad e^{-i k_{y_2} y} \\ \text{(b)} & e^{-i k_{y_1} y} \quad ; \quad e^{i k_{y_2} y} \end{array}$$

y el signo $-$ a la elección

$$(4.37) \quad \begin{array}{ll} \text{(c)} & e^{i k_{y_1} y} \quad ; \quad e^{i k_{y_2} y} \\ \text{(d)} & e^{-i k_{y_1} y} \quad ; \quad e^{-i k_{y_2} y} \end{array}$$

Ahora, para que haya radiación, la velocidad de grupo de las ondas debe estar dirigida desde la interfase hacia el infinito, en ambos lados (ver fig. 4.4), es decir, $v_{g y_1}$ debe ser positivo,

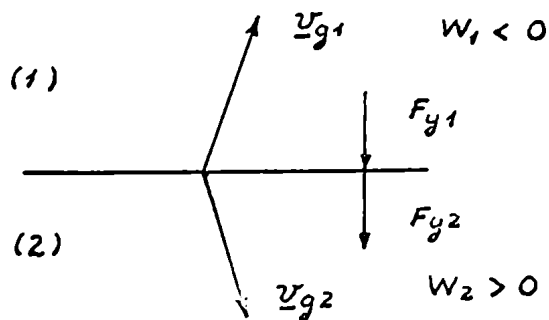


fig.4.4. Radiación de ondas.

y v_{g2} negativa. Esto implica, teniendo en cuenta la relación (4.34), que la densidad de energía debe ser positiva para una de las ondas y negativa para la otra, tal como se había adelantado en el punto 4.4.

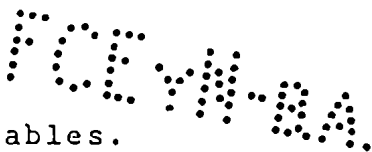
Las propiedades dispersivas del medio determinan cuáles de las elecciones (4.36 a,b) y (4.37 a,b) corresponden a radiación. Se vio en el punto (3.2) que para las frecuencias de la rama electrónica superior, la dispersión transversal es positiva, mientras que para las de la rama inferior es negativa.

En la tabla (4.1) se dan las elecciones correspondientes al caso $\bar{\omega}_1 < 0$, $\bar{\omega}_2 > 0$, según las varias posibilidades que se presentan.

	$\bar{\omega}_2 > 0$	
$\bar{\omega}_1 < 0$	<i>rama inferior</i>	<i>rama superior</i>
<i>rama inferior</i>	(c) -	(a) +
<i>rama superior</i>	(b) +	(d) -

Tabla 4.1 Elecciones de las soluciones (4.36) y (4.37) correspondientes a radiación. Los signos + y - se refieren al doble signo de la ec.(4.35).

Por supuesto, como se verá más adelante, las condiciones de contorno en la interfase darán nuevas restricciones a la posibilidad de radiación de ondas, que se suman a las condiciones energéticas que se acaban de examinar.



4.7 Oscilaciones inestables.

Los modos inestables corresponden a valores complejos de la frecuencia y del número de onda. Una inestabilidad es una oscilación del sistema que crece sin necesidad de la intervención de agentes externos. Por consiguiente, de (4.16) se deduce que la energía asociada a una inestabilidad es nula:

$$(4.39) \quad W = 0$$

Además

$$(4.39) \quad \frac{dW_1}{dt} = - \frac{dW_2}{dt}$$

de manera que la energía de la perturbación es negativa en una región y positiva en la otra. Las perturbaciones, y por lo tanto la energía, están localizadas alrededor de la interfase (ver fig.4.5) .

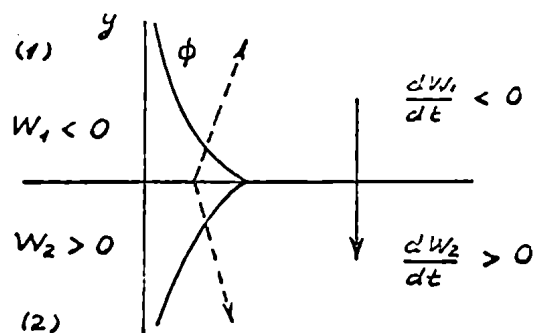
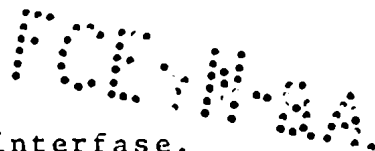


fig.4.5. Inestabilidad.

Parece tentador extender la imagen de emisión de pares que corresponde a la radiación de ondas propagantes al caso de estas inestabilidades, y concebirlas también en términos de la emisión de un par de ondas, esta vez no uniformes (por el amortiguamiento en la dirección y). Esta imagen tiene en efecto cierto sentido pues, como se verá más adelante, la transición entre ondas irradiadas y modos inestables se efectúa con continuidad y está relacionada precisamente con la circunstancia de que la perturbación se localice



o no alrededor de la interfase.

Referencias.

1. T.H. Stix, "The Theory of Plasma Waves" Mc.Graw-Hill New York (1962) Cap.3.
2. W.P. Allis et al., "Waves in Anisotropic Plasmas", M.I.T. Press, Cambridge, Mass.(1963), p.106.
3. A.A. Rukhadze, V.P. Silin, Sov.Phys.USPEKHI 4 (1961) 459.
4. F. Gratton, J. Gratton, J. Sánchez, "Overstability of Cold Plasma Waves", Ediciones previas FCEN, Dep.Física (1970) a publicarse. en Nuclear Fusion 10 n° 4 (1970).
5. P.A. Sturrock, J. Appl. Phys. 31 (1960) 2052.
6. R.J. Briggs, J. Appl.Phys. 35 (1964) 3268.
7. B.B. Kadomtsev et al. Soviet Phys. JETP 20 (1965) 1577.
8. O. Büneman, Phy.Rev.Lett. 1 (1958) 8.
9. J.F. McKenzie, Planet. Space Sci. 18 (1970) 1.
10. F. Gratton, J. Gratton, Nucl.Fusion 10 (1970) 97.

5. Sobreestabilidad de ondas electrostáticas.

5.1 Las condiciones de contorno para un perfil discontinuo de velocidades.

Es conveniente aclarar algunos de los conceptos introducidos en el capítulo 4 analizando en sus detalles un caso simple, como ser el de un perfil discontinuo de velocidades como el que se describe en el punto 4.1. En el presente capítulo se estudiarán las oscilaciones electrostáticas electrónicas para un perfil de velocidades.

$$(5.1) \quad u(y) = \begin{cases} u_1 = u & y > \Delta/2 \\ u_2 = -u & y < \Delta/2 \end{cases}$$

en un plasma con densidad uniforme

$$(5.2) \quad n_1 = n_2$$

El espesor Δ de la región de transición (ver fig. 3.1) cumple la condición (4.3):

$$(5.3) \quad \langle \rho_L \rangle \ll \Delta \ll \lambda$$

En el capítulo 6 se estudiarán los modos iónicos para el mismo perfil.

El potencial electrostático de la perturbación satisface la ecuación diferencial (3.1)

$$(5.4) \quad \hat{k} \cdot \hat{\epsilon} \cdot \hat{k} \phi = 0$$

que se escribe, usando la expresión (4.11) para $\hat{\epsilon}$, en la forma (1,2):

$$(5.5) \quad \frac{d}{dy} \left[\frac{d\phi}{dy} \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\bar{\omega}^2 - \Omega^2} \right) \right] - \phi \left[k_x^2 \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\bar{\omega}^2} \right) + k_z^2 \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\bar{\omega}^2 - \Omega^2} \right) + k_z \frac{d}{dy} \left(\frac{\Omega}{\bar{\omega}} \frac{\omega_p^2}{\bar{\omega}^2 - \Omega^2} \right) \right] = 0$$

Cuando el perfil es discontinuo en $y=0$ ($\Delta/\lambda \rightarrow 0$), deben darse condiciones de contorno en la discontinuidad. Una condición será la continuidad de ϕ , a fin de que el campo eléctrico se mantenga finito. La otra condición se obtiene integrando la ec.(5.5) en el entorno de $y=0$, y establece la continuidad de

$$(5.6) \quad \frac{d\phi}{dy} \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\bar{\omega}^2 - \Omega^2}\right) - \phi k_2 \frac{\Omega}{\bar{\omega}} \frac{\omega_p^2}{\bar{\omega}^2 - \Omega^2}$$

Para que este procedimiento sea legítimo es preciso que la condición

$$(5.7) \quad \nabla \times \underline{E} \approx 0$$

se cumpla en la región de transición, de lo contrario la ecuación diferencial (5.5) no valdría en dicha región. La condición (5.7) implica una limitación al valor de Δ :

$$(5.8) \quad \frac{\omega_p^2}{c^2 \Delta^2} = \frac{d^2}{\Delta^2} \ll 1$$

que exige que el espesor Δ de la región de transición debe ser mayor que $d = c/\omega_p$, la distancia piel sin colisiones.

La continuidad de la expresión (5.6) es un caso particular de la condición de contorno más general:

$$(5.9) \quad D_{y_1} - D_{y_2} = -i \int_{-\Delta/2}^{+\Delta/2} dy (k_x \hat{e}_{xj} + k_z \hat{e}_{zj}) E_j$$

(que sale de integrar la ecuación $\nabla \cdot \underline{D} = 0$ (3)) y se puede obtener fácilmente de la condición (5.9) en el límite

$$\nabla \times \underline{E} \rightarrow 0$$

Es de notar que la componente normal de \underline{D} no es continua. Esta circunstancia se debe a que aparece una densidad superficial de carga inducida, por efecto de las propiedades de dispersión espacial del operador dieléctrico (4).

Las soluciones de la ec.(5.5) en las regiones homogéneas: 1 y 2 serán respectivamente

$$(5.10) \quad \phi_1 e^{\pm i k_{y1} y}, \quad \phi_2 e^{\pm i k_{y2} y}; \quad \phi_{1,2} = \text{cte.}$$

donde $k_{y,2}$ están determinados por la relación de dispersión del semiespacio respectivo:

$$(5.11) \quad k_{y,2} = \sqrt{-k_2^2 - k_x^2 \frac{(\bar{\omega}_{1,2}^2 - \omega_p^2)(\bar{\omega}_{1,2}^2 - \Omega^2)}{\bar{\omega}_{1,2}^2 (\bar{\omega}_{1,2}^2 - \omega_p^2 - \Omega^2)}}$$

$$\text{Im}(k_{y,2}) \geq 0$$

Se ha convenido elegir aquella determinación de (5.11) que corresponde a $\text{Im}(k_{y,2}) \geq 0$. Con esta convención, si $\text{Im}(k_{y,2}) \neq 0$, hay que elegir el signo superior en (5.10) para asegurar convergencia en $y \rightarrow \pm \infty$. Cuando k_y es real, y se buscan ondas irradiadas, habrá que elegir los signos según lo discutido en el punto 4.6.

Usando la condición (5.6) y la continuidad de ϕ se obtiene la relación de dispersión para el sistema:

$$(5.12) \quad \pm i k_{y1} \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\bar{\omega}_1^2 - \Omega^2}\right) - k_2 \frac{\Omega}{\bar{\omega}_1} \frac{\omega_p^2}{\bar{\omega}_1^2 - \Omega^2} =$$

$$= \mp i k_{y2} \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\bar{\omega}_2^2 - \Omega^2}\right) - k_2 \frac{\Omega}{\bar{\omega}_2} \frac{\omega_p^2}{\bar{\omega}_2^2 - \Omega^2}$$

Si se compara la ec.(5.12) con la ecuación que da el balance energético, ec.(4.16), se ve que, cuando el sistema está aislado ($P = 0$), la relación de dispersión (5.12) garantiza la conservación de la energía para los modos normales, como debe ser. Factores constantes aparte, la ec.(4.16) es simplemente la parte imaginaria de (5.12).

Comparando la relación de dispersión (5.12) con las condiciones (4.35) sobre el flujo de energía para el caso de soluciones propagantes ($k_{y,2}$ real), se ve que, salvo el caso en que $k_2 = 0$, son incompatibles. En consecuencia sólo puede haber radiación en el caso especial $k_2 = 0$. En ese caso, la relación de dispersión para radiación de ondas está

dada por la ec.(4.35):

$$(5.13) \quad k_{y1} \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\bar{\omega}_1^2 - \Omega^2} \right) \pm k_{y2} \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\bar{\omega}_2^2 - \Omega^2} \right) = 0$$

donde debe tomarse el signo + si $\bar{\omega}_1$ y $\bar{\omega}_2$ corresponden a distintas ramas del espectro de resonancias electrónicas (ver cap.3), y el signo - si corresponden a la misma rama.

5.2 La relación de dispersión.

Cuando $k_z \neq 0$, todos los modos propios del sistema están localizados ($Im(k_y) \neq 0$) y sólo valen los signos superiores en (5.12). Conviene entonces introducir la notación $k_{y1,2} = iK_{1,2}$ ($Re(K) \geq 0$) y escribir la relación de dispersión (5.12) en la forma:

$$(5.14) \quad K_1 \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\bar{\omega}_1^2 - \Omega^2} \right) + K_2 \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\bar{\omega}_2^2 - \Omega^2} \right) = -k_z \left(\frac{\Omega}{\bar{\omega}_1} \frac{\omega_p^2}{\bar{\omega}_1^2 - \Omega^2} - \frac{\Omega}{\bar{\omega}_2} \frac{\omega_p^2}{\bar{\omega}_2^2 - \Omega^2} \right)$$

Las frecuencias (en general complejas) de los modos propios del sistema son las raíces ω_j de la relación de dispersión (5.14):

$$(5.15) \quad \omega_j(k_x, k_z, \alpha)$$

donde α representa los parámetros del plasma: ω_p, Ω y u . Debido a la simetría del problema bastará con considerar valores positivos de ω y k_x solamente.

La relación de dispersión (5.14) no es algebraica, a causa de la condición $Re(K) \geq 0$. El procedimiento usual para determinar las raíces de ecuaciones de este tipo consiste en racionalizar la expresión (5.14) elevando al cuadrado las veces que haga falta, a fin de obtener un polinomio $P_n(\omega)$. Una vez halladas las n raíces ω_j de $P_n(\omega)$ es preciso controlar su consistencia con la (5.14) pues entre las n raíces de P_n están contenidas no sólo las de (5.14) sino también las raíces de las ecuaciones que se obtiene considerando todas las otras posibles elecciones de signos en (5.12).

Salvo valores particulares de los parámetros, el polinomio que se obtiene de la ec. (5.14) es del 5° grado en ω^2 . Por lo tanto no es posible dar expresiones analíticas de las frecuencias propias ω_j , y es preciso contentarse con los resultados del cómputo numérico, tanto para hallar las raíces como para el ulterior control de consistencia.

Hay dos casos límites en los que la ec. (5.14) se simplifica y el problema se puede resolver completamente en forma analítica, a saber: el caso $k_2 = 0$ y el caso $k_2/k_x \rightarrow \infty$. Se da a continuación un resumen de las propiedades de los modos correspondientes al caso $k_2 = 0$.

5.3 Propiedades de las oscilaciones para modulación longitudinal al campo magnético.

Cuando $k_2 = 0$, la relación de dispersión (5.14) se puede racionalizar resultando un polinomio del 2° orden en ω^2 que se resuelve dando las raíces

$$(5.16) \quad \omega_{s,i}^2 = k_x^2 u^2 + \frac{1}{2} \left\{ (\omega_p^2 + \Omega^2) \pm \sqrt{(\omega_p^2 + \Omega^2)(\omega_p^2 - \Omega^2 + 8k_x^2 u^2)} \right\}$$

Es fácil ver que para $Re(K_{1,2}) \neq 0$ se cumple

$$(5.17) \quad K_1 K_2 = \left| \frac{\omega_p^2 - \Omega^2}{\omega_p^2 + \Omega^2} \right| = \text{real}$$

y de (5.11), (5.14) y (5.17) resulta que las $\omega_{s,i}$ dadas por (5.16) son efectivamente raíces de la relación de dispersión (5.14) solamente cuando

$$(5.18) \quad \Omega < \omega_p$$

Por consiguiente, cuando $\Omega > \omega_p$ la relación de dispersión (5.14) (con $k_2 = 0$, por supuesto) no admite modos con $Re(K_{1,2}) \neq 0$, y a lo sumo puede haber oscilaciones con $K_{1,2}$ imaginario puro ($k_{y1,2}$ real), es decir modos que corresponden a radiación.

Los intervalos de valores de k_x y de los parámetros u , ω_p y Ω que corresponden a que la relación de dispersión de lugar a modos inestables, de superficie o de radiación permiten definir ciertas regiones de existencia que se representan convenientemente en términos de los parámetros adimensionales k y h :

$$(5.19) \quad k = k_x u / \omega_p \quad h = \Omega / \omega_p$$

como áreas en el plano (h, k) .

La rama superior ω_s , dada por el signo + en (5.16) corresponde siempre a valores reales de la frecuencia, y da lugar para $h < 1$ ($\Omega < \omega_p$) a ondas de superficie cuando $k > k_1$ siendo

$$(5.20) \quad k_1 = \frac{1}{2} \left(\sqrt{h^2 + 1} - 1 \right)$$

No hay radiación para la rama ω_s , puesto que tanto $\bar{\omega}_1$ como $\bar{\omega}_2$ son positivos. Por consiguiente los únicos modos propios de esta rama son las oscilaciones estables de superficie que se acaban de mencionar.

La rama inferior ω_i (signo - en (5.16)) presenta una mayor variedad de modos. Al igual que para ω_s , aparecen modos de superficie, pero también hay modos inestables y radiación de ondas. Las correspondientes regiones de existencia se han representado en la fig. 5.1 (5.6).

Se tienen ondas superficiales para el área definida por las condiciones

$$(5.21) \quad k > k_3 = \frac{1}{2} \left(\sqrt{h^2 + 1} + 1 \right)$$

$$(5.22) \quad h < 1$$

El área encerrada dentro de las líneas k_i y k_s dadas por

$$(5.23) \quad k_i^2 = \frac{1}{2} \left\{ 1 + h^2 - \sqrt{1 - h^4} \right\}$$

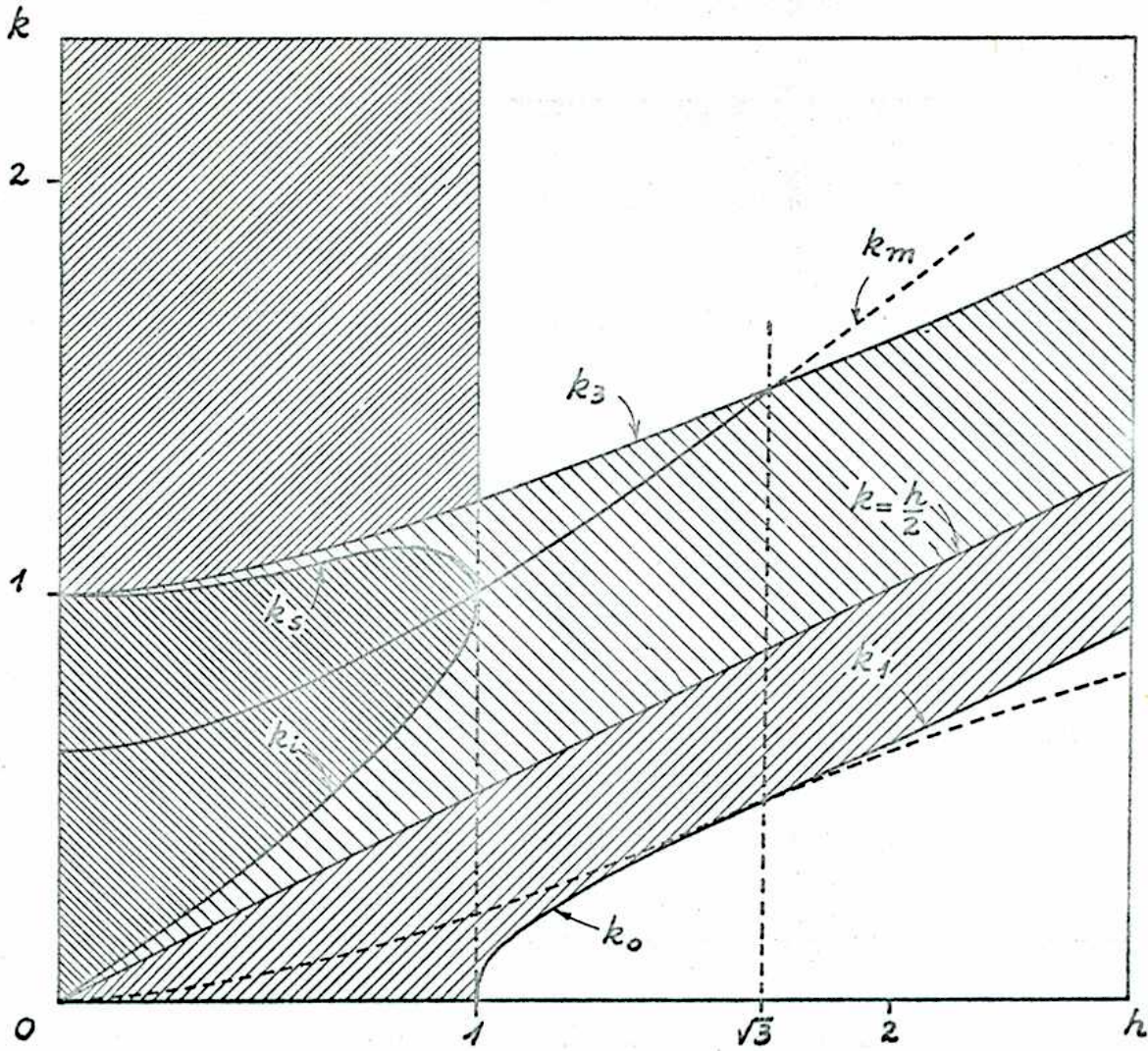


fig.5.1 Regiones de existencia de modos en el plano (h, k) para la rama inferior, en el caso $k_2=0$. Los modos de radiación corresponden al área rayada por encima de la línea $k = h/2$. Los modos inestables corresponden al área encerrada dentro de las líneas k_i y k_s .

$$k_s^2 = \frac{1}{2} \left\{ 1 + h^2 + \sqrt{1 - h^4} \right\}$$

corresponde a oscilaciones monotónicamente inestables (es decir, ω es imaginario puro para esos modos). La máxima velocidad de crecimiento vale

$$(5.24) \quad \omega_m = i \omega_p \sqrt{\frac{1 - h^4}{8}}$$

y ocurre sobre la línea $k = k_m$ dado por

$$(5.25) \quad k_m = \sqrt{\frac{3 + 5h^2}{8}}$$

Finalmente, las áreas rayadas oblicuamente corresponden a valores de ω para los cuales K_1 y K_2 son imaginarios puros. Utilizando los criterios formulados en el punto 4.6 acerca del signo de la densidad de energía y de las componentes y de la velocidad de grupo es fácil constatar que el área rayada por encima de la línea $k = h/2$ corresponde a radiación de ondas. En cambio, el área situada debajo de esa línea y por encima de k_1 y de

$$(5.26) \quad k_0 = \sqrt{\frac{h^2 - 1}{8}}$$

corresponde a ondas propagantes con las cuales es posible formar paquetes que, proviniendo desde el infinito (en la dirección $\pm y$) se propagan a través de todo el sistema sin ser reflejados en la interfase $y = 0$. Para estas ondas, la densidad de energía tiene igual signo en las regiones $y > 0$ e $y < 0$, lo que significa que no pueden generarse espontáneamente dentro del sistema. En lo sucesivo no nos ocuparemos de esta clase de modos.

Examinemos más detenidamente el caso de radiación de ondas. Si ω es la frecuencia de uno de estos modos, los

correspondientes $\bar{\omega}_1$ y $\bar{\omega}_2$:

$$\bar{\omega}_1 = \omega - k_x u \quad \bar{\omega}_2 = \omega + k_x u$$

representan la frecuencia que vería un observador que está en reposo respecto del plasma, en cada una de las dos regiones. Por consiguiente son iguales a una de las dos frecuencias resonantes, $\bar{\omega}_+$ u $\bar{\omega}_-$ estudiadas en el punto (3.2):

$$(5.27) \quad \bar{\omega}_\pm^2 = \frac{1}{2} \left\{ \omega_p^2 + \Omega^2 \pm \sqrt{(\omega_p^2 + \Omega^2)^2 - 4\omega_p^2 \Omega^2 \cos^2 \theta_{1,2}} \right\}$$

siendo

$$(5.28) \quad \text{tg } \theta_{1,2} = k_{y,2} / k_x$$

Se ve fácilmente que sobre la línea $k = h/2$, $\bar{\omega}_1 = 0$ y $\bar{\omega}_2 = \Omega$ de modo que $\theta_1 = \pi/2$, $\theta_2 = 0$. Sobre la línea $k = k_3$, en cambio, $\bar{\omega}_1 = -\omega_p$ y $\bar{\omega}_2 = \sqrt{\omega_p^2 + \Omega^2}$, de manera que $\theta_1 = 0$ y $\theta_2 = \pi/2$. Resulta entonces que, cuando $h > 1$, a medida que k varía desde $k = h/2$ hasta $k = k_3$, el ángulo θ_1 varía entre $\pi/2$ y 0 , y consecuentemente, $\bar{\omega}_1$ recorre la rama resonante inferior $\bar{\omega}_-$ de (5.27) (ver fig. 5.2a). Al mismo tiempo, θ_2 varía entre 0 y $\pi/2$, y $\bar{\omega}_2$ recorre la rama resonante superior $\bar{\omega}_+$ (ver fig. 5.2a).

La situación es diferente cuando $h < 1$, pues para $k = h/2$ tanto $\bar{\omega}_1$, como $\bar{\omega}_2$ están sobre la rama inferior $\bar{\omega}_-$ (ver fig. 5.2b), y para $k = k_3$ ambas están sobre la rama superior. Como no hay contacto entre las dos ramas, la transición no se puede efectuar manteniendo ω sobre el eje real y se hace pasando por valores complejos de $\bar{\omega}_1$ y $\bar{\omega}_2$. Esto explica porqué cuando $h < 1$ hay modos inestables en el intervalo $k_i < k < k_s$.

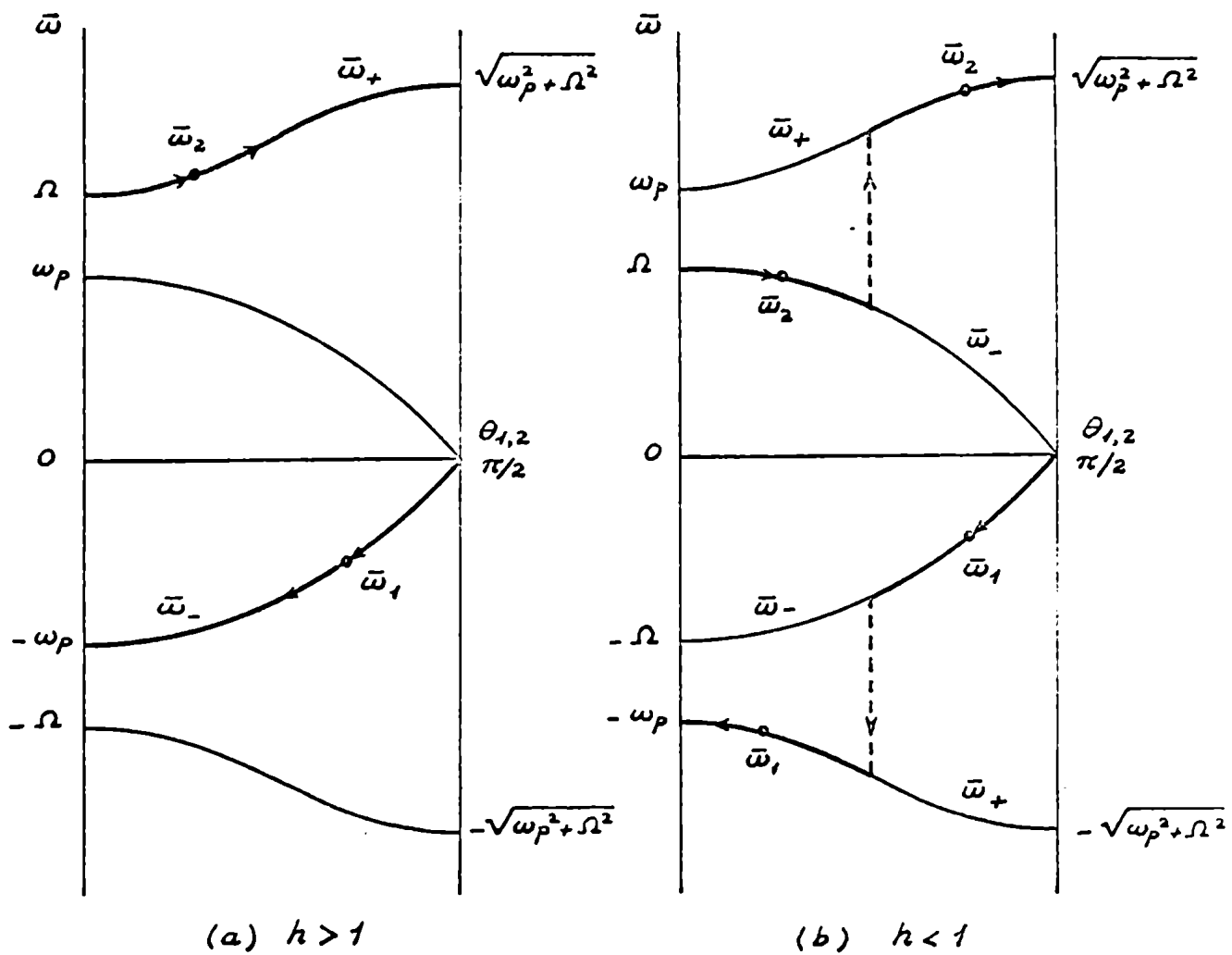


fig.5.2. Frecuencias $\bar{\omega}_1$ y $\bar{\omega}_2$ para los casos de radiación.

5.4 Efectos de una modulación transversal. Radiación y sobreestabilidad. (6).

Se mencionó en el punto (5.1) que las condiciones de contorno no permiten que haya radiación en presencia de una modulación transversal de la interfase, es decir cuando $k_x \neq 0$. Si $k_x = 0$, en cambio, hay modos que corresponden a radiación como se acaba de ver. Si se parte entonces de uno de estos modos y se incrementa k_x a partir de cero, necesariamente los $k_{y,2}$ deben adquirir una parte imaginaria, lo que significa que la perturbación se localiza alrededor de la interfase. Estaremos entonces en presencia de emisión de ondas no uniformes, habrá acumulación de energía y, por ende, inestabilidad (ver el punto 4.7), y ω adquirirá una parte imaginaria. El comportamiento de la perturbación con el transcurso del tiempo será el de una oscilación cuya frecuencia está dada esencialmente por $Re(\omega)$ y cuya amplitud crece como $exp(Im(\omega))$. Este tipo de inestabilidad, que consiste en oscilaciones que se amplifican con el tiempo se suele llamar sobreestabilidad.

Los resultados del cómputo numérico de las raíces de la relación de dispersión (5.14) muestran en efecto, que cuando k_x ya no es nulo, en lugar de los modos de radiación aparecen modos sobreestables cuyas regiones de existencia se corresponden, grosso modo, con las regiones de existencia para radiación, en concordancia con lo que se puede prever sobre la base de los argumentos energéticos del Cap.4, y de las condiciones de contorno.

Para estudiar con más detalle la conexión entre la radiación y la sobreestabilidad, vamos a analizar el comportamiento de las raíces de la relación de dispersión (5.12) en el entorno de $k_x = 0$. Para esto, indicaremos con $\bar{\omega}_{1,2}$ y $k_{y,2}$ los valores correspondientes a $k_x = 0$

Para k_z pequeño ($k_z \ll k_x$) se puede poner

$$(5.29) \quad \bar{\omega}_{1,2}(k_z) = \bar{\omega}'_{1,2} = \bar{\omega}_{1,2} + i\delta\omega$$

$$(5.30) \quad k_{y1,2}(k_z) = k'_{y1,2} = k_{y1,2} + i\delta k_{y1,2}$$

La relación entre $\delta k_{y1,2}$ y $\delta\omega$ es obviamente

$$(5.31) \quad \begin{aligned} \delta k_{y1} F_{y1} &= \delta\omega W_1 \\ \delta k_{y2} F_{y2} &= \delta\omega W_2 \end{aligned}$$

donde $F_{y1,2}$ y $W_{1,2}$ se calculan para $k_z = 0$. Se puede ahora desarrollar la relación de dispersión (5.12) en términos de $\delta\omega$, $\delta k_{y1,2}$, k_z , supuestos pequeños. Teniendo en cuenta que $\bar{\omega}_{1,2}$ y $k_{y1,2}$ son soluciones de la ec.(5.13) y usando las (5.29), (5.30) y (5.31) se obtiene fácilmente, al orden más bajo en k_z :

$$(5.32) \quad \begin{aligned} \delta\omega &\left[\frac{k_{y1}}{\bar{\omega}_1(\bar{\omega}_1^2 - \Omega^2)} \left(2 + \frac{\Omega^2}{\bar{\omega}_1^2 - \Omega^2} - \frac{\Omega^2}{\bar{\omega}_1^2 - \omega_p^2} \right) \pm \right. \\ &\left. \pm \frac{k_{y2}}{\bar{\omega}_2(\bar{\omega}_2^2 - \Omega^2)} \left(2 + \frac{\Omega^2}{\bar{\omega}_2^2 - \Omega^2} - \frac{\Omega^2}{\bar{\omega}_2^2 - \omega_p^2} \right) \right] = \\ &= -k_z \left[\frac{\Omega}{\bar{\omega}_1} \frac{1}{\bar{\omega}_1^2 - \Omega^2} - \frac{\Omega}{\bar{\omega}_2} \frac{1}{\bar{\omega}_2^2 - \Omega^2} \right] \end{aligned}$$

En esta ecuación los signos \pm se corresponden con el doble signo en las ecs. (5.12) y (5.13).

Se ve de (5.31) y (5.32) que, si se ha partido de modos de radiación $\delta\omega$ y $\delta k_{y,2}$ son reales, como se había adelantado. Los signos de los coeficientes de $\delta k_{y,2}$, $\delta\omega$ y k_2 deciden si la introducción de la modulación transversal conduce a la sobreestabilidad ($\text{Im}(\omega) > 0$) o al amortiguamiento de las ondas. No se reproducirán aquí los pormenores de este análisis de signos, que aunque fácil es algo tedioso. El resultado es que la línea $k = k_m$ (ver ec.(5.25) y fig. 5.1), divide la región de existencia para radiación en dos subregiones. Los modos de la subregión inferior $k < k_m$ se localizan y se vuelven sobreestables cuando $k_2 > 0$; viceversa, cuando $k_2 < 0$ se vuelven localizados y amortiguados. Los modos de la subregión superior $k > k_m$ se convierten en localizados y sobreestables para $k_2 < 0$, y en amortiguados cuando $k_2 > 0$ (ver fig. 5.3).

Los bordes k_i, k_s, k_3 de las regiones de existencia no sufren modificaciones al primer orden en k_2 y se convierten en los bordes de las regiones sobreestables. En cuanto a la línea crítica $k = h/2$, es borde de la región sobreestable para cualquier valor de k_2 .

Para valores finitos de k_2 , todas las líneas críticas k_i, k_s, k_3 y k_m , exceptuando la línea $k = h/2$, sufren modificaciones. La tarea de determinar analíticamente la continuación de dichas líneas involucra tener que resolver ecuaciones algebraicas de orden elevado, por lo cual no intentaremos avanzar más en tal sentido y nos contentaremos con una descripción cualitativa del comportamiento de los modos, basada en el análisis numérico de la relación de dispersión.

Si se incrementa el valor de k_2 , desciende el borde superior de la región sobreestable del plano (h, k) , tendiendo asintóticamente hacia $k = h/2$. En consecuencia se va reduciendo el intervalo sobreestable, que finalmente desaparece cuando la superficie está modulada en sentido perpendicular al campo magnético.

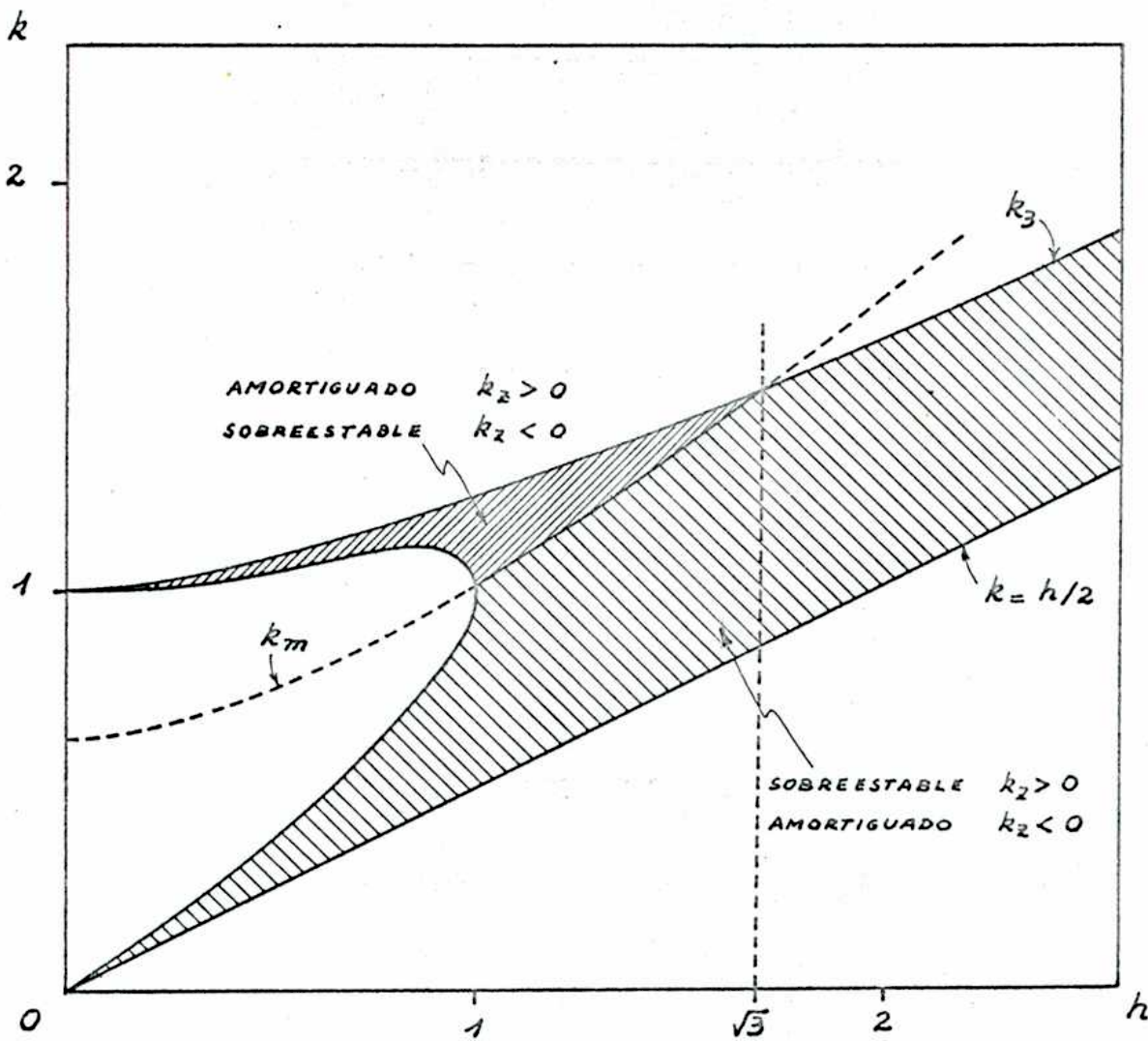


fig.5.3.Regiones de existencia de los modos sobreestables para pequeños valores de k_2 .

Para un valor fijo, no nulo, de k_2 , un incremento del campo magnético trae aparejada una disminución del intervalo sobreestable. Si se exceptúan valores pequeños de Ω/ω_p , en coincidencia con k_z/k_x pequeño, la velocidad de crecimiento de la sobreestabilidad, $Im(\omega)$ es siempre mucho menor que $Re(\omega)$ siendo además relativamente poco sensible a las variaciones de Ω .

Estas características se pueden observar en las figuras 5.9 a 5.14, en las que se han graficado las raíces sobreestables y monotónicamente inestables de la relación de dispersión para algunos conjuntos de valores de los parámetros. En dichas figuras también se han representado algunas de las raíces reales (que corresponden a ondas estables de superficie) vinculadas a las inestabilidades. Los cálculos están basados en el polinomio $P_{10}(\omega)$ que se obtuvo de la relación de dispersión de la manera que se ha descrito en el punto 5.2.

En las figuras 5.7 y 5.8 se ha trazado un diagrama cualitativo del aspecto de las regiones de existencia de los modos inestables para un valor intermedio de k_z (negativo o positivo).

5.5 Inestabilidades monotónicas en presencia de modulación transversal (6).

Cuando k_z no es nulo las regiones de existencia de las inestabilidades monotónicas (ω imaginario puro) difieren radicalmente respecto de lo que se tiene para $k_z = 0$ (véase el punto 5.3 y la fig. 5.1).

Es posible localizar el origen de la diferencia si se observa que la relación de dispersión para radiación de ondas del caso $k_z = 0$, ec. (5.13), con el signo -, admite una raíz nula (que no se mencionó en el punto 5.3), $\omega = 0$, que corresponde a oscilaciones espaciales en la dirección y . Las regiones de existencia de este modo de frecuencia cero se han representado como áreas sombreadas en la fig. 5.4. Se ve fácilmente que en las áreas identificadas con los números 1 y 3, $\bar{\omega}_1 = -\bar{\omega}_2$ y ambas corresponden a la frecuencia resonante superior $\bar{\omega}_+$. Sobre el borde inferior de esta región, $k = \text{Max}(1, h)$ y $\theta_{1,2} = 0$. A medida que k se incrementa hasta alcanzar el borde superior $k = k_{c+}(k_z = 0)$ dado por

$$(5.33) \quad k_{c+}(k_z = 0) = \sqrt{1 + h^2}$$

$\bar{\omega}_1$ y $\bar{\omega}_2$ recorren la rama resonante superior hasta alcanzar $\theta_{1,2} = \pi/2$ en el borde $k = \sqrt{1+h^2}$ (ver fig.5.5a)

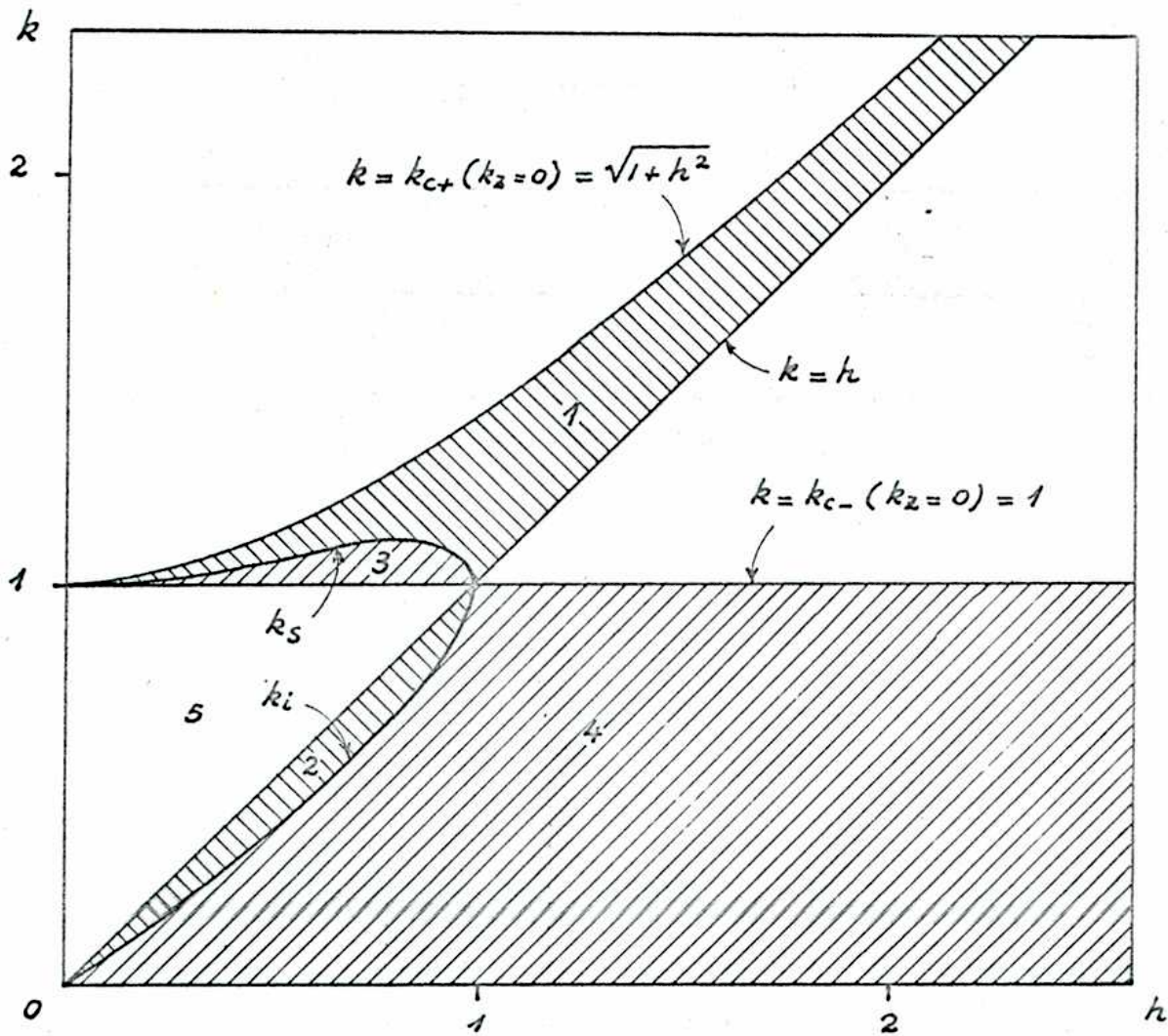


fig.5.4. Regiones de existencia del modo de frecuencia cero para $k_z=0$, y de las inestabilidades monotónicas que surgen de él cuando $|k_z| \ll k_x$.

En cambio, en las áreas numeradas 2 y 4 las dos frecuencias $\bar{\omega}_1 = -\bar{\omega}_2$ corresponden a la frecuencia resonante inferior. A medida que k recorre el intervalo

$0 < k < \text{Min}(k_e, h)$; $k_c(k_2=0)=1$, ambas recorren la rama resonante inferior a partir de $\theta_{1,2} = \pi/2$ y hasta $\theta_{1,2} = 0$ (ver Fig. 5.5b)

Cuando se da una modulación oblicua ($k_2 \neq 0$) a la interfase, se producirá la localización en la dirección y de estas oscilaciones, que induce una inestabilidad, en forma análoga a lo discutido en el punto 5.4. Puesto que se parte de un modo de frecuencia nula, es de esperar que la inestabilidad que resulta sea monotónica (i.e., $\text{Re}(\omega) = 0$).

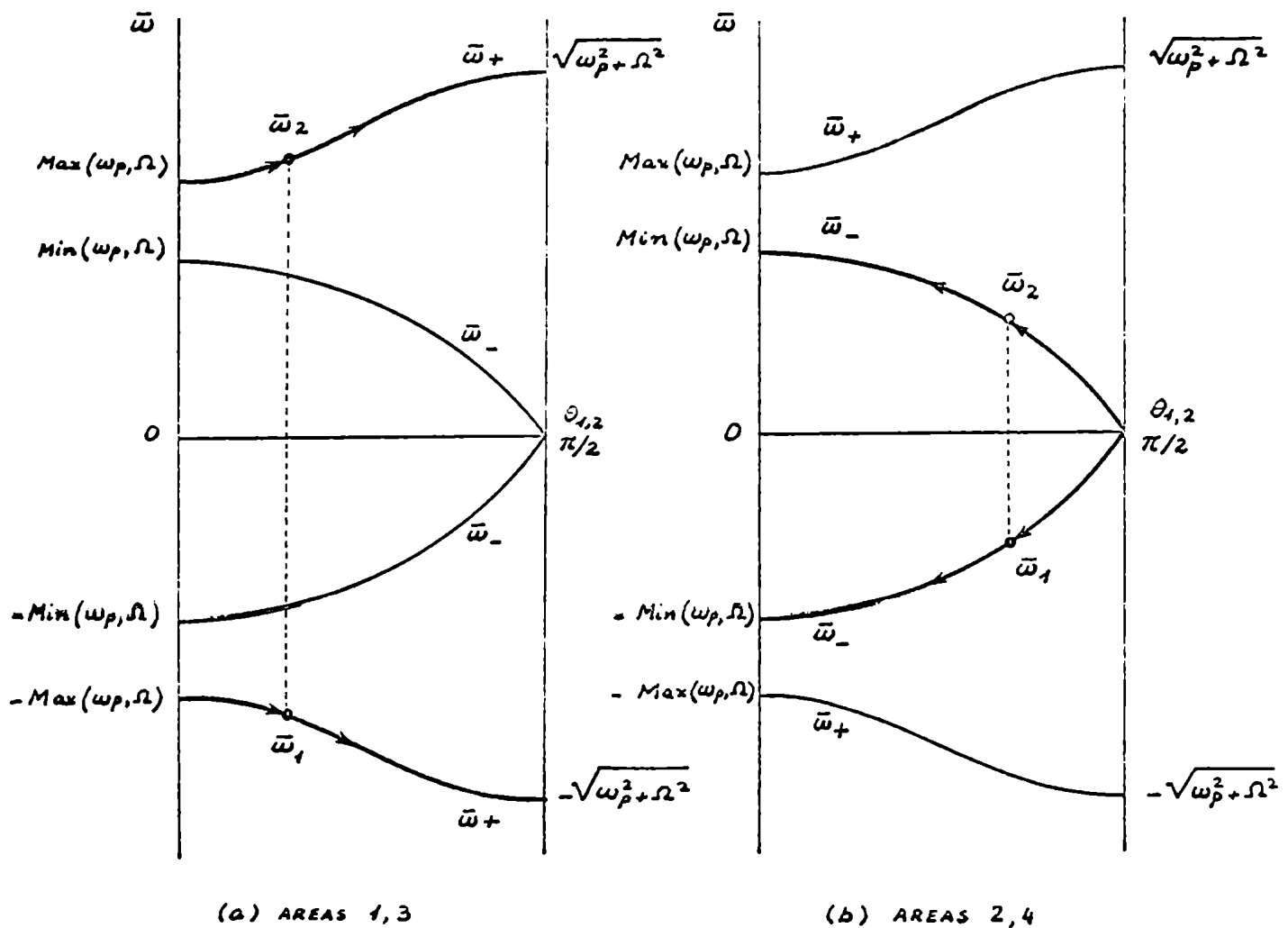


fig. 5.5. Frecuencias $\bar{\omega}_1$ y $\bar{\omega}_2$ para el modo de frecuencias cero.

Esto se puede verificar procediendo como en el punto 5.4. Usando las definiciones

Es fácil ver que en la expresión (4.10) es equivalente usar sea $\hat{\underline{\epsilon}}$ como $\check{\underline{\epsilon}}$, ya que se puede pasar de uno a otro mediante una integración por partes, y la parte integrada se anula, debido a la forma en que se ha elegido el perfil de velocidad (y densidad) del plasma y el intervalo de integración. Puede entonces escribirse

$$(4.14) \quad \frac{dW}{dt} = \int \frac{dy}{16\pi} \left\{ i\omega^* \underline{\underline{\epsilon}} \cdot \check{\underline{\epsilon}}^* \underline{\underline{\epsilon}}^* - i\omega \underline{\underline{\epsilon}}^* \cdot \check{\underline{\epsilon}} \cdot \underline{\underline{\epsilon}} - i(\omega - \omega^*) \underline{\underline{\epsilon}} \cdot \underline{\underline{\epsilon}}^* \right\} = -P$$

La condición de que el sistema sea no disipativo se puede escribir ahora en la forma

$$(4.15) \quad \check{\underline{\epsilon}}_{ij} = \check{\underline{\epsilon}}_{ji}^{*R} \quad (\omega \text{ real})$$

Aquí, el superscripto R indica que todos los factores de $\check{\underline{\epsilon}}_{ji}^{*R}$ deben escribirse en orden inverso (es decir, de derecha a izquierda) con respecto de $\check{\underline{\epsilon}}_{ji}$, incluyendo en esta inversión las \rightarrow de los operadores diferenciales.

El operador (4.13) satisface la condición (4.15), y se puede verificar fácilmente que para ω real $dW/dt=0$.

Mediante el operador asociado $\check{\underline{\epsilon}}$ es fácil pasar al límite de un perfil discontinuo (ver punto 4.1), y se obtiene, para modos electrostáticos

$$(4.16) \quad \begin{aligned} \frac{dW}{dt} &= \frac{dW_1}{dt} + \frac{dW_2}{dt} \\ &= \frac{|\phi(t)|^2}{8\pi} \text{Im} \left\{ -\omega \left[\pm i k_{y1} \left(1 - \frac{\omega_{p1}^2}{\bar{\omega}_1^2 - \Omega^2} \right) - k_z \frac{\Omega}{\bar{\omega}_1} \frac{\omega_{p1}^2}{\bar{\omega}_1^2 - \Omega^2} \right] + \right. \\ &\quad \left. + \omega \left[\mp i k_{y2} \left(1 - \frac{\omega_{p2}^2}{\bar{\omega}_2^2 - \Omega^2} \right) - k_z \frac{\Omega}{\bar{\omega}_2} \frac{\omega_{p2}^2}{\bar{\omega}_2^2 - \Omega^2} \right] \right\} \\ &= -P \end{aligned}$$

$$\bar{\omega} \equiv \bar{\omega}_2 = -\bar{\omega}_1 = k_x u$$

$$k_y \equiv k_{y1} = k_{y2}$$

$$\delta k_y \equiv \delta k_{y1} = -\delta k_{y2}$$

se obtiene fácilmente, analizando la relación de dispersión (5.12) en el entorno de $\omega = 0$, $k_x = 0$

$$(5.34) \quad \delta k_y k_y \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\bar{\omega}^2 - \Omega^2} \right) = \frac{\delta \omega}{\bar{\omega}} \left[k_x^2 \frac{\omega_p^2}{\bar{\omega}^2} + k_y^2 \frac{\bar{\omega}^2 \omega_p^2}{(\bar{\omega}^2 - \Omega^2)^2} \right]$$

$$(5.35) \quad \delta \omega k_y \left(2 + \frac{\Omega^2}{\bar{\omega}^2 - \Omega^2} - \frac{\Omega^2}{\bar{\omega}^2 - \omega_p^2} \right) = -k_x \Omega$$

Estos resultados permiten constatar que al introducir una pequeña modulación transversal aparece la localización y la correspondiente inestabilidad, tal como se había adelantado.

Para abreviar se omite el detalle del análisis de los signos de los coeficientes de $\delta \omega$ y δk_y . Resulta que la inestabilidad aparece, para valores positivos de k_x , en las áreas señaladas con 1 y 2, y para valores negativos de k_x , en las áreas 3 y 4.

A esto viene a sumarse que la inestabilidad monotónica ya presente en el intervalo $k_i < k < k_s$ cuando $k_x = 0$ se continúa en modos también inestables monotónicos, tanto para $k_x > 0$ como para $k_x < 0$.

En consecuencia, el panorama de las inestabilidades monotónicas, para $k_x \ll k_x$ se puede resumir en los siguientes términos (haciendo referencia a la fig. 5.4).

- (i) Cuando $k_x > 0$ hay inestabilidad en las áreas marcadas 1, 3 y 5 (una raíz) y en el área 2 (dos raíces).

(ii) Cuando $k_2 < 0$ hay inestabilidad en las áreas marcadas 2, 4, y 5 (una raíz) y en el área 3 (dos raíces).

Para valores finitos de k_2 , el borde correspondiente a $k=h$ no se modifica. Las ecuaciones de las líneas k_{c+} y k_{c-} son:

$$(5.36) \quad k_{c\pm}^2 = 1 + \frac{h^2}{2} \pm \sqrt{h^2 \sin^2 \alpha + \frac{h^4}{4}} \quad \text{tg } \alpha = k_2 / k_x$$

A medida que crece $|k_2|$ las regiones 2 y 3 de la fig. 5.4 se van reduciendo gradualmente hasta que eventualmente desaparecen para un cierto valor de $|k_2|$ ($< k_x$). Si se sigue incrementando $|k_2|$ aparecen nuevamente dos pequeñas re-

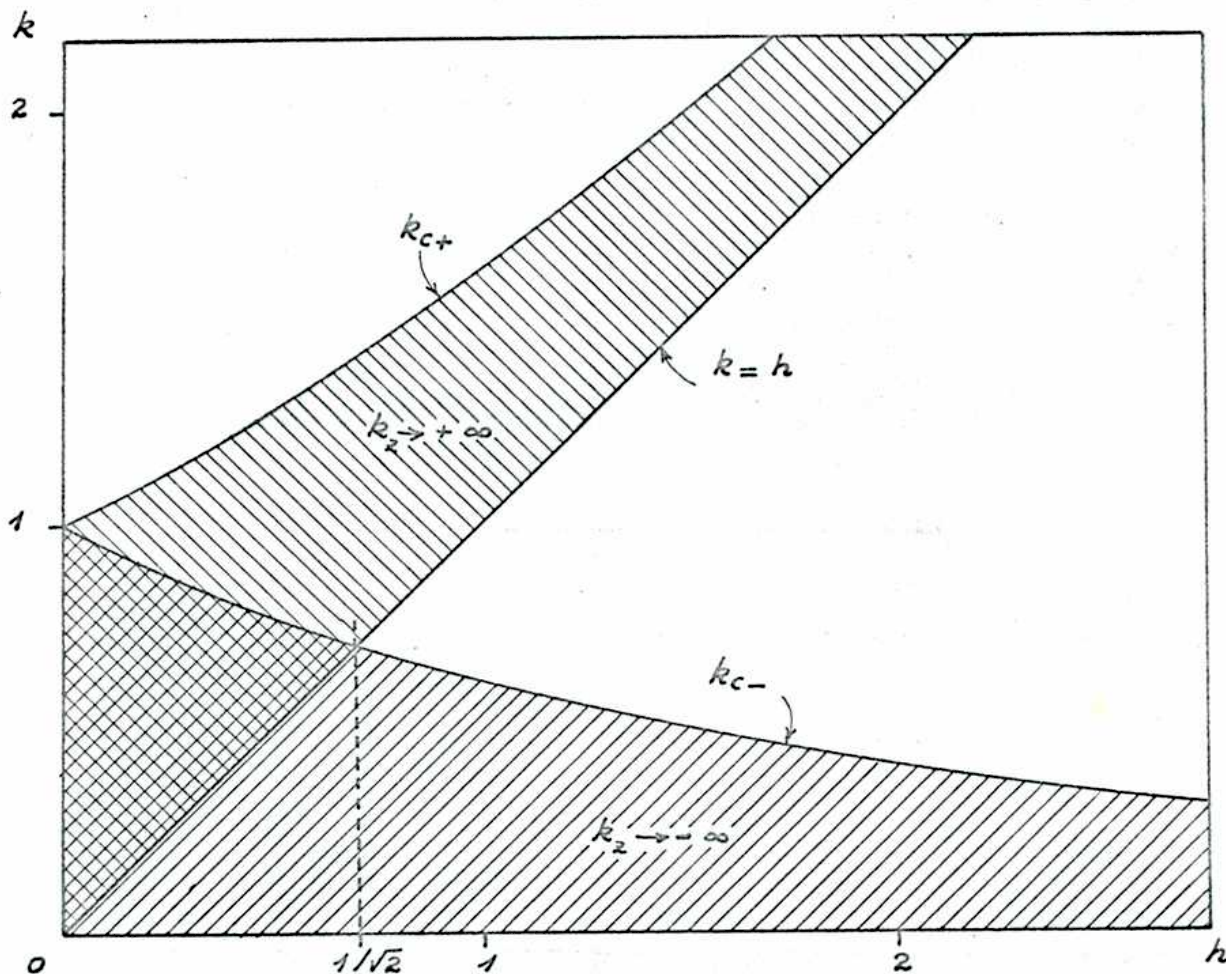


fig.5.6. Regiones de existencia de modos inestables monotónicos para $|k_2| \gg k_x$.

giones similares a las áreas 2 y 3, pero que ahora corresponden a ondas estables de superficie. Cuando sucede esto último, las regiones de existencia de los modos sobreestables no limitan con los modos monotónicos, lo que puede observarse en las figs. 5.9 a 5.14.

En la fig. 5.6 se puede observar el aspecto de las regiones de existencia de estos modos cuando $\alpha \approx \pm \pi/2$.

La máxima velocidad de crecimiento de la inestabilidad no depende del signo de k_z , y aumenta lentamente con $|k_z|$,

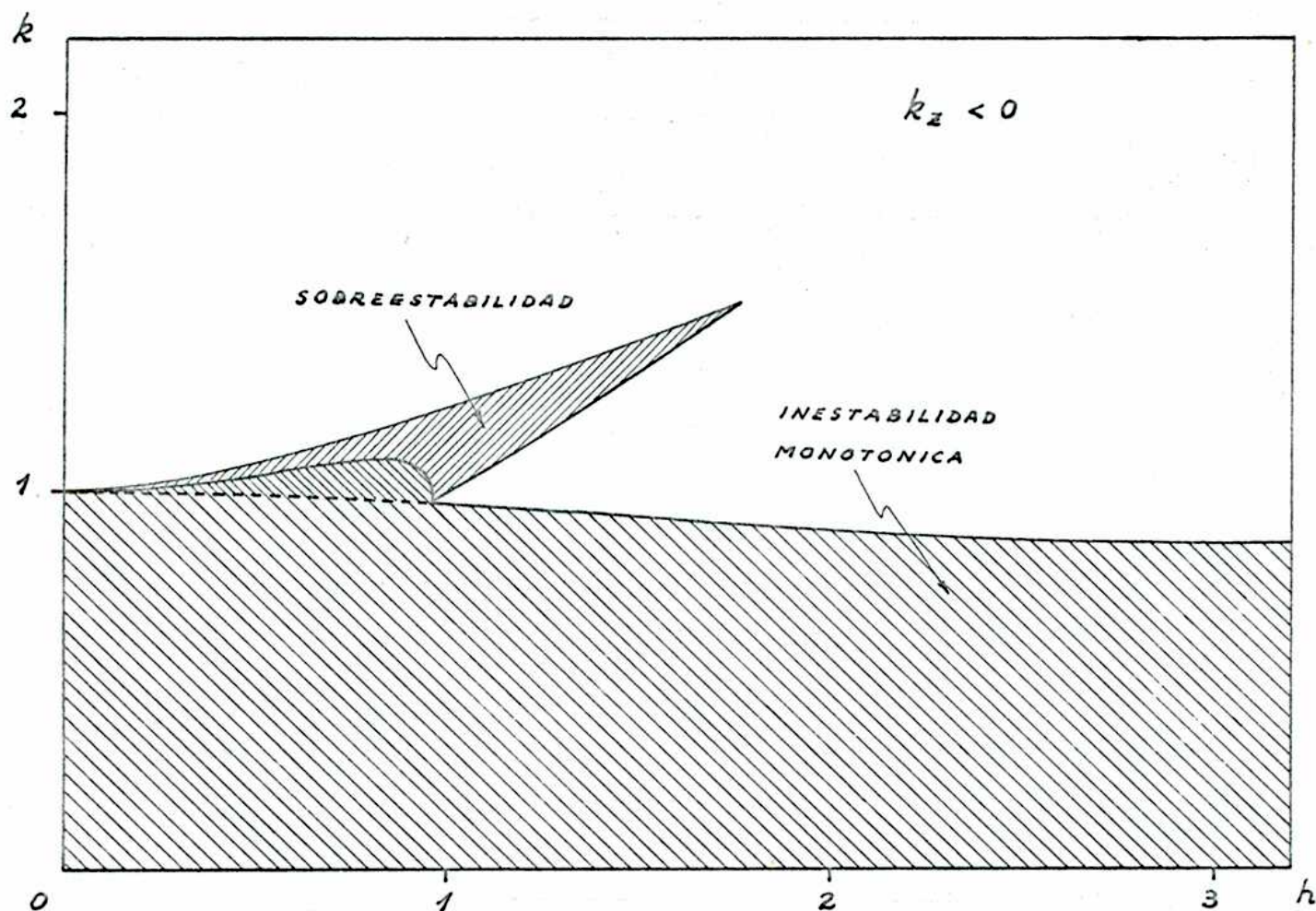


fig. 5.7. Regiones de existencia de los modos inestables para un valor negativo e intermedio de k_z .

tendiendo al valor

$$\frac{\omega_p}{2\sqrt{h^2+2}} \quad ; \quad k_z \rightarrow \pm \infty$$

Cuando $k_z \rightarrow \pm \infty$, la máxima velocidad de crecimiento se tiene sobre la línea

$$k = k_{max} = \frac{h}{2} \left[\sqrt{1 + \frac{1}{h^2} \left(\frac{2h^2+3}{h^2+2} \right)} \pm 1 \right]$$

(el signo \pm corresponde al signo de k_z).

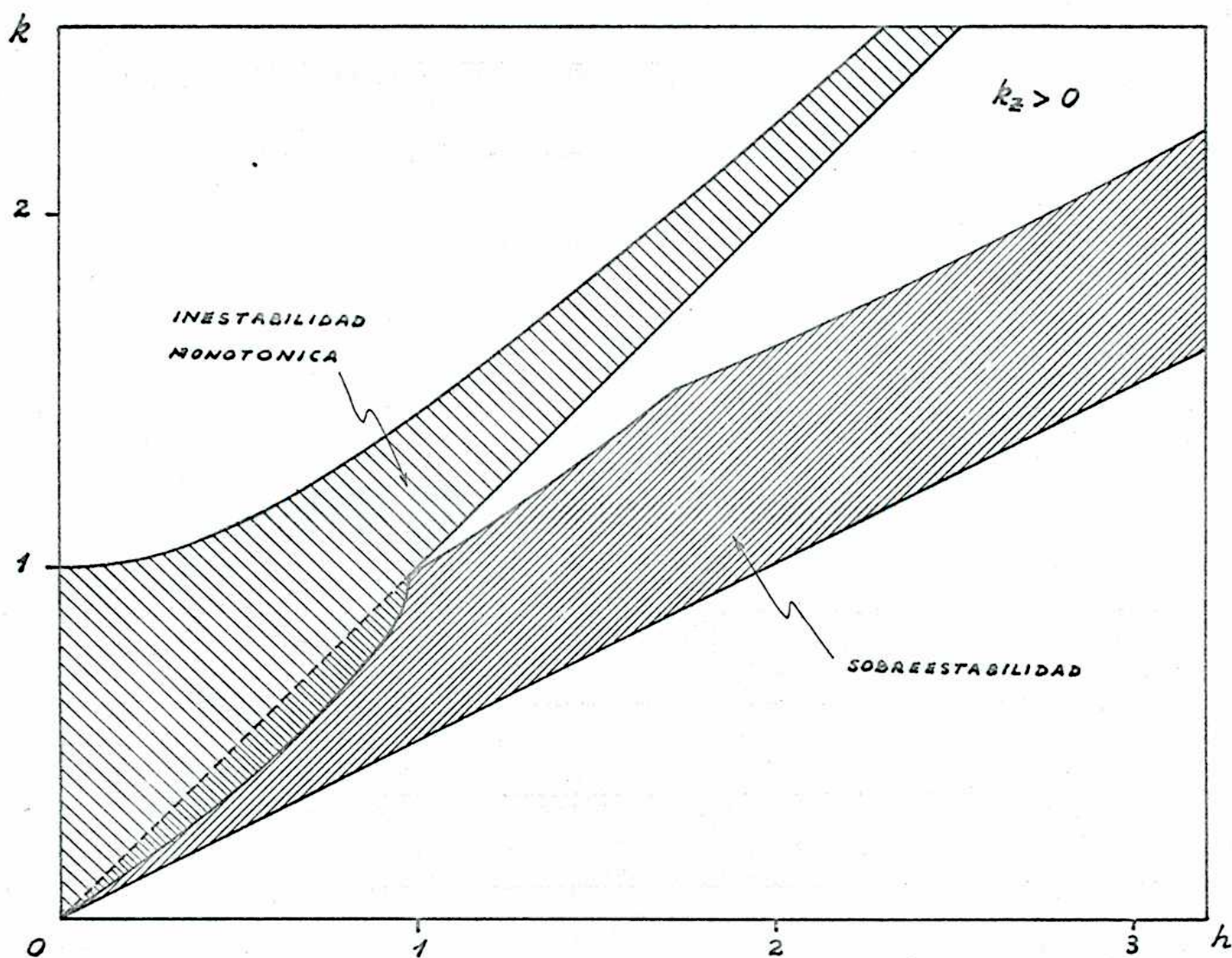


fig.5.8. Regiones de existencia de los modos inestables para un valor positivo intermedio de k_z .

El aspecto de las regiones de existencia para un valor intermedio de k_2 se puede observar en las figs. 5.7 y 5.8. Nos permitimos también a las figs. 5.9 a 5.14 donde se han graficado las raíces inestables de la relación de dispersión así como algunas raíces reales vinculadas con las inestabilidades.

5.6 Conclusiones.

El estudio de un ejemplo sencillo ha permitido verificar la conexión entre la radiación de ondas estables y las inestabilidades de una interfase, confirmando la noción intuitiva de que cuando se dan circunstancias que impiden la propagación se origina una inestabilidad.

Esta conexión entre radiación e inestabilidad en el problema estudiado se torna aún más sugestiva si se observa que entre la distancia de penetración de la perturbación y la velocidad de crecimiento de la inestabilidad hay una relación inversa, como sale de las ecs. (5.31) y (5.34). Basándose en consideraciones energéticas resulta claro que, para una transferencia de energía dada (de una región a la otra), cuanto mayor es el volumen afectado por la perturbación, tanto más lento será el crecimiento de la onda.

También se ha visto que cuando en el sistema puede haber propagación de ondas, la clasificación correcta de las ondas salientes surge del análisis del flujo de energía y la velocidad de grupo. El resultado difiere, en general, del que se obtiene de aplicar el criterio ingenuo de radiación basado sobre la velocidad de fase, debido a que en medios dispersivos, como el caso presente, puede haber dispersión negativa. En la literatura concerniente a problemas similares suele aparecer la afirmación de que en el caso en que los $K_{1,2}$ resultan ser imaginarios puros (es

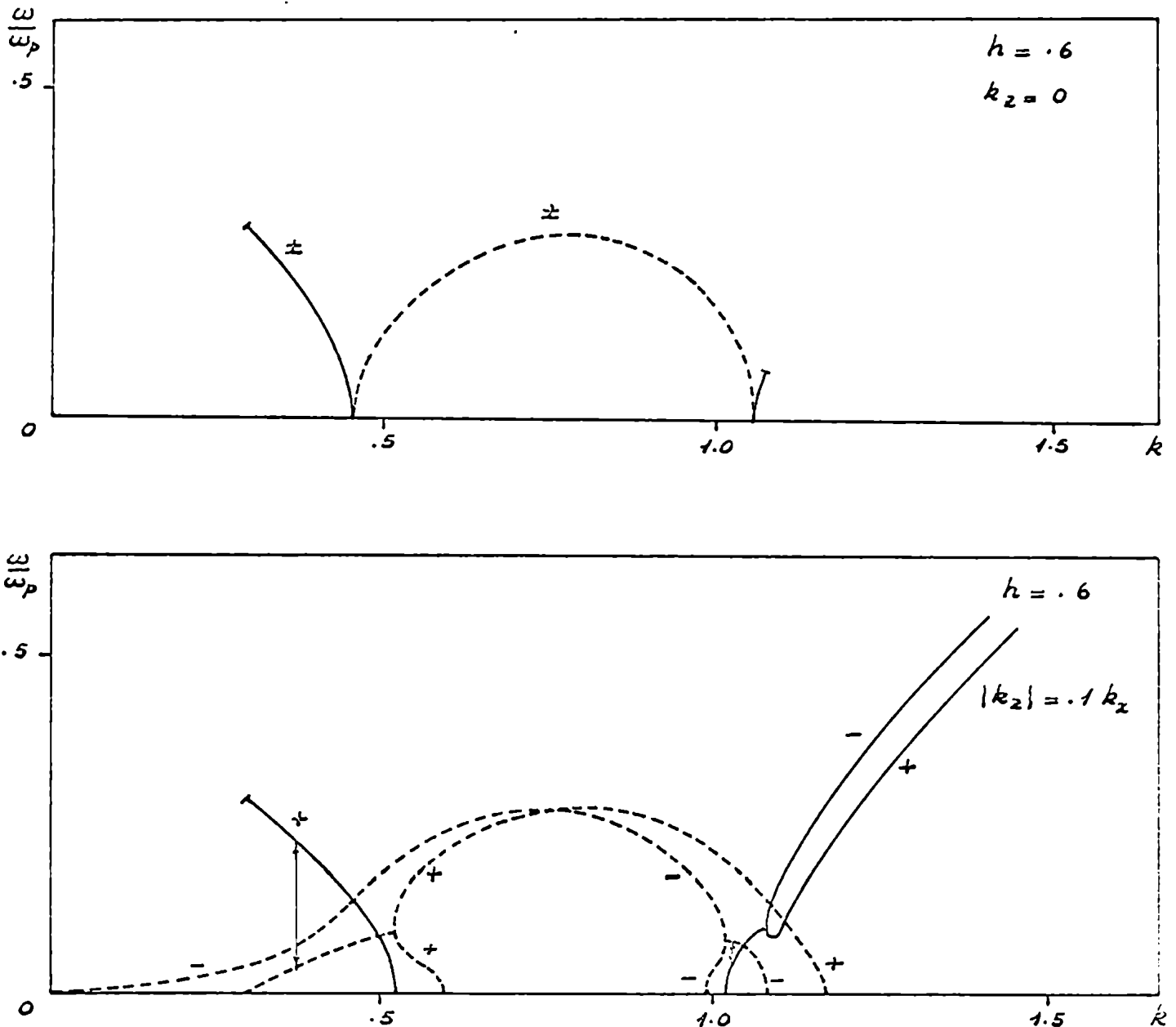


fig.5.9. Raíces inestables v sobreestables de la relación de dispersión para $h = .6$. Se ha indicado con línea de trazo la parte imaginaria de ω . Para $k_2 = 0$ se han representado las raíces correspondientes a radiación a fin de ilustrar su vinculación con la sobreestabilidad. Los signos + v - sobre las líneas corresponden a k_2 positivo o negativo, respectivamente. Las flechas vinculan las partes reales e imaginarias de ω . También se han representado (para $k_2 \neq 0$) algunas raíces reales que corresponden a ondas estables de superficie.

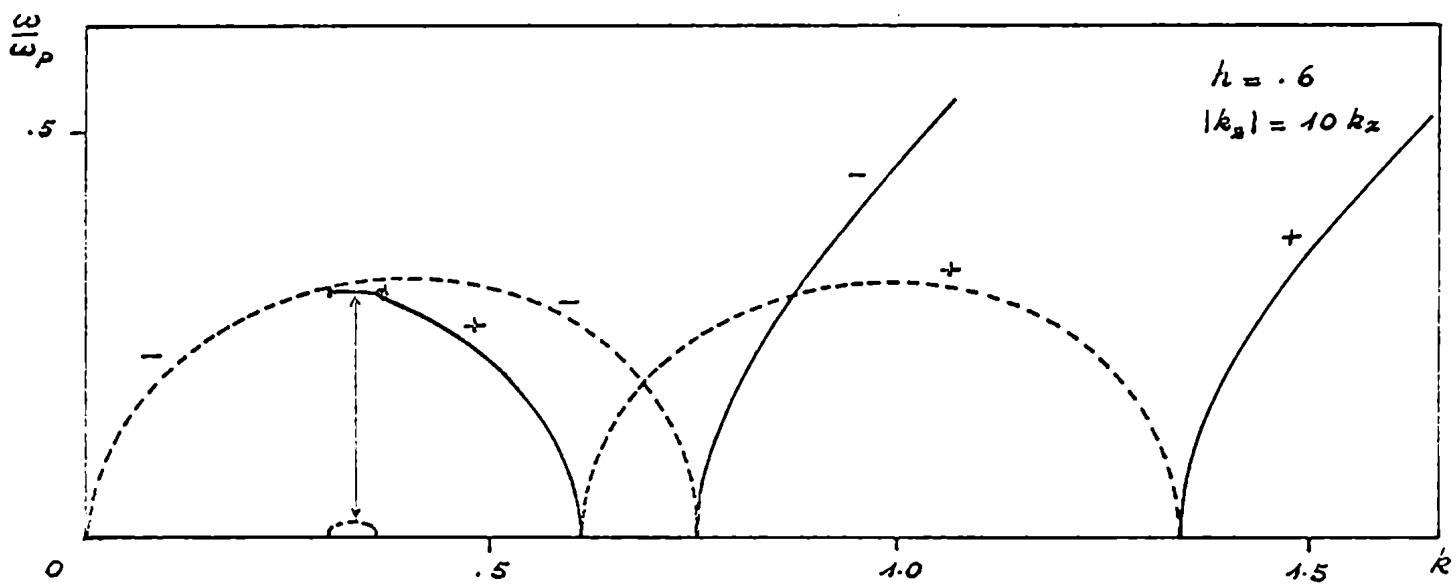
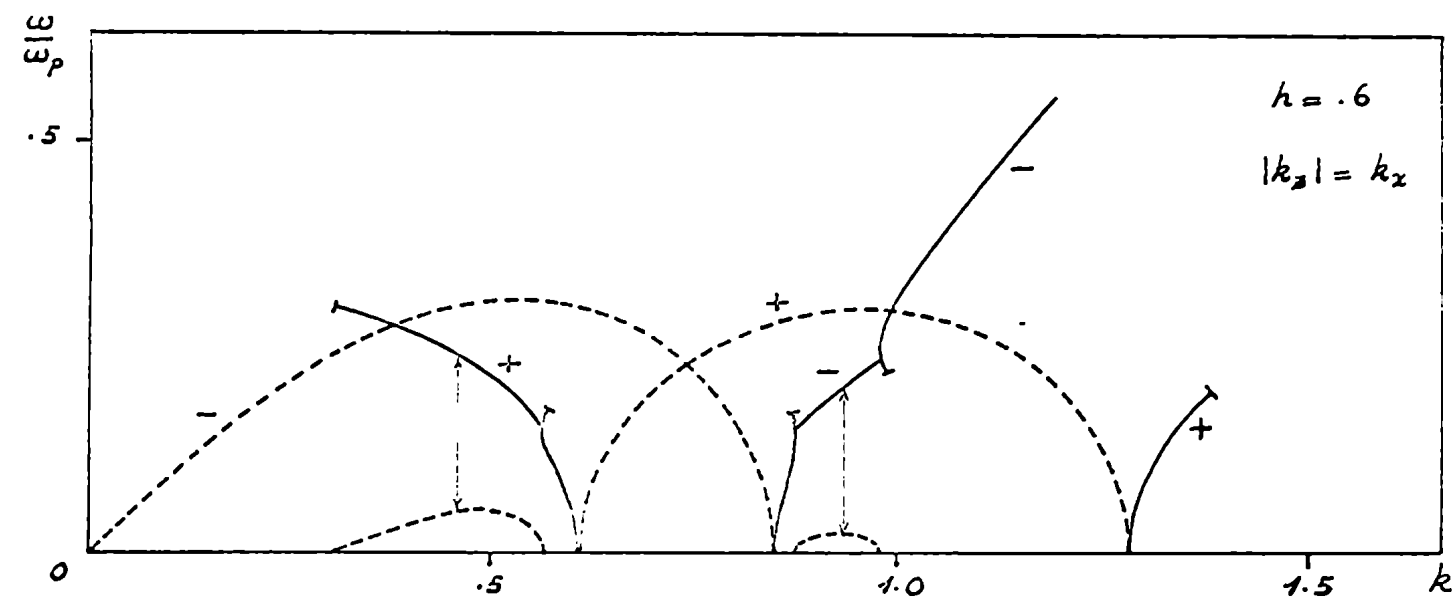


fig. 5.10. Raíces inestables y sobreestables para $h = .6$.

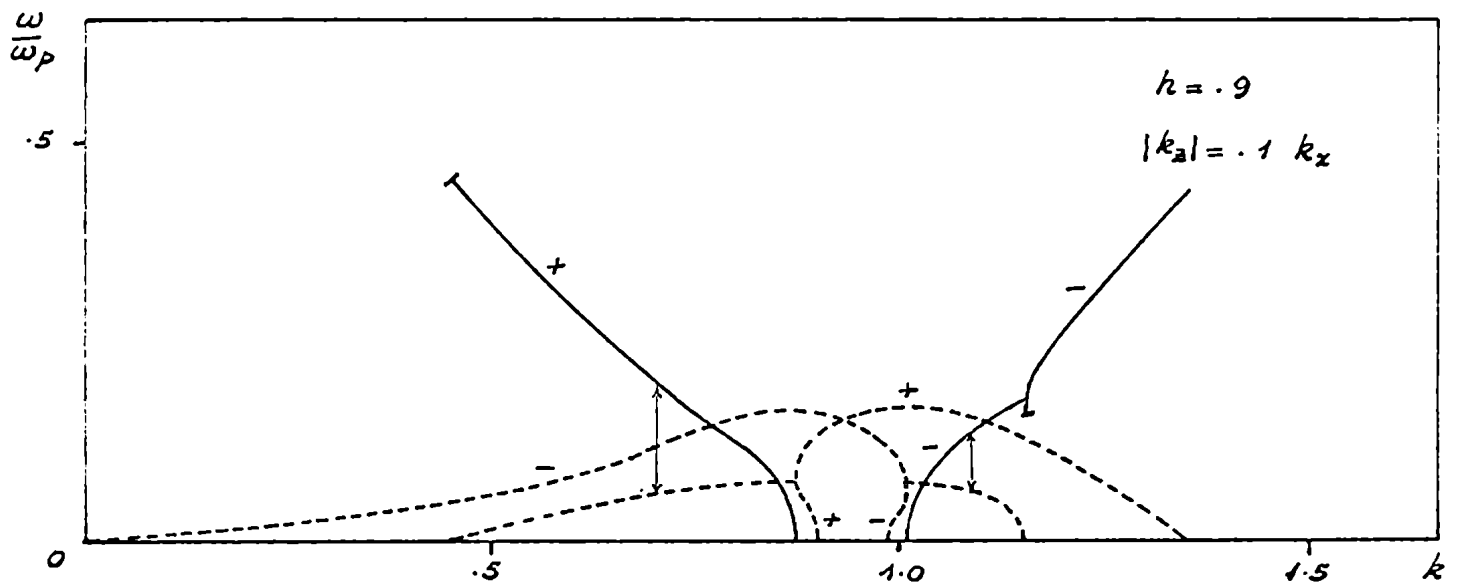
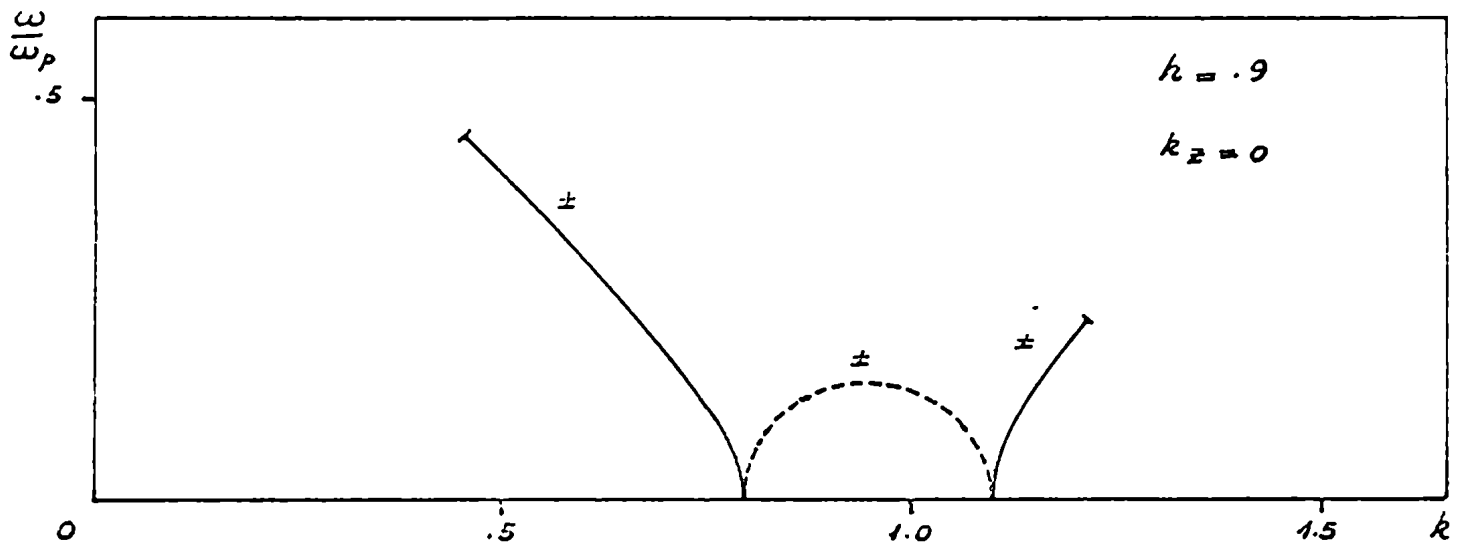


Fig. 5.11. Raíces inestables v sobreestables
para $h = .9$.

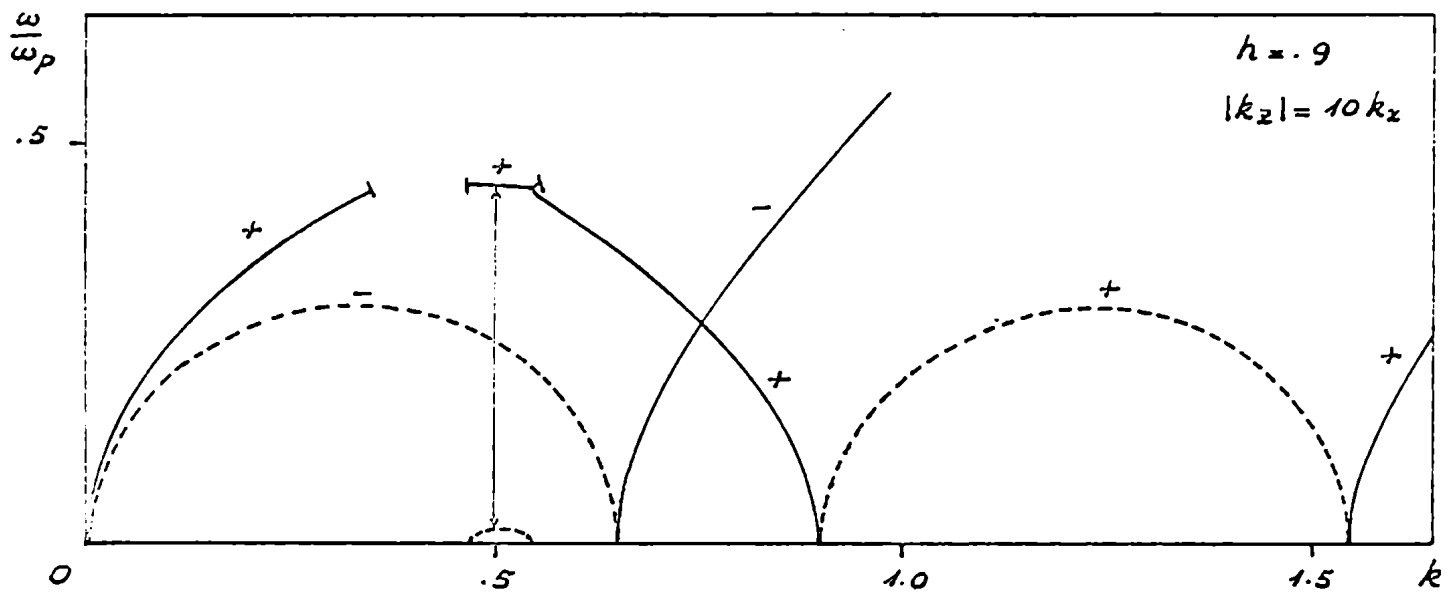
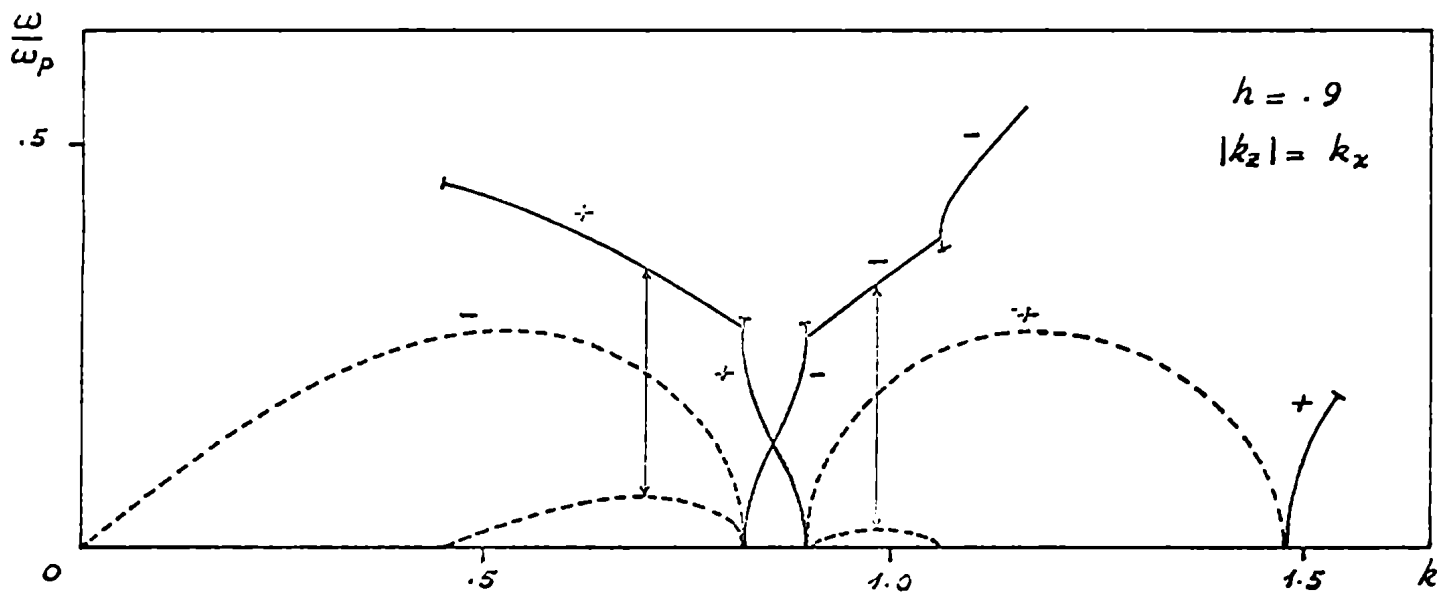


Fig. 5.12. Raíces inestables y sobreestables para $h = .9$.

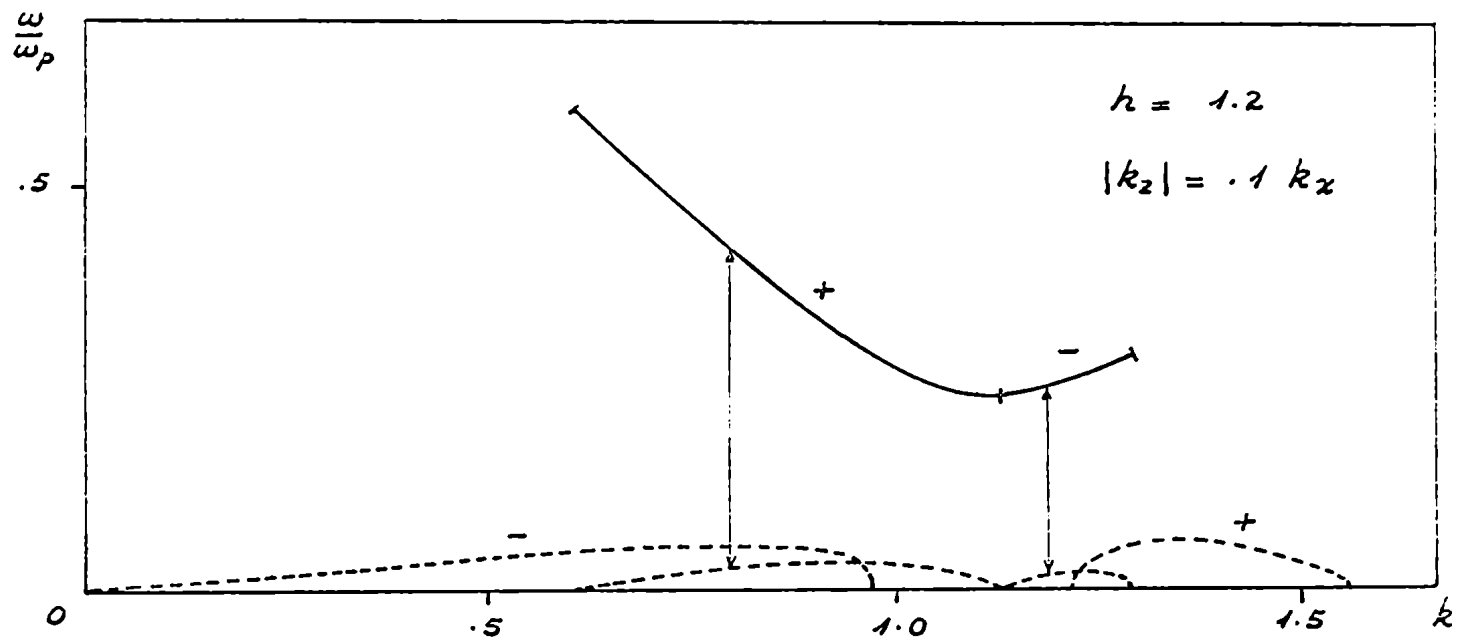
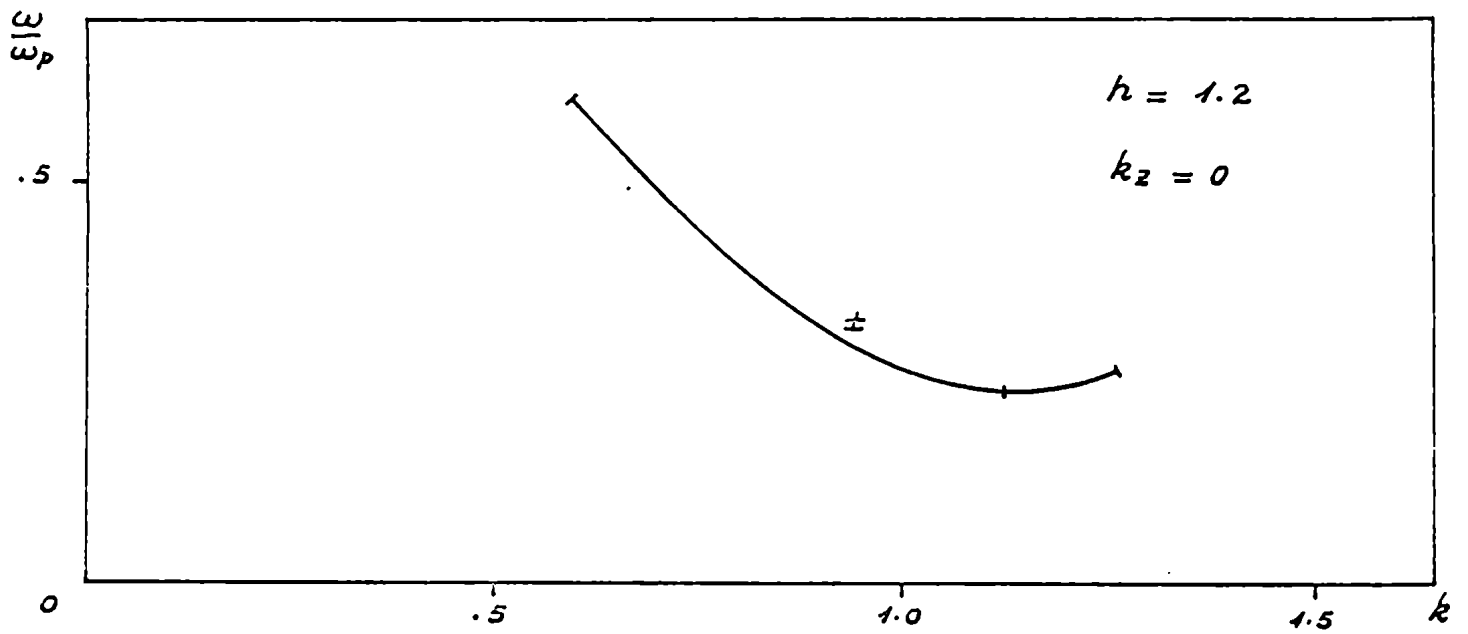


fig.5.13. Raíces inestables y sobreestables para $h = 1.2$.

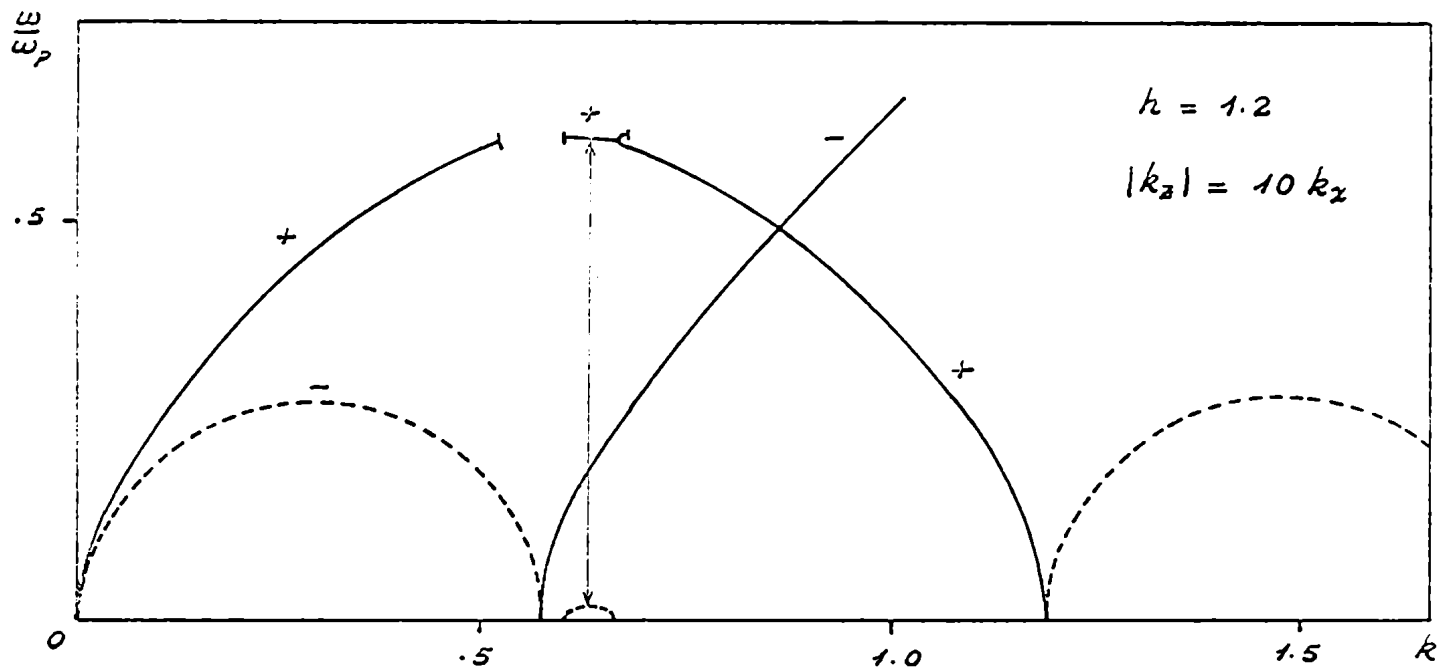
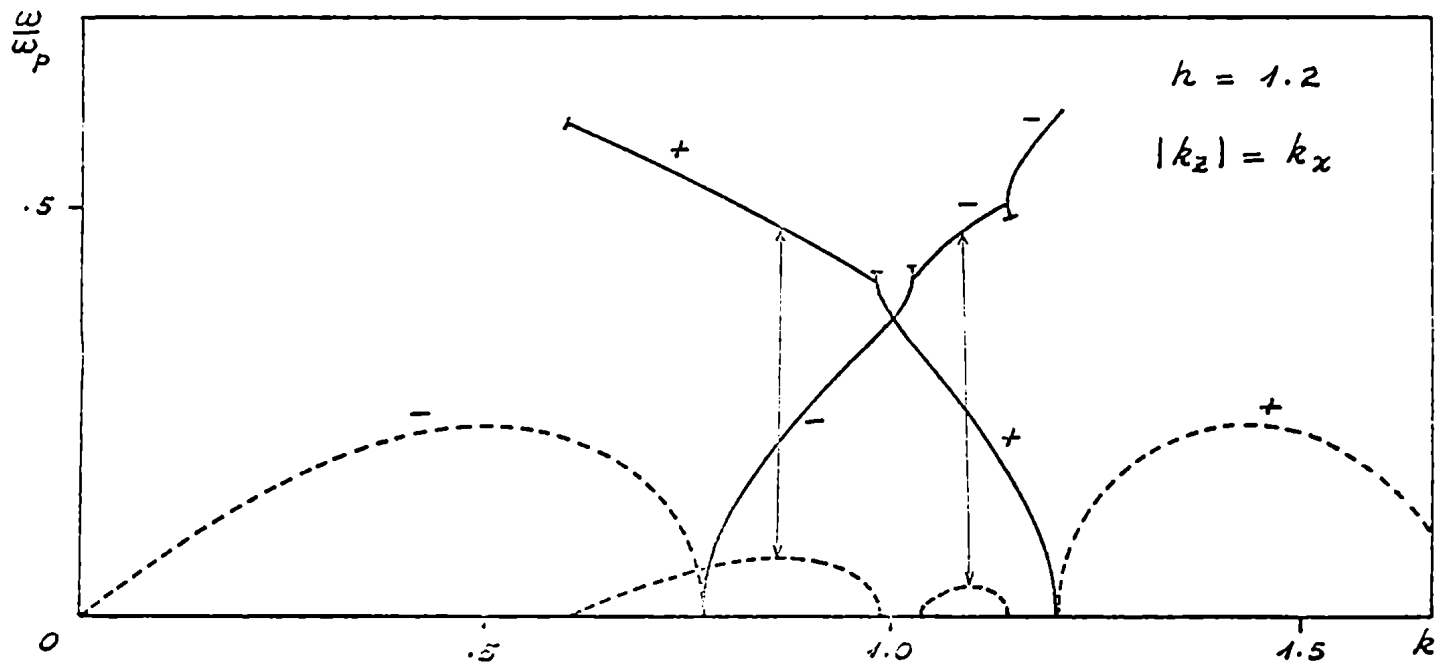


fig. 5.14. Raíces inestables v sobreestables
para $h = 1.2$.

decir, cuando hay propagación), el problema de autovalores es indeterminado y no hay relación de dispersión ⁽⁷⁾.

Si bien esta afirmación es, en cierto sentido, correcta, se ha mostrado aquí que el uso de un criterio de velocidad de grupo saliente permite obtener una relación de dispersión. Más aún, los modos que resultan de esa relación de dispersión, están estrechamente vinculados con inestabilidades del sistema y, en cierto sentido las preanuncian. Los modos de radiación también pueden conducir a la amplificación resonante, cuando se excita al sistema desde el exterior, con la frecuencia y longitud de onda adecuadas.

El uso de estas consideraciones ha permitido inferir muchas de las propiedades de los modos con modulación transversal a partir del caso particular $k_2 = 0$ que es mucho más simple de analizar.

Los resultados obtenidos están sujetos, por supuesto, a las limitaciones del modelo de plasma frío. Sin embargo cabe esperar que algunas de las características que se han discutido (dejando naturalmente de lado detalles específicos) estén también presentes en cálculos más realísticos o en problemas de la misma familia. En el caso que se ha considerado en este capítulo, los modos de radiación discutidos en el punto (5.3) son evidentemente un caso límite de los modos sobreestables, pues existen solamente cuando k_2 es estrictamente cero, y por consiguiente quizás no tengan un significado físico directo. Se verá en el capítulo 6, al estudiar un problema del mismo tipo, pero en el régimen iónico, que se presentan características similares. Se podía también mencionar que cuando se estudia el problema análogo de Kelvin-Helmholtz, en el régimen hidromagnético sin colisiones por medio de las ecuaciones de

Chew, Goldberger y Low, se obtiene radiación de modos estables, tanto para el caso $k_z = 0$ ⁽⁸⁾ como para $k_z \neq 0$. En dicho problema, la localización y consiguiente sobreestabilidad se presenta solamente para algunos intervalos de k_z ⁽⁹⁾.

Referencias

1. F. Gratton, J. Gratton, Nucl.Fusion 8 (1968) 269.
2. F. Gratton, "Teoría de la Inestabilidad por deslizamiento en los Plasmas", Tesis, Universidad de Buenos Aires (1968).
3. A.B. Mijailovsky, E.A. Pashitsky, JETP 42 (1965) 1787.
4. A.A. Rukhadze, V.P. Silin, Usp.Fiz.Nauk. 74 (1961) 223.
5. F. Gratton, J. Gratton, Acta Científica 1 N°5 (1969) 5.
6. F. Gratton, J. Gratton, J. Sánchez, Ediciones previas FCEN, Dep.Física (1970) a publicarse en Nuclear Fusion 10n°4(1970).
7. S. Chandrasekhar, "Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability", Oxford (1961) p. 463.
8. S. Duhau, F. Gratton, J. Gratton, Phys. Fluids 13 (1970) 1503.
9. S. Duhau, A. Eguiluz, Comunicación personal.

6. Oscilaciones iónicas de una discontinuidad tangencial de velocidades.(1)

6.1. La ecuación diferencial para las oscilaciones electrostáticas iónicas.

Se mencionó en el punto 2.3 que en un plasma no isotérmico, en el cual la temperatura de los electrones es mucho mayor que la temperatura de los iones:

$$(6.1) \quad \theta_e \gg \theta_i$$

se pueden dar oscilaciones poco amortiguadas con velocidad de fase pequeña y frecuencia baja. Si el plasma es de bajo β estas oscilaciones son esencialmente longitudinales. Para un plasma semiinfinito se tienen entonces las ondas iónicas acústicas y ciclotrónicas que se discutieron en el punto 3.3.

Si el plasma no es homogéneo sino que presenta un perfil de velocidades, las oscilaciones iónicas, de manera similar a las oscilaciones electrostáticas que se consideraron en el Capítulo 5, pueden causar inestabilidades en el sistema. Nos ocuparemos aquí de investigar las propiedades de los modos iónicos para una configuración similar a la que se estudió en el Capítulo 5 (en el que se analizaron las oscilaciones electrónicas), es decir un perfil discontinuo de velocidades, ec. (5.2), en un plasma con densidad uniforme. Se supondrá además que las temperaturas θ_e y θ_i (que cumplen la condición (6.1), son uniformes en el espacio.

En estas condiciones, el operador dieléctrico del plasma es

$$(6.2) \quad \underline{\underline{\hat{\epsilon}}} = \underline{\underline{I}} + 4\pi (\underline{\underline{\hat{\kappa}}}^e + \underline{\underline{\hat{\kappa}}}^i)$$

siendo $\underline{\underline{\hat{\kappa}}}^e$ y $\underline{\underline{\hat{\kappa}}}^i$ los operadores de susceptibilidad eléctrica de los electrones y de los iones, dados, respectivamente, por las ecs. (2.58) y (2.61). En términos del operador dieléctrico, la ecuación diferencial para el potencial ϕ tiene la forma

dada por la ec. (2.67):

$$(6.3) \quad \underline{\hat{k}} \cdot \underline{\hat{\epsilon}} \cdot \underline{\hat{k}} \phi = 0$$

Si se introduce la expresión explícita del operador $\underline{\hat{\epsilon}}$ la ec. (6.3) toma la forma

$$(6.4) \quad 0 = \frac{d}{dy} \left[\frac{d\phi}{dy} \left(1 - \frac{\omega_{pi}^2}{\bar{\omega}^2 - \Omega_i^2} \right) \right] - \\ - \phi \left[k_D^2 + k_x^2 \left(1 - \frac{\omega_{pi}^2}{\bar{\omega}^2} \right) + k_z^2 \left(1 - \frac{\omega_{pi}^2}{\bar{\omega}^2 - \Omega_i^2} \right) - k_z \frac{d}{dy} \left(\frac{\Omega_i}{\bar{\omega}} \frac{\omega_{pi}^2}{\bar{\omega}^2 - \Omega_i^2} \right) \right]$$

La ec. (6.4) tiene un aspecto muy similar a la ec. (5.5), de las oscilaciones electrónicas, si se establece la correspondencia $\omega_{pi} \longleftrightarrow \omega_{pe}$, $\Omega_i \longleftrightarrow \Omega_e$. La diferencia en el signo del término proporcional a k_z se debe a que los iones giran alrededor de las líneas del campo magnético en sentido opuesto a los electrones. Esta diferencia, por supuesto, sólo se pone de manifiesto cuando hay una modulación transversal a \underline{B}_0 ($k_x \neq 0$), (y el plasma no es uniforme) y no trae novedades importantes con respecto de los modos propios del sistema. En efecto, si no hubiera otra diferencia que ésta, todos los resultados del Cap.5 para las oscilaciones electrónicas se podrían aplicar para el régimen iónico con las sustituciones $\omega_{pi} \rightarrow \omega_{pe}$; $\Omega_i \rightarrow \Omega_e$; $k_x \rightarrow -k_x$.

Mucho más importante es, en cambio, la diferencia que proviene del término proporcional a k_D^2 . Este parámetro cambia la naturaleza del problema pues permite definir un nuevo factor de escala para las velocidades:

$$(6.5) \quad v_s = \omega_{pi} / k_D$$

(v_s es la velocidad de las ondas iónicas acústicas paralelas a \underline{B}_0 , en el límite $\lambda \gg \lambda_D$). Para una configuración dada, es decir para ω_{pi} , k_D , Ω_i , $u(y)$ fijos,

el cociente

$$(6.6) \quad M = u/v_s$$

es fijo, y su valor permite clasificar al problema dentro de una serie de regímenes con diferentes propiedades.

6.2 Las condiciones de contorno para un perfil discontinuo de velocidades y la relación de dispersión.

Las condiciones de contorno sobre la discontinuidad del perfil dado por (5.2) se obtienen del mismo modo que en el punto 5.1. En $y=0$ requeriremos entonces que ϕ y

$$(6.7) \quad \frac{d\phi}{dy} \left(1 - \frac{\omega_{pi}^2}{\bar{\omega}^2 - \Omega_i^2} \right) + \phi k_z \frac{\Omega_i}{\bar{\omega}} \frac{\omega_{pi}^2}{\bar{\omega}^2 - \Omega_i^2}$$

sean continuos. En las regiones 1 ($y > 0$) y 2 ($y < 0$) se tendrán las soluciones

$$(6.8) \quad \phi_1 e^{\pm i k_{y1} y} ; \quad \phi_2 e^{\mp i k_{y2} y} ; \quad \phi_{1,2} = cte$$

donde los $k_{y1,2}$ están determinados por la relación de dispersión del respectivo semiespacio:

$$(6.9) \quad k_{y1,2} = \sqrt{-k_z^2 - (k_x^2 + k_D^2) \frac{(\bar{\omega}_{1,2}^2 - \omega_s^2(k_x))(\bar{\omega}_{1,2}^2 - \Omega_i^2)}{\bar{\omega}_{1,2}^2 (\bar{\omega}_{1,2}^2 - \omega_{pi}^2 - \Omega_i^2)}}$$

$$\text{Im} (k_{y1,2}) \geq 0$$

Al igual que en el Cap.5, se ha convenido en elegir la determinación de (6.9) correspondiente a $\text{Im} (k_{y1,2}) \geq 0$, a fin de que los signos superiores en (6.8) garanticen la convergencia de las soluciones en el infinito cuando los $k_{y1,2}$ son complejos. Cuando k_y es real, y se buscan ondas irra-

diadas, el uso del criterio de velocidad de grupo saliente determina cuáles signos se deben elegir en (6.8). En el punto 3.3 se ha mostrado que las propiedades dispersivas transversales al campo de las ondas iónicas son equivalentes (en lo que se refiere al signo relativo entre las componentes transversales a \underline{B}_0 de la velocidad de fase y de la velocidad de grupo), a aquéllas de las ondas electrónicas y por ende los criterios de elección dados en el punto 4.6, se pueden aplicar tal cual al presente caso.

Imponiendo que las soluciones (6.8) cumplan las condiciones de contorno sobre la interfase, se obtiene la relación de dispersión para las oscilaciones iónicas:

$$\begin{aligned}
 (6.10) \quad & \pm i k_{y1} \left(1 - \frac{\omega_{pi}^2}{\bar{\omega}_1^2 - \Omega_i^2} \right) + k_z \frac{\Omega_i}{\bar{\omega}_1} \frac{\omega_{pi}^2}{\bar{\omega}_1^2 - \Omega_i^2} = \\
 & = \mp i k_{y2} \left(1 - \frac{\omega_{pi}^2}{\bar{\omega}_2^2 - \Omega_i^2} \right) + k_z \frac{\Omega_i}{\bar{\omega}_2} \frac{\omega_{pi}^2}{\bar{\omega}_2^2 - \Omega_i^2}
 \end{aligned}$$

Como debía esperarse, la (6.10) es formalmente muy similar a la relación de dispersión (5.12) de los modos electrónicos. La diferencia entre ambas estriba esencialmente en las definiciones de los $k_{y1,2}$, ecs. (6.9) y (5.11), respectivamente.

Una inspección de la ec. (6.10) revela de inmediato que no se puede dar radiación ($k_{y1,2}$ reales) cuando $k_z \neq 0$. Cuando $k_z = 0$ todos los modos propios del sistema están localizados (en la dirección y) y por lo tanto serán, o inestables, o bien ondas estables de superficie.

Para determinar las raíces de la relación de dispersión (6.10) se puede utilizar el procedimiento de racionalización y reducción a forma polinomial que se ha mencionado en el punto 5.2. El polinomio que se obtiene en el presente caso es del 10° grado (5° en ω^2), al igual que en el caso electrónico. Por ese motivo no es posible, en el caso general, dar expresiones analíticas

para las frecuencias de los modos propios del sistema. Se podría pensar entonces en encarar el cómputo numérico y la tabulación de las raíces de la ec. (6.10). Por otra parte, la analogía con el problema analizado en el Cap.5. sugiere que las características más salientes del caso general se pueden inferir a partir del estudio de casos límite más simples ($k_x = 0$, $k_x \rightarrow \infty$), cuyas soluciones se pueden obtener en forma analítica. Creemos más interesante seguir esta última vía, que tiene además la ventaja de que permite lograr, gracias a las consideraciones acerca del balance energético, una interpretación física clara de las inestabilidades del sistema.

6.3 Oscilaciones iónicas para modulación longitudinal al campo magnético.

Cuando $k_x = 0$, la relación de dispersión (6.10) tiene la forma

$$(6.11) \quad k_{y1} \left(1 - \frac{\omega_{p1}^2}{\omega^2 - \Omega_1^2} \right) \pm k_{y2} \left(1 - \frac{\omega_{p2}^2}{\omega^2 - \Omega_2^2} \right) = 0$$

En la ec. (6.11) corresponde tomar el signo + para modos localizados ($\text{Im}(k_y) > 0$). Para el caso de radiación de ondas, la elección de signos se debe hacer de acuerdo con lo discutido en el punto 4.6.

La racionalización de la relación de dispersión (6.11) conduce a una ecuación bicuadrática para ω :

$$(6.12) \quad (\omega^2 - k_x^2 u^2)^2 - 2 \zeta^2 (\omega^2 + k_x^2 u^2) + \zeta^2 \Omega_i^2 = 0$$

con

$$(6.13) \quad \zeta^2 = (\omega_{p1}^2 + \Omega_1^2) k_x^2 / (2 k_x^2 + k_D^2)$$

cuyas raíces son:

$$(6.14) \quad \omega_{i,s}^2 = k_x^2 u^2 + \zeta^2 \pm \sqrt{\zeta^2 (\zeta^2 + 4 k_x^2 u^2 - \Omega_i^2)}$$

Estas raíces corresponden a una u otra elección de signos en la ec. (6.11), dependiendo del signo de $\omega_s^2(k_x) - \Omega_i^2$. En efecto, se verifica fácilmente que si

$$(6.15) \quad \Omega_i < \omega_s(k_x)$$

las raíces (6.14) corresponden a elegir el signo + en la ec. (6.11) cuando $\text{Im}(k_y) \neq 0$ (y al signo - cuando $\text{Im}(k_y) = 0$). Viceversa, si

$$(6.16) \quad \Omega_i > \omega_s(k_x)$$

las raíces (6.14) corresponden a elegir el signo - en la ec. (6.11) cuando $\text{Im}(k_y) \neq 0$ (y al signo + cuando $\text{Im}(k_y) = 0$). Por consiguiente, cuando $\Omega_i > \omega_s(k_x)$, no puede haber modos localizados, en particular, no puede haber: modos inestables (para $k_z = 0$, naturalmente.)

Por otra parte, si se analiza el signo del radicando en la expresión (6.14), se constata fácilmente que si

$$(6.17) \quad \Omega_i < \sqrt{\omega_s^2(k_x) + 4k_x^2 u^2 \left(\frac{2k_x^2 + k_D^2}{k_x^2 + k_D^2} \right)}$$

$\omega_{i,s}$ es real. De esto y de lo anterior se concluye que las únicas inestabilidades que puede tener el sistema (para $k_z = 0$) son monotónicas, tal como sucedía para el caso de oscilaciones electrónicas (ver el punto 5.3). El campo magnético tiene un efecto estabilizante, y para un valor suficientemente grande de B_0 , determinado por la condición (6.16) el sistema no puede ser inestable (para modulación paralela a B_0).

Omitiendo, para abreviar, los pormenores del análisis, discutiremos a continuación las características de los modos que surgen de la relación de dispersión (6.11). Debido a la simetría del problema, se considerarán solamente valores positivos de k_x y ω .

La rama superior ω_s (signo + en la ec. (6.14)) da origen a ondas estables de superficie (para $\Omega_i < \omega_s(k_x)$) y a ondas propagantes que no corresponden a radiación sino al caso de transparencia, análogamente a lo que ocurría en el caso electrónico (punto 5.3). Tales modos no pueden obviamente estar vinculados a inestabilidades del sistema para $k_2 \neq 0$, y por consiguiente no nos ocuparemos, en lo que sigue, de la rama superior.

La rama inferior ω_i (signo - en la ec. (6.14)) es más interesante, pues en ella aparecen (además de ondas estables de superficie) oscilaciones monotónicamente inestables y radiación de ondas. Las regiones de existencia de las varias clases de modos se pueden representar en términos de los parámetros adimensionales k , h , M , definidos por

$$k = \frac{k_x u}{\omega_{pi}} \quad h = \frac{\Omega_i}{\omega_{pi}} \quad M = \frac{u}{v_s} = \frac{k_2 u}{\omega_p}$$

como áreas en el plano (h, k) , para valores constantes de M . La línea crítica $\Omega_i = \omega_s(k_x)$ (que corresponde a la línea $\Omega_e = \omega_{pe}$ del caso electrónico) se expresa como

$$(6.18) \quad h_c = \frac{k}{\sqrt{k^2 + M^2}}$$

Las regiones de existencia de los modos se han representado en forma cualitativa en las figuras 6.1, 6.2 y 6.3, para diferentes valores de M .

Se tienen ondas de superficie en la región $h < h_c$ por encima de la línea k_3 , definida en forma implícita por la relación

$$(6.19) \quad h = \sqrt{\left(2k_3 - \frac{k_3}{\sqrt{k_3^2 + M^2}}\right)^2 - 1}$$

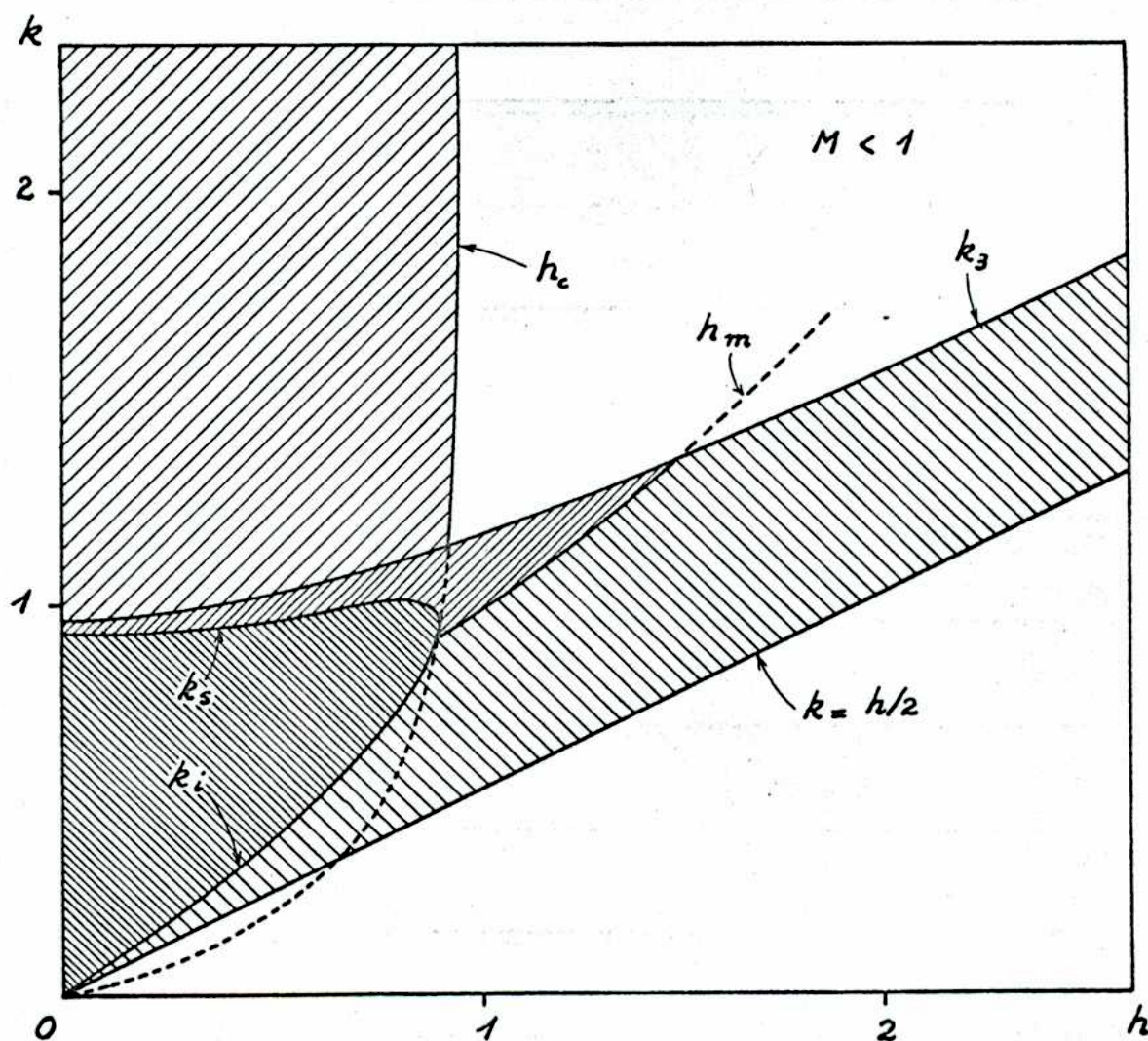


fig.6.1. Regiones de existencia de modos de la rama inferior para $k_2=0$ y $M < 1$. Los modos de radiación corresponden al área rayada limitada por k_3 , k_s , k_i y $k = h/2$. Los modos inestables corresponden al área encerrada por las líneas k_s y k_i . El área por encima de k_3 (con $h < h_c$) corresponde a ondas superficiales.

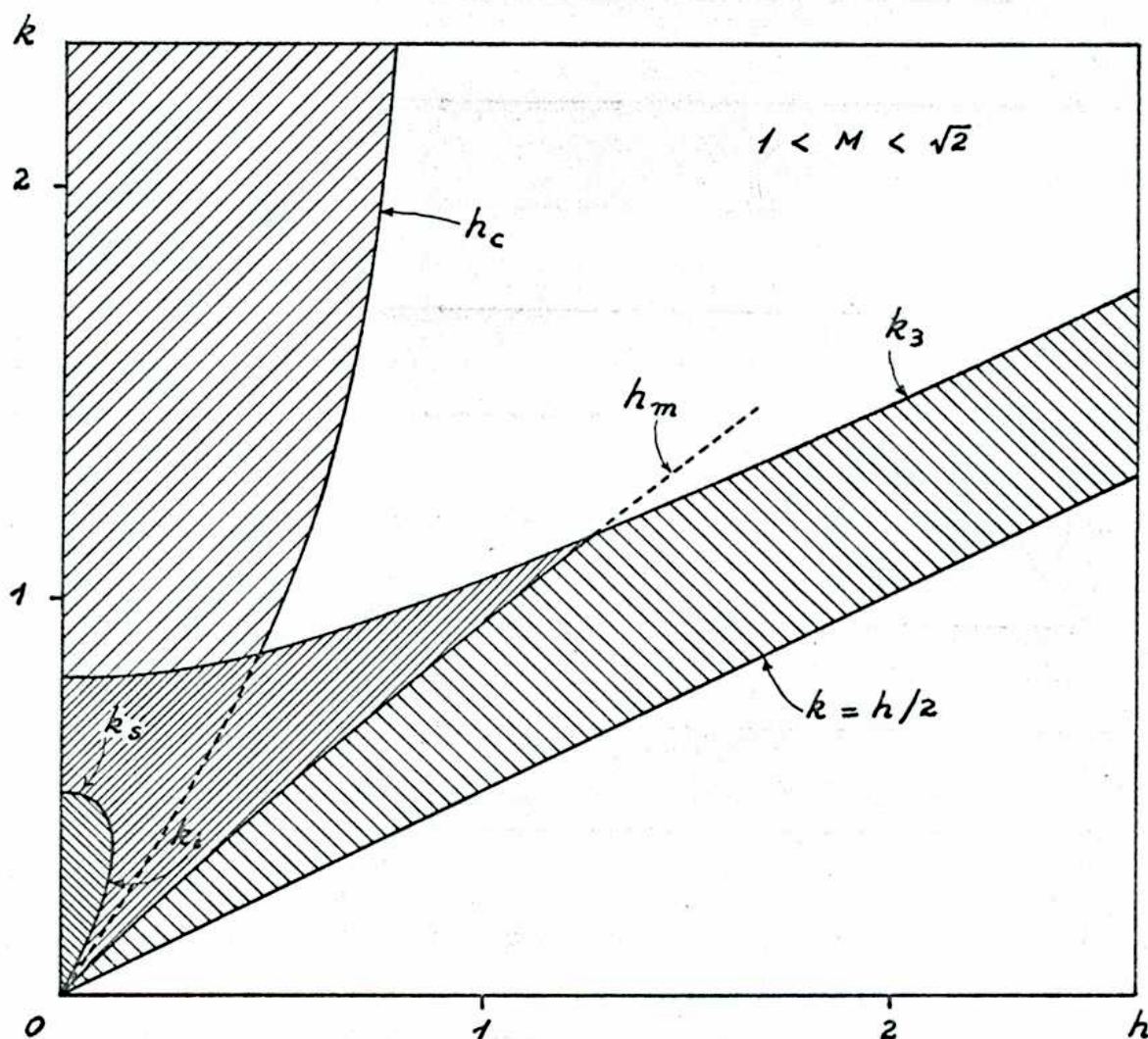


fig.6.2 Regiones de existencia de modos de la rama inferior para $k_2=0$ y $1 < M < \sqrt{2}$.

El área encerrada por las líneas k_s y k_i dadas por

$$(6.20) \quad k_{s,i}^2 = \frac{1}{2} \left\{ \left(1 + h^2 - \frac{M^2}{2} \right) \pm \sqrt{\left(1 + h^2 - \frac{M^2}{2} \right)^2 - 2h^2(1+h^2)} \right\}$$

corresponde a inestabilidad monótonica del sistema.

El intervalo de valores de k correspondientes a inestabilidad vale

$$(6.21) \quad \Delta k = \sqrt{1 - M^2/2}$$

cuando $h=0$ y se reduce al aumentar el valor del campo magnético hasta desaparecer en

$$(6.22) \quad h_{\text{ast.}}^2 = \sqrt{1 - M^2 + M^4/2} - M^2/2$$

la línea k_i toca a la línea h_c en el punto

$$(6.23) \quad k = h = \sqrt{1 - M^2}$$

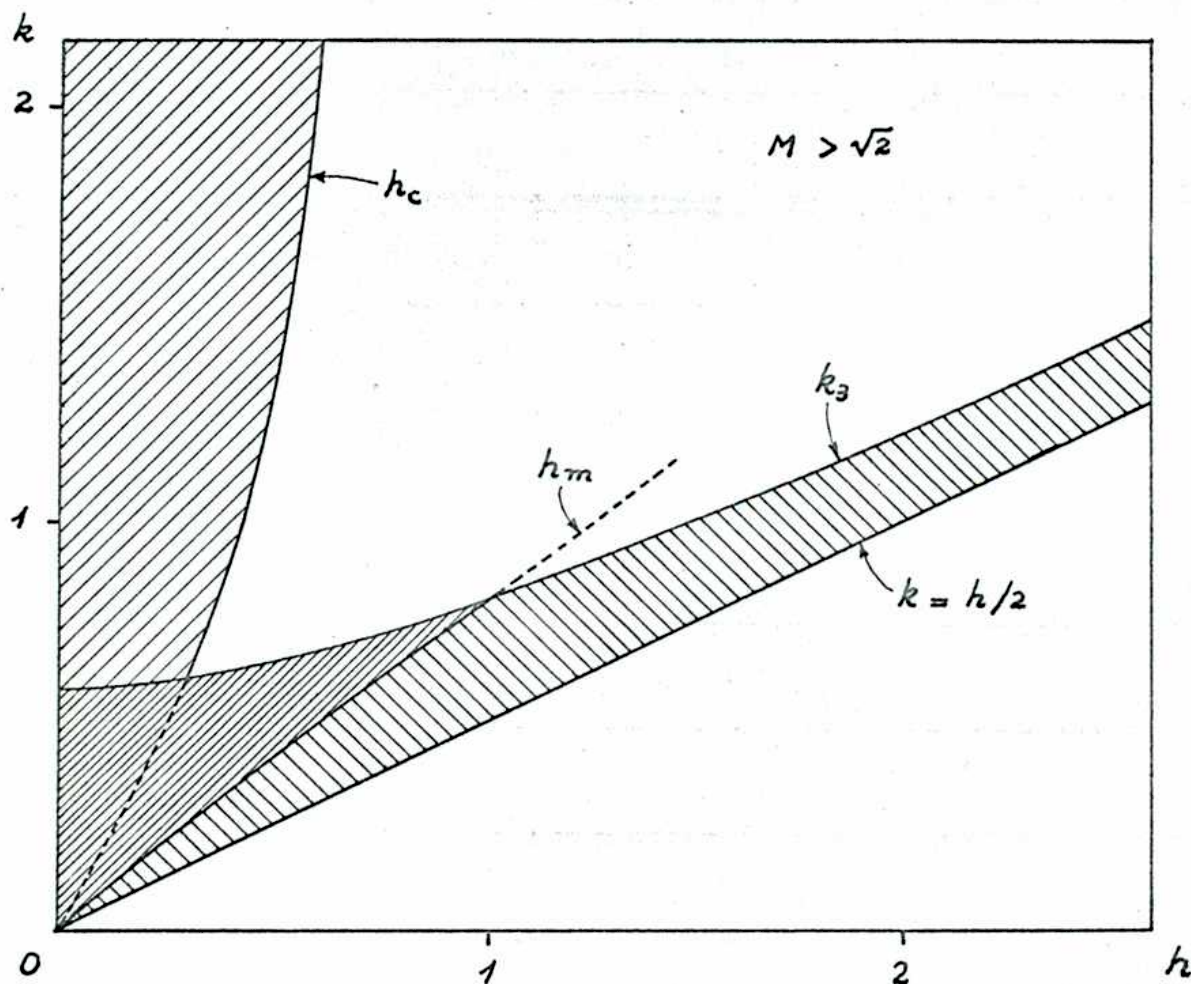


fig.6.3. Regiones de existencia de modos de la rama inferior para $k_z=0$ y $M > \sqrt{2}$.

Se ve en consecuencia, que la región de existencia de la inestabilidad monotónica se modifica sustancialmente al variar $M = u/v_s$. Para un flujo subsónico ($M < 1$), la región inestable (ver fig. 6.1) es cualitativamente similar a la que se tiene para las oscilaciones electrónicas (ver punto 5.3) y se va reduciendo a medida que crece M . Para flujo apenas supersónico ($1 < M < \sqrt{2}$) aún subsiste la inestabilidad, pero la región inestable es muy reducida, y ya no toca a la línea h_c (ver fig. 6.2). La inestabilidad desaparece cuando $M = \sqrt{2}$, y para velocidades mayores el sistema es estable respecto de modulaciones longitudinales al campo magnético.

La máxima velocidad de crecimiento de la inestabilidad tiene el valor

$$\omega_{max} = i\omega_{pi} \sqrt{\frac{1-h^4}{8}}$$

cuando $M=0$ y disminuye al crecer el valor de M .

Es interesante acotar que el criterio de estabilidad para modulaciones longitudinales, $M > \sqrt{2}$, que aquí se obtuvo, coincide con el que se tiene para los gases neutros compresibles. En la Magnetohidrodinámica incompresible también se obtiene un resultado similar, en el cual v_s es reemplazado por la velocidad de Alfvén.

El panorama de los modos de la rama inferior se completa con la radiación de ondas. Modos de este tipo aparecen en la región $h/2 < k < k_3$ (ver figs. 6.1, 6.2 y 6.3), excluyendo la región de existencia de la inestabilidad monotónica, cuando ella existe. Si ω es la frecuencia de uno de estos modos, las correspondientes $\bar{\omega}_1$, $\bar{\omega}_2$ son iguales a alguna de las frecuencias iónicas estudiadas en el punto 3.3:

$$(6.24) \quad \bar{\omega}_{\pm}^2 = \frac{1}{2} \left\{ \omega_s^2 + \Omega_i^2 \pm \sqrt{(\omega_s^2 + \Omega_i^2)^2 - 4\omega_s^2\Omega_i^2 \cos^2\theta_{1,2}} \right\}$$

$$\text{tg } \theta_{1,2} = k_{y_{1,2}} / k_x$$

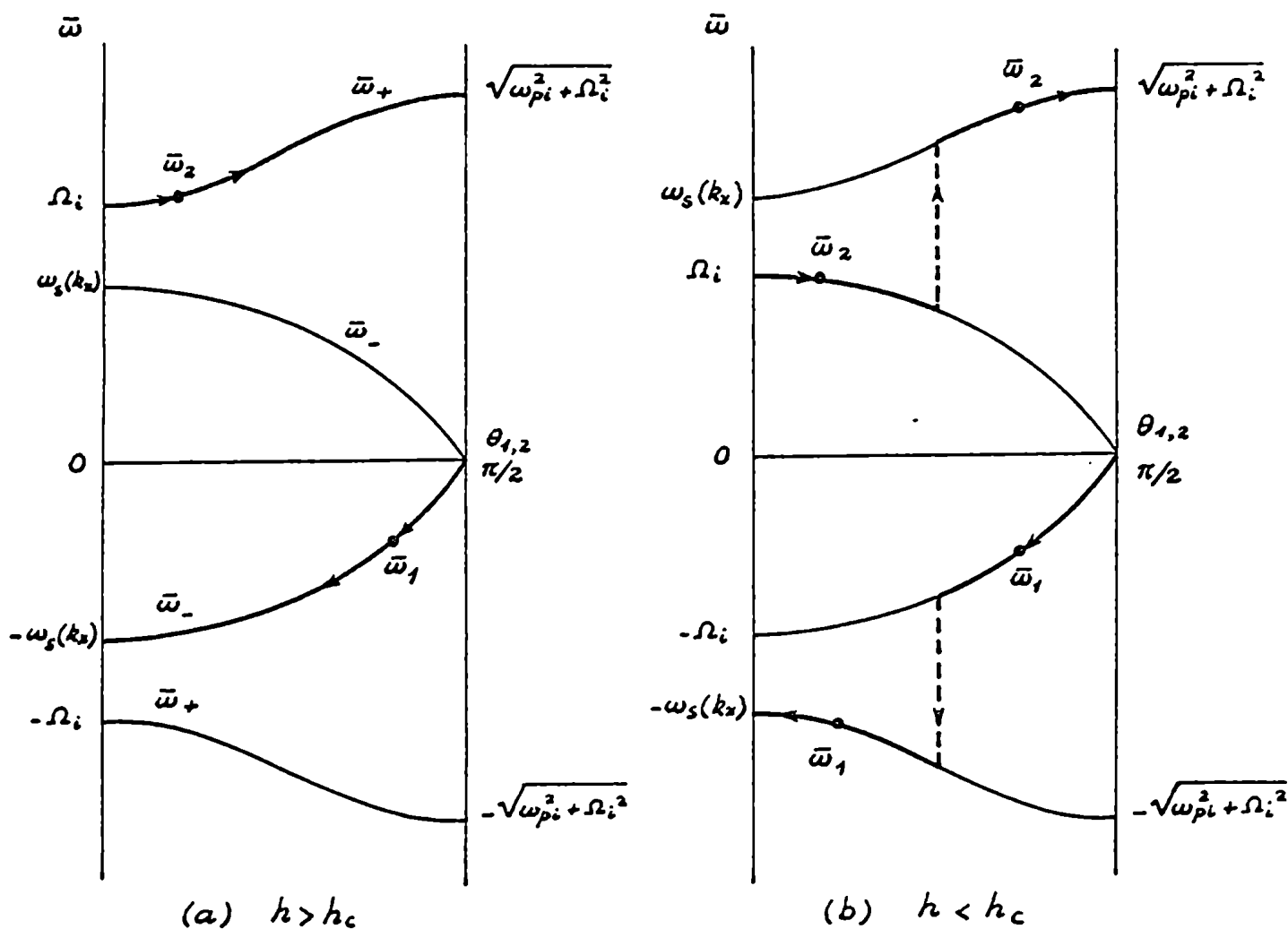


fig.6.4. Frecuencias $\bar{\omega}_1$ y $\bar{\omega}_2$ para los modos de radiación.

Sobre la línea $k = h/2$, $\bar{\omega}_1 = 0$ y $\bar{\omega}_2 = \Omega_i$, de manera que $\theta_1 = \pi/2$, $\theta_2 = 0$. Sobre la línea k_3 , en cambio, $\bar{\omega}_1 = -\omega_s(k_x)$ y $\bar{\omega}_2 = \sqrt{\omega_{pi}^2 + \Omega_i^2}$. Sobre la línea h_c , $\bar{\omega}_1 = -\omega_s(k_x)(2\sqrt{k^2 + M^2} - 1)$ y $\bar{\omega}_2 = \Omega_i$.

Se ve, por consiguiente que, si se recorre el diagrama de existencia sobre las líneas $h/h_c = \alpha > 1$, a medida que k varía desde $h/2$ a k_3 , el ángulo θ_1 varía entre $\pi/2$ y 0 , y consecuentemente, $\bar{\omega}_1$ recorre la rama

iónica inferior $\bar{\omega}_-$ de (6.24). Al mismo tiempo, θ_2 varía entre 0 y $\pi/2$, y $\bar{\omega}_2$ recorre la rama iónica superior $\bar{\omega}_+$ (ver fig. 6.4a).

En cambio, si recorremos el diagrama de existencia sobre las líneas $h/h_c = cte. < 1$, para $k = h/2$ tanto $\bar{\omega}_1$ como $\bar{\omega}_2$ están sobre la rama iónica inferior $\bar{\omega}_-$ y para $k = k_3$ ambas están sobre la rama superior $\bar{\omega}_+$ (ver fig. 6.4b). Las frecuencias $\bar{\omega}_1$ y $\bar{\omega}_2$ efectúan la transición desde una rama a la otra pasando a través del intervalo inestable.

Además de los modos que se acaban de describir, es fácil constatar que la relación de dispersión (6.11) admite otra solución, de frecuencia nula (que corresponde a tomar el signo $-$ en (6.11)), correspondiente a oscilaciones espaciales en la dirección y . Las regiones de existencia

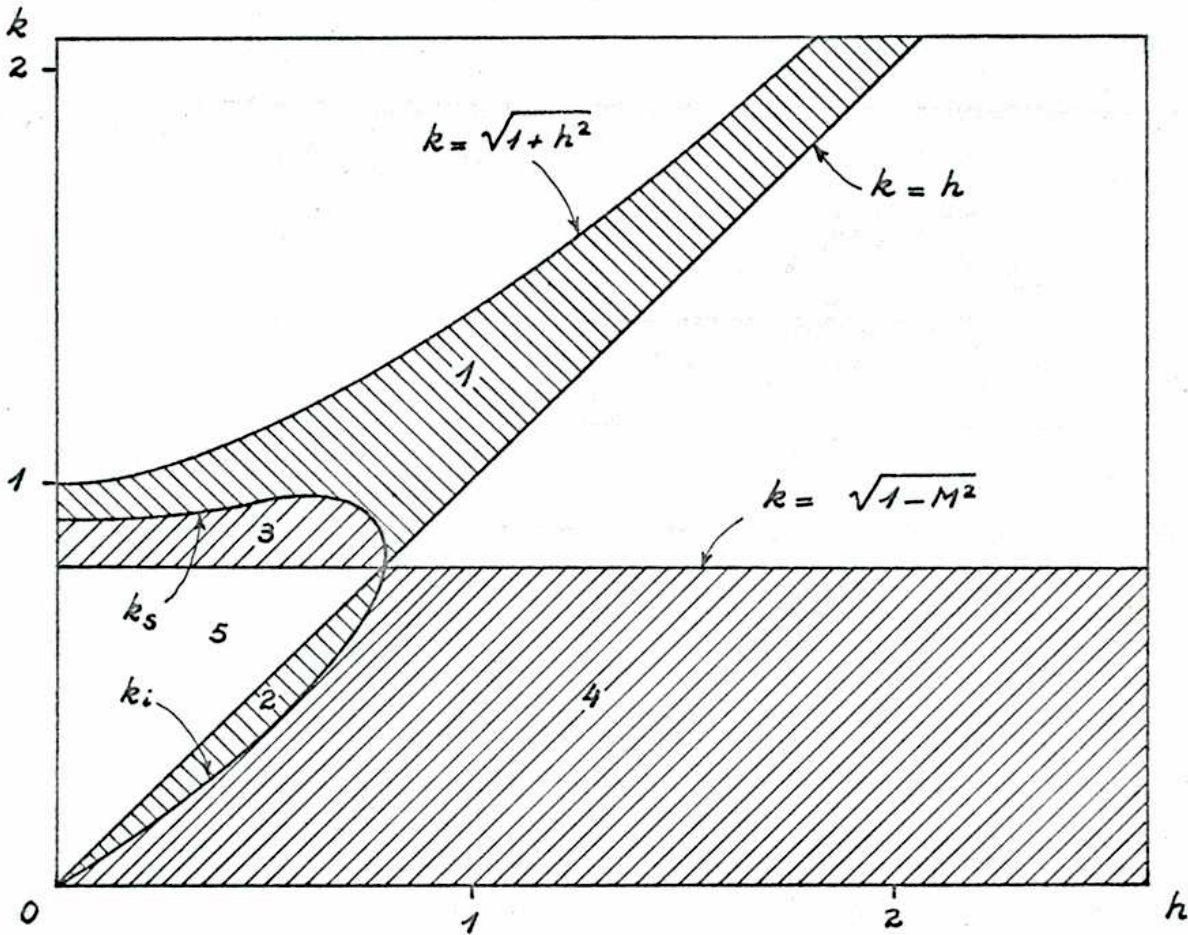


fig 6.5. Regiones de existencia del modo de frecuencia nula para $k_z = 0$, y de las inestabilidades monotónicas vinculadas a él.

de este modo se han representado con las áreas sombreadas en la fig. 6.5. En las áreas indicadas con (1) y (3) de dicha figura, $\bar{\omega}_2 = -\bar{\omega}_1 = k_x u$ y ambas corresponden a la frecuencia iónica superior $\bar{\omega}_+$. En cambio, en las áreas numeradas (2) y (4) ambas frecuencias corresponden a la rama iónica inferior $\bar{\omega}_-$, de manera análoga a lo discutido en el punto 5.5.

Se ve que al crecer M , se reducen las áreas (2) y (4), que desaparecen para $M \gg 1$. También se va reduciendo el área (3) que no existe para $M \gg 2$.

6.4 Propiedades energéticas de las oscilaciones iónicas.

Antes de pasar a discutir el efecto de una pequeña modulación transversal sobre los modos que se han discutido en el punto anterior, es conveniente comentar brevemente el aspecto energético de las oscilaciones. Procediendo del mismo modo que en el punto (4.2), se obtiene la ecuación del balance (4.14):

$$(6.25) \quad \frac{dW}{dt} = \int \frac{dy}{16\pi} \left\{ i\omega^* \underline{E} \cdot \underline{\dot{\epsilon}}^x \cdot \underline{E}^x - i\omega \underline{E}^x \cdot \underline{\dot{\epsilon}} \cdot \underline{E} - i(\omega - \omega^*) \underline{B} \cdot \underline{B}^x \right\} = -P$$

(acuá W y P están definidos en analogía al punto 4.2).

El operador asociado $\underline{\dot{\epsilon}}$ está dado por

$$(6.26) \quad \begin{aligned} \dot{\epsilon}_{xx} = & 1 - \frac{\omega_{pi}^2}{\bar{\omega}^2} - \frac{d}{dy} \left[u g \left(\frac{d}{dy} - \frac{\Omega_i}{\bar{\omega}} k_z \right) - k_z u g \left(k_z - \frac{\Omega_i}{\bar{\omega}} \frac{d}{dy} \right) \right] + \\ & + \frac{k_D^2}{k_x^2} + \frac{d}{dy} \frac{\hbar}{k_x^2} k_z + k_z \frac{\hbar}{k_x^2} \frac{d}{dy} \end{aligned}$$

$$\dot{\epsilon}_{xy} = i \left(- \frac{d}{dy} \bar{\omega} + k_z \Omega_i \right) g - i k_z \frac{\hbar}{k_x}$$

$$\dot{\epsilon}_{xz} = - \left(k_z \bar{\omega} - \frac{d}{dy} \Omega_i \right) g - \frac{d}{dy} \frac{\hbar}{k_x}$$

$$\check{\epsilon}_{yx} = -ig \left(-\bar{\omega} \frac{d}{dy} + \Omega_i k_z \right) + i \frac{h}{k_x} k_z$$

$$\check{\epsilon}_{yy} = \check{\epsilon}_{zz} = 1 - \frac{\bar{\omega}^2}{\omega^2} \frac{\omega_{pi}^2}{\bar{\omega}^2 - \Omega_i^2}$$

$$\check{\epsilon}_{yz} = \check{\epsilon}_{zy}^* = -i \frac{\Omega_i \bar{\omega}}{\omega^2} \frac{\omega_{pi}^2}{\bar{\omega}^2 - \Omega_i^2} - i h$$

$$\check{\epsilon}_{zx} = -g \left(\bar{\omega} k_z - \Omega_i \frac{d}{dy} \right) - \frac{h}{k_x} \frac{d}{dy}$$

$$g = \frac{u}{\omega^2} \frac{\omega_{pi}^2}{\bar{\omega}^2 - \Omega_i^2} \quad h = \frac{\bar{\omega} \omega_{pe}^2}{\omega^2 \Omega_e}$$

y satisface la condición (4.15) de no disipación:

$$(6.27) \quad \check{\epsilon}_{ij} = \check{\epsilon}_{ji}^* R$$

Para los modos iónicos (potenciales) del perfil discontinuo, se obtiene fácilmente de (6.25)

$$(6.28) \quad \begin{aligned} \frac{dW}{dt} &= \frac{dW_1}{dt} + \frac{dW_2}{dt} \\ &= \frac{|\phi(t)|^2}{8\pi} \operatorname{Im} \left\{ -\omega \left[\pm i k_{y1} \left(1 - \frac{\omega_{pi}^2}{\bar{\omega}_1^2 - \Omega_i^2} \right) + k_z \frac{\Omega_i}{\bar{\omega}_1} \frac{\omega_{pi}^2}{\bar{\omega}_1^2 - \Omega_i^2} \right] + \right. \\ &\quad \left. + \omega \left[\mp i k_{y2} \left(1 - \frac{\omega_{pi}^2}{\bar{\omega}_2^2 - \Omega_i^2} \right) + k_z \frac{\Omega_i}{\bar{\omega}_2} \frac{\omega_{pi}^2}{\bar{\omega}_2^2 - \Omega_i^2} \right] \right\} \\ &= -P \end{aligned}$$

En la ec. (6.28), los dobles signos están en correspondencia con los dobles signos de las soluciones (6.8). Cuando no actúan los agentes exteriores, la ec. (6.28) da

$$(6.29) \quad \frac{dW}{dt} = \frac{dW_1}{dt} + \frac{dW_2}{dt} = 0$$

que expresa la conservación de energía para el plasma. Si se comparan las ecs. (6.10) y (6.28), se ve que la relación de dispersión garantiza la conservación de la energía para los modos propios. Dada la analogía de estos resultados con los obtenidos en el Cap.4 relativos a las oscilaciones electrónicas se concluye que se pueden aplicar aquí consideraciones similares, respecto de las propiedades energéticas de las oscilaciones estables de superficie, la radiación de ondas y las inestabilidades, a las que oportunamente se hicieran en los puntos 4.3, 4.4, 4.6 y 4.7, a los cuales nos remitimos. En particular, la interpretación energética de la vinculación entre la radiación de ondas y las inestabilidades del sistema tendrá validez también en el presente caso.

6.5 Sobreestabilidad de las oscilaciones iónicas.

La relación de dispersión (6.10) no admite modos radiantes ($k_{y,2}$ real) cuando hay modulación transversal ($k_z \neq 0$). Si se parte de un modo radiante y se incrementa k_z a partir de cero, la perturbación se localiza alrededor de la interfase y correspondientemente se da la sobreestabilidad (o amortiguamiento) de la oscilación.

El comportamiento de los modos propios para k_z pequeño se puede estudiar del mismo modo que en el punto (5.4). Si se pone

$$\bar{\omega}_{1,2}(k_2) = \bar{\omega}'_{1,2} = \bar{\omega}_{1,2} + i \delta\omega \quad (6.30)$$

$$k_{y1,2}(k_2) = k'_{y1,2} = k_{y1,2} + i \delta k_{y1,2}$$

siendo $\bar{\omega}_{1,2}$ y $k_{y1,2}$ los valores correspondientes al caso $k_2 = 0$ se obtiene fácilmente desarrollando hasta el primer orden, que para k_2 pequeño:

$$\begin{aligned} & \mp \left[k_{y1} \frac{2 \delta\omega \bar{\omega}_1 \omega_{pi}^2}{(\bar{\omega}_1^2 - \Omega_i^2)^2} + \delta k_{y1} \left(1 - \frac{\omega_{pi}^2}{\bar{\omega}_1^2 - \Omega_i^2} \right) \right] + k_2 \frac{\Omega_i}{\bar{\omega}_1} \frac{\omega_{pi}^2}{\bar{\omega}_1^2 - \Omega_i^2} = \\ (6.31) \quad & = \pm \left[k_{y2} \frac{2 \delta\omega \bar{\omega}_2 \omega_{pi}^2}{(\bar{\omega}_2^2 - \Omega_i^2)^2} + \delta k_{y2} \left(1 - \frac{\omega_{pi}^2}{\bar{\omega}_2^2 - \Omega_i^2} \right) \right] + k_2 \frac{\Omega_i}{\bar{\omega}_2} \frac{\omega_{pi}^2}{\bar{\omega}_2^2 - \Omega_i^2} \end{aligned}$$

La relación entre $\delta k_{y1,2}$ y $\delta\omega$ se obtiene de la relación de dispersión del correspondiente semiespacio y resulta:

$$(6.32) \quad k_{y1,2} \delta k_{y1,2} \left(1 - \frac{\omega_{pi}^2}{\bar{\omega}_{1,2}^2 - \Omega_i^2} \right) = - \frac{\delta\omega}{\bar{\omega}_{1,2}} \left[k_x^2 \frac{\omega_{pi}^2}{\bar{\omega}_{1,2}^2} + k_{y1,2}^2 \frac{\omega_{pi}^2 \bar{\omega}_{1,2}^2}{(\bar{\omega}_{1,2}^2 - \Omega_i^2)^2} \right]$$

Sustituyendo en la ec. (6.31) los valores de $k_{y1,2}$ dados por la ec. (6.32) resulta

$$\begin{aligned} & \delta\omega \left\{ \mp \frac{k_{y1}}{\bar{\omega}_1 (\bar{\omega}_1^2 - \Omega_i^2)} \left[\frac{\omega_{pi}^2(k_x) (\bar{\omega}_1^2 - \omega_{pi}^2 - \Omega_i^2)}{\bar{\omega}_1^2 - \omega_{pi}^2(k_x)} + \frac{\omega_{pi}^2 \bar{\omega}_1^2}{\bar{\omega}_1^2 - \Omega_i^2} \right] \mp \right. \\ (6.33) \quad & \cdot \left. \mp \frac{k_{y2}}{\bar{\omega}_2 (\bar{\omega}_2^2 - \Omega_i^2)} \left[\frac{\omega_{pi}^2(k_x) (\bar{\omega}_2^2 - \omega_{pi}^2 - \Omega_i^2)}{\bar{\omega}_2^2 - \omega_{pi}^2(k_x)} + \frac{\omega_{pi}^2 \bar{\omega}_2^2}{\bar{\omega}_2^2 - \Omega_i^2} \right] \right\} = \\ & = - k_x \left[\frac{\Omega_i}{\bar{\omega}_1} \frac{\omega_{pi}^2}{\bar{\omega}_1^2 - \Omega_i^2} - \frac{\Omega_i}{\bar{\omega}_2} \frac{\omega_{pi}^2}{\bar{\omega}_2^2 - \Omega_i^2} \right] \end{aligned}$$

En las expresiones (6.31) y (6.33) los dobles signos corresponden a los dobles signos de las soluciones (6.2).

Se ve por consiguiente que si se ha partido de un modo correspondiente a radiación, $\delta\omega$ y $\delta ky_{1,2}$ resultan reales, confirmándose lo adelantado. El análisis de los signos de los coeficientes de $\delta\omega$ y $\delta ky_{1,2}$ en las ecs. (6.31) a (6.33) es algo tedioso, aunque no entraña mayores dificultades, por lo que nos contentaremos con mencionar los resultados. Se encuentra que hay una línea crítica h_m , dada por

$$(6.34) \quad h_m = k \sqrt{\frac{8k^2 - 3 + 4M^2}{5k^2 + M^2}}$$

que divide la región de existencia de los modos radiantes en dos subregiones (Esta línea se encuentra siempre por encima de la línea crítica $k = h/2$, y cruza la línea h_c en $k = \sqrt{1 - M^2}$, ver figs. 6.1, 6.2 y 6.3).

Los modos de la subregión inferior ($h > h_m$) se localizan y se tornan sobreestables cuando $k_2 < 0$, viceversa, cuando $k_2 > 0$, se tornan localizados y amortiguados. La situación se invierte para los modos de la subregión superior ($h < h_m$), que resultan ser sobreestables y localizados para $k_2 > 0$, y amortiguados para $k_2 < 0$ (ver figs. 6.1, 6.2 y 6.3).

Se ve que los bordes k_i , k_s , k_3 y $h/2$ de las regiones de existencia no sufren modificaciones al primer orden en k_2 , transformándose en los bordes de las regiones sobreestables.

En las figs. (6.6 a 6.11) se han trazado, en forma cualitativa, el aspecto de las regiones de existencia de los modos inestables (sobreestables y monotónicamente inestables) para k_2 pequeño y para distintos regímenes ($M < 1$, $1 < M < \sqrt{2}$, $M > \sqrt{2}$).

6.6 Inestabilidades monotónicas en presencia de una pequeña modulación transversal.

Si se admiten modulaciones transversales ($k_z \neq 0$) el panorama de las inestabilidades monotónicas es sustancialmente diferente del que se tiene cuando $k_z = 0$, debido a que se produce localización del modo de frecuencia nula discutido en el punto 6.4, lo cual trae aparejada la aparición de una nueva inestabilidad. Las regiones en que ésta se desarrolla se pueden determinar procediendo en forma análoga al punto anterior. Introduciremos al efecto las notaciones

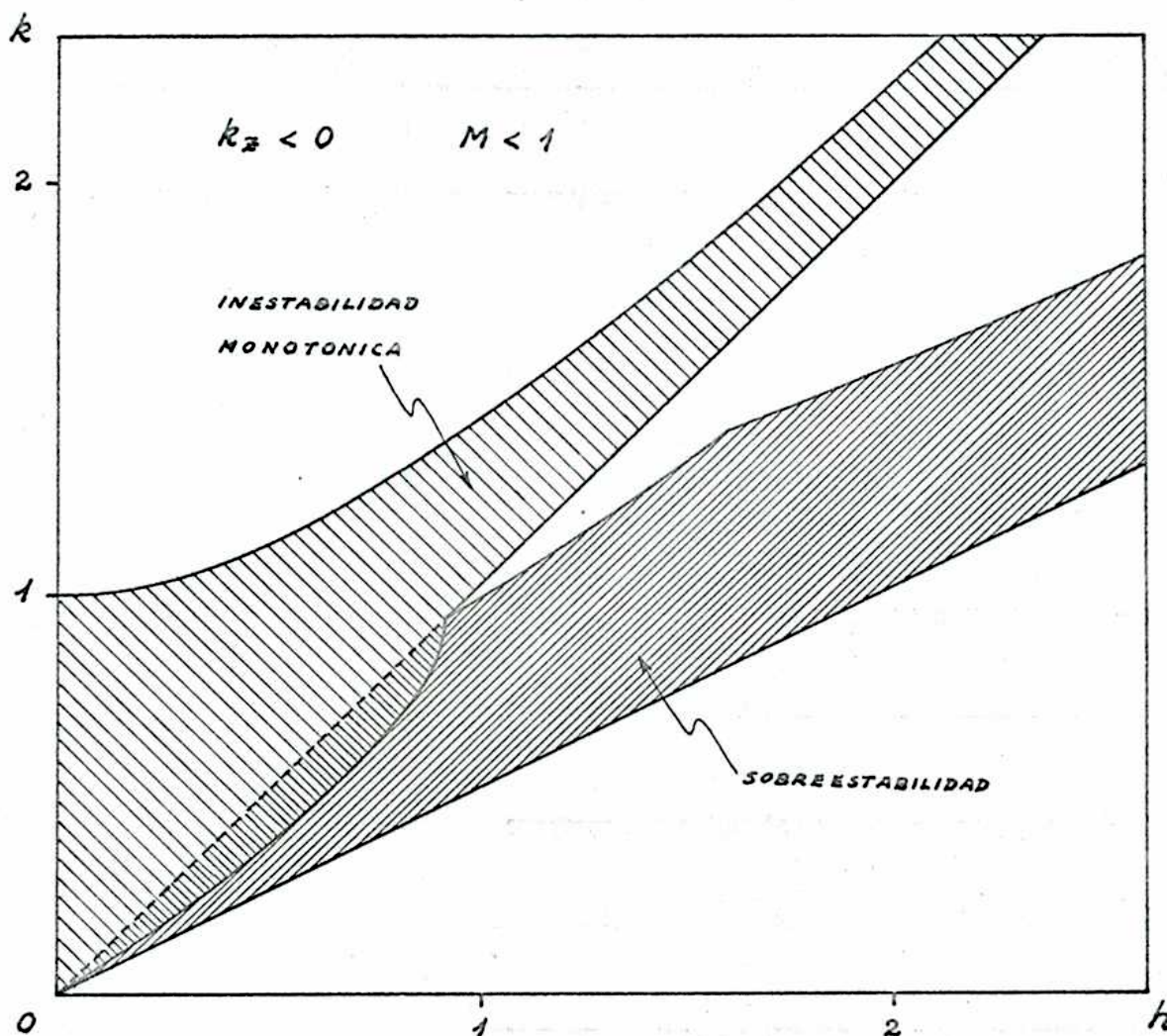


fig.6.6. Regiones de existencia de los modos inestables para k_z negativo y pequeño, cuando $M < 1$.

$$\bar{\omega} = \bar{\omega}_2 = -\bar{\omega}_1 = k_x u$$

$$(6.35) \quad k_y = k_{y1} = k_{y2}$$

$$\delta k_y = \delta k_{y1} = -\delta k_{y2}$$

De las ecs. (6.10) y (6.32) se obtiene entonces, desarrollando al orden más bajo en $\delta\omega$, δk_y y k_z :

$$(6.36) \quad \pm \left[2 k_y \frac{\delta\omega \bar{\omega} \omega_{pi}^2}{(\bar{\omega}^2 - \Omega_i^2)^2} - \delta k_y \left(1 - \frac{\omega_{pi}^2}{\bar{\omega}^2 - \Omega_i^2} \right) \right] = k_z \frac{\Omega_i}{\bar{\omega}} \frac{\omega_{pi}^2}{\bar{\omega}^2 - \Omega_i^2}$$

y

$$(6.37) \quad k_y \delta k_y \left(1 - \frac{\omega_{pi}^2}{\bar{\omega}^2 - \Omega_i^2} \right) = \frac{\delta\omega}{\bar{\omega}} \left[k_x^2 \frac{\omega_{pi}^2}{\bar{\omega}^2} + k_y^2 \frac{\omega_{pi}^2 \bar{\omega}^2}{(\bar{\omega}^2 - \Omega_i^2)^2} \right]$$

En la ec. (6.36), el signo \pm se corresponde con el doble signo de k_{y2} en (6.8). Sustituyendo la expresión (6.37) para δk_y en la ec. (6.36) resulta

$$(6.38) \quad \pm \delta\omega k_y \left[\frac{\omega_s^2(k_x)(\bar{\omega}^2 - \omega_{pi}^2 - \Omega_i^2)}{\bar{\omega}^2 - \omega_s^2(k_x)} + \frac{\omega_{pi}^2 \bar{\omega}^2}{\bar{\omega}^2 - \Omega_i^2} \right] = -k_z \Omega_i \omega_{pi}^2$$

Resulta de las relaciones (6.37) y (6.38) que la localización y la inestabilidad a ella vinculada aparece (omitimos por brevedad los detalles del análisis de signos de los coeficientes de $\delta\omega$, δk_y y k_z), para valores positivos de k_z , en las áreas indicadas con (3) y (4) en la fig. 6.5, y para valores negativos de k_z en las áreas indicadas con (1) y (2).

A estas nuevas inestabilidades vienen a sumarse las inestabilidades que surgen, tanto para valores positivos como negativos de k_z , a partir de la inestabilidad monotónica ya presente cuando $k_z = 0$ (ver el punto 6.3).

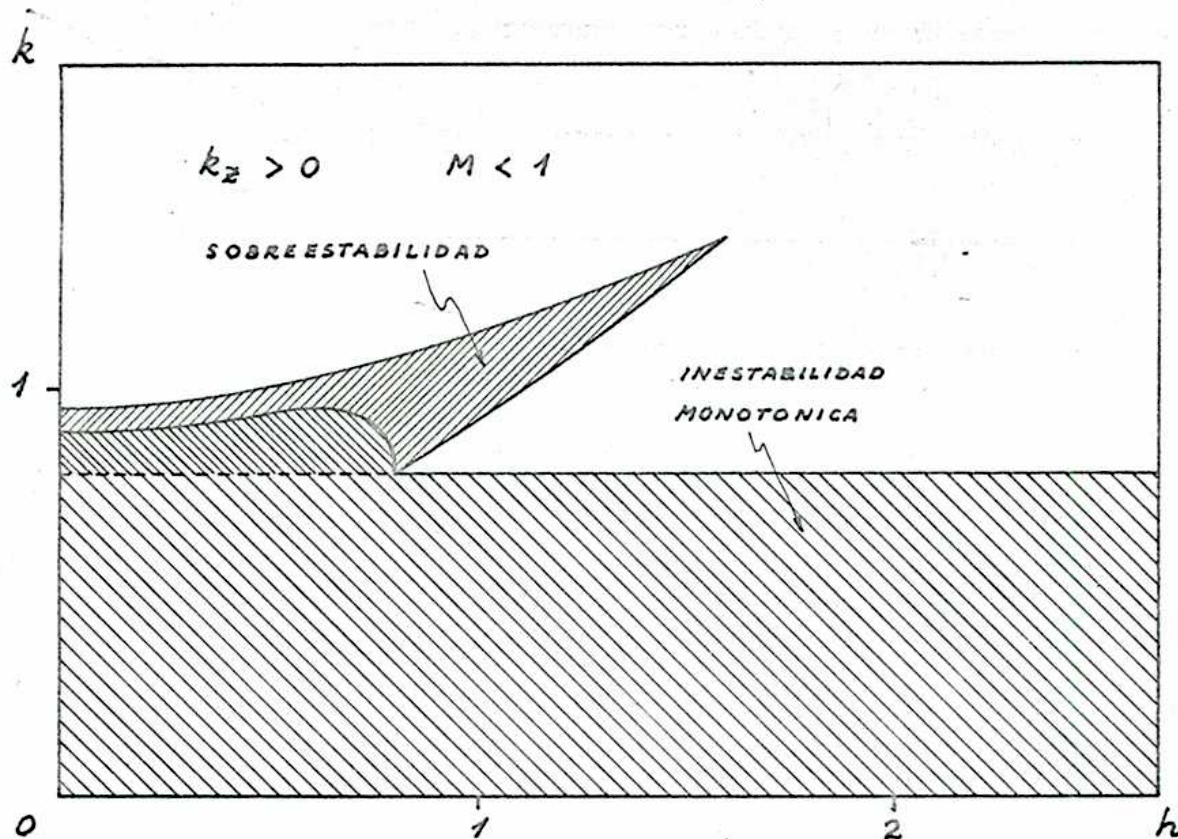


fig.6.7. Regiones de existencia de los modos inestables para k_z positivo y pequeño, cuando $M < 1$.

En consecuencia, la situación respecto de las inestabilidades monotónicas cuando k_z es pequeño se puede resumir del modo siguiente, refiriéndonos a la fig. (6.5):

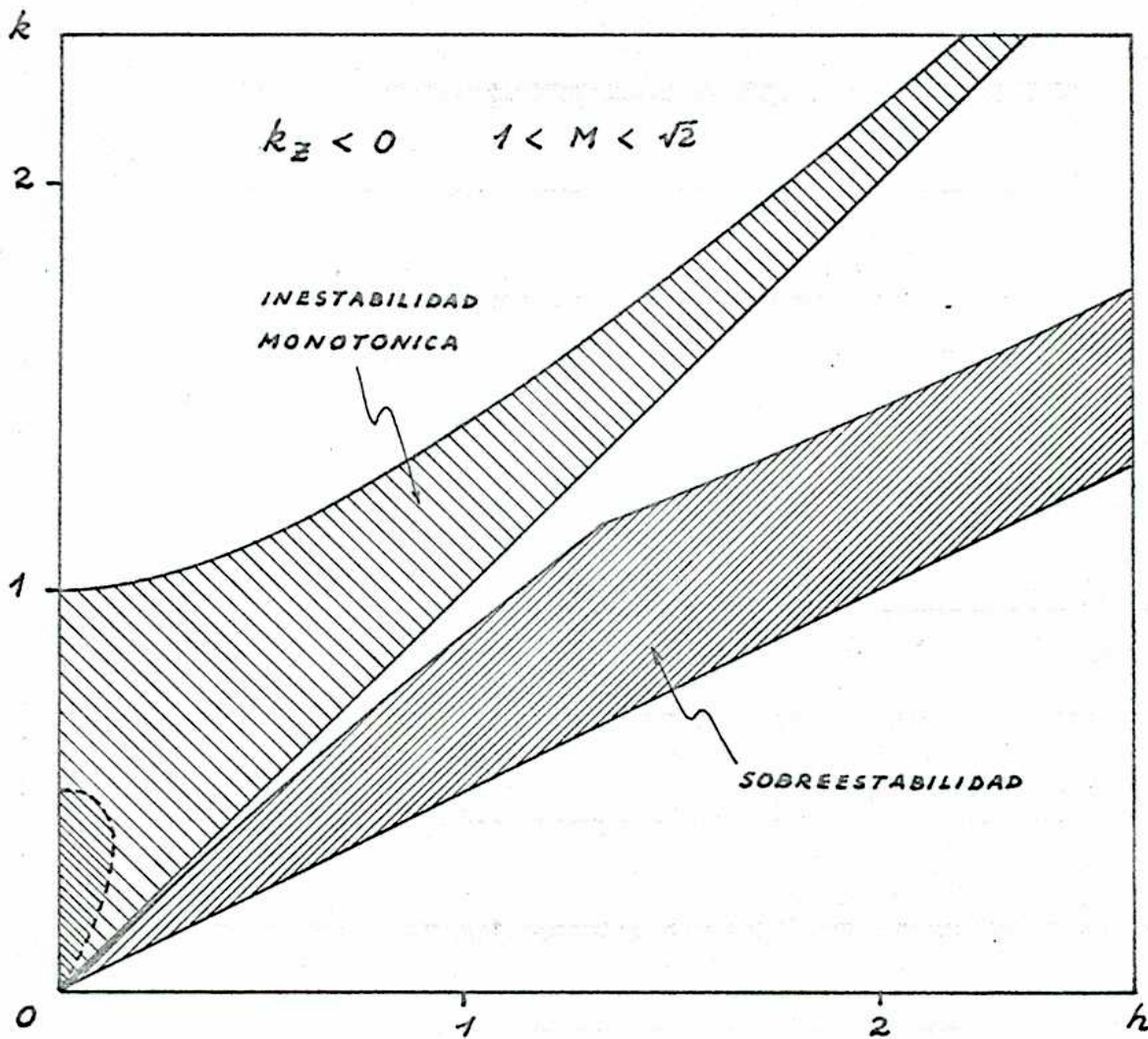


fig.6.8. Regiones de existencia de los modos inestables para k_z negativo y $1 < M < \sqrt{2}$.

- (i) Cuando k_z es positivo, hay inestabilidad en las áreas marcadas con (2), (4) y (5) (una raíz), y en el área (3) (dos raíces).
- (ii) Cuando k_z es negativo, hay inestabilidad en las áreas identificadas con (1), (3) y (5) (una raíz) y en el área (2) (dos raíces).

(iii) Los bordes de las regiones de existencia del modo de frecuencia nula ($k = \sqrt{1+h^2}$, $k=h$, $k = \sqrt{1-M^2}$) y de la inestabilidad monótonica para modulación longitudinal (k_i , k_s) no sufren modificaciones al primer orden en k_2 , y pasan a ser los bordes de las regiones inestables.

Las regiones de existencia de los modos inestables y sobreestables, para k_2 pequeño, se han representado en las figs. (6.6) a (6.11), en forma cualitativa, para valores de M correspondientes a los tres regímenes, mencionados en

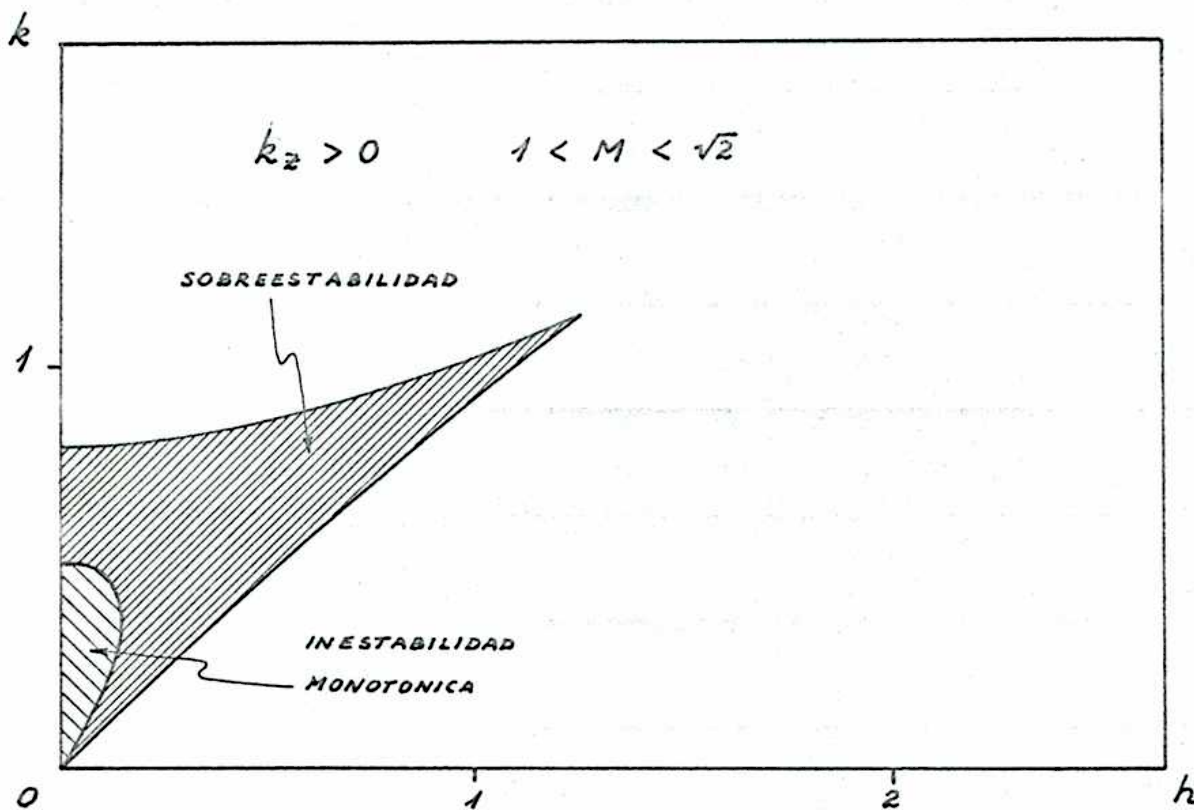


fig.6.9. Regiones de existencia de los modos inestables, para k_2 positivo y $1 < M < \sqrt{2}$.

el punto 6.3: $M < 1$; $1 < M < \sqrt{2}$ y $M > \sqrt{2}$. Se ve que, a medida que aumenta M , la región de existencia de la inestabilidad monótona para $k_z > 0$ se reduce, para desaparecer finalmente cuando $M \geq \sqrt{2}$. Correspondientemente, se incrementa la región inestable respecto de k_z negativos.

6.7 Conclusiones.

De lo expuesto precedentemente se ve que el problema de la estabilidad de las oscilaciones iónicas de un perfil discontinuo de velocidades presenta aspectos similares al problema de las oscilaciones electrónicas, discutidas en el Cap.5, pese a las diferencias físicas entre los dos regímenes.

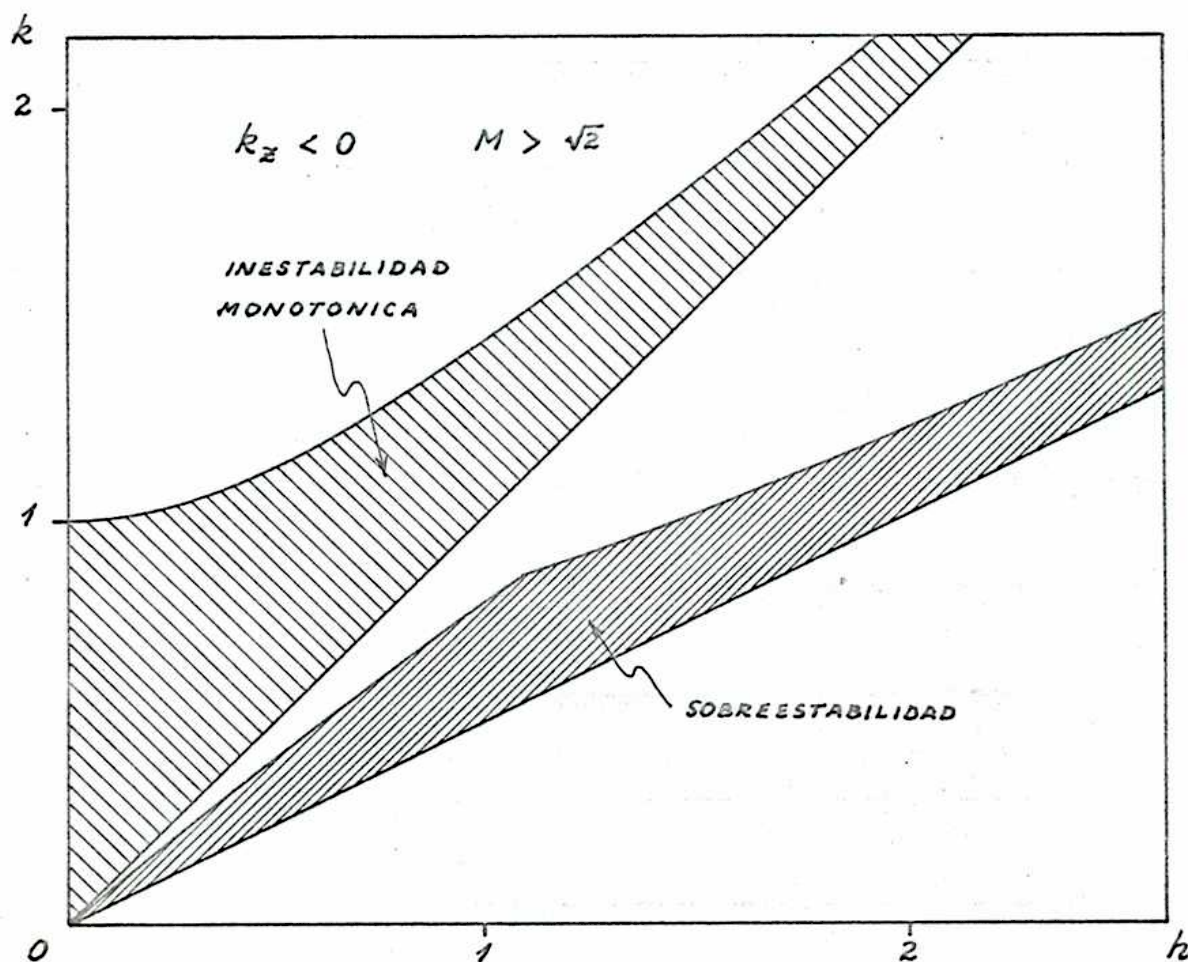


fig.6.10. Regiones de existencia de los modos inestables para k_z negativo y $M > \sqrt{2}$.

v el diferente rango de frecuencias involucradas. En particular, en el caso de flujo subsónico ($M < 1$), el aspecto de los diagramas de existencia de los modos inestables es muy similar, presentando la misma topología, salvo el intercambio del signo de k_z , como se puede ver comparando las figs. (5.7) y (5.8) con las figs. (6.6) y (6.7). Esta diferencia

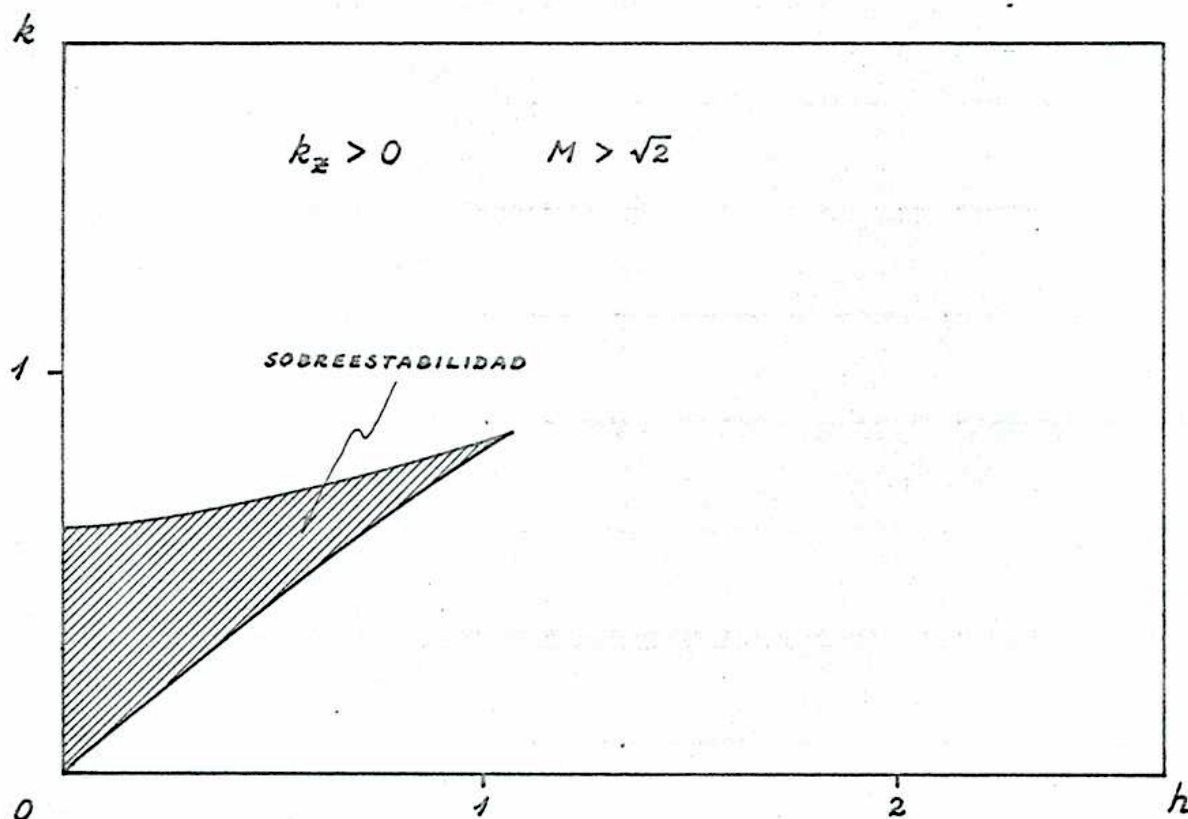


fig.6.11. Regiones de existencia de los modos inestables para k_z positivo y $M > \sqrt{2}$.

de comportamiento respecto del signo de k_z se debe, naturalmente, al diferente sentido de giro de iones y electrones alrededor de las líneas del campo magnético.

La similitud observada se puede comprender en base a la interpretación energética de las inestabilidades. Las inestabilidades localizadas que surgen en este tipo de problemas se

deben, en efecto, al acoplamiento de oscilaciones de energía negativa con oscilaciones de energía positiva (véase el punto 4.7), que permite bajo ciertas circunstancias una transferencia neta de energía de una región a otra. Cuando la energía transferida queda localizada, es decir, cuando no se dan condiciones de propagación, se genera la inestabilidad. La posibilidad del acoplamiento de modos de energía de diferente signo, que es condición *sine qua non* para la existencia de inestabilidades del tipo estudiado, depende, en última instancia, de una condición cinemática:

$$(6.39) \quad \text{Sig}(\bar{\omega}_1) \neq \text{Sig}(\bar{\omega}_2)$$

$$\bar{\omega}_1 = \omega - k_x u \quad \bar{\omega}_2 = \omega + k_x u$$

Esta circunstancia, sumada a la similitud de las propiedades dispersivas transversales (ver Cap.3) permite entender las analogías apuntadas entre el caso electrónico y el caso iónico, a la vez que permite prever que algunas de las características discutidas en los problemas específicos que aquí se han estudiado deben necesariamente estar presentes en problemas de la misma familia, aún en regímenes físicamente diferentes.

6.9 Posibles conexiones con resultados experimentales.

Es interesante cotejar los resultados experimentales conocidos acerca de las oscilaciones en plasmas, en presencia de gradientes de velocidad, con los resultados del análisis teórico precedente. D'Angelo y von Goeler^(2,3) realizaron una serie de experimentos con plasmas de Cesio en la máquina Q3, en los que estudiaron situaciones de gradientes

de velocidad. El dispositivo experimental se ha esquematizado en la fig. 6.12.

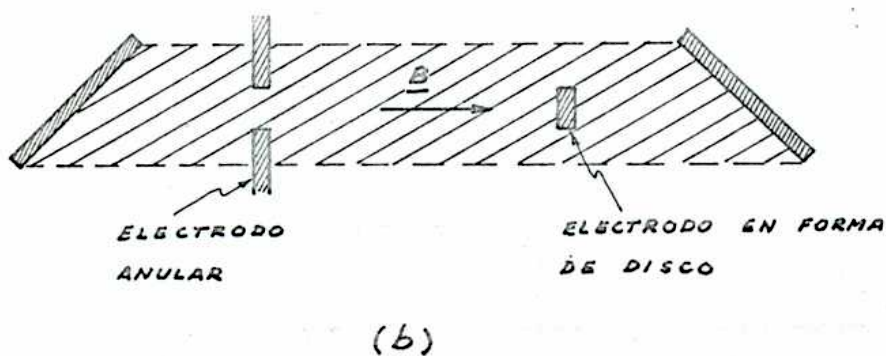
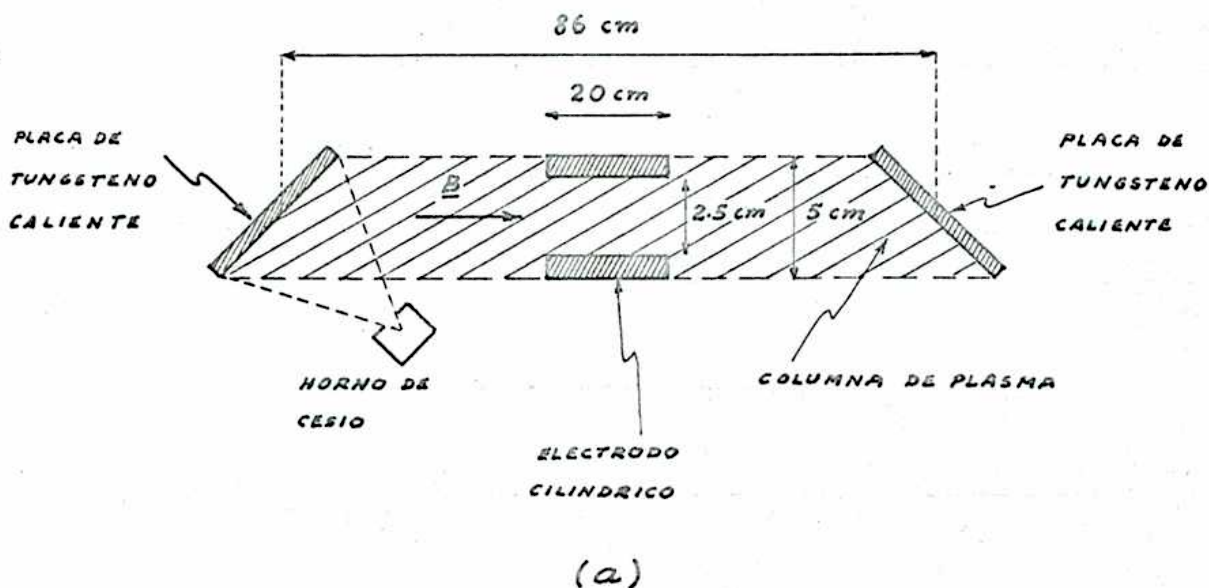


fig.6.12. Esquema de los dispositivos utilizados en los experimentos de D'Angelo y Von Goeler.

En la máquina Q3 el plasma se produce haciendo incidir un haz atómico de Cesio, proveniente de un horno, sobre una placa de tungsteno caliente, y forma una columna cilíndrica confinada en la dirección radial por un campo magnético externo cuya intensidad podía graduarse hasta aproximadamente

15 kG. La densidad del plasma así producido estaba en el rango

$$10^{11} \text{ cm}^{-3} \leq n \leq 8 \times 10^{11} \text{ cm}^{-3}$$

El gradiente de velocidades se producía polarizando negativamente (respecto de las placas de tungsteno) a electrodos sumergidos en la columna. Debido al intenso campo magnético, la corriente de iones se dirige a lo largo de las líneas del campo. De esta manera, con el electrodo cilíndrico de la fig. 6.12a se producía un movimiento relativo entre la capa exterior de la columna y la capa interior, en reposo. Análogamente, polarizando ambos electrodos en el dispositivo esquematizado en la fig. 6.12b se conseguía un movimiento relativo entre la capa interior y la exterior, esta vez ambas en movimiento.

La velocidad relativa no fue determinada, pero D'Angelo y von Goeler estimaron que es del orden de magnitud de la velocidad térmica de los iones.

En los experimentos con el electrodo cilíndrico de la fig. 6.12a, se observó que se producía una inestabilidad no bien la polarización del electrodo era suficiente como para comenzar a extraer corriente de iones, y paralelamente se establecían oscilaciones de baja frecuencia. Se observaron dos modos, de frecuencias

$$(6.40) \quad \nu_1 \approx 1.8 \text{ kc/s} \quad , \quad \nu_2 \approx 3.6 \text{ kc/s}$$

Se investigó si ν_1 y ν_2 dependían de la polarización del electrodo, con resultado negativo. No se menciona en la ref.(3) si ν_1 y ν_2 dependían o no del valor del campo magnético.

En el trabajo que comentamos, D'Angelo y V. Goeler no mencionan la temperatura del plasma, pero es razonable estimar, en base a experimentos similares, que

$$T_e \approx T_i \approx 2.000 \text{ a } 2.500 \text{ } ^\circ K$$

De los datos de densidad, temperatura y campo magnético (3 a 5 kG) es posible estimar que

$$\begin{aligned}
 \beta &\sim 10^{-4} \\
 v_{te} &\sim 3 \times 10^7 \text{ cm seg}^{-1} \\
 v_{ti} &\sim 5 \times 10^4 \text{ cm seg}^{-1} \sim u \\
 (6.41) \quad \omega_{pi} &\sim 3 \times 10^7 \text{ seg}^{-1} \\
 \Omega_i &\sim 2.2 \times 10^5 \text{ seg}^{-1} \text{ (a 3 kG)} \\
 k_D &\sim 10^{-4} \text{ cm}
 \end{aligned}$$

Si se supone que $\lambda_x \sim 23 \text{ cm}$ (longitud de la columna de plasma a cada lado del electrodo), resulta

$$\omega_s(k_x) \sim 1.5 \times 10^4 \text{ seg}^{-1}$$

Con los valores (6.41) es posible estimar los parámetros h , k y M :

$$\begin{aligned}
 h &= \Omega_i / \omega_{pi} \sim 10^{-2} \\
 (6.42) \quad k &= k_x u / \omega_{pi} \sim 2 \times 10^{-5} \text{ (} \ll h \text{)} \\
 M &\lesssim 1
 \end{aligned}$$

Si se examinan los diagramas de existencia (fig. 6.6 a 6.11) de los modos inestables, se ve que para los valores (6.42) de h y k sólo puede haber inestabilidad si $M < 1$ (lo cual es compatible con el valor estimado por D'Angelo para u), y se trataría de la inestabilidad

monotónica que surge, para $k_x > 0$, a partir del modo de frecuencia nula (ver el punto 6.6). Esta inestabilidad surge no bien la velocidad relativa es diferente de cero, lo que concuerda con la observación experimental de que, tan pronto se polariza el electrodo de modo de tener corriente de iones, se manifiesta la inestabilidad. En el sistema de referencia del laboratorio, la frecuencia (nula) de los modos está afectada por un corrimiento Doppler dado por $\sim k_x u$ con lo cual la frecuencia observada sería

$$(6.43) \quad \omega \sim k_x u \sim M k_x v_s \lesssim \omega_s(k_x)$$

lo cual da

$$(6.44) \quad v \lesssim 2.3 \text{ kc/seg}$$

Lo que concuerda aceptablemente, en orden de magnitud, con una de las frecuencias medidas (6.40). Si se admite que además del modo con $\lambda_x \approx 23 \text{ cm}$ está presente también el modo (inestable) con $\lambda'_x = \lambda_x/2$ ($\approx 11.5 \text{ cm}$) se obtendría una segunda frecuencia

$$(6.45) \quad v' \lesssim 4.6 \text{ kc/seg}$$

de valor doble al de la primera, en acuerdo cualitativo con lo observado.

Los resultados de los experimentos con el dispositivo de la fig. 6.12b tienden a corroborar esta interpretación. Con este dispositivo es de esperar una velocidad relativa mayor, aunque siempre del orden de v_{ti} . Se observó en estas experiencias que, al igual que en el caso anterior, la inestabilidad surgía tan pronto como la polarización de los electrodos permitía establecer corrientes de iones. También se observaron dos frecuencias, en la relación aproximada 1:2 (2.2 kc/s y 3.4-4.6 kc/s). En estos experimentos se analizó la forma de las ondas y se obtuvieron los siguientes resultados:

- (i) Las ondas son progresivas en sentido azimutal y corresponden a modos con $m=1$.
- (ii) La perturbación está localizada, en sentido radial, en el entorno de la interfase, con distancia de penetración menor, pero del orden de magnitud del radio del disco.
- (iii) La perturbación de frecuencia más baja es una onda estacionaria, en sentido longitudinal, de longitud de onda $\lambda_z \approx 2d$ (siendo d la distancia entre los electrodos), lo que corresponde al modo fundamental, mientras que el modo de frecuencia más alta tiene una longitud de onda $\lambda_z \approx d$, que corresponde a la primera armónica.

Todos estos resultados concuerdan con la interpretación sugerida en base a los experimentos con el electrodo cilíndrico (fig.6.12a).

Debido a la falta de determinación de u , y a la no uniformidad de la densidad, no se puede pretender una comparación cuantitativa de las frecuencias observadas con la teoría, aunque la concordancia en orden de magnitud es, cuanto menos, sugestiva.

También debe tenerse presente que los experimentos con la máquina Q3 corresponden a un régimen aproximadamente isotérmico ($T_e \approx T_i$). Como el presente estudio teórico presupone $T_e \gg T_i$, todo lo que se puede pretender es, a lo sumo, un acuerdo cualitativo.

Cabría mencionar aquí que D'Angelo ⁽⁴⁾ realizó un estudio teórico de la inestabilidad de un plasma en presencia de gradientes de velocidad, con un modelo de tipo hidrodinámico, adecuado al régimen $T_e \approx T_i$, pero utilizando la aproximación WKB, obteniendo un aceptable acuerdo con los resultados experimentales. Sin embargo, el modelo de perfil

discontinuo aquí estudiado corresponde mucho mejor a la situación experimental ⁽⁵⁾, pues el gradiente de velocidades es fuerte (espesor de la región de transición "mucho menor que la longitud de onda).

Las limitaciones expuestas y el escaso volumen de la información experimental disponible no permiten, obviamente, un control crítico de los resultados teóricos. Por otra parte creemos que las concordancias obtenidas se pueden considerar alentadoras.

La realización de experimentos en plasmas no isotérmicos (como, por ej., plasmas producidos por radiofrecuencias), y en rangos más amplios de velocidades relativas, en especial regímenes supersónicos permitirían sin duda un control más exigente de las predicciones teóricas. El régimen de la máquina O3 permite solamente la exploración de un área muy restringida en el diagrama (h, k), y sería deseable tener resultados experimentales que cubran las diferentes zonas del diagrama. Hasta donde hemos podido conocer no hay datos experimentales sobre los modos electrónicos que se estudiaron en el Cap.5.

Referencias

- (1) F. Gratton, J. Gratton, "Inestabilidad de Kelvin-Helmholtz en un plasma no isotérmico". A publicarse.
- (2) N.D'Angelo, S. von Goeler, Phys.Fluids 8 (1965) 1570.
- (3) N.D'Angelo, S. von Goeler, Phys. Fluids 9 (1966) 309.
- (4) N.D'Angelo, Phys.Fluids 8 (1965) 1748.
- (5) N.D'Angelo, comunicación personal.

F. Gratton

Jaime Gratton

A2. Apéndices del Capítulo 2.

A2.1 Una interpretación heurística del amortiguamiento de Landau. ⁽¹⁾

Supóngase para mayor simplicidad, el caso de un plasma homogéneo, sin campos exteriores. Consideremos una oscilación longitudinal, a la que le corresponde un campo eléctrico:

$$A2.1 \quad E \sim e^{-i\omega t}$$

y sea k el correspondiente número de onda. A los fines del análisis conviene pensar que el plasma se divide en dos subsistemas ⁽²⁾: por una parte, el haz de partículas resonantes, es decir, aquellas partículas que tienen una velocidad v que satisface la condición

$$A2.2 \quad v = \omega/k$$

y por la otra, el resto del plasma, es decir, el plasma sin las partículas resonantes. Llamaremos "plasma no resonante" a este segundo subsistema. Supongamos también que

$$A2.3 \quad \omega/k \gg v_{te}$$

donde v_{te} es la velocidad térmica media (esta suposición nos restringe a considerar el caso de amortiguamiento débil).

La función de distribución del plasma no resonante tendrá entonces la forma \tilde{f}_0 , esquematizada en la fig.A2.1, que se obtiene de la f_0 suprimiendo el haz resonante. La relación de dispersión para las oscilaciones longitudinales del plasma no resonante ^(3,4) está dada por

$$A2.4 \quad 0 = 1 - \frac{4\pi e^2}{m} \int \frac{\tilde{f}_0}{(\omega - kv)^2} dv = 1 - \frac{4\pi e^2}{m} \rho \int \frac{f_0}{(\omega - kv)^2} dv$$

y las frecuencias de los modos propios resultan ser:

$$A2.5 \quad \omega^2 = \omega_p^2 + 3k^2 v_{te}^2 + \dots$$

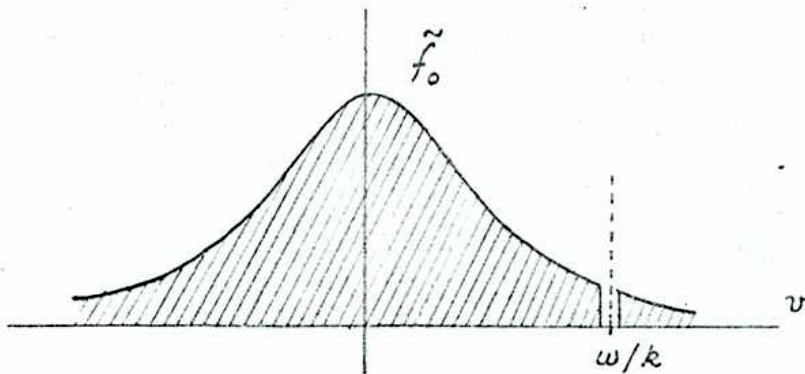


fig.A2.1. Función de distribución del plasma no resonante.

Los modos propios del plasma no resonante no tienen amortiguamiento. La velocidad de las partículas resonantes es, aproximadamente

$$v = \omega/k \approx \omega_p/k$$

Por otra parte, cuando se considera la totalidad del plasma (plasma no resonante + haz), la relación de dispersión es:

$$A2.6 \quad 0 = 1 - \frac{4\pi e^2}{m} \int \frac{f_0}{(\omega - kv)^2} dv$$

Aparece ahora el residuo en el polo $v = \omega/k$, que da lugar a un amortiguamiento ⁽⁵⁾. es decir que

$$A2.7 \quad E \sim e^{-\gamma t} e^{-i\omega t} \quad (\gamma \ll \omega)$$

Estas circunstancias se pueden describir de una forma particularmente sugestiva en términos del lenguaje de la Mecánica Cuántica.

Podría pensarse, en efecto, al plasma no resonante como un sistema no perturbado, que tiene estados estacionarios correspondientes a las frecuencias ω dadas por la ec. (A2.5), y que debido al haz resonante actúa una pequeña perturbación sobre el sistema, que acopla a los estados no perturbados. De resultas de esta perturbación, el estado ω no es estrictamente estacionario y debe ser considerado como un paquete, de ancho $\gamma \sim \Delta\omega \sim k\Delta\nu$. Este paquete decae en el tiempo, y $1/\gamma$ da la medida de la vida media del modo cuasi-estacionario del plasma.

La analogía no sólo es sugestiva, sino que es fructífera, pues en base a ella puede estimarse el valor de γ , de la manera que se describe a continuación.

Según la imagen que se ha propuesto, las oscilaciones del plasma no resonante deben describirse mediante un Hamiltoniano H_0 . El efecto del haz resonante se describirá como una pequeña perturbación, que indicaremos con V , de manera que el Hamiltoniano total del sistema será

$$A2.8 \quad H = H_0 + V$$

La perturbación V acopla a los autoestados de H_0 . No hará falta aquí especificar la forma de H_0 ni de V . Solamente, y por simplicidad, se supondrá que tienen dimensiones de frecuencia.

Es sabido que la perturbación V produce el decaimiento del autoestado ω de H_0 . El tiempo de decaimiento se puede estimar mediante la regla de oro de la teoría de perturbaciones ⁽⁶⁾, que da, en este caso

$$A2.9 \quad \gamma \sim |V|^2 \rho(\omega)$$

donde $\rho(\omega)$ es la densidad en frecuencia de estados, calculada en $\omega = kv$.

La densidad de estados $\rho(\omega)$ será obviamente proporcional a la función de distribución del plasma. Para un plasma Maxwelliano,

$$f_0 \sim \frac{1}{v_{te}} e^{-\frac{v^2}{2v_{te}^2}}$$

de modo que

$$A2.10 \quad \rho(\omega) \sim \frac{1}{kv_{te}} e^{-\frac{\omega^2}{2k^2v_{te}^2}}$$

Faltaría en (A2.9) estimar el valor de $|V|^2$. Esto se puede lograr mediante el siguiente argumento dimensional: la perturbación V proviene del acoplamiento entre las partículas y el campo eléctrico autoconsistente. Por consiguiente, la energía de la perturbación debe ser proporcional a e^2 , de modo que $|V|^2$ debe necesariamente contener al factor e^4 . Por otra parte, con los parámetros del problema sólo es posible formar tres frecuencias:

$$\omega_p, kv_{te}, \omega (\approx \omega_p)$$

Hay entonces una única elección posible de $|V|^2$:

$$A2.11 \quad |V|^2 \sim \frac{\omega_p^4}{k^2v_{te}^2}$$

Esta elección implica que el acoplamiento entre los estados del plasma no resonante es proporcional a $(kv_{te})^{-1}$, lo cual suena razonable puesto que la agitación térmica tiende a desorganizar las oscilaciones colectivas.

Sustituyendo las expresiones (A2.10) y (A2.11) en (A2.9) obtenemos finalmente

$$A2.12 \quad \gamma \sim \frac{\omega_p^4}{(kv_{te})^2} e^{-\frac{\omega^2}{2k^2v_{te}^2}}$$

que coincide, a menos de un factor $\sqrt{\pi/8}$ con el célebre factor de amortiguamiento de Landau ⁽⁵⁾, que se obtiene de un tratamiento más riguroso.

La presente estimación de γ es válida, por supuesto, sólo para

$$\omega/k \approx \omega_p/k \gg v_{te}$$

es decir, para amortiguamiento débil, $\gamma \ll \omega$. .

Podría mencionarse aquí que la presente interpretación del amortiguamiento de Landau en términos del decaimiento de un estado cuasimonocromático es similar al concepto de Van Kampen ⁽³⁾, que consiste esencialmente en reproducir el amortiguamiento por medio de una superposición de modos normales estacionarios. ^(2,7)

A2.2 Tensor de susceptibilidad para los electrones en régimen hidrodinámico de bajas frecuencias.

Se supondrá que el fluido de electrones calientes ⁽¹⁾ está descrito por una densidad, n , una velocidad de masa \underline{u} y por una presión escalar p . Indicaremos con un subíndice o a las cantidades no perturbadas y con δn , $\delta \underline{u}$, δp a las cantidades de perturbación.

En el estado no perturbado hay un campo magnético $\underline{B}_o \equiv (B_o, 0, 0)$ exterior, uniforme y constante en el tiempo, y el plasma fluye paralelamente a \underline{B}_o con una velocidad de masa que puede variar con la coordenada y

$$\underline{u}_o(y) \equiv (u_o(y), 0, 0)$$

Las ecuaciones linearizadas de continuidad y de movimiento se escriben entonces

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \underline{u}_0 \cdot \underline{\nabla}\right) \delta n + \underline{\nabla} \cdot n_0 \delta \underline{u} = 0$$

$$\begin{aligned} \text{A2.13} \quad n_0 m \left(\frac{\partial}{\partial t} + \underline{u}_0 \cdot \underline{\nabla}\right) \delta \underline{u} + n_0 m \delta \underline{u} \cdot \underline{\nabla} \underline{u}_0 = \\ = -n_0 e \underline{E} - n_0 \frac{e}{c} \delta \underline{u} \times \underline{B}_0 - n_0 \frac{e}{c} \underline{u}_0 \times \delta \underline{E} - \underline{\nabla} \delta p \end{aligned}$$

Para la presión se usará una ecuación de estado isotérmica:

$$\text{A2.14} \quad \delta p = \delta n \theta$$

lo cual es razonable en la hipótesis de velocidad térmica grande respecto de la velocidad de fase de la perturbación.⁽¹⁾

Para bajas frecuencias se pueden despreciar los efectos de inercia (lo que equivale a suponer $m=0$ en la ec.(A2.13)).

Si suponemos perturbaciones de la forma (2.33):

$$Q \equiv Q(y) e^{-i\omega t + ik_x x + ik_z z}$$

se obtiene entonces fácilmente de (A2.13) y (A2.14) (con $m=0$), eliminando $\delta \underline{B}$ mediante las ecuaciones de Maxwell, la expresión para las amplitudes de Fourier de la densidad y de las componentes de la velocidad en la forma:

$$\text{A2.15} \quad \delta u_x = \frac{ie\bar{\omega}}{k_x^2 \theta} E_x - \frac{\hat{k}_y}{k_x} \frac{c}{B_0} \frac{\bar{\omega}}{\omega} \left(E_z - \frac{k_z}{k_x} E_x\right) + \frac{k_z}{k_x} \frac{c}{B_0} \frac{\bar{\omega}}{\omega} \left(E_y - \frac{\hat{k}_y}{k_x} E_x\right)$$

$$\delta u_y = \frac{c}{B_0} \frac{\bar{\omega}}{\omega} \left(E_z - \frac{k_z}{k_x} E_x\right)$$

$$\delta u_z = -\frac{c}{B_0} \frac{\bar{\omega}}{\omega} \left(E_y - \frac{\hat{k}_y}{k_x} E_x\right)$$

$$\delta n = \frac{i e n_0}{k_x \theta} E_x$$

La corriente debida a los electrones es

$$A2.16 \quad \underline{j}^e = -e (n_0 \delta \underline{u} + \delta n \underline{u}_0)$$

y el operador de susceptibilidad está definido por:

$$A2.17 \quad \underline{\hat{K}}^e \cdot \underline{E} = \frac{i}{\omega} \underline{j}^e$$

Sustituyendo (A2.15) y (A2.16) en (A2.17) es fácil obtener la expresión (2.61) para el operador de susceptibilidad de los electrones.

Referencias.

A2.1

1. F. Gratton, J. Gratton, Nucl.Fusion 10 (1970), en prensa.
2. Dawson, J.Phys.Fluids, 4 (1961) 869.
3. N.G. Van Kampen, Physica, 21 (1955) 949.
4. N.G. Van Kampen, Physica, 23 (1957) 641.
5. L.D. Landau, Zh.Eksp.Teor.Fiz. 16 (1946) 574.
6. L.D. Landau, E. Lifchitz, "Mécanique Quantique", MIR, Moscou, (1957), cap.6.
7. L.M. Case, Ann.Phys. 7 (1959) 349.

A2.2

1. L. Spitzer, "Physics of Fully Ionized Gases", Interscience Pub., New York (1956), Cap.4.

RESUMEN

El propósito de esta tesis es el estudio de las oscilaciones colectivas en plasmas no uniformes de bajo β , con especial interés en el caso en que el sistema presente gradientes de velocidad. En una breve introducción (capítulo 1) se exponen los motivos del trabajo, ubicándolo en el contexto de la problemática de la teoría de los plasmas, se señala su relación con problemas similares en otras ramas de la física y se menciona su conexión con cuestiones relativas a la física del espacio interplanetario y a los experimentos de laboratorio en física del plasma.

En el capítulo 2 se plantean las ecuaciones de la teoría cinética de un plasma sin colisiones y se discuten con detalle las condiciones de validez y los regímenes físicos en que es aplicable dicho modelo, sobre el cual se basa el presente trabajo. Se desarrolla a continuación un formalismo que permite obtener el operador dieléctrico exacto a todos los órdenes en el radio de Larmor, para un plasma no uniforme, en el cual la inhomogeneidad del plasma puede ser de cualquier índole, pero dependiendo de una sola coordenada. A este efecto, el sistema de ecuaciones integro-diferenciales de la teoría lineal de las oscilaciones se reemplaza por un sistema de ecuaciones diferenciales de orden infinito, a partir del cual es posible plantear en forma sistemática las correcciones de radio de Larmor finito a los distintos órdenes. Se consigue de este modo plantear por primera vez las ecuaciones exactas para las oscilaciones en presencia de gradientes de velocidad (dentro del modelo cinético sin colisiones) con toda generalidad dentro de la geometría prefijada.

Se derivan aproximaciones para regímenes particulares y se plantea, en términos del operador dieléctrico, la ecuación diferencial para las oscilaciones potenciales.

Dentro de la gran variedad de problemas que se pueden plantear con el formalismo introducido, se ha elegido concentrar aquí la atención sobre dos de ellos, a saber, las oscilaciones electrónicas e iónicas de una discontinuidad tangencial.

Con miras a esto, se estudian en el capítulo 3 las propiedades de las oscilaciones electrónicas e iónicas de un plasma semiinfinito, se analizan las propiedades del espectro de modos propagantes, se derivan expresiones para la velocidad de grupo y se dan los intervalos de existencia de oscilaciones de superficie e inestables

En el capítulo 4 se estudian las propiedades energéticas de oscilaciones en plasmas no uniformes. Se obtienen expresiones generales para el balance energético del plasma. Se dan expresiones para la densidad de energía y flujo de energía de modos propagantes y se pone en evidencia que una parte esencial del flujo de energía de las oscilaciones potenciales es de origen electromagnético. Se analizan las propiedades energéticas de ondas no uniformes. Se comentan algunas de las consecuencias de la existencia de oscilaciones con energía negativa, en particular la posibilidad de radiación e inestabilidad, y se deducen las condiciones energéticas para que se produzca radiación.

Los resultados de los capítulos anteriores se aplican en el capítulo 5 al estudio de las oscilaciones electrónicas de un perfil discontinuo de velocidades. Luego de comentar el significado físico de las condiciones de contorno sobre la discontinuidad, se reseñan las propiedades de las oscilaciones correspondientes a modulaciones de la interfase paralelas al campo magnético. Se determinan las regiones de existencia correspondientes a radiación en base a los criterios energéticos formulados en el capítulo 4. También se analiza la conexión entre la inestabilidad monotónica y los modos ra-

diantes. Para aclarar la vinculación sugerida en el capítulo 4 en base a consideraciones de balance energético entre la radiación de ondas y la sobreestabilidad, se estudia el efecto de una pequeña modulación transversal al campo magnético exterior y se demuestra que ésta conduce a la localización de las oscilaciones en el entorno de la interfase y en consecuencia a la sobreestabilidad de las mismas. Se determinan las diferentes regiones de existencia de estas sobreestabilidades. Se estudian también las inestabilidades monotónicas en presencia de modulación transversal observándose drásticas modificaciones de las regiones de existencia con respecto de las que corresponden a modulación estrictamente paralela. Se encuentra que estas modificaciones surgen como consecuencia de la localización de los modos estacionarios presentes cuando la modulación es paralela. Se estudia el caso límite de modulación casi perpendicular al campo magnético. Se discuten las regiones de existencia y las propiedades de los modos y se dan en forma gráfica los resultados del cómputo numérico de las frecuencias propias del sistema, para algunos conjuntos de valores de los parámetros.

En el capítulo 6 se estudian las oscilaciones iónicas de un plasma no isotérmico de bajo β en presencia de un perfil discontinuo de velocidades. Se deduce la ecuación diferencial para el potencial electrostático, así como las condiciones de contorno sobre la discontinuidad y se obtiene la relación de dispersión para las frecuencias propias del sistema. Se analiza en detalle el caso en que la interfase está modulada paralelamente al campo magnético, encontrándose que puede haber ondas de superficie estables, radiación de ondas, modos estacionarios (de frecuencia nula) e inestabilidades monotónicas.

La comparación entre la velocidad de las ondas iónicas acústicas y la velocidad relativa del flujo permite definir regímenes de diferentes características. El régimen subsónico presenta analogías con el problema de las oscilaciones electrónicas estudiadas en el capítulo 5. Al aumentar la veloci-

dad relativa el sistema tiende a estabilizarse y para flujo supersónico la inestabilidad desaparece (para modulación paralela al campo magnético). Se dan las regiones de existencia y propiedades de los modos.

Se discuten a continuación las propiedades energéticas de las oscilaciones iónicas y se dan expresiones para el balance de energía. Se encuentra que en este problema se pueden hacer consideraciones enteramente análogas a las que se hicieron para el caso de oscilaciones electrónicas, en lo que se refiere a la interpretación energética de las sobreestabilidades e inestabilidades monotónicas del sistema.

Se estudia el efecto de introducir una pequeña modulación transversal al campo, y se encuentra que se produce la localización y la sobreestabilidad de los modos radiantes, y que la localización de los modos de frecuencia nula da como resultado nuevas inestabilidades monotónicas del sistema, que modifican sustancialmente el panorama de estabilidad respecto del que se tiene para modulación paralela al campo exterior. Se dan las regiones de existencia de los modos inestables, para modulación transversal pequeña en los regímenes subsónico, casi supersónico y supersónico.

Finalmente, se intenta una interpretación de los resultados experimentales de D'Angelo y von Goeler en base a la teoría que se ha desarrollado. Hechas las salvedades de que los experimentos mencionados corresponden a un régimen prácticamente isotérmico (mientras que el modelo usado en el presente trabajo corresponde a un plasma no isotérmico), y que los resultados experimentales son algo escuetos, se obtienen concordancias alentadoras en lo referente al orden de magnitud de las frecuencias observadas, las propiedades espaciales de las oscilaciones, y la condición de estabilidad. En vista de que la escasa información experimental existente, si bien tiende a corroborar el presente estudio teórico, está lejos de permitir un control riguroso del mismo, se sugieren experi-

mentos más decisivos en regímenes que correspondan más estrechamente al modelo teórico.

En el Apéndice 2.1 se expone una interpretación heurística del fenómeno del amortiguamiento de Landau, basada en una analogía con la Mecánica Cuántica debida a F. Gratton y al autor. Dicha interpretación surgió de discusiones realizadas en las clases del curso para graduados sobre Teoría de Ondas en Plasmas, dictado en esta Facultad por F. Gratton en 1969.

En el Apéndice 2.2 se deduce la expresión del operador de susceptibilidad para los electrones en base a un modelo hidrodinámico, que corresponde usar en el régimen no isotérmico, es decir para las oscilaciones iónicas.

AGRADECIMIENTOS

Debo agradecer en primer término al Dr. Fausto Gratton, quien despertó mi entusiasmo por el estudio de la Física del Plasma y con quien me inicié en esa especialidad. A él debo la experiencia agradable de tres años de fructífera colaboración, que se inició en momentos muy difíciles.

Deseo también manifestar mi agradecimiento al Lic. Julio Sánchez, quien colaboró en el trabajo que corresponde a parte de los capítulos 4 y 5 de esta tesis.

Quiero asimismo destacar mi reconocimiento a todos mis colegas del Departamento de Física de la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, por haber contribuido a crear una grata atmósfera de estudio, y por el estímulo y apoyo que de ellos he recibido.

Agradezco de manera especial a la Srta. Marcela Crispín por su inapreciable colaboración en el procesado del manuscrito, a la Sra. Amalia F. de Moratona, quien se ocupó con gran eficiencia de las tareas de perforación de los programas para los cálculos numéricos, y a las Srtas. Susana y Milagros Moure, quienes cooperaron en las tareas de fotocopiado.

Agradezco al Instituto de Cálculo de nuestra Facultad el haberme facilitado el acceso a la computadora electrónica.

Deseo hacer constar que parte de los trabajos que integran esta tesis fueron realizados gracias a un subsidio del Fondo Especial para la Investigación de la Universidad Nacional de Buenos Aires.

Finalmente, quiero expresar mi especial agradecimiento a mi padre, el Dr. Livio Gratton, quien despertó mi vocación por la investigación científica, y que ha sido siempre para mí un ejemplo rector.