

Tesis de Posgrado

Reglas de suma de momento continuo y fenomenología de altas energías

Ferro Fontán, Constantino

1970

Tesis presentada para obtener el grado de Doctor en Ciencias
Físicas de la Universidad de Buenos Aires

Este documento forma parte de la colección de tesis doctorales y de maestría de la Biblioteca Central Dr. Luis Federico Leloir, disponible en digital.bl.fcen.uba.ar. Su utilización debe ser acompañada por la cita bibliográfica con reconocimiento de la fuente.

This document is part of the doctoral theses collection of the Central Library Dr. Luis Federico Leloir, available in digital.bl.fcen.uba.ar. It should be used accompanied by the corresponding citation acknowledging the source.

Cita tipo APA:

Ferro Fontán, Constantino. (1970). Reglas de suma de momento continuo y fenomenología de altas energías. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad de Buenos Aires. http://digital.bl.fcen.uba.ar/Download/Tesis/Tesis_1346_FerroFontan.pdf

Cita tipo Chicago:

Ferro Fontán, Constantino. "Reglas de suma de momento continuo y fenomenología de altas energías". Tesis de Doctor. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad de Buenos Aires. 1970. http://digital.bl.fcen.uba.ar/Download/Tesis/Tesis_1346_FerroFontan.pdf

EXACTAS UBA

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales



UBA

Universidad de Buenos Aires

UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales

REGLAS DE SUMA DE MOMENTO CONTINUO
Y FENOMENOLOGIA DE ALTAS ENERGIAS.

Constantino Ferro Fontán

Tesis presentada para optar al título de
Doctor en Física.

1346

- 1970 -

Reg. N° 12

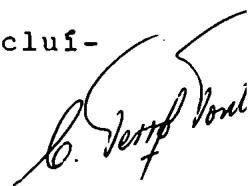
RESUMEN

Las relaciones de dispersión generalizadas, conocidas como reglas de suma de momento continuo, son utilizadas para estudiar el modelo de Regge en la dispersión pión-nucleón y en la fotoproducción de piones. Se pone especial énfasis en las amplitudes conspirantes, que explicarían el notable incremento hacia adelante de las secciones diferenciales de fotoproducción de piones cargados. También se muestra un particular interés en dilucidar el mecanismo por el cual la reacción $\pi^-p \rightarrow \pi^0n$ tiene polarización no nula. Como resultado de este estudio, se confirma la conspiración $\pi-\pi_c$. Sin embargo, cálculos recientes muestran que las reglas de suma no pueden discriminar entre diversos mecanismos de conspiración. Muy atractiva es la idea de considerar un pión evasivo con correcciones absortivas, que simulan el efecto de las fuerzas de más corto alcance. No sólo podría explicarse así la conspiración, sino también la aparición de ceros "dinámicos" en las amplitudes que contribuyen hacia adelante. Estos ceros han sido detectados en cuatro de las amplitudes analizadas en este trabajo; todos ellos en la región $|t| < 0.2 \text{ (GeV/c)}^2$. Muchas otras evidencias, descubiertas en el curso del presente estudio, sugieren la conveniencia de investigar a fondo la cuestión de las correcciones absortivas en fotoproducción. Respecto de la polarización en $\pi^-p \rightarrow \pi^0n$, las reglas de suma

predicen la existencia de una cortadura de Regge en la amplitud $A^{(-)}$, cuya inclusión da correctamente el signo y la magnitud de la polarización observada. Cálculos teóricos con el modelo absorptivo habían previamente sugerido la existencia de esta cortadura; en este trabajo se la confirma fenomenológicamente.

La técnica aquí expuesta mejora sustancialmente los viejos métodos de la fenomenología de Regge, hasta el punto de que los ajustes de alta energía más recientes están basados en ella. Se presenta un ajuste de este tipo para la fotoproducción de piones cargados, que explica todos los datos experimentales a energías que oscilan entre 3.4 y 16.0 GeV.

En los dos primeros Capítulos se introducen la notación y las cuestiones teóricas fundamentales, como las propiedades de unitariedad, analiticidad y cruce, las relaciones de dispersión, la representación de Mandelstam y las propiedades analíticas en el plano del momento angular. Un tercer Capítulo, dedicado a las relaciones de dispersión generalizadas, las analiza con cierto detalle siguiendo su evolución histórica: de las relaciones de superconvergencia a las reglas de suma de energía finita y de momento continuo. Se discute brevemente el concepto, recientemente formulado, de dualidad. Los Capítulos IV y V constituyen el núcleo de este trabajo y, en cierto modo, ya han sido comentados en el comienzo de este Resumen. El Capítulo IV está dedicado a la reacción $\pi N \rightarrow \pi N$ y el quinto, a la fotoproducción. Tres Apéndices se han incluido al final para hacer el texto autocontenido.



UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales

REGLAS DE SUMA DE MOMENTO CONTINUO
Y FENOMENOLOGIA DE ALTAS ENERGIAS.

Constantino Ferro Fontán

Tesis presentada para optar al título de
Doctor en Física.

- 1970 -

INDICE

RESUMEN

CAPITULO I. PROPIEDADES BASICAS.

I.1. Cinemática y convenciones	1
I.2. La relación de unitariedad.	
El teorema óptico	5
I.3. La propiedad de cruce	8
I.4. Analiticidad y representación de Mandelstam	14

CAPITULO II. POLOS DE REGGE.

II.1. La continuación de Froissart-Gribov	24
II.2. Propiedades de las ondas parciales	31
II.3. Polos de Regge	36
II.4. Dispersión de partículas con espín	46

CAPITULO III. REGLAS DE SUMA.

III.1. Relaciones de superconvergencia	49
III.2. Reglas de suma de energía finita	52
III.3. Reglas de suma de momento continuo	55

CAPITULO IV. POLOS DE REGGE EN LA DISPERSION

PION-NUCLEON.

IV.1. Introducción	61
IV.2. Análisis en ondas parciales	68
IV.3. Estudio cuantitativo de las amplitudes de alta energía	73

CAPITULO V. POLOS DE REGGE EN LA FOTOPRODUCCION DE PIONES
CARGADOS.

V.1. Introducción	84
V.2. La conspiración $\pi-\pi_c$	95
V.3. Un ajuste fenomenológico a los datos de alta energía	104
AGRADECIMIENTOS	110
APENDICE I. Cinemática para masas generales	111
APENDICE II. La ecuación de Dirac	115
APENDICE III. Singularidades de diagramas unitarios.	
Reglas de Landau	120
REFERENCIAS	126

RESUMEN

Las relaciones de dispersión generalizadas, conocidas como reglas de suma de momento continuo, son utilizadas para estudiar el modelo de Regge en la dispersión pión-nucleón y en la fotoproducción de piones. Se pone especial énfasis en las amplitudes conspirantes, que explicarían el notable incremento hacia adelante de las secciones diferenciales de fotoproducción de piones cargados. También se muestra un particular interés en dilucidar el mecanismo por el cual la reacción $\pi^-p \rightarrow \pi^0n$ tiene polarización no nula. Como resultado de este estudio, se confirma la conspiración $\pi-\pi_c$. Sin embargo, cálculos recientes muestran que las reglas de suma no pueden discriminar entre diversos mecanismos de conspiración. Muy atractiva es la idea de considerar un pión evasivo con correcciones absortivas, que simulan el efecto de las fuerzas de más corto alcance. No sólo podría explicarse así la conspiración, sino también la aparición de ceros "dinámicos" en las amplitudes que contribuyen hacia adelante. Estos ceros han sido detectados en cuatro de las amplitudes analizadas en este trabajo; todos ellos en la región $|t| < 0.2 \text{ (GeV/c)}^2$. Muchas otras evidencias, descubiertas en el curso del presente estudio, sugieren la conveniencia de investigar a fondo la cuestión de las correcciones absortivas en fotoproducción. Respecto de la polarización en $\pi^-p \rightarrow \pi^0n$, las reglas de suma

predicen la existencia de una cortadura de Regge en la amplitud $A^{(-)}$, cuya inclusión da correctamente el signo y la magnitud de la polarización observada. Cálculos teóricos con el modelo absorptivo habían previamente sugerido la existencia de esta cortadura; en este trabajo se la confirma fenomenológicamente.

La técnica aquí expuesta mejora sustancialmente los viejos métodos de la fenomenología de Regge, hasta el punto de que los ajustes de alta energía más recientes están basados en ella. Se presenta un ajuste de este tipo para la fotoproducción de piones cargados, que explica todos los datos experimentales a energías que oscilan entre 3.4 y 16.0 GeV.

En los dos primeros Capítulos se introducen la notación y las cuestiones teóricas fundamentales, como las propiedades de unitariedad, analiticidad y cruce, las relaciones de dispersión, la representación de Mandelstam y las propiedades analíticas en el plano del momento angular. Un tercer Capítulo, dedicado a las relaciones de dispersión generalizadas, las analiza con cierto detalle siguiendo su evolución histórica: de las relaciones de superconvergencia a las reglas de suma de energía finita y de momento continuo. Se discute brevemente el concepto, recientemente formulado, de dualidad. Los Capítulos IV y V constituyen el núcleo de este trabajo y, en cierto modo, ya han sido comentados en el comienzo de este Resumen. El Capítulo IV está dedicado a la reacción $\pi N \rightarrow \pi N$ y el quinto, a la fotoproducción. Tres Apéndices se han incluido al final para hacer el texto autocontenido.

CAPITULO I. PROPIEDADES BASICAS.

I.1. CINEMATICA Y CONVENCIONES.

En el presente trabajo consideraremos exclusivamente reacciones de dos partículas a dos partículas, que pueden ser de igual (reacción elástica) o distinto tipo (reacción inelástica) que las originales. Sea entonces el proceso

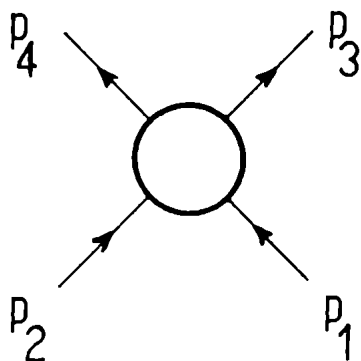


Fig.I.1

Llamaremos p_1, p_2, p_3, p_4 a los cuadrivectores de energía e impulso de las partículas intervinientes, $p_i = (p_i^0, \vec{p}_i)$. Por conservación de impulso y energía

$$p_1 + p_2 = p_3 + p_4. \quad (1.1)$$

Además, cada p_i cumple la relación relativista

$$p_i^2 = m_i^2, \quad (1.2)$$

siendo m_i la masa de la partícula i -ésima.

Introducimos los invariantes de Mandelstam

$$\begin{aligned} s &= (p_1 + p_2)^2 = (p_3 + p_4)^2 \\ t &= (p_1 - p_3)^2 = (p_4 - p_2)^2 \\ u &= (p_1 - p_4)^2 = (p_3 - p_2)^2 \end{aligned} \quad (1.3)$$

Es fácil probar, usando (1.1) y (1.2), que

$$s+t+u = \Sigma = m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 + m_4^2, \quad (1.4)$$

relación por la cual s, t, u , forman un juego de coordenadas triangulares. La variable s tiene el significado de (energía)² en el centro de masa de las partículas 1 y 2. Los invariantes t y u miden la transferencia de impulso de 1 a 3 y de 1 a 4, respectivamente, y están relacionados con el ángulo de dispersión θ_s en el centro de masa. Es fácil demostrar que s y t son las dos únicas variables independientes de nuestro problema (excluyendo variables de espín). En principio, los cuatro cuadrivectores p_i tienen 16 componentes, que restringidas por las condiciones (1.1) y (1.2) se reducen a 8. Como la teoría debe poseer invariancia de Lorentz, podemos aún eliminar 6 componentes más, sin afectar los resultados, eligiendo una transformación de Lorentz adecuada. En el caso general de una reacción en que intervienen N partículas (englobando las del estado inicial y las del final) hay $4N$ variables en principio, pero por los mismos motivos de antes, están restringidas por $N+4+6$ condiciones, con lo que dicha reacción será descripta por $3N-10$ invariantes.

Si suponemos las cuatro masas iguales a μ (p. ej. en dispersión elástica $\pi\pi$ o NN)

$$\cos \theta_s = 1 + \frac{2t}{s-4\mu^2} = -1 - \frac{2u}{s-4\mu^2} \quad (1.5)$$

La región física de la reacción $1+2 \rightarrow 3+4$, para este caso de masas iguales, es

$$\begin{aligned} s &\geq 4\mu^2 \\ -1 &\leq \cos \theta_s \leq 1 \end{aligned} \quad (1.6a)$$

La última condición implica

$$-(s-4\mu^2) \leq t, u \leq 0 \quad (1.6b)$$

Fórmulas válidas para el caso de masas generales son presentadas en el Apéndice I.

La matriz S de Heisenberg, definida de modo que

$$P_{fi} = |\langle f|S|i\rangle|^2$$

dé la probabilidad de transición del estado $|i\rangle$ al estado $|f\rangle$, la representaremos en la forma

$$S_{fi} = \delta_{fi} + i (2\pi)^4 \delta^4(P_f - P_i) T_{fi}, \quad (1.7)$$

donde P_i y P_f son los cuadriimpulsos de los estados inicial y final respectivamente, y T es la llamada matriz de transición. La función δ tiene automáticamente en cuenta conservación de energía e impulso.

La probabilidad de transición por unidad de tiempo, normalizando nuestro volumen de trabajo a la unidad, es

$$P_{fi} = |(2\pi)^4 \delta^4(P_f - P_i) T_{fi}|^2 = (2\pi)^4 \delta^4(P_f - P_i) |T_{fi}|^2 \quad (1.8)$$

La densidad de partículas es la cuarta componente del cuadri-vector corriente. Luego elegimos una normalización covariante de Lorentz, igual a $2p_i^0$ partículas de tipo i por unidad de volumen. Con esta convención, para la reacción $1+2 \rightarrow 3+4$, resulta

$$P_{fi} = (2\pi)^4 \int \frac{d^3 p_3 d^3 p_4}{(2\pi)^3 2p_i^0} \delta^4(p_3+p_4-p_1-p_2) |\langle p_3 p_4 | T | p_1 p_2 \rangle|^2$$

(Nuestras unidades son $\hbar = c = 1$ y el GeV como unidad de energía).

La sección de dispersión se obtiene dividiendo la probabilidad de transición por unidad de tiempo, por el flujo de partículas incidente. Como

$$\begin{aligned} \text{Flujo} &= 4 p_1^0 p_2^0 |\vec{v}_1 - \vec{v}_2|_{CM} = \\ &= 4 E_1 E_2 |\vec{q}_{12}/E_1 + \vec{q}_{12}/E_2| = 4 q_{12} \text{ v/s,} \end{aligned}$$

donde q_{12} es el impulso, en su centro de masa, de las partículas que inician la reacción, obtenemos

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{1}{(8\pi)^2 q_{12} \text{ v/s}} \int \frac{d^3 p_3 d^3 p_4}{E_3 E_4} \delta^4(p_3+p_4-p_1-p_2) \times \\ &\quad \times |\langle p_3 p_4 | T | p_1 p_2 \rangle|^2 \end{aligned}$$

Con ayuda de la delta podemos efectuar cuatro integrales y finalmente, poniendo $\langle p_3 p_4 | T | p_1 p_2 \rangle = A(s, t)$,

$$\sigma = \frac{q_{34}}{q_{12} (8\pi)^2 s} \int |A(s, t)|^2 d\Omega, \quad (1.9)$$

siendo el integrando la sección diferencial de dispersión $d\sigma/d\Omega$.

En su lugar, es común utilizar, en física de partículas, la cantidad

$$\frac{d\sigma}{dt} = \frac{1}{64\pi s q_1^2} |A(s,t)|^2 \tag{1.10}$$

que se obtiene de expresar el ángulo de dispersión en función del invariante de Mandelstam t .

Si hay variables de espín en el problema, la amplitud A dependerá también de ellas. En general, (1.9) y (1.10) contendrán una suma sobre las diversas posibilidades de orientación de los espines intervinientes.

I.2. LA RELACION DE UNITARIEDAD. EL TEOREMA OPTICO.

Si partimos de un estado $|a\rangle$, evidentemente la suma de todas las probabilidades de transición desde $|a\rangle$ hasta un estado $|n\rangle$ arbitrario debe ser

$$\sum_n |S_{na}|^2 = 1.$$

Esta ecuación puede escribirse también como

$$\sum_n \langle n|S|a\rangle \langle n|S|a\rangle^* = \sum_n \langle a|S^\dagger|n\rangle \langle n|S|a\rangle = \langle a|S^\dagger S|a\rangle = 1.$$

La última igualdad debe verificarse cualquiera sea el estado $|a\rangle$ elegido. Luego

$$S^\dagger S = S S^\dagger = 1 \quad , \tag{2.1}$$

es decir, la matriz S es unitaria.

Cuando expresamos S en la forma (1.7), obtenemos la relación de unitariedad para la matriz de transición

$$\begin{aligned} \langle f | T^{-1} | i \rangle &= \langle f | T | i \rangle - \langle i | T | f \rangle^* = i (2\pi)^4 \sum_n \delta^4(p_i - p_n) \times \\ &\times \langle f | T^\dagger | n \rangle \langle n | T | i \rangle \end{aligned} \quad (2.2)$$

Las interacciones fuertes son invariantes ante transformaciones PT, lo cual nos permite poner

$$\langle i | T | f \rangle = \langle f | T | i \rangle$$

En conclusión

$$\text{Im} \langle f | T | i \rangle = \frac{(2\pi)^4}{2} \sum_n \delta^4(p_i - p_n) \langle f | T^\dagger | n \rangle \langle n | T | i \rangle \quad (2.3)$$

Es importante aclarar que los estados intermedios $|n\rangle$ de las fórmulas (2.2) y (2.3), pertenecen al conjunto completo de estados físicos cuyas partículas se encuentran en la capa de masas, es decir, satisfacen la relación (1.2). Cuando la energía \sqrt{s} no es suficiente para crear estos estados intermedios en la capa de masas, los términos correspondientes en (2.3) son nulos, pues su inclusión exigiría violar la conservación de la energía. El valor mínimo de s necesario para incluir un estado intermedio $|n\rangle$ se llama el umbral de la reacción $|i\rangle \rightarrow |n\rangle$. La relación (2.3) nos dice que, por debajo de todos los umbrales posibles, la amplitud $A(s,t) = \langle f | T | i \rangle$ es real. Una excepción la constituyen los puntos aislados en que la energía coincide con la masa de un estado intermedio de una partícula. La inclusión de tales contribuciones locales en el miembro derecho de (2.3), da lugar a polos de la amplitud de dispersión en los puntos de energía correspondiente. Siendo la amplitud real debajo del primer umbral (excluyendo sus polos), el principio de continuación analítica nos permite escribir que

$$A(s,t)^* = A(s^*,t) \quad (2.4)$$

De aquí se deduce que, sobre las porciones del eje real s en las que $\text{Im}A(s,t)$ no se anula, es decir, por encima del primer umbral, la amplitud $A(s,t)$ es discontinua. En efecto, si sobre el labio superior del eje real s , al que denominaremos -por encima del umbral elástico- la región física, tenemos

$$A(s,t) = \text{Re}A(s,t) + i \text{Im}A(s,t) \quad ,$$

para el labio inferior resulta, de (2.4),

$$A(s^*,t) = \text{Re}A(s,t) - i \text{Im}A(s,t) \quad .$$

En consecuencia, la discontinuidad vale

$$\Delta_s(s,t) = 2i \text{Im}A(s,t) \quad (2.5a)$$

Dicho de otra manera: los umbrales de la relación de unitariedad (2.3) son puntos de ramificación de la amplitud de dispersión, y su miembro derecho da directamente la discontinuidad. Esta afirmación es válida aún para los estados intermedios de una partícula. Como ya dijimos, ellos originan polos de la amplitud. La "discontinuidad" sobre el polo, es decir, su residuo, viene dada por el correspondiente término en (2.3). Si el estado final $|f\rangle$ coincide con el inicial $|i\rangle$, la relación de unitariedad queda

$$\text{Im}\langle i|T|i\rangle = \frac{(2\pi)^4}{2} \sum_n \delta^4(P_i - P_n) |\langle n|T|i\rangle|^2$$

El miembro derecho de esta relación es $1/2 \times$ (probabilidad de transición a cualquier estado final $|n\rangle$), según se desprende de (1.8). Luego, usando la definición de sección de dispersión

para reacciones iniciadas por dos partículas

$$\text{Im}\langle i|T|i\rangle = \text{Im}A^{\text{elástica}}(s,t=0) = 2q_1 v/s \sigma_{\text{total}}(s). \quad (2.6)$$

Esta relación se conoce como teorema óptico, siendo $\sigma_{\text{total}}(s)$ la sección total de choque de 1 con 2.

I.3. LA PROPIEDAD DE CRUCE.

La propiedad de cruce es una característica de las amplitudes de dispersión que puede ser probada exactamente en el marco de la teoría axiomática de campos. No expondremos los postulados fundamentales de esta teoría, que pueden consultarse en numerosas obras de texto, entre las que citaremos por su claridad a las de Barton (1963, 1965) y Streater & Wightman (1964). Para el propósito del presente párrafo nos basta el ya clásico resultado de Lehmann, Symanzik & Zimmerman (1955) (en adelante LSZ). Tomemos, como ejemplo, la dispersión pión-nucleón, representada en el diagrama.

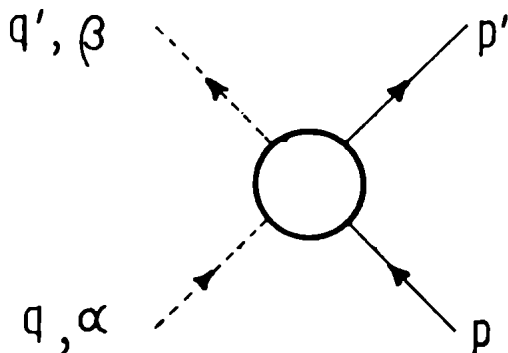


Fig. I.2

Los índices α, β se refieren a los estados de carga de los piones. Los mencionados autores han mostrado que el elemento de la matriz de transición para esta reacción es proporcional a la cantidad

$$R_{\beta\alpha}(p', q'; p, q) = i \int dx e^{iq' \cdot x} \langle p' | T(j_\beta(x) j_\alpha(0)) | p \rangle \quad (3.1a)$$

$$= i \int dx \langle p' | T(j_\beta(0) j_\alpha(x)) | p \rangle e^{-iq \cdot x} \quad (3.1b)$$

donde los operadores j_α y j_β son las fuentes del campo piónico, que satisface la ecuación de Klein-Gordon con interacción

$$(\partial_\mu \partial^\mu + \mu^2) \phi_\alpha(x) = j_\alpha(x) \quad ,$$

y T es el ordenador cronológico.

Otras expresiones equivalentes a (3.1) son

$$R_{\beta\alpha} = i \int dx e^{iq' \cdot x} \theta(x^0) \langle p' | \{j_\beta(x), j_\alpha(0)\}_- | p \rangle \quad (3.2a)$$

$$= i \int dx \langle p' | \{j_\beta(0), j_\alpha(x)\}_- | p \rangle \theta(-x^0) e^{-iq \cdot x} \quad , \quad (3.2b)$$

que utilizan el conmutador retardado de las corrientes. También pueden escribirse relaciones que hacen aparecer explícitamente la fuente del campo de los nucleones, que satisface la ecuación de Dirac con interacción

$$(i\not{\partial} - M)\psi(x) = \eta(x)$$

$$\bar{\psi}(-i\not{\partial} - M) = \bar{\eta}(x) \quad . \quad (3.3)$$

Tomemos, por ejemplo,

$$R_{\beta\alpha} = i \int dx e^{iq' \cdot x} \langle p' | T(j_\beta(x) \bar{\eta}(0)) | q, \alpha \rangle u(p) \quad (3.4)$$

(las convenciones referentes a la ecuación de Dirac y sus soluciones pueden consultarse en el Apéndice II).

Si cruzamos dos patas del diagrama (I.2), en particular los dos piones y calculamos el elemento de matriz para la reacción

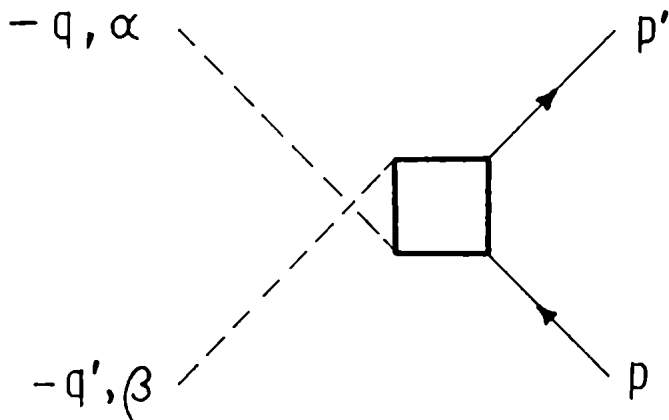


Fig. I.3

tendremos, cambiando adecuadamente las variables en (3.1b),

$$R_{\alpha\beta}(p', -q; p, -q') = i \int dx \langle p' | T(j_{\beta}(x) j_{\alpha}(0)) | p \rangle e^{iq' \cdot x}, \quad (3.5)$$

que coincide con (3.1a). En consecuencia, las amplitudes de dispersión para los procesos cruzados de las Figs. (I.2) y (I.3) son formalmente iguales. Decimos formalmente porque la energía del piñon incidente en la segunda reacción, $-q'^0$, es negativa si $q'^0 > 0$ y corresponde a un piñon no físico. Se debe decir, entonces, que la continuación analítica de la fórmula (3.1) a la región en que el segundo piñon es físico, $-q'^0 > 0$, nos da la amplitud de dispersión para el proceso de la Fig.(I.3). Los invariantes de Mandelstam para esta nueva reacción se obtienen simplemente permutando $s \leftrightarrow u$, según se desprende de (1.3). La región física (en forma algo vaga-ver Apéndice I) de la reacción cruzada corresponde pues a

$$u \geq (M+\mu)^2$$

o

$$s = \Sigma -u-t \leq (M-\mu)^2-t \quad (3.6)$$

Llamaremos a esta región "el canal u".

Idéntico resultado se obtiene cruzando una línea de pión con una de nucleón, como en la Fig.(I.4)

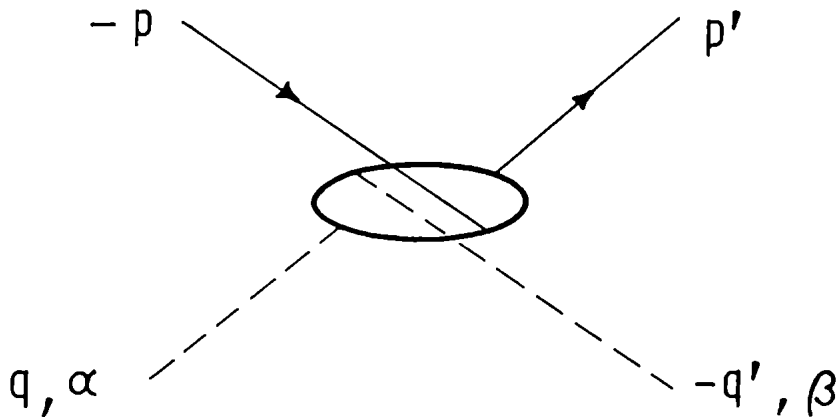


Fig. I.4

en la que la pata invertida de nucleón se interpreta como antinucleón. El formalismo LSZ nos da para este diagrama

$$R_{\beta\alpha}(p', -p; q, -q') = i \int dx \langle p' | T(j_{\beta}(x) \bar{n}(0)) | q, \alpha \rangle e^{iq' \cdot x} v(-p) \quad (3.7)$$

que, excepto el espinor de Dirac, coincide con (3.4), con la misma salvedad de antes. Los invariantes de Mandelstam para la reacción (I.4) resultan de permutar $s \leftrightarrow t$ y la región física correspondiente, que llamaremos el canal t, se encuentra en el sector

$$\begin{aligned} t &\geq 4M^2 \\ s &\leq -2(M^2 - \mu^2) - u \end{aligned} \quad (3.8)$$

Quedaría por discutir la posibilidad de continuar analítica-

mente la fórmula (3.1) a las zonas físicas de las reacciones cruzadas. Tal posibilidad ha sido probada, en teoría axiomática de campos, por Bros, Epstein & Glaser (1965)-ver también Bros (1965), v Epstein (1968)-. Cualquier par de regiones físicas en el plano de Mandelstam (s, t, u), correspondiente a procesos cruzados, está conectado por cierto dominio de analiticidad. En la Fig.(I.5) hemos representado tal plano y sus tres regiones físicas para un proceso cualquiera (ver Apéndice I)

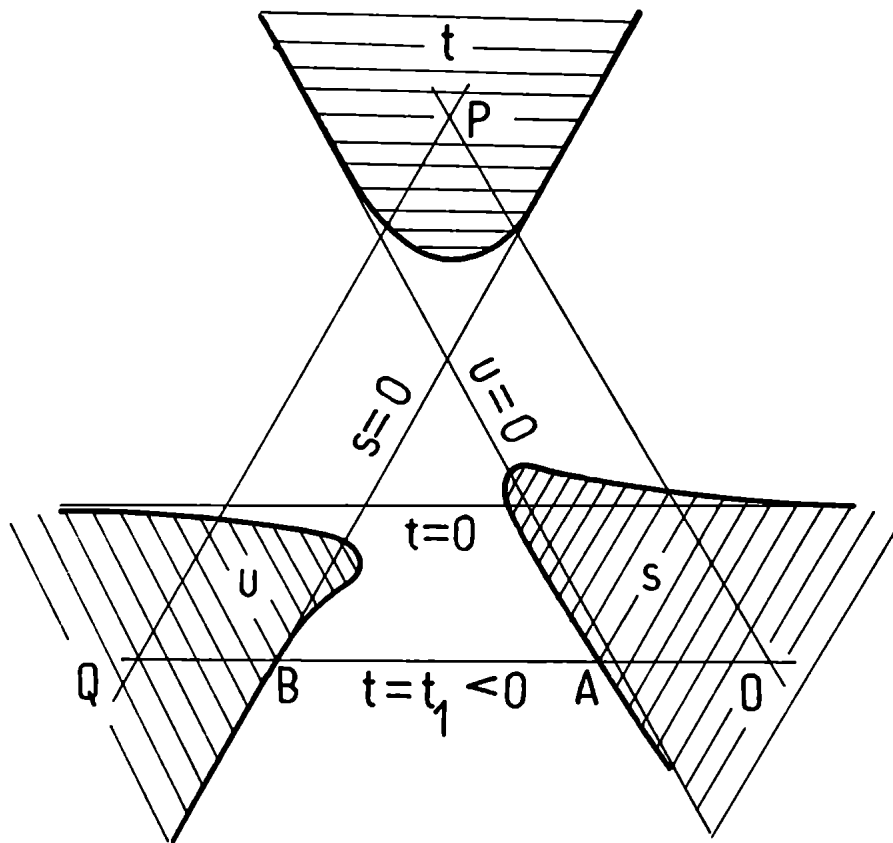


Fig. I.5

A t fijo y negativo, $t = t_1 < 0$, es posible pasar de un punto cualquiera del canal s a otro punto del canal u , a través de un dominio de analiticidad en el plano complejo s como el de la Fig.(I.6), que excluye la región sombreada en la demostración de Bros. et al.

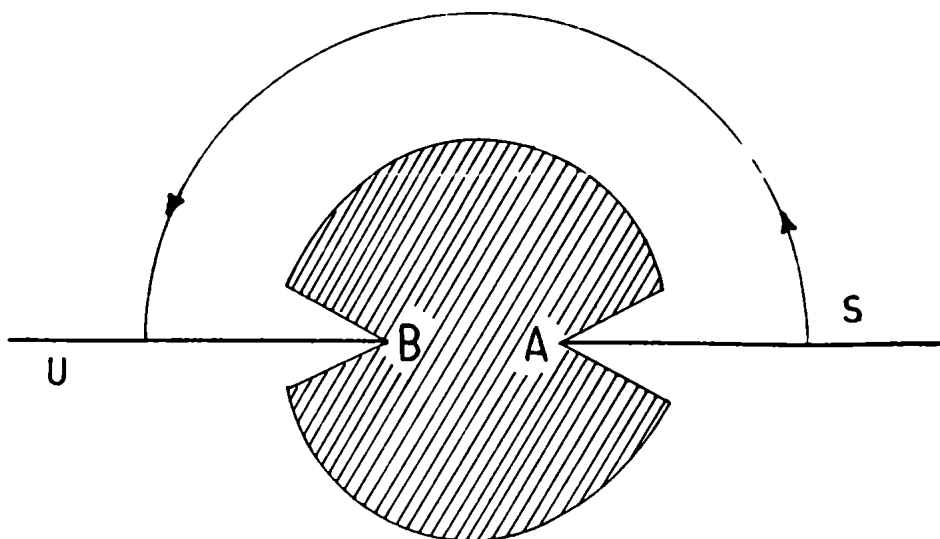


Fig.I.6

De la misma manera se puede pasar del canal s o del canal u al canal t. En rigor, el punto de llegada en la Fig.(I.6) corresponde al borde inferior del corte de unitariedad en el canal u. En cambio, por convención, hemos definido la amplitud en cualquier canal sobre el labio superior de su corte de unitariedad. Es posible, sin embargo, conectar directamente el canal s con la región física del canal u, siguiendo el camino OPQ de la Fig.(I.5).

Podemos enunciar ahora la propiedad de cruce: una misma función analítica cubre las regiones físicas (disjuntas) de todos los diagramas obtenidos por cruce de las partículas externas y da la amplitud de dispersión para los tres procesos físicamente distintos así contruídos. Como norma general, una línea cruzada corresponde a la antipartícula de la línea original. Así, los tres procesos $\pi^+ p \rightarrow \pi^+ p$, $\pi^- p \rightarrow \pi^- p$ y $p\bar{p} \rightarrow \pi^+ \pi^-$, son

descriptos por la misma amplitud.

I.4. ANALITICIDAD Y REPRESENTACION DE MANDELSTAM.

No ha sido posible, partiendo de los postulados básicos de la teoría axiomática de campos, en especial el de microcausalidad, llegar a probar la analiticidad de las amplitudes de dispersión en regiones extensas del dominio complejo de las variables de Mandelstam. Sólo en ciertas reacciones muy particulares, y cuando éstas proceden hacia adelante o en un estrecho cono delantero, se ha conseguido probar la analiticidad de las amplitudes, fuera de las singularidades exigidas por la unitariedad. Podemos citar como el primero en tal sentido al clásico resultado de Gell-Mann, Goldberger y Thirring (1954), relativo al efecto Compton en protones. Otras referencias pueden obtenerse en la reseña de Martin (1966) y en la excelente recapitulación de Epstein (1968).

Adoptaremos, en consecuencia, un punto de vista radical: el llamado postulado de máxima analiticidad de primera especie. Según este postulado, las únicas singularidades de la matriz de dispersión en la hoja física del plano de la energía son las exigidas por la condición de unitariedad. Ya vimos que la unitariedad da lugar a puntos de ramificación en los umbrales de los canales comunicantes y a polos, correspondientes a estados intermedios de una partícula estable. En las demás hojas de Riemann, a las cuales se accede atravesando los cortes de unitariedad, la red de singularidades puede ser más compleja. En particular, los polos que allí se encuentran, vecinos a la zona

física, son interpretados como partículas inestables (resonancias)-ver Chew (1966)-. Se puede dar una definición aún más fuerte de máxima analiticidad de primera especie, incluyendo estos polos de partículas inestables como posibles estados intermedios cuando la energía es compleja. En la nueva versión, las únicas singularidades de la matriz S , en todas las hojas de Riemann, son las requeridas por la unitariedad, poniendo a las resonancias en pie de igualdad con las partículas estables del enunciado anterior (Democracia Nuclear).

En resumen, la estructura analítica para una amplitud como la de dispersión elástica πN , en la hoja física del plano s , y a t constante, será la de la Fig.(I.7)

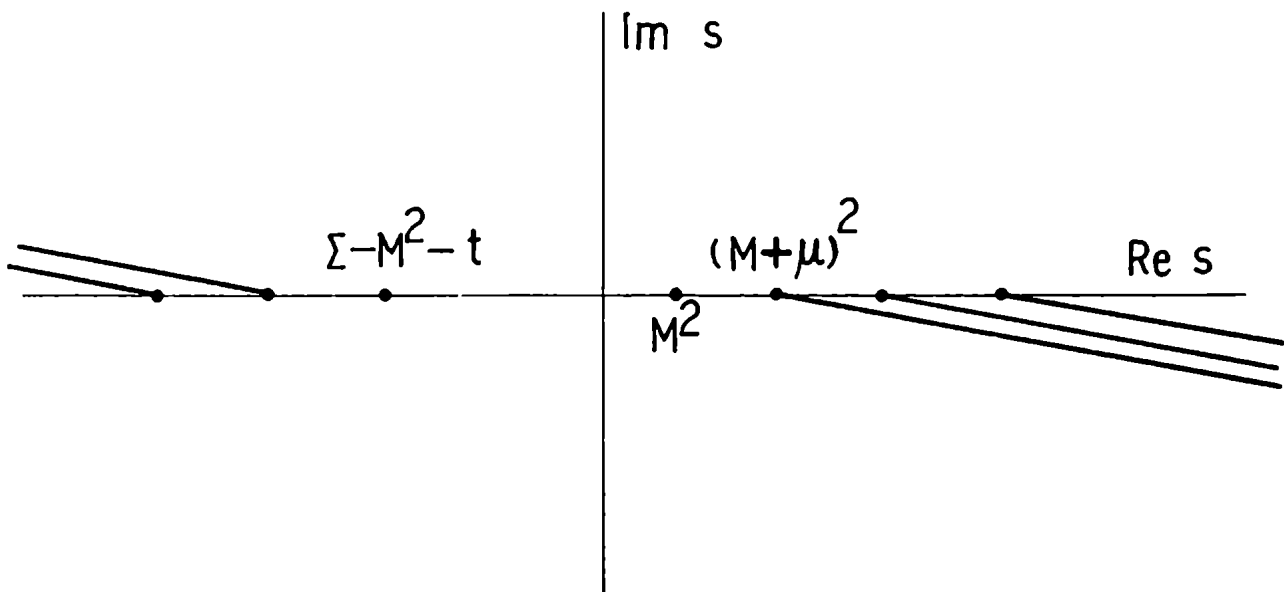


Fig. I.7

Las singularidades de la izquierda son generadas por la unitariedad en el canal u . Esta exigencia de la propiedad de

cruce, impone ampliar los enunciados que hemos dado del postulado de máxima analiticidad en esta forma: las únicas singularidades de las amplitudes de dispersión son las de unitariedad en todos los canales.

Postuladas las singularidades de la amplitud, una aplicación inmediata del teorema de Cauchy para funciones analíticas nos permite expresarlas en términos de las discontinuidades sobre sus cortes y de los residuos de sus polos

$$A(s,t) = \frac{1}{\pi} \int \frac{D_s(s',t)}{s'-s} ds' + \frac{1}{\pi} \int \frac{D_u(u',t)}{u'-u} du' \quad , \quad (4.1)$$

$$D_s(s,t) = \frac{1}{2i} \Delta_s(s,t) \quad , \quad D_u(u,t) = \frac{1}{2i} \Delta_u(u,t). \quad (4.2)$$

Las integrales de la fórmula (4.1) corren sobre los polos y cortes del canal s (a la derecha en la Fig.(I.7)) y del canal u (a la izquierda). Conviene destacar que para t suficientemente negativo, los cortes del canal s y del canal u se recubren parcialmente. La fórmula (2.4), continuada analíticamente en t a tales valores, sigue naturalmente siendo válida y aunque ahora los cortes dividen totalmente en dos al plano s , el salto de la amplitud, al pasar del semiplano inferior al superior, sigue siendo $2i \text{Im}A(s,t)$. Obviamente, en la zona de recubrimiento de ambos canales, la discontinuidad total será la suma de las discontinuidades sobre ambos cortes, lo cual exige generalizar la ecuación (2.5a) de modo que

$$\Delta_s(s,t) - \Delta_u(u,t) = 2i \text{Im}A(s,t) \quad (2.5b)$$

En consecuencia,

$$\text{Im } A(s,t) = D_s(s,t) - D_u(u,t) \quad (4.3)$$

donde ambos canales se recubren y, en lo que resta de los cortes,

$$\begin{aligned} \text{Im } A(s,t) &= D_s(s,t) && \text{(canal s)} \\ \text{Im } A(s,t) &= -D_u(u,t) && \text{(canal u)} \end{aligned} \quad (4.4)$$

En las fórmulas (2.5b), (4.3) y (4.4), $\text{Im}A(s,t)$ se refiere al labio de las cortaduras que está en el semiplano superior de s . La expresión (4.3) es, simplemente, la relación de unitariedad (2.3) cuando estados intermedios en los canales s y u pueden contribuir simultáneamente. De (4.3) y (4.4) vemos que las funciones D_s y D_u deben ser reales en la región no común de ambos canales, pudiendo no cumplirse en principio tal condición en la zona común, siempre que la diferencia $D_s - D_u$ sea una función real. Esto es lo que ocurre en la representación de Mandelstam.

En un polo

$$A^{\text{polo}}(s,t) = \frac{g^2}{s-M^2} = g^2 \left\{ P \frac{1}{s-M^2} - i\pi \delta(s-M^2) \right\}$$

y, en consecuencia,

$$D_s^{\text{polo}}(s,t) = -\pi g^2 \delta(s-M^2) . \quad (4.5)$$

La expresión (4.1) es una relación de dispersión. Al deducirla, hemos supuesto que las integrales convergen para argumentos grandes, es decir, que el punto en el infinito no da ninguna contribución a la amplitud. Si así no fuera, no siempre es *correcto*

posible escribir una relación de dispersión. Sólo en el caso en que la amplitud está acotada en el infinito por una potencia de la energía

$$\lim_{s \rightarrow \infty} |A(s,t)|/s^N \rightarrow 0, \quad (4.6)$$

es factible construir una expresión del tipo de (4.1) para la función $A(s,t)/(s-s_0)^N$, donde s_0 es un punto arbitrario. Usando la expresión

$$\frac{1}{(s-s_0)^N} = P \frac{1}{(s-s_0)^N} + \frac{i\pi(-)^N}{(N-1)!} \delta^{(N-1)}(s-s_0) \quad (4.7)$$

en el polo introducido artificialmente en s_0 , resulta finalmente

$$A(s,t) = A(s_0,t) + A'(s_0,t)(s-s_0) + \dots + \frac{1}{(N-1)!} A^{(N-1)}(s_0,t) \times$$

$$\times (s-s_0)^{N-1} + \frac{1}{\pi} (s-s_0)^N \int \frac{D_s(s',t)}{(s'-s)(s'-s_0)^N} ds' + (\text{canal } u). \quad (4.8)$$

La (4.8) es una relación de dispersión con N sustracciones en el punto s_0 . La contribución del punto en el infinito se refleja en la aparición de N constantes, en principio desconocidas, $A(s_0,t), \dots, A^{(N-1)}(s_0,t)$. Las sustracciones también pueden efectuarse en varios puntos diferentes.

En lo que respecta a la cota (4.6), ella se cumple automáticamente en aquellas situaciones en que las relaciones de dispersión han sido probadas en forma rigurosa a partir de la teoría axiomática de campos (referencias en Martin, 1966, y Epstein, 1968), y es una consecuencia de la condición de

temperancia en tal teoría (ver Streater & Wightman, 1964). Más aún, Martin (1966) ha mostrado en tales casos, usando unitariedad, que $N \leq 2$, al menos en un dominio limitado de la variable t , $|t| < R$, siendo R independiente de la energía. Este resultado es una extensión, a través del teorema óptico, de la cota de Froissart (1961)

$$\sigma_{\text{total}}(s) < C \log^2(s/s_0) \text{ cuando } s \rightarrow \infty, \quad (4.9)$$

que también puede probarse rigurosamente. De tal modo, el número de sustracciones necesarias, bajo las condiciones de validez de los resultados axiomáticos, es a lo sumo dos.

Las limitaciones con que tropiezan las demostraciones fundadas en primeros principios no parecen ser de naturaleza física, sino meramente matemática y es de esperar que en el futuro sea posible vencerlas. Supongamos entonces que las conclusiones de la teoría axiomática de campos van más allá de los límites que actualmente las contienen; que son independientes de ellos. En otras palabras, admitamos que es posible escribir relaciones de dispersión con un número finito de sustracciones, del tipo (4.6), para valores complejos arbitrarios de t . Para la reacción NN, por ejemplo, la función discontinuidad $D_s(s,t)$ viene dada, por debajo del segundo umbral de unitariedad, por el diagrama

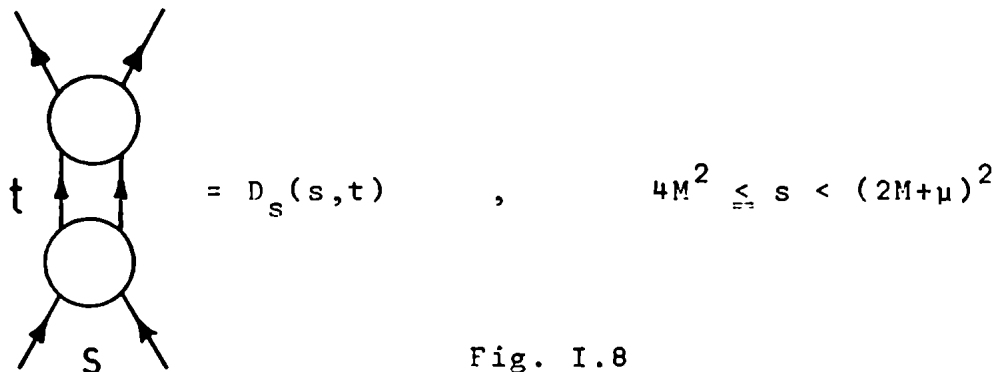


Fig. I.8

Las dos burbujas de este gráfico representan a la propia amplitud de dispersión nucleón-nucleón $A(s,t)$ (por simplicidad no incluimos las variables de espín). Ahora bien, $A(s,t)$ contiene las singularidades generadas por la unitariedad en el canal t y tales singularidades se transmiten, a través del diagrama (I.8) u otros similares con estados intermedios más complejos, a $D_s(s,t)$, que tendrá entonces un corte unitario y satisfará una relación de dispersión en t (supondremos que no es necesario efectuar sustracciones)

$$D_s(s,t) = \frac{1}{\pi} \int_{\sigma(s)}^{\infty} \frac{\rho_{st}(s,t')}{(t'-t)} dt' \quad (4.10)$$

La función ρ_{st} representa la discontinuidad de D_s sobre su corte y viene dada por los diagramas

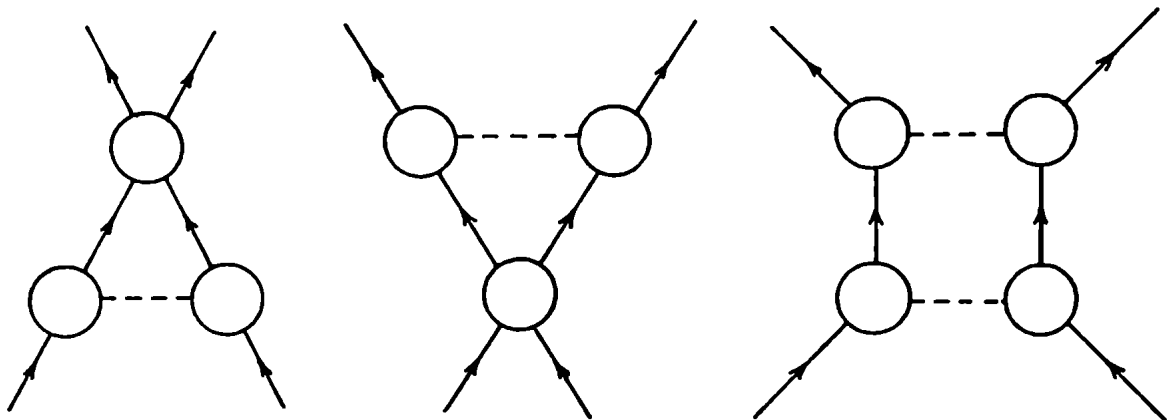


Fig. I.9

que corresponden a la contribución del polo del pión a cada una de las burbujas de la Fig.(I.8) más, naturalmente, los términos de doble unitariedad (en s y t) de orden superior.

El borde $\sigma(s)$ de la llamada función espectral doble ρ_{st} es, evidentemente, una línea de singularidades de la función $D_S(s,t)$. Las singularidades de diagramas unitarios del tipo (I.8) pueden ubicarse usando las reglas de Landau (1959). En el Apéndice III se encontrará la deducción de tales reglas y el cálculo de las curvas de Landau para los tres gráficos de la Fig.(I.9). Estas curvas son, en realidad, una complicada superficie en el dominio complejo de la doble variable (s,t) . La línea $\sigma(s)$ que nos interesa es la intersección de esta superficie con la hoja física. Un análisis cuidadoso hecho para los diagramas (I.9) muestra que la superficie singular yace sepultada totalmente en las hojas de Riemann no físicas, exceptuando un afloramiento superficial sobre la línea

$$(s-4\mu^2)(t-4\mu^2) = 4\mu^2, \quad t > 4\mu^2, \quad (4.11)$$

que constituye la expresión implícita de $\sigma(s)$. Tal singularidad pertenece al último gráfico de la Fig.(I.9).

Por simplicidad, hemos considerado sólo el corte en t de $D_S(s,t)$. Pero es obvio que a s fijo también tendrá una cortadura en u (a la izquierda en el plano t). La ecuación (4.10) debe extenderse pues

$$D_S(s,t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\rho_{st}(s,t')}{t'-t} dt' + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\rho_{su}(s,u')}{u'-u} du' \quad (4.12)$$

La función ρ_{su} viene dada por el mismo diagrama de antes, cambiando t por u .

Análogamente, puede escribirse que

$$D_u(u,t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\rho_{ut}(u,t')}{t'-t} dt' + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\rho_{us}(u,s')}{s'-s} ds' \quad (4.13)$$

y una expresión similar para D_t . Las funciones espectrales son distintas de cero sólo en puntos que están simultáneamente por encima de dos umbrales, o sea: donde dos canales cualesquiera se recubren parcialmente. Como fuera de tales regiones, según vimos, las discontinuidades D_s , D_t y D_u son reales, las funciones espectrales serán simplemente las partes imaginarias de las $D_{s,t,u}$ y, por lo tanto, reales. También resulta que deben ser simétricas en sus subíndices para que se cumpla la condición (4.3). Entonces, combinando las ecuaciones (4.1), (4.12) y (4.13), y tras un breve manipuleo de las integrales, tenemos finalmente

$$A(s,t) = \frac{1}{\pi^2} \iint_{-\infty}^{\infty} \frac{\rho_{st}(s',t')}{(s'-s)(t'-t)} ds' dt' + \frac{1}{\pi^2} \iint_{-\infty}^{\infty} \frac{\rho_{su}(s',u')}{(s'-s)(u'-u)} ds' du' + \frac{1}{\pi^2} \iint_{-\infty}^{\infty} \frac{\rho_{tu}(t',u')}{(t'-t)(u'-u)} dt' du' , \quad (4.14)$$

que es la representación de Mandelstam (1958) de las amplitudes de dispersión.

Para la reacción NN, que hemos tomado como ejemplo, la región precisa de integración está indicada en la Fig.(I.10), junto con las zonas físicas de los tres canales.

Naturalmente, la doble relación de dispersión (4.14) debe ser sustraída si las funciones espectrales no se anulan en el infinito.

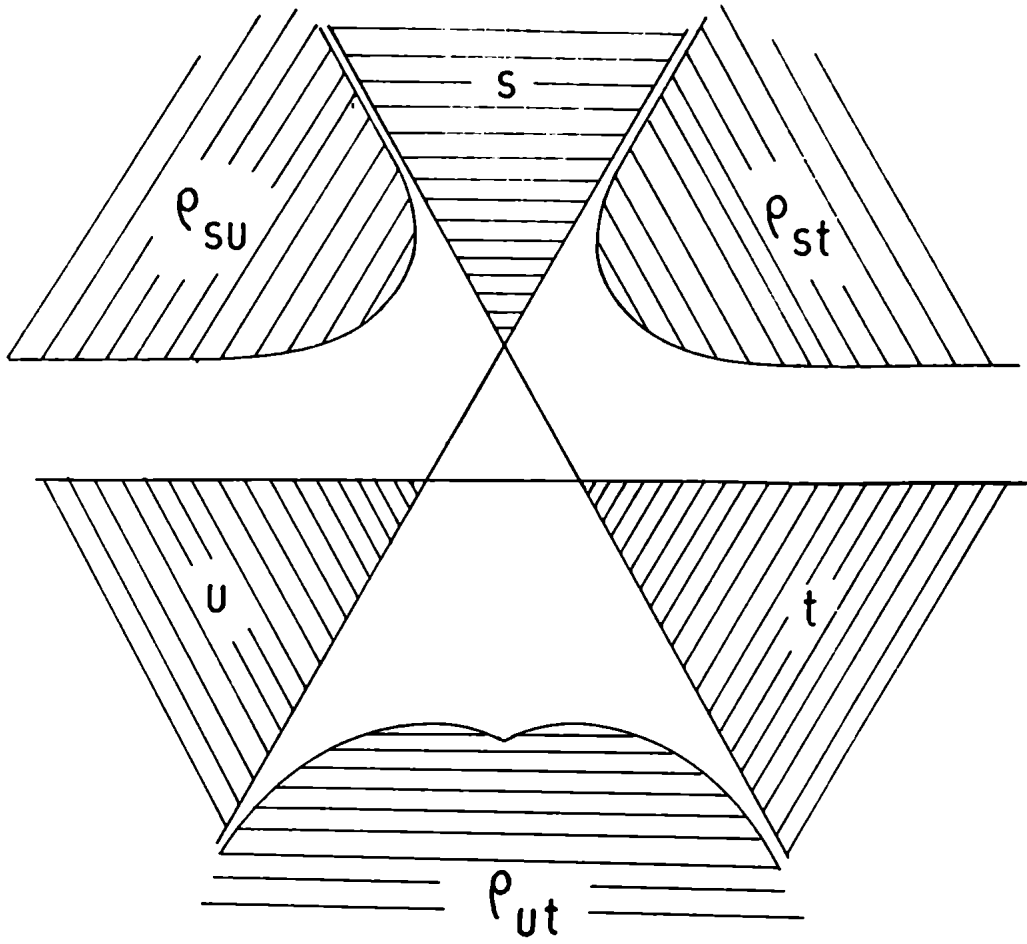


Fig. I.10

CAPITULO II. POLOS DE REGGE.

II.1. LA CONTINUACION DE FROISSART-GRIBOV.

En este capítulo nos ocuparemos de la descomposición de la amplitud de dispersión en ondas parciales. Supongamos, por simplicidad, que nuestras partículas no tienen espín. Entonces la conocida expansión en amplitudes de momento angular definido vale

$$A(s,t) = \sum_J (2J+1) A_J(s) P_J(z_s) \quad (1.1)$$

El coseno del ángulo de dispersión, z_s , viene dado por las fórmulas (A.I.10). La ortogonalidad de los polinomios de Legendre permite despejar

$$A_J(s) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 A(s,t) P_J(z_s) dz_s \quad (1.2)$$

En el plano z_s , la amplitud $A(s,t)$ tiene dos cortes de unitariedad: el de la derecha corresponde al canal t y el de la izquierda, al u .

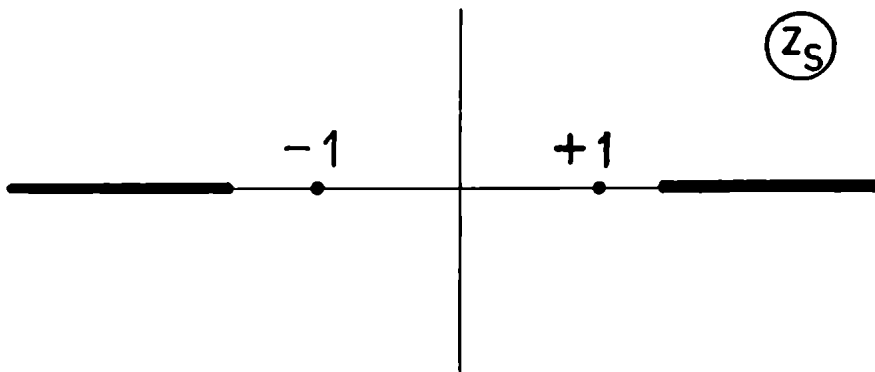


Fig. II.1

Tales cortes están fuera de la región de integración en (1.2) si s es superior al umbral elástico. Podemos escribir para $A(s,t)$ una relación de dispersión

$$A(s,t) = \frac{1}{\pi} \int \frac{D_t(s,z')}{z' - z_s} dz' + \frac{1}{\pi} \int \frac{D_u(s,z')}{z' - z_s} dz' \quad , \quad (1.3)$$

donde las integrales corren sobre ambos cortes, y reemplazarla en (1.2). Intercambiando el orden de integración y usando la relación de dispersión para las funciones de Legendre de segunda especie, de índice J entero mayor o igual que cero,

$$Q_J(z) = - \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{P_J(z_s)}{z_s - z} \quad , \quad (1.4)$$

resulta

$$A_J(s) = \frac{1}{\pi} \int D_t(s,z') Q_J(z') dz' + \frac{1}{\pi} \int D_u(s,z') Q_J(z') dz' \quad (1.5)$$

Aquí conviene plegar las singularidades de la izquierda sobre la mitad derecha del plano z_s , y usar la propiedad de simetría (J entero)

$$Q_J(-z') = -(-)^J Q_J(z') \quad , \quad (1.6)$$

para expresar todas las cantidades en (1.5) sobre el lado derecho. Así obtenemos

$$A_J(s) = \frac{1}{\pi} \int_{z_0}^{\infty} \left\{ D_t(s,z') + (-)^J D_u(s,-z') \right\} Q_J(z') dz' \quad , \quad (1.7)$$

con el plano z cortado como en la Fig. (II.2)

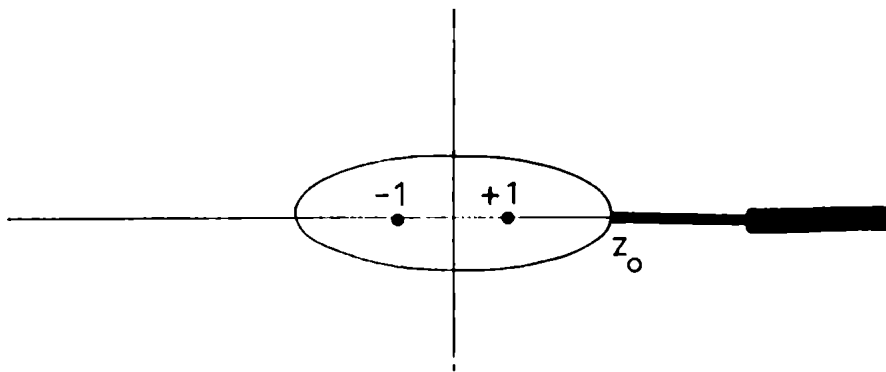


Fig. II.2

La integral (1.7) converge para J suficientemente elevado siempre que las funciones $D_{t,u}$ estén acotadas en infinito por alguna potencia de z . En efecto, si

$$|D_{t,u}| < z^N, \quad z \rightarrow \infty, \quad (1.8)$$

la cota

$$Q_J(z) \underset{z \rightarrow \infty}{\sim} z^{-(J+1)}, \quad (1.9)$$

nos asegura que $A_J(s)$ existe en todo el semiplano $\text{Re} J > N$. Recordemos que (1.8) requiere, en general, sustraer la relación de dispersión (1.3). Vemos, no obstante, que aún así está definida la expresión (1.7). Otra conclusión inmediata, que puede extraerse de (1.9) y las relaciones cinemáticas (A.I.10), es que, cuando \underline{s} se aproxima a sus umbrales o pseudoumbrales: $q_{12}=0, q_{34}=0, z_0$ se aleja hacia el infinito y la contribución total de la integral (1.7) resulta del orden de z_0^{-J} ; o sea

$$A_J(s) \sim (q_{12}q_{34})^J \quad (1.10)$$

cerca de los umbrales.

El comportamiento de $A_J(s)$ para J elevado puede obtenerse usando

$$Q_J(z) \underset{J \rightarrow \infty}{\sim} e^{-\alpha J}, \quad \text{Ch} \alpha = z, \quad (1.11a)$$

con el plano z cortado de -1 a $-\infty$. La zona de integración

relevante en (1.7) resulta pues la vecina al umbral y nos queda

$$\Lambda_J(s) \underset{J \rightarrow \infty}{\sim} e^{-\alpha_0 J}, \quad \text{Ch } \alpha_0 = z_0. \quad (1.12)$$

Con esta estimación y la expresión análoga a (1.11a)

$$P_J(z) \underset{J \rightarrow \infty}{\sim} e^{\alpha J}, \quad \text{Ch } \alpha = z, \quad (1.11b)$$

puede evaluarse la región de convergencia de la serie (1.1), de la condición de anulación de sus términos superiores

$$\lim_{J \rightarrow \infty} e^{-(\alpha_0 - \alpha')J} = 0, \quad \alpha = \alpha' + i\alpha'' \quad (1.13)$$

Las líneas $\alpha' = \text{constante}$ son, en el plano z , elipses con focos en 1 y semiejes $(\text{Ch } \alpha', \text{Sh } \alpha')$. Luego, la serie de ondas parciales converge dentro de la elipse de esta familia cuyo borde pasa por z_0 , la singularidad más próxima. Esta es la llamada elipse de Lehmann(1958)-Martin(1966), Fig(II.2).

Es posible extender el dominio de convergencia de la serie (1.1) si se interpreta a $\Lambda_J(s)$ como una función analítica de J . Para ello es necesario interpolarla analíticamente entre los valores enteros de J , para los cuales está definida. Supongamos por un momento conocer tal interpolación. Entonces la serie puede transformarse en una integral de contorno (Watson, 1918; Sommerfeld, 1949):

$$A(s,t) = - \frac{1}{2i} \int (2J+1) \Lambda_J(s) \frac{P_J(-z_s)}{\sin \pi J} dJ, \quad (1.14)$$

gracias a los polos de $(\sin \pi J)^{-1}$ -ver Fig.II.3-.

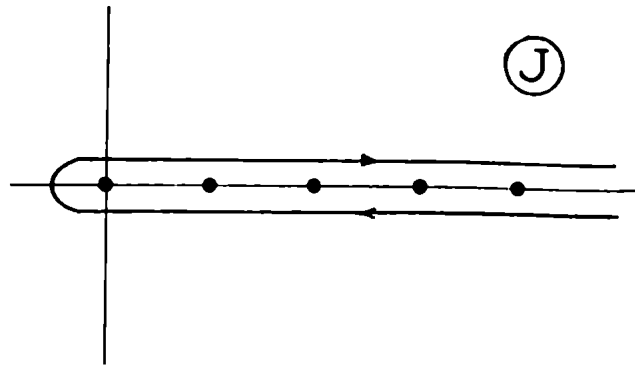


Fig. II.3

Cualquier singularidad de A_J debe quedar fuera del contorno indicado. Si el comportamiento asintótico de $A_J \sim \exp(-\alpha_0 J)$, para J entero y elevado, pudiera extenderse al plano complejo, sería posible abrir el contorno de integración en la región $\text{Re}J > N$, sin necesidad de integrar sobre un arco en el infinito.

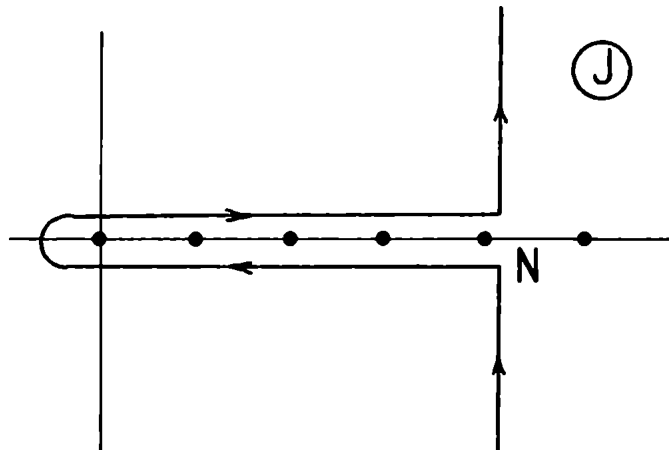


Fig. II.4

En efecto, si $-1 \leq z_s \leq 1$, el integrando en (1.14) sería en tal arco del orden de

$$\exp \{ -(\alpha_0 - \alpha) \text{Re}J - \pi |\text{Im}J| \} \rightarrow 0 .$$

Se podría probar, a continuación, que la integral vertical

de la Fig.(II.4) es continuable analíticamente a todo el plano z_s , excepto un corte desde z_0 hasta ∞ . Bastaría con observar que el integrando, en esa porción del contorno, está acotado por

$$e^{-\{\pi-\alpha''(-z_s)\} \cdot |\text{Im}J|}$$

(ver (1.11) y (1.13)) y $\alpha''(-z_s)$ es, en todos los casos, menor que π si el plano z_s tiene el corte indicado.

Sin embargo, la función $A_J(s)$, definida por (1.7), no satisface nuestra hipótesis, pues el factor $(-1)^J = e^{i\pi J}$, no está acotado en el semiplano inferior. Saldremos del paso definiendo dos funciones, las amplitudes de onda parcial de signatura definida,

$$A_J^\pm(s) = \frac{1}{\pi} \int_{z_0}^{\infty} \{D_t(s, z') \pm D_u(s, -z')\} Q_J(z') dz' \quad , \quad (1.15)$$

que poseen la siguiente propiedad

$$\begin{aligned} A_J^+(s) &= A_J(s) \quad , \quad J = \text{entero par} ; \\ A_J^-(s) &= A_J(s) \quad , \quad J = \text{entero impar.} \end{aligned} \quad (1.16)$$

Estas amplitudes tienen el comportamiento requerido en el infinito y, por (1.16), son equivalentes a las amplitudes físicas de onda parcial. La fórmula (1.15), conocida como la interpolación de Froissart (1961) y Gribov (1961), define su continuación analítica a J complejo. Que tal extensión es única, sujeta a la condición asintótica $A_J = O(e^{-\alpha_0 J})$, lo asegura el teorema de Carlson (ver Titchmarsh, 1939, párrafo 5.81).

Llamando

$$D_t^\pm(s, z) = D_t(s, z) \pm D_u(s, -z) , \quad (1.17)$$

reescribamos (1.15) así

$$A_J^\pm(s) = \frac{1}{\pi} \int_{z_0}^{\infty} D_t^\pm(s, z) Q_J(z) dz . \quad (1.18)$$

Yendo en sentido inverso, se prueba que las discontinuidades D_t^\pm corresponden a dos funciones con corte sólo a la derecha

$$A^\pm(s, t) = \frac{1}{\pi} \int_{t_0}^{\infty} \frac{D_t^\pm(s, t')}{t' - t} dt' , \quad (1.19)$$

que tienen la siguiente descomposición en ondas parciales

$$A^\pm(s, t) = \sum (2J+1) A_J^\pm(s) P_J(z_s) \quad (1.20)$$

Estas series sí son continuables fuera de la elipse de Lehmann-Martin, excepto el corte unitario, usando la transformación de Watson-Sommerfeld y el contorno de la Fig.II.4.

La amplitud física $A(s, t)$ puede ponerse en función de las amplitudes de signatura definida $A^\pm(s, t)$, utilizando la propiedad (1.16), que nos permite escribir (1.1) en la forma

$$A(s, t) = \sum (2J+1) \left\{ A_J^+(s) \frac{P_J(z_s) + P_J(-z_s)}{2} + A_J^-(s) \frac{P_J(z_s) - P_J(-z_s)}{2} \right\}$$

gracias a la simetría o antisimetría de los polinomios de Legendre. Usando (1.20), resulta ahora

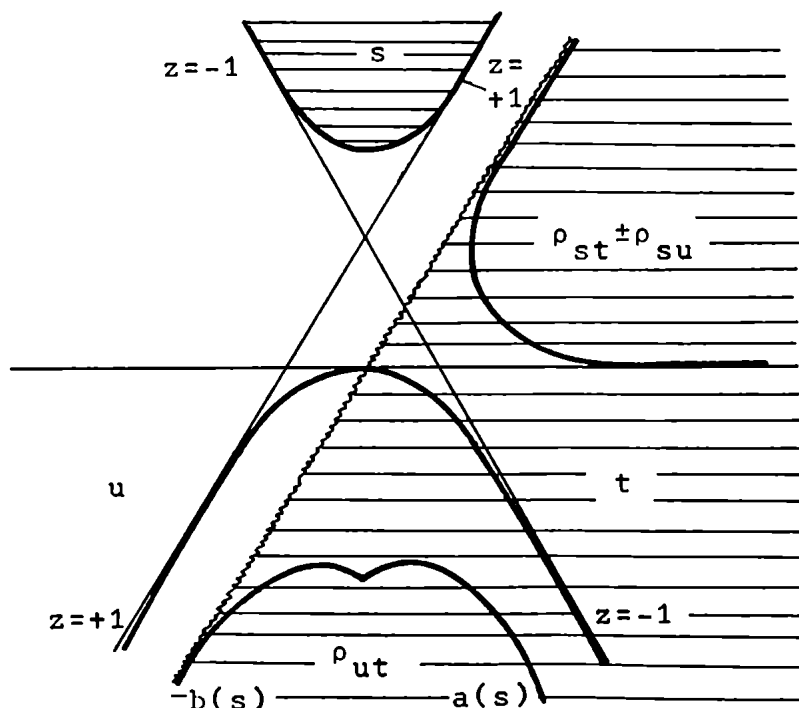
$$A(s, t) = 1/2 \{ A^+(s, z_s) + A^+(s, -z_s) \} + 1/2 \{ A^-(s, z_s) - A^-(s, -z_s) \} . \quad (1.21)$$

Vemos de aquí que la función $A^+(s,t)$ contiene la parte par ante inversiones $z_s \rightarrow -z_s$ de la amplitud de dispersión $A(s,t)$, y $A^-(s,t)$ la impar. En lo sucesivo, nos referiremos a las amplitudes de signatura definida, conectándolas con la amplitud física, cuando sea necesario, mediante (1.21).

II.2. PROPIEDADES DE LAS ONDAS PARCIALES.

Estudiaremos ahora las propiedades analíticas de la continuación de Froissart-Gribov (1.18) en las dos variables s y J . Las funciones $D_t(s,t)$ tienen los cortes de unitariedad de los canales s y u , y para J entero, $Q_J(z)$ tiene un corte $(1,-1)$, cuya discontinuidad puede obtenerse de (1.4). En la Fig.(II.5) hemos indicado estas regiones espectrales de D_t y de $Q_J(z)$, para el caso sencillo de la dispersión pión-nucleón en el canal $\pi\pi \rightarrow N\bar{N}$. La integración (1.18) se efectúa a s constante y a la derecha de la línea ondulada $z=z_0$ (región sombreada).

Fig.II.5



Antes de seguir, recordemos que, cerca de los umbrales y pseudoumbrales del canal s , $\Lambda_J^\pm(s)$ tiene el comportamiento (1.10), lo cual significa que, para J no entero, dichos puntos serán de ramificación. Conviene remover esta singularidad, que es de origen puramente cinemático, construyendo la amplitud

$$B_J^\pm(s) = (q_{12}q_{34})^{-J} A_J^\pm(s) \quad (2.1)$$

que es regular en los umbrales y pseudoumbrales. Los cortes de $B_J^\pm(s)$ y sus respectivas discontinuidades, se obtienen integrando las funciones espectrales de la Fig.(II.5); esto es: para s por encima del primer umbral ($4\mu^2$ en el ejemplo)

$$\{\text{Im } B_J^\pm(s)\}_D = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty (\rho_{st} \pm \rho_{su}) Q_J(z') dz' \frac{1}{(q_{12}q_{34})^J} \quad (2.2)$$

y para s en el semiplano izquierdo

$$\begin{aligned} \{\text{Im } B_J^\pm(s)\}_I &= \frac{1}{\pi} \int_{a(s)}^{b(s)} \rho_{tu}(t', u') (1 \mp e^{-i\pi J}) Q_J(z') dz' \frac{1}{(q_{12}q_{34})^J} \\ &+ 1/2 \int_{-1}^{z_0} P_J(-z') D_t^\pm(s, z') dz' \frac{1}{(-q_{12}q_{34})^J} \end{aligned} \quad (2.3)$$

Estas fórmulas pueden continuarse analíticamente a J complejo. La segunda integral de (2.3) corresponde a la discontinuidad de la función de Legendre de segunda especie. En resumen, $B_J^\pm(s)$ tiene, en el semiplano derecho de s , todos los cortes de unitariedad de este canal, y en el izquierdo, cortes debidos a intercambios en los canales cruzados t y u , representados por la función D_t^\pm y por la tercer función espectral ρ_{tu} .

Para ejemplos como el elegido, que son simétricos ante el intercambio $t \leftrightarrow u$, la estructura analítica de $B_J(s)$ en el plano s resulta la de la Fig.(II.6), perteneciente a la dispersión $\pi\pi$ elástica.

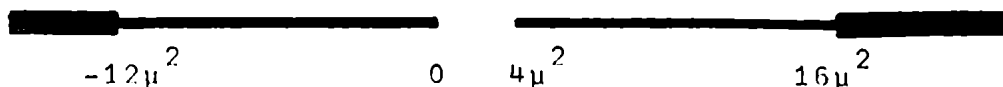


Fig.II.6

En ausencia de simetría, las singularidades de la izquierda son más complejas. Los estados intermedios del canal s que producen el corte derecho, pueden resaltarse aún más, si J es entero positivo o cero, transformando la integral (2.2) en

$$\{\text{Im } B_J^\pm(s)\}_D = 1/2 \int_{-1}^1 D_s^\pm(s, z_s) P_J(z_s) dz \frac{1}{(q_{12}q_{34})^J}, \quad (2.4)$$

mediante la relación (1.4) y notando que, para las amplitudes de signatura definida

$$D_s^\pm(s, z_s) = \frac{1}{\pi} \int \frac{\rho_{st}(s, z') \pm \rho_{su}(s, -z')}{z' - z_s} dz'. \quad (2.5)$$

El nuevo contorno de integración corresponde exactamente a la región física del canal s , rayada en la Fig.(II.5) - y a su continuación analítica, debajo del umbral-. La expresión (2.4) también puede inferirse de (1.20).

Una conclusión importante, que luego usaremos, puede extraerse de (2.3). Como funciones de J , las Q_J tienen polos simples en los enteros negativos. Luego, en los enteros negativos, el corte izquierdo de la Fig.(II.6) tiene polos, en general, a menos que la tercer función espectral sea nula. Para la amplitud de signatura positiva, dichos polos están en $J=-1,-3, \dots$; y para signatura negativa, en los enteros negativos pares. Se dice que los polos de que hablamos aparecen en puntos de mala signatura, pues un estado físico de espín par, por ejemplo, debiera contribuir a una amplitud de signatura positiva. Es de esperar, naturalmente, que los polos del corte izquierdo induzcan polos en toda la amplitud. En resumen: como función de J , las amplitudes de onda parcial tienen polos simples en los enteros negativos de mala signatura (Gribov & Pomeranchuk (1962a)).

Es evidente que pueden escribirse relaciones de dispersión en s para las amplitudes de onda parcial, del tipo

$$B_J^\pm(s) = \frac{1}{\pi} \int_D \frac{\{\text{Im } B_J^\pm(s')\}}{s'-s} ds' + \frac{1}{\pi} \int_I \frac{\{\text{Im } B_J^\pm(s')\}}{s'-s} ds'$$

Veamos ahora cómo se expresa la relación de unitariedad para las ondas parciales. Si tomamos en cuenta canales comunicantes de dos partículas sin espín, resulta de (I.2.3) y (1.1), después de integrar sobre todos los ángulos intermedios:

$$\text{Im } A_J^{ba}(s) = \sum_n \rho^n(s) A_J^{bn}(s) A_J^{an*}(s) \quad , \quad (2.6)$$

donde

$$\rho^n(s) = \frac{q^n}{8\pi\sqrt{s}} \quad (2.7)$$

es el factor de espacio de fases para el estado intermedio n. Para una reacción elástica y por debajo del primer umbral inelástico,

$$\text{Im } A_J^{aa}(s) = \rho^a(s) |A_J^{aa}(s)|^2, \quad (2.8)$$

cuya solución más general es

$$A_J^{aa}(s) = \frac{\sin \delta_J(s) e^{i\delta_J}}{\rho^a(s)} = \frac{e^{2i\delta_J} - 1}{2i\rho^a} \quad (2.9)$$

Para energía arbitraria, el teorema óptico impone

$$\text{Im } A_J^{aa}(s) = \rho^a \cdot |A_J^{aa}(s)|^2 \cdot \frac{\sigma_J^{\text{total}}}{\sigma_J^{\text{elást.}}} \geq \rho^a(s) |A_J^{aa}(s)|^2$$

y (2.9) se modifica, introduciendo el parámetro de elasticidad $\eta_J(s)$

$$A_J^{aa}(s) = \frac{\eta_J(s) e^{2i\delta_J} - 1}{2i\rho^a} \quad (2.10)$$

La relación de unitariedad para las amplitudes $B_J(s)$ es idéntica a (2.6) cambiando el espacio de fases por

$$\rho_J^n(s) = \frac{(q^n)^{2J+1}}{8\pi\sqrt{s}} \quad (2.11)$$

Es conveniente escribir tal relación en la forma

$$B_J^{ba}(s) - B_J^{ba*}(s) = 2i \sum_n \rho^n(s) B_J^{bn}(s) B_J^{an*}(s) \quad (2.12)$$

Para los J enteros esta expresión es aplicable a B_J^\pm -ver (1.16)-.

Si además la reescribimos en forma analítica (la operación * no lo es)

$$B_J^\pm(s) - B_{J^*}^{\pm*}(s) = 2i B_J^\pm(s) \cdot \rho_J \cdot B_{J^*}^{\pm*}(s) \quad , \quad (2.13)$$

el teorema de Carlson nos asegura que esta relación de unitariedad es continuable a J complejo y que tal continuación es única. En (2.13) todas las cantidades son matrices en el espacio de los canales. Tal cual está escrita, la relación de unitariedad nos da solamente la discontinuidad de B_J^\pm sobre su corte derecho, fórmulas (2.2) y (2.4)

II.3. POLOS DE REGGE.

Las únicas singularidades en el plano J que hemos encontrado hasta ahora son los polos fijos en los enteros negativos de mala signatura, inducidos por la tercer función espectral, ecuación (2.3). Pero también hay singularidades asociadas con las divergencias de la integral (1.18)-que define la continuación de Froissart & Gribov- o, lo que es lo mismo, del corte derecho (2.2). Supongamos, en efecto, que cuando la variable de integración z o t tiende a infinito,

$$D_t^\pm(s,t) \underset{t \rightarrow \infty}{\sim} t^{\alpha(s)}. \quad (3.1)$$

Naturalmente que, si deseamos trabajar con (2.2), se debe suponer igual comportamiento para las funciones espectrales.

De (1.9) resulta que la integral puede ponerse, si T es un argumento muy grande, como

$$A_{J}^{\pm}(s) = \frac{1}{\pi} \int_{t_0}^T D_t^{\pm} \rho_J(z) dz + \text{constant} \times \int_T^{\infty} t^{\alpha(s)-J-1} dt .$$

La primer integral existe siempre. La segunda vale

$$- \exp \{ [\alpha(s)-J] \cdot \log T \} / [\alpha(s)-J] , \quad (3.2)$$

si $\text{Re} J > \alpha(s)$, pero claramente la expresión (3.2) es continuable analíticamente como función de J, aún a la izquierda de ese valor, en la zona donde la integral deja de existir. Vemos así que A_{J}^{\pm} tiene un polo simple en $J = \alpha(s)$, íntimamente ligado al comportamiento asintótico de la amplitud con la energía del canal cruzado. Tales polos, que como vemos no están fijos, sino que se mueven con la energía s, fueron descubiertos por T. Regge (1959, 1960) en la mecánica cuántica no relativista. Los resultados de esta teoría pueden consultarse en la obra de De Alfaro & Regge (1965).

Si en lugar de (3.1), la función D_t^{\pm} tiende a una expresión parecida, pero conteniendo logaritmos, como

$$D_t^{\pm}(s,t) \underset{t \rightarrow \infty}{\sim} \frac{t^{\alpha(s)}}{\log t} \quad (3.1')$$

en el plano de J aparecerán puntos de ramificación y cortaduras móviles, asociadas con ellos. Las expresiones (3.1) y (3.1') están justificadas en teoría de perturbaciones. Diversos autores han mostrado que sumas infinitas de diagramas de Feynman de tipo escalera tienen comportamientos asintóticos de esa naturaleza. Los diagramas no planos, que contribuyen a la tercer función espectral ρ_{tu} , son precisamente los que

dan origen a (3.1'), Mandelstam (1963). Luego volveremos sobre este punto. Una buena reseña de los resultados perturbativos está incluida en el libro de Eden et al.(1966). Concluyendo: en el plano complejo J , las amplitudes de onda parcial tienen, además de los polos fijos de mala signatura, polos y cortes móviles, determinados por la región asintótica de los canales cruzados.

Si estas singularidades son las únicas que impiden deformar el contorno de la Fig.(II.4) más hacia la izquierda, sólo bastará evitarlas como en la Fig.(II.7),

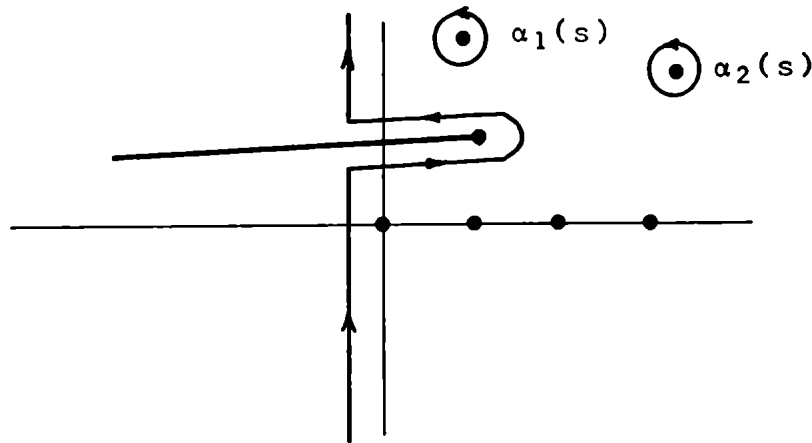


Fig.II.7

en la que hemos supuesto dos polos, $\alpha_1(s)$ y $\alpha_2(s)$, y un corte de Regge. La expresión (1.14) para las amplitudes de signatura definida queda ahora

$$\begin{aligned}
 \mathbb{A}(s,t) = & -\pi \int_{\text{POLOS}} \{2\alpha(s)+1\} \beta^{\pm}(s) \frac{P_{\alpha}(-z_s)}{\sin \pi \alpha(s)} + (\text{corte}) + \\
 & - \frac{1}{2i} \int_{L-i\infty}^{L+i\infty} (2J+1) A_J(s) \frac{P_J(-z_s)}{\sin \pi J} dJ \quad (3.3)
 \end{aligned}$$

Hemos supuesto que, en las cercanías de un polo de Regge,

$$A_J^\pm(s) \approx \frac{\beta^\pm(s)}{J-\alpha(s)} \quad (3.4)$$

En la fórmula (3.3), $t \rightarrow \infty$ significa z_s muy grande y, tomando el comportamiento asintótico de las funciones de Legendre

$$P_\alpha(z) \underset{z \rightarrow \infty}{\sim} z^{|\alpha+1/2|-1/2} \quad \alpha \neq \text{entero negativo}, \quad (3.5)$$

con el plano z cortado en $(-1, -\infty)$, resulta que cada término de la suma en (3.3) es de orden $t^{\alpha(s)}$. El polo más a la derecha domina a muy alta transferencia de momento. Podemos decir, invirtiendo una afirmación anterior, que los polos de Regge de un canal dan la amplitud asintótica en el canal cruzado. Vemos de (3.5), por otra parte, que la última integral de (3.3) es decreciente en valor absoluto hasta que $L = -1/2$, tras de lo cual comenzará a crecer nuevamente. La expresión (3.3) no resulta pues adecuada si queremos empujar aún más el contorno hacia la izquierda, sin perder la dominancia de los polos y cortes de Regge. No obstante, existe una continuación de la fórmula, debida a Mandelstam (1962), que logra ese objetivo. Consiste en usar la identidad

$$P_J(z) = -\frac{1}{\pi} \operatorname{tg} \pi J Q_{-J-1}(z) + \frac{1}{\pi} \operatorname{tg} \pi J Q_J(z) \quad , \quad (3.6)$$

que escribiremos en la forma $P_J(z) = \Pi_J(z) + \Pi_{-J-1}(z)$, definiendo

$$\Pi_J(z) = -\frac{1}{\pi} \operatorname{tg} \pi J Q_{-J-1}(z) \quad (3.7)$$

Estas nuevas funciones tienen la siguiente propiedad evidente

$$\Pi_J(z) = P_J(z) , \quad J \geq 0$$

$$\Pi_J(z) = 0 , \quad J < 0$$

Luego, podemos escribir (1.20) así

$$\Lambda^\pm(s, t) = \sum_J (2J+1) A_J^\pm(s) \Pi_J(z)$$

Ahora podemos efectuar una transformación de Watson-Sommerfeld, pero teniendo en cuenta que es necesario excluir los polos que las funciones $\Pi_J(z)$ tienen en todos los J semienteros debido a la tangente de la definición (3.7). Entonces

$$\begin{aligned} A^\pm(s, t) = & - \frac{1}{2i} \int_{-1/2-i\infty}^{-1/2+i\infty} (2J+1) A_J^\pm(s) \frac{\Pi_J(-z_s)}{\sin\pi J} dJ - \\ & - \frac{1}{\pi} \sum_{J=0}^{\infty} (-)^{J-1} 2J \Lambda_{J-1/2}(s) Q_{-J-1/2}(-z_s) + \\ & + (\text{polos y cortes de Regge}) \end{aligned} \quad (3.8)$$

La función Π_J , estando J en el semiplano izquierdo, tiene el comportamiento asintótico (de (3.7) y (1.9))

$$\Pi_J \underset{z \rightarrow \infty}{\sim} z^J$$

que va a cero tanto más rápido cuanto más a la izquierda esté J . Luego, corriendo el contorno, la integral residual se empequeñece y cobran más relevancia las contribuciones de Regge. En cuanto a la serie de (3.8), es necesario ir agregándole los polos en los semienteros negativos, que van surgiendo a medida que la integral de contorno se desliza hacia la izquierda. Sin embargo, los polos en $J=-1/2, -3/2, \dots$, se cancelan con los de $J=1/2, 3/2, \dots$ -ya presentes en (3.8)- si se cumple la condición

$$A_{J-1/2}(s) = A_{-J-1/2}(s) \quad (J \text{ entero}). \quad (3.9)$$

Esta condición es fruto de la relación de simetría

$$Q_{J-1/2}(z) = Q_{-J-1/2}(z) \quad (J \text{ entero}),$$

que proviene de (3.6) y de la continuación de Froissart-Gribov (1.18). Finalmente, puede escribirse

$$\begin{aligned} A^\pm(s, t) = & \frac{1}{2i\pi} \int_{-L-i\infty}^{-L+i\infty} (2J+1) A_J^\pm(s) \frac{Q_{-J-1}(-z_s)}{\cos \pi J} dJ - \\ & - \frac{1}{\pi} \sum_{\{L+1/2\}}^{\infty} (-)^{J-1} 2J A_{J-1/2}^\pm(s) Q_{J-1/2}(-z_s) + \\ & + (\text{polos y cortes de Regge}) \end{aligned} \quad (3.10)$$

donde $\{L+1/2\}$ significa la parte entera y L es cualquier número mayor que $1/2$. También la serie de (3.10) decrece rápidamente con z si L es elevado.

Habida cuenta de la fórmula (1.21), la contribución de un polo de Regge de signatura (\pm) a la amplitud física $A(s, t)$ es

$$A_{\text{Regge}}(s, t) = - \frac{\pi}{2} (2\alpha+1) \beta^\pm(s) \frac{P_\alpha(-z_s) \pm P_\alpha(z_s)}{\sin \pi \alpha} \quad (3.11)$$

A muy alta transferencia de momento, de (A.I.10),

$$z_s \approx \frac{t}{2q_{12}q_{34}} \gg 1.$$

Usando la expresión asintótica para las funciones de Legendre -suponiendo $\alpha(s) > -1/2$ -

$$P_\alpha(z) \underset{z \rightarrow \infty}{\sim} \frac{\Gamma(\alpha+1/2)}{\sqrt{\pi} \Gamma(\alpha+1)} (2z)^\alpha \quad (3.12)$$

resulta, tras un poco de álgebra,

$$A_{\text{Regge}}(s,t) = \gamma^{\pm}(s) \frac{-1 \mp e^{-i\pi\alpha}}{\sin \pi\alpha} (t/t_0)^{\alpha(s)} \quad (3.13)$$

donde

$$\gamma^{\pm}(s) = \frac{\beta^{\pm}(s) \cdot t_0^{\alpha(s)}}{\{-a_{12}(s)a_{34}(s)\}^{\alpha(s)}} \left\{ \sqrt{\pi} \frac{\Gamma(\alpha+3/2)}{\Gamma(\alpha+1)} \right\} \quad (3.14)$$

es un residuo reducido, que varía suavemente con s , y t_0 es un factor de escala arbitrario (usualmente 1 GeV). La expresión $-1 \mp e^{-i\pi\alpha}$ es el factor de signatura, que se anula en los puntos de mala signatura, donde el polo no debe contribuir.

Las travectorias $\alpha(s)$ y residuos reducidos $\gamma^{\pm}(s)$ son funciones analíticas de s , reales debajo del corte derecho y sin el corte izquierdo de la amplitud de onda parcial. Para ver esto, consideremos nuevamente la integral que lleva a la expresión (3.2)

$$E^{\pm}(s,J) = \frac{1}{\pi} \int_T^{\infty} D_t^{\pm}(s,t) Q_J(z') dz' \quad (3.15)$$

Sabemos por (3.2) y (3.4) que las ecuaciones

$$\{E^{\pm}(s,\alpha)\}^{-1} = 0 \quad \beta^{\pm}(s) = \lim_{J \rightarrow \alpha(s)} \{(J-\alpha(s)) \cdot E^{\pm}(s,J)\} \quad (3.16)$$

definen los parámetros de Regge que nos interesan. En general, los puntos de ramificación en s de $E^{\pm}(s,J)$ se propagarán, a través de (3.16), a dichos parámetros. Sabemos, por ejemplo, que $E^{\pm}(s,J) \sim (q_{12}q_{34})^J$ en los umbrales y pseudoumbrales del canal s . Es obvio que esta singularidad no se transmitirá a $\alpha(s)$, pero sí a $\beta^{\pm}(s)$, aunque gracias a la definición (3.14), el residuo reducido $\gamma^{\pm}(s)$ no será afectado. Los demás puntos de ramificación de $E^{\pm}(s,J)$ se obtienen por comparación con la continuación de Froissart-Gribov (1.18), que es formalmente

análoga cambiando $t_0 \rightarrow T$. Mirando la Fig. (II.5) y notando que, como T es arbitrariamente grande, la línea de integración puede correrse hacia la derecha cuanto se desee, se concluye que el corte izquierdo en el plano s de $F^\pm(s, J)$ se aleja con T hacia $-\infty$ hasta desaparecer. Las funciones $\alpha(s)$ y $\gamma^\pm(s)$ satisfacen pues relaciones de dispersión con una discontinuidad imaginaria por encima del umbral del canal s .

La relación de unitariedad (2.13) impone ciertas restricciones a las trayectorias de los polos de Regge. Tomemos una energía en la región elástica. Vemos de inmediato que la amplitud no puede tener un polo para $J = \alpha(s)$ real, pues un polo simple en el miembro izquierdo de (2.13) es polo doble en su parte derecha, lo que es absurdo, a menos que el residuo se anule. El argumento no vale por debajo del umbral elástico, donde el miembro derecho de la ecuación de unitariedad es nulo. Confirmamos pues que la trayectoria $\alpha(s)$ es real debajo del umbral elástico y compleja por encima. El mismo argumento se opondría a la existencia de los polos fijos en los enteros negativos de mala signatura. Sin embargo, la situación es más complicada. Sabemos que el corte derecho de la amplitud de onda parcial es regular si $\text{Re } J > N$. Si continuamos J al semiplano opuesto, deja de serlo porque las singularidades de Regge, estando inicialmente en la segunda hoja de Riemann o en otras hojas no físicas, alcanzan el corte y penetran en la hoja física. Si efectuamos la continuación en J a lo largo del camino $J+i\epsilon$, con J real, tendremos la típica situación de la Fig.(II.8) en el plano s

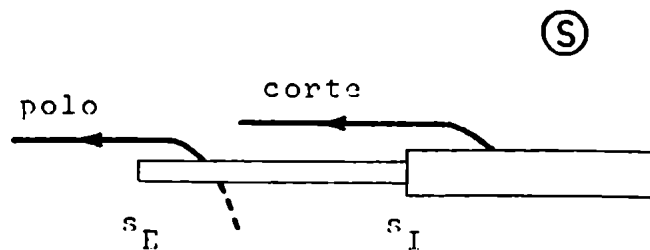


Fig. II.8

El polo de Regge proviene de la segunda hoja de Riemann. Los cortes de Regge, en cambio, no pueden provenir de tal hoja, pues se demuestra muy fácilmente que todos los puntos de ramificación de la segunda hoja lo son también de la primera. Ellos vienen pues, de la zona inelástica y atraviesan la cortadura derecha por encima del primer umbral inelástico s_I . Estos cortes son muy importantes, porque por ejemplo, cuando J tiende al valor -1 , donde hay un polo fijo de mala signatura, cubren totalmente el corte unitario y la relación (2.13) es inaplicable. En consecuencia, la existencia del polo fijo se mantiene pues el argumento contra él esgrimido no es válido, Jones & Teplitz (1967), Mandelstam & Wang (1967). Es de notar que tanto los polos fijos, como los cortes móviles que permiten su existencia, son ambos efectos de la tercer función espectral.

Una propiedad interesante de los residuos de Regge es la factorización, que se deduce de las relaciones de unitariedad que ligan entre sí diversos procesos (Gribov & Pomeranchuk, 1962b). Consideremos, por ejemplo, las tres relaciones

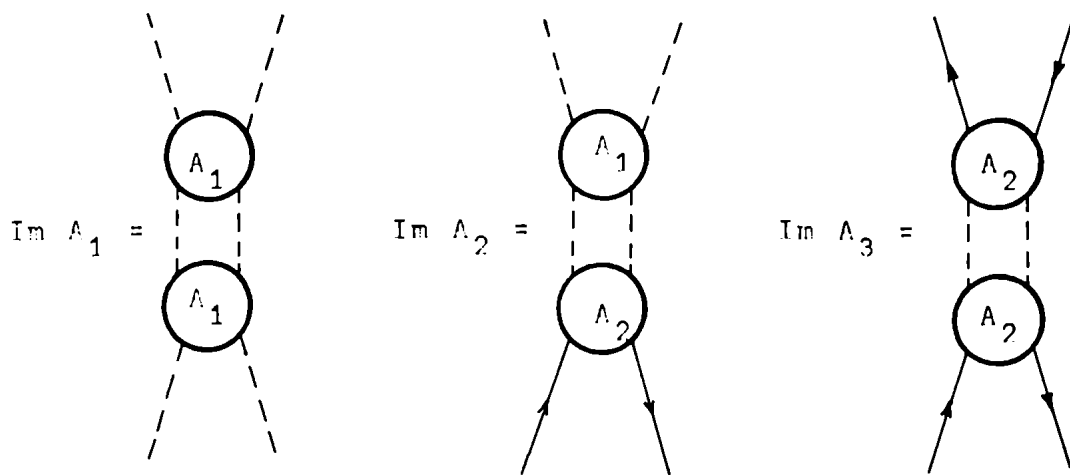


Fig. II.9

en la región de los estados intermedios de dos piones, para las reacciones $\pi\pi$ elástica (amplitud A_1), $N\bar{N} \rightarrow \pi\pi$ (A_2) y $N\bar{N}$ elástica (A_3). De las ecuaciones (2.13) para las amplitudes parciales y suponiendo que A_1 tiene un polo de Regge, también resulta que A_2 y A_3 lo tienen y que los respectivos residuos se factorizan

$$\beta_2^2(s) = \beta_1(s) \cdot \beta_3(s) \quad (3.17)$$

Este resultado puede interpretarse gráficamente así

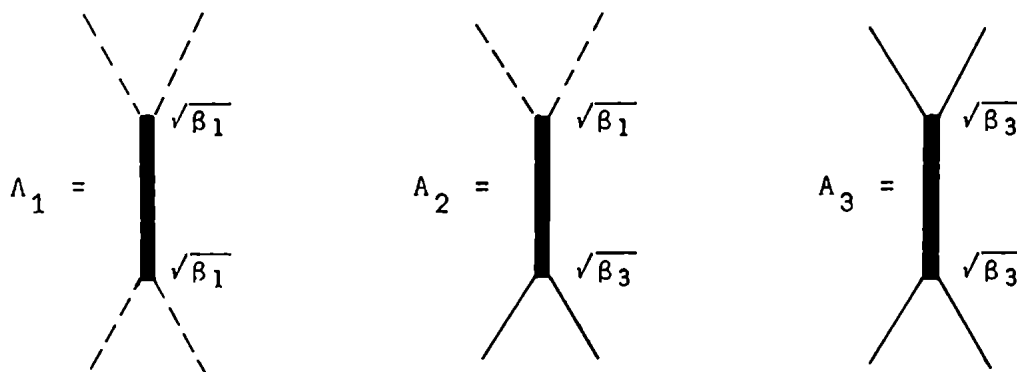


Fig. II.10

La línea gruesa es el polo de Regge y $\sqrt{\beta_{1,3}}$, las "constantes de acoplamiento" del polo con los vértices $\pi\pi$ y $U\bar{N}$. Resulta claro que en el segundo diagrama el polo se acopla según (3.17).

II.4. DISPERSION DE PARTICULAS CON ESPIN.

Poco hay que cambiar para extender las conclusiones fundamentales de lo va expuesto al caso de partículas con espín. Una manera natural de proyectar el espín de cada partícula es hacerlo sobre su dirección de movimiento. Llamaremos helicidad a la proyección del espín sobre tal eje. Para un dado proceso habrá, en general, tantas amplitudes como combinaciones posibles de todas las helicidades en los estados inicial y final. Denotaremos cada una de las amplitudes de helicidad por $\langle \lambda_3 \lambda_4 | A(s, t) | \lambda_1 \lambda_2 \rangle$. Entonces, mediante argumentos muy generales de invariancia ante rotaciones, se puede escribir la expansión de ondas parciales, gemela de (1.1), (Jacob & Wick, 1959)

$$\langle \lambda_3 \lambda_4 | A(s, t) | \lambda_1 \lambda_2 \rangle = \sum_J (2J+1) \langle \lambda_3 \lambda_4 | A_J(s) | \lambda_1 \lambda_2 \rangle d_{\lambda\mu}^J(\theta)$$

$$\lambda = \lambda_1 - \lambda_2 \qquad \mu = \lambda_3 - \lambda_4 \qquad (4.1)$$

Las funciones $d_{\lambda\mu}^J(\theta)$ son las matrices de Wigner del grupo de rotaciones. En el centro de masa de la reacción, λ y μ representan la proyección total de espín sobre las direcciones inicial y final de movimiento, respectivamente. Las amplitudes parciales $\langle \lambda_3 \lambda_4 | A_J | \lambda_1 \lambda_2 \rangle$ son invariantes ante inversión temporal, y ante inversión de ejes cambian en

$$\langle -\lambda_3 - \lambda_4 | A_J(s) | -\lambda_1 - \lambda_2 \rangle = \eta_1 \eta_2 \eta_3 \eta_4 (-)^{\sigma_3 + \sigma_4 - \sigma_1 - \sigma_2} \langle \lambda_3 \lambda_4 | A_J(s) | \lambda_1 \lambda_2 \rangle \quad (4.2)$$

siendo η la paridad intrínseca de cada partícula y σ su espín. Esta propiedad restringe el número de amplitudes de helicidad independientes a la mitad o la mitad más uno. La simetría ante reversión del tiempo es limitativa sólo en procesos elásticos:

Las propiedades analíticas de las $d_{\lambda\mu}^J(\theta)$ y sus funciones asociadas fueron extensivamente tratadas por Andrews y Gunson (1964) y son similares a las de las funciones de Legendre. La única diferencia está en que $d_{\lambda\mu}^J(\theta)$ tiene ceros cinemáticos en $\theta=0$ y $\theta=\pi$

$$d_{\lambda\mu}^J(\theta) \sim (\sin \frac{\theta}{2})^{|\lambda-\mu|} \cdot (\cos \frac{\theta}{2})^{|\lambda+\mu|} \quad , \quad (4.3)$$

que provienen de la conservación de momento angular. Conviene remover estos ceros que introducen puntos de ramificación cinemáticos en las amplitudes.

Los valores no físicos de J son aquellos que verifican la desigualdad $J < \max(\lambda, \mu)$, pues si tal cosa ocurre será imposible conservar el momento angular en el centro de masa sin tener momentos orbitales L negativos, lo que es absurdo. Por eso llamaremos "nonsense" (el equivalente inglés de absurdo) a los valores de J que satisfacen la desigualdad y "sense" a los valores físicos.

Se muestra como antes que las amplitudes de helicidad de signatura definida $\langle \lambda_3 \lambda_4 | A_J^\pm(s) | \lambda_1 \lambda_2 \rangle$ tienen polos fijos en los J enteros nonsense de mala signatura.

La "Reggeización" de las amplitudes de helicidad también sigue los pasos ya expuestos. Para más detalles nos referiremos

al trabajo de Gell-Mann et. al.(1964)

Los polos de Regge deben desacoplarse de los vértices para los cuales el valor de $J = \alpha(s)$ que lleva el polo resulta entero nonsense. De lo contrario tendríamos, para ese valor de s , debido al denominador $\sin\pi\alpha$ de la fórmula (3.13), una singularidad de la amplitud de dispersión que representa una partícula con espín disparatado. En realidad, las funciones de Wigner ya introducen factores adecuados y un ejemplo particular es el término $1/\Gamma(\alpha+1)$ de la función de Legendre (3.12), que se anula en $\alpha=-1,-2,\dots$. Para el caso general tenemos que en reacciones con vértices ss (los dos vértices inicial y final de la Fig.II.10 son sense), sn (sense-nonsense) o nn, los factores resultan

$$\begin{array}{ll} \text{ss} & 1 \\ \text{sn} & \sqrt{\alpha-J} \\ \text{nn} & \alpha-J \end{array} \quad (4.4)$$

siendo J el entero en cuestión. Los residuos β también tienen factores de este tipo, pues por ejemplo, en una reacción sn la raíz de (4.4) introduce un punto de ramificación espúreo que debe ser cancelado por otra raíz en β_{sn} . La anulación de los residuos en los puntos nonsense puede efectuarse de muy diversas maneras que dan lugar a diferentes mecanismos recopilados en la excelente reseña de Bertocchi (1967).

CAPITULO III. REGLAS DE SUMA.

III.1. RELACIONES DE SUPERCONVERGENCIA.

Consideremos las amplitudes de signatura definida, que satisfacen la relación de dispersión (II.1.19). Supongamos que las amplitudes son dominadas para grandes valores de t por polos de Regge, de modo que $A(s,t)$ y $D_t^\pm(s,t)$ tienen el comportamiento asintótico (II.3.1). Si en la integral dispersiva separamos las regiones $t' \ll t$ y $t' \gg t$ e investigamos el límite $t \rightarrow \infty$, resulta

$$A^\pm(s,t) = \int_{t_0}^{\infty} \frac{D_t^\pm(s,t')}{t'-t} dt' \underset{t \rightarrow \infty}{\sim} -\frac{1}{t} \int_{t_0}^{\infty} D_t^\pm(s,t') dt' - \frac{1}{t^2} \int_{t_0}^{\infty} t' D_t^\pm(s,t') dt' - \dots + (\text{polos de Regge} \sim t^{\alpha(s)}). \quad (1.1)$$

En (1.1) se manifiestan claramente los polos fijos en los enteros negativos, originados por las funciones de Legendre $Q_J(z)$ de la continuación de Froissart-Gribov (II.1.18). Nótese que sólo los polos fijos situados a la derecha de los polos de Regge figuran en (1.1). De tal modo, estas singularidades fijas predominan asintóticamente sobre las móviles. Mediante (II.1.21) podemos obtener el comportamiento asintótico de la amplitud física $A(s,t)$

$$\begin{aligned}
 A(s,t) \underset{t \rightarrow \infty}{\sim} & -\frac{1}{t} \int_{t_0}^{\infty} D_t^-(s,t') dt' - \frac{1}{t^2} \int_{t_0}^{\infty} t' D_t^+(s,t') dt' - \dots + \\
 & + (\text{polos de Regge} \sim t^{\alpha(s)}). \qquad (1.2)
 \end{aligned}$$

Un aspecto interesante de esta fórmula es que sólo los polos fijos de buena signatura contribuyen a la parte asintótica de la amplitud física. No obstante, si estas singularidades realmente participaran de la amplitud para valores elevados de t , dominarían, como ya dijimos, sobre los polos móviles. Como por hipótesis hemos supuesto comportamiento de Regge de las amplitudes físicas, los residuos de los polos fijos de buena signatura situados a la derecha del polo móvil deben ser nulos. Obtenemos así las siguientes relaciones de superconvergencia

$$\begin{aligned}
 \int_{t_0}^{\infty} D_t^-(s,t') dt' &= 0, \\
 \int_{t_0}^{\infty} t' D_t^+(s,t') dt' &= 0, \qquad (1.3)
 \end{aligned}$$

Si las partículas externas tienen espín, podemos usar amplitudes de helicidad regularizadas, de las que habremos extraído los factores cinemáticos (II.4.3). Estas amplitudes tienen sólo singularidades dinámicas y se comportan asintóticamente como

$$\langle \lambda_3 \lambda_4 | \overline{A(s,t)} | \lambda_1 \lambda_2 \rangle \sim t^{\alpha(s)-M} \quad (1.4)$$

siendo M la máxima proyección de espín en el canal s,

$$M = \frac{1}{2} (|\lambda+\mu| + |\lambda-\mu|) = \text{máx.}(|\lambda|, |\mu|). \quad (1.5)$$

Los valores de J situados a la izquierda de J=M son todos "nonsense" y se prueba como antes que los polos fijos en los enteros "nonsense" de buena signatura ($\alpha(s) < J < M$) predominarían asintóticamente sobre los polos de Regge, a menos que sus residuos se anularan, lo cual también da lugar a relaciones de superconvergencia del tipo (1.3) (De Alfaro et.al., 1966). Estas relaciones muestran simplemente la ausencia de las singularidades fijas prohibidas por la unitariedad. No obstante, ya sabemos que los argumentos de unitariedad no son aplicables a los polos de mala signatura y por tal razón es de esperar que expresiones como

$$\int_{t_0}^{\infty} D_t^+(s,t') dt' = 0 \quad (1.6)$$

no se satisfagan, indicando la presencia de un polo fijo de mala signatura. Las relaciones del tipo (1.6) son las llamadas reglas de suma de Schwarz (1967), quien primero las consideró en la dispersión $\pi\rho$. En esa reacción, una de las amplitudes del canal t corresponde a M=2 y asintóticamente en s va como $s^{\alpha(t)-2}$. Considerando isospin I=1 en el canal t, la trayectoria del mesón ρ puede contribuir y

$J=1$ es un punto "nonsense" de buena signatura. A $t=0$, $\alpha_\rho(0) \approx 0.5$ y hay una relación de superconvergencia como (1.3), pero saturada en el canal s . Tomando en consideración sólo las contribuciones de los mesones π y ω resulta

$$g_{\pi\rho\omega}^2 m_\rho^2 - 4 g_{\rho\pi\pi}^2 = 0.$$

Con $I=2$ en el canal t , el punto $J=1$ es de mala signatura y la expresión análoga a (1.6) sería

$$g_{\pi\rho\omega}^2 m_\rho^2 + 4 g_{\rho\pi\pi}^2 = 0$$

que claramente no puede cumplirse con acoplamientos no nulos.

III.2. REGLAS DE SUMA DE ENERGIA FINITA.

En este párrafo consideraremos una amplitud $A(v,t)$, siendo v la energía de laboratorio del haz incidente en un proceso de dispersión en el canal s . Supondremos que si $v > v_M$, la amplitud viene bien aproximada por la contribución de los polos de Regge del plano J del canal cruzado t . Si la amplitud tiene signatura definida, tal que es antisimétrica en v , y le extraemos la contribución

$$\beta(t) \frac{1 - e^{-i\pi\alpha}}{\sin\pi\alpha} v^\alpha$$

de sus polos de Regge con $\alpha > -1$, obtendremos una función con una cortadura en $v=0$, que satisface una relación de superconvergencia proveniente de cancelar el polo fijo en $J=-1$

$$\int_0^{\infty} \{ \text{Im } A(v, t) - \sum_{\alpha > -1} \beta(t) v^{\alpha(t)} \} dv = 0. \quad (2.1)$$

Esta relación puede convertirse en una regla de suma de energía finita, apelando a la hipótesis ya hecha de que a altas energías la suma de todos los polos de Regge aproxima bien la amplitud de dispersión. En ese caso, (2.1) se transforma en

$$\int_0^{v_M} \text{Im } A(v, t) dv - \int_0^{v_M} \sum_{\alpha > -1} \beta(t) v^{\alpha(t)} dv + \int_{v_M}^{\infty} \sum_{\alpha < -1} \beta(t) v^{\alpha(t)} dv = 0,$$

v tras efectuar explícitamente las dos últimas integrales arribamos a la regla de suma

$$\int_0^{v_M} \text{Im } A(v, t) dv = \sum \frac{\beta(t)}{\alpha+1} v_M^{\alpha+1} \quad (2.2)$$

donde el miembro derecho contiene todas las singularidades del plano J. Sustrayendo también de la amplitud original los polos con $\alpha > -3$, es posible deducir por superconvergencia ésta otra expresión

$$\int_0^{v_M} v^2 \text{Im } A(v, t) dv = \sum \frac{\beta(t)}{\alpha+3} v_M^{\alpha+3} \quad (2.3)$$

Para una amplitud simétrica en v, la ausencia de polos fijos en los enteros negativos pares, lleva a reglas de suma superconvergentes análogas a las anteriores. El resultado general puede resumirse así

$$\int_0^{v_M} v^n \operatorname{Im} A(v,t) dv = \sum \frac{\beta(t)}{\alpha+n+1} v_M^{\alpha+n+1}, \quad (2.4)$$

con n entero positivo par si $\Lambda(v)$ es función impar de v y viceversa. Las reglas de suma de energía finita (2.4) fueron obtenidas por Igi & Matsuda (1967), Logunov et al. (1967) y Horn & Schmid (1967).

Una derivación muy elegante de (2.4), que permite una inmediata generalización, es la de Kadyshevsky et al. (1967). Está basada esencialmente en analiticidad y comportamiento de Regge a altas energías. Si en el plano complejo v consideramos la función $v^n A(v,t)$, ésta tendrá como únicas singularidades los cortes de unitariedad de la amplitud de dispersión, indicados en la Fig. (III.1). Por el teorema de Cauchy,

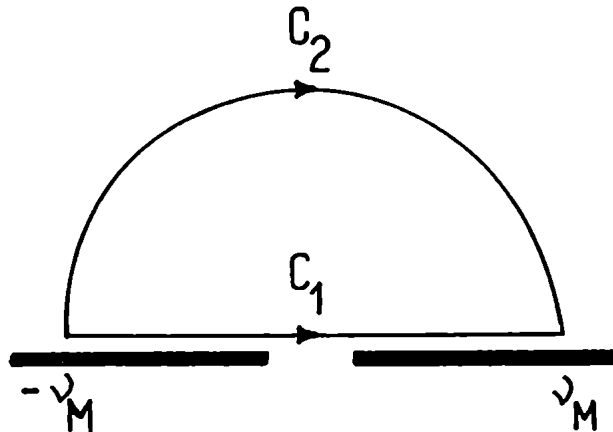


Fig. III.1

las integrales de la función sobre los caminos C_1 y C_2 de la figura son iguales, pues entre ambos no hay ninguna singularidad encerrada. En particular, nos interesa la

igualdad de las partes imaginarias. Admitiendo la aproximación de Regge en C_2 , se obtiene inmediatamente por integración directa el miembro derecho de (2.4). La parte imaginaria de la integral sobre C_1 se reduce al miembro izquierdo de (2.4) por las propiedades de simetría de $A(v)$.

III.3. REGLAS DE SUMA DE MOMENTO CONTINUO.

El valor práctico de las reglas de suma de energía finita está en que saturando la integral con datos de baja energía, habitualmente más numerosos y precisos, es posible obtener información sobre los parámetros de Regge que aproximan las amplitudes a energías asintóticas (usualmente mayores que 5 GeV). Anteriormente, las trayectorias y residuos de los polos se obtenían ajustando datos de alta energía, casi exclusivamente secciones diferenciales de choque, pero la insensibilidad de las secciones a la fase de las amplitudes complejas y los errores experimentales dejaban bastante incerteza en los parámetros relevantes. Mediante las reglas de suma se puede aprovechar la abundante información experimental en la zona de resonancias. La variedad y precisión de estos datos ha permitido efectuar en los últimos años, detallados análisis de corrimientos de fase para las reacciones más comunes, como la dispersión elástica πN o KN o la fotoproducción de piones. Tales análisis en ondas parciales suman completamente la situación experimental

en todo el rango angular y sobre un espectro bastante considerable de energías, que parte de los respectivos umbrales. Observables físicos, como la polarización de los nucleones de retroceso, extremadamente sensibles al valor de la fase de las amplitudes, sirven para separar sus partes reales e imaginarias. Es interesante pues aprovechar esta información experimental y construir reglas de suma en las que, a diferencia de (2.4), también la parte real de las amplitudes sature la contribución de baja energía. Los parámetros de Regge determinados con estas nuevas reglas serán, naturalmente, de mayor confianza. Es muy sencillo hacer aparecer la parte real en la integral de la regla de suma si consideramos el momento n de la fórmula (2.4) como continuo y usamos nuevamente la derivación de Kadyshevsky. Sea la amplitud $A(v,t)$ antisimétrica

$$A(-v^*,t) = -A^*(v,t) \quad (3.1)$$

y construyamos la función $(-iv)^Y A(v,t)$, que en adición a los cortes de unitariedad tiene un corte en el origen dado que el nuevo momento γ no es más discreto. Otra vez, las integrales sobre los caminos C_1 y C_2 de la Fig.(III.1) coinciden. Con la propiedad de simetría (3.1), la contribución de C_1 puede escribirse como

$$2i \int_0^{v_M} \text{Im} \{(-iv)^Y A(v,t)\} dv$$

Sobre C_2 la función es aproximada por sus polos de Regge

$$(-iv)^\gamma A(v,t) \sim -\sum \frac{\beta(t)}{\cos \frac{\pi}{2}\alpha} e^{-i(\alpha+\gamma+1)\pi/2} v^{\alpha+\gamma}$$

y la integración es trivial. Finalmente se obtienen las reglas de suma de momento continuo (Olsson, 1968; Della Selva et al., 1968)

$$\begin{aligned} v_M^{-(\gamma+1)} \int_0^{v_M} dv v^\gamma \{ \cos \frac{\pi}{2}\gamma \operatorname{Im}A(v,t) - \sin \frac{\pi}{2}\gamma \operatorname{Re}A(v,t) \} = \\ = \sum \frac{\beta(t)}{\cos \frac{\pi}{2}\alpha(t)} \frac{\sin \frac{\pi}{2}(\alpha+\gamma+1)}{\alpha + \gamma + 1} v_M^{\alpha(t)}. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Como función de γ , la contribución de cada polo de Regge al miembro derecho de (3.2) es una senoide amortiguada (Fig.(III.2)), centrada en $\gamma=-(\alpha+1)$. Evaluando la parte izquierda con datos experimentales para diversos valores de γ , y de la posición del máximo de la curva así obtenida, se deduce α (estamos suponiendo por un instante que sólo un polo da la amplitud asintótica). En otras palabras, el eje γ es, en cierta manera, una representación del eje real del plano J . La posición de un polo de Regge se manifiesta como el punto donde la transformada integral de la amplitud $A(v,t)$ (miembro izquierdo de (3.2)) adquiere su intensidad máxima. Si más de un polo de Regge contribuyere a la amplitud de dispersión, la regla de suma de momento continuo (3.2) los

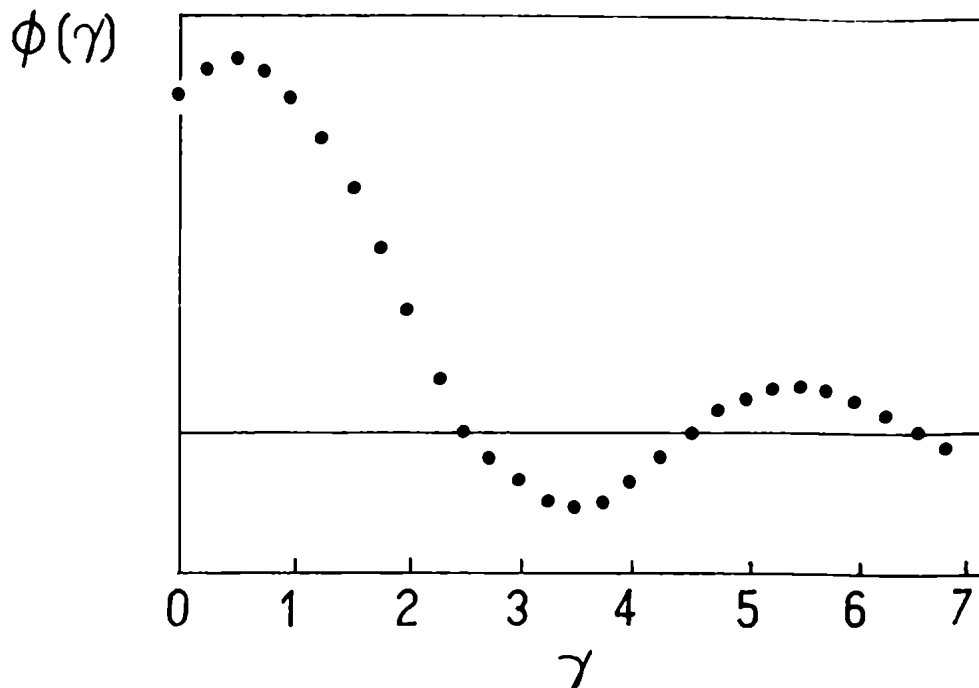


Fig. III.2

separará en el eje γ como si fueran líneas de un espectro, dando así la descomposición espectral en las varias componentes asintóticas. La intensidad de estas "líneas" es proporcional al residuo β de cada polo. Obviamente, para efectuar el análisis espectral, se requiere un buen programa de ajuste numérico que haga coincidir, lo más fielmente posible dentro de los errores experimentales, ambos miembros de (3.2).

En los dos próximos capítulos, que forman el núcleo de este trabajo, se analizarán con esta técnica las reacciones πN y fotoproducción de piones. La información asintótica que se espera obtener permitirá aclarar importantes cuestiones teóricas como la existencia de cortes de Regge y el mecanismo mediante el cual se satisfacen las llamadas relaciones de conspiración.

Finalmente, conviene destacar desde el punto de vista teórico la introducción de un nuevo concepto: el de dualidad (Dolen et. al., 1968). Con él queremos expresar justamente de qué manera, en el sentido de las reglas de suma de energía finita (2.4) o de momento continuo (3.2), las resonancias de la región de baja y mediana energía construyen la amplitud de Regge y, a la inversa, cómo ésta última es un sensible promedio de la región resonante (ver Fig.III.3), hasta el punto de contener, a pesar de ser una función lentamente variable, información sobre la posición de las resonancias que le dieron origen (Schmid, 1968). Superponer resonancias o intercambiar polos de Regge son pues dos maneras igualmente válidas de describir las amplitudes de dispersión, cada cual con mayor o menor fortuna según el intervalo de energías considerado.

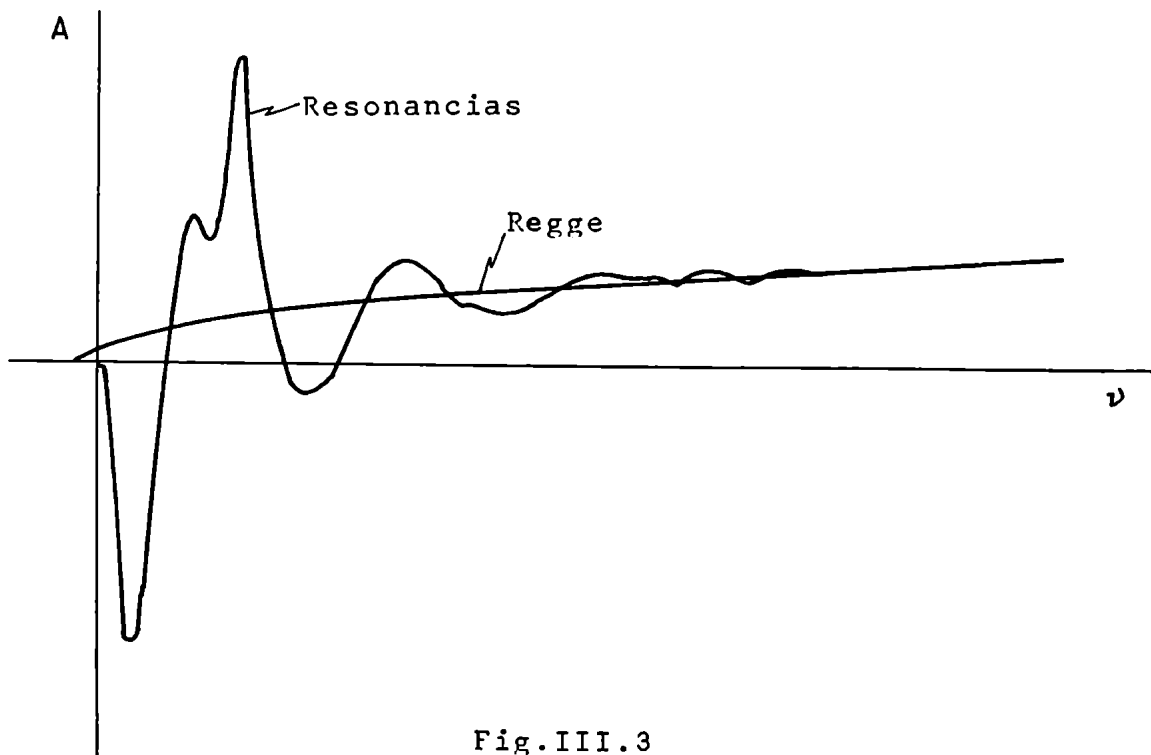


Fig.III.3

La dualidad ha demostrado ser un concepto extremadamente útil en aquellas reacciones que por tener números cuánticos exóticos en el canal directo, no muestran estructura resonante. A tal categoría pertenecen los procesos con hipercarga $Y=2$: $K^+_p \rightarrow K^+_p$ y $K^+_n \rightarrow K^+_n$. El nuevo concepto predice que la amplitud asintótica será puramente real y lleva a la idea de degeneración de intercambio entre trayectorias de Regge de signatura y paridad G opuestas, tales como las de los mesones $f_0(1260)$ y ω por un lado, y ρ y A_2 por otro. Lamentablemente debemos dejar estas interesantes cuestiones por salirse del marco del presente trabajo.

CAPITULO IV. POLOS DE REGGE EN LA DISPERSION PION-NUCLEON.

IV.1. INTRODUCCION.

El contenido del presente capítulo está basado en el artículo de Ferro Fontán, Odorico y Masperi, "Quantitative High-Energy π p Scattering Predictions from Low Energy Phase Shifts", Nuovo Cimento 58A, 534 (1968). Aquí ilustraremos sobre la aplicación de las reglas de suma de momento continuo a la determinación de las más importantes singularidades de Regge en la dispersión pión-nucleón. La técnica expuesta se ha convertido en una de las herramientas imprescindibles en los análisis fenomenológicos realizados en los últimos tiempos. Un ejemplo lo constituyen los recientes ajustes de Barger y Phillips (1969) a todos los datos experimentales de alta energía en la reacción que estamos considerando. Estos ajustes compendian, con una precisión sin precedentes, las secciones diferenciales de choque y las polarizaciones del nucleón de retroceso medidas en un extenso rango de altas energías con pequeños errores experimentales. El significativo avance producido sobre viejos ajustes con el modelo de Regge, ha sido posible gracias al uso de las reglas de suma que han permitido, en cierto sentido, extrapolar a las altas energías nuestro detallado conocimiento de las amplitudes de dispersión en la región de resonancias.

La matriz de transición pi6n-nucle6n ya ha sido considerada en el Cap6tulo I, f6rmulas (3.1) a (3.4). La reducci6n de los nucleones lleva la matriz a la forma

$$R_{\beta\alpha}(p',q';p,q) = \bar{u}(p') T_{\beta\alpha}(p',q';p,q) u(p) \quad , \quad (1.1)$$

donde $T_{\beta\alpha}$ es un invariante de Lorentz construido, en general, con los cuadiimpulsos intervinientes y matrices de Dirac. Dado que contiene el producto de las dos corrientes pi6nicas pseudoescalares j_α y j_β , $T_{\beta\alpha}$ debe ser un escalar ante inversiones. Su expresi6n m6s general es del tipo (Chew et al. 1957a)

$$T_{\beta\alpha}(p',q';p,q) = -A_{\beta\alpha}(s,t,u) - \frac{q+q'}{2} B_{\beta\alpha}(s,t,u) \quad (1.2)$$

$A_{\beta\alpha}$ y $B_{\beta\alpha}$ son amplitudes invariantes que dependen solamente de las variables de Mandelstam y est6n libres de singularidades cinem6ticas, Hearn (1961). Como funci6n de los 6ndices de carga, son tensores que pueden desarrollarse, usando las matrices de Pauli, de acuerdo con la expresi6n m6s general

$$\begin{aligned} A_{\beta\alpha} &= \delta_{\beta\alpha} A^{(+)} + \frac{1}{2} \{\tau_\beta, \tau_\alpha\}_- A^{(-)} \quad , \\ B_{\beta\alpha} &= \delta_{\beta\alpha} B^{(+)} + \frac{1}{2} \{\tau_\beta, \tau_\alpha\}_- B^{(-)} \end{aligned} \quad (1.3)$$

Las cuatro amplitudes $A^{(\pm)}$ y $B^{(\pm)}$ satisfacen la representaci6n de Mandelstam.

Introduzcamos la variable

$$v = \frac{s-u}{4 \cdot M} \quad , \quad (1.4)$$

sensiblemente pr6xima a la energ6a de laboratorio del pi6n

incidente para transferencias de momento moderadas

$$v_L = \frac{s - M^2 - \mu^2}{2M} = v - \frac{t}{4M} .$$

Los dos diagramas cruzados de las Figs. (I.2) y (I.3) del Capítulo I representan reacciones del mismo tipo ($\pi N \rightarrow \pi N$) y vienen expresados por la misma matriz de transición.

Por la propiedad de cruce

$$R_{\beta\alpha}(p', q'; p, q) = R_{\alpha\beta}(p', -q; p, -q') , \quad (1.5)$$

que en virtud de (1.1), (1.2), (1.3) y (1.4), implica

$$\begin{aligned} A^{(\pm)}(v, t) &= \pm A^{(\pm)}(-v, t) = \pm A^{(\pm)*}(-v^*, t) , \\ B^{(\pm)}(v, t) &= \mp B^{(\pm)}(-v, t) = \mp B^{(\pm)*}(-v^*, t) \end{aligned} \quad (1.6)$$

Estas relaciones corresponden a la llamada simetría de cruce.

Viendo la reacción desde el canal t , son mera consecuencia de la estadística de Bose-Einstein para el sistema de los dos piones.

El producto matricial del segundo miembro de (1.1) puede reducirse convenientemente, de modo que aparezcan en forma explícita los espinores de Pauli de los nucleones. La matriz de transición (dejando a un lado los índices de carga) se escribe entonces

$$\langle f | f_1(v, t) + \vec{\sigma} \cdot \hat{q}_2 \vec{\sigma} \cdot \hat{q}_1 f_2(v, t) | i \rangle , \quad (1.7)$$

donde $|i\rangle$ y $|f\rangle$ son espinores de Pauli y \hat{q}_1, \hat{q}_2 , los versores en las direcciones inicial y final de movimiento en el centro de masa. Las amplitudes f_1 y f_2 están relacionadas con A y B

por las ecuaciones

$$\frac{1}{4\pi} A = \frac{W+E}{E+E} f_1 - \frac{W-E}{E-E} f_2 \quad (1.8a)$$

$$\frac{1}{4\pi} B = \frac{1}{E+E} f_1 + \frac{1}{E-E} f_2$$

$$f_1 = \frac{E+E}{8\pi W} \{A+(W-E)B\} \quad (1.8b)$$

$$f_2 = \frac{E-E}{8\pi W} \{-A+(W+E)B\}$$

Aquí, W es la energía total y E , la energía del nucleón en el centro de masa. Las funciones f_1 y f_2 están directamente conectadas con las amplitudes de helicidad regularizadas del Capítulo II y es muy fácil escribir su expansión en ondas parciales, ecuación (II.4.1)

$$f_1 = \sum_{\ell=0}^{\infty} \{f_{\ell+} P'_{\ell+1}(x) - f_{\ell-} P'_{\ell-1}(x)\}$$

$$f_2 = \sum_{\ell=1}^{\infty} (f_{\ell-} - f_{\ell+}) P'_{\ell}(x) \quad (1.9)$$

$$x = \cos \theta_s .$$

Las amplitudes de onda parcial $f_{\ell\pm}$ corresponden a momento angular total $J=\ell\pm 1/2$ y paridad $(-1)^{J\pm 1/2} = (-1)^{\ell+1}$.

Analícemos los números cuánticos que pueden intercambiarse en el canal t . Conservación de paridad G en el vértice $\pi\pi$ requiere que los mesones intercambiados tengan paridad G positiva. Por otra parte, siendo los piones pseudoescalares, el espín total del par es cero y su paridad intrínseca positiva.

Esto implica que la paridad total del estado $\pi\pi$ es $P = (-1)^L = (-1)^J$. Como la paridad y el momento angular total se conservan en todos los vértices, resulta que cualquier estado del canal t debe tener paridad natural y las resonancias que pueden excitarse corresponden al conjunto de los mesones escalares, vectoriales o tensoriales. Esta última conclusión es aplicable si el par $\pi\pi$ es reemplazado por cualquier par de mesones pseudoescalares, como $\pi\eta$ o $K\bar{K}$. El requerimiento de paridad G positiva elimina los mesones ω y A_2 de los estados intermedios, y sólo permite la contribución del ρ y del mesón tensorial $f_0(1260)$. Hemos supuesto, de acuerdo con el modelo de quarks, que el mesón $f'(1515)$ está formado por quarks extraños y por lo tanto se desacopla del vértice $N\bar{N}$. Otro tanto ocurriría con el mesón vectorial ϕ si pudiera contribuir.

En el canal t, las reacciones $\pi^+p \rightarrow \pi^+p$ y $\pi^-p \rightarrow \pi^-p$ sólo difieren en el orden de los piones finales, que en un caso es $\pi^+\pi^-$, y $\pi^-\pi^+$ en el opuesto. Esta permutación equivale a invertir la dirección de movimiento de ambos piones, o lo que es lo mismo, a cambiar el ángulo de dispersión θ_t por $\pi - \theta_t$. Como consecuencia, se espera que las contribuciones de signatura negativa, como el mesón ρ , cambien de signo al pasar de una amplitud a otra. En función de los intercambios del canal t podemos escribir entonces

$$\begin{aligned} A_{\pi^-p} &= P + f_0 + \rho \\ A_{\pi^+p} &= P + f_0 - \rho \end{aligned} \tag{1.10a}$$

donde f_0 simboliza todos los intercambios de signatura positiva y ρ , los de signatura opuesta. P indica la contribución difractiva a la dispersión elástica. En el lenguaje del modelo de Regge se lo denomina también el polo de Pommeranchuk y naturalmente, los números cuánticos que intercambia en el canal t son los del vacío.

Es posible mostrar, usando coeficientes de Clebsh-Gordan para las diversas combinaciones de isospin, que la amplitud correspondiente a la reacción de intercambio de carga $\pi^- p \rightarrow \pi^0 n$ está ligada a las de dispersión elástica $\pi^+ p$ y $\pi^- p$ por la relación

$$\Lambda(\pi^- p \rightarrow \pi^0 n) = \frac{1}{\sqrt{2}} (\Lambda_{\pi^+ p} - \Lambda_{\pi^- p}) \quad (1.11)$$

En consecuencia,

$$\Lambda(\pi^- p \rightarrow \pi^0 n) = -\sqrt{2} \rho \quad (1.10b)$$

Con las funciones de onda de isospin adecuadas, se puede probar además, directamente de (1.3), que

$$\Lambda_{\pi^\pm p} = A^{(+)} \mp A^{(-)} \quad (1.12)$$

Comparando esta expresión con (1.10a), vemos que a las amplitudes $A^{(\pm)}$ corresponden números cuánticos bien definidos en el canal t:

$$\begin{aligned} \Lambda^{(+)} &= P + f_0 && \text{(isospin } I=0) \\ \Lambda^{(-)} &= \rho && \text{(I=1)} \end{aligned} \quad (1.13)$$

Según la simetría de cruce, ecuación (1.6), las amplitudes con supraíndice distinto tienen signaturas opuestas, lo cual concuerda con (1.13).

Otro juego útil de amplitudes es el que corresponde a isospin bien definido en el canal directo s. Nuevamente con la tabla de Clebsh-Gordan obtenemos

$$\begin{aligned} \Lambda_{\pi^- p} &= \frac{1}{3} \Lambda_{3/2} + \frac{2}{3} \Lambda_{1/2} \\ \Lambda_{\pi^+ p} &= \Lambda_{3/2} \end{aligned} \quad (1.14)$$

$$\begin{aligned} A^{(+)} &= \frac{1}{2} (\Lambda_{\pi^- p} + \Lambda_{\pi^+ p}) = \frac{1}{3} (\Lambda_{1/2} + 2 \Lambda_{3/2}) \\ A^{(-)} &= \frac{1}{2} (\Lambda_{\pi^- p} - \Lambda_{\pi^+ p}) = \frac{1}{3} (\Lambda_{1/2} - \Lambda_{3/2}) \end{aligned} \quad (1.15)$$

El último par de ecuaciones provee la matriz de cruce de isospin que relaciona el canal s con el canal t. Las fórmulas (1.10) a (1.15) son también válidas para la amplitud B.

Los observables físicos que usaremos en nuestro análisis son

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f_1 + f_2|^2 \cos^2 \frac{\theta}{2} + |f_1 - f_2|^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \quad (1.16)$$

y la polarización del nucleón de retroceso $P(\theta)$:

$$P(\theta) \frac{d\sigma}{d\Omega} = \sin \theta \operatorname{Im}(f_1^* f_2) \quad (1.17)$$

Conviene poner estas expresiones en términos de las amplitudes invariantes. Para ello definamos la nueva amplitud

$$A'(v, t) = A + \frac{v}{1 - (t/4M^2)} B \quad (1.18)$$

Con ayuda de (1.8b) y tras un manipuleo algebraico algo tedioso resulta

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{M}{4\pi W} \right)^2 \left\{ \left(1 - \frac{t}{4M^2}\right) |A'|^2 + \frac{t}{4M^2} \left(s - \frac{s+p^2}{1-(t/4M^2)} \right) |B|^2 \right\} \quad (1.19)$$

y

$$P(\theta) \frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{E^2 - M^2}{32\pi^2 W} \cdot \sin \theta \cdot \text{Im}(A' \cdot B) \quad (1.20)$$

siendo p el impulso del pi3n en el sistema de laboratorio. A energ3as asint3ticas estas f3rmulas se simplifican considerablemente.

M3s detalles sobre cinem3tica, isospin y otros puntos de inter3s relativos a esta reacci3n, pueden hallarse en el art3culo de Chew et al. (1957a), citado m3s arriba, y en Singh (1963), Hamilton y Woolcock (1963) y los textos de Eden (1967) y Gasiorowicz (1966).

IV.2. ANALISIS EN ONDAS PARCIALES.

Una manera adecuada de parametrizar la informaci3n experimental correspondiente a energ3as de laboratorio menores que 2 GeV, es mediante las amplitudes de onda parcial de las f3rmulas (1.9). Todos los datos referentes a secciones de choque (1.16) y polarizaciones (1.17), son ajustados a cada energ3a, como funci3n del 3ngulo de dispersi3n, por las series (1.9). Por razones pr3cticas s3lo se toma un n3mero finito adecuado de t3rminos y los par3metros $f_{\ell\pm}$, que entran como factores de peso de diferentes distribuciones angulares, son variados hasta alcanzar un ajuste satisfactorio. Las amplitudes de onda parcial obtenidas por este procedimiento

son aún funciones de la energía. Como no existe ninguna correlación entre las determinaciones efectuadas en dos puntos de energía diferente, las funciones que resultan suelen mostrar un comportamiento algo irregular. Por lo tanto, y como segundo paso, se suelen usar técnicas especiales para alisar la variación con la energía de las amplitudes de onda parcial. Este laborioso procedimiento, esbozado aquí en líneas muy generales, ha sido llevado a cabo en los últimos años por diversos grupos. Una muy buena reseña de tales esfuerzos es la expuesta por Donnachie (1968) en la Conferencia de Viena. Allí pueden encontrarse referencias detalladas.

Tratándose de dispersión elástica, las amplitudes parciales pueden parametrizarse a su vez en la forma (2.10) del Capítulo II. Un análisis en ondas parciales consiste pues en dar dos funciones: la elasticidad $\eta(s, J, \ell, I)$ y el corrimiento de fase $\delta(s, J, \ell, I)$, dependientes de la energía, los momentos angulares total y orbital de la onda considerada y el isospin del canal directo. Estas dos cantidades condensan todos los datos experimentales sobre las reacciones elásticas $\pi^{\pm}p$ y de intercambio de carga, y permiten construir cualquiera de las amplitudes del párrafo anterior a bajas y medianas energías. En nuestra aplicación a las reglas de suma, estaremos interesados en las amplitudes $A'(v, t)$ y $B(v, t)$ en el rango de energía relevante para la integral de la fórmula (3.2) del Capítulo anterior. Dicha integral abarca desde el umbral hasta un límite superior v_M , en el

que se considera ya alcanzado el comportamiento de Regge. Este valor coincide bastante bien con el límite superior de los análisis publicados, que es del orden de 2 GeV. Respecto a la variable t , deseamos cubrir aproximadamente el rango $-0.7 (\text{GeV}/c)^2 \lesssim t \leq 0.0 (\text{GeV}/c)^2$. Para las energías más bajas y $t \neq 0$ hay muchos puntos de este intervalo que se hallan fuera de la región física $-1 \leq z_s \leq 1$, sólo en la cual los análisis de ondas parciales son estrictamente válidos. Empero, podría argumentarse que la expansión (1.9) converge dentro de la elipse de Lehmann-Martin, Fig.(II.2), de modo que su extrapolación es lícita con la precaución de no salir de la región de convergencia. No obstante, aún así necesitamos asegurarnos de que la velocidad de convergencia sea suficiente, pues los análisis disponibles incluyen solamente hasta la onda G y bien podrían necesitarse ondas superiores. Por otra parte, es muy fácil, trabajando cerca del umbral, caer fuera de la elipse de Lehmann-Martin. Hamilton y Woolcock (1963) han estudiado detalladamente la región de convergencia de (1.9) en el plano s, t, u . Las amplitudes de dispersión satisfacen la representación de Mandelstam (I.4.14). A s fijo $\geq (M+\mu)^2$ sólo las funciones espectrales ρ_{st} y ρ_{su} contribuyen a las partes imaginarias

$$\text{Im}A(s, t, u) = \frac{1}{\pi} \int_{\sigma(s)}^{\infty} \frac{\rho_{st}(s, t')}{t' - t} dt' + \frac{1}{\pi} \int_{\sigma'(s)}^{\infty} \frac{\rho_{su}(s, u')}{u' - u} du',$$

mientras que las partes reales tienen contribución del polo del nucleón en el canal u y de la integral sobre la tercera función espectral

$$\frac{1}{\pi^2} \int_{4\mu^2}^{\infty} dt' \int_{(M+\mu)^2}^{\infty} du' \frac{\rho_{tu}(t',u')}{(t'-t)(u'-u)}$$

cuyos denominadores muestran un comportamiento singular si $t \geq 4\mu^2$ o $u \geq (M+\mu)^2$. Como $\sigma(s) > 4\mu^2$ y $\sigma'(s) > (M+\mu)^2$, las partes reales de (1.9) comienzan a diverger antes que las imaginarias, principalmente por efecto del corte de dos piones. Se muestra que en la región muy vecina al umbral del canal s, la elipse de Lehmann-Martin para la parte real de las amplitudes pasa por $t = -4\mu^2 = -0.08$ (GeV/c)², en tanto crece sin límites para la parte imaginaria. La conclusión es que, a menos que los valores de t sean muy pequeños, no podemos determinar la parte real a baja energía por medio del desarrollo de ondas parciales. La siguiente tabla indica los extremos teóricos de la energía cinética del pión, por sobre los cuales sería lícito usar (1.9) para la parte real.

$ t $ (GeV/c) ²	T _{LAB} (MeV)
0.2	120
0.4	285
0.6	420
0.8	545

La divergencia de la serie se hace notoria al efectuar los cálculos numéricos. La parte real de cada uno de sus términos es una función fuertemente oscilante, debido al comportamien-

to de los polinomios de Legendre para valores grandes del argumento $x = 1+t/2q^2$. Como resultado, la suma de un número finito de ondas da una función altamente irregular, muy diferente a lo que las relaciones de dispersión dejarían suponer para la amplitud real. En nuestros cómputos, hemos corregido este inconveniente extrapolando hasta el umbral la parte real obtenida a energías superiores al extremo teórico de la tabla anterior. Se espera que el particular procedimiento de extrapolación elegido no influya mucho sobre la evaluación de las reglas de suma, ya que el momento v^Y se anula en el umbral, deprimiendo las contribuciones del sector vecino. Conviene aclarar que si $t \lesssim -0.5 \text{ (GeV/c)}^2$, también la convergencia de la parte imaginaria es cuestionable en un rango intermedio de energías. Por las razones expuestas no conviene pues sobrepasar tal valor de la transferencia de momento. Los resultados de nuestro estudio serán tomados en consideración sólo hasta allí.

Establecidas las limitaciones del método empleado, construimos las amplitudes $A^{(\pm)}(v,t)$ y $B^{(\pm)}(v,t)$ de acuerdo con las fórmulas (1.18), (1.8a), (1.9) y (1.15) del párrafo precedente. Las elasticidades y corrimientos de fase usados provienen de tres fuentes distintas: Johnson (1967), Donnachie et al. (1969) y Brevet et al. (1968). Estos tres análisis también son conocidos por su origen: Berkeley, CERN y Saclay, respectivamente. Comparando las predicciones de alta energía de cada uno de ellos con los resultados experimentales, esperamos obtener, entre otras cosas, alguna indicación de sus bondades relativas.

IV.5. ESTUDIO CUANTITATIVO DE LAS AMPLITUDES DE ALTA ENERGIA.

Aplicaremos ahora las reglas de suma de momento continuo para determinar las contribuciones de Regge más relevantes. Un estudio de este tipo, pero con reglas de suma de momento entero y las viejas fases de Saclay, fue realizado para $A'^{(-)}$ y $B^{(-)}$ por Dolen et al. (1968). Sus conclusiones son sólo cualitativas: sin embargo, un resultado bien establecido de este trabajo es la existencia de un cero del mesón ρ en la amplitud $A'^{(-)}$ a $t=-0.2$ (lo cual explica el entrecruzamiento de las secciones elásticas $\pi^{\pm}p$ en ese punto), y otro cero del ρ en la amplitud $B^{(-)}$ a $t=-0.6$ (que explica el mínimo hallado experimentalmente en la sección diferencial de intercambio de carga). Nuestras consideraciones son estrictamente cuantitativas y su objeto es predecir, con un error razonable, los datos de alta energía para la dispersión πN en el cono delantero ($t_{\lambda} < -0.4$), partiendo de los corrimientos de fase de baja energía. Veremos que las predicciones obtenidas están en buen acuerdo con los datos experimentales de alta energía existentes. En $A'^{(-)}$, con las fases del CERN, hallamos evidencias a favor de un corte de Regge que da la correcta polarización en la reacción de intercambio de carga. En $B^{(+)}$, especialmente, encontramos que los intercambios con los números cuánticos del vacío necesitan ser complementados con una nueva contribución, cuya trayectoria estaría situada a la izquierda de los polos habituales.

Para la amplitud $A^{(-)}$ tenemos la siguiente regla de suma

$$q(\nu) = p_{\max}^{2G+D} \left\{ \frac{8\pi^2 f^2}{\mu^2 - 1} \frac{\nu^2 - \mu^2}{4M^2} p_0^2 + p_0^2 \nu^2 \right\} \quad (3.1)$$

$$\int_{\nu_0}^{\nu_{\max}} \nu^2 p_0^2 \operatorname{Im} \left[\exp \left[i \frac{\pi}{2} \nu \right] A^{(-)}(\nu, 0) \right] d\nu = \sum_k \frac{\beta_k}{\cos(\pi/2) z_k} \frac{\sin(\pi/2)(z_k - \nu - 1)}{z_k - \nu - 1} p_{\max}^{\nu_k}$$

con el comportamiento asintótico

$$A^{(-)} \sim \sum_k \beta_k(t) \frac{\exp[-i\pi z_k]}{\sin \pi z_k} p^{\nu_k}$$

Formas similares tienen las reglas de suma para las amplitudes antisimétricas en ν : $\nu B^{(-)}$, $\nu A^{(+)}$ y $B^{(+)}$. El primer término del miembro izquierdo de (3.1) es la contribución del polo del nucleón del canal s (y su simétrico del canal u). La cantidad f es la constante de acoplamiento pión-nucleón

$$\frac{f^2}{4\pi} = \frac{G^2}{4\pi} \cdot \frac{\mu^2}{4M^2} \approx 0.08 \qquad \frac{G^2}{4\pi} \approx 14.7$$

Nótese que el momento de la regla de suma (III.3.2), ν^Y , ha sido reemplazado aquí por $|\nu^2 - \nu_0^2|^{Y/2}$. Este factor es más conveniente porque sus cortes coinciden con los de unitariedad y así la integración no contiene porciones con energía por debajo del umbral. El cambio no es relevante, porque para valores de ν moderados ambos momentos son sensiblemente iguales. Los resultados pueden resumirse así:

$A^{(-)}$. Los tres análisis de ondas parciales concuerdan en predecir la anulación del ρ en $t^{\nu} = 0.2$. De allí en adelante su contribución es despreciable, lo que sugiere que también se anula cuando su trayectoria pasa por cero, alrededor de $t = -0.5$. Esta manera de desacoplarse en el punto de mala signa-

tura $\alpha=0$ podría indicar que el mesón ρ elige el mecanismo de Gell-Mann para ese valor "nonsense" de su espín (ver Bertocchi, 1967). A pesar del buen acuerdo respecto del cero, los análisis no coinciden respecto de la contribución remanente. Saclay y Berkeley producen un término con $\alpha=-1$, independiente de t , que puede ser interpretado como la integral de fondo de Regge. Sin embargo, la polarización predicha para el intercambio de carga ($\sim 8\%$ a 5.9 GeV, ~ 3 a 4% a 11.2 GeV) es demasiado pequeña y decae muy rápidamente con la energía. En vez, el análisis del CERN da reglas de suma $\phi(\gamma)$ muy particulares, del tipo que se muestra en la Fig.(IV.1)

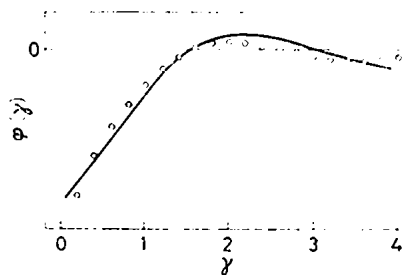


Fig.IV.1

No es posible dar una explicación natural de estas curvas en términos de unos pocos polos de Regge y un fondo. Ellas pueden ser ajustadas solamente por una distribución continua de singularidades en el plano J , es decir, por un corte de Regge. La teoría muestra que efectos de dispersión múltiple dan justamente origen a esos cortes (Rivers & Saunders, 1968; Michael, 1968). En particular, el doble intercambio del mesón ρ y del polo de Pomeranchuk P generan una cortadura cuyo punto de ramificación está más o menos fijo con t , en el valor

$\alpha_C = \alpha_\rho(0) = 0.58$. Para tratar de reproducir $\phi(\gamma)$, hemos parametrizado su discontinuidad en forma exponencial, como sigue

$$A_{cut}^{(-)}(p, t) = i \exp \left[-i \frac{\pi}{2} z_c \right] \beta_c r^{\alpha_c} \frac{1}{r} \int_{-\infty}^z dz \exp \left[\frac{z}{r} z_c \right] \exp \left[-i \frac{\pi}{2} (z - z_c) \right] r^{\alpha_c} \quad (3.2)$$

$$= i \exp \left[-i \frac{\pi}{2} z_c \right] \beta_c r^{\alpha_c} \frac{1}{r} \left[\ln(r \exp[1/r]) - i\pi/2 \right]$$

Para el ejemplo de la Fig.(IV.1) el ajuste requiere un $\tau \approx 2.3$ en el rango $-0.4 \leq t \leq -0.2$. La intensidad del corte β_c varía muy lentamente con t y resulta tener signo opuesto al residuo del mesón ρ , en perfecto acuerdo con la teoría.

Debido al cero en $t \approx -0.2$ y la presencia del corte, no se puede esperar una buena determinación de la pendiente de la trayectoria ρ a partir de $A^{(-)}$. Tal parámetro ha sido extraído de $B^{(-)}$.

$B^{(-)}$. Los tres análisis de baja energía dan esencialmente las mismas curvas para esta amplitud. Es claro, a partir de ellas, que el ρ es dominante y se anula en $t \approx -0.55$; sin embargo también resulta claro que algo más está presente ($\sim 10\%$ a 1.9 GeV). Hemos tratado varios tipos de ajuste (ρ +fondo, ρ + ρ' , ρ +corte) para establecer la naturaleza de esta segunda contribución, pero no hallamos ninguna respuesta conclusiva. Desgraciadamente, la presencia de esta segunda singularidad no permite una buena determinación de la trayectoria del mesón ρ por inspección directa de las curvas en cada valor de t . En efecto, la determinación de α es muy sensible a la presencia de pequeñas contribuciones superpuestas a la dominante. En su lugar, hemos

preferido usar el siguiente hecho: el comportamiento con t del residuo del ρ en $B^{(-)}$, determinado con las reglas de suma, sugiere fuertemente una dependencia del tipo $\alpha_{\rho}(t) \exp(bt)$. Suponiendo válida esta parametrización y $\alpha_{\rho}(0)=0.58$, se encuentra que $\alpha'_{\rho}(0)=0.96 \text{ (GeV)}^{-2}$ y $b=1.75 \text{ (GeV)}^{-2}$. El residuo se calcula directamente de los máximos de $\phi(\gamma)$; el error introducido en este procedimiento por la segunda singularidad es probable que no exceda el 4%.

En conclusión, hemos obtenido la siguiente parametrización de las amplitudes $A^{(-)}$ y $B^{(-)}$

$$\begin{aligned}
 A^{(-)}(v, t) &= \alpha_0 (32 \cdot \exp[2.65t] - 12) i \exp\left[-i \frac{\pi}{2} \alpha_0\right] v^{\alpha_0} \\
 &\quad - (10/\tau) i \exp\left[-i \frac{\pi}{2} \alpha_0(0)\right] \left[\ln(\exp[1/\tau]v/1.9) - i \frac{\pi}{2}\right]^{-1} v^{\alpha_0(0)} \quad (\text{GeV})^{-1}, \\
 B^{(-)}(v, t) &= \alpha_0 \cdot 185 \exp[1.75t] i \exp[-i(\pi/2)\alpha_0] v^{\alpha_0-1} \quad (\text{GeV})^{-2}.
 \end{aligned} \tag{3.3}$$

$$\begin{aligned}
 \alpha_{\rho}(t) &= 0.58 + 0.96 t \\
 \tau &= 2.3
 \end{aligned}$$

Esta parametrización es válida sólo hasta $t = -0.4$ ó -0.5 . De allí en adelante, muchos síntomas indican que la serie truncada de Legendre comienza a ser una mala aproximación de las amplitudes y no se puede continuar con el análisis.

En la Fig.(IV.2) comparamos nuestras predicciones para los observables de la reacción $\pi^- p \rightarrow \pi^0 n$, con los datos de Stirling et al., 1965 (secciones diferenciales a 5.9 GeV/c y 18.2 GeV/c), y Bonamy et al., 1966, 1967 (polarizaciones a 5.9 GeV/c y 11.2 GeV/c).

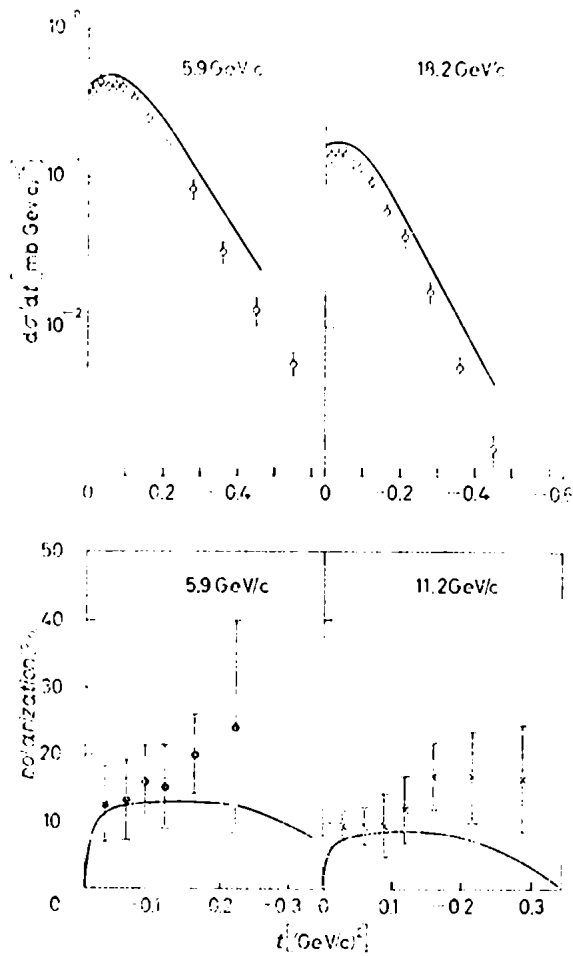


Fig.IV.2

El acuerdo es excelente si se tiene en cuenta que, siguiendo el espíritu de este trabajo, sólo se ha querido predecir las cantidades de interés a alta energía con los datos disponibles de baja energía. Ningún ajuste de la parametrización (3.3) a los puntos experimentales ha sido intentado. Los óptimos resultados de Barger y Phillips (1969), ya mencionados, muestran que tal ajuste es posible retocando ligeramente los números en (3.3).

$A^{(+)}$ y $B^{(+)}$. En este caso hay buen acuerdo entre las reglas de suma $\phi(\gamma)$ derivadas de los análisis de Berkeley, CERN y Saclay.

La hipótesis habitual de que el sistema P, f_0 de polos de Regge explica el comportamiento asintótico de estas amplitudes, no parece ser cierta para $B^{(+)}$. Para ajustar las reglas de suma de esta amplitud en $t=0$ con dos polos de Regge, siendo uno de ellos el de Pomeranchuk - $\alpha_p(0)=1$ - se necesita que el segundo polo tenga $\alpha < 0$. Ciertamente, el resultado está en desacuerdo con el valor bien conocido $\alpha_{f_0} = 1/2$. Pero se puede obtener consistencia con la familiar imagen de los intercambios de vacío P, f_0 , agregando una tercer contribución con α negativa, acomodada fundamentalmente a $B^{(+)}$. Esta conclusión nuestra ha sido reconfirmada recientemente en el trabajo de Barger y Phillips.

En lugar de aumentar el ya abultado conjunto de parámetros P, f_0 , hemos preferido parametrizar $A^{(+)}$ y $B^{(+)}$ por dos cortes de Regge con discontinuidades de forma exponencial y con puntos de ramificación fijos en $\alpha_c = 1$. Esperamos que estos cortes o distribuciones continuas de singularidades de Regge, aproximen bastante bien el sistema de polos de cada amplitud. Como sólo dos parámetros son necesarios para cada una - τ y β_c de la fórmula (3.2) - resulta sencillo ajustar las reglas de suma para distintos valores de t y es posible predecir las secciones diferenciales elásticas de alta energía y las polarizaciones.

Los mejores ajustes a las curvas $\phi(\gamma)$ de $A^{(+)}$ y $B^{(+)}$ son excelentes hasta $t=-0.3$ de allí en adelante aparecen algunas discrepancias. El análisis da

$$\begin{aligned}
 A^{(+)} &= i 99 \exp [3.0 t] \tau_A \left[\ln \left(\frac{\nu}{1.9} \exp [i/\tau_A] \right) - i\pi/2 \right] & (\text{GeV})^{-1}, \\
 \tau_A &= 0.18 - 0.68 t & (\text{GeV})^2, \\
 B^{(+)} &= i 143 \exp [1.64 t] \tau_B \left[\ln \left(\frac{\nu}{1.9} \exp [1/\tau_B] \right) - i\pi/2 \right] & (\text{GeV})^{-1}, \\
 \tau_B &= 0.77 - 1.05 t & (\text{GeV})^2.
 \end{aligned}
 \tag{3.4}$$

Las predicciones para las secciones diferenciales π^-p y π^+p están en buen acuerdo con los datos de Harting et al.(1965), como puede verse en la parte superior de la Fig.(IV.3).

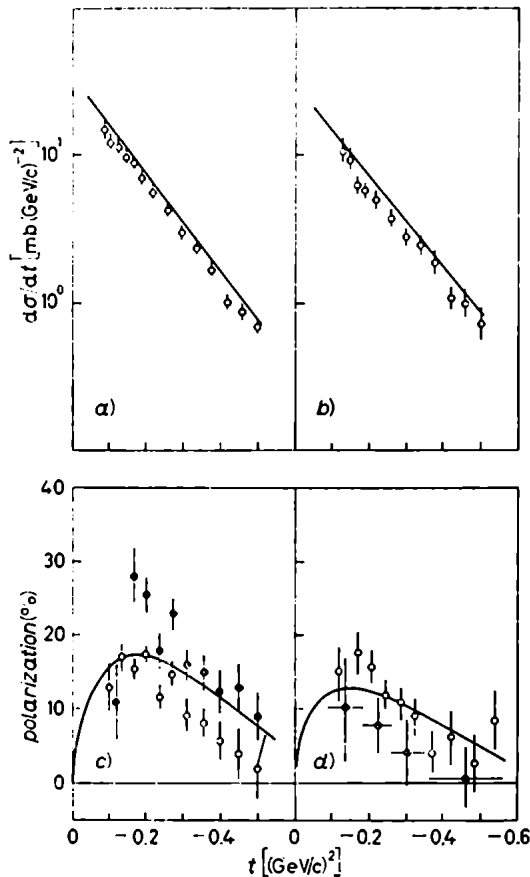


Fig.IV.3

Los puntos experimentales corresponden a 12.4 GeV/c; a) π^-p ; b) π^+p . En particular ambas secciones se entrecruzan correctamente alrededor de $t=-0.2$. La predicción de la diferencia entre ambas polarizaciones elásticas

$$\Delta = \frac{1}{2} \{P(\pi^+p) - P(\pi^-p)\} = \text{Im} (A^{(+)} B^{(-)*}) \frac{E^2 - M^2}{32\pi^2 W} \sin \theta \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)^{-1} \quad (3.5)$$

es también satisfactoria. En la mitad inferior de la Fig.(IV.3) hemos representado el miembro derecho de (3.5) junto con datos experimentales para $P(\pi^+p)$ (puntos llenos) y $-P(\pi^-p)$ (círculos). El valor exacto de Δ pasa equidistantemente entre ambos conjuntos de puntos. Las mediciones pertenecen a Borghini et al.(1967) y corresponden a energías de 6 GeV/c (cuadro c) y 12 GeV/c (cuadro d). Datos más recientes a 14 GeV/c del grupo CERN-ORSAY-PISA (ver Bellettini, 1968) indican que las polarizaciones π^+p mostradas en d) están sistemáticamente deprimidas un 5% o más. Corrigiéndolas, mejora considerablemente nuestra predicción a 12 GeV/c. En lo que respecta a la cantidad

$$\frac{1}{2} \{P(\pi^+p) + P(\pi^-p)\} = \text{Im} (A^{(+)*} B^{(+)}) \frac{E^2 - M^2}{32\pi^2 W} \sin \theta \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)^{-1}, \quad (3.6)$$

que da la distancia entre círculos y puntos llenos de la Fig.(IV.3), podemos decir, según (3.4), que es positiva, lo cual concuera con la experiencia. Sin embargo, es demasiado

grande a energías del orden de 10 GeV/c ($\sim 20\%$ contra un $2\pm 5\%$).
La dificultad debe provenir de $B^{(+)}$, pues la fórmula (3.5),
que depende de $A^{(+)}$, ajusta bien los datos. Este hecho indi-
caría que la parametrización, con un corte de discontinuidad
exponencial, de las tres singularidades de Regge supuestas
en esta amplitud, es algo grosera a energías elevadas. Mejores
resultados se pueden obtener en un modelo con tres polos, como
el usado por Barger y Phillips, en el que incluyen en $B^{(+)}$
 P , P' ($\equiv f_0$) y la nueva singularidad P'' .

Conclusiones. Partiendo de los análisis de corrimientos de
fase a baja energía ($< 2\text{GeV}$) de Berkeley, CERN y Saclay, y
usando reglas de suma de momento continuo, hemos predicho
las secciones diferenciales y polarizaciones de alta energía
para las reacciones π^+p elásticas y $\pi^-p \rightarrow \pi^0n$, en el rango
 $|t| \lesssim 0.4 (\text{GeV}/c)^2$. El análisis del CERN (que en este punto
difiere de los de Berkeley y Saclay) da como resultado que
en la amplitud $A^{(-)}$ hay, además del polo del mesón ρ , un
corte de Regge, puesto de manifiesto por el cero dinámico
del ρ en $t=-0.2$. Este corte predice correctamente la polari-
zación en el intercambio de carga. También se obtiene una
débil evidencia de que el ρ se desacopla según el mecanismo
de Gell-Mann en $\alpha_\rho = 0$. El análisis no puede establecer la
naturaleza de una contribución secundaria muy pequeña ($\sim 10\%$
de la del ρ a 2 GeV) presente en $B^{(-)}$.

Con respecto a $A^{(+)}$ y $B^{(+)}$, los datos de $P(\pi^+p) + P(\pi^-p)$,
más las reglas de suma, señalan la existencia en $B^{(+)}$ de una

latente

, (+)

línea comportamiento

$\lim_{t \rightarrow \infty} \rho(\tau^+) = \rho(\tau^-)$.

CAPITULO V. POLOS DE REGGE EN LA FOTOPRODUCCION DE PIONES CARGADOS.

V.1. INTRODUCCION.

Este capítulo se basa en los trabajos del grupo TRIESTE-FRASCATI-ROMA (citados como Di Vecchia et al.), del cual formó parte el autor en 1968, así como en resultados inéditos obtenidos en la Universidad de Buenos Aires.

La misma técnica ya aplicada en el capítulo anterior a la dispersión πN , es usada aquí para elucidar las singularidades de Regge relevantes para la fotoproducción de piones. En esta reacción, el canal t ($\gamma\pi \rightarrow N\bar{N}$) es mucho más rico en intercambios. Dado que el fotón puede comportarse como isoescalar o isovector, no tiene paridad G definida, lo cual permite estados intermedios de ambas paridades G. Más importante aún es el hecho de que fotones con multipolaridad MJ inducen transiciones a estados mesónicos intermedios de paridad natural, y fotones de tipo EJ a estados de paridad innatural. Entonces, casi toda la fauna de mesones escalares, pseudoescalares, vectoriales, pseudovectoriales y tensoriales (con la única exclusión de los mesones de $I^G=0^+$) puede ser excitada, y a altas energías del canal directo todas sus trayectorias contribuirán, en principio. Con la lista de mesones del Particle Data Group, podemos construir la siguiente tabla de posibles intercambios

γ	I^G	
V	0^-	ω
V	1^-	π, A_1, A_2
S	1^+	ρ, B

donde V y S indican si el fotón es isovectorial o isoescalar, respectivamente.

La matriz de transición para fotoproducción es formalmente idéntica a la de dispersión πN , cambiando una de las corrientes piónicas por la corriente electromagnética

$$R_\alpha(p', q; p, k; \epsilon) = i \int dx e^{iqx} \theta(x^0) \langle p' | [j_\alpha(x), j_\mu^{em}(0)] | p \rangle \cdot \epsilon^\mu \quad (1.1)$$

Aquí, k es el cuadriimpulso del fotón, ϵ^μ su polarización y q , el impulso del pión producido. Esta matriz puede escribirse, reduciendo los nucleones y omitiendo por un momento el índice de carga, en la forma

$$R(p', q; p, k; \epsilon) = \bar{u}(p') T(p', q; p, k; \epsilon) u(p). \quad (1.2)$$

T es función lineal de ϵ^μ , se transforma como un pseudoescalar debido a la presencia de la corriente piónica y puede ser construída, en forma general, con los impulsos p, p', k y q . La expresión para T debe ser invariante de medida, lo cual implica que reemplazando k por ϵ en ella, debe anularse. Es fácil ver, ya sea con argumentos de helicidad o acoplando momentos angulares, que hay cuatro amplitudes en esta reacción.

En consecuencia, el desarrollo más general de la matriz de transición es (Chew et al., 1957b)

$$T(p', q; p, k; \epsilon) = \sum_{i=1}^4 A_i(s, t) M_i \quad (1.3a)$$

donde las M_i son las matrices

$$\begin{aligned} M_1 &= i \gamma^5 \not{K} \\ M_2 &= -2i \gamma^5 (P \cdot \epsilon \not{q} \cdot k - P \cdot k \not{q} \cdot \epsilon) \\ M_3 &= i \gamma^5 (\not{q} \cdot k - \not{K} \not{q} \cdot \epsilon) \\ M_4 &= 2i \gamma^5 (\not{q} \cdot P \cdot k - \not{K} P \cdot \epsilon - M \not{K}) \end{aligned} \quad (1.3b)$$

$$P = \frac{1}{2} (p + p')$$

y las $A_i(s, t)$ son amplitudes libres de singularidades cinemáticas.

En el espacio de isospin, la corriente electromagnética puede descomponerse en la suma de un isoescalar más la tercera componente de un isovector (recordar la relación $Q = Y/2 + I_3$, válida para la integral de su cuarta componente)

$$j_\mu^{em} = j_\mu + j_{\mu,3}$$

De aquí y (1.1) resulta que T es la suma de un isovector más la componente $\alpha 3$ de un tensor de rango dos del espacio de carga. Lo mismo vale, naturalmente, para las amplitudes A_i . La expresión más completa con las propiedades requeridas es

$$A_i(s, t) = \tau_\alpha A_i^{(0)} + \frac{1}{2} [\tau_\alpha, \tau_3] A_i^{(-)} + \delta_{\alpha 3} A_i^{(+)} \quad (1.4)$$

Tenemos ahora doce amplitudes. Por cálculo directo se prueban las siguientes relaciones

$$\begin{aligned} \Lambda_i(\gamma p \rightarrow \pi^0 p) &= \Lambda_i^{(+)} + \Lambda_i^{(0)} \\ \Lambda_i(\gamma p \rightarrow \pi^+ n) &= -\sqrt{2} \{ \Lambda_i^{(-)} + \Lambda_i^{(0)} \} \\ \Lambda_i(\gamma n \rightarrow \pi^- p) &= -\sqrt{2} \{ \Lambda_i^{(-)} - \Lambda_i^{(0)} \} \end{aligned} \quad (1.5)$$

Obviamente se puede identificar en (1.4) $\Lambda^{(0)}$ con A^S y $\Lambda^{(\pm)}$ con A^V . Por otra parte, las dos últimas reacciones en (1.5) tienen isospin $I=1$ en el canal t ; luego $\Lambda^{(-)} = \Lambda^V(I=1)$ y, por exclusión, $\Lambda^{(+)} = \Lambda^V(I=0)$.

La matriz de transición (1.1) tiene la siguiente propiedad evidente

$$R_\alpha^{**}(p, -q+i0; p', -k+i0; \epsilon^{**}) = R_\alpha(p', q+i0; p, k+i0; \epsilon), \quad (1.6)$$

que expresa la simetría de cruce del canal s al canal u . En otros términos

$$\sum_i \Lambda_i^{**}(-v+i0, t) \bar{M}_i(p, -q, -k, \epsilon^{**}) = \sum_i A_i(v+i0, t) M_i(p, q, k, \epsilon), \quad (1.7)$$

donde, como en el capítulo anterior, hemos introducido la variable

$$v = \frac{s-u}{4M} = \frac{P \cdot q}{M} = v_L + \frac{t-\mu^2}{4M}, \quad (1.8)$$

relacionada con la energía de laboratorio del fotón incidente. Usando (1.3b) y (1.4) podemos obtener de la igualdad (1.7) las siguientes relaciones de cruce

$$\begin{aligned}
 \Lambda_{1,2,4}^{(+,0)*}(-v^*, t) &= \Lambda_{1,2,4}^{(+,0)}(v, t) \\
 \Lambda_3^{(-)*}(-v^*, t) &= \Lambda_3^{(-)}(v, t) \\
 \Lambda_{1,2,4}^{(-)*}(-v^*, t) &= -\Lambda_{1,2,4}^{(-)}(v, t) \\
 \Lambda_3^{(+,0)*}(-v^*, t) &= -\Lambda_3^{(+,0)}(v, t)
 \end{aligned}
 \tag{1.9}$$

Reduciendo en el centro de masa los espinores de los nucleones a espinores de Pauli se llega a la amplitud

$$f = i \vec{\sigma} \cdot \vec{\epsilon} f_1 + \vec{\sigma} \cdot \hat{q} \vec{\sigma} \cdot (\hat{k} \times \vec{\epsilon}) f_2 + i \vec{\sigma} \cdot \hat{k} \hat{q} \cdot \vec{\epsilon} f_3 + i \vec{\sigma} \cdot \hat{q} \hat{q} \cdot \vec{\epsilon} f_4,$$

(1.10)

\hat{k} y \hat{q} son versores en la dirección de movimiento del fotón y del pión, respectivamente. Las amplitudes f_i están linealmente relacionadas con las Λ_i y con las amplitudes de helicidad del canal s

$$\begin{aligned}
 H_1(\theta) &= (3/2 \rightarrow 1/2) = -\frac{1}{\sqrt{2}} \sin \theta \cos \frac{\theta}{2} (f_3 + f_4) \\
 H_2(\theta) &= (1/2 \rightarrow 1/2) = \sqrt{2} \cos \frac{\theta}{2} \left\{ (f_2 - f_1) + \frac{1}{2} (1 - \cos \theta) (f_3 - f_4) \right\} \\
 H_3(\theta) &= (3/2 \rightarrow -1/2) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \theta \sin \frac{\theta}{2} (f_3 - f_4) \\
 H_4(\theta) &= (1/2 \rightarrow -1/2) = \sqrt{2} \sin \frac{\theta}{2} \left\{ (f_1 + f_2) + \frac{1}{2} (1 + \cos \theta) (f_3 + f_4) \right\}
 \end{aligned}$$

(1.11)

(entre paréntesis figura la proyección total de espín $S_{\hat{k}} \rightarrow S_{\hat{q}}$). Se las puede expandir muy simplemente en serie de ondas parciales. Las fórmulas son algo extensas; para más detalles remitimos al lector al artículo de Chew et al. (1957b) ya citado.

A muy altas energías y transferencias de momento t fijas, $|t| \ll s$, las relaciones entre f_i y Λ_i se simplifican considerablemente

$$\begin{aligned}
 f_1 + f_2 &\approx \frac{s}{8\pi} \Lambda_4 & f_3 + f_4 &\approx \frac{s}{16\pi} (\Lambda_3 - \Lambda_4) \\
 f_1 - f_2 &\approx \frac{\sqrt{s}}{8\pi} \Lambda_1 & f_3 - f_4 &\approx \frac{s\sqrt{s}}{16\pi} \Lambda_2
 \end{aligned}
 \tag{1.12}$$

$$\sin^2 \frac{\theta}{2} \approx \frac{|t|}{s}$$

Otras amplitudes interesantes son las de helicidad en el canal t , con paridad natural bien definida. Se las puede construir directamente a partir de (1.2) usando la propiedad de cruce. Después de regularizarlas, extrayéndoles sus factores angulares y algunos otros factores conectados con el comportamiento en los umbrales y pseudoumbrales de energía del canal t , queda

$$\begin{aligned}
 F_1(s, t) &= K_1(t) [\bar{f}_{01,++} + \bar{f}_{01,--}] = 2M \Lambda_4 - \Lambda_1 \\
 F_2(s, t) &= K_2(t) [\bar{f}_{01,++} - \bar{f}_{01,--}] = (t - \mu^2) (\Lambda_1 + t\Lambda_2) \\
 F_3(s, t) &= K_3(t) [\bar{f}_{01,+ -} + \bar{f}_{01,- +}] = 2M \Lambda_1 - t \Lambda_4 \\
 F_4(s, t) &= K_4(t) [\bar{f}_{01,+ -} - \bar{f}_{01,- +}] = - \Lambda_3
 \end{aligned}
 \tag{1.13}$$

$$\begin{aligned}
 K_1(t) &= (t - \mu^2)^{-1}; \quad K_2(t) = \left(\frac{t}{t - 4M^2} \right)^{1/2}; \quad K_3(t) = t^{1/2} (t - \mu^2)^{-1}; \\
 K_4(t) &= (t - \mu^2)^{-1} (t - 4M^2)^{-1/2}.
 \end{aligned}$$

La inversión de estas relaciones da

$$\begin{aligned}
 A_1 &= - \frac{tF_1 + 2MF_3}{t-4M^2} \\
 A_2 &= \frac{F_1}{t-4M^2} + \frac{F_2}{t(t-\mu^2)} + \frac{2MF_3}{t(t-4M^2)} \\
 A_3 &= -F_4 \\
 A_4 &= - \frac{2MF_1 + F_3}{t-4M^2}
 \end{aligned}
 \tag{1.14}$$

Una condición muy importante surge inmediatamente de (1.11) y (1.14). La amplitud con doble inversión de espín del canal s , $H_3(\theta)$, debe anularse cuando $\theta=0$ por conservación de momento angular. Para energías asintóticas debe cumplirse entonces, usando (1.12),

$$|t| A_2(s,t) \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} 0 ,$$

que implica a través de (1.14)

$$F_2(s,0) = - \frac{\mu^2}{2M} F_3(s,0) . \tag{1.15}$$

Esta es una relación de conspiración entre F_2 y F_3 en el punto $t=0$ y debe verificarse para cualquier valor de s , pues de lo contrario, según (1.14), A_2 , que sabemos está libre de singularidades cinemáticas, tendría un polo en $t=0$. Las amplitudes F_2 y F_3 deben arreglar sus valores en este punto para satisfacer la condición. Una manera trivial de lograrlo es anulándose ambas. Se dice en ese caso que la relación de conspiración se satisface por evasión; en caso contrario se habla de una verdadera conspiración. La condición (1.15) tiene

importantes consecuencias para los polos de Regge que eventualmente puedan contribuir a F_2 y F_3 . Si a energías asintóticas

$$F_i \approx \beta_i(t) v^{\alpha_i(t)-1},$$

evasión implicaría $\beta_2(0)=\beta_3(0)=0$ y conspiración

$$\begin{aligned} \beta_2(0) &= -\frac{\mu^2}{2M} \beta_3(0) \\ \alpha_2(0) &= \alpha_3(0) \end{aligned} \quad (1.16)$$

Nótese que la condición (1.16) se impone no sólo a los residuos, sino también a las trayectorias, que deben entrecruzarse a $t=0$. Una aplicación interesante de las reglas de suma de momento continuo es verificar cómo es satisfecha la relación de conspiración. Según veremos enseguida, los datos experimentales permiten descartar claramente la solución evasiva de (1.15) en las amplitudes $F_2^{(-)}$ y $F_3^{(-)}$. Quedaría por ver si la conspiración es entre dos polos de Regge o, como ha sido propuesto por varios autores, es debida a un solo corte de Regge autoconspirante.

Veamos qué números cuánticos corresponden a las amplitudes F_i . F_1 y F_3 tienen paridad natural y F_2 , F_4 innatural. Como la máxima proyección de espín externo en el canal t es 1, estas amplitudes se comportan, ya lo dijimos, como $v^{\alpha-1}$ a altas energías. Con ayuda de (1.9) y (1.13) podemos entonces deducir la signatura de cada intercambio, que será positiva para $F_{1,2,3}^{(-)}$ y $F_4^{(0,+)}$ y negativa para las restantes. Podemos construir ahora la siguiente tabla de trayectorias

	Γ_1	Γ_2	Γ_3	Γ_4
$\Gamma(+)$	ω		ω	
$\Gamma(-)$	Λ_2, π_c	π	Λ_2, π_c	Λ_1
$\Gamma(0)$	ρ, ρ'	B	ρ, ρ'	

En los lugares en blanco no hay mesones conocidos. En $\Gamma_1^{(-)}$ y $\Gamma_3^{(-)}$ hemos agregado una trayectoria conspirante del pi3n, que ser3a la que satisface la relaci3n (1.16) con el pi3n de $\Gamma_2^{(-)}$ como compa3ero. N3tese la opuesta paridad natural de los miembros del doblete conspiratorio. Queda descartada una conspiraci3n $\pi-\Lambda_2$ por tener estos mesones trayectorias muy diferentes, $\alpha_\pi(0) \approx 0$, $\alpha_{\Lambda_2}(0) \approx 1/2$. La trayectoria ρ' , con los mismos n3meros cu3nticos del ρ , fue originalmente propuesta para explicar la polarizaci3n en πN con intercambio de carga. Nuestros resultados del cap3tulo anterior indican que podr3a tratarse de una cortadura. Lo inclu3mos dejando abiertas las dos posibilidades.

Digamos ahora algunas palabras sobre los observables de esta reacci3n. Hay dos direcciones independientes de polarizaci3n del fot3n incidente: con el campo el3ctrico perpendicular o paralelo al plano de la reacci3n. En consecuencia, podemos definir dos secciones diferenciales

$$\sigma_{\perp}(\theta) = \frac{1}{2} \frac{q}{k} (|H_1 + H_4|^2 + |H_2 - H_3|^2)$$

$$\sigma_{\parallel}(\theta) = \frac{1}{2} \frac{q}{k} (|H_1 - H_4|^2 + |H_2 + H_3|^2) . \quad (1.17)$$

En el laboratorio estas cantidades no se miden separadamente, sino en combinaciones como la asimetría

$$\Sigma(\theta) = \frac{\sigma_{\perp} - \sigma_{\parallel}}{\sigma_{\perp} + \sigma_{\parallel}} \quad (1.18)$$

o la sección diferencial con fotones no polarizados

$$\sigma(\theta) = \frac{1}{2} (\sigma_{\perp} + \sigma_{\parallel}) \quad (1.19)$$

Las dos expresiones anteriores permiten obtener

$$\begin{aligned} \sigma_{\perp}(\theta) &= \sigma (1 + \Sigma) \\ \sigma_{\parallel}(\theta) &= \sigma (1 - \Sigma) \end{aligned} \quad (1.20)$$

De (1.17), (1.11), (1.12) y (1.14) resulta que a altas energías

$$\begin{aligned} \sigma_{\perp}(\theta) &= \frac{1}{16\pi} \frac{1}{4M^2 - t} [|F_3|^2 - t |F_1|^2] \\ \sigma_{\parallel}(\theta) &= \frac{1}{16\pi} \left[\frac{1}{(t - \mu^2)^2} |F_2|^2 - t |F_4|^2 \right] \end{aligned} \quad (1.21)$$

El significado de estas fórmulas es que σ_{\perp} recibe asintóticamente sólo contribuciones de paridad natural (ω , ρ , ρ' , A_2 , π_c) y σ_{\parallel} , las de paridad innatural (π , B , A_1). Esta circunstancia se puede aprovechar para obtener información fenomenológica sobre los intercambios de ambas paridades.

En dispersión hacia adelante, $t=0$, la relación de conspiración (1.15) implica que $\sigma_{\perp}(0) = \sigma_{\parallel}(0)$, como puede verse de (1.21). Si hubiera evasión, las dos secciones se anularían y la sección diferencial (1.19) mostraría una brusca disminución en $t=0$.

Tal no es el caso en fotoproducción de piones cargados donde, por el contrario, los datos muestran un agudo incremento de la sección para valores de $|t| \lesssim \mu^2$. En conclusión, algún mecanismo de conspiración opera.

A altas energías, una interesante función experimental es el cociente

$$R(\theta) = \frac{d\sigma/d\Omega(\gamma d \rightarrow \pi^- pp)}{d\sigma/d\Omega(\gamma d \rightarrow \pi^+ nn)}$$

entre las secciones diferenciales de fotoproducción en deuterio. Este cociente es igual a la razón entre las secciones de fotoproducción sobre neutrones y protones

$$R(\theta) = \frac{d\sigma/d\Omega(\gamma n \rightarrow \pi^- p)}{d\sigma/d\Omega(\gamma p \rightarrow \pi^+ n)} \quad (1.22)$$

Se observa que R tiende a 1 para $\theta = 0^\circ$, lo cual indica que los picos delanteros de $\gamma p \rightarrow \pi^+ n$ y $\gamma n \rightarrow \pi^- p$ coinciden. La fórmula (1.5) nos dice que en ese caso las amplitudes $F^{(0)}$ son irrelevantes, y que la conspiración se produce entre $F_2^{(-)}$ y $F_3^{(-)}$. La solución alternativa de despreciar las amplitudes $F^{(-)}$ respecto de las $F^{(0)}$ llevaría a un pico no observado en la sección de producción de piones neutros. En el próximo párrafo nos dedicaremos a esta conspiración.

Cerramos esta introducción con una lista de referencias que pueden servir de complemento a lo aquí tratado. Además del clásico artículo de Chew et al. pueden consultarse: Childers & Holladay (1963), Ball (1961), Dennery (1961), Kramer & Stichel (1964), Walker (1969) y la reseña de Stichel (1965).

V.2. LA CONSPIRACION $\pi-\pi_c$.

Recién dijimos que todas las evidencias experimentales se hallan a favor de un pión conspirante en la amplitud $F_2^{(-)}$. Saturando las reglas de suma de momento continuo con amplitudes de baja energía, se puede obtener una imagen más completa de lo que sucede. En el marco de las reglas de suma de energía finita, el estudio fue llevado a cabo por Dietti et al.(1968). Sus conclusiones, meramente cualitativas, ponen de manifiesto la conspiración, pero los residuos obtenidos no predicen adecuadamente el pico delantero de la sección diferencial. Siendo nuestra técnica mucho más precisa, esperamos no sólo reproducir correctamente los datos experimentales, sino determinar las trayectorias y residuos del π y de la singularidad conspirante π_c en forma bastante fidedigna.

La saturación de las integrales sobre la región resonante se efectuó usando el ajuste fenomenológico de Walker (1969), que cubre la región comprendida entre el umbral y una energía de laboratorio del fotón de 1.2 GeV. En el centro de masa, esta energía corresponde a 1.8 GeV, aproximadamente. El ajuste consiste en una expansión de ondas parciales, en la que las principales resonancias observadas por fotoexcitación han sido incluidas en la onda correspondiente mediante una parametrización de Breit-Wigner. Cada onda parcial contiene además un fondo numérico, que es función de la energía. Los parámetros libres se han variado hasta reproducir razonablemente las secciones diferenciales, polarizaciones del nucleón de retro-

caso y asimetrías de baja energía para las reacciones (1.5) en el rango $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$. En conclusión, las siguientes resonancias son consideradas: en las amplitudes de isoespín 3/2, F_{33} (1236), más conocida como Δ (1236); con isoespín 1/2 figuran F_{13} (1518), F_{15} (1688), S_{11} (1550), P_{11} (1470) y D_{15} (1680). En la parte real de las amplitudes hay que agregar además la contribución del polo del pión del canal t (en $F_2^{(-)}$ solamente) y de los polos del nucleón en los canales s y u. El ajuste de Walker está, en principio, sujeto a los mismos problemas de convergencia ya discutidos en el capítulo anterior. Aquí, sin embargo, consideraremos un rango de t algo más restringido.

Las reglas de suma para las amplitudes que nos interesan, $F_2^{(-)}$ y $F_3^{(-)}$, son las siguientes (Di Vecchia et al., 1968a):

$$\begin{aligned} \phi_\pi(\gamma) = -(\nu_{\max})^{-\gamma} \left\{ \frac{\mu}{\pi} \int_{\nu_0}^{\nu_{\max}} [\nu^2 - \nu_0^2]^{\frac{1}{2}\gamma} \operatorname{Im} [\exp(-\frac{1}{2}i\pi\gamma) F_2^{(-)}(\nu, t)] d\nu + \frac{1}{2}ef(t + \mu^2) [\nu_0^2 - \nu_B^2]^{\frac{1}{2}\gamma} \right\} = \\ = \frac{\mu}{2\pi M} \sum_k \frac{\alpha_k(t)\beta_k(t)}{\sin[\frac{1}{2}\pi\alpha_k(t)]} \cdot \frac{\sin \frac{1}{2}\pi[\alpha_k(t) + \gamma]}{\alpha_k(t) + \gamma} \cdot \left(\frac{2M\nu_{\max}}{s_0} \right)^{\alpha_k(t)} \end{aligned} \quad (1a)$$

$$\begin{aligned} \phi_c(\gamma) = -(\nu_{\max})^{-\gamma} \left\{ \frac{\mu}{\pi} \int_{\nu_0}^{\nu_{\max}} [\nu^2 - \nu_0^2]^{\frac{1}{2}\gamma} \operatorname{Im} [\exp(-\frac{1}{2}i\pi\gamma) F_3^{(-)}(\nu, t)] d\nu + \left[\frac{ef}{4M}(t - 4M^2) - \frac{tef}{4M}(1 + \mu_p - \mu_n) \right] \times \right. \\ \left. \times [\nu_0^2 - \nu_B^2]^{\frac{1}{2}\gamma} \right\} = \frac{\mu}{2\pi M} \sum_k \frac{\alpha_k(t)\beta_k(t)}{\sin[\frac{1}{2}\pi\alpha_k(t)]} \cdot \frac{\sin \frac{1}{2}\pi[\alpha_k(t) + \gamma]}{\alpha_k(t) + \gamma} \cdot \left(\frac{2M\nu_{\max}}{s_0} \right)^{\alpha_k(t)} \end{aligned} \quad (1b)$$

(2.1)

Los residuos del nucleón, que aparecen en el miembro izquierdo de (2.1) como una contribución separada de las integrales, han sido extraídos del artículo de Chew et al. (1957b).

Como función de γ , las curvas ϕ_π y ϕ_c resultan sorprendentemente iguales a las curvas generadas por un solo polo, y en $t=0$ satisfacen cumplidamente la relación de conspiración (1.16).

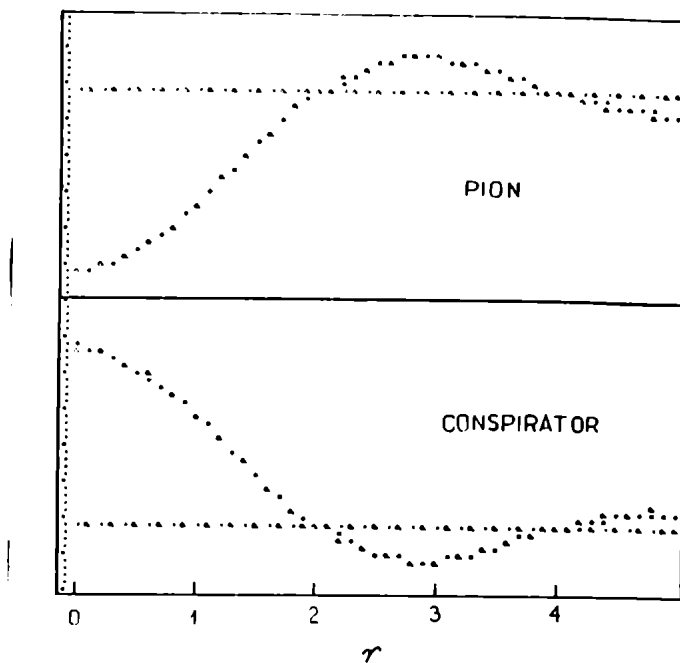


Fig.V.1

$\phi_{\pi}(\gamma)$ y $\phi_c(\gamma)$ en $t = 0$.

Este hecho nos llevó a identificar la singularidad presente en $F_3^{(-)}$ con un nuevo polo, el conspirador del pión π_c . Sin embargo, más recientemente, Jackson y Quigg (1969) han mostrado que las curvas de la Fig(V.1) pueden ser calculadas a partir de las correcciones absorptivas (Jackson, 1965) a un modelo OPE (siglas de la expresión inglesa: intercambio de un pión). En este modelo, un pión elemental o Reggeizado, es intercambiado en el canal t . En el caso de pión elemental la amplitud, dada por el correspondiente diagrama de Feynman, vale

$$\frac{F_2^{(-)}}{t-\mu^2} = - \frac{eG}{M} \frac{t}{t-\mu^2} v^{-1} \quad (2.2)$$

(la amplitud Reggeizada no difiere mucho de ésta si suponemos $|t| \sim \nu^2 \ll 1 \text{GeV}^2$). Se ve de aquí que el pión evade en $t=0$. Inter-cambios con masa mayor corresponden a fuerzas de más corto alcance que abren otros canales para la reacción y modifican las ondas más bajas en el sentido requerido por la unitariedad, es decir, en el de una disminución de las amplitudes parciales (absorción). Si bien en $t=0$ el pión no contribuye, estas correc-ciones, para Jackson y Quigg, serían las reflejadas en las re-glas de suma de la Fig.(V.1). Desde el punto de vista del modelo de Regge, las correcciones absorptivas corresponden a cortes en el plano del momento angular. Lo que llama la atención es que estos cortes, si verdaderamente lo son, se manifiestan en las reglas de suma netamente como polos, aunque lógicamente este hecho no puede tomarse como evidencia en contra de ellos. Hay, en cambio, argumentos que están decididamente a su favor y en contra de un pión conspirante. Le Bellac (1967) mostró que la factorización implica, si el pión conspira, que la sección diferencial $\pi N \rightarrow \rho \Delta$ se anula hacia adelante. Datos de Aderholz et al. (1968) indican todo lo contrario. Esta contradicción no existe en la hipótesis de las correcciones absorptivas, pues la factorización no es válida para cortes de Regge.

Dejando de lado problemas de interpretación, que aún permanecen abiertos, podemos parametrizar las amplitudes $F_2^{(-)}$ y $F_3^{(-)}$ a alta energía con dos polos de Regge efectivos, π y π_c , cuyos parámetros, extraídos de las reglas de suma, pueden

verse en la Fig.(V.2)

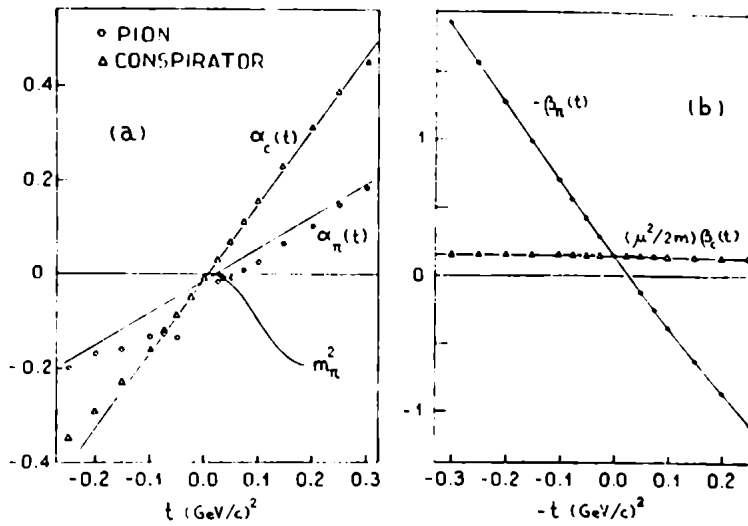


Fig. V.2

v se pueden sintetizar en las siguientes fórmulas

$$\begin{aligned}
 \alpha_{\pi}(t) &= -0.013 + 0.65 t \\
 \alpha_c(t) &= -0.013 + 1.56 t \\
 \beta_{\pi}(t) &= -0.25 \left(1 + 0.42 \frac{t - \mu^2}{\mu^2} \right) \\
 \beta_c(t) &= 13.7 \left(1 + 0.45 t \right) \text{ GeV}^{-1}
 \end{aligned}
 \tag{2.3}$$

Nótese el cero del residuo β_{π} en $t = -0.027$. Este cero es predicho en $t = -\mu^2$ si se aproxima la amplitud por el polo del pión más los diagramas con nucleón intermedio en los canales s y u (necesarios para satisfacer invariancia de medida). En el modelo absorptivo, el cero proviene de la interferencia del pión con la corrección absorptiva a $F_2^{(-)}$. Conviene destacar aquí que ceros similares, cercanos a $t=0$, han sido hallados en las amplitudes conspirantes $F_2^{(0)}$ y $F_3^{(0)}$ (Di Vecchia et al., 1968c), como también en muchas otras reacciones, un ejemplo de las

cuales es πN "intercambio de carga", con su cero de $A'(-)$ en $t \approx -0.2$, ya analizado en el capítulo anterior. Si tales ceros fueran adjudicados a los residuos de los polos de Regge, la factorización los trasladaría a reacciones donde no han sido observados. Esta dificultad favorece la interpretación del modelo absorptivo, que los considera ceros de interferencia. Justamente Odorico (1969) ha notado que sistemáticamente se los puede encontrar en las amplitudes que contribuyen hacia adelante, las más afectadas, presumiblemente, por las correcciones absorptivas.

Después del cero, $\sqrt{-t} < 0.16$, el pión aporta cada vez más a la sección diferencial, y se observa el característico pico de la Fig.(V.3). Las líneas continuas son nuestra predicción con los parámetros (2.3) y los puntos experimentales corresponden a Boyarski et al (1968 a). El acuerdo es excelente.

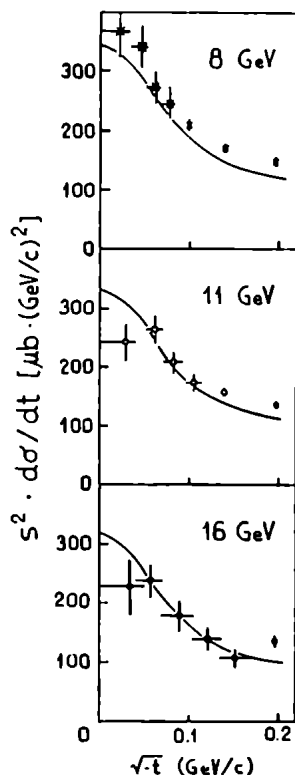


Fig. V.3

La solución (2.3) coincide remarcablemente con un ajuste hecho a las secciones de alta energía por Ball et al. (1968) con el modelo de pión conspirante, pero nótese que, por el contrario, nuestra parametrización ha sido obtenida de datos de baja energía.

Si π_c fuera realmente un polo de Regge, debería contribuir a otras amplitudes, portadoras de sus mismos números cuánticos. Dos ejemplos inmediatos son las amplitudes para producción del mesón η , $\pi^- p \rightarrow \eta^0 n$, y la amplitud $F_1^{(-)}$ de fotoproducción. El primer caso fue considerado por Botke y Fulco (1969), quienes usando reglas de suma de momento continuo hallaron, además de la contribución de A_2 y fuertes correcciones absorptivas, alguna evidencia para la trayectoria $\pi_N(1016)$ y, en menor grado, para la π_c de la ecuación (2.3). El segundo caso fue estudiado por Di Vecchia et al. (1968b). Un notable resultado del análisis de $F_1^{(-)}$ es la presencia, para $|t| > 0.4$, de un polo cuya trayectoria coincide con $\alpha_c(t)$; la fuerte pendiente de esta trayectoria la hace fácilmente identificable. La consistencia interna observada entre las amplitudes de fotoproducción podría servir de argumento a favor de la existencia de π_c , aunque aún queda abierta la posibilidad de que, trabajando con el modelo absorptivo, puedan generarse correcciones a $F_1^{(-)}$ y $F_3^{(-)}$ cuyas fases - que esencialmente determinan $\alpha_c(t)$ - estén fuertemente correlacionadas. En el mismo estudio de $F_1^{(-)}$ se encontró una contribución del mesón A_2 , esencialmente hacia adelante, que se anula en el punto de buena signatura $\alpha_{A_2} = 0$. Es justamente este cero el que pone en

descubierto el aporte de π_c . El punto en cuestión es "sense-nonsense", según se infiere de considerar los espines totales externos en el canal t, fórmula (1.13). Una ojeada a la tabla de Bertocchi (1967) enseña que A_2 se desacoplaría entonces según el mecanismo llamado "no compensante" o el de Chew, preferiblemente este último debido a la falta de estructura de las secciones diferenciales $\pi^- p \rightarrow n^0 n$.

De los trabajos sobre fotoproducción del grupo TRIESTE-FRASCATI-ROMA surgen algunas interesantes conclusiones relacionadas con la espectroscopía de mesones. En primer lugar, si π_c fuera un polo de Regge con los mismos números cuánticos de A_2 , podría sugerirse una satisfactoria explicación del desdoblamiento observado en el pico del mesón $A_2(1300)$ con técnicas de alta resolución (referencias completas en la reseña de French, 1968). Si las dos resonancias tienen igual $J^P=2^+$, como parecen confirmar recientes experiencias (Chikovani et al., 1969), pueden ser consideradas los primeros estados físicos de las trayectorias A_2 y π_c . De acuerdo con la trayectoria comúnmente aceptada para A_2 , $\alpha_{A_2} \approx 1/2 + t$, ésta debería cortar a $\alpha_c(t) (\approx 3/2 t)$ aproximadamente en $t=1$ (Gev/c)². Pero un clásico teorema de la mecánica cuántica manifiesta que no hay cruce de niveles (o trayectorias) con iguales números cuánticos. En consecuencia cerca del punto donde debieran intersectarse, las trayectorias comienzan a repelerse, se curvan ligeramente y marchan paralelas durante cierto trecho, en el cual cruzan el $J=2$, dando origen a dos resonancias muy vecinas. La resonancia de menor masa correspondería a la

trayectoria A_2 y la de mayor masa a π_c . Se explica que sobre la trayectoria π_c no haya ningún meson de espín cero, pues como se ve del gráfico (V.2), el residuo de la amplitud $F_3^{(-)}$ (nonsense-nonsense) no se anula cuando $\alpha_c=0$. La factorización exige en tal caso la anulación de los residuos sense-sense, con lo cual la trayectoria se desacopla de las reacciones que podrían dar origen al estado físico.

En segundo lugar, la observación de las amplitudes $F_2^{(0)}$ y $F_3^{(0)}$ provee cierta evidencia para un nuevo par de trayectorias conspirantes: ρ' y B (Di Vecchia et al., 1968c). Estas trayectorias son aproximadamente degeneradas e iguales a $-0.6+0.7 t$. Se ve que la primer recurrencia de ρ' podría muy bien ser el mesón $\rho_V(1660)$, si se le asigna $J^P=1^-$. La trayectoria B pasaría, suponiendo una pendiente algo mayor que la observada, $\alpha_B=1$, por el mesón B(1235) de $J^P=1^+$.

Conclusiones. Las reglas de suma de momento continuo muestran claramente la conspiración $F_{2,3}^{(-)}$ y permiten predecir con gran exactitud el pico de las secciones de fotoproducción de piones cargados. Sin embargo, no tienen poder discriminatorio para distinguir una conspiración polo-polo de una del tipo corte-corte con pión evasivo. Esta última clase de conspiración no encuentra dificultades con los argumentos de factorización aplicables a la reacción $\pi N \rightarrow \rho \Delta$.

Otro resultado interesante de las reglas de suma lo constituyen los ceros vecinos a $t=0$ de las amplitudes que participan hacia adelante. Tales ceros se encuadrarían perfectamente en una teoría con correcciones absorptivas y serían la interferencia

de los cortes absorptivos con los polos de Regge. Las diferentes piezas de evidencia sugieren pues analizar más a fondo la cuestión de estas correcciones. La única ventaja que los argumentos a favor del π_c pueden capitalizar, es la explicación del doblete A_2 y la consistencia de sus parámetros en diferentes amplitudes de fotoproducción. Sin embargo, con respecto al A_2 otras hipótesis, igualmente explicativas, han sido formuladas (ver p.ej. Tuan, 1969), y con referencia al último punto, que merece ser investigado seriamente, el modelo absorptivo podría, en principio, ofrecer una solución satisfactoria.

V.5. UN AJUSTE FENOMENOLOGICO A LOS DATOS DE ALTA ENERGIA EN FOTOPRODUCCION DE PIONES CARGADOS.

Cerraremos este capítulo con una recopilación de todos los resultados obtenidos a través del estudio sistemático de las ocho reglas de suma que pueden contribuir a la fotoproducción de piones cargados. La parametrización que presentaremos, resume los aspectos principales de las amplitudes dominantes. Cada contribución, independientemente de su carácter o interpretación como polo de Regge o corrección absorptiva, ha sido parametrizada por un polo efectivo. Los valores numéricos extraídos de las reglas de suma han sido alterados ligeramente con el fin de ajustar lo más fielmente posible los datos de alta energía. Un conjunto de 58 puntos experimentales ha sido usado con este propósito, incluyendo infor-

nación sobre secciones diferenciales, asimetrías y la relación (1.22) en deuterio. Estos datos se han tomado de las siguientes referencias: Richter (1968), Bovarski et al.(1968b) y Geweniger et al. (1968, 1969). El ajuste final es considerablemente bueno, con un $\chi^2=47.7$. En particular, las secciones diferenciales son reproducidas fielmente en todo el rango $0 \leq |t| \leq 2(\text{GeV}/c)^2$ y energías que llegan hasta los 16 GeV. Muy bueno resulta también el ajuste para R a energías por encima de los 8 GeV (Fig. V.4). En general, todas las magnitudes calculadas con nuestra parametrización tienen un correcto comportamiento con la energía.

Especialmente interesante es nuestro resultado para la asimetría en la fotoproducción de π^- , si se tiene en cuenta que ninguna de las parametrizaciones habituales consigue explicar los puntos experimentales a 3.4 GeV (Fig.V.5). En cuanto a la pequeña discrepancia en la asimetría para π^+ , es debida a que hemos despreciado pequeñas correcciones en las amplitudes de paridad innatural.

Los ingredientes de nuestro análisis se pueden resumir así:

a) el pión es la única singularidad dominante de paridad innatural. Este resultado está plenamente de acuerdo con la experiencia, que sugiere

$$\sigma_{\parallel}(\pi^+) = \sigma_{\parallel}(\pi^-)$$

b) Las contribuciones de paridad natural con opuesta paridad sólo interfieren en la amplitud F_1 . Como esta amplitud se desacopla en $t=0$, se explica así porque $R \rightarrow 1$.

c) El acoplamiento del mesón ρ a $F_1^{(0)}$ es débil. En su lugar domina un fuerte corte absorbtivo, con $\alpha(t) \approx 0$ en un rango bastante extenso de t .

d) La interferencia de este corte con el π_c de $F_1^{(-)}$ explica perfectamente $R(t)$ para valores intermedios de t .

Todas las amplitudes han sido escritas en la forma

$$F_i(v,t) = \beta(t) \exp(-i \frac{\pi}{2} \alpha) v^{\alpha-1} \xi_i \quad (3.1)$$

donde ξ_i es un factor de signatura que vale

$$\begin{aligned} \xi_i &= 1 && \text{signatura (+)} \\ \xi_i &= i && \text{signatura (-)} \end{aligned}$$

Las trayectorias son consistentes con las reglas de suma o con valores corrientemente usados en la literatura

$$\begin{aligned} \alpha_\pi(t) &= -0.013 + 0.65 t \\ \alpha_c(t) &= -0.013 + 1.56 t + 0.27 t^2 \\ \alpha_\rho(t) &= 0.55 + t \\ \alpha_{A_2}(t) &= 0.35 + 0.46 t \end{aligned} \quad (3.2) \quad (\text{Phillips \& Rarita, 1965})$$

Por comodidad de notación llamaremos α a la corrección absor-
 tiva o corte de Regge presente en $F_1^{(\rho)}$. Luego

$$\alpha_{\rho}(t) = 0.05 + 0.10 t$$

Los residuos se expresan en la forma:

$$\begin{aligned}
 \beta_{\pi} &= -32.8 (t+0.027) e^{1.08 t} && \sqrt{\mu b} \cdot \text{GeV} \\
 \beta_{\rho}^3 &= 85.0 e^{2.49 t} && \sqrt{\mu b} \\
 \beta_{\rho}^1 &= -61.6 e^{-0.30 t} && \sqrt{\mu b} / \text{GeV} \\
 \beta_{\rho}^2 &= -119. e^{1.62 t} && \sqrt{\mu b} / \text{GeV} \\
 \beta_{A_2} &= 102. e^{3.12 t} && \sqrt{\mu b} / \text{GeV} \\
 \beta_{\rho} &= 60.5 e^{0.99 t} \alpha_{\rho}(t) && \sqrt{\mu b} / \text{GeV}
 \end{aligned} \tag{3.3}$$

Las ecuaciones (3.1), (3.2) y (3.3) definen completamente
 nuestra parametrización para la fotoproducción de piones car-
 gados a altas energías. En las figuras que siguen se muestran
 algunos resultados de nuestro ajuste.

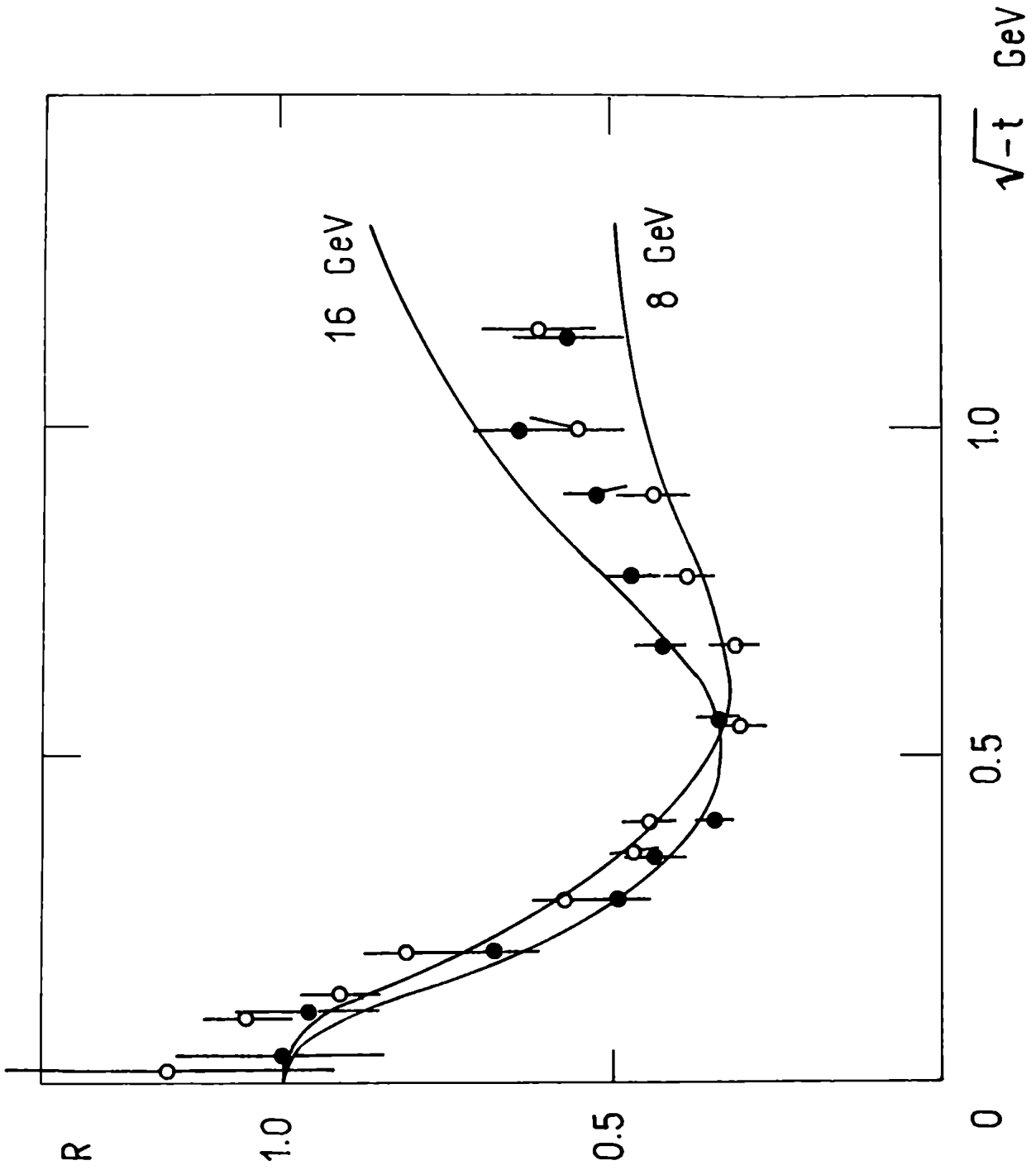


Fig. V.4

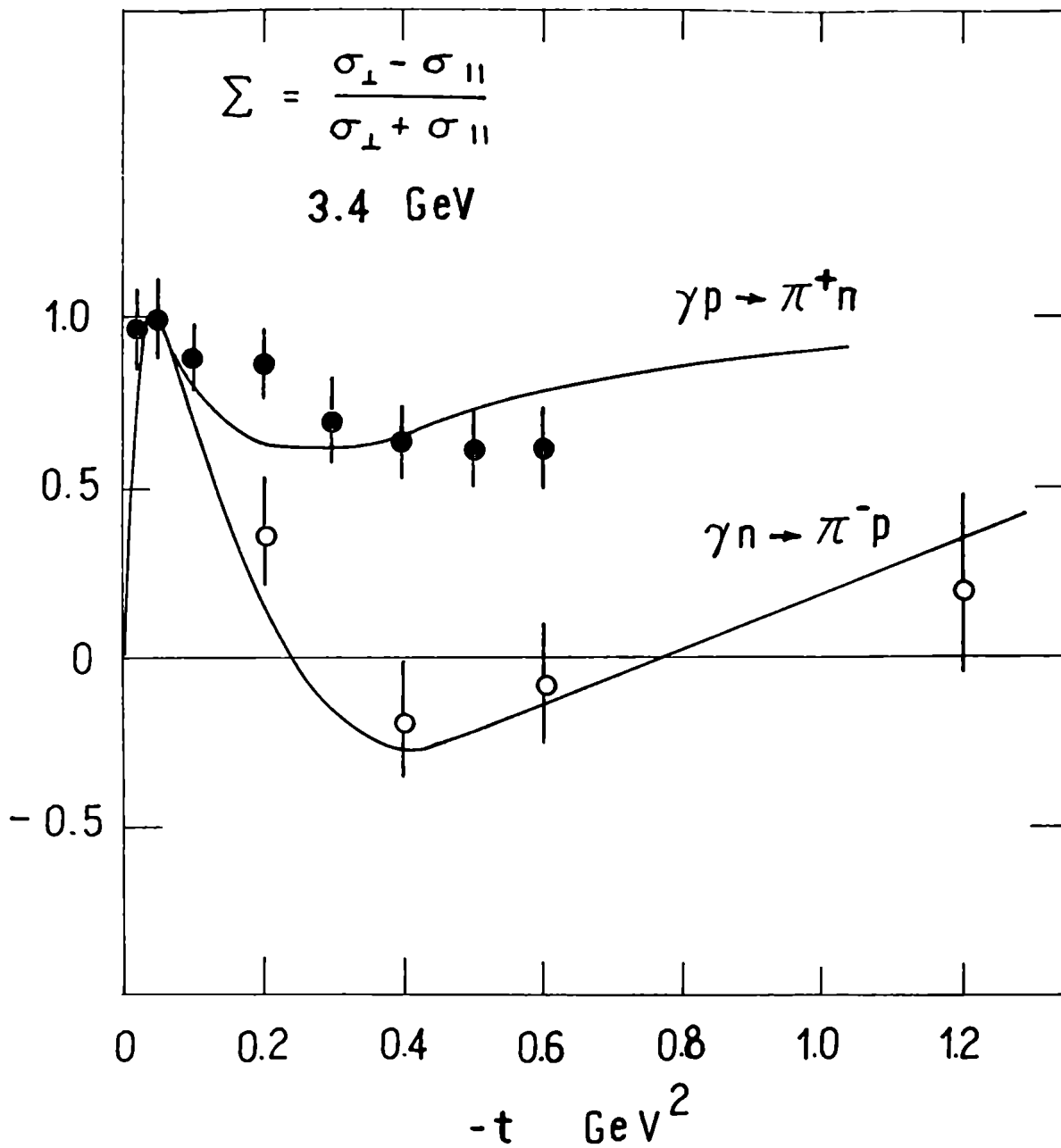


Fig. V.5

B. Ferry Vontau

Jaurin Grosion

AGRADECIMIENTOS

Deseo expresar mi agradecimiento al Profesor Luciano Bertocchi, cuyos seminarios motivaron mi interés por la fenomenología de las partículas elementales. Su constante apoyo y guía han sido un aliciente de valor incalculable.

No menos le debo a mi amigo, el Dr. Roberto Odorico, por el entusiasmo y la disciplina en el trabajo que aportó siempre. Su compañía, justo es decirlo, ha sido mi mejor escuela.

Finalmente, desco agradecer al Profesor J. F. Westerkamp por la confianza y el estímulo que siempre me ha dispensado y por la diligencia con que siempre ha procurado poner a mi alcance las mayores facilidades para la terminación de esta tesis.

APENDICE I. CINEMATICA PARA MASAS GENERALES.

Para un diagrama como el de la Fig.(I.1) definimos el cuadri-vector

$$K^\mu = 2\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} (p_1)_\nu (p_2)_\rho (p_3)_\sigma \quad , \quad (\text{A.I.1})$$

siendo $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ el tensor antisimétrico unitario, y con él, el escalar

$$\phi = -K^\mu K_\mu \quad (\text{A.I.2})$$

Es obvio que podemos escribir

$$K^\mu = 2\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} (p_1+p_2)_\nu (p_2)_\rho (p_3)_\sigma \quad ,$$

gracias a la antisimetría del tensor . En el centro de masa del canal s, $p_1+p_2 = (W,0,0,0)$ y, por lo tanto,

$$K^0=0 \quad , \quad \vec{K} = -2W \vec{p}_2 \times \vec{p}_3$$

La función ϕ vale, en consecuencia,

$$\phi = 4W^2 |\vec{p}_2| |\vec{p}_3| \sin^2 \theta_s \quad . \quad (\text{A.I.3})$$

En el texto, hemos llamado q_{12} y q_{34} a los valores absolutos de los impulsos, en el centro de masa, de las partículas iniciales y finales. De (A.I.3) se sigue que

$$\sin \theta_s = \frac{\sqrt{\phi(s,t,u)}}{2\sqrt{(s)}q_{12}q_{34}} \quad (\text{A.I.4})$$

Si quisiéramos calcular el seno del ángulo de dispersión en el canal t, bastaría con escribir (A.I.1) en la forma

$$K^\mu = 2\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} (p_1 - p_3)_\nu (p_2)_\rho (p_3)_\sigma$$

y tras repetir los cálculos anteriores, pero ahora en el centro de masa del nuevo canal, llegaríamos al análogo de (A.I.4)

$$\sin\theta_t = \frac{\sqrt{\phi(s,t,u)}}{2\sqrt{t}q_{13}q_{24}} \quad (\text{A.I.5})$$

Hay una expresión similar para el canal u. La región física de cualquier canal está definida por la relación

$$0 \leq \theta_{s,t,u} \leq \pi$$

En el borde de estas tres zonas

$$\sin\theta_{s,t,u} = 0$$

pero vemos, con el auxilio de (A.I.4), (A.I.5) y su gemela para el canal u, que esta condición puede ponerse en forma mucho más elegante como

$$\phi(s,t,u) = 0 \quad , \quad (\text{A.I.6})$$

ecuación ésta que nos da, simultáneamente, los límites de las regiones físicas de todos los canales. Además, la ecuación (A.I.3) nos dice que ϕ es positiva dentro de las zonas físicas. Una manera simétrica de escribir la función $\phi(s,t,u)$ surge de insertar (A.I.1) en (A.I.2) y usar la expresión

$$-\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \varepsilon_{\mu\alpha\beta\gamma} = \sum_P \pi_P \delta_\alpha^\nu \delta_\beta^\rho \delta_\gamma^\sigma$$

donde la suma es sobre todas las permutaciones de α, β y γ , y π_P es la paridad de cada permutación. Se llega así (Kibble, 1960) a que

$$\hat{\phi}(s,t,u) = 4 \begin{vmatrix} p_1^2 & p_1 \cdot p_2 & p_1 \cdot p_3 \\ p_2 \cdot p_1 & p_2^2 & p_2 \cdot p_3 \\ p_3 \cdot p_1 & p_3 \cdot p_2 & p_3^2 \end{vmatrix} \quad (\text{A.I.7})$$

Los productos escalares en este determinante pueden ponerse en función de los invariantes de Mandelstam. Entonces resulta

$$\begin{aligned} \hat{\phi}(s,t,u) = & \text{stu} - s(m_2^2 - m_4^2)(m_1^2 - m_3^2) - t(m_1^2 - m_2^2)(m_3^2 - m_4^2) - \\ & - (m_1^2 + m_4^2 - m_3^2 - m_2^2)(m_1^2 m_4^2 - m_2^2 m_3^2) \end{aligned} \quad (\text{A.I.8})$$

Vemos de aquí que la ecuación (A.I.6) define una curva de tercer grado en el plano de Mandelstam. Tales curvas, ya clasificadas por Isaac Newton en su *Optica*, han sido estudiadas con todo detalle, en función de las masas externas, por Kotanski (1967). Un ejemplar típico es la de la Fig. (I.5).

En cuanto a los impulsos q_{12} , q_{34} , ..., que aparecen en las fórmulas (A.I.4), (A.I.5) y en otras expresiones cinemáticas, pueden ser calculados directamente y se obtiene, por ejemplo,

$$q_{12} = \frac{1}{2\sqrt{s}} S_{12} \quad , \quad S_{12} = \sqrt{\{s - (m_1 + m_2)^2\}} \sqrt{\{s - (m_1 - m_2)^2\}} \quad (\text{A.I.9})$$

e iguales relaciones para los otros impulsos, reemplazando las masas e invariantes del canal correspondiente. Los valores $s = (m_1 \pm m_2)^2$ se conocen, respectivamente, como el umbral y el pseudoumbral de los estados $|12\rangle$.

Finalmente, de la igualdad

$$t = (p_1 - p_3)^2 = m_1^2 + m_3^2 - 2E_1 E_3 + 2q_{12} q_{34} \cos\theta_s \quad ,$$

resulta posible despejar el coseno del ángulo de dispersión

$$\begin{aligned} \cos \delta &= \frac{s^2 + s(2t - \Sigma) + (m_1^2 - m_2^2)(m_3^2 - m_4^2)}{4sq_{12}q_{34}} \\ &= \frac{-s^2 - s(2u - \Sigma) + (m_1^2 - m_2^2)(m_3^2 - m_4^2)}{4sq_{12}q_{34}} \end{aligned} \quad (\text{A.I.10})$$

APENDICE II. LA ECUACION DE DIRAC.

El campo de los fermiones de espín 1/2 satisface la clásica ecuación

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - M) \psi(x) = 0 \quad (\text{A.II.1a})$$

donde las γ^μ son matrices que cumplen las relaciones de anticonmutación

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu} \quad (\text{A.II.2})$$

(en todo este trabajo hemos tomado la métrica: $g^{\mu\nu} = 0, \mu \neq \nu$; $g^{ii} = -1, i=1,2,3$; $g^{00} = +1$).

Una representación del álgebra (A.II.2) es el conjunto de matrices de 4×4

$$\gamma^0 = \rho_3 \otimes 1 \quad \vec{\gamma} = i\rho_2 \otimes \vec{\sigma} \quad (\text{A.II.3})$$

En esta expresión, \otimes denota el producto de Kronecker y las matrices $\vec{\rho}$ y $\vec{\sigma}$ son simplemente las matrices de Pauli

$$\rho_1, \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad \rho_2, \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}; \quad \rho_3, \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (\text{A.II.4})$$

con las conocidas propiedades

$$\begin{aligned} \rho_i^\dagger &= \rho_i \quad (\text{hermiticidad}); \\ \{\rho_i, \rho_j\} &= 2\delta_{ij}, \quad \rho_i \rho_j = i\rho_k \quad (\text{ijk en orden cíclico}) \end{aligned} \quad (\text{A.II.5})$$

Las matrices $\vec{\rho}$ operan en el espacio de las componentes "débiles".

y "fuertes" del espinor $\psi(x)$ y las $\vec{\sigma}$ actúan sobre las variables de espín.

También se utiliza a menudo la matriz

$$\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \rho_1 \otimes 1 . \quad (\text{A.II.6})$$

Trivialmente se prueba que

$$\gamma^{0+} = \gamma^0, \quad \vec{\gamma}^+ = -\vec{\gamma} \quad \text{y} \quad \gamma^{5+} = \gamma^5 \quad (\text{A.II.7})$$

Conviene introducir la siguiente operación de conjugación:

a) para un espinor de Dirac, $\bar{\psi}(x) = \psi^\dagger(x) \gamma^0$;

b) para un operador matricial, $\bar{O} = \gamma^0 O^\dagger \gamma^0$.

Si $O = \gamma^\mu$, de (A.II.7) y las relaciones de anticonmutación (A.II.2),

$$\overline{\gamma^\mu} = \gamma^\mu \quad (\text{A.II.8})$$

Conjugando de esta manera la ecuación de Dirac (A.II.1a) resulta

$$\bar{\psi}(x) (i\gamma^\mu \partial_\mu + M) = 0 \quad (\text{A.II.1b})$$

(la derivada opera hacia la izquierda). De ambas ecuaciones

(A.II.1) puede deducirse la ecuación de continuidad $\partial_\mu j^\mu(x) = 0$,

donde

$$j^\mu(x) = \bar{\psi}(x) \gamma^\mu \psi(x) \quad (\text{A.II.9})$$

es el cuadvivector hermitico que representa la corriente de probabilidad. La cuarta componente, $j^0(x) = \psi^\dagger(x)\psi(x)$, es la densidad de probabilidad.

Como es bien sabido, la ecuación de Dirac tiene dos tipos de soluciones: las de energía positiva y negativa; éstas últimas representan estados de antifermión. La función de onda de

un fermión de energía e impulso $p=(E, \vec{p})$ es

$$\psi(x) = u(p) e^{-ipx} \quad (\text{A.II.10})$$

y $u(p)$ satisface

$$(\not{p}-M) u(p) = 0 \quad (\text{A.II.11})$$

($\not{p} = \gamma^\mu p_\mu$). En el sistema de reposo del fermión, (A.II.11) se reduce a

$$(\gamma^0 - 1) u(0) = 0$$

que tiene las dos soluciones

$$u_{\uparrow}(0) = \begin{pmatrix} \chi_{\uparrow} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_{\downarrow}(0) = \begin{pmatrix} \chi_{\downarrow} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.II.12})$$

Los espinores de Pauli

$$\chi_{\uparrow} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \chi_{\downarrow} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (\text{A.II.13})$$

corresponden a las dos orientaciones de espín según el eje 3. Para pasar la solución (A.II.12) a un sistema arbitrario, basta con poner

$$u(p) \propto (\not{p}+M) u(0).$$

Esta expresión satisface automáticamente (A.II.11) y es proporcional a $u(0)$ en el sistema de reposo. Con la normalización covariante

$$\bar{u}(p) u(p) = 2M, \quad u^\dagger(p) u(p) = 2E \quad (\text{A.II.14})$$

resulta

$$u_{\uparrow\downarrow}(p) = \frac{1}{\sqrt{E+M}} (\not{p}+M) \begin{pmatrix} \chi_{\uparrow\downarrow} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.II.15})$$

De acuerdo con la teoría de los agujeros de Dirac, la función de onda de un antifermión de energía e e impulso $p=(E, \vec{p})$ y polarización \uparrow o \downarrow , corresponde a un estado de energía negativa $-E$, impulso $-\vec{p}$ y polarización \downarrow o \uparrow :

$$\begin{aligned} \psi(x) &= v(p) e^{i p x} \\ (\not{p}+M) v(p) &= 0 \end{aligned} \quad (\text{A.II.16})$$

$$v_{\uparrow}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ \chi_{\downarrow} \end{pmatrix}, \quad v_{\downarrow}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ \chi_{\uparrow} \end{pmatrix}.$$

Con la normalización

$$\bar{v}(p) v(p) = -2M, \quad v^{\dagger}(p) v(p) = 2E \quad (\text{A.II.17})$$

queda

$$v_{\uparrow\downarrow}(p) = \frac{1}{\sqrt{E+M}} (\not{p}-M) \begin{pmatrix} 0 \\ \chi_{\downarrow\uparrow} \end{pmatrix}. \quad (\text{A.II.18})$$

Es fácil ver que las soluciones (A.II.16)-(A.II.18) representan estados de energía positiva de una partícula de carga opuesta.

En efecto, definiendo

$$\psi_c(x) = C \psi^*(x) \quad (\text{A.II.19})$$

donde C es un operador de "conjugación de carga" tal que

$$C \gamma^{\mu} C^{-1} = -\gamma^{\mu}, \quad (\text{A.II.20})$$

se puede ver que ψ y ψ_c satisfacen, en presencia de un campo electromagnético, ecuaciones de Dirac con cargas opuestas

$$\begin{aligned} [\gamma^{\mu}(i\partial_{\mu} - eA_{\mu}) - M]\psi &= 0 \\ [\gamma^{\mu}(i\partial_{\mu} + eA_{\mu}) - M]\psi_c &= 0 \end{aligned}$$

El operador C que resuelve (A.II.20) resulta proporcional a γ^2 y puede tomarse, por convención

$$C = -i\gamma^2 \quad (\text{A.II.21})$$

Construyendo la función ψ_c a partir de un estado de energía negativa, por ejemplo

$$\psi_{\uparrow}(x) = \frac{1}{\sqrt{E+M}} (\not{p}-M) \begin{pmatrix} 0 \\ \chi_{\downarrow} \end{pmatrix} e^{ipx}$$

obtenemos

$$\psi_{\uparrow,c}(x) = \frac{1}{\sqrt{E+M}} (\not{p}+M) \begin{pmatrix} \chi_{\uparrow} \\ 0 \end{pmatrix} e^{-ipx}$$

que coincide con (A.II.10)-(A.II.15) y prueba lo que queríamos demostrar.

APENDICE III. SINGULARIDADES DE DIAGRAMAS UNITARIOS.

REGLAS DE LANDAU.

La contribución de un diagrama unitario del tipo general

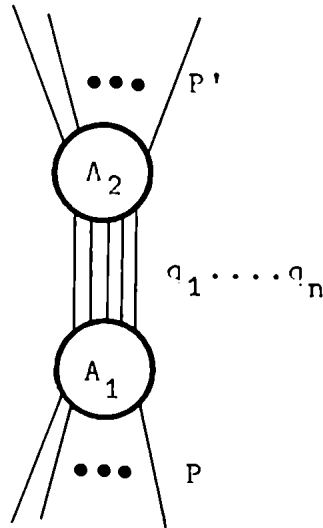


Fig.A.III.1

al miembro derecho de la relación de unitariedad (I.4.3), viene dada, a menos de factores sin importancia, por la siguiente integral

$$D_S(P, P') = \int \left\{ \prod_{\alpha=1}^n d^4 q_{\alpha} \delta(q_{\alpha}^2 - m_{\alpha}^2) \right\} \delta^4 \left(\sum_{\alpha} q_{\alpha} - P \right) \times \\ \times A_1(q_{\alpha}, P) A_2(q_{\alpha}, P') \quad (A.III.1)$$

Los símbolos \$P\$ y \$P'\$ representan los cuadriimpulsos de las partículas incidentes y finales. La función delta de conservación de cuadriimpulso puede ser integrada de inmediato, restringiéndose el número de variables. Quedarán \$n-1\$ cuadriimpulsos independientes, que no necesariamente deben elegirse entre

los q_α , pudiendo ser combinaciones lineales de ellos. Llamemos k_i , $i=1, \dots, n-1$, a este nuevo conjunto de variables. Entonces

$$D_S(P, P') = \int \{ \prod d^4 k_i \delta(q_\alpha^2 - m_\alpha^2) \} A_1(q_\alpha, P) A_2(q_\alpha, P'). \quad (\text{A.III.2})$$

En general, A_1 y A_2 serán singulares en hipersuperficies

$$\psi_1(q_\alpha, P) = 0 \quad , \quad \psi_2(q_\alpha, P') = 0 \quad ,$$

que representan los polos o umbrales de unitariedad.

Para que el diagrama tenga una singularidad es necesario que el hipercontorno de integración en (A.III.2) -que naturalmente puede deformarse en el dominio complejo, sujeto al teorema de Cauchy para varias variables- sea atenaceado en alguno de sus puntos por dos o más singularidades del integrando (ver Fig. A.III.2). La pinza impide todo movimiento del hipercontorno que tienda a separarlo del punto singular. Es claro que una situación tal sólo se tendrá para valores particulares de los parámetros externos P y P' . En dichos puntos, la integral no existirá.

Las consideraciones anteriores son independientes del tipo de divergencia de las amplitudes A_1 y A_2 . Sólo dependen de una condición geométrica: que sus hipersuperficies singulares toquen el hipercontorno. Si reemplazamos A_1 o A_2 por cualquier otra función que tenga la misma hipersuperficie singular, por ejemplo ψ_1^{-1} o ψ_2^{-1} , los puntos singulares de la integral no cambiarán (aunque sí su naturaleza). Así, la integral

$$I(P, P') = \int \{ \prod d^4 k_i \delta(q_\alpha^2 - m_\alpha^2) \} \frac{1}{\psi_1 \cdot \psi_2} \quad (\text{A.III.4})$$

tiene los mismos puntos singulares que (A.III.2). Las funciones delta pueden también desarrollar una singularidad si dos o más de ellas coinciden en ciertas regiones o si una delta se superpone a alguna de las hipersuperficies (A.III.3). Entonces, con el mismo argumento,

$$J(P, P') = \int \{ \prod d^4 k_i \frac{1}{q_\alpha^2 - m_\alpha^2} \} \frac{1}{\psi_1 \cdot \psi_2} \quad (\text{A.III.5})$$

es una integral de prueba cuyas singularidades ocurren al mismo tiempo que las de (A.III.2). Ahora, usamos la fórmula de Feynman

$$\frac{1}{\psi_1 \psi_2 \prod_\alpha (q_\alpha^2 - m_\alpha^2)} = (n+1)! \int_0^1 d\mu_1 \int_0^1 d\mu_2 \prod_\alpha \int_0^1 d\lambda_\alpha \times \\ \times \frac{\delta(\mu_1 + \mu_2 + \sum_\alpha \lambda_\alpha - 1)}{\{\mu_1 \psi_1 + \mu_2 \psi_2 + \sum_\alpha \lambda_\alpha (q_\alpha^2 - m_\alpha^2)\}^{n+2}}, \quad (\text{A.III.6})$$

y si llamamos

$$\psi = \sum_\alpha \lambda_\alpha (q_\alpha^2 - m_\alpha^2) + \mu_1 \psi_1 + \mu_2 \psi_2, \quad (\text{A.III.7})$$

resulta

$$J = (n+1)! \int \prod_i d^4 k_i \prod_\alpha d\lambda_\alpha d\mu_1 d\mu_2 \delta(\mu_1 + \mu_2 + \sum \lambda_\alpha - 1) \cdot \psi^{-(n+2)} \quad (\text{A.III.8})$$

La condición para que esta integral tenga un punto singular es que, sobre el hipercontorno de integración, se reproduzca la situación de la figura.

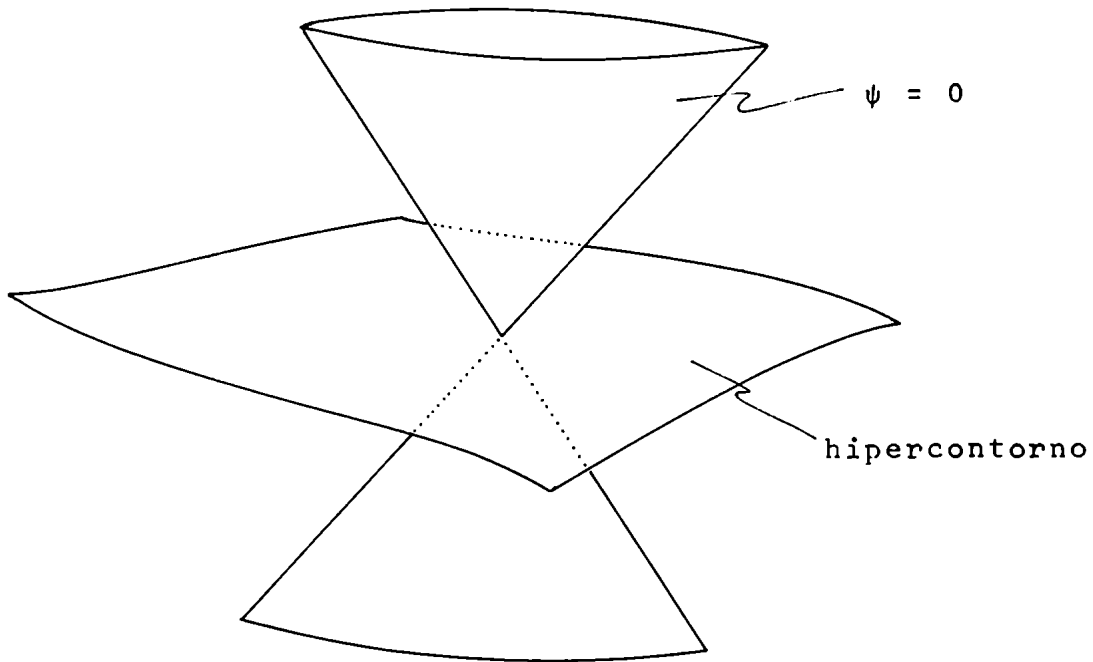


Fig.A.III.2

En otras palabras, la hipersuperficie $\psi=0$ debe tener un punto cuspidal

$$\frac{\partial \psi}{\partial \mu_1} = \frac{\partial \psi}{\partial \mu_2} = \frac{\partial \psi}{\partial \lambda_\alpha} = \frac{\partial \psi}{\partial k_i} = 0 \quad (\text{A.III.9})$$

en el dominio

$$0 \leq \mu_1, \mu_2, \lambda_\alpha \leq 1, \quad \mu_1 + \mu_2 + \sum_\alpha \lambda_\alpha = 1. \quad (\text{A.III.10})$$

Las ecuaciones homogéneas (A.III.9) son las reglas de Landau (1959) y tienen solución si los parámetros externos pertenecen a ciertas curvas, llamadas por extensión curvas de Landau. Cabe destacar que las condiciones (A.III.9) son sólo necesarias, pero no suficientes, porque aunque ellas implican que el hipercontorno es tocado por un punto singular doble, no especifican si ambas ramas de $\psi=0$ forman una pinza, como en la Fig.(A.III.2), o si se hallan de un mismo lado del hipercontorno.

Las curvas de Landau (en realidad superficies) para diagramas del tipo (I.9), en el caso de masas internas generales, tienen la siguiente intersección con el plano real (s,t):

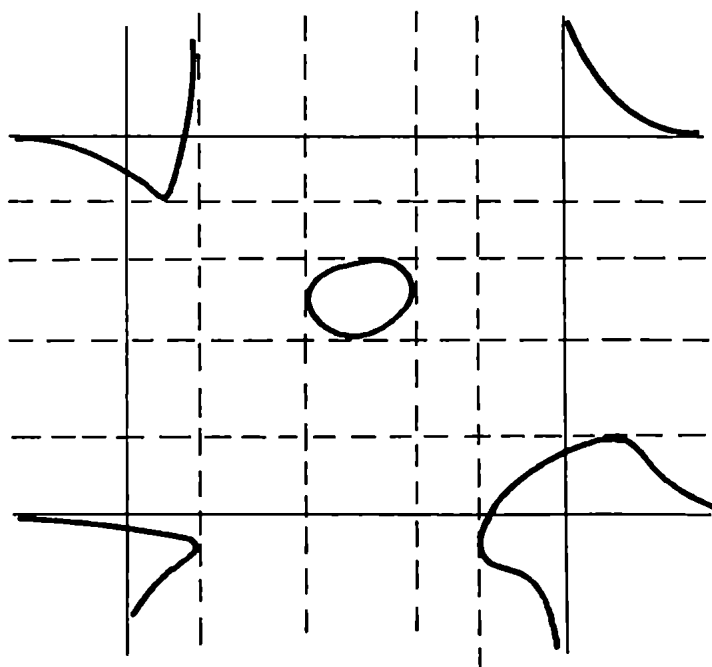


Fig.A.III.3

Las rectas llenas representan los cuatro umbrales y pseudo-umbrales de los estados intermedios de ambos canales, y son asíntotas de las curvas. Las líneas punteadas son los llamados umbrales anómalos y son singularidades de los diagramas triangulares de (I.9). Todas las ramas de la figura están unidas por brazos que se extienden en el dominio complejo de las variables (s,t) . Excepto la rama superior derecha, que aflora en la zona física, todas las demás curvas yacen en hojas de Riemann no físicas. Sin embargo, si las masas externas son aumentadas, algunos umbrales anómalos pueden penetrar en la hoja física (Mandelstam, 1960; Barton, 1965). Tal caso se presenta cuando las partículas externas corresponden a estados débilmente ligados, como el deuterón.

Una interesante interpretación física de las reglas (A.III.9), que permite decidir qué ramas de las curvas de Landau pertenecen a la región física, ha sido dada por Coleman y Norton (1965) -ver también Norton (1965)-. Para más detalles sobre el tema de este Apéndice, puede consultarse la excelente reseña de Polkinghorne (1965).

REFERENCIAS

- Aderholz H. et al. (1968) Phys. Letters 27B, 174.
- Andrews M., Gunson J. (1964) J. Math. Phys. 5, 1391.
- Ball J.S. (1961) Phys. Rev. 124, 2014.
- Ball J.S., Frazer W.R., Jacob M. (1968) Phys. Rev. Letters 20, 518.
- Bareyre P., Bricman C., Villet C. (1968) Phys. Rev. 165, 1730.
- Barger V., Phillips R.J.N. (1969) Phys. Letters 29B, 503 y Pre-publicación de la Univ. de Wisconsin COO-223.
- Barton G. (1963) "Introduction to Advanced Field Theory" (Interscience Publishers, Nueva York).
- Barton G. (1965) "Introduction to Dispersion Techniques in Field Theory" (Benjamin, Nueva York).
- Bellettini G. (1968) "Two-Body Processes", Proc. XIV International Conference on High-Energy Physics (CERN, Ginebra).
- Bertocchi L. (1967) "Theoretical Aspects of High Energy Phenomenology" Proc. of the Heidelberg Conference on Elementary Particles (North Holland, Amsterdam).
- Bietti A., Di Vecchia P., Drago F., Paciello M. (1968) Phys. Letters 26B, 457.
- Bonamy P. et al. (1966) Phys. Letters 23, 501.
- Bonamy P. et al. (1967) Proc. of the Heidelberg Conference on Elementary Particles (North Holland, Amsterdam).
- Borghini M. et al. (1967) Phys. Letters 24B, 77.
- Botke J.C., Fulco J.R. (1969) "Continuous Moment Sum Rules and Absorptive Regge cuts in the Process $\pi^- p \rightarrow nn$ ", Prepublicación de la Univ. de California en Santa Bárbara.

- Boyarski A.M. et al. (1968a) Phys. Rev. Letters 20, 300.
- Boyarski A.M. et al. (1968b) Phys. Rev. Letters 21, 1767.
- Bros J. (1965) "Axiomatic Field Theory", publicado en High Energy Physics and Elementary Particles (IAEA, Viena).
- Bros J., Epstein H., Glaser V. (1965) Commun. Math. Phys. 1, 240.
- Chew G.F., Goldberger M.L., Low F.E., Nambu Y. (1957a) Phys. Rev. 106, 1337.
- Chew G.F., Goldberger M.L., Low F.E., Nambu Y. (1957b) Phys. Rev. 106, 1345.
- Chew G.F. (1966) "Resonances, Particles and Poles from the Experimenter's Point of View", Prepublicación del UCRL-16983.
- Chikovani G.E. et al. (1969) Phys. Letters 28B, 526.
- Childers R.W., Holladay W.G. (1963) Phys. Rev. 132, 1809.
- Coleman S., Morton R. (1965) Nuovo Cimento 38, 438.
- Collins P.D.B., Squires E.J. (1968) "Regge Poles in Particle Physics", Springer Tracts in Modern Physics, Vol. 45.
- De Alfaro V., Regge T. (1965) "Potential Scattering" (North Holland, Amsterdam).
- De Alfaro V., Fubini S., Furlan G., Rossetti C. (1966) Phys. Letters 21, 576.
- Della Selva A., Masperi L., Odorico R. (1968) Nuovo Cimento 54A, 979.
- Dennery Ph. (1961) Phys. Rev. 124, 2000.
- Di Vecchia P., Drago F., Ferro Fontán C., Odorico R., Paciello M. (1968a) Phys. Letters 27B, 296.
- Di Vecchia P., Drago F., Ferro Fontán C., Odorico R. (1968b) Phys. Letters 27B, 521.
- Di Vecchia P., Drago F., Ferro Fontán C., Odorico R. (1968c) Nuovo Cimento 58A, 531.

- Dolen R., Horn D., Schmid C. (1968) Phys. Rev. 166, 1768.
- Donnachie A. (1968) "Nucleon Resonances", Proc. XIV International Conference on High-Energy Physics (CERN, Ginebra).
- Donnachie A., Kirsopp R.G., Lovelace C. (1968) Phys. Letters 26B, 161
- Eden R.J., Landshoff P.V., Olive D.I., Polkinghorne J.C. (1966) "The Analytic S-Matrix" (Cambridge Univ. Press, Londres).
- Eden R.J. (1967) "High Energy Collisions of Elementary Particles" (Cambridge Univ. Press, Londres).
- Epstein H. (1968) "Rigorous Theoretical Considerations on High Energy Scattering", Proc. Topical Conference on High Energy Collisions of Hadrons (Ginebra), CERN 68-7, Vol. I.
- Ferro Fontán C., Odorico R., Masperi L. (1968) Nuovo Cimento 58A, 534.
- French B. (1968) "Meson Resonances", Proc. XIV International Conference on High-Energy Physics (CERN, Ginebra).
- Froissart M. (1961) Phys. Rev. 123, 1053.
- Froissart M. (1961) Conferencia de La Jolla sobre Interacciones Débiles y Fuertes (no publicado).
- Gasiorowicz S. (1966) "Elementary Particle Physics" (Wiley, Nueva York).
- Gell-Mann M., Goldberger M.L., Thirring W. (1954) Phys. Rev. 95, 1612.
- Gell-Mann M., Goldberger M.L., Low F.E., Marx E., Zachariasen F. (1964) Phys. Rev. 133, B145.
- Geweniger C. et al. (1968) Phys. Letters 28B, 155.
- Geweniger C. et al. (1969) Phys. Letters 29B, 41.

- Gribov V.N. (1961) JETP 41, 1962; Soviet Physics JETP 14, 1395.
- Gribov V.N., Pomeranchuk I.Ya. (1962a) Phys. Letters 2, 232.
- Gribov V.N., Pomeranchuk I.Ya. (1962b) Phys. Rev. Letters 8, 343.
- Hamilton J., Woolcock W.S. (1963) Rev. Mod. Phys. 35, 737.
- Harting D. et al. (1965) Nuovo Cimento 38, 60.
- Hearn A.C. (1961) Nuovo Cimento 21, 333.
- Horn D., Schmid C. (1967) Prepublicación de CALTECH, CALT-68-127.
- Igi K., Matsuda S. (1967) Phys. Rev. Letters 18, 625.
- Jackson J.D. (1965) Rev. Mod. Phys. 37, 484.
- Jackson J.D., Quigg C. (1969) Phys. Letters 29B, 236.
- Jacob M., Wick G.C. (1959) Ann. Phys. 7, 404.
- Johnson C.H. (1967) Prepublicación del UCRL-17683.
- Jones C.E., Teplitz V.L. (1967) Phys. Rev. 159, 1271.
- Kadyshevsky V.G., Mir Kasimov R.M., Tavkhelidze A.N. (1967)
Prepublicación de Dubna, JINR P2-3198.
- Kibble T.W.B. (1960) Phys. Rev. 117, 1159.
- Kotanski A. (1968) Nuovo Cimento 56A, 737.
- Kramer G., Stichel P. (1964) Zeit. für Physik 178, 519.
- Landau L.D. (1959) Nucl. Phys. 13, 181.
- Le Bellac M. (1967) Phys. Letters 25B, 524.
- Lehmann H. (1958) Nuovo Cimento 10, 579.
- Lehmann H., Symanzik K., Zimmerman W. (1955) Nuovo Cimento 1, 205.
- Logunov A.A., Soloviev L.D., Tavkhelidze A.N. (1967) Phys. Letters
24B, 181.
- Mandelstam S. (1958) Phys. Rev. 112, 1344.
- Mandelstam S. (1960) Phys. Rev. Letters 4, 84.
- Mandelstam S. (1962) Ann. Phys. 19, 254.

- Mandelstam S. (1963) Nuovo Cimento 30, 1148.
- Mandelstam S., Wang L.J. (1967) Phys. Rev. 160, 1490.
- Martin A. (1966) "Analytic Properties from Local Field Theory",
Proc. XIII International Conference on High Energy Physics
(Univ. de California, Berkeley) y CERN Report TH-702.
- Michael C. (1968) Nucl. Phys. B8, 431.
- Norton R. (1965) "An Interpretation for Singularities in the
Physical Region", publicado en High Energy Physics and Element-
ary Particles (IAEA, Viena).
- Odorico R. (1969) "A Simple Phenomenological Regularity of Near-
Forward Zeros", Prepublicación de la Univ. de Trieste.
- Olsson M.G. (1968) Phys. Letters 26B, 310.
- Phillips R.J.N., Rarita W. (1965) Phys. Letters 19, 598.
- Polkinghorne J.C. (1965) "Analytic Properties of Feynman Integrals",
publicado en High Energy Physics and Elementary Particles
(IAEA, Viena).
- Regge T. (1959) Nuovo Cimento 14, 951.
- Regge T. (1960) Nuovo Cimento 18, 947.
- Richter B. (1968) "Two-Body Photoproduction", Proc.XIV Interna-
tional Conference on High-Energy Physics (CERN, Ginebra).
- Rivers R., Saunders L. (1968) Nuovo Cimento 58A, 385.
- Schmid C. (1968) Phys. Rev. Letters 20, 689.
- Schwarz J.H. (1967) Phys. Rev. 159, 1269.
- Singh V. (1963) Phys. Rev. 129, 1889.
- Sommerfeld A. (1949) "Partial Differential Equations in Physics"
(Academic Press, Nueva York).
- Stichel P. (1965) Fortschr. Physik 13, 73.

- A.V. et al. (1965) Phys. Rev. Letters 14, 763.
- Streater F.F., Wightman A.S. (1964) "PCT, Spin & Statistics and All That" (Benjamin, Nueva York).
- Titelmarsh E.C. (1939) "The Theory of Functions" (Oxford Univ. Press)
- S.F. (1969) Phys. Rev. Letters 23, 1192.
- Walker S.L. (1969) Phys. Rev. 182, 1729.
- Watson S.N. (1913) Proc. Roy. Soc. 95,