

Tesis de Posgrado

Transformación múltiple de Weierstrass y sumabilidad de las series múltiples de Hermite y de Laguerre

Calderón, Calixto Pedro

1969

Tesis presentada para obtener el grado de Doctor en Ciencias Matemáticas de la Universidad de Buenos Aires

Este documento forma parte de la colección de tesis doctorales y de maestría de la Biblioteca Central Dr. Luis Federico Leloir, disponible en digital.bl.fcen.uba.ar. Su utilización debe ser acompañada por la cita bibliográfica con reconocimiento de la fuente.

This document is part of the doctoral theses collection of the Central Library Dr. Luis Federico Leloir, available in digital.bl.fcen.uba.ar. It should be used accompanied by the corresponding citation acknowledging the source.

Cita tipo APA:

Calderón, Calixto Pedro. (1969). Transformación múltiple de Weierstrass y sumabilidad de las series múltiples de Hermite y de Laguerre. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad de Buenos Aires. http://digital.bl.fcen.uba.ar/Download/Tesis/Tesis_1334_Calderon.pdf

Cita tipo Chicago:

Calderón, Calixto Pedro. "Transformación múltiple de Weierstrass y sumabilidad de las series múltiples de Hermite y de Laguerre". Tesis de Doctor. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad de Buenos Aires. 1969.
http://digital.bl.fcen.uba.ar/Download/Tesis/Tesis_1334_Calderon.pdf

UNIVERSIDAD NACIONAL DE BUENOS AIRES
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales

TRANSFORMACION MULTIPLE de
WEIERSTRASS y SUMABILIDAD de
las SERIES MULTIPLES de HERMITE
y de LAGUERRE

•
CALIXTO PEDRO CALDERON

1334
01.2

Tesis presentada para optar al
título de Doctor en Matemática

1969

rec. v. 1334

334
212

INTRODUCCION

El propósito de este trabajo es extender al caso m-dimensional el teorema de los resultados concernientes a la fórmula de inversión de la Transformación Múltiple de Weierstrass y la sumabilidad Abel de las series múltiples de Hermite y Hermite.

Existe una vinculación intrínseca entre la Transformación Múltiple de Weierstrass y la serie múltiple de Hermite. Un tratamiento profundo y sistemático de ambos problemas en el caso de una variable puede encontrarse en [2] y [3]. En lo que se refiere a la sumabilidad Abel de la serie simple de Hermite y de la suerte se pueden ver teoremas de tipo general en [6], pero imponiendo fuertes restricciones en el crecimiento de la función cerca de ∞ . También dan resultados concernientes a la sumabilidad Abel de ambas series en [10], [11], [12] y [13].

Un otro enfoque del problema presenta novedades aún en el caso 1-dimensional; por ejemplo los Teoremas Maximales asociados a las aproximaciones Abel, así como los teoremas de convergencia dominada. Tales resultados también se consiguen en lo que se refiere a la fórmula de inversión de la Transformación Múltiple de Weierstrass introducida en nuestro trabajo.

El caso m-dimensional no ha sido tratado hasta ahora en ninguno de los tres problemas objeto del presente trabajo. En la parte final se dan teoremas concernientes a otros tipos de sumabilidad usando los resultados de [14].

El trabajo está dividido en tres partes.

La Parte I estudia problemas de carácter general concernientes a diferenciación de integrales múltiples y a convergencia de integrales singulares cuasipositivas.

La Parte II estudia la Transformación Múltiple de Weierstrass y la sumabilidad Abel de la Serie Múltiple de Hermite. Se dan condiciones necesarias y suficientes para que una función analítica de m variables complejas sea transformada de Weierstrass en una función de clase $L_G^p(\mathbb{R}^m)$, $p > 1$. Así mismo se estudia la validez de la fórmula de inversión introducida por E.Hille en [3] en el caso de una variable, así como los teoremas maximales asociados a esta fórmula de inversión.

En lo que se refiere a la sumabilidad Abel de la Serie Múltiple de Hermite, se obtienen el mismo tipo de resultados que los obtenidos por Zygmund y Marcinkiewicz para el caso de la Serie Múltiple de Fourier. La diferencia consiste en que en el caso de la Serie Múltiple de Fourier la medida base es la de Lebesgue en el cubo fundamental Q de aristas de longitud 2π y el sistema ortonormal tiene la propiedad de ser una familia de funciones uniformemente acotadas; en el caso de Hermite la medida es $\exp -|x|^2 dx$, es decir no es invariante por traslaciones, y la familia de polinomios ortogonales no constituye una familia uniformemente acotada. Estas diferencias se traducen en las clases L_G^p cuando $1 \leq p < 2$. Para asegurar el hecho de poder representar a las medias Abel mediante una integral singular cuando la función es de clase L_G^p , $1 \leq p < 2$, hay que

introducir condiciones adicionales.

Finalmente se estudia la convergencia restrictiva de las medias Abel, es una medida a variación total finita.

La Parte III tratará del estudio de la sumabilidad Abel de la serie múltiple de Laguerre, y se extienden todos los teoremas probados para series de Hermite a este caso.

Se ha visto que la integral singular que da la suma Abel de la serie de Laguerre es bastante más complicada que la correspondiente de Hermite, y por tanto las acotaciones de la misma impiden casi la totalidad de la parte correspondiente. Esta dificultad aparece por el hecho de que se dan teoremas generales para series de Laguerre de parámetro arbitrario. Solamente se impone la restricción de que los parámetros α_j sean todos mayores que $-1/2$. El caso cuando los α_j están comprendidos en $(-1, -1/2]$ no es tratado aquí. Sin embargo esperamos poder completar el resultado en un trabajo posterior.

Finalmente, como consecuencia de la sumabilidad Abel rectangular (nuestro caso) resultan teoremas de Sumabilidad Cesáro-Kicuz-Bochner esféricas como consecuencias de teoremas probados en [14] en el caso L^2 .

El caso $p < 2$ es un problema abierto. Así como el caso de convergencia ordinaria para $m > 1$.

Quiero en esta oportunidad agradecer al Doctor Alberto González Domínguez, quien me propuso el problema, por su asistencia durante la preparación del trabajo y por sus oportunas sugerencias para mejorar algunas demostraciones.

C.P.C.

Buenos Aires, abril de 1969.

RESUMEN

II.1) RESUMEN DE LOS RESULTADOS CONCERNIENTES A LA FÓRMULA DE INVERSIÓN DE LA TRANSFORMACIÓN MULTIPLE DE WEIERSTRASS.

II.1.1) Sea μ una medida elemental definida sobre \mathbb{R}^m ; $I_\mu(z)$ denota su transformada de Weierstrass, es decir

$$I_\mu(z) = (\pi)^{m/2} \int_{\mathbb{R}^m} \exp\left[-\sum_{j=1}^m (z_j - t_j)^2\right] d\mu$$

toda vez que

$$\int_{\mathbb{R}^m} \left| \exp\left[-\sum_{j=1}^m (z_j - t_j)^2\right] \right| dw < \infty$$

para todo $z = (z_1, \dots, z_m)$ en \mathbb{C}^m . (dw denota la variación de $d\mu$)

II.1.2) Definimos como $L^p_{\sigma}(\mathbb{R}^m)$ a la clase de funciones medibles tales que

$$\|f\|_{p,\sigma} = \left(\int_{\mathbb{R}^m} |f|^p e^{-|x|^2} dx \right)^{1/p} < \infty, p \geq 1$$

II.1.3) LA FÓRMULA DE INVERSIÓN

La fórmula de inversión está dada por

$$\lim_{(s_1, \dots, s_m) \rightarrow (1, \dots, 1)} (\pi)^{-m/2} \int_{\mathbb{R}^m} \exp\left[-\sum_{j=1}^m (ix_j + y_j)^2\right] \cdot I_\mu(is_1 y_1, \dots, is_m y_m) dy$$

donde los x_j, y_j son reales, y los s_j son tales que $0 < s_j < 1$. El límite será entendido puntualmente o en norma según los casos determinados en los dos siguientes teoremas.

II.1.4) TEOREMA: Sea $I_f(z)$ la Transformada de Weierstrass de una función f , $I_f(z)$ posiblemente definida sólo en $z_j = iy_j$ donde los y_j son reales.

Denotando

$$f(s, X) = (\pi i)^{-m/2} \int_{R^m} \exp\left[-\sum_{j=1}^m (ix_j + y_j)^2\right] I_f(is_1 y_1, \dots, is_m y_m) dy$$

$$f^* = \sup_{s_1, \dots, s_m} |f(s, X)| ; 0 < s_j < 1 ; j=1, \dots, m.$$

siendo x_j, y_j reales.

Entonces se tienen las siguientes propiedades para los operadores $f^*(X)$ y $f(s, X)$

i) Si $p > 1$ y $f \in L_p^p(R^m)$

$$a) \|f^*\|_{p, G} < C(p) \|f\|_{p, G}$$

donde $C(p)$ depende solamente de p .

$$b) \|f(s, X) - f(X)\|_{p, G} \rightarrow 0 \text{ cuando } (s_1, \dots, s_m) \rightarrow (1, \dots, 1)$$

$$ii) \text{ Si } |f|(\log^+ |f|)^m \in L_G^1(R^m)$$

$$a) \|f^{\#}\|_{1,G} \leq A_m + B_m \int_{\mathbb{R}^m} |f|(1+\log^+|f|)^m e^{-|x|^2} dx$$

$$b) \|f(s,x) - f(x)\|_{1,G} \rightarrow 0 \text{ cuando } (s_1, \dots, s_m) \rightarrow (1, \dots, 1)$$

A_m y B_m dependen sólo de la dimensión m .

$$iii) \text{ Si } |f|(1+\log^+|f|)^{m-1} \in L^1_G(\mathbb{R}^m), \quad 0 < \alpha < 1$$

$$a) \|(f^{\#})^{\alpha}\|_{1,G} \leq C_{m,\alpha} + D_{m,\alpha} \int_{\mathbb{R}^m} |f|(1+\log^+|f|)^{m-1} e^{-|x|^2} dx$$

$$b) \| |f(x) - f(s,x)|^{\alpha} \|_{1,G} \rightarrow 0 \text{ con } (s_1, \dots, s_m) \rightarrow (1, \dots, 1)$$

iv) Para f en las condiciones de i), ii) y iii), $f(s,x)$ converge en casi todo punto a $f(x)$.

II.1.5) CASE LÍMITE P = 1

TEOREMA: μ es una medida elemental definida en \mathbb{R}^m , tal que su variación $d\mu$ cumple

$$\int_{\mathbb{R}^m} e^{-|t|^2} d\mu < \infty$$

para su transformada de Boierstrass $I_{\mu}(z)$, (bien definida sobre los rectos iy_j , ($j=1, \dots, m$)) vale

$$\lim_{(s_1, \dots, s_m) \rightarrow (1, \dots, 1)} (\pi)^{-m/2} \int_{\mathbb{R}^m} \exp \left[- \sum_{j=1}^m (ix_j + y_j)^2 \right] \cdot I_{\mu}(is_1y_1, \dots, is_my_m) dy = \phi(x) \text{ p.p.}$$

$\phi(x)$ es la función de densidad asociada a μ .

$\lim_{(s_1, \dots, s_m) \rightarrow (1, \dots, 1)}$ significa que se toma límite pero imponiendo las siguientes restricciones a los s_j

$$\theta < (1-s_i)/(1-s_j) < \theta^{-1}$$

para todo par (i, j) y $\theta > 0$ fijo.

II.1.6) ANALÍTICIDAD DE LAS TRANSFORMADAS Y CLASES DE FUNCIONES.

TEOREMA: Las siguientes dos condiciones son equivalentes:

i) La función $I(z_1, \dots, z_m)$, definida en todo el m -plano complejo C^m es transformada de Weierstrass de una función de clase $L_g^p(\mathbb{R}^m)$, $p > 1$.

ii) La función $I(z_1, \dots, z_m)$, analítica en todo C^m tiene las propiedades

a) $\int_{\mathbb{R}^m} |I(is_1y_1, \dots, is_my_m)| e^{-y^2} dy < \infty$

si $0 < s_j < 1$, $j=1, \dots, m$.

b) $\int_{\mathbb{R}^m} \left| \int_{\mathbb{R}^m} \exp \left[- \sum_{j=1}^m (ix_j + y_j)^2 \right] I(is_1y_1, \dots, is_my_m) \right|^p e^{-|x|^2} dx <$

donde los x_j, y_j son reales, $0 < s_j < 1$, $j=1, \dots, m$; A no depende de los s_j .

OBSERVACIONES: Los TEOREMAS II.1.4 y II.1.5 constituyen no sólo una extensión al caso m-dimensional de las fórmulas de inversión estudiadas en [3] y [4], sino que se introducen otro tipo de Clases de Funciones, así como la convergencia dominada y en norma. En [2] se introducen clases $L^p(-\infty, \infty)$ respecto de la medida de Lebesgue y se obtienen resultados muy elegantes respecto a condiciones necesarias y suficientes para que una función sea Transformada de Weierstrass de una función de clase $L^p(-\infty, \infty)$. La fórmula de inversión en este caso está adaptada a las mencionadas clases de funciones y se basa en las sumas Abel de la serie de "Funciones de Hermite" y los teoremas de inversión son producidos por el mismo núcleo singular salvo un factor exponencial. El TEOREMA II.1.5 extiende a R^m un teorema probado en [2] referente a la inversión de la Transformada de una medida a mas total finita (caso que no fue estudiado ni en [3] ni en [4]).

II.2) RESULTADOS CONCERNIENTES A LA SUMABILIDAD ABEL DE LA SÉRIE MÚLTIPLE DE HERMITE

II.2.1) Vamos a definir el siguiente sistema ortonormal completo de polinomios en $L^2_G(R^m)$

$$\begin{aligned} H_n^*(x) &= H_{n_1, \dots, n_m}^*(x) = \\ &= (\pi)^{-m/4} \prod_{j=1}^m 2^{-n_j/2} (n_j!)^{-1/2} H_{n_j}(x_j) \end{aligned}$$

donde $H_{n_j}(x_j) = \exp(x_j^2) (d^{n_j}/dx_j^{n_j}) \exp(-x_j^2)$

Si $\int_{\mathbb{R}^m} |f| |H_n^*(x)| e^{-|x|^2} dx < \infty$ para todo n , entonces asociamos a f su serie de Hermite, es decir

$$f \sim \sum_n c_n H_n^*(x) = \sum_{n_1 \dots n_m} c_{n_1 \dots n_m} H_{n_1 \dots n_m}^*(x)$$

Del mismo modo asociamos a f sus medias Abel, es decir

$$\begin{aligned} f(r, x) &\sim \sum_{n_1 \dots n_m} r_1^{n_1} \dots r_m^{n_m} c_{n_1 \dots n_m} H_{n_1 \dots n_m}^*(x) = \\ &= \sum_n r^n c_n H_n^*(x) \end{aligned}$$

donde $0 < r_j < 1$, $j=1, \dots, m$ y $c_{n_1 \dots n_m}$ definido como es usual es decir

$$c_{n_1 \dots n_m} = \int_{\mathbb{R}^m} f(x) H_{n_1 \dots n_m}^*(x) e^{-|x|^2} dx$$

II.2.2) TEOREMA:

i) Si $f \in L_G^p(\mathbb{R}^m)$, $p \geq 2$, entonces se tiene

a) Los coeficientes de Fourier-Hermite están bien definidos.

b) $f(r, x) = \sum_n r^n c_n H_n^*(x)$ para todo r tal que

$0 < r_j < 1$, $j=1, \dots, m$ y la serie del segundo miembro converge absolutamente cuando $0 < r_j < 1$, $j=1, \dots, m$.

c) Si $f^*(X) = \sup_{r_1, \dots, r_m} |f(r, X)| ; 0 < r_j < 1, j=1, \dots, m.$

$$\|f^*\|_{p, G} \leq C(p) \|f\|_{p, G}$$

dónde $C(p)$ depende de p solamente.

d) $\|f(r, X) - f(X)\|_{p, G} \rightarrow 0$ cuando $(r_1, \dots, r_m) \rightarrow (1, \dots, 1)$

e) $f(r, X) \rightarrow f(X)$ en casi todo punto cuando $(r_1, \dots, r_m) \rightarrow$

$\rightarrow (1, \dots, 1).$

ii) Si $f \in L_p^G(\mathbb{R}^m)$, $1 < p < 2$ y $\int_{\mathbb{R}^m} |f| e^{-|X|^2/2} dX < \infty$

se tienen las mismas conclusiones a), b), c), d) y e) de i).

iii) Si $\int_{\mathbb{R}^m} |f|(1 + \log^+ |f|)^m e^{-|X|^2} dX < \infty$ y además

$\int_{\mathbb{R}^m} |f| e^{-|X|^2/2} dX < \infty$ se tienen a), b) y e) y valen

$$c') \|f^*\|_{1, G} \leq A_m + B_m \int_{\mathbb{R}^m} |f|(1 + \log^+ |f|)^m e^{-|X|^2} dX$$

d') $\|f(r, X) - f(X)\|_{1, G} \rightarrow 0$ cuando $r \rightarrow (1, \dots, 1)$.

iv) Si $\int_{\mathbb{R}^m} |f|(1 + \log^+ |f|)^{m-1} e^{-|X|^2} dX < \infty$ y además

$\int_{\mathbb{R}^m} |f| e^{-|X|^2/2} dX < \infty, 0 < \alpha < 1$, entonces valen a),

b) y e) y se tienen

$$c'') \quad \| (f^*)^\alpha \|_{1,G} \leq C_{m,\alpha} + D_{m,\alpha} \int_{\mathbb{R}^m} |f| (1 + \log^+ |f|)^{m-1} e^{-|x|^2} dx$$

$$d'') \quad \| |f(r,x) - f(x)|^\alpha \|_{1,G} \rightarrow 0 \quad \text{cuando } r \rightarrow (1, \dots, 1)$$

Las constantes A_m, B_m dependen sólo de $m, C_{m,\alpha}$ y $D_{m,\alpha}$ dependen solamente de m y de α .

II.2.3) CASO LÍMITE $n = 1$.

TEOREMA: Sea μ una medida elemental definida en \mathbb{R}^m y supongamos que

$$\int_{\mathbb{R}^m} e^{|x|^2/2} dw < \infty$$

donde dw denota la variación de μ .

Entonces

a) Los coeficientes de Fourier-Hermite $c_n = \int_{\mathbb{R}^m} H_n^*(x) d$

están bien definidos para todo $n = (n_1, \dots, n_m)$

b) $\mu(r,x) = \sum_n r^n c_n H_n^*(x)$

y la serie de la derecha converge absolutamente para

$$0 < r_j < 1, \quad j=1, \dots, m.$$

c) $\lim_{(r_1, \dots, r_m) \rightarrow (1, \dots, 1)} \mu(r,x) = \phi(x)$

en casi todo punto. $\phi(x)$ denota la densidad de $d\mu$ respecto de $e^{-|x|^2} dx$. (El límite restrictivo como siempre cuando los r_j están sujetos a las condiciones $\theta^{-1} < (1-r_j)/(1-r_i) < \theta$ para todo $(i,j), \theta > 0$ fijo).

OBSERVACIONES: Los THEOREMAS II.2.2 y II.2.3 constituyen una extensión al caso m-dimensional de los teoremas concernientes a la sumabilidad Abel de la serie ordinaria de Hermite probados en [2], [3] y [4]. En el caso 1-dimensional presentamos dos novedades. Una de ellas es la acotación de la función $f^*(x) = \sup_r f(r, x)$ y otra es la convergencia en norma L^p_{μ} de las medias Abel.

III.1) RECUERDAN LOS RESULTADOS CONCERNIENTES A LA SUMABILIDAD ABEL DE LA SERIE MULTIPLE DE LAGUERRE.

III.1.1) $L^p_{e,m}(\alpha)$ denota la familia de las funciones medibles tales que

$$\begin{aligned} \|f\|_{p(\alpha)} &= \int_{R^m} |f|^p e^{-\sum_j x_j} (\prod_j x_j^{\alpha_j}) dx_1 \dots dx_m = \\ &= \int_{R^m} |f|^p e^{-X} X^\alpha dX < \infty \end{aligned}$$

donde $p \geq 1$, $R^m_+ = R_+ \times \dots \times R_+$, α_j son reales tales que $-1/2 < \alpha_j < \infty$, $j=1, \dots, m$.

III.1.2) $\{\tilde{L}_{(n)}^{(\alpha)}\}$ denota para α fijo, una familia ortogonal completa en $L^2_{e,m}(\alpha)$, de polinomios en m variables

definidos de la siguiente manera

$$\tilde{L}_{(n)}^{(\alpha)}(x) = \prod_{j=1}^m \Gamma(n_j+1) \prod_{j=1}^{m-1} (n_j + \alpha_j + 1)^{-1/2} L_{n_j}^{(\alpha_j)}(x_j)$$

donde $L_{n_j}^{(\alpha_j)}(x_j)$ es el n_j -ésimo polinomio de Laguerre de parámetro α_j . (ver [6], p.99)

III.1.3) Si $f \sim \sum_n c_n \tilde{L}_{(n)}^{(\alpha)}(x)$ donde $c_n = \int_{R_+^m} f \tilde{L}_{(n)}^{(\alpha)}$. $e^{-x} x^\alpha dx$, suponiendo que las integrales existan para todo $n = (n_1, \dots, n_m)$ llamaremos $f(r, x)$ a su aproximante Abel, es decir

$$f(r, x) = \sum_n r^n c_n \tilde{L}_{(n)}^{(\alpha)}(x) = \sum_{n_1 \dots n_m} r_1^{n_1} \dots r_m^{n_m} c_{n_1 \dots n_m} \tilde{L}_{n_1}^{(\alpha_1)}(x_1) \dots \tilde{L}_{n_m}^{(\alpha_m)}(x_m)$$

suponiendo que la serie del segundo miembro converge absolutamente para $0 < r_j < 1$, $j=1, \dots, m$.

Análogamente consideramos $\mu \sim \sum_n c_n \tilde{L}_{(n)}^{(\alpha)}(x)$ donde

$$c_n = \int_{R_+^m} \tilde{L}_{(n)}^{(\alpha)}(x) d\mu \quad y \quad \mu(r, x) = \sum_n r^n c_n \tilde{L}_{(n)}^{(\alpha)}(x)$$

suponiendo que la serie de la derecha converge absolutamente para $0 < r_j < 1$, $j=1, \dots, m$.

Finalmente, denotare os como $f^*(x)$ al $\sup_{r_1 \dots r_m} |f(r, x)|$,

$0 < r_j < 1$, $j=1, \dots, m$.

Análogamente definimos $\mu^*(x)$.

III. 1.4) PRIMERAS:

i) Si $r \in L_{e,m}^1(\alpha)$, $n \geq 2$, $f(r,\zeta)$ es bien definida y se

tiene

$$\text{A}) \quad \| f(r, \cdot) - f(x) \|_n(e, \alpha) \rightarrow 0 \quad \text{con} \quad r \rightarrow (1, \dots, 1)$$

$$\text{B}) \quad f(r, \cdot) \rightarrow f(x) \quad \text{p.p.} \quad \text{con} \quad r \rightarrow (1, \dots, 1)$$

$$\text{C}) \quad \| f^x \|_1(e, \alpha) \leq C(n) \| f \|_p(e, \alpha)$$

dónde $C(n)$ depende sólo de n .

ii) $f(x) \exp(\gamma \sum_1^m x_j) \in L_{e,m}^1(\alpha)$, $1 < p < 2$, para

algun $\gamma > 0$ tal que $1/2 > \gamma > (2-p)/(2p)$, entonces

vulen las conclusiones A), B) y C) de i) para f .

iii) Si $|f|(\log^+|f|)^m \exp(\sum_1^m x_j/2) \in L_{e,m}^1(\alpha)$, entonces

$$\text{A}) \quad f(r, \zeta) \rightarrow f(x) \quad \text{p.p.} \quad \text{con} \quad r \rightarrow (1, \dots, 1)$$

$$\text{B}) \quad \| f^x \|_1(e, \alpha) \leq C_\alpha + C'_\alpha \| |f|(\log^+|f|)^m \|_1(e, \alpha)$$

iv) Si $|f|(\log^+|f|)^{m-1} \exp(\sum_1^m x_j/2) \in L_{e,m}^1(\alpha)$ y además

$0 < \beta < 1$, se tiene

a) $\gamma^m, \rightarrow f(x)$ p.p. con $r \rightarrow (1, \dots, 1)$

$$\text{b)} \|(\gamma^m)^{-1}\|_1(e, \alpha) \leq D_{\alpha, \beta} + D'_{\alpha, \beta} \| |f| (1 \wedge r^{\beta}) |f|^{m-1} \|_1(e, \alpha)$$

dónde $C_{\alpha, \beta}$ dependen de m y α , $D_{\alpha, \beta}$ y $D'_{\alpha, \beta}$ dependen de

m, α, β

v) Si $|e|^{\exp(\sum_1^m x_j/\gamma)} \in L^1_{e, m}(\alpha)$, entonces

$$\|f(r, e) - f(x)\|_1(e, \alpha) \rightarrow 0 \quad \text{con } r \rightarrow (1, \dots, 1)$$

III.1.5) Teorema: Si μ es una medida elemental definida en \mathbb{R}_+^m a variación total finita en \mathbb{R}_+^m y además vale que

$$\int_{\mathbb{R}_+^m} e^{X/2} d\mu < \infty$$

dónde $d\mu$ denota la variación de $d\mu$, entonces

$$\lim_{r \rightarrow (1, \dots, 1)} \text{metrica} \mu(r, x) = \phi(x) \quad \text{p.p.}$$

$\phi(x)$ es la función de densidad de μ respecto de la medida $e^{-X/2} \gamma^{\alpha} dy$.

III.2) SUMABILIDAD CESARO-BOCHNER-RIESZ DE LAS SERIES MÚLTIPLES DE LEGUERRE Y HERMITE.

Dada una serie ortogonal múltiple

$$\sum_{n_1 \dots n_m} c_{n_1 \dots n_m} \phi_{n_1}(x_1) \dots \phi_{n_m}(x_m)$$

decimos que es sumable Cesaro-Bochner-Kiesz de orden $\delta > 0$ en $(\mathbb{R}_1, \dots, \mathbb{R}_m)$ si

$$\lim_{r \rightarrow \infty} k_1^2 + \dots + k_m^2 \leq r^2 (1 - (k_1^2 + \dots + k_m^2)/r^2)^{\delta}.$$

$$\cdot c_{k_1 \dots k_m} \phi_{k_1}(\mathbb{R}_1) \dots \phi_{k_m}(\mathbb{R}_m)$$

existe y es finito.

Llamaremos $M_n^\delta(f)(X)$, $m_n^\delta(f)(X)$ a las medias Cesaro-Bochner-Kiesz de orden $\delta > 0$ de la serie múltiple de Laguerre de parámetro α de una función f y de la serie múltiple de Hermite de una función ψ respectivamente. Por $S_{n,\alpha}(f)$ y $s_n(\psi)$ denotaremos las sumas parciales esféricas de orden n respectivamente.

III.2.1) TEOREMA:

i) Si $f \in L_{\alpha,m}^p(\mathbb{R}^m)$, $p \geq 2$, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$ tal que

$-1/2 < \alpha_j < \infty$ $j=1, \dots, m$. Entonces para todo $\delta > 0$ se

tiene

A) $\lim_{n \rightarrow \infty} M_n^\delta(f)(X) = f(X) \quad p.p.$

B) $\lim_{k \rightarrow \infty} S_{k,\alpha}^\delta(f)(X) = f(X) \quad p.p.$

ii) Si $\varphi \in L^p_{\text{loc}}(\mathbb{R}^m)$, $n \geq 2$, entonces para todo $\delta > 0$ se tiene

$$A) \lim_{n \rightarrow \infty} m_n^\delta(\varphi)(x) = \varphi(x) \quad \text{p.p.}$$

$$B) \lim_{k \rightarrow \infty} s_{\gamma^k}(\varphi)(x) = \varphi(x) \quad \text{p.p.}$$

OBSERVACIONES: Los TEOREMAS III.1.4 y III.1.5 son generalizaciones en dimensiones de teoremas en [11], [12] y [13]. Así mismo, presenta como novedades la convergencia en $L^p_{e,m}(\alpha)$ de las medias Abel así como la acotación de $f^* = \sup_{r_1 \cdots r_m} |f(r, x)|$ aún en el caso 1-dimensional.

Con respecto al TEOREMA III.2.1 es una extensión al caso de Series Múltiple de Laguerre y Hermite de un teorema conocido de Series Múltiples de Fourier.

EXTRACCION

1. Sean x denotarenos un punto (x_1, \dots, x_m) del espacio euclídeo m -dimensional

$$|x| = \left(\sum_{j=1}^m |x_j|^2 \right)^{1/2}$$

2. Si μ es una medida elemental definida en \mathbb{R}^m , esto es, una función aditiva de conjuntos elementales (unión finita de intervalos no degenerados), la variación V de μ está definida de la siguiente manera:

$$V(\mu) = \sup_{S \subset Q} \sum_{j=1}^{\ell} |\mu(s_j)|$$

$$S = \bigcup_{j=1}^{\ell} s_j ; \quad s_i \cap s_j = \emptyset \quad \text{si } i \neq j .$$

donde el sup es tomado sobre todos los elementales S contenidos en Q . Si la medida es completamente aditiva la llamaremos σ -aditiva.

3. Sea $\mu \geq 0$ una medida σ -aditiva en los subconjuntos de Borel de \mathbb{R}^m . Usaremos las siguientes clases de funciones μ -medibles:

a) $L^p(\mathbb{R}^m)$ es el conjunto de las funciones tales que

$$\left(\int_{\mathbb{R}^m} |f|^p d\mu \right)^{1/p} = \|f\|_{p,\mu} < \infty ; \quad p \geq 1$$

b) $L_\mu (\log^+ L_\mu)^\varphi$ es el conjunto de las funciones tales que

$$\int_{\mathbb{R}^m} |f| (\log^+ |f|)^s d\mu < \infty \quad ; \quad s > 0$$

Para $\phi_\mu = \exp(-|x|^2) dx$ usaremos la notación $L_G^p(\mathbb{R}^m)$, $L_G(\log^+ L_G)^s$ respectivamente.

Finalmente, usaremos una clase auxiliar de funciones $L_\gamma(\mathbb{R}^m)$, $0 < \gamma < 1$, mediante la definición

$$\int_{\mathbb{R}^m} f \exp(-\gamma |x|^2) dx < \infty$$

Por otra parte $J_{-1/2}(\mathbb{R}^n)$ indicará la familia de funciones o medidas tales que

$$\int_{\mathbb{R}^m} |f(x)| \exp(|x|^2/2) dx < \infty$$

$$\int_{\mathbb{R}^m} \exp(|x|^2/2) dw < \infty$$

donde dw denota la variación de μ .

4. $E(\lambda, f)$, $f \geq 0$, denotará el conjunto de los puntos donde $\gamma > \lambda$. $\mu\{E(\lambda, f)\}$; $G\{E(\lambda, f)\}$; $|E(\lambda, f)|$ denotarán la μ -medida de $E(\lambda, f)$; $\int_{E(\lambda, f)} \exp -|x|^2 dx$ y la medida de Lebesgue de $E(\lambda, f)$ respectivamente.

APÉNDICE I - OPERADORES AUXILIARES

1.1) Por $I(t, h, f)(x)$ se un operador de derivación positiva definido sobre \mathbb{R}^m :

$$(1.1) \quad I(t, h, f)(x) = \left(\prod_{j=1}^m 2h_j(t) \right)^{-\frac{1}{2}} \int_{Q(h, t, x)} f(y) dy$$

donde las funciones $h_j(t)$ son continuas, están definidas sobre $t > 0$, con estrictamente crecientes y para $t = 0$, $h_j(0) = 0$, $j = 1, \dots, m$. $I(h, t, x)$ es un rectángulo m -dimensional, centrado en x , con aristas de longitud $2h_j(t)$ y paralelas a los ejes coordenados. (La arista de longitud $2h_j$ paralela al eje x_j). Veremos que I es una función μ -medible, localmente integrable.

1.2) Un hecho bien conocido que se verifica la siguiente desigualdad:

$$(1.2.1) \quad |I(\hat{\mu}, \lambda)| \leq (c/\lambda) \int_{\mathbb{R}^m} dw$$

donde

$$\hat{\mu}(x) = \sup_{0 < t < \infty} |I(t, h, \mu)(x)|$$

y $\hat{\mu}$ es una medida elemental a variación acotada en \mathbb{R}^m . dw denota la variación de μ .

La constante c de (1.2.1) no depende de la medida μ , ni de las funciones $h_j(t)$. (Ver [8], Vol. II, p. 309 y 310).

Una consecuencia importante de la desigualdad (1.2.1) es que el límite

$$(1.2.2) \quad \lim_{t \rightarrow 0} I(t, \mu)(x)$$

existe en casi todo punto y es en casi todo punto igual a la función de densidad asociada a μ .

1.3) Lema: $K_t(\mu)(x)$ denota una familia de operadores sublineales definidos en el espacio de las medidas elementales a variación acotada en R^m tales que

$$(a) |K_t(\mu)(x)| \leq \sum_{k=0}^{\infty} b_k |I^{(k)}(t, \mu)(x)|, \quad b_k \geq 0, t > 0,$$

$$(b) \sum_{k=0}^{\infty} b_k^{1/2} < \infty,$$

donde para cada natural k , $I^{(k)}(t, \mu)(x)$ es un operador de derivación restrictiva.

Bajo las condiciones precedentes se tiene

$$(i) |E\{K^*(\mu), \lambda\}| < (c_0/\lambda) \int_{R^m} dw$$

donde $K^*(\mu)$ denota al $\sup_{0 < t < \infty} K_t(\mu)(x)$ y dw es la variación de μ . c_0 no depende de μ .

(ii) Si μ es singular se tiene

$$\lim_{t \rightarrow 0} K_t(\mu)(x) = 0 \quad \text{p.p. en } R^m.$$

Demonstración: Sin restricción de generalidad podemos supo-

nos $\alpha \geq 0$ y $\sum_{k=0}^{\infty} b_k^{1/2} = 1$.

Sea X_λ el conjunto de los puntos donde

$$\sup_{0 < t < \infty} \sum_{k=0}^{\infty} b_k^{1/2} b_k^{1/2} I^{(k)}(t, \mu)(x) > \lambda$$

y $X_\lambda^{(k)}$ el conjunto de puntos donde

$$\sup_{0 < t < \infty} b_k^{1/2} I^{(k)}(t, \mu)(x) > \lambda$$

Obviamente se tiene

$$(1.3.1) \quad X_\lambda \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} X_\lambda^{(k)}$$

Teniendo en cuenta (1.2.1) obtenemos

$$|X_\lambda| \leq \sum_{k=0}^{\infty} |X_\lambda^{(k)}| \leq (c/\lambda) \sum_{k=0}^{\infty} b_k^{1/2} \int_{\mathbb{R}^m} dw$$

lo que prueba la parte (i).

Sea ahora $\mu \geq 0$ singular y $\varepsilon > 0$, entonces existe un entero $N > 0$, tal que $\sum_{k=N}^{\infty} b_k^{1/2} < \varepsilon$.

Si designamos por X_ε^N el conjunto de los puntos donde

$$(1.3.2) \quad \sup_{0 < t < \infty} \sum_{k=N}^{\infty} b_k^{1/2} b_k^{1/2} I^{(k)}(t, \mu)(x) > \varepsilon$$

resulta claro que se verifica

$$(1.3.3) \quad X_\varepsilon^N \subset \bigcup_{k=N}^{\infty} \frac{X_\varepsilon^{(k)}}{\varepsilon / \sum_{s=N}^{\infty} b_s^{1/2}}$$

y nuevamente de (1.2.1) se tiene

$$(1.3.4) \quad |x_{\epsilon}^N| \leq \sum_{k=N}^{\infty} \left| K_{\epsilon}^{(k)} \frac{c}{\epsilon} \sum_{s=1}^{\infty} b_s^{1/2} \right| \leq \\ \leq (c/\epsilon) \left[\sum_{k=N}^{\infty} b_k^{1/2} \right] \cdot \sum_{k=N}^{\infty} b_k^{1/2} \int_{\mathbb{R}^m} dw \leq \\ \leq \epsilon c \int_{\mathbb{R}^m} dw.$$

De manera que en $\mathbb{R}^m - x_{\epsilon}^N$ se tendrá

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow 0} |K_{\epsilon}^{(k)}(n_j)(x)| \leq \overline{\lim}_{t \rightarrow 0} \sum_{k=0}^N b_k I^{(k)}(t, \mu)(x) + \\ + \sup_{0 < t < \infty} \sum_{k=N}^{\infty} b_k I^{(k)}(t, \mu)(x) \leq \epsilon$$

Como $|x_{\epsilon}^N| < \epsilon c \int_{\mathbb{R}^m} dw$, la parte (ii) de la tesis queda probada.

1.4) Definición: Sean $r_j(x)$, $j=1, \dots, m$, funciones reales de la variable x definidas sobre la recta y pertenecientes a $L^1(\mathbb{R})$.

Entonces podemos formar con ellas el núcleo

$$(1.4.1) \quad \prod_{j=1}^m n_j(t) r_j(n_j(t)x_j) = K(t, x)$$

donde las funciones $1/n_j(t)$ juegan el mismo rol que las $h_j(t)$ de (1.1).

Imponeremos además a las $r_j(x)$ las siguientes condiciones

a) Las $r_j(x)$ son simétricas y no crecientes en $x > 0$.

b) Existe $\epsilon > 0$ y $0 < \theta < 1$ tal que

$$(3) \int_{|x|<\epsilon} |F_j(x)|^{1+\theta} dx < \infty, j=1, \dots, m.$$

$$(4) \int_{|x|\geq \epsilon} |F_j(x)|^{1-\theta} dx < \infty, j=1, \dots, m.$$

1.5) Lema: Si las funciones del núcleo (1.4.1) tienen las propiedades a) y b), y μ es una medida elemental a variación acotada sobre \mathbb{R}^m , entonces el operador

$$(1.5.1) \sup_{0 < t < \infty} \left| \int_{\mathbb{R}^m} K(t, x-y) d\mu(y) \right| = \\ = \sup_{0 < t < \infty} |K_t * \mu| = \bar{\mu}$$

tiene la siguiente propiedad

$$1) |\beta(\bar{\mu}, \lambda)| \leq (c/\lambda) \int_{\mathbb{R}^m} dw$$

donde c no depende de μ y dw denota la variación de μ ;
más aún, si μ es puramente singular se tiene

$$2) \lim_{t \rightarrow 0} K_t * \mu = 0 \text{ p.p.}$$

Demonstración: De las propiedades a) y b) de (1.4) se tiene para $\epsilon > 0$, $|y| > \epsilon$

$$(1.5.2) \sup_{y, |y| > \epsilon} |y| F_j(y)^{1-\theta} < \int_{-\infty}^{+\infty} F_j(y)^{1-\theta} dy$$

Por tanto si $|y| \geq \epsilon$

$$F_j(y) < A |y|^{-1/(1-\theta)}$$

donde δ depende de la cota $\int_{-\infty}^{+\infty} F_j(y)^{1-\theta} dy$ y de $\varepsilon > 0$.
Por otro punto, si $|y| < \varepsilon$, se tiene

$$(1.5.3) \quad \sup_y |y| F_j(y)^{1+\theta} < \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} F_j(y)^{1+\theta} dy$$

y por tanto

$$F_j(y) < B |y|^{-1/(1+\theta)} \text{ si } |y| < \varepsilon$$

De la forma de las F_j es fácil ver que puedo tomar $\varepsilon = 1$. Llamando φ_{2^k} a la función característica del intervalo $[2^k, 2^{k+1}]$ y $\varphi_{2^{-k}}$ a la función característica de $[2^{-(k+1)}, 2^{-k}]$, entonces de (1.5.2) y (1.5.3) se tiene la siguiente cota para $F_j(y)$, $y \geq 0$

$$(1.5.4) \quad F_j(y) \leq C_0 \left(\sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k/(1-\theta)} \varphi_{2^k}(y) + \right. \\ \left. + \sum_{k=0}^{\infty} 2^{(1+k)/(1+\theta)} \varphi_{2^{-k}}(y) \right).$$

Finalmente, si llamamos Ψ_k a la función característica de $[-2^{k+1}, 2^{k+1}]$ y Ψ_{-k} a la función característica de $[-2^{-k}, 2^{-k}]$ tendremos de nuevo

$$F_j(y) \leq C_0 \left(\sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k/(1-\theta)} \Psi_k(y) + \right. \\ \left. + \sum_{k=0}^{\infty} 2^{(1+k)/(1+\theta)} \Psi_{-k}(y) \right)$$

y además

$$(1.5.5) \quad n_j(t)^m [n_j(t)y_j] \leq c_0 \left\{ 2^{-2} \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k} [1/(1-\theta) - 1] \right.$$

$$\cdot n_j(t) 2^{-k-2} \Psi_k[n_j(t)y_j] + 2^2 \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k} [1 - 1/(1+\theta)]$$

$$\cdot n_j(t) 2^{k+1} \left. \Psi_{-k}[n_j(t)y_j] \right\}$$

$$\text{Poniendo } a_k = 2^{-k} [1/(1-\theta) - 1] \text{ y } a_{-k} = 2^{-k} [1 - 1/(1+\theta)]$$

y teniendo en cuenta (1.4.1) y (1.5.5) se tiene

$$(1.5.6) \quad K(t,y) \leq 3^m c_0^m \sum_{-\infty}^{\infty} \dots \sum_{-\infty}^{\infty} a_{k_1} \dots a_{k_m} D_{k_1 \dots k_m}(t,y)$$

donde $D_{k_1 \dots k_m}(t,y)$ son funciones que generan cada una de ellas un operador de derivación restrictiva. Por otra parte como

$$\sum_{-\infty}^{\infty} \dots \sum_{-\infty}^{\infty} a_{k_1}^{1/2} \dots a_{k_m}^{1/2} < \infty$$

del lema (1.3), las partes 1 y 2 de la tesis resultan demostradas.

1.6) Generalización: En el lema precedente es fácil ver que si en lugar de los $n_j(t)$ tomamos funciones $\alpha_j n$, ($j=1, \dots, m$), donde los α_j son constantes fijas y los n recorren todos los números naturales, se tienen las mismas conclusiones.

1.7) Definición: Sean las $\mu_j \geq 0$, ($j=1, \dots, m$). medidas no negativas, \mathcal{G} -aditivas, definidas en los subconjuntos de Borel de \mathbb{R}^m . Nosotros decimos que la integral $\int f d\mu$, donde $d\mu$ es la medida producto $d\mu_1 \dots d\mu_m = d\mu$

y si f es μ -medible y μ -localmente integrable, es fuertemente diferenciable en el punto $x_0 = (\underline{x}_1, \dots, \underline{x}_m)$, $\underline{x}_j \in \mathbb{R}^{n_j}$ si el límite

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} [Q^1(\underline{x}_1) \times \dots \times Q^m(\underline{x}_m)]^{-1} \int_{Q^1(\underline{x}_1) \times \dots \times Q^m(\underline{x}_m)} f d\mu_1 \dots d\mu_m$$

existe y es finito.

$d[Q^1(\underline{x}_1) \times \dots \times Q^m(\underline{x}_m)]$ denota el diámetro del conjunto $Q^1(\underline{x}_1) \times \dots \times Q^m(\underline{x}_m)$, y cada $Q^j(\underline{x}_j)$ denota a un cubo n_j -dimensional con lados paralelos a los ejes y centrado en el punto \underline{x}_j .

1.3) Teorema: Bajo las condiciones de (1.7) si f es μ -medible y $|f| (\log^+ |f|)^{m-1}$ es localmente integrable, entonces la integral $\int f d\mu$ es fuertemente diferenciable en casi todo punto con respecto a la medida $\mu = \mu_1 \dots \mu_m$.
Más aún, poniendo

$$\bar{f}(x) = \sup_{Q^1(x_1) \times \dots \times Q^m(x_m)} \left| \int_{Q^1(x_1) \times \dots \times Q^m(x_m)} f d\mu \right|$$

se tiene:

i) $(\int_{R^{n_1+\dots+n_m}} (\bar{f})^p d\mu)^{1/p} < C(p) (\int_{R^{n_1+\dots+n_m}} |f|^p d\mu)^{1/p}$ siendo $p > 1$

donde la constante $C(p)$ depende solamente de p y m .

ii) Si A es un subconjunto elemental de \mathbb{R}^m de medida

acotación que tiene

$$a) \int_A \tilde{v} d\mu \leq B_1 \{ \mu(A), m \} + B_2 \{ \mu(A), m \} .$$

$$\cdot \int_A |f| (1 + \log^+ |f|)^m d\mu$$

$$b) \int_A (\tilde{v})^\alpha d\mu \leq c_1 \{ \mu(A), m, \alpha \} + c_2 \{ \mu(A), m, \alpha \} .$$

$$\cdot \int_A |f| (1 + \log^+ |f|)^{m-1} d\mu$$

donde $0 < \alpha < 1$.

La demostración sigue muy estrechamente al correlativo resultante de Jessen-Harcinikiewicz-Zygmund y por tanto sólo daremos una breve exposición de la misma sin entrar en demasiado detalle.

En primer término probaremos algunos lemas auxiliares de tipo bien conocido.

1.9) i) Cada punto x de un conjunto $S \subset \mathbb{R}^m$ es dado un cubo $\mathbb{Q}(x)$ (con lados paralelos a los ejes coordenados y centrado en x), de acuerdo a la definición (1.7), entonces es posible extraer una sucesión de tales cubos $\mathbb{Q}(x_n)$ tal que

$$i) S \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} \mathbb{Q}(x_n)$$

ii) Cada punto de \mathbb{R}^m pertenece a lo sumo a 4^m cubos diferentes.

Para la demostración ver [1], p. 125-128.

1.10) Definición: Si $\nu \geq 0$ es una medida elemental tal que $\nu(\mathbb{R}^m) < \infty$, y si $\mu \geq 0$ es una medida σ -aditiva definida en los subconjuntos de Borel de \mathbb{R}^m , entonces la operación

$$(1.10.1) \quad \nu^*(x) = \sup_{Q(x) \supset \{x\}} \frac{\nu[Q(x)]}{\mu[Q(x)]}$$

(donde los $Q(x)$ son cubos centrados en x), tiene la propiedad

i) $\mu\{E(\nu^*, \lambda)\} \leq (4^m/\lambda) \int_{\mathbb{R}^m} d\nu$

ii) Si $f \in L_p^\mu(\mathbb{R}^m)$, $p > 1$, entonces

$$\left(\int_{\mathbb{R}^m} f^{*p} d\mu \right)^{1/p} \leq C_p \left(\int_{\mathbb{R}^m} |f|^p d\mu \right)^{1/p}$$

iii) Si A es un subconjunto elemental de μ -medida acotada tenemos

a) $\int_A f^* d\mu \leq \mu(A) + O' \int_A |f|(1+\log^+|f|) d\mu$

b) $\int_A (f^*)^\alpha d\mu \leq O_\alpha' \mu(A) + O_\alpha'' \int_A |f| d\mu, \quad 0 < \alpha < 1.$

iv) Si f es localmente integrable se tiene

$$\lim_{Q(x) \rightarrow \{x\}} \frac{1}{\mu\{Q(x)\}} \int_{Q(x)} f d\mu = f(x)$$

en casi todo punto respecto de μ .

Demonstración: Sea S un elemental de R^m y consideremos
 $E\{\nu^*, \lambda\} \cap S$. De (1.10.1), para cada punto x de
 $E\{\nu^*, \lambda\} \cap S$ existe un cubo $Q(x)$ para el que se verifica

$$(1.10.2) \quad \lambda \mu [Q(x)] < \nu [Q(x)]$$

De (1.9) resulta que podemos seleccionar una sucesión de cubos verificando i) y ii) de (1.9).

Consideremos un conjunto finito de tales cubos, $Q(x_1), \dots, Q(x_k)$ y denotemos por $\varphi_j(x)$, $j=1, \dots, k$, las correspondientes funciones características; entonces

$$(1.10.3) \quad \begin{aligned} \mu \left\{ \bigcup_j Q(x_j) \right\} &\leq \int \sum_j \varphi_j(x) d\mu \leq \sum_j \int_{Q(x_j)} d\mu \leq \\ &\leq \sum_j (1/\lambda) \int_{Q(x_j)} \varphi_j(x) d\nu = \\ &= (1/\lambda) \int \sum_j \varphi_j(x) d\nu \leq \\ &\leq (4^m/\lambda) \nu (R^m) \end{aligned}$$

La última desigualdad se verifica dado que $\sum_j \varphi_j(x) \leq 4^m$ en todo punto. Entonces

$$(1.10.4) \quad \mu \left\{ \bigcup_j Q(x_j) \right\} \leq (4^m/\lambda) \nu (R^m)$$

y ya que k es arbitrario, se tendrá

$$\mu\{E(\gamma^*, \lambda) \cap S\} \leq \mu\left\{\bigcup_1^\infty \omega(x_j)\right\} < (4^m/\lambda) \cdot \gamma^*(R^m)$$

Finalmente, haciendo tender S a todo el espacio, la parte i) de la tesis queda probada.

La parte ii) sigue inmediatamente, combinando la parte i) ya probada con la desigualdad $\|f^*\|_\infty \leq \|f\|_\infty$ y aplicando el teorema de interpolación de Marcinkiewicz para operadores sublineales.

Consideremos ahora $f \geq 0$, μ -medible y tal que $f \log^+ f$ es μ -localmente integrable y tomemos un entorno abierto A como espacio, contando con que $\mu(A) < \infty$. Pongamos ahora $f = f^{\lambda/2} + f_{\lambda/2}$ siendo

$$(1.10.5) \quad \begin{cases} f^{\lambda/2} = f & \text{si } f(x) \leq \lambda/2 \text{ y } 0 \text{ en otro caso} \\ f_{\lambda/2} = f & \text{si } f(x) > \lambda/2 \text{ y } 0 \text{ en otro caso} \end{cases}$$

Obtendremos

$$(1.10.6) \quad \mu\{E(\lambda, f^*)\} \leq \mu\{E[\lambda/2, (f^{\lambda/2})^*]\} + \\ + \mu\{E[\lambda/2, (f_{\lambda/2})^*]\}$$

Pero $\mu\{E[\lambda/2, (f^{\lambda/2})^*]\} = 0$ ya que $\|g^*\|_\infty < \|g\|_\infty$
Usando la desigualdad i) ya probada y (1.10.6) se tendrá

$$(1.10.7) \quad \int_A f^* d\mu = \int_0^\infty \mu\{E(\lambda, f^*)\} d\lambda \leq \\ \leq \mu(A) + \int_1^\infty (2 \cdot 4^m / \lambda) d\lambda \int_A f_{\lambda/2} d\mu =$$

$$\begin{aligned}
 &= \mu(A) + 2 \cdot 4^m \int_{A \cap \{f > 1/2\}} f d\mu \int_1^{2f} (1/\lambda) d\lambda \leq \\
 &\leq \mu(A) + 2 \cdot 4^m \int_A f(1 + \log^+ f) d\mu
 \end{aligned}$$

y la parte iii),a), queda probada.

Ahora supondremos que $f \geq 0$ es localmente integrable

$$\begin{aligned}
 (1.10.3) \quad \int_A (f^*)^\alpha d\mu &= \alpha \int_0^\infty \mu\{\varepsilon(\lambda, f^*)\} \lambda^{\alpha-1} d\lambda \leq \\
 &\leq \alpha \mu(A) + \alpha \cdot 2 \cdot 4^m \int_1^\infty \lambda^{\alpha-2} d\lambda \int_A f_{\lambda/2} d\mu \leq \\
 &\leq \alpha \mu(A) + \alpha \cdot 2 \cdot 4^m \int_{A \cap \{f > 1/2\}} f d\mu \int_1^{2f} \lambda^{\alpha-2} d\lambda \leq \\
 &\leq \alpha \mu(A) + O(\alpha) \int_A f d\mu
 \end{aligned}$$

lo que prueba iii),b).

Finalmente, iv) se verifica si f es una función escalera.

Tomemos una función f , localmente integrable; entonces podemos encontrar una función escalera f' para cada $\epsilon > 0$ tal que

$$(1.10.4) \quad \int_A |f - f'| d\mu < \epsilon$$

donde A es un abierto acotado tal que $\mu(A) < \infty$.

Ahora aplicando la desigualdad i) de la tesis se tendrá

$$\begin{aligned}
 \mu\{\varepsilon(\epsilon^{1/2}, |f-f'|^*)\} &< 2 \cdot 4^m \cdot \epsilon^{-1/2} \int_A |f-f'| d\mu < \\
 &< 2 \cdot 4^m \cdot \epsilon^{1/2}
 \end{aligned}$$

y por tanto

$$\left| \overline{\lim} \frac{1}{\mu[Q(x)]} \int_Q f d\mu - \underline{\lim} \frac{1}{\mu[Q(x)]} \int_Q f d\mu \right| > 2\varepsilon^{1/2}$$

solo en un conjunto de μ -medida menor que $2.4^m \cdot \varepsilon^{1/2}$.

1.11) Lema: Si $\mu \geq 0$ y $\nu \geq 0$ son medidas σ -aditivas definidas en los subconjuntos de Borel de R^m , entonces

i) $\lim_{Q(x) \rightarrow \{x\}} \mu[Q(x)] / \nu[Q(x)]$ existe y es finito en casi todo punto respecto de la medida ν .

ii) $\lim_{Q(x) \rightarrow \{x\}} \nu[Q(x)] / \mu[Q(x)]$ existe y es finito en casi todo punto respecto de la medida μ .

Demarcación: Supongamos que $\mu(R^m) < \infty$ y $\nu(R^m) < \infty$.

Podemos considerar sólo ii) desde que i) es simétrico.

El conocido teorema de descomposición da

$$(1.11.1) \quad \nu(A) = \int_A g d\mu + \nu(N \cap A)$$

donde $\nu(N \cap A)$ es la parte singular y $\mu(N) = 0$.

A varía sobre todos los subconjuntos de Borel de R^m .

Poniendo $\nu(N \cap A) = \nu_1(A)$, será suficiente probar la diferenciabilidad de ν_1 , ya que la diferenciabilidad de $\int_A g d\mu$ sigue del lema precedente.

Para cada $\varepsilon > 0$ podemos encontrar un abierto G tal que

$\nu_1(G) < \varepsilon$, $\mu(G^*) < \varepsilon$, donde G^* denota el complementario de G . Poniendo ahora $\nu_1 = \nu_1' + \nu_1''$

donde

$$\mathcal{V}_1(A) = \mathcal{V}_1(A \cap G), \quad \mathcal{V}_1^*(A) = \mathcal{V}_1(A \cap G^*)$$

para cada punto $x \in G$ hay un cubo $Q(x)$ tal que $Q(x) \cap G^* = \emptyset$, entonces en G

$$\begin{aligned} \overline{\lim}_{Q(x) \rightarrow \{x\}} \mathcal{V}_1[Q(x)] / \mu [Q(x)] &= \\ &= \overline{\lim}_{Q(x) \rightarrow \{x\}} \mathcal{V}_1^*[Q(x)] / \mu [Q(x)] \\ &\vdots \end{aligned}$$

y usando la desigualdad i) del lema (1.10) se tendrá

$$\mu \left\{ \varepsilon^{1/2}, \mathcal{V}_1^*(x) \right\} < 4^m \varepsilon^{-1/2} \int_{R^m} d\mathcal{V}_1^* < 4^m \varepsilon^{1/2}$$

entonces

$$\overline{\lim}_{Q(x) \rightarrow \{x\}} \mathcal{V}_1[Q(x)] / \mu [Q(x)] < \varepsilon^{1/2}$$

excepto en un conjunto de μ -medida a lo sumo igual a $4^m \varepsilon^{1/2} + \varepsilon$; por tanto el lema está probado.

Nota: La extensión del lema precedente al caso $\mu(R^m) = \infty$ ó $\mathcal{V}(R^m) = \infty$, o bien $\mu(R^m) = \mathcal{V}(R^m) = \infty$ no ofrece ninguna dificultad, por tanto no se demostrará aquí.

1.12) Sean las μ_j medidas en las condiciones (1.7), $j=1, \dots, m$, y consideremos los operadores $M_j(f)$ definidos de la siguiente manera

$$(1.12.1) \quad H_j(f)(\underline{x}) = \sup_{\omega_j(\underline{x}_j) \supseteq \{\underline{x}_j\}} \left| \frac{1}{\mu_j[\omega_j(\underline{x}_j)]} \cdot \int_{\omega_j(\underline{x}_j)} f(x_1, \dots, x_j, \underline{x}_{j+1}, \dots, \underline{x}_m) d\mu_j \right|$$

donde f es localmente $\mu_1 \dots \mu_m$ -integrable.

Si $f \geq 0$ es μ -medible, localmente integrable y $\varphi(u)$ es una función convexa no decreciente, se tienen las siguientes desigualdades sencillas de probar

$$(a) \quad \bar{f} \leq H_m H_{m-1} \dots H_1(f)$$

$$(1.12.2) \quad (b) \quad \varphi(\bar{f}) \leq \overline{\varphi(f)}, \quad \varphi \geq 0$$

$$(c) \quad \varphi(H_j(f)) \leq H_j(\varphi(f)), \quad j=1, \dots, m.$$

()— Denota el operador maximal asociado a la diferenciabilidad fuerte en la hipótesis del TEOREMA 1.8. Por otra parte, el operador H_j actuando sobre la variable x_j es el operador \star del LEMA 1.10.

1.13) LEMÁ : Si $s \geq 1$ y $M(f) = f^\star$ es el operador definido en el LEMA 1.10, entonces

$$i) \quad \int_A M(f) [1 + \log^+ M(f)]^s d\mu \leq \mu(A) + s \cdot 4^{m+1} \cdot \int_A f (1 + \log^+ f)^{s+1} d\mu$$

donde $f \geq 0$ y A es un abierto de μ -medida finita.

Demostración: Observando que

$$u(1+\log^+ u)^s$$

es positiva, creciente y convexa en $u > 0$ con $s \geq 1$, se tiene

$$(1.13.1) \quad \int_A M(f)(1+\log^+ M(f))^s d\mu \leq \int_A M\{f(1+\log^+ f)^s\} d\mu$$

$$(1.13.2) \quad \int_A M\{f(1+\log^+ f)^s\} d\mu \leq \mu(A) + 2 \cdot 4^{m+1}.$$

$$\cdot \int_A f(1+\log^+ f)^s \{1+\log^+[f(1+\log^+ f)^s]\} d\mu.$$

y por otra parte se tiene

$$(1.13.3) \quad \log^+[f(1+\log^+ f)^s] \leq \log^+ f + s \log^+(1+\log^+ f) \leq \\ \leq s [\log^+ f + \log^+(1+\log^+ f)] \leq \\ \leq 2 s \log^+ f.$$

Entonces

$$1 + \log^+ [f(1+\log^+ f)^s] \leq 2 s (1 + \log^+ f)$$

Combinando esta última desigualdad con (1.13.2) se obtiene el resultado deseado.

1.14) Ahora para terminar la demostración del TEOREMA 1.8 podemos considerar solamente $m=2$, un caso enteramente tí-

pico.

Sea $f \geq 0$ una función perteneciente a $L_{\mu_1, \mu_2}^p(\mathbb{R}^{n_1+n_2})$, $p > 1$.

De acuerdo a la desigualdad ii) del LEMA 1.10, se tendrá

$$(1.14.1) \quad \int_{\mathbb{R}^{n_1}} (M_1 M_2(f))^p d\mu_1 \leq c(p) \int_{\mathbb{R}^{n_1}} (M_2(f))^p d\mu_1$$

El mismo argumento da

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^{n_2}} d\mu_2 \int_{\mathbb{R}^{n_1}} [M_1 M_2(f)]^p d\mu_1 &\leq c(p) \int_{\mathbb{R}^{n_2}} d\mu_2 \int_{\mathbb{R}^{n_1}} [M_2(f)]^p d\mu_1 \leq \\ &\leq c(p) \iint_{\mathbb{R}^{n_1+n_2}} f^p d\mu_1 d\mu_2 \end{aligned}$$

Ahora, usando (1.12.2), a), se obtiene

$$\begin{aligned} (1.14.2) \quad \iint_{\mathbb{R}^{n_1+n_2}} (\bar{f})^p d\mu_1 d\mu_2 &\leq \iint_{\mathbb{R}^{n_1+n_2}} [M_1 M_2(f)]^p d\mu_1 d\mu_2 \leq \\ &\leq o(p) \iint_{\mathbb{R}^{n_1+n_2}} f^p d\mu_1 d\mu_2 \end{aligned}$$

lo que da i) de 1.8.

Sea ahora A un conjunto de la forma $Q_1 \times Q_2$, donde los $Q_i \in \mathbb{R}^{n_i}$ ($i=1,2$) son cubos, y sea $f \geq 0$ una función μ -medible tal que

$$\int_A f \log^+ f d\mu < \infty$$

Usando la desigualdad iii), b) del LEMA 1.10, se tiene

$$(1.14.3) \quad \int_{Q_1} (M_1 M_2(f))^\alpha d\mu_1 < Q_1'' \mu_1(Q_1) + Q_1''' \int_{Q_1} M_2(f) d\mu_1$$

Integrando esta desigualdad con respecto a $d\mu_2$ y usando iii),a) del LEMA 1.10 se obtiene

$$(1.14.4) \quad \iint_{Q_1 \times Q_2} (M_1 M_2(f))^\alpha d\mu_1 d\mu_2 \leq 0_\alpha' \mu(A) + \\ + 0_\alpha''' \mu_2(Q_2) + 0' 0_\alpha''' \iint_{Q_1 \times Q_2} f(1+\log^+ f) d\mu_1 d\mu_2$$

lo que da ii),b) del TEOREMA 1.8.

Imponiendo ahora la condición $\int_A f(1+\log^+ f)^2 d\mu < \infty$, como en el caso precedente, tenemos de iii),a) del LEMA 1.10

$$(1.14.5) \quad \int_{Q_1} M_1 M_2(f) d\mu_1 \leq \mu_1(Q_1) + 0' \int_{Q_1} M_2(f) [1+\log^+ M_2(f)] d\mu_1$$

Integrando con respecto a $d\mu_2$ y usando el LEMA 1.13 se obtendrá

$$(1.14.6) \quad \iint_{Q_1 \times Q_2} M_1 M_2(f) d\mu_1 d\mu_2 \leq \mu(A) + 0' \mu_2(Q_2) + \\ + 4^{n+1} 0' \int_A f(1+\log^+ f)^2 d\mu$$

que es la parte ii),a) del TEOREMA 1.8.

Nota: Si $\mu_j(R^n j) < \infty$ ($j=1, \dots, m$), podemos tomar $A = R^{n_1 + \dots + n_m}$ y obtener el mismo resultado.

Finalmente, ya que hay convergencia puntual para un conjunto denso (funciones escalera), el correspondiente resultado de convergencia puntual en casi todo punto resulta de la desigualdad maximal (1.14.4).

1.15) LEMMA: Sean k_j^j (x_j, y_j) ≥ 0 , $\alpha_j \in \Delta_j$ una familia

de funciones reales con las propiedades

$$\text{i) } \int k_{\alpha_j}^j (x_j, y_j) d\mu_j(y_j) < A \quad j=1, \dots, m.$$

donde μ_j es σ -aditiva, no-negativa y definida en la recta; la cota A no depende de los parámetros j, x_j, α_j (x_j varía sobre la recta).

ii) Para cada $(j, x_j, \alpha_j), k_{\alpha_j}^j (x_j, y_j)$ es no creciente en $y_j > x_j$ y no decreciente en $y_j < x_j$. Bajo las dos condiciones precedentes el operador

$$(1.15.1) \quad \tilde{f}(x) = \sup_{\alpha \in \Delta} \left| \int_{\mathbb{R}^m} \left(\prod_{j=1}^m k_{\alpha_j}^j (x_j, y_j) \right) f(y) d\mu_j(y) \right|$$

verifica todas las desigualdades probadas para \bar{f} (con otras constantes); $\Delta = \Delta_1 \times \dots \times \Delta_m; d\mu = d\mu_1 \dots d\mu_m$

Demonstración: Probaremos solamente que $\tilde{f} \leq \bar{f}$ para $f \geq 0$. (\bar{f} denota como siempre el operador maximal de la derivación fuerte).

Fijados $\varepsilon > 0, \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$ y $x = (x_1, \dots, x_m)$ podemos encontrar una función auxiliar $k'(y_1, \dots, y_m) \geq 0$ con las siguientes propiedades

$$\text{i) } k'(y_1, \dots, y_m) = \sum_{n_1, \dots, n_m} c_{n_1 \dots n_m} \varphi_{n_1}(y_1) \dots \varphi_{n_m}(y_m)$$

donde $\varphi_{n_j}(y_j)$ son funciones características de intervalos 1-dimensionales centrados en el punto x_j .

$$\text{ii}) \quad k^*(y_1, \dots, y_m) \geq \prod_{j=1}^m k_{\alpha_j}^{(j)}(x_j, y_j)$$

$$\begin{aligned} \text{iii}) \quad \int_{R^m} k^*(y_1, \dots, y_m) d\mu &\leq \varepsilon + \\ &+ \int_{R^m} \left(\prod_{j=1}^m k_{\alpha_j}^{(j)}(x_j, y_j) \right) d\mu(y) \leq A^m + \varepsilon. \end{aligned}$$

Un rápido examen sobre la forma de las $k_{\alpha_j}^{(j)}(x_j, y_j)$ muestra la existencia de la función $k^*(y_1, \dots, y_m)$.

Entonces tenemos

$$\begin{aligned} (1.15.2) \quad \int_{R^m} \left(\prod_{j=1}^m k_{\alpha_j}^{(j)}(x_j, y_j) \right) f(y) d\mu(y) &\leq \int_{R^m} k^*(y) f(y) d\mu(y) \\ &= \sum_{n_1 \dots n_m} c_{n_1 \dots n_m} \int_{I_{n_1} \times \dots \times I_{n_m}} f(y) d\mu = \\ &= \sum_{n_1 \dots n_m} c_{n_1 \dots n_m} \mu_1(I_{n_1}) \dots \mu_m(I_{n_m}) \cdot \\ &\cdot \left[\mu_1(I_{n_1}) \dots \mu_m(I_{n_m}) \right]^{-1} \int_{I_{n_1} \times \dots \times I_{n_m}} f d\mu \leq \\ &\leq \left(\int_{R^m} k^*(y) d\mu(y) \right) \bar{f}(x) \leq A^m + \varepsilon. \end{aligned}$$

Desde que $\varepsilon > 0$ es arbitrario se tiene

$$(1.15.3) \quad \int_{R^m} \left(\prod_{j=1}^m k_{\alpha_j}^{(j)}(x_j, y_j) \right) f(y) d\mu(y) \leq A^m \bar{f}(x)$$

Esta última cota no depende de α , por tanto

$$(1.15.4) \quad f^*(x) \leq A^m \bar{f}(x)$$

como queríamos probar.

PARTE II-LA TRANSFORMACIÓN MÚLTIPLE DE WEIERSTRASS Y

SUMABILIDAD ABEL DE LA SERIE MÚLTIPLE DE HERMITE.

2.1) Sea μ una medida elemental definida sobre \mathbb{R}^m , w su variación, la cual está bien definida sobre los elementales de \mathbb{R}^m ; entonces si

$$\int_{\mathbb{R}^m} \left| \exp \left\{ - \sum_{j=1}^m (z_j - t_j)^2 \right\} \right| dw < \infty$$

para todo $z = (z_1, \dots, z_m) \in \mathbb{C}^m$, definiremos la transformación múltiple de Weierstrass $I_\mu(z)$ de la siguiente forma

$$I_\mu(z) = \pi^{-m/2} \int_{\mathbb{R}^m} \exp \left\{ - \sum_{j=1}^m (z_j - t_j)^2 \right\} d\mu$$

2.2) Denotaremos por $H_n^*(x)$, $n = (n_1, \dots, n_m)$, el conjunto de funciones ortonormales en $L_G^2(\mathbb{R}^m)$ definidas de la siguiente manera:

$$H_n^*(x) = \pi^{-m/4} \prod_{j=1}^m 2^{-n_j/2} (n_j!)^{-1/2} H_{n_j}(x_j)$$

donde

$$H_{n_j}(x_j) = \exp(x_j^2) \frac{d^{n_j}}{dx_j^{n_j}} \exp[-x_j^2]$$

es el n_j -ésimo polinomio de Hermite en la variable x_j .

2.3) De una fórmula debida a Mehler (ver [3], pág. 439) se tiene

$$\sum_n r^n H_n^*(x) H_n^*(y) = \sum_{n_1 \dots n_m} r_1^{n_1} \dots r_m^{n_m} \cdot \pi^{-m/2} \cdot$$

$$2^{-n_1} (n_1!)^{-1} \dots 2^{-n_m} (n_m!)^{-1} H_{n_1}(x_1) \dots H_{n_m}(x_m) \cdot$$

$$\begin{aligned} & \cdot H_{n_1}(y_1) \dots H_{n_m}(y_m) = \\ & = \pi^{-m/2} \prod_{j=1}^m (1-r_j^2)^{-1/2} \exp \left\{ - \sum_{j=1}^m \frac{r_j^2(x_j^2+y_j^2)-2r_j x_j y_j}{1-r_j^2} \right\} \end{aligned}$$

para $0 < r_j < 1$.

Llamaremos al último miembro de la desigualdad "Núcleo Singular Múltiple de Fourier-Hermite" y lo denotaremos

$$K^*(r, x, y) = \prod_{j=1}^m K_j(r_j, x_j, y_j)$$

donde los K_j son núcleos simples.

2.4) Si $f \in L_G^p(\mathbb{R}^m)$, $p > 1$, sus coeficientes de Fourier-Hermite están bien definidos; en efecto

$$(2.4.1) \quad c_n = \int_{\mathbb{R}^m} f H_n^*(x) \exp(-|x|^2) dx$$

y

$$|c_n| = \left| \int_{\mathbb{R}^m} f H_n^*(x) \exp(-|x|^2) dx \right| \leq \|f\|_{p, G} \cdot \|H_n\|_{p', G} < \infty$$

donde $(1/p) + (1/p') = 1$.

$$2.5) \text{ Si } f \sim \sum_n c_n H_n^*(x) \text{ y si } \sum_n r^n |c_n| H_n^*(x)$$

es absolutamente convergente para $0 < r_j < 1, j=1, \dots, m$, entonces llamaremos Suma Abel de $\sum c_n H_n^*(x)$ al límite

$$\lim_{(r_1, \dots, r_m) \rightarrow (1, \dots, 1)} \sum r^n c_n H_n^*(x)$$

$$0 < r_j < 1, j=1, \dots, m.$$

2.6) El conjunto $\{H_n^*(x)\}$ no es un conjunto de funciones acotadas como en el caso de las funciones trigonométricas; sin embargo, ellas están uniformemente acotadas sobre cada compacto de R^m (ver [3], pág. 436) y se tienen las siguientes cotas

$$(2.6.1) \quad |H_{n_j}(x_j)| \leq k \cdot 2^{nj/2} (n_j!)^{1/2} \exp(x_j^2/2)$$

donde la constante $k > 0$ no depende del par (n_j, x_j) ; en consecuencia se tiene

$$(2.6.2) \quad |H_n^*(x)| \leq k^m \pi^{-m/4} \exp(|x|^2/2)$$

2.7) Lema: Si $f \in L_G^p(R^m), p > 1$, entonces I_f es una función analítica de (z_1, \dots, z_m) en todo el m -plano complejo C^m . Si μ pertenece a la clase J_γ , $\gamma \neq 1$, se tienen las mismas conclusiones.

Demostración: Si $f \in L_G^p, p > 1$, mostraremos que $f \in J_\gamma$ para algún $\gamma \neq 1$. En efecto, usando la desigualdad de Hölder se tiene

$$(2.7.1) \quad \int_{\mathbb{R}^m} |f| \exp[-(1-\varepsilon)|t|^2] dt \leq \\ \leq \|f\|_{p,G} \left(\int_{\mathbb{R}^m} \exp(\varepsilon p' |t|^2) \exp(-|t|^2) dt \right)^{1/p'}$$

donde $(1/p) + (1/p') = 1$ y $\varepsilon > 0$ es sometido a la condición $\varepsilon p' < 1$.

Ahora sea $\mu \geq 0$ una medida elemental y observemos que

$$(2.7.2) \quad \left| \int_{\mathbb{R}^m} \exp \left\{ - \sum_1^m (z_j - t_j)^2 \right\} d\mu \right| \leq \\ \leq \left| \exp \left\{ - \sum_1^m z_j^2 \right\} \right| \int_{\mathbb{R}^m} \exp \left\{ 2 \sum_1^m |z_j| |t_j| \right\} \exp \{-|t|^2\} d\mu = \\ = \left| \exp \left\{ - \sum_1^m z_j^2 \right\} \right| \int_{\mathbb{R}^m} \exp \left\{ 2 \sum_1^m |z_j| |t_j| \right\} \exp \{-(1-\gamma) |t|^2\} \\ \cdot \exp \{-\gamma |t|^2\} d\mu .$$

Teniendo en cuenta que

$$\sup_{t \in \mathbb{R}^m} \left[\exp \left\{ 2 \sum_1^m |z_j| |t_j| \right\} \exp \{-(1-\gamma) |t|^2\} \right] < \\ < A(\gamma, z_1, \dots, z_m)$$

para todo valor finito de $z = (z_1, \dots, z_m)$ vale

$$(2.7.3) \quad \int_{\mathbb{R}^m} \exp \left\{ 2 \sum_1^m |z_j| |t_j| \right\} \exp \{-|t|^2\} d\mu = \\ = \int_{\mathbb{R}^m} \exp \left\{ 2 \sum_1^m |z_j| |t_j| \right\} \exp \{-(1-\gamma) |t|^2\} \exp(-\gamma |t|^2) d\mu \leq \\ \leq A(\gamma, z_1, \dots, z_m) \int_{\mathbb{R}^m} \exp(-\gamma |t|^2) d\mu < \infty$$

Finalmente, del Teorema de Beppo Levi se tiene

$$(2.7.4) \quad \int_{\mathbb{R}^m} \exp \left\{ 2 \sum_1^m |z_j| |t_j| \right\} \exp(-|t|^2) d\mu = \\ = \sum_{n_1 \dots n_m} 2^{n_1 + \dots + n_m} (n_1! \dots n_m!)^{-1} |z_1|^{n_1} \dots |z_m|^{n_m} \cdot \\ \cdot \int_{\mathbb{R}^m} |t_1|^{n_1} \dots |t_m|^{n_m} \exp(-|t|^2) d\mu$$

La analiticidad de

$$\int_{\mathbb{R}^m} \exp \left\{ 2 \sum_1^m z_j t_j \right\} \exp(-|t|^2) d\mu$$

en todo \mathbb{C}^m sigue dado que su serie formal de Mac Laurin es mayorada por las series del segundo miembro de (2.7.4); esto completa la demostración.

Si se tiene una medida signada μ , haciendo la descomposición clásica $\mu = \mu_1 - \mu_2$, $\mu_j \geq 0$, $j=1,2$, se tendrán las mismas conclusiones.

Si se hace una restricción a las variables $z_j = it_j$, donde los t_j son reales, podemos definir la Transformación de Weierstrass de funciones de $L_G^1(\mathbb{R}^m)$ y también para medidas pertenecientes a la clase $J_{\gamma}(\mathbb{R}^m)$, $\gamma = 1$, como funciones de las variables t_j .

2.8) Sean y_j, w_j variables reales, $j=1, \dots, m$, los $s_j, 0 < s_j < 1$, parámetros reales; $I_{\mu}(z)$ denota la Transformada de Weierstrass de μ . La integral

$$(2.8.1) \pi^{-m/2} \int_{\mathbb{R}^m} \exp \left\{ - \sum_1^m (iw_j + y_j)^2 \right\} I_{\mu}(is_1 y_1, \dots, is_m y_m) dy$$

va a dar una fórmula de inversión para la Transformación de Weierstrass cuando $s_j \rightarrow 1$. Conociendo el resultado 1-dimensional (ver [3], pág. 453 y [4]), la validez de la fórmula de inversión (2.8.1) se mantiene para un subconjunto denso de $L^p_G(\mathbb{R}^m)$, $p \geq 1$; por ejemplo el conjunto formado por las funciones de la forma

$$\sum_{n_1 \dots n_m} c_{n_1 \dots n_m} \varphi_{n_1}(x_1) \dots \varphi_{n_m}(x_m)$$

donde la suma tiene un número finito de términos, las $c_{n_1 \dots n_m}$ son constantes y las $\varphi_{n_j}(x_j)$ son funciones indefinidamente diferenciables y a soporte compacto (funciones definidas sobre la recta).

Un cálculo fácil como en el caso 1-dimensional ([3], pág. 453) da

$$(2.8.2) \pi^{-m/2} \int_{\mathbb{R}^m} \exp \left\{ - \sum_1^m (iw_j + y_j)^2 \right\} I_\mu(is_1 y_1, \dots, is_m y_m) dy = \\ = \int_{\mathbb{R}^m} K^*(s, w, y) \exp(-|y|^2) d\mu$$

$K^*(s, w, y)$ denota el núcleo múltiple de Abel-Hermite.

2.9) LEMMA: Sea $k(r, x, y)$ el núcleo 1-dimensional de Abel-Hermite, entonces existe un núcleo auxiliar $h(r, x, y)$ con las siguientes propiedades

- i) $h(r, x, y) \geq k(r, x, y)$, $0 < r < 1$, $-\infty < x < \infty$,
 $-\infty < y < \infty$

ii) $\int_{-\infty}^{\infty} h(r, x, y) \exp(-y^2) dy < A$, donde A no depende del par (r, x) .

iii) Para cada par (r, x) , $h(r, x, y)$ es no creciente si $y > x$ y no decreciente si $y < x$.

Demostración: Fijemos el par (x, r) en $k(r, x, y)$. De la simetría de $k(r, x, y)$ podemos suponer que $x > 0$.

Diferenciando parcialmente respecto de y se tiene

$$(2.9.1) \quad \frac{\partial k}{\partial y} = -(1-r^2)^{-1} (2r^2y - 2rx) k(r, x, y)$$

En consecuencia

$$\operatorname{sign} \frac{\partial k}{\partial y} = \operatorname{sign} (x/r) - y$$

Entonces $k(r, x, y)$ es estrictamente decreciente para $y > x/r$ y estrictamente creciente para $y < x/r$.

Definiremos $h(r, x, y)$ de la siguiente manera

$$(2.9.2) \quad h(r, x, y) = k(r, x, y) = \pi^{-1/2} (1-r^2)^{-1/2} \cdot$$

$$\cdot \exp \left\{ - [r^2(x^2+y^2) - 2rxy] \cdot (1-r^2)^{-1} \right\}$$

si $y \notin (x, x/r)$;

$$h(r, x, y) = k(r, x, x/r) = \pi^{-1/2} (1-r^2)^{-1/2} e^{x^2}$$

si $y \in (x, x/r)$.

Las condiciones i) y iii) de la tesis son satisfechas por el núcleo $k(r, x, y)$; solamente queda por probar que la condición ii) es también verificada.

Desde que

$$\int_{-\infty}^{\infty} k(r, x, y) \exp(-y^2) dy = 1 \quad ; -\infty < x < \infty, 0 < r < 1$$

debemos probar solamente la acotación uniforme de

$$\pi^{-1/2} (1-r^2)^{-1/2} e^{x^2} \int_x^{x/r} e^{-y^2} dy$$

Fijado $\delta > 0$, tenemos tres casos para $x > 0$

1º - $0 < r \leq \delta$

$$\int_x^{x/r} e^{-y^2} dy < \int_x^{+\infty} e^{-y^2} dy < \sum_{n=0}^{\infty} e^{-(x+n)^2} < e^{-x^2} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n^2}$$

En consecuencia se tiene

$$(2.9.3) \pi^{-1/2} (1-r^2)^{-1/2} e^{x^2} \int_x^{x/r} e^{-y^2} dy \leq \\ \leq \pi^{-1/2} (1-\delta^2)^{-1/2} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n^2}$$

2º - $\delta < r < 1$ y $x(1-r)^{1/2} \leq 1$.

$$(2.9.4) \pi^{-1/2} (1-r^2)^{-1/2} e^{x^2} \int_x^{x/r} e^{-y^2} dy \leq \\ \leq \pi^{-1/2} (1+r)^{-1/2} (1-r)^{-1/2} \int_x^{x/r} dy =$$

$$= \pi^{-1/2} (1+r)^{-1/2} (1-r)^{-1/2} (x/r) (1-r) \leq 1/\left[\delta \pi^{1/2}\right]$$

$$3^o - \textcircled{2} < r < 1 \quad y \quad x(1-r)^{1/2} > 1.$$

En este caso es $x(1-r) > (1-r)^{1/2}$ y por consiguiente $x(1-r)/r > (1-r)^{1/2}$, dando que $0 < r < 1$.

Ahora

$$(2.9.5) \quad \pi^{-1/2} (1+r)^{-1/2} (1-r)^{-1/2} e^{x^2} \int_x^{x/r} e^{-y^2} dy = \\ = \pi^{-1/2} (1+r)^{-1/2} \left[(1-r)^{-1/2} e^{x^2} \int_x^{x+\sqrt{1-r}} e^{-y^2} dy + \right. \\ \left. + (1-r)^{-1/2} e^{x^2} \int_{x+\sqrt{1-r}}^{x/r} e^{-y^2} dy \right]$$

y se tiene

$$(2.9.6) \quad (1-r)^{-1/2} e^{x^2} \int_x^{x+\sqrt{1-r}} e^{-y^2} dy < 1.$$

Por otra parte

$$(2.9.7) \quad (1-r)^{-1/2} e^{x^2} \int_{x+\sqrt{1-r}}^{x/r} e^{-y^2} dy \leq \\ \leq (1-r)^{-1/2} e^{x^2} \exp\left\{-[x+(1-r)^{1/2}]^2\right\} \left[(x/r) - (x+(1-r)^{1/2})\right] \leq \\ \leq (1-r)^{-1/2} \exp\left\{-(1-r)\right\} \exp\left\{-2x(1-r)^{1/2}\right\} \left[(x/r) - (x+(1-r)^{1/2})\right] \leq \\ \leq (1-r)^{-1/2} \exp\left\{-2x(1-r)^{1/2}\right\} (x/r) (1-r) \leq \\ \leq (1/2 \textcircled{2}) \sup_u e^{-|u|} |u|.$$

En consecuencia, de (2.9.5), (2.9.6) y (2.9.7) se tiene

$$(2.9.8) \quad \pi^{-1/2} (1-r^2)^{-1/2} \left(\int_x^{x/r} e^{-y^2} dy \right) e^{x^2} \leqslant \\ \leqslant \pi^{-1/2} (1 + (1/2) \sup_u e^{-|u|} |u|)$$

Para $x=0$, tenemos $h(r,0,y) = k(r,0,y)$, pero $k(r,0,y)$ tiene la forma requerida; entonces este caso no ofrece dificultad. Finalmente, combinando las acotaciones (2.9.3), (2.9.4) y (2.9.8) se tiene la parte ii) de la tesis.

2.10) Si llamamos

$$f^*(x) = \sup_{r_1, \dots, r_m} \left| \int_{\mathbb{R}^m} K^*(r, x, y) f(y) e^{-|y|^2} dy \right|$$

el operador $(\)^*$ tiene las mismas propiedades que el correspondiente de la diferenciación fuerte; más precisamente

2.11) Teorema: Si $I_\mu(z)$ es una Transformada de Weierstrass, posiblemente definida sólo en $z_j = iy_j, j=1, \dots, m$, donde los y_j son reales, y llamamos $f(s, x)$ a $\int_{\mathbb{R}^m} K^*(s, x, y) \cdot f(y) \exp(-|y|^2) dy$ tenemos las siguientes cotas para el operador $f^*(x)$

$$(2.11.1) \quad f^*(x) = \sup_{s_1, \dots, s_m} \left| \pi^{-m/2} \int_{\mathbb{R}^m} \exp \left\{ - \sum_1^m (ix_j + y_j)^2 \right\} \cdot I_f(is_1 y_1, \dots, is_m y_m) dy \right| = \\ = \sup_{s_1, \dots, s_m} \left| \int_{\mathbb{R}^m} K^*(s, x, y) f(y) e^{-|y|^2} dy \right|$$

i) Si $n > 1$ y $f \in L^p_G(\mathbb{R}^m)$ se tiene

$$a) \|f^*\|_{p,G} \leq c(p) \|f\|_{p,G}$$

$$b) \|f(s,x) - f(x)\|_{p,G} \rightarrow 0 \text{ con } (s_1, \dots, s_m) \rightarrow (1, \dots, 1)$$

ii) Si $|f|(\log^+|f|)^m \in L^1_G(\mathbb{R}^m)$ se tiene

$$a) \int_{\mathbb{R}^m} |f^*(x)| e^{-|x|^2} dx \leq A_m + B_m \int_{\mathbb{R}^m} |f|(\log^+|f|)^m e^{-|x|^2} dx$$

$$b) \|f(s,x) - f(x)\|_{1,G} \rightarrow 0 \text{ con } (s_1, \dots, s_m) \rightarrow (1, \dots, 1)$$

iii) Si $|f|(\log^+|f|)^{m-1} \in L^1_G(\mathbb{R}^m)$ se tiene, para $0 < \alpha < 1$

$$a) \int_{\mathbb{R}^m} (f^*)^\alpha e^{-|x|^2} dx \leq C_{m,\alpha} + D_{m,\alpha} \int_{\mathbb{R}^m} |f|(\log^+|f|)^{m-1} e^{-|x|^2} dx$$

$$b) \int_{\mathbb{R}^m} |f(s,x) - f(x)|^\alpha e^{-|x|^2} dx \rightarrow 0 \text{ con } (s_1, \dots, s_m) \rightarrow$$

$$\rightarrow (1, \dots, 1).$$

iv) En los casos i), ii) y iii) $f(s,x)$ también converge puntualmente en casi todo punto; y si la condición iii) es verificada sólo localmente, se tiene convergencia puntual en casi todo punto en ese entorno y ello es el mejor resultado posible.

v) Si $m=1$, se tiene para una medida μ no-negativa y σ -aditiva

$$a) G\{ \beta(\mu^*, \lambda) \} < (c/\lambda) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|^2} d\mu$$

b) $\mu(s, x)$ converge en casi todo punto para $s \rightarrow 1$

$$c) \int_{-\infty}^{\infty} (\mu^*(x))^{\alpha} e^{-|x|^2} dx \leq 0_{\alpha} + 0'_{\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|^2} d\mu$$

Demostración: Del LEMA 2.9 se tiene

$$(2.11.2) K^*(s, x, y) \leq \prod_{j=1}^m h(s_j, x_j, y_j) = h^*(s, x, y)$$

Por otra parte, $h^*(s, x, y)$ es un caso particular del LEMA 1.15 tomando " $d\mu_j = \exp(-x_j^2) dx_j$ "; entonces las partes a) de i), ii) y iii) resultan probadas.

Desde que hay convergencia puntual para un subconjunto denso en $L_G^p(R^m)$, $p \geq 1$, usando la desigualdad maximal iii)a), se tendrá convergencia puntual en casi todo punto en la clase $L_G \log^+ L_G$ y también en las clases L_G^p , $p > 1$, y $L_G (\log^+ L_G)^s$ con $s \geq m-1$.

Las partes b) de i), ii) y iii) siguen del hecho de que hay convergencia puntual y como consecuencia de las desigualdades maximales también convergencia dominada.

Si f pertenece localmente a $L_G (\log^+ L_G)^{m-1}$, el operador maximal de diferenciación fuerte se comporta del mismo modo que el clásico de Jessen-Marcinkiewicz-Zygmund que muestra que iv) es el mejor resultado posible.

Finalmente, si consideramos el LEMA 1.15 con $m=1$, vemos que las cotas de este caso son similares a las del LEMA 1.10; entonces la parte v) está probada.

2.12) TEOREMA: Las siguientes dos condiciones son equivalentes:

i) La función $I(z_1, \dots, z_m)$, definida en todo el m -plano complejo C^m , es una Transformación de Weierstrass de una función de clase $L_G^p(R^m)$, $p > 1$.

ii) La función $I(z_1, \dots, z_m)$ es analítica en todo C^m y tiene las propiedades

$$a) \int_{R^m} |I(is_1y_1, \dots, is_my_m)| e^{-|y|^2} dy < \infty$$

$$\text{si } 0 < s_j < 1 \quad (j=1, \dots, m)$$

$$b) \int_{R^m} \left| \int_{R^m} \exp \left\{ - \sum_1^m (iw_j + y_j)^2 \right\} I(is_1y_1, \dots, is_my_m) dy \right|^p e^{-|w|^2} dw < \infty$$

$$< A$$

Donde los s_j, w_j, y_j son todos reales y A no depende de los s_j .

Demostración: Del LEMÁ 2.7 y parte i)a) del TEOREMA 2.11 se sigue que i) implica ii).

Sea ahora $I(z_1, \dots, z_m)$ en las condiciones de ii) y por simplicidad pongamos

$$(2.12.1) f(s, w) = \pi^{-m/2} \int_{R^m} \exp \left\{ - \sum_1^m (iw_j + y_j)^2 \right\} \cdot I(is_1y_1, \dots, is_my_m) dy$$

De la condición b) se tiene

$$(2.12.2) \quad \int_{\mathbb{R}^m} |f(s, w)|^p e^{-|w|^2} dw < A$$

Ahora, usando la compactitud débil de las esferas en $L_G^{p'}(\mathbb{R}^m)$ podemos seleccionar una sucesión $f(s_n, w), s_n = (s_1^{(n)}, \dots, s_m^{(n)})$ satisfaciendo las siguientes condiciones

$$(1) \int_{\mathbb{R}^m} f(s_n, w) \overline{g(w)} e^{-|w|^2} dw \rightarrow$$

$$\rightarrow \int_{\mathbb{R}^m} f(w) \overline{g(w)} e^{-|w|^2} dw$$

para $s_n \rightarrow (1, \dots, 1), 0 < s_j^{(n)} < 1, j=1, \dots, m$

y para toda función g perteneciente a $L_G^{p'}(\mathbb{R}^m)$,

con $(1/p) + (1/p') = 1$.

$$(2.12.3)$$

$$(?) \|f(w)\|_{p, G} \leq A^{1/p}$$

Desarrollando la fórmula (2.12.1) para s_n , se obtiene

$$(2.12.4) \quad f(s_n, w) = \pi^{-m/2} \exp \left\{ - \sum_j^m w_j^2 \right\} .$$

$$\cdot \int_{\mathbb{R}^m} e^{-2i\langle w, y \rangle} e^{-|y|^2} I(is_n y) dy$$

Por otra parte se tiene

$$(2.12.5) \quad \pi^{-m/2} \int_{\mathbb{R}^m} \exp \left\{ - \sum_j^m (iy_j - w_j)^2 \right\} f(s_n, w) dw =$$

$$= \pi^{-m/2} \exp \left(\sum_j^m y_j^2 \right) \int_{\mathbb{R}^m} e^{2i\langle y, w \rangle} f(s_n, w) e^{-|w|^2} dw$$

En consecuencia, de (2.12.4), 2.12.5) y de la unicidad de la Transformación de Fourier se obtiene

$$(2.12.6) \quad I(i s_n y) = \pi^{-m/2} \int_{\mathbb{R}^m} \exp \left\{ - \sum_1^m (iy_j - w_j)^2 \right\} f(s_n, w) dw$$

Ahora haciendo tender $s_n \rightarrow (1, \dots, 1)$ en (2.12.6) y usando el hecho que $\exp(-2i\langle y, w \rangle)$ pertenece a $L_G^p(\mathbb{R}^m)$ se tiene

$$(2.12.7) \quad I(iy_1, \dots, iy_m) = \pi^{-m/2} \int_{\mathbb{R}^m} \exp \left\{ - \sum_1^m (iy_j - w_j)^2 \right\} f(w) dw$$

De acuerdo al Lema 2.7 el segundo miembro de (2.12.7) es una función analítica en todo el m -plano \mathbb{C}^m ; y desde que I es también analítica en todo \mathbb{C}^m y ambas son iguales sobre las líneas $iy_j, j=1, \dots, m$, ellas deben ser idénticas en todo \mathbb{C}^m . Esto concluye la demostración.

2.13) Pongamos

$$f(r, x) = \sum_n^1 r^n c_n H_n^*(x) , \quad 0 < r_j < 1 , \quad j=1, \dots, m,$$

donde los c_n son los coeficientes de Fourier-Hermite de f .

Llamaremos a $f(r, x)$ aproximante Abel de la serie de Fourier Hermite asociada a f .

Una serie de Fourier-Hermite de una función perteneciente a una clase $L_G^p(\mathbb{R}^m)$ está bien definida si $p > 1$; sin embargo, si $1 < p < 2$ necesitamos condiciones auxiliares para asegurar la convergencia absoluta de sus aproximantes Abel (algunas de ellas son dadas en [3], pág. 450, en el caso 1-dimensional).

2.14) TÉCNICA: Los operadores

$$f(r, x) = \sum_{n_1, \dots, n_m} r^n c_n H_n^*(x)$$

y

$$f^*(x) = \sup_{r_1, \dots, r_m} |f(r, x)|, \quad 0 < r_j < 1, \quad j=1, \dots, m$$

verifican las siguientes propiedades

i) Si $f \in L_G^p(\mathbb{R}^m)$, $p \geq 2$, entonces

a) $\|f^*\|_{p,G} \leq C(p) \|f\|_{p,G}$

b) $\|f(r, x) - f(x)\|_{p,G} \rightarrow 0$ con $(r_1, \dots, r_m) \rightarrow (1, \dots, 1)$

c) $f(r, x) \rightarrow f(x)$ p.p.

ii) Si $f \in L_G^p(\mathbb{R}^m) \cap J_{1/2}(\mathbb{R}^m)$, $p > 1$, entonces se tienen las mismas conclusiones de i).iii) Si $\int_{\mathbb{R}^m} |f|(1+\log^+|f|)^m e^{-|x|^2} dx < \infty$ y también $f \in J_{1/2}(\mathbb{R}^m)$, entonces

a) $\int_{\mathbb{R}^m} f^* e^{-|x|^2} dx < A_m + B_m \int_{\mathbb{R}^m} |f|(1+\log^+|f|)^m e^{-|x|^2} dx$

b) $\|f(r, x) - f(x)\|_{1,G} \rightarrow 0$ con $(r_1, \dots, r_m) \rightarrow (1, \dots, 1)$

c) $f(r, x) \rightarrow f(x)$ en casi todo punto.

iv) Si $\int_{\mathbb{R}^m} |f|(1+\log^+|f|)^{m-1} e^{-|x|^2} dx < \infty$ y también $f \in J_{1/2}(\mathbb{R}^m)$, entonces para $0 < \alpha < 1$, se tiene

$$a) \int_{\mathbb{R}^m} (f^*)^\alpha e^{-|x|^2} dx < A_{m,\alpha} + B_{m,\alpha} \int_{\mathbb{R}^m} |f|(1+\log^+|f|)^{m-1} e^{-|x|^2} dx.$$

$$b) \int_{\mathbb{R}^m} |f(r,x) - f(x)|^\alpha e^{-|x|^2} dx \rightarrow 0 \quad \text{con } (r_1, \dots, r_m) \rightarrow \\ \rightarrow (1, \dots, 1)$$

$$c) f(r,x) \xrightarrow{\text{ }} f(x) \quad \text{en casi todo punto.}$$

v) Si f verifica localmente la condición

$$\int_A |f|(1+\log^+|f|)^{m-1} e^{-|x|^2} dx < \infty$$

y también $f \in J_{1/2}(\mathbb{R}^m)$, entonces en este caso se tiene convergencia en casi todo punto en el entorno de A .

Demostración: Será necesario probar la siguiente igualdad para los diferentes casos

$$(2.14.1) \quad \sum_n r^n c_n H_n^*(x) = \int_{\mathbb{R}^m} f(y) K^*(r,x,y) e^{-|y|^2} dy$$

Comenzaremos con el caso i).

Si elegimos una función f de la forma $\sum c_n H_n(x)$, donde la suma posee un número finito de términos, se tendrá

$$(2.14.2) \sum_{\{n_j < N_j\}}^1 r^n c_n H_n^*(x) = \sum_{\{n_j < N_j\}} r^n \left(\int_{R^m} f(y) H_n^*(y) dy \right).$$

$$\cdot e^{-|y|^2} dy) H_n^*(x) = \int_{R^m} f(y) \left\{ \sum_{\{n_j < N_j\}} r^n H_n^*(y) H_n^*(x) \right\} e^{-|y|^2} dy$$

Ahora si denotamos por M el conjunto de multiíndices para los cuales $c_n \neq 0$ y por M' el conjunto de multiíndices para los cuales $c_n = 0$, se tendrá

$$(2.14.3) \begin{aligned} & \int_{R^m} f(y) \left\{ \sum_n r^n H_n^*(y) H_n^*(x) \right\} e^{-|y|^2} dy = \\ &= \int_{R^m} f(y) \left\{ \sum_{n \in M} r^n H_n^*(y) H_n^*(x) \right\} e^{-|y|^2} dy + \\ &+ \int_{R^m} f(y) \left\{ \sum_{n \in M'} r^n H_n^*(y) H_n^*(x) \right\} e^{-|y|^2} dy = \\ &= \int_{R^m} f(y) \left\{ \sum_{n \in M} r^n H_n^*(x) H_n^*(y) \right\} e^{-|y|^2} dy \end{aligned}$$

de acuerdo al hecho de que para $0 < r_j < 1, j=1, \dots, m$, y fijado (x_1, \dots, x_m) :

(*) $\sum_{n \in M'} r^n H_n^*(x) H_n^*(y)$ pertenece a $L_G^2(R^m)$ como función de (y_1, \dots, y_m) .

Entonces de (2.14.3) y de la fórmula de Mehler (2.3) se tiene para toda función f de la forma $\sum_{\{n_j < N_j\}} c_n H_n^*(y)$ la identidad

$$(2.14.4) \sum_n r^n c_n H_n^*(x) = \int_{R^m} K^*(r, x, y) f(y) e^{-|y|^2} dy$$

Ahora, fijado $r, 0 < r_j < 1, j=1, \dots, m$, y $x=(x_1, \dots, x_m)$ la serie absolutamente convergente

$$(**) \quad \sum r^n c_n H_n^*(x) = \langle T, f \rangle$$

constituye un funcional lineal continuo sobre $L^2_G(\mathbb{R}^m)$, que tiene representación (2.14.4) para un subconjunto denso. Entonces, desde que $K^*(r, x, y)$ pertenece a $L^2_G(\mathbb{R}^m)$ para $x = (x_1, \dots, x_m)$ y $r = (r_1, \dots, r_m)$ fijos, $0 < r_j < 1$, $j=1, \dots, n$, como función de $y = (y_1, \dots, y_m)$, tendremos la misma representación para todo $L^p_G(\mathbb{R}^m)$ y en consecuencia para todo $L^p_G(\mathbb{R}^m)$ con $p \geq 2$.

Finalmente, si probamos (2.14.1) para funciones de la clase $J_{1/2}(\mathbb{R}^m)$, las partes ii), iii), iv) y v) quedarán probadas.

Usando el hecho que

$$|H_n^*(w)| \leq K e^{|w|^2/2}$$

las siguientes cotas darán el resultado deseado

$$\begin{aligned} (2.14.5) \quad & \int_{\mathbb{R}^m} \left\{ \sum_n |r^n H_n^*(x) H_n^*(y)| \right\} |f(y)| e^{-|y|^2} dy \leq \\ & \leq \int_{\mathbb{R}^m} K^2 \prod_{j=1}^m (1-r_j)^{-1} e^{|x|^2/2} e^{|y|^2/2} |f(y)| e^{-|y|^2} dy = \\ & = K^2 \prod_{j=1}^m (1-r_j)^{-1} e^{|x|^2/2} \int_{\mathbb{R}^m} |f(y)| e^{-|y|^2/2} dy < \infty \end{aligned}$$

(*) y (**) resultan de la cota $|H_n^*(w)| \leq K e^{|w|^2/2}$.

2.15) Ahora estudiaremos la fórmula de inversión de la Transformación de Weierstrass en el caso de medidas. Si μ es una medida elemental definida en \mathbb{R}^m y si w denota

su variación, entonces la condición

$$(2.15.1) \quad \left| \int_{\mathbb{R}^m} e^{-|x|^2} d\mu \right| \leq \int_{\mathbb{R}^m} e^{-|x|^2} dw < \infty$$

asume la existencia de la Transformación de Weierstrass sobre la línea s iy_j (j=1,...,m). De acuerdo a (2.8.2), necesitaremos estudiar la integral

$$(2.15.2) \quad \pi^{-m/2} \int_{\mathbb{R}^m} \exp \left\{ - \sum_1^m (iw_j + y_j)^2 \right\}.$$

$$\begin{aligned} \cdot I_\mu(iw_1, w_1, \dots, iw_m, w_m) dy &= \int_{\mathbb{R}^m} K^*(s, w, y) e^{-|y|^2} d\mu = \\ &= \mu(s, w) \end{aligned}$$

donde $0 < s_j < 1$, j=1,...,m y las variables y_j, w_j son reales.

2.16) Muestra que $\mu(s, w)$ converge restrictivamente cuando $(s_1, \dots, s_m) \rightarrow (1, \dots, 1)$, si el límite

$$\lim_{(s_1, \dots, s_m) \rightarrow (1, \dots, 1)} \mu(s, w)$$

existe, cumplido a las condiciones

$$\theta^{-1} < (1-s_i)/(1-s_j) < \theta$$

para algún $\theta > 0$ y para todo par (i, j).

2.17) Lema: Si $|x_j| \leq b$, (j=1,...,m), $b > 1$, $N > 4b^2$ y

$1/2 < r_j < 1$, entonces

$$K^*(r_j, x_j, t_j) e^{-|t_j|^2} \leq \pi^{-n/2} e^{-|t_j|^2} \prod_{j=1}^m \{ A(M, b) (1-r_j^2)^{-1/2} \}.$$

$$\cdot \exp \left[-\left((t_j - x_j) / (1-r_j^2)^{1/2} \right)^2 \right] (1-r_j^2)^{-1/2} .$$

$$\cdot \exp \left[-a(M, b) \left((t_j - x_j) / (1-r_j^2)^{1/2} \right)^2 \right] \} .$$

Demostración: Será necesario probar solamente

$$(2.17.1) \quad K(r_j, x_j, t_j) \exp(-t_j^2) \leq$$

$$\leq \pi^{-1/2} (1-r_j^2)^{-1/2} A(M, b) \exp(-t_j^2) \exp \left[-\left((t_j - x_j) / (1-r_j^2)^{1/2} \right)^2 + \right. \\ \left. + \pi^{-1/2} (1-r_j^2)^{-1/2} \exp(-t_j^2) \exp \left\{ -a(M, b) \left[(t_j - x_j) / (1-r_j^2)^{1/2} \right]^2 \right\} \right]$$

Si $|t_j| \leq$, se tiene

$$(2.17.2) \quad K(r_j, x_j, t_j) \exp(-t_j^2) =$$

$$= [\pi (1-r_j^2)]^{-1/2} \exp \left[-\left((t_j - x_j) / (1-r_j^2)^{1/2} \right)^2 \right] =$$

$$= [\pi (1-r_j^2)]^{-1/2} \exp \left[-\left[(t_j - x_j + x_j (1-r_j)) / (1-r_j^2)^{1/2} \right]^2 \right] \leq$$

$$\leq [\pi (1-r_j^2)]^{-1/2} \exp \left[-\left((t_j - x_j) / (1-r_j^2)^{1/2} \right)^2 \right] .$$

$$\cdot \exp \left[2 |t_j - x_j| |x_j| / (1+r_j) \right] \exp \left[-x_j^2 (1-r_j)^2 / (1-r_j^2) \right] \leq$$

$$\leq [\pi (1-r_j^2)]^{-1/2} \exp(4Mb) \exp \left\{ - \left[(t_j - x_j) / (1-r_j^2)^{1/2} \right]^2 \right\} \exp(t_j^2) \exp(-t_j^2)$$

$$\leq [\pi(1-r_j^2)]^{-1/2} \exp[-\frac{[(t_j-x_j)/(1-r_j^2)^{1/2}]^2}{2} \exp(-t_j^2)].$$

Si $|t_j| > n$, se tiene

$$(2.17.3) [\pi(1-r_j^2)]^{-1/2} \exp[-\frac{[(t_j-r_jx_j)/(1-r_j^2)^{1/2}]^2}{2} = \\ = [\pi(1-r_j^2)]^{-1/2} \exp(-t_j^2) \exp\left[\frac{(-r_j^2x_j^2 - r_j^2t_j^2 + 2r_jx_jt_j)/(1-r_j^2)}{2}\right] \\ \leq [\pi(1-r_j^2)]^{-1/2} \exp(-t_j^2) \exp\left[-\frac{r_j^2/(1-r_j^2)}{2}\right] \exp\left[\frac{2r_j|x_j||t_j|/(1-r_j^2)}{2}\right]$$

Desde que $|t_j| > n$, $|t_j| > n > 4b^2 > 4b|x_j|$; resulta el último término de (2.17.3) dominado por

$$(2.17.4) [\pi(1-r_j^2)]^{-1/2} \exp(-t_j^2) \exp\left[-\left(r_j t_j^2 - (2/4b)t_j^2\right)\right] \\ \cdot \left[r_j/(1-r_j^2)\right] \leq \\ \leq [\pi(1-r_j^2)]^{-1/2} \exp(-t_j^2) \exp\left\{-\left[(b-1)/4b\right] \cdot \frac{t_j^2}{1-r_j^2}\right\} = \\ = [\pi(1-r_j^2)]^{-1/2} \exp(-t_j^2) \exp\left\{-\left[(b-1)/4b\right] \left[t_j/(1-r_j^2)^{1/2}\right]^2\right\}$$

Ahora, teniendo en cuenta $|t_j| > n$ y $|x_j| < b < n$, se tiene para $|t_j - x_j| < \alpha_0 |t_j|$ para algún $\alpha_0 > 0$, y en consecuencia

$$(2.17.5) [\pi(1-r_j^2)]^{-1/2} \exp(-t_j^2) \exp\left\{-\left[(b-1)/4b\right] \left[t_j/(1-r_j^2)^{1/2}\right]^2\right\} \leq \\ \leq [\pi(1-r_j^2)]^{-1/2} \exp(-t_j^2) \exp\left\{-\left[(b-1)/4\alpha_0 b\right] \left[(t_j - x_j)/(1-r_j^2)^{1/2}\right]^2\right\}$$

Lo que termina la construcción.

2.18) Teorema: Si μ es una medida elemental tal que

$$\int_{\mathbb{R}^m} e^{-|t|^2} dw < \infty$$

donde dw denota la variación de μ , entonces

$$\text{i)} \quad \mu(s, x) = \pi^{-m/2} \int_{\mathbb{R}^m} \exp \left\{ - \sum_1^m (ix_j + y_j)^2 \right\} I_{\mu(is_1 y_1, \dots, is_m y_m)} dy$$

converge restrictivamente en casi todo punto a la función de densidad de μ , y, más aún, si

$$\mu^*(x) = \sup_{s_1, \dots, s_m} |\mu(s, x)|$$

con $0 < s_j < 1, \theta^{-1} < (1-s_i)/(1-s_j) < \theta$, ($i, j = 1, \dots, m$)

se tiene

$$\text{ii)} \quad |s(\mu^*, \lambda) \cap Q_b| \leq (\lambda b, \theta/\lambda) \int_{\mathbb{R}^m} e^{-|t|^2} dw$$

donde Q_b denota un cubo centrado en el origen y con aristas de longitud $b > 1$.

iii) Si μ es una medida elemental perteneciente a $J_{-1/2}(\mathbb{R}^m)$, entonces su serie de Fourier-Hermite converge restrictivamente en casi todo punto a la función de densidad asociada a μ y más aún, el operador maximal de las aproximantes Abel verifica el mismo tipo de desigualdad ii) pero sin el factor exponencial.

Demostración: Si $|x_j| < b$, $|\mu(s, x)|$ está dominado por

$$(2.18.1) \quad \int_{\mathbb{R}^m} \prod_{j=1}^m \left\{ A(\mathbb{N}, b) (1-r_j^2)^{-1/2} \right\}$$

$$\cdot \exp \left[\frac{(x_j - y_j)^2}{(1-r_j^2)^{1/2}} \right]^2 + (1-r_j^2)^{-1/2} .$$

$$\cdot \exp \left(-a(\mathbb{N}, b) \left[\frac{(x_j - y_j)^2}{(1-r_j^2)^{1/2}} \right]^2 \right) \exp(-|y|^2) dw$$

Esta cota sigue del LEMÁ 2.17.

Por otra parte, del LEMÁ 1.5, resulta ii).

La convergencia puntual sigue de la desigualdad maximal ii) y de una aplicación del LEMÁ 1.15 al segundo miembro de (2.18.1), y finalmente teniendo en cuenta el hecho de que hay convergencia puntual para un conjunto denso en $L_G^1(\mathbb{R}^m)$.

La parte iii) sigue del hecho de poder representar la aproximante Abel de μ mediante el núcleo singular de Abel-Hermite. En efecto, si $\mu \in J_{-1/2}(\mathbb{R}^m)$ sus coeficientes de Fourier-Hermite están bien definidos.

$$c_n = \int_{\mathbb{R}^m} h_n^*(x) d\mu \quad \text{y} \quad |c_n| \leq K \int_{\mathbb{R}^m} e^{|x|^2/2} dw < \infty$$

y en la misma forma como lo hicimos en (2.14.5) se muestra que la aproximante Abel asociada a μ puede ser expresada mediante la integral

$$\int_{\mathbb{R}^m} K^*(r, x, y) d\mu(y)$$

la que está en módulo dominada por

$$\begin{aligned}
 & \int_{\mathbb{R}^m} \prod_{j=1}^m \left\{ A(\mathbf{w}, \mathbf{b}) (1-r_j^2)^{-1/2} \right\} \\
 & \cdot \exp \left[-\left[(x_j - y_j) / (1-r_j^2)^{1/2} \right]^2 + (1-r_j^2)^{-1/2} \right] \\
 & \cdot \exp \left(-a(\mathbf{w}, \mathbf{b}) \left[(x_j - y_j) / (1-r_j^2)^{1/2} \right]^2 \right) \} d\mathbf{w}
 \end{aligned}$$

Esto termina la demostración.

PARTE III-SUMABILIDAD ABEL DE LA SERIE MULTIPLE DE

LAGUERRE Y SUMABILIDAD CESARO-BOCHNER-RIESZ DE LAS

SERIES MULTIPLES DE LAGUERRE Y HERMITE.

Como dijimos en la introducción, en esta parte se trata de extender todos los resultados ya probados para sumabilidad Abel de la serie múltiple de Hermite al caso de la serie múltiple de Laguerre. Como en el caso Hermite, las aproximantes Abel de la serie de Laguerre se pueden expresar mediante un núcleo singular cuasipositivo; sin embargo, la acetación de dicho núcleo es algo más dificultosa que en el caso del núcleo de Abel-Hermite cuando se trata de probar desigualdades maximales.

3.1-NOTACIONES Y DEFINICIONES

3.1.1) $L^p_{e,m}(\alpha)$ denota la familia de las funciones medibles Lebesgue definidas en $R_+^m = R_+ \times \dots \times R_+$, tales que

$$(3.1.1.1) \quad \int_{R_+^m} |f|^p \exp\left(-\sum_j^m x_j\right) \prod_{j=1}^m x_j^{\alpha_j} dx_1 \dots dx_m = \\ = \int_{R_+^m} |f|^p e^{-X} X^\alpha dX < \infty$$

donde $1 \leq p < \infty$ y los α_j ($j=1, \dots, m$) son tales que $-1/2 < \alpha_j < \infty$.

La norma de $L^p_{e,m}(\alpha)$ se define de la siguiente manera

FCE Y N.R.A.

$$(3.1.1.2) \quad \|f\|_p(c, \alpha) \stackrel{\text{def}}{=} \left(\int_{\mathbb{R}_+^m} |f|^p e^{-x} x^\alpha dx \right)^{1/p}$$

con $1 \leq p < \infty$.

3.1.2) $\tilde{L}_{(n)}^{(\alpha)}(x)$ denota la familia de los polinomios múltiples de Laguerre, definidos de la siguiente manera. Sea $n = (n_1, \dots, n_m)$, donde cada n_j ($j=1, \dots, m$) es un entero no negativo y $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$, donde α_j ($j=1, \dots, m$) es un parámetro real tal que $-1/2 < \alpha_j < \infty$.

Ahora

$$(3.1.2.1) \quad \tilde{L}_{(n)}^{(\alpha)}(x) \stackrel{\text{def}}{=} \prod_{j=1}^m \left\{ \Gamma(n_j + 1) \right\}^{1/2} \left\{ \Gamma(n_j + \alpha_j + 1) \right\}^{-1/2} \cdot L_{n_j}^{(\alpha_j)}(x_j)$$

Aquí $L_{n_j}^{(\alpha_j)}(x_j)$ es el n_j -ésimo polinomio de Laguerre de parámetro α_j en la variable x_j (ver [2], pág. 99); $L_0^{(\alpha)}(x) = 1$, por tanto

$$\tilde{L}_{(0)}^{(\alpha)}(x) = \prod_{j=1}^m \left(\Gamma(\alpha_j + 1) \right)^{-1/2}$$

Fijado $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$, $L_{(n)}^{(\alpha)}$ es un sistema completo, ortogonal en $L^2_{e,m}(\alpha)$.

En realidad si nosotros pedimos $-1 < \alpha_j < \infty$ ($j=1, \dots, m$) también tendremos un sistema ortogonal completo en este caso, pero en este trabajo nos limitaremos al caso $\alpha_j > -1/2$ ($j=1, \dots, m$).

3.1.3) Si $f \sim \sum_n c_n \tilde{L}_{(n)}^{(\alpha)}(x)$, nosotros denotaremos $f(r, x)$ a

FCEN-BA.

su aproximante Abel, es decir

$$\begin{aligned}
 f(r, x) &\stackrel{\text{def}}{=} \sum_n r^n c_n \tilde{L}_{(n)}^{(\alpha)}(x) = \\
 &= \sum_{n_1, \dots, n_m} r_1^{n_1} \dots r_m^{n_m} (\prod (n_i + 1))^{1/2} (\prod (n_1 + \alpha_1 + 1))^{-1/2} \cdot \\
 &\cdot L_{n_1}^{(\alpha_1)}(x_1) \dots (\prod (n_m + 1))^{1/2} (\prod (n_m + \alpha_m + 1))^{-1/2} \cdot \\
 &\cdot L_{n_m}^{(\alpha_m)}(x_m) c_{n_1 \dots n_m}
 \end{aligned}$$

3.1.4) Por $f^{\#}(x)$ entenderemos la función maximal asociada a $f(r, x)$, es decir

$$f^{\#}(x) \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{r_1, \dots, r_m} |f(r, x)| ; 0 \leq r_j < 1; j=1, \dots, m.$$

3.1.5) Diremos que $\mu = \mu(J)$ es una medida elemental definida en R_m^+ si se verifican las condiciones de 2. de la NOTACION correspondiente a la PARTE I pero restringidas a R_m^+ .

3.1.6) La variación V de μ es definida de la misma manera que en 2. de la NOTACION correspondiente a la PARTE I.

3.1.7) Los coeficientes de Fourier-Laguerre de una medida elemental están definidos de la siguiente manera:

$$c_n \stackrel{\text{def}}{=} \int_{R_m^+} \tilde{L}_{(n)}^{(\alpha)}(x) d\mu ; \quad \mu(r, x) = \sum c_n r^n \tilde{L}_{(n)}^{(\alpha)}(x)$$

siempre y cuando las integrales existan absolutamente.

3.1.3) Dicmos que r tiende restrictivamente a $(1, \dots, 1)$ si existe un número real positivo θ , tal que $r \rightarrow (1, \dots, 1)$ cumplido las condiciones

$$\theta^{-1} < (1-r_j)/(1-r_i) < \theta ; 0 < r_j < 1 ; i, j = 1, \dots, m.$$

3.2-REGULACIONES FUNDAMENTALES CONCERNIENTES A LA SUMABILIDAD ALGEBRAICA DE LA SERIE MÚLTIPLE DE LA CLASE DE LAS

3.2.1) PROPRIEDAD 1:

i) Si $f \in L_{e,m}^p(\alpha)$, $p \geq 2$, $f(r, x)$ está bien definida y se tiene:

A) $\| f(r, x) - r(x) \|_p(e, \alpha) \rightarrow 0$ cuando $r \rightarrow (1, \dots, 1)$

B) $f(r, x) \rightarrow f(x)$ p.p. cuando $r \rightarrow (1, \dots, 1)$

C) $\| f^{**} \|_p(e, \alpha) \leq c_p \| f \|_p(e, \alpha)$, donde c_p depende solo de p .

ii) Si $f(x_1, \dots, x_m) \exp(\gamma \sum_1^m x_j) \in L_{e,m}^p(\alpha)$, $1 < p < 2$, para algún $\gamma > 0$ tal que $1/2 > \gamma > (2-p)/2p$, entonces las mismas conclusiones A, B y C de i) son válidas para f .

iii) Si $|r| (\log^+ |f|)^m \exp(2^{-1} \sum_1^m x_j) \in L_{e,m}^1(\alpha)$, entonces:

A) $f(r, x) \rightarrow f(x)$ p.p. cuando $r \rightarrow (1, \dots, 1)$

B) $\|f^{**}\|_1(e, \alpha) \leq C_\alpha + C'_\alpha \| |f| (\log^+ |f|)^{m-1} \|_1(e, \alpha)$

donde C_α y C'_α dependen sólo de $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$.

iv) Si $|f| (\log^+ |f|)^{m-1} \exp(2^{-1} \sum_1^m x_j) \in L^1_{e, m}(\alpha)$
se tiene

A) $f(r, x) \rightarrow f(x)$ p.p. cuando $r \rightarrow (1, \dots, 1)$

B) $\| (f^{**})^\beta \|_1(e, \alpha) \leq D_{\alpha, \beta} + D'_{\alpha, \beta} \| |f| (\log^+ |f|)^{m-1} \|_1(e, \alpha)$

donde $0 < \beta < 1$; $D_{\alpha, \beta}$, $D'_{\alpha, \beta}$ dependen sólo de (α, β) .

v) Si $|f| \exp(2^{-1} \sum_1^m x_j) \in L^1_{e, m}(\alpha)$, entonces

$$\| f(r, x) - f(x) \|_1(e, \alpha) \rightarrow 0 \text{ cuando } r \rightarrow (1, \dots, 1)$$

3.2.2) TAREA 2: Si μ es una medida elemental definida en \mathbb{R}_+^m , a variación total finita, tal que

$$\int_{\mathbb{R}_+^m} e^{X/2} d\mu < \infty$$

donde $d\mu$ denota la variación de μ , entonces $\mu(r, x)$ converge en casi todo punto cuando r tiende restrictivamente a $(1, \dots, 1)$.

El límite es la función de densidad asociada a μ con respecto a la medida $e^{-Y} Y^\alpha dY$.

3.3-FORMULA DE HILLE-HARDY

3.3.1) La siguiente identidad ha sido establecida (ver [6], pág. 104)

$$(3.3.1.1) \quad \sum_{n=0}^{\infty} M_{(n+1)} M_{-(n+\alpha+1)}^{-1} L_n^{(\alpha)}(x) L_n^{(\alpha)}(y) r^n = \\ = (1-r)^{-1} \exp -\left\{ (x+y)r/(1-r) \right\} (-xyr)^{-\alpha/2} J_{\alpha} \left\{ 2(-xyr)^{1/2}(1-r)^{-1} \right\}$$

$J_{\alpha}(z)$ denota la función de Bessel de orden α .

Un producto formal conduce a

$$(3.3.1.2) \quad \sum_{n_1=0}^{\infty} \dots \sum_{n_m=0}^{\infty} M_{(n_1+1)} \dots M_{(n_m+1)} M_{-(n_1+\alpha_1+1)}^{-1} \dots \\ M_{-(n_m+\alpha_m+1)}^{-1} r_1^{n_1} \dots r_m^{n_m} L_{n_1}^{(\alpha_1)}(x_1) L_{n_1}^{(\alpha_1)}(y_1) \dots \\ L_{n_m}^{(\alpha_m)}(x_m) L_{n_m}^{(\alpha_m)}(y_m) = \sum_n r^n \tilde{L}_{(n)}^{(\alpha)}(x) \tilde{L}_{(n)}^{(\alpha)}(y) = \\ = \prod_{j=1}^m \left[(1-r_j)^{-1} (-x_j y_j r_j)^{-\alpha_j/2} J_{\alpha_j} \left\{ 2(-x_j y_j r_j)^{1/2} \right\} \cdot (1-r_j)^{-1} \right] \exp -\left\{ \sum_j^m (x_j + y_j) r_j / (1-r_j) \right\} = K_{\alpha}(r, x, y).$$

Nosotros nos referiremos a $K_{\alpha}(r, x, y)$ llamándolo Núcleo Singular Múltiple de Hille-Hardy.

3.3.2) LIMAK:

$$\text{i}) \quad \left| \tilde{L}_{(n)}^{(\alpha)}(x) \right| \leq A_{\alpha} \prod_{j=1}^m \left\{ \exp(x_j/2) n_j^{(\alpha_j/2 + 1/4 - 1/12)} \right\}$$

..... $\sim \sim \sim 1/2 \sim \sim \sim 0 \sim \sim \sim m$

Aquí λ_α depende solamente de $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$.

$$\text{ii)} \quad 0 \leq K_\alpha(r, x, y) \leq M_\alpha(r, y) < \infty$$

para $0 \leq r_j < 1$; $0 \leq x_j < \infty$; $j=1, \dots, m$.

Demarcación: Consideremos el caso 1-dimensional y tengamos en cuenta la siguiente fórmula (ver [6], pág. 106)

$$(3.3.2.1) \quad (n!)^{1/2} \left\{ \prod_{j=1}^m (n+\alpha_j+1) \right\}^{-1/2} L_n^{(\alpha)}(x) = \\ = (-1)^n \pi^{-1/2} \left\{ \prod_{j=1}^m (\alpha_j + 1/2) \right\}^{-1/2} [(2n)!]^{-1} (n!)^{1/2} \cdot \\ \cdot \prod_{j=1}^m \int_{-1}^{+1} (1-t^2)^{\alpha_j - 1/2} H_{2n}(x^{1/2}t) dt$$

$H_{2n}(s)$ indica el $2n$ -ésimo polinomio de Hermite.

Por otro parte es, (ver [6], pág. 240)

$$|H_{2n}(s)| \leq B_0 e^{s^2/2} (2n!)^{1/2} 2^n (2n)^{-1/12}$$

donde la constante B_0 no depende de (n, s) ; entonces

$$\left[n! / \prod_{j=1}^m (n+\alpha_j+1) \right]^{1/2} |L_n^{(\alpha)}(x)|$$

está dominado por

$$(3.3.2.2) \quad C_\alpha \left(\prod_{j=1}^m (n+\alpha_j+1) n! \right)^{1/2} (2n!)^{-1/2} 2^n n^{-1/12} \cdot$$

$$\cdot \left(\int_{-1}^{+1} (1-t^2)^{\alpha_j - 1/2} dt \right) e^{x/2}$$

Ahora, una aplicación de la fórmula de Stirling da

$$(3.3.2.3) \quad (n!)^{1/2} (\prod_{j=1}^m (n_j + \alpha_j + 1))^{-1/2} \left| L_n^{(\alpha)}(x) \right| \leq \\ \leq J_\alpha e^{x/2} n^{\alpha/2 + 1/4} - 1/12$$

Teniendo en cuenta que

$$\tilde{L}_n^{(\alpha)}(x) = \prod_{j=1}^m \left\{ (n_j!)^{1/2} (\prod_{k=j+1}^m (n_k + \alpha_{k-1} + 1))^{-1/2} L_{n_j}^{(\alpha_j)}(x_j) \right\}$$

se obtiene i).

Consideremos ahora, si jados r e y

$$(3.3.2.4) \quad (1-r)^{-1} \exp[-(x+y)r/(1-r)] (-xyr)^{-\alpha/2} .$$

$$\bullet \quad J_\alpha [2(-xyr)^{1/2} (1-r)^{-1}]$$

Teniendo en cuenta que $\alpha > -1/2$, podemos usar la siguiente fórmula

$$(3.3.2.5) \quad J_\alpha(s) = \Gamma^{-1}(1/2) \Gamma^{-1}(\alpha + 1/2) (s/2)^\alpha .$$

$$\bullet \quad \int_{-1}^{t_1} (1-t^2)^{\alpha - 1/2} e^{ist} dt .$$

Por tanto

$$(-xyr)^{-\alpha/2} J_\alpha \left[2(-xyr)^{1/2}/(1-r) \right] = \\ = \Gamma^{-1}(1/2) \Gamma^{-1}(\alpha + 1/2) (1-r)^{-\alpha - 1} .$$

$$\int_{-1}^{+1} (1-t^2)^{\alpha-1/2} \exp[2(xy\tau)^{1/2}t] (1-\tau)^{-1} dt$$

Por consiguiente

$$(3.3.2.6) \quad \left| (-xy\tau)^{-\alpha/2} J_\alpha [2(-xy\tau)^{1/2}/(1-\tau)] \right| \leq \\ \leq C(\alpha) (1-\tau)^{-\alpha-1} \exp[2(xy\tau)^{1/2}/(1-\tau)]$$

En consecuencia, (3.3.2.4) está dominado por

$$(3.3.2.7) \quad C(\alpha) (1-\tau)^{-1-\alpha} \exp\left\{-[x\tau+y\tau-2(xy\tau)^{1/2}]/(1-\tau)\right\} = \\ = e^y C(\alpha) (1-\tau)^{-1-\alpha} \exp\left\{-[x\tau+y\tau-2(xy\tau)^{1/2}]/(1-\tau)\right\} \leq \\ \leq C(\alpha) e^y (1-\tau)^{-1-\alpha}$$

y por multiplicación se obtiene ii).

3.3.3) Lema:

a) Si $f(x_1, \dots, x_m) \exp(2^{-1} \sum_1^m x_j) \in L^1_{e,m}(\alpha)$, entonces

i) f tiene coeficientes de Fourier respecto del sistema

$$\left\{ \tilde{L}_{(n)}^{(\alpha)}(x) \right\}$$

ii) Si $f \sim \sum_n c_n \tilde{L}_{(n)}^{(\alpha)}(x)$ y $0 < r_j < 1$, ($j=1, \dots, m$), entonces

$$\sum_n r^n c_n \tilde{L}_{(n)}^{(\alpha)}(x) = \sum_{n_1, \dots, n_m} r_1^{n_1} \dots r_m^{n_m} c_{n_1, \dots, n_m} .$$

$$\cdot \Gamma^{1/2}(n_1+1) \Gamma^{-1/2}(n_1+\alpha_1+1) \dots \Gamma^{1/2}(n_m+1) .$$

$$\cdot \Gamma^{-1/2}(n_m+\alpha_m+1) L_{n_1}^{(\alpha_1)}(x_1) \dots L_{n_m}^{(\alpha_m)}(x_m) = \\ = \int_{\mathbb{R}_+^m} K_\alpha(r, x, Y) f(Y) e^{-Y} Y^\alpha dY .$$

Como anterior, $K_\alpha(r, x, Y)$ indica el núcleo singular múltiple de Hille-Hardy.

B) Si $f \in L_{e,m}^p(\alpha)$, $p \geq 2$, entonces se tienen las mismas conclusiones que en A).

C) Si $f(x_1, \dots, x_m) \exp(\sum_j x_j) = f e^{\lambda X} \in L_{e,m}^p(\alpha)$, $1 < p < 2$; $1/2 > \lambda > (2-p)/2p$; entonces se tienen las mismas conclusiones que en A).

$$D) \int_{\mathbb{R}_+^m} K_\alpha(r, x, Y) e^{-Y} Y^\alpha dY = 1$$

Demostración: Sea f bajo las suposiciones de A.

La siguiente integral existe por el LEMA 3.3.2:

$$\int_{\mathbb{R}_+^m} K_\alpha(r, x, Y) f(Y) e^{-Y} Y^\alpha dY$$

Ahora observemos que

$$(3.3.3.1) \quad \sum_n r^n \left| L_{(n)}^{(\alpha)}(x) L_{(n)}^{(\alpha)}(y) \right| = \\ = \sum_{n_1=0}^{\infty} \dots \sum_{n_m=0}^{\infty} r_1^{n_1} \dots r_m^{n_m} n_1! \Gamma^{-1}(n_1+\alpha_1+1) \left| L_{n_1}^{(\alpha_1)}(x_1) L_{n_1}^{(\alpha_1)}(y_1) \right| \dots$$

$$\begin{aligned}
& \dots n_m! M^{-1}(n_m + \alpha_m + 1) \left| L_{n_m}^{(\alpha_m)}(x_m) L_{n_m}^{(\alpha_m)}(y_m) \right| \leq \\
& \leq \prod_{j=1}^m \exp[(x_j + y_j)/2] \prod_{j=1}^m \left[\sum_{n_j=0}^{\infty} r^{n_j} \right] \\
& \cdot n_j^{2(\alpha_j/2 + 1/4 - 1/12)} B_\alpha \leq \\
& \leq B(r_1, \dots, r_m, \alpha_1, \dots, \alpha_m) \prod_{j=1}^m \exp[(x_j + y_j)/2] = \\
& = B(r, \alpha) e^{X/2} e^{Y/2}
\end{aligned}$$

Las desigualdades de (3.3.3.1) siguen de la parte i) del LEMA 3.3.2.

Por otra parte

$$\begin{aligned}
(3.3.3.2) \quad & \sum_n c_n r^n \tilde{L}_{(n)}^{(\alpha)}(x) = \\
& = \sum_n r^n \tilde{L}_{(n)}^{(\alpha)}(x) \left\{ \int_{R_+^m} \tilde{L}_{(n)}^{(\alpha)}(y) e^{-y} |y^\alpha| f(y) dy \right\} = \\
& = \sum_n \int_{R_+^m} r^n \left| \tilde{L}_{(n)}^{(\alpha)}(x) \tilde{L}_{(n)}^{(\alpha)}(y) \right| e^{-y} |f(y)| |y^\alpha| dy
\end{aligned}$$

ya que

$$\begin{aligned}
(3.3.3.3) \quad & \int_{R_+^m} \sum_n r^n \left| \tilde{L}_{(n)}^{(\alpha)}(x) \tilde{L}_{(n)}^{(\alpha)}(y) \right| |f(y)| e^{-y} |y^\alpha| dy \leq \\
& \leq B(r, \alpha) e^{X/2} \int_{R_+^m} |f(y)| e^{-y/2} |y^\alpha| dy < \infty
\end{aligned}$$

ahora podemos intercambiar suma con integración y obtener A II). La parte i) de A resulta de la cota i) del LEMA 3.3.2. Ahora supongamos que f pertenece a $L_{e,m}^p(\alpha)$, $p > 2$.

De la desigualdad de Hölder se tiene

$$(3.3.3.4) \int_{\mathbb{R}_+^m} |f| e^{Y/2} e^{-Y} Y^\alpha dY \leq \\ \leq \|f\|_p(e, \alpha) \|e^{Y/2}\|_{p/(p-1)}(e, \alpha) \leq \\ \leq C(n, \alpha) \|f\|_p(e, \alpha)$$

La acotación de $\|e^{Y/2}\|_{p/(p-1)}(e, \alpha)$ resulta del hecho que $p/(n-1) < 2$ si $p > 2$. Por tanto las conclusiones i) y ii) siguen para las funciones pertenecientes a $L^p_{e,m}(\alpha)$, $p > 2$. Ahora, sea f perteneciente a $L^2_{e,m}(\alpha)$; para X y r fijos, $0 < r_j < 1$ ($j=1, \dots, m$)

$$\sum_n r^n \tilde{L}_{(n)}^{(\alpha)}(X) c_n$$

es un funcional lineal continuo en $L^2_{e,m}(\alpha)$. Dada la cota i) del Lema 3.3.2 se tiene

$$(3.3.3.5) \sum_n (r^n \tilde{L}_{(n)}^{(\alpha)}(X))^2 < \infty$$

para $0 < r_j < 1$ ($j=1, \dots, m$).

Por otra parte, para un subconjunto denso, por ejemplo $L^p_{e,m}(\alpha)$ con $p > 2$, el funcional tiene la representación

$$(3.3.3.6) \int_{\mathbb{R}_+^m} K_\alpha(r, X, Y) f(Y) e^{-Y} Y^\alpha dY$$

Por otra parte de ii) del LEMA 3.3.2 para r fijo y X fijo, $K_\alpha(r, X, Y)$ es una función acotada de Y , por tanto $K_\alpha(r, X, Y)$

pertenece a $L^2_{e,m}(\alpha)$ y la representación (3.3.3.6) vale para todo $\alpha \in L^1_{e,m}(\alpha)$.

Para obtener la parte C, observemos que en este caso será

saber que $|f| e^{X/2} \in L^1_{e,m}(\alpha)$.

$$\begin{aligned} & \int_{R_+^m} |f| e^{X/2} e^{-X} X^\alpha dX = \\ &= \int_{R_+^m} |f| e^{\gamma X} e^{(1-\gamma)\alpha X/2} e^{-X} X^\alpha dX \leq \\ &\leq \left(\int_{R_+^m} e^{(1-\gamma)\alpha X/(2p-2)} X^\alpha e^{-X} dX \right)^{(p-1)/p} \|f e^{\gamma X}\|_{p(e,m)} \end{aligned}$$

Observamos que $1-\gamma < 1 - (2-p)/p = 2(p-1)/p$, y por tanto $(1-\gamma)p/(2p-2) < 1$ y en consecuencia

$$(3.3.3.8) \quad \int_{R_+^m} \exp\left[\frac{(1-\gamma)\alpha p}{2p-2} X\right] e^{-X} X^\alpha dX < \infty$$

Lo que prueba la parte C.

La parte D nos muestra que si $f \in L^2_{e,m}(\alpha)$ entonces

$$(3.3.3.9) \quad \sum_n c_n r^n \tilde{\mu}_{(n)}(\alpha)(x) = \int_{R_+^m} K_\alpha(r, x, y) f(y) e^{-y} y^\alpha dy$$

Tomando $r=1$ y observando que $c_{n_1 \dots n_m} = 0$ si y sólo si $n_j \neq 0$ para algún j , por tanto

$$(3.3.3.10) \quad 1 = \int_{R_+^m} K_\alpha(r, x, y) e^{-y} y^\alpha dy$$

como queríamos probar.

3.3.4) DEFINICIÓN: Si μ es una medida elemental definida en R_+^m

$$\int_{R^m_+} s^{m/2} d\mu < \infty$$

dónde η es la variación de μ , sus Fourier-Laguerre coefficients están bien definidos.

$$= \int_{R^m_+} \tilde{h}_{(n)}^{(\alpha)}(x) d\mu$$

Más aún, en este caso tenemos las mismas conclusiones que en la parte A del apartado 3.3.3.

3.4-OTRO CASO $k_\alpha(r, x, y)$

3.4.1) Descomposiciones por el núcleo unidimensional

$$(3.4.1.1) \quad k_\alpha(r, x, y) = (1-r)^{-1-\alpha} \exp\left[-(x+y)r/(1-r)\right] \cdot$$

$$\cdot \Gamma^{-1}(1/2) \Gamma^{-1}(\alpha + 1/2) \int_{-1}^{+1} (1-t^2)^{\alpha - 1/2} \cdot$$

$$\cdot \exp\left[2(sy r)^{1/2} (1-r)^{-1} t\right] dt$$

3.4.2) Nota: si $\alpha > -1/2$, entonces existe una función $k_\alpha^*(s, r, x, y)$ definida en el conjunto

$$\{(s, r, x, y) \text{ tal que } 0 \leq s \leq 1, 0 < r < 1, 0 < x < \infty, 0 \leq y < \infty\}$$

que tiene las siguientes propiedades

i) Si $\alpha > 0$, el par (r, r^{α}) , $k_{\alpha}^x(s, r, x, y)$, es una función de y no creciente en (x, y) y no decreciente en $(0, x)$.

$$\text{i)} \quad k_{\alpha}(r, r^{\alpha}) \leq \int_0^1 (1-s^2)^{\alpha-1/2} k_{\alpha}^x(s, r, x, y) \, ds$$

$$\text{iii)} \quad \int_0^{\alpha} s^{-1} \, r^{\alpha} \, dy \left[\int_0^1 (1-s^2)^{\alpha-1/2} k_{\alpha}^x(s, r, x, y) \, ds \right] \leq A_{\alpha}$$

donde la constante A_{α} depende de α solamente.

Desarrollando: De (3.4.1.1) se tiene

$$(3.4.2.1) \quad k_{\alpha}(r, x, y) \leq 2 \Gamma^{-1}(1/2) \Gamma^{-1}(\alpha+1/2) (1-r)^{-1-\alpha}.$$

$$\cdot \exp\left[-(x+y)r/(1-r)\right] \int_0^1 (1-s^2)^{\alpha-1/2} \exp[2(xy r)^{1/2} s/(1-r)] \, ds$$

Por tanto

$$(3.4.2.2) \quad k_{\alpha}(r, x, y) \leq 2 \Gamma^{-1}(1/2) \Gamma^{-1}(\alpha+1/2) \cdot$$

$$\cdot \int_0^1 (1-s^2)^{\alpha-1/2} (1-r)^{-1-\alpha} \exp\left[-(x+y)r(1-r)^{-1}\right. +$$

$$\left. + 2(xy r)^{1/2} s(1-r)^{-1}\right] \, ds =$$

$$= 2 \Gamma^{-1}(1/2) \Gamma^{-1}(\alpha+1/2) \int_0^1 (1-s^2)^{\alpha-1/2} (1-r)^{-1-\alpha} \cdot$$

$$\cdot \exp\left[2s(xy r)^{1/2} - (x+y)r/(1-r)\right] \, ds$$

Consideremos ahora el núcleo

$$h_{\alpha}(s, r, x, y) = \left(\Gamma(1/\alpha) \Gamma(\alpha + 1/2) (1-r)^{1+\alpha} \right)^{-1} \cdot \exp \left\{ [2s(x+y)^{1/2} - (x+y)r] / (1-r) \right\}$$

Si nosotras fixamos los parámetros (s, r, x) , diferenciando con y , veo que y se ve que $h_{\alpha}(s, r, x, y)$ es no creciente si $y \geq s^2 x/r$ y no decreciente si $0 \leq y < s^2 x/r$.

Ahora si fixaremos $k_{\alpha}^*(s, r, x, y)$

$$(3.4.2.5) \text{ si } s^2 \geq r$$

$$\begin{aligned} k_{\alpha}^*(s, r, x, y) &= h_{\alpha}(s, r, x, y) \quad \text{para } 0 \leq y < x \quad \text{o} \quad s^2 x/r < y < \infty \\ &= h_{\alpha}(s, r, x, s^2 x/r) \\ &= 2 \left(\Gamma(1/\alpha) \Gamma(\alpha + 1/2) (1-r)^{1+\alpha} \right)^{-1} \cdot \\ &\quad \cdot \exp \left[-(r-s^2)x/(1-r) \right] \quad \text{para } x \leq y \leq s^2 x/r. \end{aligned}$$

$$(3.4.2.6) \quad s^2 < r$$

$$\begin{aligned} k_{\alpha}^*(s, r, x, y) &= h_{\alpha}(s, r, x, y) \quad \text{para } 0 \leq y < s^2 x/r \quad \text{o} \quad x < y < \infty \\ k_{\alpha}^*(s, r, x, y) &= h_{\alpha}(s, r, x, s^2 x/r) \\ &= 2 \left(\Gamma(1/\alpha) \Gamma(\alpha + 1/2) (1-r)^{1+\alpha} \right)^{-1} \cdot \\ &\quad \cdot \exp \left[-(r-s^2)x/(1-r) \right] \quad \text{para } s^2 x/r \leq y \leq x \end{aligned}$$

Una fácil verificación muestra que $k_{\alpha}^*(s, r, x, y)$ cumple las condiciones i) y ii). Solamente basta verificar iii), y esto es lo que se hace.

a) Suponiendo que $1 > r \geq 1/2$ y consideremos la integral

$$(3.4.2.5) \quad \int_0^\infty e^{-y} y^\alpha dy \int_0^1 k_{\alpha}^*(s, r, x, y) (1-s^2)^{\alpha-1/2} ds =$$

$$= \int_0^\infty e^{-y} y^\alpha dy \int_0^{r^{1/2}} k_{\alpha}^*(s, r, x, y) (1-s^2)^{\alpha-1/2} ds +$$

$$+ \int_0^\infty e^{-y} y^\alpha dy \int_{r^{1/2}}^1 k_{\alpha}^*(s, r, x, y) (1-s^2)^{\alpha-1/2} ds$$

A_1) Sobre la otra $\int_0^\infty e^{-y} y^\alpha dy \int_{r^{1/2}}^1 k_{\alpha}^*(s, r, x, y) (1-s^2)^{\alpha-1/2} ds$

Teniendo en cuenta la definición de $k_{\alpha}^*(s, r, x, y)$ la integral en consideración está dominada por

$$(3.4.2.6) \quad \int_0^\infty e^{-y} y^\alpha dy \int_{r^{1/2}}^1 h_{\alpha}(s, r, x, y) (1-s^2)^{\alpha-1/2} ds +$$

$$+ \int_{r^{1/2}}^1 (1-s^2)^{\alpha-1/2} (\Gamma(1/2) \Gamma(\alpha+1/2) (1-r)^{1+\alpha})^{-1} \cdot$$

$$\cdot \exp[-(r-s^2)x/(1-r)] \left\{ \int_x^\infty e^{-y} y^\alpha dy \right\} ds \leq$$

$$\leq 2 + \int_{r^{1/2}}^1 (1-s^2)^{\alpha-1/2} (\Gamma(1/2) \Gamma(\alpha+1/2) (1-r)^{1+\alpha})^{-1} \cdot$$

$$\cdot \exp[-(r-s^2)x/(1-r)] \left\{ \int_x^\infty e^{-y} y^\alpha dy \right\} ds$$

desde que

$$\int_0^1 \mathbb{E}_X(\cdot, \cdot, x, s) (1-s)^{\alpha-1/2} ds \leq 2 D_\alpha(x, x, y)$$

Poniendo $s = u/(1-r)$, tenemos

$$(3.4.2.7) \quad \int_{r^2}^1 (1-u)^{\alpha-1/2} (M(1/2) M(\alpha+1/2) (1-r)^{1+\alpha})^{-1} \cdot \\ \cdot \exp\left[-(r-u)x/(1-r)\right] \left\{ \int_x^{u^2/r} e^{-y} y^\alpha dy \right\} du = \\ = C(\alpha) \int_r^1 (1-u)^{\alpha-1/2} u^{-1/2} (1-r)^{-1-\alpha} \exp\left[-(r-u)x/(1-r)\right] \cdot \\ \cdot \left\{ \int_x^{u^2/r} e^{-y} y^\alpha dy \right\} du$$

Observando que $x \leq (u/r)x \leq 2x$ (dado que $1 > r \geq 1/2$ y que $1 \geq u \geq r$). $x \leq y \leq (u/r)x$, entonces existe una constante b_α , que depende únicamente de α , tal que

$$(3.4.2.8) \quad x^\alpha \leq b_\alpha x^\alpha ; x \geq 0; x \leq y \leq 2x$$

La desigualdad precedente conduce a

$$(3.4.2.9) \quad \int_x^{u^2/r} e^{-y} y^\alpha dy \leq b_\alpha x^\alpha \int_x^{u^2/r} e^{-y} dy = \\ = b_\alpha x^\alpha e^{-x} (1 - \exp(-x(u-r)/r))$$

Por tanto, (3.4.2.7) está dominado por

$$(3.4.2.10) \quad b_\alpha C_\alpha \int_r^1 (1-u)^{\alpha-1/2} u^{-1/2} (1-r)^{-1-\alpha} x^\alpha e^{-x} \cdot$$

$$\cdot \exp\left[-x(r-u)/(1-r)\right] \left\{ 1 - \exp\left[-x(u-r)/r\right] \right\} du =$$

$$= D_{\alpha} \cdot \int_0^1 z^{1/2} (1-u)^{-1-1/\alpha} u^{-1/2} \exp[-x(1-u)/(1-r)] \cdot \\ \cdot [x(1-u)/(1-r)]^{\alpha-1/2} \left\{ 1 - \exp[-x(u-r)/r] \right\} du$$

Observe que

$$(3.4.2.11) \quad \sup_{x \geq 0, u \geq r > 0} \{ 1 - \exp[-x(u-r)/r] \} x^{-1/2} (u/r - 1)^{-1/2} \leq$$

$$(3.4.2.12) \quad u/r - 1 = (1-u)/r \leq (1-r)/r \quad \text{para } 1 \geq u \geq r$$

o sea que

$$u/r - 1 \leq r(1-r) \quad \text{dado que } 1 > r \geq 2$$

Mismo resultado en ecuación (3.4.2.11) y (3.4.2.12) el segundo miembro de (3.4.2.10) está dominado por

$$(3.4.2.13) \quad D_{\alpha} D_M z^{1/2} \sup_{\lambda > 0} \lambda \int_{y_2}^1 \exp[-|\lambda(1-u)|] \cdot \\ \cdot [\lambda(1-u)]^{\alpha-1/2} u^{-1/2} du \leq 2C_{\alpha} D_M \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|} |x|^{\alpha-1/2} dx$$

(este resulta de que en virtud de (3.4.2.11) y (3.4.2.12) es $x^{-1/2} (1-r)^{-1/2} \leq z^{1/2} x^{-1/2} (u/r - 1)^{-1/2}$)

Con esto queda completa la parte A₁.

$$A_2) \text{ Sea: para } \int_0^{\infty} e^{-y} y^{\alpha} dy \int_0^{y_2} k_{\alpha}^*(s, r, x, y) (1-s^2)^{\alpha-1/2} ds$$

Como en el caso α_1 , derivado de un cambio de variables la siguiente estimación es válida

$$(3.4.2.14) \quad \int_0^{\infty} e^{-y} y^{\alpha} dy \int_0^{r^2} v_{\alpha}^*(s, r, x, y) (1-v^2)^{\alpha-1/2} dv \leq \\ \leq c_{\alpha} \int_0^r (1-u)^{\alpha-1/2} u^{-1/2} (1-r)^{-1-\alpha} .$$

$$\cdot \exp[-x(r-u)/(1-r)] \left\{ \int_{xu/r}^x y^{\alpha} e^{-y} dy \right\} du$$

Supongamos ahora que $\alpha < 0$. Por tanto se tendrá

$$(3.4.2.15) \quad c_{\alpha} \int_0^r (1-u)^{\alpha-1/2} u^{-1/2} (1-r)^{-1-\alpha} .$$

$$\cdot \exp[-x(r-u)/(1-r)] \left\{ \int_{xu/r}^x y^{\alpha} e^{-y} dy \right\} du \leq$$

$$\leq c_{\alpha} \int_0^r (1-u)^{\alpha-1/2} u^{-1/2} u^{\alpha} r^{-\alpha} x^{\alpha} (1-r)^{-1-\alpha} .$$

$$\cdot \exp[-x(r-u)/(1-r)] x(1-u/r) du$$

Pero $1-u/r = (r-u)/r \leq (1-u)/r \leq 2(1-u)$ dada que

$0 \leq u \leq r < 1$ y $r \geq 1/2$; por tanto, el segundo miembro de la desigualdad (3.4.2.15) es dominado por

$$(3.4.2.16) \quad c_{\alpha} \int_0^r (1-u)^{1/2} u^{\alpha-1/2} x(1-r)^{-1} .$$

$$\cdot \exp[-|x(r-u)/(1-r)|] |x(r-u)/(1-r)|^{\alpha} du \leq$$

$$\leq c_{\alpha} \sup_{1/2 \leq r \leq 1} \sup_{\lambda > 0} \int_0^1 u^{\alpha-1/2} \exp[-|\lambda(r-u)|] |\lambda(r-u)|^{\alpha} du$$

Llamando $\ell(u)$ a la función maximal asociada a la función igual a $u^{\alpha-1/2}$ si $0 \leq u \leq 1$ y cero en otra parte, resulta el mismo resultado de (3.4.2.16) dominado por

$$(3.4.2.17) \quad c_\alpha \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|s|} |s|^\alpha ds \right) \sup_{1/2 \leq r \leq 1} \ell(r)$$

Este es más cuando $\alpha < 0$.

Supongamos ahora que son $\alpha \geq 0$. En este caso será

$$\begin{aligned} (3.4.2.18) \quad & c_\alpha \int_0^r (1-u)^{\alpha-1/2} u^{-1/2} (1-r)^{-1-\alpha} \\ & \cdot \exp\left[-x(r-u)/(1-r)\right] \left(\int_{xu/r}^x y^\alpha e^{-y} dy \right) du \leq \\ & \leq c_\alpha \int_0^{r-\varepsilon} (1-u)^{\alpha-1/2} u^{-1/2} (1-r)^{-1-\alpha} x^{\alpha+1} (1-u/r) . \\ & \cdot \exp\left[-x(r-u)/(1-r)\right] du + c_\alpha \int_{r-\varepsilon}^r (1-u)^{\alpha-1/2} u^{-1/2} (1-r)^{-1-\alpha} \\ & \cdot \exp\left[-x(r-u)/(1-r)\right] \left(\int_{xu/r}^x y^\alpha e^{-y} dy \right) du \end{aligned}$$

donde $0 < \varepsilon < 1/2 \leq r < 1$.

Por otra parte observemos que $(1-u/r) = (r-u)/r \leq 2(1-u)$ todo vez que $1 \geq r \geq u \geq 0, r > 1/2$.

Por tanto, se tiene

$$\begin{aligned} (3.4.2.18) \quad & c_\alpha \int_0^{r-\varepsilon} (1-u)^{\alpha-1/2} u^{-1/2} (1-r)^{-1-\alpha} x^{\alpha+1} \\ & (1-u/r) \exp\left[-x(r-u)/(1-r)\right] du \leq \\ & \leq 2c_\alpha \int_0^{r-\varepsilon} u^{-1/2} (1-u)^{-1/2} x^{\alpha+1} (1-u)^{\alpha+1} (1-r)^{-\alpha-1} . \end{aligned}$$

$$\cdot \exp\left[-x(r-u)/(1-r)\right] du$$

Observando que $(r-u) \geq \varepsilon$ o equivalentemente $1 \leq (r-u)/\varepsilon$
por $(1-u) \leq (r-u)/\varepsilon$.

Lentamente en cuenta este ultimo

$$(3.4.2.20) \quad \int_0^{r-\varepsilon} (1-u)^{\alpha-1/2} u^{-1/2} (1-r)^{-1-\alpha} x^{\alpha+1} (1-u/r) du.$$

$$\cdot \exp\left[-x(r-u)/(1-r)\right] du \leq$$

$$\leq 2c_\alpha \varepsilon^{-1-\alpha} \left\{ \sup_{|s|} e^{-|s|} |s|^{\alpha+1} \right\} \int_0^1 [u(1-u)]^{-1/2} du$$

poniendo $a = 1/2 - \varepsilon$, se tiene

$$(3.4.2.21) \quad c_\alpha \int_{r-\varepsilon}^r (1-u)^{\alpha-1/2} u^{-1/2} (1-r)^{-1-\alpha}.$$

$$\cdot \exp\left[-x(r-u)/(1-r)\right] \left(\int_{xu/r}^x y^\alpha e^{-y} dy \right) du \leq$$

$$\leq c_\alpha \int_{\alpha}^r (1-u)^{\alpha-1/2} u^{-1/2} (1-r)^{-1-\alpha} x^\alpha e^{-ax} x(1-u/r) du.$$

$$\cdot \exp\left[-x(r-u)/(1-r)\right] du \leq$$

$$\leq 2c_\alpha \int_0^r (1-u)^{\alpha-1/2} u^{-1/2} (1-r)^{-1-\alpha} x^{\alpha+1} e^{-ax} (1-u) du.$$

$$\cdot \exp\left[-x(r-u)/(1-r)\right] du$$

Dado que $0 < a < 1$, venos que $\exp\left[-x(r-u)/(1-r)\right] \leq \exp\left[-ax(r-u)/(1-r)\right]$ para $0 \leq u \leq r < 1, x > 0$. Por tanto, el ultimo término de (3.4.2.21) está dominado por

$$(3.4.2.23) \quad C_\alpha \cdot r(1-r)^{-1} \int_0^1 u^{-1/2} (1-u)^{1/2}$$

$$\cdot \exp\left[-x(1-u)/(1-r)\right] \left\{x/(1-u)/(1-r)\right\}^\alpha du \leq \\ \leq C_\alpha \cdot r^{-1/2} \int_{-\infty}^0 e^{-x|s|} |s|^\alpha ds$$

Entonces, sumando (3.4.2.20) de A2 para $\alpha \geq 0$.

Como se vio en la parte 1 los intervalos en cuestión para el caso $0 < r < 1/2$, lo es, la ejecución de las siguientes integrales para $0 < r < 1/2$

$$\begin{cases} C_\alpha \int_r^1 (1-u)^{\alpha-1/2} u^{-1/2} (1-r)^{-1-\alpha} \exp\left[-x(r-u)/(1-r)\right] du \left\{ \int_x^{xu/r} y^\alpha e^{-y} dy \right\} \\ (3.4.2.24) \\ C_\alpha \int_0^r (1-u)^{\alpha-1/2} u^{-1/2} (1-r)^{-1-\alpha} \exp\left[-x(r-u)/(1-r)\right] du \left\{ \int_{xu/r}^x y^\alpha e^{-y} dy \right\} \end{cases}$$

Se ve claramente que la segunda integral está dominada por

$$C_\alpha \cdot r^{1+\alpha} \Gamma(\alpha+1) \int_0^1 (1-u)^{\alpha-1/2} u^{-1/2} du$$

La primera integral es

$$(3.4.2.24) \quad C_\alpha \int_r^1 (1-u)^{\alpha-1/2} u^{-1/2} (1-r)^{-1-\alpha} e^x \cdot \\ \cdot \exp\left[-x(1-u)/(1-r)\right] \left(\int_x^{xu/r} y^\alpha e^{-y} dy \right) du$$

Si $0 \leq r \leq 1/2$, $0 \leq x \leq 1$, (3.4.2.24) está uniformemente acotado; por tanto consideraremos $r \geq 1$ solamente.

Para $\alpha \leq 0$ no tiene

$$(3.4.2.25) \quad c_\alpha \int_r^1 (1-u)^{\alpha-1/2} u^{-1/2} (1-r)^{-1-\alpha} e^x .$$

$$\begin{aligned} & \cdot \exp\left[-x(1-u)/(1-r)\right] \left(\int_x^{x/r} y^\alpha e^{-y} dy \right) du \leq \\ & \leq c_\alpha \int_r^1 (1-u)^{\alpha-1/2} u^{-1/2} (1-r)^{-1-\alpha} e^x . \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \cdot \exp\left[-x(1-u)/(1-r)\right] \left(\int_x^\infty e^{-y} dy \right) du \leq \\ & \leq x^{1+\alpha} c_\alpha \int_0^1 (1-u)^{\alpha-1/2} u^{-1/2} du \end{aligned}$$

Si $\alpha >$ existe una cota M_α (que depende sólo de α) tal que

$$(3.4.2.26) \quad \min_{u \geq 1} x^{-\alpha} \int_x^\infty e^{-y} y^\alpha dy \leq M_\alpha$$

veráste, convierte en el entero n más cercano a α , tal que $n \geq \alpha$. La integración por partes m veces da

$$\begin{aligned} (3.4.2.27) \quad & \int_x^\infty e^{-y} y^\alpha dy = \\ & = \sum_{k=0}^{m-1} b_k(\alpha) e^{-x} x^{\alpha-k} + c_m(\alpha) \int_x^\infty e^{-y} y^{\alpha-m} dy \end{aligned}$$

Desde que $n \geq \alpha$ y $x \geq 1$ resulta

$$\int_x^{\infty} e^{-y} y^{x-\alpha} dy \leq e^{-x}$$

Por otro lado $(x^{-\alpha} e^x) e^{-x} x^{\alpha-1} \leq 1$ para $x \geq 1$,
por tanto (3.4.2.26) está probado.

Tomando en cuenta (3.4.2.26), (3.4.2.24) está dominado por

$$(3.4.2.27) \quad L_{\alpha} \int_0^1 (1-u)^{\alpha-1/2} u^{-1/2} (1-r)^{-1-\alpha} x^{\alpha} .$$

$$\begin{aligned} & \cdot \exp[-x(1-u)/(1-r)] (x^{-\alpha} e^x \int_x^{\infty} e^{-y} y^{\alpha} dy) du \leq \\ & \leq C_{\alpha} L_{\alpha} \int_0^1 [u(1-u)]^{-1/2} [x(1-u)/(1-r)]^{\alpha} \exp[-x(1-u)/(1-r)] du \leq \\ & \leq C_{\alpha} L_{\alpha} \left\{ \sup_s e^{-|s|} |s|^{\alpha} \right\} \int_0^1 [u(1-u)]^{-1/2} du \end{aligned}$$

Esto finaliza la parte iii) del Teorema.

3.4.3) Nota: Si $\alpha=0$ el Núcleo Singular de Hille-Hardy toma la forma

$$(3.4.3.1) \quad P_{\alpha} (1-r)^{-1-\alpha} \exp[-yr/(1-r)]$$

por tanto tiene ya la forma requerida.

3.4.4) Definición: Sea f perteneciente a $L^1_{e,m}(\alpha)$ y consideremos un punto $X \in \mathbb{R}_+^m$. Diremos que la integral $\int_{\mathcal{G}} f e^{-Y} Y^{\alpha} dY$ es fuertemente diferenciable en el punto X con respecto a la medida

$$dY = e^{-Y} Y^{\alpha} dY = \exp[(y_1 + \dots + y_m)] y_1^{\alpha_1} \dots y_m^{\alpha_m} dy_1 \dots dy_m$$

si el límite

$$(3.4.a.1) \quad \lim_{\delta(I_X) \rightarrow 0} \left(1/\nu(I_X) \right) \int_{I_X} f d\nu$$

existe. Los I_X son intervalos m -dimensionales, no degenerados (es decir, con aristas paralelas a los planos coordenados (o mejor expresado, con aristas paralelas a los ejes coordinados) contenidos en el punto x . $\delta(I_X)$ denota el diámetro de I_X . Todos los I_X deben ser tomados contenidos en R_+^m . También denotaremos f^* , la función maximal fuerte como

$$(3.4.a.2) \quad f^*(x) \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{R_+^m \ni I_X \ni \{x\}} \left(1/\nu(I_X) \right) \left| \int_{I_X} f d\nu \right|$$

donde los I_X , como en la definición precedente, son intervalos m -dimensionales, no degenerados, con aristas paralelas a los ejes coordinados.

3.4.b) Lema: f^* tiene las siguientes propiedades

i) Si $f \in L_{e,m}^p(\alpha)$, $p > 1$ entonces

$$\|f^*\|_1(e, \alpha) \leq C(p) \|f\|_p$$

donde C depende solamente de p .

ii) Si $|f|(\log^+|f|)^m$ pertenece a $L_{e,m}^1(\alpha)$ entonces

$$\|f^*\|_1(e, \alpha) \leq A(\alpha) + B(\alpha) \| |f|(\log^+|f|)^m \|_1(e, \alpha)$$

donde las constantes dependen de α .

iii) Si $|f|(\log^+|f|)^{m-1}$ pertenece a $L_{e,m}^1(\alpha)$ entonces para $0 < \beta < 1$

$$\|(f^*)^\beta\|_1(e, \alpha) \leq C(\alpha, \beta) + B(\alpha, \beta) \cdot \| |f|(\log^+|f|)^{m-1} \|_1(e, \alpha)$$

donde las constantes dependen de α y β .

Después luego, todas las constantes dependen también de la dimensión.

Para la demostración ver PARTE I, TEOREMA 1.8 y tomemos como medidas μ_j , aquellas generadas por las funciones de densidad $\exp(-x_j) x_j^\alpha$ si $x_j \geq 0$ y cero en otra parte.

3.4.6) Lema: Sea $H(r, X, Y) = \prod_{j=1}^m h_j(r_j, x_j, y_j)$ una familia de funciones reales no negativas definidas en $R_+^m \times R_+^m$ dependientes del parámetro $r = (r_1, \dots, r_m) \in \Delta$, tal que las dos condiciones siguientes sean verificadas

A) Para cada par (r_j, x_j) , $h_j(r_j, x_j, y_j)$ como función de y_j está definida en R_+^m y es no decreciente si $y_j \leq x_j$ y no creciente si $y_j > x_j$.

B) $\int_0^\infty h_j(r_j, x_j, y_j) \exp(-y_j) y_j^\alpha dy_j < M$

donde la cota M no depende ni de j ni del par (r_j, x_j)

Entonces, si $f \in L_{e,m}^1(\alpha)$ se tiene

i) $\overline{f(x)} = \sup_{r \in \Delta} \left| \int_{R_+^m} H(r, X, Y) f(Y) e^{-Y} Y^\alpha dY \right| \leq M^m f^*(X)$

iii) $\kappa^*(\chi)$ verifican el mismo tipo de desigualdades que $\kappa^\alpha(\chi)$ (con otras constantes).

La demostración varía little I, Lema 1.15 y tomar como u_j aquella formada por las funciones de densidad $\kappa_{\alpha_j}^{**}(r_j, x_j, y_j)$ si $x_j \geq 0$ y cero en otra parte.

3.5-DEMOSTRACIÓN DEL LEMMA 1

3.5.1) De la 3.3.3 se tiene que en todos los casos

$$(3.5.1.1) \quad \kappa^*(r, x, Y) = \int_{\mathbb{R}_+^m} K_\alpha(r, x, Y) f(Y) e^{-Y} Y^\alpha dY$$

con $0 < r_j < 1$ ($j=1, \dots, n$).

$K_\alpha(r, x, Y)$ denota como siempre el Núcleo múltiple de Hille-Hardy.

Por otro parte, teniendo

$$\left\{ \begin{array}{l} k_{\alpha_j}^{**}(r_j, x_j, y_j) = \int_0^1 (1-s^2)^{\alpha-1/2} k_{\alpha_j}^*(s, r_j, x_j, y_j) ds \text{ para } x_j > 0 \\ (3.5.1.2) \end{array} \right.$$

$$k_{\alpha_j}^{**}(r_j, 0, y_j) = k_{\alpha_j}(r_j, 0, y_j)$$

donde $k_{\alpha_j}^*(s, r_j, x_j, y_j)$ denota el núcleo auxiliar introducido en el Lema 3.4.2 y $k_{\alpha_j}(r_j, x_j, y_j)$ denota el núcleo unidimensional de Hille-Hardy.

Una fácil verificación muestra que

$$(3.5.1.3) \quad \kappa_\alpha^{**}(r, x, Y) = \prod_{j=1}^m k_{\alpha_j}^{**}(r_j, x_j, y_j) \geq K_\alpha(r, x, Y)$$

3) $\kappa_{\alpha}^{**}(r, x, Y)$ está bajo las condiciones del Lema

3.4.6.

Por tanto, las desigualdades maximales para $f(r, x)$ son válidas con la condición del Lema 3.4.6.

La convergencia puntual en $L^2_{e,m}(\alpha)$ resulta del hecho de que $f(r, x) \rightarrow f(x)$ en todo punto si f tiene un número finito de coeficientes de Fourier-Laguerre no nulos. Tal familia es densa en $L^2_{e,m}(\alpha)$. Este hecho con la desigualdad maximal para $L^2_{e,m}(\alpha)$ implica la convergencia en casi todo punto de $f(r, x)$ para todo función de $L^2_{e,m}(\alpha)$.

Desde que $L_{n,q}(\alpha) \subset L^p_{e,m}(\alpha)$ para $p \geq 2$, se tiene convergencia puntual también en este caso. Por otra parte también convergencia dominada (de la desigualdad maximal), por tanto $f(r, x)$ converge en la norma de $L^p_{e,m}(\alpha)$ si $p \geq 2$.

El conjunto de las funciones acotadas nulas fuera de un compacto es denso en $L^p_{e,n}(\alpha)$, $p \geq 1$ y también en $L^1_{e,m}(\alpha) \left[e^{-x} L^1_{e,n}(\alpha) \right]^k$ para $k \geq 0$. Las funciones de tal familia tienen la propiedad de que $f(r, x) \rightarrow f(x)$ en casi todo punto dado que $f \in L^2_{e,m}(\alpha)$.

Así, con las correspondientes desigualdades maximales, probar la convergencia puntual para ii), iii) y iv). La convergencia en norma en el caso ii) sigue del mismo tipo de argumento empleado en el caso $p \geq 2$.

Para funciones $\psi(x)$ bajo las condiciones del caso v) se tiene

$$(3.5.1.4) \quad |f(r, x)| \leq \int_{R_+^m} K_{\alpha}(r, x, y) |f(y)| e^{-y} y^{\alpha} dy$$

Tomando en cuenta que $\int_{\mathbb{R}_+^m} K_\alpha(r, x, y) e^{-Y} y^\alpha dy = 1$ y que $K_\alpha(r, ., Y) = K_\alpha(r, Y, .)$, del teorema de Fubini, se tiene

$$(3.5.1.4) \quad \|f(r, x)\|_1(\cdot, \alpha) \leq \|f\|_1(r, \alpha)$$

Si $v \in$

$$(3.5.1.5) \quad \|f(r, x) - f(x)\|_1(v, \alpha) \leq$$

$$\leq (\int_{\mathbb{R}_+^m} e^{-Y} y^\alpha dy)^{1/m} \|f(r, x) - f(x)\|_2(v, \alpha)$$

Por tanto, en particular en \mathbb{P} se tiene convergencia en la norma $L^1_{e,m}(\alpha)$. Luego, con la desigualdad (3.5.1.5) implican que $f(r, .)$ converge a $f(x)$ en la norma de $L^1_{e,m}(\alpha)$ para cada solución (con condiciones de v). Con esto el TEOREMA QUEDÓ CORRECTAMENTE DEMOSTRADO.

3.6-CLASIFICACIÓN MATEMÁTICA

3.6.1) Sea μ una medida elemental definida en \mathbb{R}_+^m y a variación total finita en \mathbb{R}_+^m . Entonces si

$$K(x) = \prod_{j=1}^m \lambda_j (1 + |x_j|^{\beta_j})^{-1}, \quad \beta_j > 1$$

y definiendo

$$\tilde{\tilde{\mu}}(x) = \left(\lambda_1, \dots, \lambda_m \right) \left| \left\{ \prod_{j=1}^m \lambda_j \right\} \int_{\mathbb{R}_+^m} K(\lambda(x-y)) d\mu(y) \right|$$

dónde los λ_j son parámetros reales no negativos sometidos

En consecuencia $\theta^{-1} \leq \lambda_i/\lambda_j \leq \theta$ $(i,j)=1,\dots,n$.

Entonces el exponente real fijo y no negativo.

Prop. 2 En las condiciones anteriores, se verifican los siguientes resultados:

$$i) |\mu(\tilde{\mu}(x), \varepsilon)| < c(\theta, m) \varepsilon^{-1} \int_{R_+^m} dY$$

en donde la variación de μ , $c(\theta, m)$ es una constante que depende de m ; ademas, $|\mu(\tilde{\mu}(x), \varepsilon)|$ denota la medida del conjunto $\{x \text{ tal que } \tilde{\mu}(x) > \varepsilon\}$.

ii) Si μ es medida singular elemental a variación total en R_+^m entonces

$$\lim_{\lambda \rightarrow (\infty, \dots, \infty)} \left\{ \prod_{j=1}^m \lambda_j \right\} \int_{R_+^m} K[\lambda(X-Y)] d\mu(Y) = 0 \text{ p.p.}$$

Toda vez que $\lambda \rightarrow (\infty, \dots, \infty)$ restrictivamente, es decir sometiendo a sus componentes $\theta^{-1} \leq (\lambda_i/\lambda_j) \leq \theta$, $\theta > 0$ fijo $(i, k=1, \dots, n)$.

Para i) véase el ejercicio ver PARTE I, LEMMA 1.5.

3.3.2) Lema: $f(Y)$ perteneciente a $L^1_{e, m}(\alpha)$ y denotemos por $f_k(r, \alpha)$ el integral $\int_{R_+^m} K_\alpha(r, X, Y) f(Y) e^{-Y} Y^\alpha dY$, entonces

$$i) |f_k(r, \alpha)| \leq D_\alpha(k) \int_{R_+^m} \left\{ \prod_{j=1}^m r_j^{1/2} (1-r_j)^{-1/2} \right\} \cdot$$

$$\cdot \left[1 + (x_j - r_j)^2 r_j / (1-r_j) \right]^{-1} |f(Y^2)| e^{-Y^2} Y^{2\alpha + 1} dY$$

toda vez que $1/N < x_j^2 < N$; $X^2 = (x_1^2, \dots, x_m^2)$.

La constante $D_{\alpha}(M)$ depende solamente de α y de M y es siempre finita para $M > 0$.

Demarcación: Introduciendo el cambio de variables $Y=S^2$, $X=\dot{S}^2$ en la expresión $\int_{R_+^m} F_{\alpha}(r, x, Y) |f(Y)| e^{-Y} Y^{\alpha} dY$ se obtiene

$$\begin{aligned}
 (3.6.2.1) \quad & 2^m \int_{R_+^m} \phi(\alpha) \left| \prod_{j=1}^m \left\{ (1-r_j)^{-1-\alpha_j} \exp(-s_j^2) \right. \right. \\
 & \cdot \exp\left[-(\dot{s}_j^2 + s_j^2)r_j/(1-r_j)\right] s_j^{2\alpha_j+1} \left(\int_{-1}^1 (1-t_j^2)^{\alpha_j-1/2} \right. \\
 & \cdot \exp\left[2\dot{s}_j s_j r_j^{1/2} t_j/(1-r_j)\right] dt_j \left. \right) \left| f(S^2) \right| ds \leqslant \\
 & \leqslant 2^m \phi(\alpha) \int_{R_+^m} \left| \prod_{j=1}^m \left\{ (1-r_j)^{-1-\alpha_j} \exp(-s_j^2) s_j^{2\alpha_j+1} \right. \right. \\
 & \cdot \exp\left[-(\dot{s}_j^2 + s_j^2)r_j/(1-r_j)\right] \left(\int_0^1 (1-t_j)^{\alpha_j-1/2} \right. \\
 & \cdot \exp\left[2\dot{s}_j s_j r_j^{1/2} t_j/(1-r_j)\right] dt_j \left. \right) \left| f(S^2) \right| ds
 \end{aligned}$$

Observemos ahora que

$$\begin{aligned}
 (3.6.2.2) \quad & (1-r_j)^{-1-\alpha_j} \exp\left[-(\dot{s}_j^2 + s_j^2)r_j/(1-r_j)\right] \exp(-s_j^2) \\
 & \cdot s_j^{2\alpha_j+1} \left(\int_0^1 (1-t_j^2)^{\alpha_j-1/2} \exp\left[2\dot{s}_j s_j r_j^{1/2} t_j/(1-r_j)\right] dt_j \right) = \\
 & = (1-r_j)^{-1-\alpha_j} \exp\left[-(\dot{s}_j - s_j r_j^{1/2})^2/(1-r_j)\right] \exp(\dot{s}_j^2) \exp(-s_j^2) \\
 & \cdot s_j^{2\alpha_j+1} \left(\int_0^1 (1-t_j^2)^{\alpha_j-1/2} \exp\left[-2\dot{s}_j s_j r_j^{1/2} (1-t_j)/(1-r_j)\right] dt_j \right)
 \end{aligned}$$

Supongamos ahora que $(s_j/\dot{s}_j) \geq 1/2$ y consideremos la siguiente estimación válida para $1/2 \leq r_j < 1$; $s_j > 0$; $\dot{s}_j > 0$

$$(3.6.2) \quad \int_0^1 (1-t_j)^{\alpha_j-1/2} \exp\left[-2\dot{s}_j s_j r_j^{1/2} (1-t_j)/(1-r_j)\right] dt_j \leq$$

$$\leq \int_0^1 |1-t_j|^{\alpha_j-1/2} \exp\left[-2^{1/2} \dot{s}_j s_j |1-t_j|/(1-r_j)\right] |1+t_j|^{\alpha_j-1/2} dt_j \leq$$

$$\leq \left\{ \max(1, 2^{\alpha_j-1/2}) \right\} \left[(\dot{s}_j s_j / (1-r_j))^{-\alpha_j-1/2} \right] \cdot$$

$$\cdot \int_{-\infty}^{\infty} |t|^{\alpha_j-1/2} \exp(-2^{1/2} |t|) dt$$

Por otra parte, donde una $(s_j/\dot{s}_j) \geq 1/2$ se tiene

$$(3.6.2.a) \quad (s_j/\dot{s}_j)^{\alpha_j+1/2} \leq 2^{\alpha_j+1/2} (s_j/\dot{s}_j)^{2\alpha_j+1}$$

Teniendo en cuenta (3.6.2.3) y (3.6.2.4) el miembro de la derecha de (3.6.2.2) está dominado por

$$(3.6.2.b) \quad F(\alpha_j) \exp(\dot{s}_j^2) s_j^{-(2\alpha_j+1)} (1-r_j)^{-1/2} \exp(-s_j^2) \cdot$$

$$\cdot \exp\left[-(\dot{s}_j - s_j r_j^{1/2})^2 / (1-r_j)\right] s_j^{2\alpha_j+1}$$

toda vez que $(s_j/\dot{s}_j) \geq 1/2$. La cota $F(\alpha_j)$ solamente depende de α_j .

Supongamos ahora que $0 < (s_j/\dot{s}_j) < 1/2$.

El miembro de la derecha de (3.6.2.2) está dominado por

$$(3.6.2.c) \quad \exp(\dot{s}_j^2) (1-r_j)^{-1-\alpha_j} \exp\left[-(\dot{s}_j - s_j r_j^{1/2})^2 / (1-r_j)\right].$$

$$\cdot \left(\int_0^1 (1-t_j)^{\alpha_j - 1/2} dt_j \right) \exp(-s_j^2) s_j^{2\alpha_j + 1}$$

Para $1/2 \leq r_j < 1$ y $0 < (\dot{s}_j/s_j) < 1/2$ las siguientes desigualdades son válidas

$$\begin{aligned}
 (3.6.2.7) \quad & \exp\left[-(\dot{s}_j - s_j r_j^{1/2})^2/2(1-r_j)\right] = \\
 & = \exp\left[-\dot{s}_j^2(1-r_j)^{1/2} s_j / \dot{s}_j\right]^2 / 2(1-r_j) \leq \\
 & \leq \exp\left[-\dot{s}_j^2/4(1-r_j)\right] \leq \\
 & \leq \left[\dot{s}_j^2/(1-r_j)\right]^{-\alpha_j - 1/2} \sup_t \left\{ \exp(-|t|/4) |t|^{\alpha_j + 1/2} \right\} = \\
 & = \left[\dot{s}_j^2/(1-r_j)\right]^{-\alpha_j - 1/2} g(\alpha_j).
 \end{aligned}$$

Por otra parte (3.6.2.6) puede ser escrito en la forma

$$\begin{aligned}
 (3.6.2.8) \quad & \left(\int_0^1 (1-t_j)^{\alpha_j - 1/2} dt \right) (1-r_j)^{-\alpha_j - 1/2} \exp(+\dot{s}_j^2) \cdot \\
 & \cdot \exp\left[-(\dot{s}_j - r_j^{1/2} s_j)^2/2(1-r_j)\right] (1-r_j)^{-1/2} \cdot \\
 & \cdot \exp\left[-(\dot{s}_j - r_j^{1/2} s_j)^2/2(1-r_j)\right] \exp(-s_j^2) s_j^{2\alpha_j + 1}
 \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta (3.6.2.7), (3.6.2.8) es menor o igual que

$$\begin{aligned}
 (3.6.2.9) \quad & \exp(\dot{s}_j^2) s_j^{-(2\alpha_j + 1)} h(\alpha_j) (1-r_j)^{-1/2} \exp(-s_j^2) \cdot \\
 & \cdot \exp\left[-(\dot{s}_j - r_j^{1/2} s_j)^2/2(1-r_j)\right] s_j^{2\alpha_j + 1}
 \end{aligned}$$

toda vez que $0 < (\dot{s}_j/s_j) < 1/2$, $1/2 \leq r_j < 1$.

$H(\alpha_j)$ depende de α_j solamente.

De (3.6.2.3) y (3.6.2.4) el miembro derecho de (3.6.2.2) es tanto menor por

$$(3.6.2.10) \quad \exp(\dot{s}_j^2) \cdot s_j^{-2\alpha_j-1} B(\alpha_j) (1-r_j)^{-1/2} \exp(-s_j^2) \cdot$$

$$\cdot \exp\left[-(\dot{s}_j - r_j)^2 / 2(1-r_j)\right] s_j^{2\alpha_j+1}$$

para $0 < r_j < \infty$, $0 < \dot{s}_j < \infty$ y $B(\alpha_j) = H(\alpha_j) + R(\alpha_j)$

Para $1/2 \leq r < 1$ no tiene

$$(3.6.2.11) \quad (1-r_j)^{-1/2} \exp\left[-(\dot{s}_j - r_j)^2 / 2(1-r_j)\right] \leq$$

$$\leq (2r_j)^{1/2} (1-r_j)^{-1/2} \exp\left[-(\dot{s}_j - r_j)^2 / 2(1-r_j)\right] =$$

$$= [2r_j/(1-r_j)]^{1/2} \exp\left\{-(1/2)\left[\dot{s}_j(1-r_j)^{1/2}/(1-r_j)^{1/2} + (\dot{s}_j - r_j)r_j^{1/2}/(1-r_j)^{1/2}\right]^2\right\}$$

$$\text{entonces } A(\dot{s}_j, r_j) = \dot{s}_j(1-r_j)^{1/2}/(1-r_j)^{1/2} =$$

$$= \dot{s}_j(1-r_j)^{1/2} 1/2 / (1+r_j)^{1/2} 1/2$$

tenemos

$$(3.6.2.12) \quad 0 \leq A(\dot{s}_j, r_j) \leq \dot{s}_j/2^{1/2}$$

Por tanto

$$(3.6.2.13) \quad \sup_{\begin{array}{l} 0 < s_j < N \\ 0 < u < \infty \\ 1/2 < r_j < 1 \end{array}} (1+u^2) \exp \left[-(\Lambda(s_j, r_j) + u)^2/2 \right] \leq M(N)$$

dónde $\Lambda(u)$ depende de N solamente.

Por tanto, el miembro de la derecha de (3.6.2.11) está dominado por

$$(3.6.2.14) \quad (2r_j/(1-r_j))^{1/2} \mu(N) (1 + r_j(s_j - \hat{s}_j)^2/(1-r_j))^{-1}$$

para $1/2 \leq r_j < 1, 0 < s_j < \infty, 0 < \hat{s}_j < N$.

Esto, junto con (3.6.2.10) concluye la demostración del TEOREMA.

3.6.3) LEMAS PARA EL TEOREMA 2: Del LEMA 3.3.3, ver NOTA 3.3.4, se sigue que bajo la suposición de que

$$\int_{R_m^m} e^{Y^2} d\mu < \infty, \quad \mu(r, x) \text{ puede ser representado por} \\ \int_{R_m^m} K_\alpha(r, x, y) d\mu.$$

Sea μ absolutamente continua respecto de la medida de Lebesgue, esto es, $\mu(e^{-Y} Y \delta Y) = f(Y) e^{-Y} Y^\alpha dY$.

La convergencia puntual en casi todo punto de $\mu(r, x^2) = f(r, x^2)$ para $r \rightarrow (1, \dots, 1)$ restrictivamente en cada conjunto $\omega_M = \{x \text{ tal que } 1/M < x_j^2 < M\}$, $M > 0$ sigue de los LEMAS (3.6.1) y (3.6.2) y del hecho de que para un subconjunto denso en $L_{e, m}^1(\alpha), f(r, x) \rightarrow f(x)$ cuando $r \rightarrow (1, \dots, 1)$ restrictivamente.

Para μ singular y no negativa se tiene la desigualdad siguiente

$$(3.6.3.1) \quad \mu(r, x^2) \leq D_\alpha(M) \int_{R_m^m} \left(\prod_{j=1}^m r_j^{1/2} (1-r_j)^{-1/2} \right).$$

$$\cdot (1 + r_j(x-y)^2/(1-r_j))^{\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \mu(e^{-y^2} y^{2x+1} dy) \quad)$$

se da con que $1/2 \leq r_j < 1$, $1/m < x_j^2 < M$, ($j=1, \dots, m$)

la afirmación procedente puede ser verificada tomando en cuenta que es la válida para μ absolutamente continua y considerando que existe una sucesión μ_n de tales medidas convergiendo débilmente a μ .

Del Lema 3.1 se sigue que $\mu(r, x^2) \rightarrow 0$ en casi todo punto en orden $r_j, M > 0$.

Esto completa la demostración del Teorema 2.

3.7.-OPERACIONES CON LAS POLINOMIAS DE LAGUERRE EN L^p , $p \geq 2$, DE LAS SERIES DE LAGUERRE Y DE LA CONVERGENCIA LACUNARIA EN SUS PARCIALES.

3.7.1) Indicaremos como

$$\sum_{k_1 \dots k_m} c_{k_1 \dots k_m} \phi_{k_1 \dots k_m}(x_1, \dots, x_m)$$

a la serie de Hermite o de Laguerre en cuestión.

3.7.2) diremos que la serie 3.7.1 es sumable (C.B.K., δ), $\delta > 0$ en el punto $\bar{x} = (\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_m)$, si

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} \sum_{n_1^2 + \dots + n_m^2 \leq \nu^2} (1 - (n_1^2 + \dots + n_m^2)/\nu^2)^{\delta} c_{n_1 \dots n_m} \cdot \\ \cdot \phi_{n_1}(\bar{x}_1) \dots \phi_{n_m}(\bar{x}_m)$$

existe y es finito.

3.7.3) Diremos que la serie 3.7.1 es sumable Abel esféricamente en el punto $\vec{x} = (x_1, \dots, x_m)$ si

$$\lim_{r \rightarrow 1^-} \sum_{k_1, \dots, k_m} r^{k_1 + \dots + k_m} c_{k_1 \dots k_m} \phi_{k_1}(x_1) \dots \phi_{k_m}(x_m)$$

existe y es finito.

3.7.4) TEOREMA: Si la serie $\sum_{k_1, \dots, k_m} c_{k_1 \dots k_m} \phi_{k_1}(x_1) \dots \phi_{k_m}(x_m)$, $\sum_{k_1, \dots, k_m} c_{k_1 \dots k_m}^2 < \infty$, es sumable Abel esféricamente en casi todo punto, entonces es sumable (C.B.R., δ) en casi todo punto para $\delta > 0$.

Para la demostración ver [14], pág. 148.

3.7.5) TEOREMA: La condición necesaria y suficiente para que $\sum_{k_1, \dots, k_m} c_{k_1 \dots k_m} \phi_{k_1}(x_1) \dots \phi_{k_m}(x_m)$, $\sum_{k_1, \dots, k_m} c_{k_1 \dots k_m}^2 < \infty$, sea sumable (C.B.R., δ) $\delta > 0$, que la sucesión

$$s_n(x_1, \dots, x_m) = \sum_{k_1^2 + \dots + k_m^2 \leq 2^n} c_{k_1 \dots k_m} \phi_{k_1}(x_1) \dots \phi_{k_m}(x_m)$$

tenga límite en casi todo punto.

Para la demostración ver [14], págs. 144 y 148.

Como consecuencia de estos resultados y los teoremas ya probados sobre de la sumabilidad Abel de las series múltiples de Laguerre y Hermite resultan los siguientes teoremas.

3.7.6) TEOREMA: Si $f \in L_G^p(\mathbb{R}^m)$ con $p \geq 2$, entonces la serie múltiple de Hermite de f es sumable (C.B.R., δ) $\delta > 0$ en casi todo punto y se tiene además

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(x_1^2 + \dots + x_m^2 \right)^{1/2} \leqslant 2^n \sum_{k_1 \dots k_m} \tilde{\mathcal{L}}_{k_1} \dots \tilde{\mathcal{L}}_{k_m} (x_1) \dots (x_m) = \\ = f(x_1, \dots, x_m)$$

en cada todo punto.

3.7.7) Laguerre: Si $f \in \mathcal{D}_{\alpha, \beta}(\infty)$, $\beta \geq 2$, $\alpha_j > -1/2$, $j=1, \dots, m$ entonces la serie polinomial de Laguerre de parámetros $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$ asociada a la función f es sumable (C.B.R., 6) $\delta > 0$ en todo punto, y se tiene además

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(x_1^2 + \dots + x_m^2 \right)^{1/2} \leqslant 2^n \sum_{k_1 \dots k_m} \tilde{\mathcal{L}}_{k_1}^{(\alpha_1)} (x_1) \dots \tilde{\mathcal{L}}_{k_m}^{(\alpha_m)} (x_m) = \\ = f(x_1, \dots, x_m)$$

en cada punto.

Ambrosio
Alberto González Domínguez

C. Caldeira

FCE y M.B.A.

BIBLIOGRAFIA

- [1] K.COTLAR, Condiciones de continuidad de operadores potenciales y de Hilbert. Cursos y Seminarios de Matemática No.2 (1950), Universidad Nacional de Buenos Aires.
- [2] A.GONZALEZ DOMINGUEZ, Contribución a la Teoría de Funciones de Hille. Ciencia y Técnica (1941), p.475-521.
- [3] E.HILLE, A Class of Reciprocal Functions. Ann. Math. 2nd. Series, 27 (1926), p.426-464.
- [4] -----, Bemerkung zu einer Arbeit des Herrn Müntz. Math. Zeitschrift 32 (1930) p.421-425.
- [5] I.I.HIRSCHMAN & D.V.WIDDER, The Convolution Transform. Princeton 1955.
- [6] G.SZEGÖ, Orthogonal Polynomials. Amer. Math. Soc. Coll. Publ. 23 (1959) (Revised Edition).
- [7] D.V. WIDDER, Necessary and Sufficient Conditions for the Representation of Functions by a Weierstrass Transform. Trans. Amer. Math. Soc. 71 (1951) p.430-439.
- [8] A.ZYGMUND, Trigonometrical Series. Vols. I y II (1959).

FCEyN-BA.

- [9] A. ERDÉLYI, W. MAGNUS, F. OBERLEITINGER, F.G. TRICOMI,
Higher Transcendental Functions. Bateman Manuscript
Project, Vols II y III, California Institute of Technology
(1953).
- [10] E. KOGBELLIANTZ, Contribution à l'étude du saut
d'une fonction donnée par son développement en séries
d'Hermite ou de Laguerre. Trans. Amer. Math. Soc. 38 (1935)
p. 10-47.
- [11] E. NILLER, On Laguerre's Series I. Proceedings Nat.
Acad. Sciences, 12 (1926) p. 261-265.
- [12] -----, On Laguerre's Series II, Proc. Nat. Acad.
Sciences, 12 (1926) p. 265-269.
- [13] -----, On Laguerre's Series III. Proc. Nat. Acad.
Sciences, 12 (1926) p. 348-352.
- [14] J. Mitchell, On the Spherical Summability of
Multiple Orthogonal Series. Trans. Amer. Math. Soc. 71 (1951)
p. 136-151.

UNIVERSIDAD NACIONAL DE BUENOS AIRES
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales

TRANSFORMACION MULTIPLE de
WEIERSTRASS y SUMABILIDAD de
las SERIES MULTIPLES de HERMITE
y de LAGUERRE

R E S U M E N

•

CALIXTO PEDRO CALDERON

1334
R
q. 3

Tesis presentada para optar al
título de Doctor en Matemática

1969

1334
R
q. 3

Reg. 201334

INTRODUCCIÓN

El propósito de este trabajo es extender al caso m -dimensional los resultados concernientes la fórmula de inversión de la Transformación Múltiple de Weierstrass, que establece Abel de las series múltiples de Jacquier y Hermite.

Existe una vinculación intrínseca entre la Transformación Múltiple, interrelacionada con la serie múltiple de Hermite. Un tratamiento profundo y sistemático de ambos problemas en el caso $m = 1$ variable puede encontrarse en [2] y [3]. En lo que se refiere a la sumabilidad Abel de la serie simple Hermite y de Jacquier se pueden ver teoremas de tipo general en [6], pero imponiendo fuertes restricciones en el crecimiento de la función cerca de ∞ . También en resultados concernientes a la sumabilidad Abel de ambas series en [10], [11], [12] y [13].

Nuestro enfoque del problema presenta novedades aún en el caso 1-dimensional; por ejemplo los Teoremas Maximales asociados a las aproximaciones Abel, así como los teoremas de convergencia dominada. Tales resultados también se consiguen en lo que se refiere a la fórmula de inversión de la Transformación Múltiple de Weierstrass introducida en nuestro trabajo.

El caso m -dimensional no ha sido tratado hasta ahora en ninguno de los tres problemas objeto del presente trabajo. En la parte final se dan teoremas concernientes a otros tipos de sumabilidad usando los resultados de [14].

El trabajo está dividido en tres partes.

La Parte I estudia problemas de carácter general concernientes a diferenciación de integrales múltiples y a convergencia de integrales singulares cuasipositivas.

La Parte II estudia la Transformación Múltiple de Wcierstrass y la sumabilidad Abel de la Serie Múltiple de Hermite. Se dan condiciones necesarias y suficientes para que una función analítica de m variables complejas sea transformada de Wcierstrass de una función de clase $L_G^p(\mathbb{R}^m)$, $p > 1$. Así mismo se estudia la validez de la fórmula de inversión introducida por E.Hille en [3] en el caso de una variable, así como los teoremas maximales asociados a esta fórmula de inversión.

En lo que se refiere a la sumabilidad Abel de la Serie Múltiple de Hermite, se obtienen el mismo tipo de resultados que los obtenidos por Zygmund y Marcinkiewicz para el caso de la Serie Múltiple de Fourier. La diferencia consiste en que en el caso de la Serie Múltiple de Fourier la medida base es la de Lebesgue en el cubo fundamental Q de aristas de longitud 2π y el sistema ortonormal tiene la propiedad de ser una familia de funciones uniformemente acotadas; en el caso de Hermite la medida es $\exp -|x|^2 dx$, es decir no es invariante por traslaciones, y la familia de polinomios ortogonales no constituye una familia uniformemente acotada. Estas diferencias se traducen en las clases L_G^p cuando $1 \leq p < 2$. Para asegurar el hecho de poder representar a las medias Abel mediante una integral singular cuando la función es de clase L_G^p , $1 \leq p < 2$, hay que

introducir condiciones adicionales.

Finalmente se estudia la convergencia restrictiva de las medias Abel de una medida a variación total finita.

La Parte III trato del estudio de la sumabilidad Abel de la Serie Multíple de Laguerre, y se extienden todos los teoremas probados para Series de Hermite a este caso.

Se ha comprobado que la integral singular que da la suma Abel de la Serie de Laguerre es bastante más complicada que la correspondiente de Hermite, y por tanto las acotaciones de la misma incumen casi la totalidad de la parte correspondiente. Esta dificultad aparece por el hecho de que se dan teoremas generales para Series de Laguerre de parámetro arbitrario. Solamente se impone la restricción de que los parámetros α_j sean todos mayores que $-1/2$. El caso cuando los α_j están comprendidos en $(-1, -1/2]$ no es tratado aquí. Sin embargo esperamos poder completar el resultado en un trabajo posterior.

Finalmente, como consecuencia de la Sumabilidad Abel rectangular (nuestro caso) resultan teoremas de Sumabilidad Cesáro-Riesz-Bochner esféricas como consecuencias de teoremas probados en [14] en el caso L^2 .

El caso $n < 2$ es un problema abierto. Así como el caso de convergencia ordinaria para $m > 1$.

Quiero en esta oportunidad agradecer al Doctor Alberto González Domínguez, quien me propuso el problema, por su asistencia durante la preparación del trabajo y por sus oportunas sugerencias para mejorar algunas demostraciones.

C.P.C.

Buenos Aires, abril de 1969.

RESUMEN

III.1) REVISAR LOS RESULTADOS CONCERNIENTES A LA FORMULA DE INVERSIÓN DE LA TRANSFORMACION MULTIPLE DE WEIERSTRASS.

III.1.1) Sea μ una medida elemental definida sobre \mathbb{R}^m ; $I_\mu(z)$ denota su transformada de Weierstrass, es decir

$$I_\mu(z) = (\pi)^{m/2} \int_{\mathbb{R}^m} \exp\left[-\sum_{j=1}^m (z_j - t_j)^2\right] d\mu$$

toda vez que

$$\int_{\mathbb{R}^m} \left| \exp\left[-\sum_{j=1}^m (z_j - t_j)^2\right] \right| dw < \infty$$

para todo $z = (z_1, \dots, z_m)$ en \mathbb{C}^m . (dw denota la variación de $d\mu$)

III.1.2) Definimos como $L^p_G(\mathbb{R}^m)$ a la clase de funciones medibles tales que

$$\|f\|_{p,G} = \left(\int_{\mathbb{R}^m} |f|^p e^{-|x|^2} dx \right)^{1/p} < \infty, p \geq 1$$

III.1.3) La FORMULA DE INVERSIÓN

La fórmula de inversión está dada por

$$\lim_{(s_1, \dots, s_m) \rightarrow (1, \dots, 1)} (\pi)^{-m/2} \int_{\mathbb{R}^m} \exp\left[-\sum_{j=1}^m (ix_j + y_j)^2\right] \cdot I_\mu(is_1 y_1, \dots, is_m y_m) dy$$

donde los x_j, y_j son reales, y los s_j son tales que $0 < s_j < 1$. El límite será entendido puntualmente o en norma según los casos determinados en los dos siguientes teoremas.

II.1.4) TEOREMA: Sea $I_f(z)$ la Transformada de Weierstrass de una función f , $I_f(z)$ posiblemente definida sólo en $z_j = iy_j$ donde los y_j son reales.

Denotando

$$f(s, X) = (\pi i)^{-m/2} \int_{\mathbb{R}^m} \exp \left[- \sum_{j=1}^m (ix_j + y_j)^2 \right] I_f(is_1 y_1, \dots, is_m y_m) dy$$

$$f^* = \sup_{s_1, \dots, s_m} |f(s, X)| \quad ; 0 < s_j < 1 ; j=1, \dots, m.$$

siendo x_j, y_j reales.

Entonces se tienen las siguientes propiedades para los operadores $f^*(X)$ y $f(s, X)$

i) Si $p > 1$ y $f \in L_G^p(\mathbb{R}^m)$

$$a) \|f^*\|_{p, G} < C(p) \|f\|_{p, G}$$

donde $C(p)$ depende solamente de p .

$$b) \|f(s, X) - f(X)\|_{p, G} \rightarrow 0 \text{ cuando } (s_1, \dots, s_m) \rightarrow (1, \dots, 1)$$

ii) Si $|f|(\log^+|f|)^m \in L_G^1(\mathbb{R}^m)$

$$a) \|f^{\#}\|_{1,G} \leq A_m + B_m \int_{\mathbb{R}^m} |f|(1+\log^+|f|)^m e^{-|x|^2} dx$$

$$b) \|f(s,x) - f(x)\|_{1,G} \rightarrow 0 \text{ cuando } (s_1, \dots, s_m) \rightarrow (1, \dots, 1)$$

A_m y B_m dependen sólo de la dimensión m .

$$iii) \text{ Si } |f|(1+\log^+|f|)^{m-1} \in L^1_G(\mathbb{R}^m), 0 < \alpha < 1$$

$$a) \|(f^{\#})^{\alpha}\|_{1,G} \leq C_{m,\alpha} + D_{m,\alpha} \int_{\mathbb{R}^m} |f|(1+\log^+|f|)^{m-1} e^{-|x|^2} dx$$

$$b) \| |f(x) - f(s,x)|^{\alpha} \|_{1,G} \rightarrow 0 \text{ con } (s_1, \dots, s_m) \rightarrow (1, \dots, 1)$$

iv) Para α en las condiciones de i), ii) y iii), $f(s,x)$ converge en casi todo punto a $f(x)$.

II.1.5) CASO LÍMITE $P = 1$

TEOREMA: μ es una medida elemental definida en \mathbb{R}^m , tal que su variación d μ cumple

$$\int_{\mathbb{R}^m} e^{-|t|^2} d\mu < \infty$$

para su transformada de Weierstrass $I_{\mu}(z)$, (bien definida sobre las rectas iy_j , ($j=1, \dots, m$)) vale

$$\lim_{(s_1, \dots, s_m) \rightarrow (1, \dots, 1)} (\pi)^{-m/2} \int_{\mathbb{R}^m} \exp \left[- \sum_{j=1}^m (ix_j + y_j)^2 \right] \cdot I_{\mu}(is_1y_1, \dots, is_my_m) dy = \phi(x) \text{ p.p.}$$

$\phi(x)$ es la función de densidad asociada a μ .

$\lim_{(s_1, \dots, s_m) \rightarrow (1, \dots, 1)}$ significa que se toma límite pero

imponiendo las siguientes restricciones a los s_j

$$\theta < (1-s_i)/(1-s_j) < \theta^{-1}$$

para todo par (i, j) y $\theta > 0$ fijo.

II.1.6) ANALITICIDAD DE LAS TRANSFORMADAS Y CLASES DE FUNCIONES.

TEOREMA: las siguientes dos condiciones son equivalentes:

i) La función $I(z_1, \dots, z_m)$, definida en todo el m -plano complejo C^m es transformada de Weierstrass de una función de clase $L_G^p(\mathbb{R}^m)$, $p > 1$.

ii) La función $I(z_1, \dots, z_m)$, analítica en todo C^m tiene las propiedades

a) $\int_{\mathbb{R}^m} |I(is_1y_1, \dots, is_my_m)| e^{-y^2} dy < \infty$

si $0 < s_j < 1$, $j=1, \dots, m$.

b) $\int_{\mathbb{R}^m} \left| \int_{\mathbb{R}^m} \exp \left[- \sum_{j=1}^m (ix_j + y_j)^2 \right] I(is_1y_1, \dots, is_my_m) \right|^p e^{-|x|^2} dx <$

donde los x_j, y_j son reales, $0 < s_j < 1$, $j=1, \dots, m$; A no depende de los s_j .

OBSERVACIONES: Los TEOREMAS II.1.4 y II.1.5 constituyen no sólo una extensión al caso m -dimensional de las fórmulas de inversión estudiadas en [3] y [4], sino que se introducen otro tipo de Clases de Funciones, así como la convergencia dominada y en norma. En [2] se introducen clases $L^p(-\infty, \infty)$ respecto de la medida de Lebesgue y se obtienen resultados muy elegantes respecto a condiciones necesarias y suficientes para que una función sea Transformada de Weierstrass de una función de clase $L^p(-\infty, \infty)$. La fórmula de inversión en este caso está adaptada a las mencionadas clases de funciones y se basa en las sumas Abel de la serie de "Funciones de Hermite" y los teoremas de inversión son producidos por el mismo núcleo singular salvo un factor exponencial. El TEOREMA II.1.5 extiende a \mathbb{R}^m un teorema probado en [2] referente a la inversión de la Transformada de una medida a mas total finita (caso que no fue estudiado ni en [3] ni en [4]).

II.2) RESULTADOS CONCERNIENTES A LA SUMABILIDAD ABEL DE LA SÉRIE MULTIPLE DE HERMITE

II.2.1) Vamos a definir el siguiente sistema orthonormal completo de polinomios en $L^2_G(\mathbb{R}^m)$

$$\begin{aligned} H_n^*(x) &= H_{n_1, \dots, n_m}^*(x) = \\ &= (\pi)^{-m/4} \prod_{j=1}^m 2^{-n_j/2} (n_j!)^{-1/2} H_{n_j}(x_j) \end{aligned}$$

donde $H_{n_j}(x_j) = \exp(x_j^2) (d^{n_j}/dx_j^{n_j}) \exp(-x_j^2)$

Si $\int_{\mathbb{R}^m} |f| |H_n^*(x)| e^{-|x|^2} dx < \infty$ para todo n , entonces asociamos a f su serie de Hermite, es decir

$$f \sim \sum_n c_n H_n^*(x) = \sum_{n_1 \dots n_m} c_{n_1 \dots n_m} H_{n_1 \dots n_m}^*(x)$$

Del mismo modo asociamos a f sus medias Abel, es decir

$$\begin{aligned} f(r, x) &\sim \sum_{n_1 \dots n_m} r_1^{n_1} \dots r_m^{n_m} c_{n_1 \dots n_m} H_{n_1 \dots n_m}^*(x) = \\ &= \sum_n r^n c_n H_n^*(x) \end{aligned}$$

donde $0 < r_j < 1$, $j=1, \dots, m$ y $c_{n_1 \dots n_m}$ definido como es usual es decir

$$c_{n_1 \dots n_m} = \int_{\mathbb{R}^m} f(x) H_{n_1 \dots n_m}^*(x) e^{-|x|^2} dx$$

II.2.2) TEOREMA:

i) Si $f \in L_G^p(\mathbb{R}^m)$, $p \geq 2$, entonces se tiene

a) Los coeficientes de Fourier-Hermite están bien definidos.

b) $f(r, x) = \sum_n r^n c_n H_n^*(x)$ para todo r tal que

$0 < r_j < 1$, $j=1, \dots, m$ y la serie del segundo miembro converge absolutamente cuando $0 < r_j < 1$, $j=1, \dots, m$.

c) Si $f^*(X) = \sup_{r_1, \dots, r_m} |f(r, X)|$; $0 < r_j < 1$, $j=1, \dots, m$.

$$\|f^*\|_{p, G} \leq C(p) \|f\|_{p, G}$$

dónde $C(p)$ depende de p solamente.

d) $\|f(r, X) - f(X)\|_{p, G} \rightarrow 0$ cuando $(r_1, \dots, r_m) \rightarrow (1, \dots, 1)$

e) $f(r, X) \rightarrow f(X)$ en casi todo punto cuando $(r_1, \dots, r_m) \rightarrow (1, \dots, 1)$

ii) Si $f \in L_G^p(\mathbb{R}^m)$, $1 < p < 2$ y $\int_{\mathbb{R}^m} |f|^p e^{-|X|^2/2} dX < \infty$

se tienen las mismas conclusiones a), b), c), d) y e) de i).

iii) Si $\int_{\mathbb{R}^m} |f|(1 + \log^+ |f|)^m e^{-|X|^2} dX < \infty$ y además

$\int_{\mathbb{R}^m} |f|^p e^{-|X|^2/2} dX < \infty$ se tienen a), b) y e) y valen

c') $\|f^*\|_{1, G} \leq A_m + B_m \int_{\mathbb{R}^m} |f|(1 + \log^+ |f|)^m e^{-|X|^2} dX$

d') $\|f(r, X) - f(X)\|_{1, G} \rightarrow 0$ cuando $r \rightarrow (1, \dots, 1)$.

iv) Si $\int_{\mathbb{R}^m} |f|(1 + \log^+ |f|)^{m-1} e^{-|X|^2} dX < \infty$ y además

$\int_{\mathbb{R}^m} |f|^p e^{-|X|^2/2} dX < \infty$, $0 < \alpha < 1$, entonces valen a),

b) y e) y se tienen

$$c'') \quad \| (f^*)^\alpha \|_{1,G} \leq C_{m,\alpha} + D_{m,\alpha} \int_{\mathbb{R}^m} |f| (1 + \log^+ |f|)^{m-1} e^{-|x|^2} dx$$

$$d'') \quad \| |f(r,x) - f(x)|^\alpha \|_{1,G} \rightarrow 0 \quad \text{cuando } r \rightarrow (1, \dots, 1)$$

Las constantes A_m, B_m dependen sólo de $m, C_{m,\alpha}$ y $D_{m,\alpha}$ dependen solamente de m y de α .

II.2.3) CASO LÍMITE $n = 1$.

TEOREMA: Sea μ una medida elemental definida en \mathbb{R}^m y supongamos que

$$\int_{\mathbb{R}^m} e^{|x|^2/2} dw < \infty$$

donde dw denota la variación de μ .

Entonces

a) Los coeficientes de Fourier-Hermite $c_n = \int_{\mathbb{R}^m} H_n^*(x) d$

están bien definidos para todo $n = (n_1, \dots, n_m)$

b) $\mu(r,x) = \sum_n r^n c_n H_n^*(x)$

y la serie de la derecha converge absolutamente para

$$0 < r_j < 1, \quad j=1, \dots, m.$$

c) $\lim_{(r_1, \dots, r_m) \rightarrow (1, \dots, 1)} \mu(r,x) = \phi(x)$

en casi todo punto. $\phi(X)$ denota la densidad de $d\mu$ respecto de $e^{-|X|^2} dX$. (El límite restrictivo como siempre cuando los r_j están sujetos a las condiciones $\theta^{-1} < (1-r_j)/(1-r_i) < \theta$ para todo $(i,j), \theta > 0$ fijo).

OBSERVACIONES: Los TEOREMAS II.2.2 y II.2.3 constituyen una extensión al caso m -dimensional de los teoremas concernientes a la sumabilidad Abel de la serie ordinaria de Hermite probados en [2], [3] y [4]. En el caso 1-dimensional presentamos dos novedades. Una de ellas es la acotación de la función $f^*(X) = \sup_r f(r, X)$ y otra es la convergencia en norma L^p_G de las medias Abel.

III.1) REVISIÓN DE LOS RESULTADOS CONCERNIENTES A LA SUMABILIDAD ABEL DE LA SERIE MÚLTIPLE DE LAGUERRE.

III.1.1) $L^p_{e,m}(\alpha)$ denota la familia de las funciones medibles tales que

$$\begin{aligned}\|f\|_{p,e,m}(\alpha) &= \int_{R^m} |f|^p e^{-\sum_j x_j} (\prod_{j=1}^m x_j^{\alpha_j}) dx_1 \dots dx_m = \\ &= \int_{R^m} |f|^p e^{-X} X^\alpha dX < \infty\end{aligned}$$

donde $p \geq 1$, $R^m_+ = R_+ \times \dots \times R_+$, α_j son reales tales que $-1/2 < \alpha_j < m$, $j=1, \dots, m$.

III.1.2) $\{L_n^{(\alpha)}\}$ denota para α fijo, una familia ortogonal completa en $L^2_{e,m}(\alpha)$, de polinomios en m variables

definidos de la siguiente manera

$$\tilde{L}_{(n)}^{(\alpha)}(x) = \prod_{j=1}^m \Gamma(n_j+1) \prod_{j=1}^m -1/2(n_j + \alpha_j + 1) L_{n_j}^{(\alpha_j)}(x_j)$$

donde $L_{n_j}^{(\alpha_j)}(x_j)$ es el n_j -ésimo polinomio de Laguerre de parámetro α_j . (ver [6], p.99)

III.1.3) Si $f \sim \sum_n c_n \tilde{L}_{(n)}^{(\alpha)}(x)$ donde $c_n = \int_{\mathbb{R}_+^m} f e^{-x} x^\alpha dx$, suponiendo que las integrales existan para todo $n = (n_1, \dots, n_m)$ llamaremos $f(r, x)$ a su aproximante Abel, es decir

$$\begin{aligned} f(r, x) &= \sum_n r^n c_n \tilde{L}_{(n)}^{(\alpha)}(x) = \\ &= \sum_{n_1 \dots n_m} r_1^{n_1} \dots r_m^{n_m} c_{n_1 \dots n_m} \tilde{L}_{n_1}^{(\alpha_1)}(x_1) \dots \tilde{L}_{n_m}^{(\alpha_m)}(x_m) \end{aligned}$$

suponiendo que la serie del segundo miembro converge absolutamente para $0 < r_j < 1$, $j=1, \dots, m$.

Análogamente consideramos $\mu \sim \sum_n c_n \tilde{L}_{(n)}^{(\alpha)}(x)$ donde

$$c_n = \int_{\mathbb{R}_+^m} \tilde{L}_{(n)}^{(\alpha)}(x) d\mu \quad y \quad \mu(r, x) = \sum_n r^n c_n \tilde{L}_{(n)}^{(\alpha)}(x)$$

suponiendo que la serie de la derecha converge absolutamente para $0 < r_j < 1$, $j=1, \dots, m$.

Finalmente, denotaremos como $f^*(x)$ al $\sup_{r_1 \dots r_m} |f(r, x)|$, $0 < r_j < 1$, $j=1, \dots, m$.

Análogamente definimos $\mu^*(x)$.

FCEVANIA.

III. 1.4) PROBLEMA:

i) Si $f \in L_{e,m}^p(\alpha)$, $n \geq 2$, $\hat{f}(r, i)$ es bien definida y se tiene

$$\text{A}) \quad \| f(r, \cdot) - f(x) \|_p(e, \alpha) \rightarrow 0 \quad \text{con} \quad r \rightarrow (1, \dots, 1)$$

$$\text{B}) \quad \hat{f}(r, \cdot) \rightarrow \hat{f}(x) \quad \text{p.p.} \quad \text{con} \quad r \rightarrow (1, \dots, 1)$$

$$\text{C}) \quad \| \hat{f}^{\#} \|_1(e, \alpha) \leq C(n) \| f \|_p(e, \alpha)$$

donde $C(n)$ depende sólo de n .

$$\text{ii}) \quad f(x \exp(\lambda \sum_1^m x_j)) \in L_{e,n}^p(\alpha), \quad 1 < p < 2, \quad \text{para}$$

algún $\lambda > 0$ tal que $1/2 > \lambda > (2-n)/(2p)$, entonces

valen las conclusiones A), B) y C) de i) para f .

$$\text{iii}) \quad \left\{ f | (\log^+ |f|)^m \exp(\sum_1^m x_j/2) \right\} \in L_{e,m}^1(\alpha), \quad \text{entonces}$$

$$\text{A}) \quad f(r, \cdot) \rightarrow f(x) \quad \text{p.p.} \quad \text{con} \quad r \rightarrow (1, \dots, 1)$$

$$\text{B}) \quad \| f^{\#} \|_1(e, \alpha) \leq C_\alpha + C'_\alpha \| |f| (\log^+ |f|)^m \|_1(e, \alpha)$$

$$\text{iv}) \quad \text{Si } |f| (\log^+ |f|)^{m-1} \exp(\sum_1^m x_j/2) \in L_{e,m}^1(\alpha) \quad \text{y además}$$

$0 < \theta < 1$, se tiene

FÓRMULA.

A) $f(r, x) \rightarrow f(x)$ p.p. con $r \rightarrow (1, \dots, 1)$

$$\|f(r, x)^{\beta}\|_1(\epsilon, \alpha) \leq D_{\alpha, \beta} + D'_{\alpha, \beta} \| |f| (\log^+ |f|)^{m-1} \|_1(\epsilon, \alpha)$$

donde $D_{\alpha, \beta}$ dependen de α y β , $D'_{\alpha, \beta}$ dependen de m, α y β .

*) Si $|c| \exp(\sum_1^m x_j / 2) \in L^1_{\epsilon, m}(\alpha)$, entonces

$$\|f(r, x) - f(x)\|_1(\epsilon, \alpha) \rightarrow 0 \quad \text{con } r \rightarrow (1, \dots, 1)$$

III.1.5) TEOREMA: Si μ es una medida elemental definida en \mathbb{R}_+^m a variación total finita en \mathbb{R}_+^m y además vale que

$$\int_{\mathbb{R}_+^m} e^{X/2} d\mu < \infty$$

donde $d\mu$ denota la variación de $d\mu$, entonces

$$\lim_{r \rightarrow (1, \dots, 1)} \text{restricto} \quad \mu(r, x) = \phi(x) \quad \text{p.p.}$$

$\phi(x)$ es la función de densidad de μ respecto de la medida $e^{-X} \gamma^\alpha dy$.

III.2) SUMABILIDAD CESARO-BOCHNER-RIESZ DE LAS SERIES MÚLTIPLES DE LAGUERRE Y HERMITE.

Dada una serie ortogonal múltiple

$$\sum_{n_1 \dots n_m}^1 c_{n_1 \dots n_m} \phi_{n_1}(x_1) \dots \phi_{n_m}(x_m)$$

decimos que es sumable Cesaro-Bochner-Riesz de orden $\delta > 0$ en $(\mathbb{R}_1, \dots, \mathbb{R}_m)$ si

$$\lim_{N \rightarrow \infty} k_1^2 + \dots + k_m^2 \leq N^2 (1 - (k_1^2 + \dots + k_m^2)/N^2)^{\delta}.$$

$$\cdot c_{k_1 \dots k_m} \phi_{k_1}(\mathbb{R}_1) \dots \phi_{k_m}(\mathbb{R}_m)$$

existe y es finito.

Llamaremos $M_n^\delta(f)(X)$, $m_n^\delta(f)(X)$ a las medias Cesaro-Bochner-Riesz de orden $\delta > 0$ de la serie múltiple de Laguerre de parámetro α de una función f y de la serie múltiple de Hermite de una función φ respectivamente.

Por $S_{n,\alpha}(f)$ y $s_n(\varphi)$ denotaremos las sumas parciales esféricas de orden n respectivamente.

III.2.1) TEOREMA:

i) Si $f \in L_{\alpha,m}^p(\mathbb{R}^m)$, $p \geq 2$, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$ tal que

$-1/2 < \alpha_j < \infty$ $j=1, \dots, m$. Entonces para todo $\delta > 0$ se

tiene

A) $\lim_{n \rightarrow \infty} M_n^\delta(f)(X) = f(X) \quad p.p.$

B) $\lim_{k \rightarrow \infty} S_{2^k, \alpha}(f)(X) = f(X) \quad p.p.$

ii) Si $\varphi \in L_G^p(\mathbb{R}^m)$, $p \geq 2$, entonces para todo $\delta > 0$ se tiene

$$A) \lim_{n \rightarrow \infty} m_n^\delta(\varphi)(x) = \varphi(x) \quad p.p.$$

$$B) \lim_{k \rightarrow \infty} s_{\gamma_k}(\varphi)(x) = \varphi(x) \quad p.p.$$

OBSERVACIÓN: Los TEOREMAS III.1.4 y III.1.5 son generalizaciones a dimensiones de teoremas en [11], [12] y [13]. Así mismo, presenta como novedades la convergencia en $L_{c,m}^p(\alpha)$ de las medias Abel así como la acotación de $f^* = \sup_{r_1 \dots r_m} |f(r,x)|$ aún en el caso 1-dimensional.

Con respecto al TEOREMA III.2.1 es una extensión al caso de Series Múltiple de Laguerre y Hermite de un teorema conocido de Series Múltiples de Fourier.

anverso

A. González Domínguez



FCEyNA.

BIBLIOGRAFIA

- [1] H.COTLAR, Condiciones de continuidad de operadores potenciales y de Hilbert. Curso y Seminarios de Matemática No.2 (1950), Universidad Nacional de Buenos Aires.
- [2] A.GONZALEZ DOMINGUEZ, Contribución a la Teoría de Funciones de Hille. Ciencia y Técnica (1941), p.475-521.
- [3] E.HILLE, A Class of Reciprocal Functions. Ann. Math. 2nd. Series, 27 (1926), n.426-464.
- [4] -----, Bemerkung zu einer Arbeit des Herrn Mintz. Math. Zeitschrift 32 (1930) p.421-425.
- [5] J.T.HIRCHMAN & D.V.WIDDER, The Convolution Transform. Princeton 1955.
- [6] G.BECKÖ, Orthogonal Polynomials. Amer. Math. Soc. Coll. Publ. 23 (1959) (Revised Edition).
- [7] D.V.WIDDER, Necessary and Sufficient Conditions for the representation of Functions by a Weierstrass Transform. Trans. Amer. Math. Soc. 71 (1951) p.430-439.
- [8] A.ZYGMUND, Trigonometrical Series. Vols. I y II (1959).

17. 18. 19. 20. 21.

22.

23. 24. 25. 26. 27. 28.

29.

,

29. 30. 31.

32.