

## Tesis de Posgrado

# Teoría de la inestabilidad por deslizamiento en los plasmas

Gratton, Fausto Tulio Livio

1968

Tesis presentada para obtener el grado de Doctor en Ciencias Físicas de la Universidad de Buenos Aires

Este documento forma parte de la colección de tesis doctorales y de maestría de la Biblioteca Central Dr. Luis Federico Leloir, disponible en [digital.bl.fcen.uba.ar](http://digital.bl.fcen.uba.ar). Su utilización debe ser acompañada por la cita bibliográfica con reconocimiento de la fuente.

This document is part of the doctoral theses collection of the Central Library Dr. Luis Federico Leloir, available in [digital.bl.fcen.uba.ar](http://digital.bl.fcen.uba.ar). It should be used accompanied by the corresponding citation acknowledging the source.

**Cita tipo APA:**

Gratton, Fausto Tulio Livio. (1968). Teoría de la inestabilidad por deslizamiento en los plasmas. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad de Buenos Aires.  
[http://digital.bl.fcen.uba.ar/Download/Tesis/Tesis\\_1310\\_Gratton.pdf](http://digital.bl.fcen.uba.ar/Download/Tesis/Tesis_1310_Gratton.pdf)

**Cita tipo Chicago:**

Gratton, Fausto Tulio Livio. "Teoría de la inestabilidad por deslizamiento en los plasmas". Tesis de Doctor. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad de Buenos Aires. 1968.  
[http://digital.bl.fcen.uba.ar/Download/Tesis/Tesis\\_1310\\_Gratton.pdf](http://digital.bl.fcen.uba.ar/Download/Tesis/Tesis_1310_Gratton.pdf)

UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES

FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

TEORIA DE LA  
INESTABILIDAD POR DESLIZAMIENTO EN LOS PLASMAS

FAUSTO TULIO LIVIO GRATTON

1310  
y2

Tesis presentada para optar al título de Doctor en Ciencias Físicas.

AÑO: 1968 .

# TEORIA DE LA INESTABILIDAD POR DESLIZAMIENTO EN LOS PLASMAS

I	INTRODUCCION	1.
II	MODOS DE OSCILACION ELECTROSTATICOS	
1.	Las ecuaciones de los plasmas	9.
2.	Teoría de las pequeñas perturbaciones	12.
3.	Las ecuaciones diferenciales de la inestabilidad por deslizamiento	15.
III	INESTABILIDAD POR DESLIZAMIENTO EN PLASMAS FRIOS	
1.	Propiedades generales	22.
2.	Relación de dispersión para el perfil en escalón	26.
3.	Chorros de plasma	32.
4.	Inestabilidad por deslizamiento de dos haces contrapuestos	40.
5.	Regiones de transición	47.
IV	INESTABILIDAD POR DESLIZAMIENTO EN UN PLASMA FRIO CON CAMPO MAGNETICO EXTERNO	
1.	Modos de oscilación electrostáticos para un perfil en escalón con $k_z = 0$	53.
2.	Modos de oscilación con longitud de onda pequeña en la dirección $z$ ( $k_z \gg k_y$ )	65.
V	CARACTERISTICAS FISICAS DE LA INESTABILIDAD	
1.	Mecanismo físico de la inestabilidad	70.
2.	Efectos debidos a la presión finita	74.
VI	DISPERSION DE VELOCIDADES EN LA DIRECCION DEL FLUJO	
1.	Funciones de distribución generales	81.
2.	Discontinuidad espacial de la función de distribución	86.
3.	Criterios de inestabilidad	92.
4.	Inestabilidad por deslizamiento en flujos Maxwellianos	96.

## APENDICES

1. Funciones de distribución para flujos con $T_e$ finita	104.
2. Modos electromagnéticos en la inestabilidad por deslizamiento	106.
3. Inestabilidad de dos haces en plasmas con densidad variable	113.
4. Propiedades de la relación de dispersión de los modos electrostáticos con $k_{\perp} = 0$ en un plasma frío con campo magnético.	116.
5. Algunas fórmulas asintóticas relativas a la Sección VI	120.
 AGRADECIMIENTOS	 122.
 RESUMEN	 123.

---

## I INTRODUCTION

Los plasmas se encuentran raramente en estados de quietud. Aún cuando la estabilidad del equilibrio esté asegurada desde un punto de vista macroscópico, es decir cuando los balances de las tensiones y de la energía en la descripción magnetohidrodinámica, correspondan a un equilibrio estable, surgen en ellos numerosas y complejas variedades de oscilaciones y ruidos, las cuales contribuyen a determinar en gran parte el comportamiento de los gases ionizados. Estas perturbaciones que aparecen cuando se examina el plasma a un nivel de descripción más fino y detallado, se denominan microinestabilidades, y el estado de agitación que generan, microturbulencia o turbulencia electrostática. Las microinestabilidades están ligadas a la formación de ondas de carga espacial, y por lo tanto son fenómenos que generalmente pertenecen al rango de frecuencias altas comparadas con las frecuencias típicas de la magnetohidrodinámica. Las microinestabilidades ponen de manifiesto los procesos colectivos que se desarrollan en los plasmas; es decir aquellos aspectos que más los distinguen de los gases neutros, cuyo comportamiento está determinado esencialmente por las colisiones binarias.

Los fenómenos más notables determinados por estos procesos son, como se sabe, en primer lugar, la difusión anómala de partículas cargadas a través del campo magnético. El coeficiente de difusión,<sup>(1)</sup> que es un factor de gran importancia en los proyectos de confinamiento para la fusión termonuclear controlada, depende críticamente de la presencia de las microinestabilidades<sup>(2)</sup>. En segundo lugar tenemos el calentamiento turbulento<sup>(3)</sup>. En los plasmas de baja densidad el rol de las colisiones binarias en la equipartición de la energía es reemplazado por las interacciones colectivas entre el plasma y haces de partículas cargadas. La excitación de la microinestabilidad da lugar a una eficaz distribución de la energía entre oscilaciones y partículas en tiempos menores que el tiempo medio entre colisiones. El calentamiento del plasma se puede obtener provocando artificialmente la microturbulencia. Ha sido demostrado experimentalmente

el año pasado, en el Laboratorio de Novosibirsk (URSS)<sup>(4)</sup>, que se pueden obtener temperaturas de iones y electrones cercanas a los 10 Kev con este método. La posibilidad de obtener una "termalización" de la distribución de electrones del tipo de dos haces por la microinestabilidad, fue prevista teóricamente por O. Buneman<sup>(5)</sup>, y J. Dawson<sup>(6)</sup>, quienes estudiaron el desarrollo de la inestabilidad en la etapa no lineal mediante modelos numéricos de plasmas. Por último, encontramos las ondas de choque sin colisiones, argumento que ha estado en el centro de la atención y de la discusión científica por varios años<sup>(7)</sup> en vista de la importancia para la física de los plasmas en el laboratorio<sup>(8)</sup>, y por las aplicaciones astrofísicas, especialmente en el campo de la física solar y del espacio interplanetario<sup>(9)</sup>, (10), (11). La opinión corriente es que las inestabilidades que surgen en la onda de choque pueden producir la equipartición irreversible de la energía, que en la teoría clásica de las ondas de choque es debida a las colisiones<sup>(12)</sup>, (13).

La mayor parte de la información teórica acerca de las microinestabilidades corresponde a plasmas de baja densidad, sin colisiones. Sobre los plasmas de densidad uniforme se ha constituido un vasto cuerpo de doctrina, que corresponde esencialmente a la teoría de las oscilaciones previstas por la ecuación de Boltzmann-Vlasov para funciones de distribución de velocidades, en condiciones apartadas del equilibrio termodinámico. Una excelente monografía sobre este argumento ha sido preparada por T. Stix<sup>(14)</sup>. Cuando los plasmas no son uniformes la teoría no es completa, pero en el límite de longitudes de onda pequeñas frente a las dimensiones características de la inhomogeneidad, se ha reunido una buena cantidad de información entre los años 1960-1965. Esto fue posible en particular modo por los trabajos de M.N. Rosenbluth y N.A. Krall<sup>(15)</sup>, y de la escuela de teóricos rusos. Del trabajo de estos últimos existe una buena reseña debida a A. Rukhadze y V.P. Silin<sup>(16)</sup>.

Fuera de la aproximación W.K.B. el estado del arte se encuentra en una situación precaria. Los problemas de inhomogeneidades fuertes

y las estructuras autoconsistentes complejas, como las ondas de amplitud finita<sup>(17), (18)</sup>, presentan grandes dificultades matemáticas.

El descubrimiento de las configuraciones de campo B mínimo<sup>(19), (20)</sup> y la eliminación de las inestabilidades hidromagnéticas, ha estimulado aún más las investigaciones en el campo de las microinestabilidades<sup>(21)</sup>, puesto que ya es convicción de muchos, interpretando varias experiencias en los últimos años, que el confinamiento del plasma está determinado por este tipo de fenómenos, junto con el efecto de intercambio de cargas.

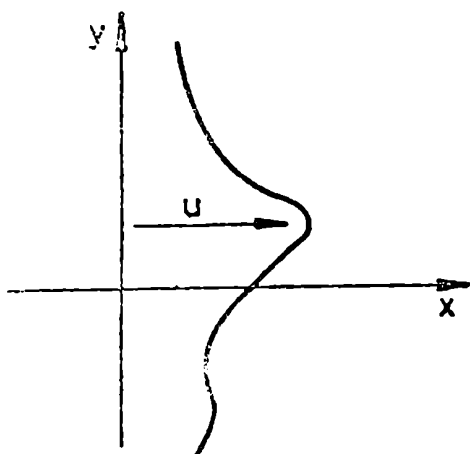
Un aspecto peculiar de los plasmas sin colisiones lo constituye el hecho que la propagación de perturbaciones tiene lugar no sólo debido a mecanismos electromagnéticos, sino también por arrastre de haces de partículas que se mueven en el seno del plasma. El estudio de los haces de electrones es ya de antigua data. Surgió alrededor de 1948 en el campo de la física de las válvulas electrónicas y de los amplificadores de microondas<sup>(22), (23), (24)</sup>. La inestabilidad de dos haces constituye en principio básico del "amplificador de dos haces", y del "klystron" con modulación de la velocidad de los electrones. La inestabilidad fue luego considerada como fuente de "ruido" en la corona solar y objeto de investigaciones por parte de los astrofísicos<sup>(25), (26)</sup>.

Los mecanismos físicos fundamentales de las microinestabilidades, la acumulación de cargas y <sup>la captura</sup> ~~el transporte~~ de partículas en las ondas de plasma, fueron explicados ya en 1949 por D. Bohm, y E.P. Gross. Los mayores progresos tuvieron lugar, sin embargo, recién una década más tarde, con el auge de las investigaciones de física del plasma en todo el mundo.

La inestabilidad por deslizamiento, que constituye el tema de este trabajo, participa de <sup>los</sup> dos aspectos que hemos mencionado. Es un problema de microinestabilidad en un plasma no uniforme, y está vinculada con la física de haces en los plasmas. En lo que sigue se estudiarán las inestabilidades electrostáticas, en plasmas que transportan corriente eléctrica o que presentan un movimiento de conjunto, debidas a gradientes de velocidad.

La corriente está dirigida según el eje x, para fijar ideas,

con velocidad y densidad variables en la dirección  $y$ , perpendicular al movimiento, como se indica en la figura 1.



- FIG. 1 -

En los flúidos neutros este problema corresponde a la inestabilidad de Kelvin-Holmholtz<sup>(27)</sup> y ha sido extensamente estudiado debido a sus aplicaciones en la física de la atmósfera.

En los plasmas esta inestabilidad fue investigada solo en el régimen magnetohidrodinámico. Una reseña de los resultados puede hallarse en el tratado de Chandrasekhar<sup>(27)</sup>.

Las ecuaciones de la magnetohidrodinámica corresponden a un fluido isótropo, de alta conductividad,

en el cual las colisiones entre las partículas son suficientemente frecuentes como para establecer un equilibrio termodinámico local<sup>(28)</sup>. No siempre resultan ser una buena aproximación para estudiar la dinámica de un plasma de baja densidad, sin colisiones. Para el régimen de frecuencias bajas ha sido publicado, en 1965, un trabajo de Talwar<sup>(29)</sup> basado sobre la aproximación de Chew-Goldberger-Low<sup>(30)</sup>, donde se examina un perfil discontinuo de velocidades. Lamentablemente en este trabajo no se advierte la necesidad de eliminar las raíces espurias de la relación de dispersión (vease la sección IV de esta Tesis), por lo que debería ser revisado para contar con una visión completa de la inestabilidad a bajas frecuencias.

En el rango de frecuencias electrostáticas el problema fue estudiado por A. Saruso y el autor, en 1964, como parte de un programa de investigaciones sobre inestabilidades en plasmas no uniformes del grupo teórico del "Laboratorio Gas Ionizzati" de Frascati (Roma)<sup>(31)</sup>. La sección II de esta tesis contiene las ecuaciones para los modos de oscilación electrostáticos, así como la discusión de las condiciones de validez y las aproximaciones de la teoría. En la sección III



se consideran las propiedades generales de la inestabilidad para plasmas fríos, sin campos magnéticos. Se demuestra que la máxima frecuencia de crecimiento no puede superar el valor  $\omega_p/2\sqrt{2}$ . Se consideran luego algunos perfiles particulares. Es un hecho interesante que la relación de dispersión para el perfil <sup>en</sup>escalón coincide con la inestabilidad de "dos haces", señalando la presencia del mismo mecanismo físico en los dos casos. Se estudian las zonas de transición entre flujos a velocidades diferentes y se analiza la inestabilidad debida a modos sin simetría axial en un "jet" cilíndrico de plasma. En la IV sección se estudia la influencia estabilizadora de un campo magnético paralelo al flujo. Se examinan las regiones de existencia y estabilidad de los modos electrostáticos y se encuentran oscilaciones que se propagan perpendicularmente a la superficie de discontinuidad cuando  $\Omega_{ce} > \omega_p$ . El mecanismo físico de la inestabilidad y el efecto de un término de presión isotrópica están tratados en la sección V. En la sección VI se toma en cuenta la dispersión de velocidades paralelas, en flujos de plasma con temperatura transversal nula. Los resultados presentan cierto interés para la teoría de la ecuación de Boltzmann-Vlasov al demostrar la conexión que la relación de dispersión de Landau establece, entre situaciones físicas aparentemente diversas como las oscilaciones electrónicas en un plasma homogéneo y la inestabilidad por gradientes de velocidad. El análisis de la relación de dispersión de Landau ha sido presentado de una manera, diferente de la usual, basada sobre la transformada de Bourrier en el espacio de las velocidades. Finalmente, en el apéndice 2 se discuten brevemente las oscilaciones electromagnéticas en la inestabilidad por deslizamiento para el caso de flujos relativísticos de plasma. Parte del contenido de la sección III ha sido ya publicado por A. Caruso y el autor en "Il Nuovo Cimento", 37, 62 (1965). Buena parte del contenido de la sección IV ha sido publicada por el autor en colaboración con J. Gratton<sup>(32)</sup>.

Recientemente se han comenzado a realizar experiencias en este campo. El grupo de D'Angelo ha estudiado efectos vinculados con esta inestabilidad mediante la máquina Q-3 de plasmas de Cesio. En estas

experiencias se tiene esencialmente una columna de plasma confinada por un campo magnético externo cuya intensidad puede graduarse hasta 14 kgauss. El Cesio es elegido por su bajo potencial de ionización, y el plasma es mantenido por dos electrodos calientes de tungsteno. Un tubo cilíndrico de acero, parcialmente sumergido en la columna de plasma, coaxial con ella, y cuya longitud es alrededor de un cuarto de la misma, permite aplicar tensiones en el plasma, respecto de las placas de tungsteno. Eligiendo la polaridad adecuada el tubo arrastra una corriente de iones. Debido a la presencia del fuerte campo magnético, la corriente es tomada a lo largo de las líneas de fuerza, mientras el centro de la columna permanece prácticamente en reposo. En la experiencia el potencial flotante del tubo es de -2 volt, y para tensiones aplicadas más negativas que este valor, se registra una brusca caída en la densidad de la columna de plasma, en un factor 2 aproximadamente, y al mismo tiempo se observan oscilaciones en el rango de 1 - 10 Kc/seg. <sup>(33)</sup> Para potenciales  $V = -2$  volt, hay un movimiento relativo entre el centro de la columna y los estratos externos, con velocidad comparable a la velocidad media térmica de los iones. La pérdida de confinamiento, el incremento de la difusión de las partículas a través del campo magnético en correlación con la aparición de oscilaciones, se interpreta en términos de la inestabilidad por deslizamiento.

Recientemente también, D'Angelo ha comenzado un estudio de la inestabilidad en un régimen físico adecuado para la comparación de la teoría con sus experiencias: electrones en equilibrio térmico siguiendo la distribución de Boltzmann, descripción hidrodinámica del movimiento de los iones con presión isótropa, y aproximación W.K.B. para inhomogeneidades débiles <sup>(34)</sup>.

Estas investigaciones representan un estímulo para profundizar algunos temas que en este trabajo han sido apenas esbozados. No poseemos aún un cuadro suficientemente amplio de este tipo de inestabilidad, basado en la ecuación de Boltzmann-Vlasov en todos los rangos de frecuencias. Debemos tener en cuenta que el ~~potencial~~ <sup>tratamiento</sup> adecuado de las propiedades de la etapa lineal constituye, a menudo, la base para teorías fenomenológicas del estado turbulento, como lo demuestra el caso de la inestabilidad de deriva en los plasmas no uniformes <sup>(35)</sup>

Referencias

1. Spitzer L. Jr. Phys.Fluids 3, 659 (1960).
2. Kadomtsev B.B. Plasma turbulence, pg.124, London (1965).
3. Zavoiskii et al. Zhur.Exsp.i Teoret.Fiz. 43, 1976 (1962).  
45, 605 (1963).
4. Culham Conference Proceedings ( September 1965 ) CF-21/154.
5. Büneman C. Phys. Rev. 115, 503 (1959).
6. Dawson J. Salzburg Conference on Plasma Physics ( September 1961 ) CF-10/163.
7. Büneman C. Phys.Fluids Suppl. Part 2 ( November 1964 ).  
7, nº11, S3.
8. Camac H. et al. Nuclear Fusion Suppl. Part 2, 423 (1962)
9. Kohn F.D. Rev.Mod.Phys. 30, 1069 (1958).
10. Parker E.N. Phys.Rev 112a, 1429 (1958).  
Ap.J. 129, 217 (1959).
11. Tidman D.A. Phys.Rev.111, 1439 (1958).  
Phys.Fluids 5, 1104 (1962).
12. Saadeev et al. Nuclear Fusion 1, 82 (1961).
13. Auer P.L. et al. Phys.Fluids 4, 1105 (1961).  
Phys.Fluids 5, 298 (1962).
14. Stix T.H. The Theory of Plasma Waves, New York (1962).
15. Rosenbluth M.N. Krall M.A. Phys.Fluids 5, 435 (1962).
16. Rukhadze A.A. Silin V.F., Usb.Fiz.Nauk 82, 409 (1964).  
( traducción inglesa )
17. Bernstein I.B. Greene J. Kruskal M. Phys.Rev. 108,546 (1957).
18. Adlam J.H. Allen J.E. Phil.Mag. 3, 448 (1958).
19. Furth H.P. Rosenbluth M.N. Phys.Fluids 7, 764 (1964).
20. Taylor J.B. Phys.Fluids 8, 1203 (1965).
21. Culham Conference Proceedings ( September 1965 ), Session 6,  
Plasma Instabilities and Interactions.

22. Pierce J.R. J. Appl. Phys. 19, 931 (1948).
23. Pierce J.R. Heberstein W.B. Bell System Technol. 28, 33 (1949).
24. Haeff A.V. Proc. I.R.E. 37, 4 (1949).
25. Hoyle F. Nature 172, 296 (1953).
26. Bohm D. Gross E.P. Phys. Rev. 75, 1651, 1664 (1949).
27. Chandrasekhar S. Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability,  
(Cap. XI, Oxford (1961)).
28. Bernstein I.B. Trehan S.P. Nuclear Fusion 1, 3 (1960).
29. Talwar S.P. Phys. Fluids 8, 1295 (1965).
30. Chew G.F. Goldberger M.L. Low F.E. Proc. Roy. Soc. ( London )  
A236, 112 (1956).
31. Caruso L. Gratton F. Nuovo Cimento 37, 62 (1965).
32. Gratton F. Gratton J. Nuclear Fusion 8, n°3 (1968)  
( aparecerá en breve ).
33. D'Angelo N. Goeler S. Phys. Fluids 8, 1570 (1965).
34. D'Angelo N. Phys. Fluids 8, 1748 (1965).
35. Kadomtsev B.B. Plasma Turbulence, pg. 78-106 London (1965).

II. MODOS DE OSCILACIÓN EN UN PLASMA

1. Las ecuaciones de los plasmas

La teoría de las ondas en los plasmas en el régimen de escasas colisiones entre partículas, está basada sobre la ecuación de Boltzman-Vlasov, o bien sobre los primeros momentos de esta ecuación (aproximación hidrodinámica), para las dos especies de iones que constituyen los gases ionizados. Los procesos colectivos son predominantes frente a las colisiones, cuando una esfera de Debye contiene un número muy grande de partículas. En la teoría estadística de las colisiones múltiples, el tiempo característico para el amortiguamiento de cualquier anisotropía en la función de distribución de las velocidades de los electrones, está dado por (1)

$$(II,1) \quad t_c = \frac{m^{1/2} (3kT)^{3/2}}{5.71 \pi^{3/2} n e^4 \ln \Lambda} \quad , \quad (\text{sgs})$$

donde  $\Lambda = \frac{3kT}{2} \lambda_D^{-3}$ , es el cociente entre la longitud de Debye y el parámetro de impacto para las deflexiones de 90° en las colisiones binarias coulombianas. La relación entre el tiempo de colisión y el período de una oscilación colectiva de los electrones resulta, entonces

$$(II,2) \quad t_c \omega_p = 1.21 \Lambda / \ln \Lambda$$

mientras que  $\Lambda$  puede escribirse como  $\Lambda = 9 \left( \frac{4\pi}{3} n \lambda_D^3 \right)$ .

La ecuación de Boltzman-Vlasov es el primer término de un desarrollo formal, en serie de potencias de  $\Lambda^{-1}$ , de la ecuación de Liouville para la densidad de probabilidad en el espacio de las fases de las partículas del plasma (2). El límite  $\Lambda \rightarrow \infty$ , corresponde al proceso ideal de desintegrar cada partícula en partes más pequeñas, repartiendo carga y masa entre los fragmentos:

$$c \rightarrow 0 \quad m \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty$$

$$\frac{1}{m} \quad m e, \quad n m \quad \text{finitos.}$$

El plasma es considerado como un fluido en el espacio de las fases. En esta aproximación la densidad de probabilidad para  $N$  partículas es igual al producto de  $N$  funciones de probabilidad,  $f(\underline{x}, \underline{v}, t)$ , para una partícula. La ecuación de Liouville se satisface idénticamente si  $f$  cumple la ecuación

$$(II,3) \quad \frac{\partial f}{\partial t} + \underline{v} \cdot \nabla f + \frac{q}{m} (\underline{E} + \frac{1}{c} \underline{v} \times \underline{B}) \cdot \nabla_v f = 0$$

que corresponde a la ecuación de continuidad de un fluido incompresible, en el espacio  $(\underline{x}, \underline{v})$ . La ecuación (II,3) es no lineal puesto que  $\underline{E}$  y  $\underline{B}$  tienen sus fuentes y torbellinos en el plasma:

$$(II,4) \quad \begin{cases} \nabla \cdot \underline{E} = 4\pi e \int f \underline{v} d^3v \\ \nabla \times \underline{E} = -4\pi e \int \underline{v} f d^3v - \frac{\partial \underline{E}}{\partial t} \end{cases}$$

La suma se hace sobre las distintas especies de iones.

Es bien sabido que  $\Lambda$  suele tomar valores elevados en muchas configuraciones, experimentales y cósmicas interesantes. En el gas ionizado interestelar  $\Lambda$  es del orden de  $10^9$ , en el plasma de la corona solar, del orden de  $10^6$ , en típicos experimentos de física del plasma, donde  $n \approx 10^{14-3}$  cm<sup>-3</sup> y  $T \approx 10^6$  °K,  $\Lambda \approx 10^5$ . El estudio de oscilaciones a frecuencias próximas a  $\omega_p$ , se lleva a cabo, en estos casos, con buena aproximación mediante las (II,3), (II,4).

No siempre es preciso conocer todos los detalles contenidos en la  $f(\underline{x}, \underline{v}, t)$ . Una parte significativa de la información puede extraerse de las ecuaciones de los momentos de la (II,3), con mayor simplicidad. En ausencia de colisiones el criterio para truncar la jerarquía de ecuaciones constituye un problema delicado, mientras que en el régimen opuesto, de colisiones dominantes, el ya clásico procedimiento de Chapman-Enskog<sup>(3)</sup> permite superar la dificultad. En el caso de las ondas, si la velo-

idad de fase,  $v_f$ , es mucho mayor que la velocidad media térmica,  $v_t$ , de las partículas, entonces un ordenamiento en potencias crecientes de  $v_t/v_f$ , se presenta con naturalidad<sup>(\*)</sup>. En el orden cero los primeros momentos

$$n(\underline{x}, t) = \int f(\underline{x}, \underline{v}, t) d^3v,$$

$$\underline{u}(\underline{x}, t) = \frac{1}{n(\underline{x}, t)} \int f(\underline{x}, \underline{v}, t) \underline{v} d^3v,$$

satisfacen las ecuaciones

$$(II,5) \quad \frac{\partial n}{\partial t} + \nabla \cdot (n \underline{u}) = 0$$

$$\frac{\partial \underline{u}}{\partial t} + (\underline{u} \cdot \nabla) \underline{u} = \frac{e}{m} (\underline{E} + \frac{1}{c} \underline{u} \times \underline{B})$$

Se omite el término del tensor de presiones, respecto de las ecuaciones hidrodinámicas usuales, el cual resulta del orden  $(v_t/v_f)^2$ . En la teoría de las oscilaciones del plasma, las (II,5) se conocen como ecuaciones de plasma frío<sup>(4)</sup>.

Los modos inestables, en la inestabilidad por deslizamiento, tienen una relación  $\omega/\omega_c$  del orden de la velocidad  $u$  del flujo del plasma, de modo que las correcciones debidas a efectos térmicos comienzan a pesar cuando  $(v_t/u)^2$  se aproxima a la unidad. Debe tenerse presente, sin embargo, que existen ciertos fenómenos, como el amortiguamiento de Landau, que escapan completamente al modelo de plasma frío. Se trata de procesos de captura de partículas por las ondas del plasma, cuya expresión matemática no es analítica en el límite  $v_t \rightarrow 0$ .

La descripción contenida en la (I,3) es equivalente a la solución del problema de las órbitas de las partículas. Esta correspondencia fue señalada por Jeans en la mecánica de los cúmulos estelares<sup>(5)</sup>, La solución de las ecuaciones en las de-

(\*) Otro procedimiento, basado sobre el límite de fuertes campos magnéticos y bajas frecuencias, para obtener un conjunto cerrado de ecuaciones ha sido propuesto por Chew-Goldberger-Low (S. I. Ref. 30).

rivadas parciales del primer orden, como es sabido, reposa en la teoría de las características. En este caso las ecuaciones características de la (II,3) son las ecuaciones del movimiento de las partículas. Resuelto el problema de las órbitas, cualquier función de las constantes de integración es una solución de la (II,3). El contenido físico de la ecuación de Boltzmann-Vlasov se halla enteramente expresado en esta equivalencia.

## 2. Teoría de las pequeñas perturbaciones

La solución del problema de las órbitas perturbadas se reduce a cuadraturas sobre las órbitas de equilibrio. Este teorema fundamental de la mecánica analítica se traslada del siguiente modo a la teoría de las pequeñas oscilaciones en los plasmas: la (II,3) puede interpretarse como la derivada temporal de  $f(\underline{x}, \underline{v}, t)$ , medida por un observador que sigue la órbita de una partícula. Sea, ahora,  $f_0$  una solución estacionaria de la (II,3) con  $\underline{E}_0, \underline{B}_0$ , dados por (II,4). Introducimos una pequeña perturbación  $f_1$ , en el plasma, y linealizamos las ecuaciones.

Se obtiene:

$$(II,6) \quad \frac{df_1}{dt} = \underline{v} \cdot \nabla f_1 - \frac{e}{m} (\underline{E}_0 + \frac{1}{c} \underline{v} \times \underline{B}_0) \cdot \nabla_v f_1 =$$

$$= - \frac{e}{m} (\underline{E}_1 + \frac{1}{c} \underline{v} \times \underline{B}_1) \cdot \nabla_v f_0$$

donde  $\underline{E}_1, \underline{B}_1$ , son los campos electromagnéticos de la perturbación. El primer término es la derivada de  $f_1$  respecto de las órbitas no perturbadas. Introduciendo el parámetro  $\tau$  podemos escribir esta derivada como

$$\frac{df_1}{d\tau} = \frac{\partial f_1}{\partial t} \frac{dt}{d\tau} + \nabla_{\underline{x}} f_1 \cdot \frac{d\underline{x}}{d\tau} + \nabla_{\underline{v}} f_1 \cdot \frac{d\underline{v}}{d\tau}$$

y poniendo

$$\frac{dt}{d\tau} = 1, \quad \frac{d\underline{x}}{d\tau} = \underline{v}, \quad \frac{d\underline{v}}{d\tau} = \frac{e}{m} (\underline{E}_0 + \frac{1}{c} \underline{v} \times \underline{B}_0)$$

cuyas soluciones serán



$$(II,7) \quad \underline{x} = \underline{x}(t; C_k) \quad , \quad \underline{v} = \underline{v}(t; C_k)$$

siendo  $C_k$  constantes de integración, la (II,6) se convierte en

$$\frac{d\underline{f}}{dt} = - \frac{e}{m} \left( \underline{E}_1 + \frac{\underline{v} \times \underline{B}_1}{c} \right) \cdot \underline{\nabla}_v f_0$$

Integrando a lo largo de las órbitas (II,7), tenemos

$$(II,8) \quad f(\underline{x}, \underline{v}, t) = f_0(0, C_k) + \int_0^t d\tau \frac{e}{m} \left\{ \underline{E}_1[\underline{x}(\tau, C_k), \tau] \right. \\ \left. + \frac{1}{c} \underline{v}(\tau, C_k) \times \underline{B}_1[\underline{x}(\tau, C_k), \tau] \right\}$$

Con la  $f$  podemos calcular los momentos que figuran en las (II,4)

Para ello las  $C_k$  deben considerarse como funciones de  $\underline{x}, \underline{v}, t$  invirtiendo las (II,7):

$$(II,9) \quad C_k = C_k(\underline{x}, \underline{v}, t)$$

El problema está reducido ahora a la solución de las (II,4), en general, ecuaciones integrodiferenciales para los campos electromagnéticos  $\underline{E}_1, \underline{B}_1$ .

La función de distribución estacionaria  $f$ , en el caso de la inestabilidad por deslizamiento, debe representar un flujo de plasma cuyas características varían en la dirección  $y$ , transversal a la dirección  $x$ , del movimiento. Consideraremos, además, en el plasma, un campo magnético paralelo al flujo, homogéneo y constante, cuyas fuentes están fuera de la región del espacio estudiada. Entre las posibles funciones de distribución estacionarias que describen este estado de cosas, y satisfacen la (II,3), vamos a limitarnos a tratar las de la forma

$$(II,10) \quad F_0 = f_0(u, y) \delta(v) \delta(w)$$

lo que equivale a decir que la temperatura transversal es nula, y solo cuenta la dispersión de velocidades a lo largo del flujo. Esta hipótesis conduce a una simplificación notable del problema.

Por otra parte, cuando el campo magnético es nulo, la (II,10) es la única función de distribución que satisface la ecuación de Boltzmann-Vlasov, que en este caso se reduce a

$$\omega \frac{\partial F_0}{\partial v} = 0$$

La teoría se aplicará solo a aquellos flujos de plasma para los cuales  $T_{\perp} / T_{\parallel} \ll 1$ . La temperatura de un plasma puede ser aumentada en virtud de procesos que actúan selectivamente, sobre un solo grado de libertad de las partículas, por ejemplo, la compresión adiabática de un plasma, por dos espejos magnéticos que se mueven uno al encuentro del otro, actúa selectivamente sobre la energía cinética paralela al campo magnético. Si las colisiones son escasas, la preeminencia de  $T_{\parallel}$  sobre  $T_{\perp}$  puede mantenerse por períodos relativamente largos (suficientes para el desarrollo de la inestabilidad), y el campo magnético favorecerá la persistencia de la anisotropía, puesto que tiende a limitar los procesos transversales de transporte<sup>(\*)</sup>. En la sección V intentaremos señalar en qué sentido actúa una temperatura transversal finita, y en el apéndice nº1 se mencionará brevemente la forma general de la  $F_0$ .

Vamos a restringirnos, por ahora, a considerar oscilaciones electrostáticas y velocidades no relativísticas. El acoplamiento entre las oscilaciones electrostáticas y las ondas electromagnéticas es muy débil cuando<sup>(\*\*)</sup>

$$(II,11) \quad \frac{\omega_p^2}{\omega^2 c^2} \ll 1$$

En este caso se emplea la primera de las (II,4), y  $\nabla \times \underline{\beta}_1 \approx 0$ .

La aproximación electrostática es usual en la teoría de las ondas en los plasmas<sup>(4), (7), (8)</sup>. En muchos casos tratados aquí,  $\omega$  es próxima a  $\omega_p$ , y la velocidad de fase es del orden de la velocidad,  $u$ , del movimiento del plasma. Entonces la (II,11) coincide con la aproximación no relativística.

(\*) La aproximación  $T_{\perp} = 0$ , ha sido considerada también por otros autores, p.e., en el problema de la termalización de ondas iónicas ciclotrónicas(6). Por otra parte el gran avance realizado en las técnicas de inyección de haces en plasmas, permiten reproducir aproximadamente en el laboratorio la condición que exigimos aquí.

(\*\*) Ver Apéndice nº2.

En presencia de campos magnéticos, hay que tener en cuenta que las oscilaciones de alta frecuencia son prevalentemente longitudinales, cuando el plasma no dispone de fuentes de energía comparables con la energía del campo. Este es el fundamento de la condición

$$(II,12) \quad \beta = \frac{P}{B^2/8\pi} \ll 1$$

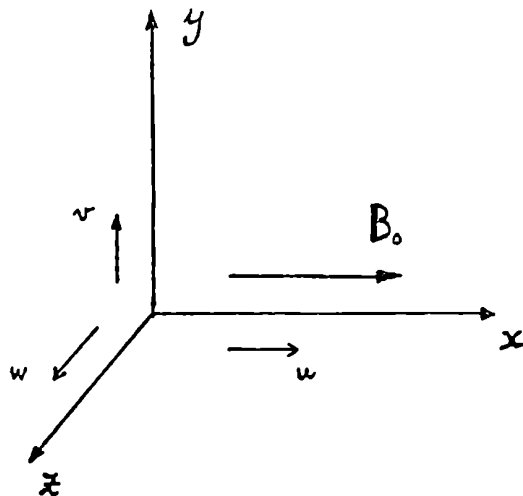
para la aproximación electrostática, en toda una serie de trabajos sobre microinestabilidades en los plasmas. Cuando existen velocidades de masa, un argumento semejante lleva a la condición

$$(II,13) \quad \frac{R^2}{4\pi n m^2} \gg \mu^2$$

es decir, se exigen velocidades mucho menores de la velocidad de Alfvén<sup>(\*)</sup>. En caso de haber flujo de electrones solamente, iones inmóviles, la limitación sobre  $u$  es menos restrictiva que la anterior.

### 3. Las ecuaciones diferenciales de la inestabilidad por deslizamiento

Las órbitas de equilibrio en un campo magnético constante  $B_0$  dirigido según  $x$ , están dadas, para electrones, por



$$(II,14) \quad \begin{cases} \dot{x} = C_0 + C_1 t \\ \dot{y} = C_2 \cos \Omega t - C_3 \sin \Omega t \\ \dot{z} = C_4 \sin \Omega t + C_5 \cos \Omega t \end{cases}$$

$$(II,15) \quad \begin{cases} x = C_0 + C_1 t \\ y = C_2 \frac{\sin \Omega t}{\Omega} + \frac{C_3}{\Omega} \cos \Omega t \\ z = C_4 \frac{\cos \Omega t}{\Omega} - \frac{C_5}{\Omega} \sin \Omega t \end{cases}$$

fig. 2

(\*) De paso, se puede notar, que la condición  $\frac{R^2}{4\pi n m^2} \gg \mu^2$ , es suficiente para la estabilidad de un chorro de un fluido conductor isotrópico (9), para el rango de oscilaciones magnetohidrodinámicas (bajas frecuencias).

donde hemos puesto  $\Omega = eB / mc$ . Para los iones hay que poner  $\Omega = -e_0 B / m_0 c$ . La constante  $c_0$  es el instante inicial  $t_0$ , en el cual se introduce la perturbación. Haciendo el cambio  $\tau = t - t_0 \rightarrow \tau$ , la (II,8) se escribe como

$$(II,16) \quad f_i = c_0 + \int_{t_0}^t dt Q [ c_4 + c_5 (\tau - t_0), \dots, \tau ] ,$$

donde  $c_7$  es el valor de  $f_1$  en  $t=t_0$ , y donde hemos abreviado, con el símbolo  $Q$  el segundo miembro de la (II,6), (pero aquí  $E_1 = 0$ ). Es necesario disponer de las ecuaciones que dan explícitamente las  $c_i$  en función de  $x, v$ ; estas son:

$$(II,17) \quad \begin{cases} c_1 = u & c_4 = x - u\tau \\ c_2 = v \cos \Omega \tau + w \sin \Omega \tau & c_5 = y - w/\Omega \\ c_3 = w \cos \Omega \tau - v \sin \Omega \tau & c_6 = z + v/\Omega \end{cases}$$

La integral de la (II, 16) está compuesta por tres términos, uno para cada componente de la velocidad,  $u, v, w$ , que indicaremos con  $I_1, I_2, I_3$ , respectivamente. El primer término vale

$$(II,18) \quad I_1 = \int_{t_0}^t dt \frac{\partial \phi}{\partial x(\tau)} \frac{\partial f_0(u, y(\tau))}{\partial u} \int [v \cos \Omega(t-\tau) + w \sin \Omega(t-\tau)] \cdot \int [w \cos \Omega(t-\tau) - v \sin \Omega(t-\tau)] ,$$

siendo  $\phi$  el potencial eléctrico,  $E_1 = -\nabla \phi$ .

El sistema que estamos estudiando es homogéneo en las coordenadas  $x, z$ , de manera que podemos analizar en modos de Fourier las perturbaciones, en esas variables. Por lo que se refiere al tiempo, el procedimiento clásico en el estudio de la estabilidad, es suponer una dependencia exponencial en  $t$ . En consecuencia obtendremos los modos normales de oscilación del plasma, poniendo

$$(II,19) \quad \begin{aligned} f_i &= f(y; u, v, w) e^{-i\omega t + ik_x x + ik_z z} \\ \phi &= \varphi(y) e^{-i\omega t + ik_x x + ik_z z} \end{aligned}$$

Para  $I_1$  tendremos, entonces

$$I_1 = \int_{t_0}^t dt ik_x \varphi \left[ y - \frac{w}{\Omega} + \frac{w}{\Omega} \cos \Omega(t-\tau) - \frac{v}{\Omega} \sin \Omega(t-\tau) \right] .$$

$$(II, 20) \quad \frac{df_0}{du} = \frac{v}{2} + \frac{v}{2} \cos 2(t-\tau) - \frac{v}{2} \sin 2(t-\tau) \\ + \frac{v}{2} [\cos 2(t-\tau) + \sin 2(t-\tau)] \delta [\cos 2(t-\tau) - \sin 2(t-\tau)]$$

Necesitamos calcular  $e^{-i(\int du dv dw)}$ , la densidad de carga que aparece en la ecuación de Poisson. La contribución de  $I_1$  será indicada mediante  $\langle I_1 \rangle = \int d^3x I_1$ . Esta integración se realiza fácilmente en las nuevas variables

$$(II, 21) \quad r' = r \cos \theta + u \sin \theta \\ \omega' = -r \sin \theta + u \cos \theta$$

donde  $\theta = Q(t-\tau)$  y el Jacobiano de la transformación vale 1.

Intercambiando el orden de integración entre  $\tau$  y  $v'$ ,  $u'$ , se

obtiene  $\langle I_1 \rangle = e^{-i\omega' t + ik_{\parallel} x + ik_{\perp} z} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \int_{-\infty}^{\infty} du i k_{\parallel} \varphi(y) \cdot \frac{df_0(u, \omega')}{du} e^{-i\omega(t-\tau) - ik_{\parallel} u(t-\tau)}$

La constante  $c_7$  en (II,16), luego del análisis de Fourier en  $t$ , debe contener un factor  $e^{-i\omega t_0}$ . Siendo nuestro objetivo

la búsqueda de modos inestables, esto es, soluciones con  $\text{Im}(\omega) > 0$ , cuando  $t_0 \rightarrow -\infty$  el término con  $c_7$  desaparece. Tomando, entonces, el límite  $t_0 \rightarrow -\infty$ , y eliminando el factor  $\exp\{-i\omega t + ik_{\parallel} x + ik_{\perp} z\}$ ,

tenemos  $\langle I_1 \rangle = \int_0^{\infty} d\tau \int_{-\infty}^{\infty} du \frac{df_0}{du} e^{i(\omega - k_{\parallel} u)\tau} i k_{\parallel} \varphi(y)$

luego de hacer la transformación  $t-\tau \rightarrow \tau$ . Intercambiando nuevamente el orden de integración, resulta

$$(II, 22) \quad \langle I_1 \rangle = -k_{\parallel} \varphi(y) \int_{-\infty}^{\infty} du \frac{df_0/du}{\omega - k_{\parallel} u}$$

habiendo usado

$$(II,23) \quad \int_0^{\infty} e^{-i(\omega - k_{\parallel} u)\tau} d\tau = \frac{1}{\omega - k_{\parallel} u}$$

puesto que  $\text{Im}(\omega) > 0$ .

Del mismo modo se procede para calcular  $\langle I_1 \rangle, \langle I_2 \rangle$ . Para el primero se obtiene

$$\langle I_1 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} du \int_0^t dt \int_{-\infty}^{\infty} dv' \exp[i\omega(t-\tau) - ik_{\parallel} u(t-\tau) + i\frac{e_1 v'}{\Omega} (\cos\theta - 1)] \cdot \\ \cdot \int_0^{\infty} dy \cdot \frac{v' \sin^2 \theta}{\Omega} \delta(y - \frac{v'}{\Omega} \sin\theta) \delta(v')$$

luego de integrar sobre  $v'$ . Teniendo en cuenta la propiedad de  $\delta(v')$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(v') \delta(v') dv' = -\left(\frac{d\psi}{dv'}\right)_{v'=0}$$

y haciendo  $t_0 \rightarrow -\infty$ ,  $t - \tau \rightarrow \tau$ , resulta

$$(II,24) \quad \langle I_1 \rangle = \frac{k_{\perp}}{\Omega} \frac{d\varphi}{dy} \int_{-\infty}^{\infty} du \frac{f_0}{\omega - k_{\parallel} u} \left[ \frac{\Omega^2}{(\omega - k_{\parallel} u)^2 - \Omega^2} \right]^{-1} \\ = \int_{-\infty}^{\infty} du \frac{\partial}{\partial y} \left( \int_0^{\infty} dy \right) \frac{1}{(\omega - k_{\parallel} u)^2 - \Omega^2}$$

donde hemos usado

$$(II,25) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\Omega} e^{-\frac{iax}{\Omega}} e^{-i\omega\tau - 1} = \frac{1}{ia} + \frac{f_0}{a^2 - \Omega^2} \left(\frac{ia}{\Omega}\right)$$

Análogamente, para  $\langle I_3 \rangle$  se obtiene

$$(II,26) \quad \langle I_3 \rangle = - \int_{-\infty}^{\infty} du \left\{ \frac{k_{\perp}}{\Omega} \frac{\partial}{\partial y} (f_0 \varphi) \left[ \frac{1}{(\omega - k_{\parallel} u)^2 - \Omega^2} - 1 \right] \frac{1}{(\omega - k_{\parallel} u)^2} \right. \\ \left. - \frac{k_{\perp}^2 f_0 \varphi}{(\omega - k_{\parallel} u)^2 - \Omega^2} \right\}$$

teniendo en cuenta que

$$(II,27) \quad \int_{-\infty}^{\infty} e^{ia\tau} \sin^2 \Omega\tau d\tau = -\frac{\Omega}{\Omega^2 - \Omega^2}$$

La perturbación en la densidad de carga eléctrica es

$$\sum \frac{e_j}{m_j} n_j \langle I_j \rangle = e \delta n$$

donde la primera suma se realiza sobre las especies de iones presentes. Ahora la (II,4) se puede

escribir como

$$(II,28) \quad - (k_{\perp}^2 + k_{\parallel}^2) \varphi + \varphi'' = \sum \frac{4\pi e^2}{m} \delta_j \langle I_j \rangle$$

Definiendo las siguientes funciones

$$G(y, \omega, k_{||}) = \frac{4\pi e^2}{\kappa_{||}} \int_{-\infty}^{\infty} du \frac{\partial f_0 / \partial u}{\omega - k_{||} u} \quad ,$$

$$H(y, \omega, k_{||}) = \frac{4\pi e^2}{m} \int_{-\infty}^{\infty} du \frac{f_0}{(\omega - k_{||} u)^2 - \Omega^2} \quad ,$$

$$J(y, \omega, k_{||}) = \frac{4\pi e^2}{m} \int_{-\infty}^{\infty} du \frac{\Omega}{(\omega - k_{||} u)^2 - \Omega^2} \frac{f_0}{[(\omega - k_{||} u)^2 - \Omega^2]}$$

es posible obtener la siguiente ecuación diferencial ( donde hay que tener en cuenta que para iones positivos J cambia de signo )

$$(II,29) \quad \frac{d}{dy} \left\{ \frac{1}{\kappa_{||}} \left( \frac{d\varphi}{dy} (1 - \sum H(y)) \right) \right\} - \left\{ k_{||}^2 (1 + \sum G(y)) + \right. \\ \left. + \kappa_{\perp}^2 (1 - \sum H(y)) - k_{\perp}^2 \sum \frac{1}{\kappa_{||}} \right\} \varphi = 0$$

Esta ecuación, sujeta a condiciones de contorno para  $\varphi(y)$ , determina la frecuencia característica  $\omega$ , para  $k_{||}, \kappa_{\perp}$ , fijados.

La (II,29) permite el estudio de la estabilidad en una serie de situaciones físicas distintas. La ecuación para la aproximación fría se obtiene poniendo  $f_0 = n_0 \delta(u - \bar{u}(y))$ , entonces

$$G = - \frac{\omega_p^2}{(\omega - k_{||} \bar{u})^2} \quad , \quad H = \frac{\omega_p^2}{(\omega - k_{||} \bar{u})^2 - \Omega^2}$$

$$J = \frac{\omega_p^2}{[(\omega - k_{||} \bar{u})^2 - \Omega^2] (\omega - k_{||} \bar{u})}$$

se resulta

$$(II,30) \quad \left\{ \varphi' \left[ 1 - \frac{\omega_p^2}{(\omega - k_{||} \bar{u})^2 - \Omega^2} \right] \right\}' - \left\{ k_{||}^2 \left( 1 - \sum \frac{\omega_p^2}{(\omega - k_{||} \bar{u})^2} \right) + \right. \\ \left. + \kappa_{\perp}^2 \left( 1 - \sum \frac{\omega_p^2}{(\omega - k_{||} \bar{u})^2 - \Omega^2} \right) - k_{\perp}^2 \sum \left( \frac{\omega_p^2}{(\omega - k_{||} \bar{u})^2 - \Omega^2} \frac{\Omega}{(\omega - k_{||} \bar{u})} \right) \right\} \varphi = 0$$

Cuando no hay campo magnético la ecuación adopta la forma simétrica

$$(II,31) \quad \left[ \varphi' (1 + \sum G(y)) \right]' - k^2 [1 + \sum G(y)] \varphi = 0$$

Si el campo magnético es muy intenso, ( $\Omega \gg \omega_p, \omega$ ),

en el límite de  $\Omega \rightarrow \infty$ , se obtiene

$$(II,32) \quad \phi'' - k^2 (1 + \Sigma G) \phi = 0$$

La (II,31) incluye dos situaciones esencialmente diferentes, en una el plasma fluye en su conjunto, electrones e iones se mueven con igual velocidad media, en la otra fluyen solo los electrones, los iones están en reposo. En el primer caso las oscilaciones de los iones son irrelevantes. Se puede eliminar la suma sobre las especies redefiniendo  $\omega_p^2$  con  $\omega_p^2 (1 + \frac{m}{M})$  y considerando solo los electrones. En el segundo caso el plasma transporta corriente eléctrica, e interesa estudiar, además de la inestabilidad por deslizamiento, la inestabilidad de dos haces. La máxima velocidad de crecimiento para la inestabilidad de dos haces, entre electrones e iones, es  $\text{Im}(\omega) \approx 0.627 (\frac{m}{M})^{1/3} \omega_p$ , de manera que habrá que considerar en cada caso si las oscilaciones iónicas son importantes, o bien, si es posible, en primera aproximación, focalizar la atención sobre la inestabilidad por deslizamiento entre electrones, de acuerdo a la velocidad de crecimiento de esta última.

Finalmente, se puede notar que en las ecuaciones (II,29-32), la densidad del plasma puede variar en la dirección del eje  $y$ . Se puede examinar el caso de un haz de partículas que atraviesan un plasma con densidad distinta a la del haz. Poniendo  $\bar{n}(y)$  constante, para los electrones,  $u=0$  para los iones, y  $\omega_p^2 = \omega_p^2(y)$ , a partir de la (II,30) con  $B_0 = C^{(x)}$ , se obtiene

$$(II,33) \quad [\phi'(1 - \lambda \omega_p^2(y))]'' - k^2 (1 - \lambda \omega_p^2(y)) \phi = 0$$

siendo 
$$\lambda = \frac{1}{(\omega - ku)^2} + \frac{m/M}{\omega^2}$$

(\*) El índice nº3 corresponde a una extensión del problema de Parris (1').



Referencias

1. Gritzer L. Physics of Fully Ionized Gases, New York (1956).
2. Postoker H. Rosebluth M.N. Phys.Fluids 2, 1 (1960).
3. Chapman S. Cowling J.G. Mathematical Theory of Non Uniform Gases, Cambridge (1960).
4. Bernstein I.B. Trehan S.P. Nuclear Fusion 1, 3 (1960).
5. Jeans J.H. Problems of Cosmogony and Stellar Dynamics, pp.220 Cambridge (1919).
6. Stix T.H. Phys.Fluids 1, 308 (1958).
7. Krall N. Rosebluth M.N. Phys.Fluids 4, 163 (1961).
8. Rudakov L. Tardeev R. Doklady 135, 581 (1961).
9. Vedenov L. et al. Sov.Phys.Usppekhi, (trad. inglesa) 4, 357 (1961).
10. Harris E.G. Phys.Fluids 7, 1572 (1964).

### III INESTABILIDAD POR DESLIZAMIENTO EN PLASMAS FRIOS

#### 1. Propiedades generales

La estabilidad de un flujo de plasma cuyo perfil de velocidades es  $u(y)$  está regido por la ecuación de valores característicos siguiente:

$$(III,1) \quad \left[ \varphi \left( 1 - \frac{\omega_p^2}{(\omega - ku)^2} \right) \right]' - k^2 \left[ 1 - \frac{\omega_p^2}{(\omega - ku)^2} \right] \varphi = 0$$

como se desprende de (II,31), en la aproximación fría, sin campo magnético externo.

Cuando  $u(y) \neq 0$ , de la (III,1) recuperamos las oscilaciones de plasma, a parte por un trivial desplazamiento Doppler.

En lo que sigue vamos a considerar perfiles de velocidad que tiendan a ser constantes para  $y \rightarrow \pm \infty$ . En este caso  $\varphi$  tiene las soluciones asintóticas  $\exp(\pm ky)$ , y por lo tanto las condiciones de contorno naturales son  $\varphi(\infty) = \varphi(-\infty) = 0$ . Los valores característicos de la ecuación son los que permiten que la solución  $\varphi(y)$  satisfaga estas condiciones en el infinito.

La (III,1) nos muestra que, si  $\omega$  es un valor característico correspondiente a  $\varphi(y)$ , entonces  $\omega^*$  es una frecuencia característica para  $\varphi^*(y)$ . Además si  $\omega, k, \varphi(y)$  son soluciones consistentes de la (III,1), también lo son  $-\omega, -k, \varphi(y)$ .

Es fácil demostrar, en general, que para un  $\omega$  dado no pueden existir dos soluciones de la (III,1), esencialmente diferentes.

Combinando las dos ecuaciones

$$\left\{ \phi \left( 1 - \frac{\omega_p^2}{\bar{\omega}^2} \right) \right\}' - k^2 \left( 1 - \frac{\omega_p^2}{\bar{\omega}^2} \right) \phi = 0$$

$$\left\{ \psi \left( 1 - \frac{\omega_p^2}{\bar{\omega}^2} \right) \right\}' - k^2 \left( 1 - \frac{\omega_p^2}{\bar{\omega}^2} \right) \psi = 0$$

donde hemos puesto, por brevedad,  $\bar{\omega} = \omega - ku(y)$ , la frecuencia en el sistema que se mueve con el plasma, se obtiene:

$$\phi \left\{ \psi \left( 1 - \frac{\omega_p^2}{\bar{\omega}^2} \right) \right\}' - \psi \left\{ \phi \left( 1 - \frac{\omega_p^2}{\bar{\omega}^2} \right) \right\}' = 0$$

Por otra parte, resulta

$$\left\{ \phi \psi' \left( 1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \right) \right\}' = \phi \left\{ \psi' \left( 1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \right) \right\}' + \phi' \psi \left( 1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \right) ,$$

y otra ecuación análoga, intercambiando  $\phi$  con  $\psi$ , por consiguiente

$$\left\{ (\phi \psi' - \psi \phi') \left( 1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \right) \right\}' = 0 ,$$

es decir

$$(\phi \psi' - \psi \phi') \left( 1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \right) = \text{cte.}$$

Pero cuando  $y \rightarrow \infty$ ,  $\phi, \psi \rightarrow 0$ , entonces

$$\phi \psi' - \psi \phi' = 0 ,$$

es decir

$$\frac{\psi'}{\psi} = \frac{\phi'}{\phi} ,$$

de donde se desprende que  $\phi = \text{cte} \times \psi$ . Luego, a parte por una constante multiplicativa, las funciones  $\phi$ ,  $\psi$  son iguales. No hay degeneración para los valores característicos  $\omega$ .

Consideremos ahora perfiles  $u(y)$  cuya paridad sea definida.

a) Perfiles simétricos,  $u(y) = u(-y)$ .

Si  $\phi(y)$  es una solución de la (III,1) con número característico  $\omega$ , entonces también  $\psi = \phi(-y)$  es una solución para el mismo valor de  $\omega$ . Entonces  $\phi(-y) = \phi(y)$ ; cambiando  $y \rightarrow -y$  resulta  $\phi(y) = \phi(-y) = c^2 \phi(y)$ , es decir  $c^2 = 1$ ,  $c = \pm 1$ . En este caso las soluciones tienen una paridad bien definida.

b) Perfil antisimétrico,  $u(y) = -u(-y)$ .

Cuando  $\phi(y)$  es una solución para  $\omega$ , entonces  $\psi = \phi(-y)$  es una solución para  $-\omega$ . Se repite el argumento de a), el cual prueba que las soluciones tienen una bien definida paridad.

En los dos casos  $\phi(y) = \pm \phi(-y)$ , luego resulta que  $|\phi(y)|^2 = |\phi(-y)|^2$ , y  $|\phi'(y)|^2 = |\phi'(-y)|^2$ , es decir  $|\phi'|^2 + c^2 |\phi|^2$ , es una función par.

Es posible obtener algunas propiedades generales de los valores característicos para aquellos perfiles cuya velocidad tiene un módulo limitado, diremos por un valor  $u_0$ . Multiplicando la (III,1) por  $\varphi^*$ , integrando la ecuación entre  $(-\infty, +\infty)$  y transformando el primer término mediante una integración parcial, se obtiene

$$(III,2) \quad \int (|\varphi'|^2 + k^2 |\varphi|^2) \left[ 1 - \frac{\omega_p^2}{(\omega - ku)^2} \right] dy = 0$$

Vamos a adimensionalizar la frecuencia  $\omega$  con  $\omega_p$ ,  $k$  con  $(\frac{\omega_p}{u_0})$ , y  $u$  con  $u_0$ , en el paréntesis cuadrado, conservando la misma notación por sencillez. Sea  $\omega = \omega_1 + i\omega_2$ , separando la parte real de la imaginaria

$$(III,3) \quad \int (|\varphi'|^2 + k^2 |\varphi|^2) \frac{(\omega_1 - ku)\omega_2 dy}{[(\omega_1 - ku)^2 + \omega_2^2]^2} = 0$$

$$(III,4) \quad \int (|\varphi'|^2 + k^2 |\varphi|^2) \left[ 1 - \frac{(\omega_1 - ku)^2 - \omega_2^2}{[(\omega_1 - ku)^2 + \omega_2^2]^2} \right] dy = 0$$

Para oscilaciones estables,  $\omega_2 = 0$ , vemos por la (III,4) que debe existir un punto, en el cual

$$(\omega_1 - ku)^2 = 1$$

de otro modo el integrando no cambiará nunca su signo. Por consiguiente

$$(III,5) \quad \pm 1 - k \leq \omega_1 \leq \pm 1 + k$$

puesto que  $|u| \leq 1$ . Para longitudes de onda grandes, respecto de  $u_0/\omega_p$ , la frecuencia  $\omega_1$  tiende a  $\omega_p$ .

Consideremos ahora modos inestables o amortiguados,  $\omega_2 \neq 0$ . De la (III,3) se deduce que  $(\omega_1 - ku)$  debe cambiar su signo en el intervalo de integración, por lo tanto

$$(III,6) \quad |\omega_1| < k$$

Para  $\omega_2$  podemos hallar una cota semejante partiendo de la (III,4). Debe existir un punto para el cual

$$f \equiv [(\omega_1 - k u)^2 + \omega_2^2]^2 - [(\omega_1 - k u)^2 - \omega_2^2] = 0,$$

entonces

$$\omega_2^2 < (\omega_1 - k u)^2 \leq (|\omega_1| + k)^2 < 4k^2,$$

$$(III,7) \quad |\omega_2| < 2k$$

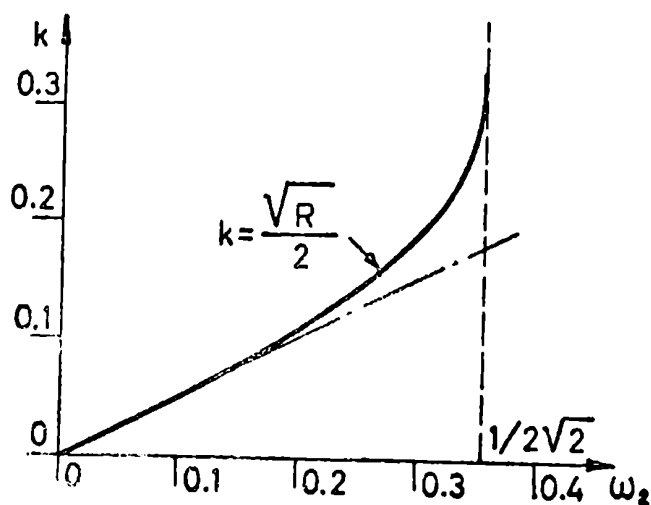
Además una condición necesaria para que  $f$  cambie su signo es que su discriminante sea positivo, esto es

$$(III,8) \quad 1 - 8\omega_2^2 > 0$$

De modo que la velocidad de crecimiento de la inestabilidad no puede superar el valor  $\sqrt{1/2}$ . La (III,8) no es suficiente, sin embargo, porque una raíz, por lo menos, de  $f = 0$  debe caer en el intervalo  $(0, 4k^2)$ , dentro del cual está restringido  $(\omega_1 - k u)^2$ . Puesto que ambas raíces de  $f = 0$  son positivas, para que la (III,4) pueda cumplirse, se requiere que la menor

$$(\omega_1 - k u)^2 = \frac{1 - 2\omega_2^2}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{1 - 8\omega_2^2} \equiv R$$

sea inferior a  $4k^2$ . Cuando  $4k^2$  es menor que el máximo valor de esta raíz,  $3/4$ , tenemos una limitación para  $\omega_2$ , algo más estricta que la (III,7): considérese la figura 3.



- FIG. 3 -

## 2. Relación de dispersión para el perfil en escalón

En lo que sigue analizaremos la estabilidad de algunos perfiles particulares. El perfil en escalón contiene una discontinuidad en la velocidad del flujo. Mediante una transformación galileiana siempre es posible pasar al caso simétrico, en el cual  $u = u/2$  para  $y > 0$ ,

(Fig. 4)

$$u = -u/2 \text{ para } y < 0,$$

Las soluciones convergentes en cada semiplano deben conectarse en  $y=0$ . El potencial  $\varphi$  debe ser continuo sobre la línea de separación pues de otro modo daría lugar a campos eléctricos infinitos. La (III,1) da otra condición de continuidad. Integrando la ecuación diferencial entre  $-\epsilon$  y  $\epsilon$ , y tendiendo al límite para  $\epsilon \rightarrow 0$  se obtiene

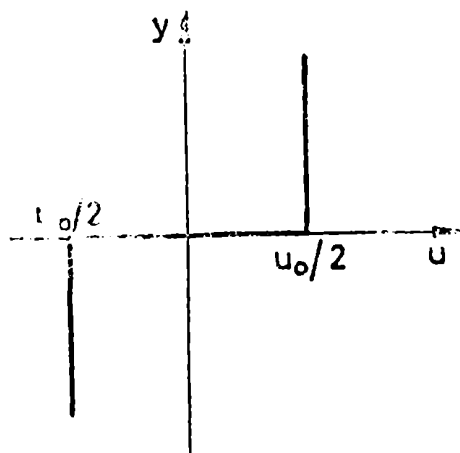
$$(III,9) \quad \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\bar{\omega}_1^2}\right) \varphi_1' = \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\bar{\omega}_2^2}\right) \varphi_2'$$

donde hemos indicado con los subíndices a las cantidades correspondientes a las regiones (1),  $y > 0$ , y (2),  $y < 0$ :  $\bar{\omega}_1 = \omega - \frac{k u_0}{2}$ ,  $\bar{\omega}_2 = \omega + \frac{k u_0}{2}$ ,  $\varphi_1 = A \exp(-ky)$ ,  $\varphi_2 = B \exp(ky)$ . Estas dos condiciones dan la siguiente relación de dispersión:

$$(III,10) \quad 1 - \frac{\omega_p^2/2}{\left(\omega - \frac{k u_0}{2}\right)^2} - \frac{\omega_p^2/2}{\left(\omega + \frac{k u_0}{2}\right)^2} = 0$$

la cual aparece también en el problema de la estabilidad de dos haces de electrones, homogéneos, que pasan uno a través del otro. Su significado físico será examinado en la sección V. Las raíces de la (III,10) son

$$(III,11) \quad \omega^2 = \frac{\omega_p^2}{2} \left[ 1 + 2 \left( \frac{k u_0}{2 \omega_p} \right)^2 \pm \sqrt{1 + 8 \left( \frac{k u_0}{2 \omega_p} \right)^2} \right]$$



- FIG. 4 -

La longitud de onda que hace

$$\frac{k u_0}{2} = \omega_p \quad \text{separa los modos}$$

inestables de los estables, en la rama inferior de la (III,11).

Las perturbaciones con  $\lambda$  mayor que  $\omega_p / u_0$  son inestables.

En el límite  $k u_0 \ll \omega_p$ , resulta

$$\omega^2 = \omega_p^2 + 3 \left( \frac{k u_0}{2} \right)^2$$

estable,

$$\omega^2 = - \left( \frac{k u_0}{2} \right)^2$$

inestable,

para las ramas superior e inferior respectivamente.

Los modos inestables aumentan sin oscilaciones en el caso del perfil simétrico. Esto es debido a que en el modelo de plasma frío con ondas electrostáticas, una perturbación física no se propaga;

solo es arrastrada por el flujo. El máximo de la inestabilidad tiene lugar para  $(\frac{k u_0}{2})^2 = \frac{3}{8} \omega_p^2$ , y el valor correspondiente de  $\omega$  es  $i \omega_p / 2\sqrt{2}$ , precisamente el mayor valor permitido por la (III,8). La fig.5 representa la (III,11), los valores reales de  $\omega$  corresponden a las curvas continuas, y los valores imaginarios a las líneas de trazos.

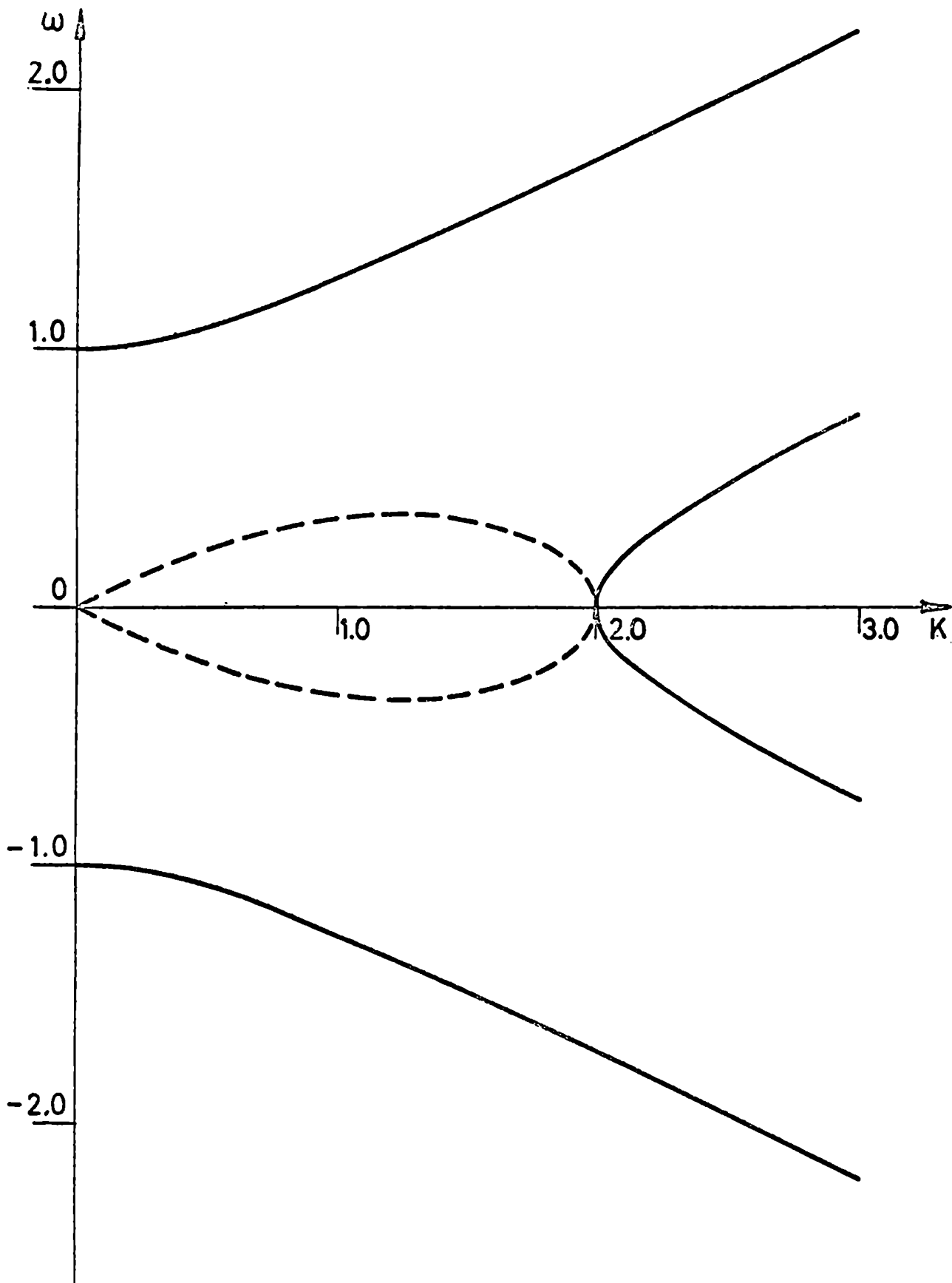
Estos resultados pueden aplicarse siempre que el espesor de la transición entre las regiones de velocidad constante, sea muy inferior a la longitud de onda de la perturbación. En el p.5, se calculan las correcciones para un espesor pequeño frente a  $\lambda$ , pero finito.

En el borde de un haz de partículas que atraviesan un plasma en reposo además del cambio de la velocidad, encontraremos, en general, una variación de densidad. Sea  $n_0$  la densidad del plasma, en  $y > 0$ , y  $(1 + \lambda^2) n_0$ , la densidad del plasma más la del haz, que ocupa la región  $y < 0$ . Tenemos para  $y > 0$ , electrones e iones con velocidad nula  $u_z = 0$ , y frecuencias de oscilación  $\omega_p^2, \omega_p^2 \epsilon$ ,  $\epsilon = m/M$ . Para  $y < 0$  lo mismo, y además para el haz:  $2\lambda \omega_p^2, 2\lambda \epsilon \omega_p^2$  con  $u_z = u_0$ . Conectando como antes las soluciones se obtiene la relación de dispersión:

$$(III,12) \quad 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} - \lambda \frac{\omega^2}{(\omega - k u_0)^2} = 0$$

donde hemos redefinido  $\omega_p^2$  con  $(1 + \epsilon) \omega_p^2$ . La (III,12) coincide con la relación de dispersión en la inestabilidad de "dos haces" entre electrones e iones<sup>(2)</sup>, si se considera  $\lambda$  como cociente de "masas". Con la misma velocidad relativa de la (III,10), la intensidad de la inestabilidad depende ahora de la relación de densidades haz-plasma, como puede verse fácilmente en el límite  $k u_0 \ll \omega_p$ , mientras  $\omega$  y  $k u_0$  se mantienen del mismo orden. Se obtiene entonces





- Fig. 5 -

$$\omega = \frac{(1 \pm i \lambda^{1/2}) k u_0}{1 + \lambda}$$

para la rama más inestable de la (III,12). cuando el haz duplica en densidad al plasma en reposo, se tiene la misma  $Im(\omega)$  del caso anterior. Las oscilaciones estables en el límite  $ku \ll \omega_p$  dan  $\omega^2 = (1 + \lambda) \omega_p^2$ .

La máxima velocidad de crecimiento, como en el caso de la inestabilidad de dos haces, se puede calcular de la siguiente manera<sup>(3)</sup>: si adimensionalizamos, como en (III,3-4), tenemos

$$\frac{d\omega}{dk} = \frac{1}{1 - \frac{1}{\lambda} (\frac{k}{\omega} - 1)^2}$$

pero  $Im(\frac{d\omega}{dk}) = 0$ , en el máximo. Por lo tanto  $(\frac{k}{\omega} - 1)^2$  debe ser real, es decir  $\frac{\omega}{k} - 1 = e^{\pm i\pi/3}$  donde  $\alpha$  es un número positivo, y  $S = 0, \pm 1$ .

Reemplazando en (III,12), y separando la parte real de la imaginaria, se obtiene

$$(III,13) \quad \begin{cases} (\alpha - \lambda/k) + \frac{1}{2} (\alpha^2 - \lambda^2/x^2) = 0 \\ k^2 = 1 + \lambda + \alpha + \lambda/x - \frac{1}{2} (\alpha^2 + \lambda^2/x^2) \end{cases}$$

habiendo tomado  $S = \pm 1$  ( $S = 0$  anula idénticamente la parte imaginaria). La primera ecuación determina el  $\alpha$  correspondiente a cada factor de densidad  $\lambda$ , y la segunda, el número de onda correspondiente al modo más inestable. Luego se obtiene  $\omega$  mediante

$$(III,14) \quad \omega = k / (1 + \alpha e^{\pm \pi i/3})$$

La figura (6) muestra las variaciones del máximo de  $Im(\omega)$  en función de  $\log \lambda$  (3). La curva con trazos discontinuos representa  $Re(\omega - k)$  correspondiente al máximo. Para  $\lambda = 1$ , es  $\alpha = 1$  y se obtiene:  $k^2 = 1\sqrt{3}$ ,  $\omega^2 = 1/4$  en acuerdo con los resultados anteriores si tenemos en cuenta que la densidad del haz es dos veces más grande. (Debemos excluir entonces, el valor  $S = 2$  que nos da en este caso  $\frac{d\omega}{dk} = \infty$ ).

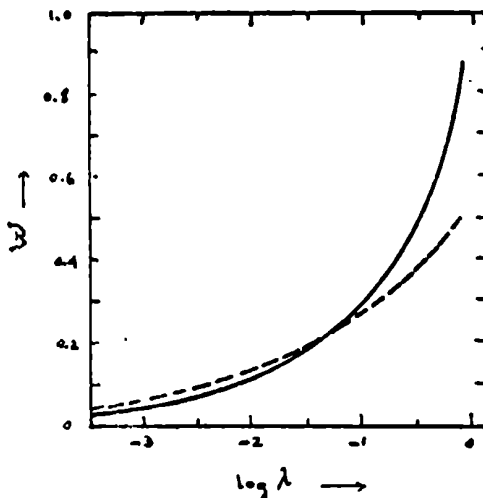


Fig. 6

Cuando la densidad del haz es muy pequeña frente a la del plasma,  $\lambda \ll 1$ .

En consecuencia una raíz aproximada de  $\alpha$  es  $(\lambda/2)^{1/3}$ .  
Reemplazando este valor en la ecuación para  $k^2$ , resulta:

$$k^2 = \frac{1 + 2\alpha + 2\alpha^2 + 2\alpha^3 + \alpha^4}{1 + 2\alpha}$$

En el orden más bajo significativo tenemos  $k^2 \approx 1 + 3(\frac{\lambda}{2})^{2/3}$ .

A partir de la (III,14) se obtiene

$$(III,15) \quad \begin{cases} \text{Im}(\omega) \approx \frac{\sqrt{3}}{2} (\frac{\lambda}{2})^{1/3} \\ \text{Re}(\omega) \approx 1 + (\frac{\lambda}{2})^{1/3} \end{cases} \quad \lambda \ll 1$$

Para una relación de densidades entre haz y plasma de 4/1000 el período de crecimiento aumenta solamente en un factor 10 respecto de  $\omega_p^{-1}$ . La inestabilidad sigue siendo muy rápida.

Aún para densidades muy bajas, como en las regiones externas de la corona solar, resulta  $\text{Im}(\omega) \approx \frac{\omega_p}{10} = 1.66 \times 10^7 \text{ seg}^{-1}$

### 3. Chorros de plasma

Quando el chorro de plasma tiene un diámetro comparable con la longitud de onda de la perturbación, las interacciones de las oscilaciones de los bordes (ver fig. 7) modifican el cuadro del p.2. En el intervalo  $|y| < d$ , donde  $u = u_0$ , la solución de la (III,1) es  $\varphi = c_1 e^{ky} + c_2 e^{-ky}$ , la cual debe ser conectada con  $a e^{-ky}$  para  $y > d$ , y con  $b e^{ky}$  para  $y < -d$ , mediante las condiciones mencionadas en el p.2. si indicamos brevemente  $(1 - 2 \frac{u^2}{c^2})$  con  $\Lambda_i$ ,  $\Lambda_e$  según estemos en  $|y| < d$  o  $|y| > d$ , respectivamente, resulta

$$\begin{cases} c_1 e^{kd} + c_2 e^{-kd} = a e^{-kd} \\ \Lambda_i (c_1 e^{kd} - c_2 e^{-kd}) = -a \Lambda_e e^{-kd} \\ c_1 e^{-kd} + c_2 e^{kd} = b e^{-kd} \\ \Lambda_i (c_1 e^{-kd} - c_2 e^{kd}) = b \Lambda_e e^{-kd} \end{cases}$$

La condición de compatibilidad para estas ecuaciones nos da la siguiente relación de dispersión

$$(III,16) \quad (\Lambda_e + \Lambda_i)^2 = e^{-4kd} (\Lambda_e - \Lambda_i)^2$$

Quando todo el plasma se desliza en bloque, para  $|y| < d$ , se obtiene

$$(III,17) \quad \frac{m_1(k)}{(\omega - u_0)^2} + \frac{m_2(k)}{\omega^2} = \frac{2}{u_0^2}$$

donde

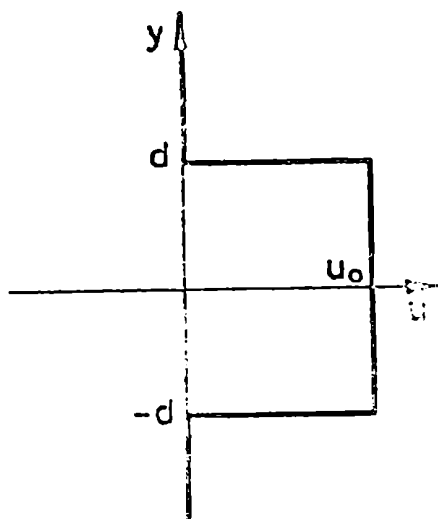
$$\begin{aligned} m_1(k) &= 1 \mp e^{-2kd} \\ m_2(k) &= 1 \pm e^{-2kd} \end{aligned}$$

la (III,17) es de la familia de las relaciones de dispersión de dos haces, pero tiene "masas" variables con la longitud de onda de la perturbación. Con la notación y adimensionalización de las

(III,3-4) podemos escribir

$$(III,17) \quad F_{\pm}(\omega; k, \delta) = \frac{1 \mp e^{-2k\delta}}{(\omega - k)^2} + \frac{1 \pm e^{-2k\delta}}{\omega^2} = 2$$

donde  $\delta = d/(u_0/\omega_p)$ . Considerada como función de  $\omega$ ,  $F = F_{\pm}(\omega)$ , presenta el aspecto de la fig. 8; tiene dos singularidades en  $\omega = k$  y en  $\omega = 0$ , entre las dos hay un mínimo.



- FIG. 7 -

Si la línea  $F = 2$  corta las curvas por encima del mínimo, la relación de dispersión tiene cuatro raíces reales (para ambos signos) y el sistema es estable. Viceversa, si  $F = 2$  pasa por debajo del mínimo, hay dos raíces complejas conjugadas y el chorro es inestable. La posición del mínimo se calcula a partir de  $\frac{\partial F}{\partial \omega} = 0$ , cuya raíz será  $\omega = \bar{\omega}$ .

El valor crítico de  $k$ , que separa los modos estables de los inestables, se obtiene a partir de  $F_{\pm}(\bar{\omega}, \bar{\omega}, \delta)$ . Se verifica fácilmente que  $\bar{k}$  está dado para cada  $\bar{\delta}$  por

$$(III,18) \quad \left\{ \begin{aligned} \bar{\delta}^2 &= \frac{2\bar{\omega}^2}{(k^2 - \bar{\omega}^2)^2 [1 + \exp(-2\bar{\delta})] + [1 - \exp(-2\bar{\delta})]^2 \coth^2 \bar{\delta}} \\ \bar{k} &= \frac{\bar{\omega}}{\bar{\delta}^2(\bar{\omega})} \end{aligned} \right.$$

siendo  $\bar{\omega}$  un parámetro. La (III,18) vale para los dos signos de la (III,16). La figura (9) representa la curva de neutralidad en el plano  $(k, \delta)$ . De la (III,17) resulta que si  $\omega = k + \frac{k}{2}$  es una raíz para el signo superior, entonces  $\omega = -k + \frac{k}{2}$  es una raíz para el signo inferior, por lo tanto las partes ima-

primarias (es decir la estabilidad) son las mismas para ambos signos

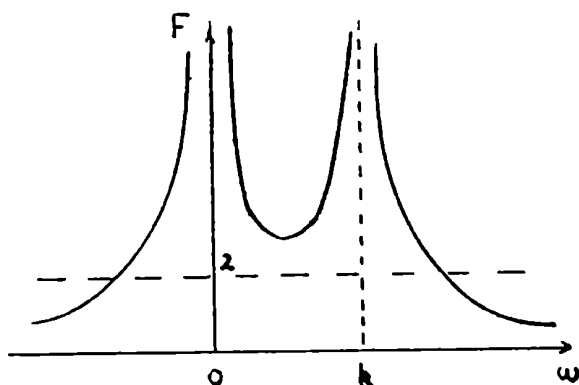


Fig. 8

En las figuras (10) y (11) están representadas las partes imaginarias y reales respectivamente de los modos inestables para diversos valores de  $\delta$ ; la parte real es la que corresponde al signo superior de la (III,17). La curva correspondiente a  $\delta = \infty$  representa la parte imaginaria del perfil en escalón. Es evidente como a medida que  $\delta$  aumenta la inestabilidad de las dos discontinuidades se desarrolla en forma independiente como en el perfil del p.2. Para oscilaciones casi-neutras, es decir en el límite  $\omega_p \Rightarrow \infty$ , la (III,17) da:

$$(III,19) \quad \omega = \frac{c}{2} \left\{ 1 \pm e^{-2k\delta} \pm i \sqrt{1 - e^{-4k\delta}} \right\}$$

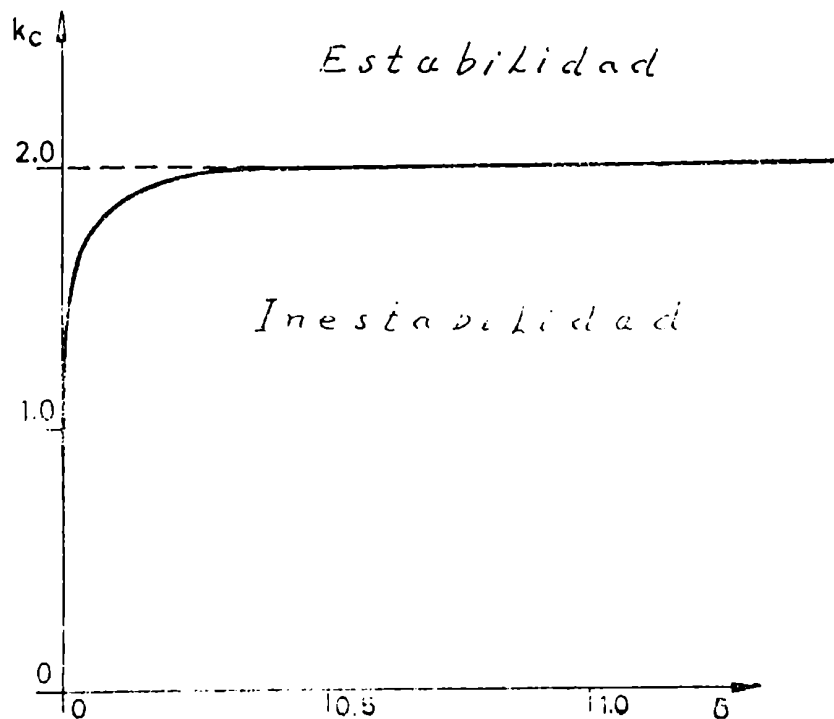
Esta ecuación, así como también la fig.10, muestran explícitamente la atenuación de la inestabilidad por deslizamiento, como consecuencia de la mutua influencia de los bordes del chorro.

Es interesante notar que en el caso de un haz con densidad  $2\lambda n_0$ , que pasa a través de un plasma en reposo (como en la segunda parte del p.2) la inestabilidad persiste para valores de  $kd \ll 1$ . En efecto, en este caso  $A_r = 1 - \omega_p^2/\omega^2$

$$A_i = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} - 2\lambda \frac{\omega_p^2}{\omega^2}, \quad \text{y la (III,16) nos da}$$

$$1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} - \lambda \frac{\omega_p^2}{\omega^2} (1 \mp e^{-2kd}) = 0$$

en el límite  $kd \rightarrow 0$ , la rama inferior nos da la (III,12). Esto es debido a que desaparece la inestabilidad por deslizamiento, pero subsiste la inestabilidad de dos haces, por los electrones del haz que se interpenetran con los del plasma.



- FIG. 5 -

Hemos adoptado hasta aquí la geometría plana por razones de simplicidad, pues nos interesaba destacar las propiedades más interesantes de la inestabilidad. El chorro cilíndrico es notable por sus modos de oscilación sin simetría azimutal.

En el plano perpendicular a la dirección del flujo, adoptemos las coordenadas polares  $r, \theta$ . La velocidad del plasma depende de  $r$ ,  $u(r)$ . Las perturbaciones son funciones de  $r$ , y de las demás variables a través del factor  $\exp(-i\omega t + ikx + im\theta)$ .

La densidad de carga eléctrica que se obtiene de las (II,28) y (II,30) (aproximación fría y  $\Omega = 0$ ), es

$$(III,20) \quad 4\pi e \delta n = - \sum \frac{\omega_p^2}{\bar{\omega}^2} (\partial_{||}^2 + k_{\perp}^2) \phi + \left\{ \sum \frac{\omega_p^2}{\bar{\omega}^2} \phi' \right\}'$$

donde  $\bar{\omega} = \omega - k u$  como en el p.1. Esta expresión, con el cambio de coordenadas se transforma en

$$(III,21) \quad 4\pi e \delta n = - \sum \frac{\omega_p^2}{\bar{\omega}^2} (k^2 + \frac{m^2}{r^2}) \phi + \frac{1}{r} \left\{ \sum \frac{\omega_p^2}{\bar{\omega}^2} r \phi' \right\}'$$

la derivada es ahora con respecto de  $r$ .

Escribiendo la ecuación de Poisson en coordenadas polares, resulta

$$(III,22) \quad \frac{1}{r} \left[ r \phi' (1 - \sum \frac{\omega_p^2}{\bar{\omega}^2}) \right]' - (k^2 + \frac{m^2}{r^2}) (1 - \sum \frac{\omega_p^2}{\bar{\omega}^2}) \phi = 0$$

en lugar de la (III,1).

Sea el perfil  $u = u_0$ ,  $r < R$  y  $u = 0$  para  $r > R$ , de un chorro de plasma y consideremos en primer lugar oscilaciones puramente radiales  $m=0$ . Las soluciones de la (III,22) son las funciones de Bessel modificadas de orden cero  $I_0(kr)$ ,  $K_0(kr)$ . En  $r < R$  la solución es  $I_0(kr)$  puesto que  $K_0$  diverge en  $r=0$ , mientras que  $I_0$  vale en el exterior,  $r > R$ , donde decrece exponencialmente, mientras  $I_0$  diverge. La conexión en  $r=R$  se hace cumpliendo las condiciones

$$\epsilon \rightarrow 0$$

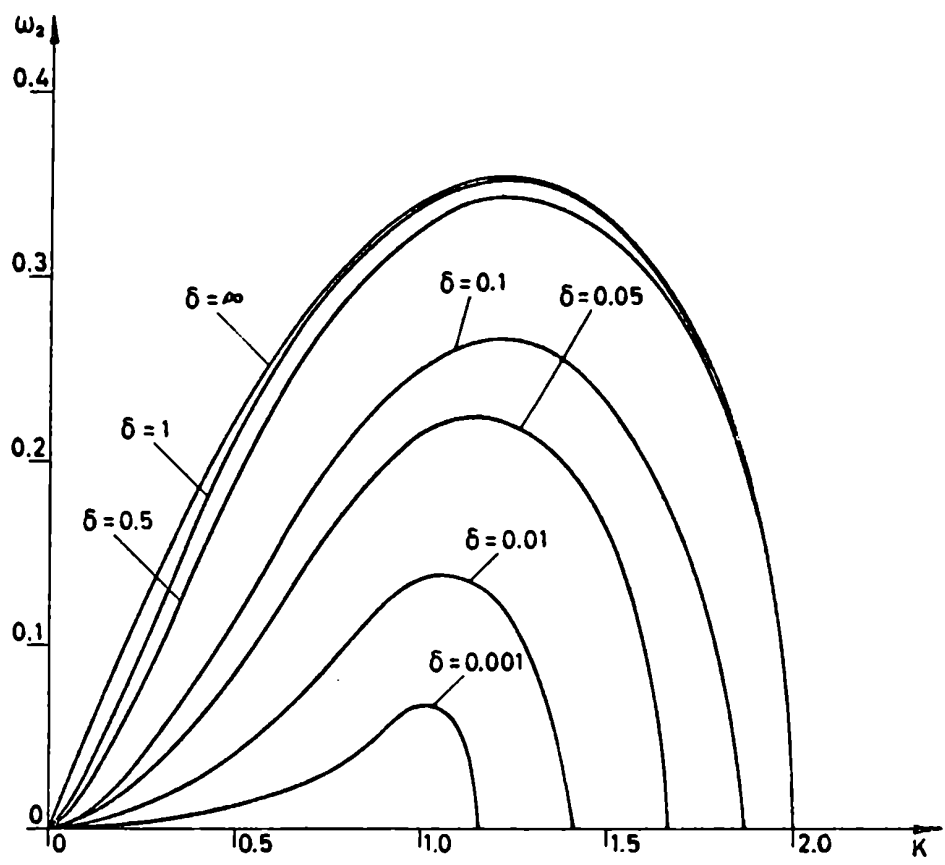
$$\phi(R-\epsilon) = \phi(R+\epsilon)$$

$$\left(1 - \sum \frac{\omega_p^2}{\bar{\omega}^2}\right) \left(\frac{d\phi}{dr}\right)_{R-\epsilon} = \left(1 - \sum \frac{\omega_p^2}{\bar{\omega}^2}\right) \left(\frac{d\phi}{dr}\right)_{R+\epsilon}$$

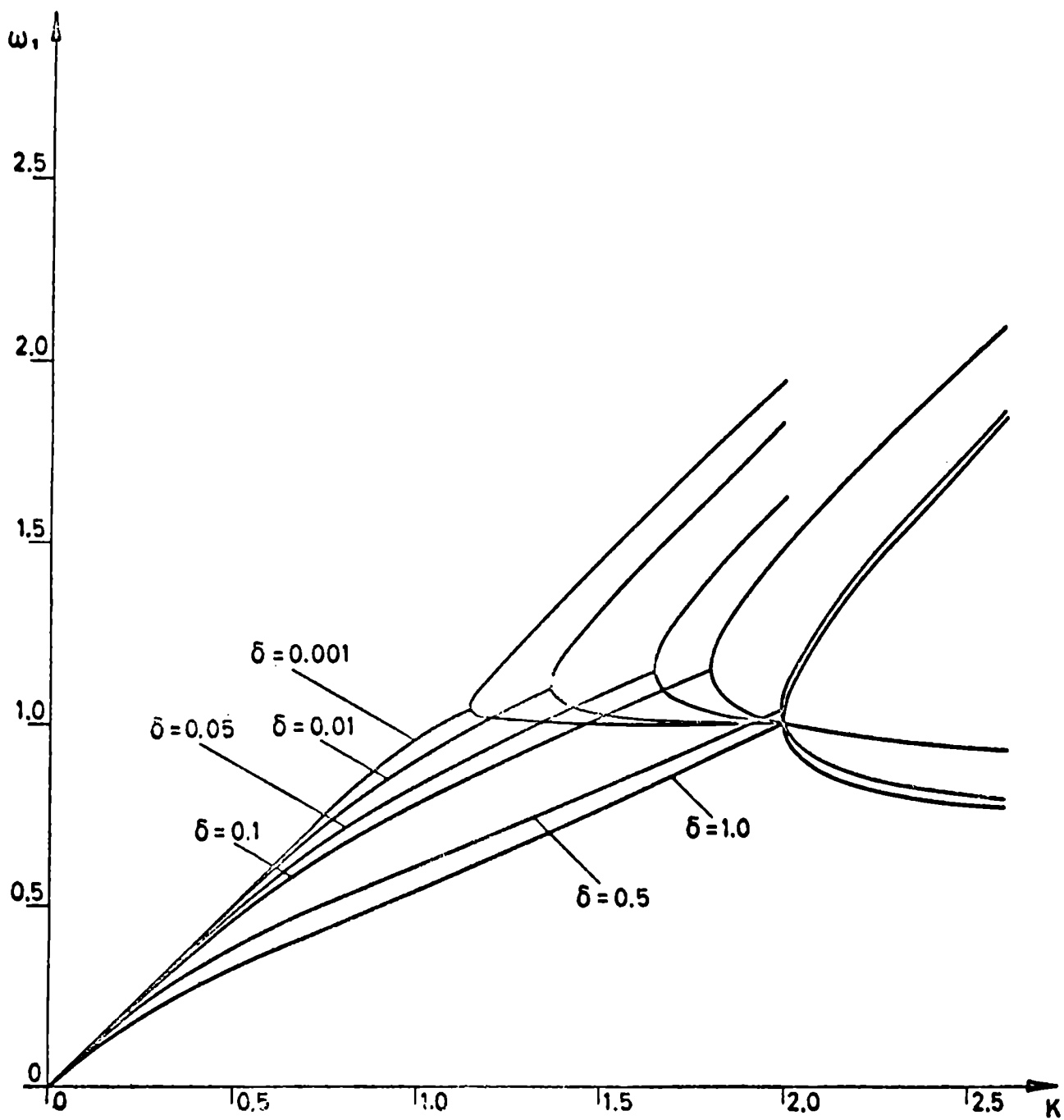
Esto lleva a la condición de compatibilidad

$$(III,23) \quad \left(1 - \sum \frac{\omega_p^2}{\bar{\omega}^2}\right) I_0(kR) K_1(kR) + \left(1 - \sum \frac{\omega_p^2}{\bar{\omega}^2}\right) I_1(kR) K_0(kR) = 0$$





- FIG 10 -



- FIG 11 -

teniendo en cuenta la ecuación

$$(III,24) \quad I_n K_{n+1} + I_{n+1} K_n = \frac{1}{kR} \quad ,$$

se puede escribir

$$(III,25) \quad 1 - \sum \frac{\omega_p^2}{\omega^2} f(kR) - \sum \frac{\omega_p^2}{\omega^2} g(kR) = 0$$

siendo

$$f(kR) = kR I_0(kR) K_1(kR) \quad ,$$

$$g(kR) = kR I_1(kR) K_0(kR) \quad ,$$

Los productos  $I_n K_n$ ,  $I_n K_{n+1}$  tienden asintóticamente al valor  $1/2kR$  para argumentos grandes, de modo que, en este caso, obtenamos nuevamente la (III,17), con  $d=\infty$ , Utilizando la (III,24) y las ecuaciones

$$I'_m = \frac{1}{2} (I_{m-1} + I_{m+1}) \quad ,$$

$$K'_m = -\frac{1}{2} (K_{m-1} + K_{m+1}) \quad ,$$

se obtiene la relación de dispersión para los modos de oscilación de orden  $m$  :

$$(III,26) \quad \frac{2}{\omega_p^2} = \frac{kR}{\omega^2} I_m (K_{m-1} + K_{m+1}) + \frac{kR}{(\omega - kU_0)^2} K_m (I_{m-1} + I_{m+1})$$

Cuando la longitud de onda de la perturbación es mucho mayor que  $R$  se pueden usar las siguientes aproximaciones

$$I_n(kR) \approx \frac{1}{n!} \left(\frac{kR}{2}\right)^n \quad , \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$K_0(kR) \approx \ln\left(\frac{2}{\gamma kR}\right) \quad , \quad K_n(kR) \approx \frac{(n-1)!}{2} \left(\frac{2}{kR}\right)^n$$

donde  $\gamma$  es la constante de Euler-Mascheroni

$$\gamma = 0.577216$$

(\*) Para  $kR \gtrsim 13$  es ya una buena aproximación.

De manera que la (III,26) dá para  $m = 0$

$$(III,27) \quad \frac{1}{\omega_p^2} = \frac{1}{\omega^2} + \frac{(kR)^2 \ln(2/\gamma kR)}{2(\omega - kU_0)^2}$$

que nos muestra una fuerte atenuación de la inestabilidad como en el caso plano. Los modos carentes de simetría axial,  $m \neq 0$ , sin embargo, siguen siendo inestables puesto que para  $kR \ll 1$  se obtiene

$$\frac{2}{\omega_p^2} = \frac{1}{\omega^2} + \frac{1}{(\omega - kU_0)^2}$$

correspondiente a la (III,10) a menos de un corrimiento Doppler en la frecuencia. En el límite opuesto  $kR \gg 1$ , todos los modos se comportan como en el caso del escalón, (III,10).

#### 4. Inestabilidad por deslizamiento de dos haces contrapuestos

Consideraremos ahora el siguiente perfil

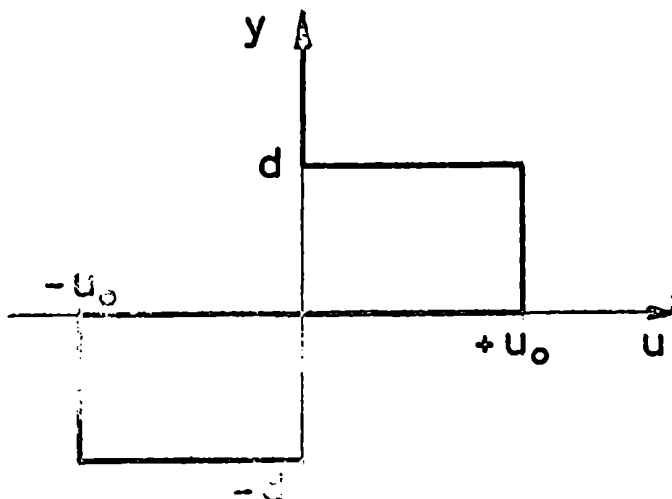
$$u = 0, \quad \text{para } |y| > d,$$

$$u = u_0, \quad \text{para } 0 < y < d,$$

$$u = -u_0, \quad \text{para } -d < y < 0,$$

representado en la figura 12.

Dos haces de partículas adyacentes, se deslizan uno sobre el otro. Este perfil tiene cierto interés porque recuerda la disposición de las corrientes transversales de electrones en las ondas hidromagnéticas de amplitud finita, en ausencia de colisiones. Como es sabido, los plasmas fríos, en presencia de un campo magnético admiten una solución autoconsistente de las ecuaciones del movimiento y las ecuaciones de Maxwell, que representa un pulso de campo magnético



- FIG 12 -

que viaja sin deformarse. La onda es producida por los movimientos trasversales de los electrones respecto de los iones (Ondas de Adlan-Allen)<sup>(4)</sup>.

La relación de estas estructuras con la formación de frentes de choque en ausencia de colisiones ha sido largamente discutida.

Un resumen y referencias pueden hallarse en (5).

La relación de dispersión se obtiene como en los casos anteriores

$$\begin{aligned}
 & \left[ \left( 2 - \frac{1}{(\omega-k)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right) \left( 2 - \frac{1}{(\omega+k)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right) e^{2k\delta} - \right. \\
 \text{(III, 28)} \quad & \left. - \left( \frac{1}{\omega^2} - \frac{1}{(\omega-k)^2} \right) \left( \frac{1}{\omega^2} - \frac{1}{(\omega+k)^2} \right) e^{-2k\delta} \right] \\
 & \cdot \left[ 2 - \frac{1}{(\omega-k)^2} - \frac{1}{(\omega+k)^2} \right] - 2 \left( 1 - \frac{1}{\omega^2} \right) \left[ \frac{1}{(\omega-k)^2} - \frac{1}{(\omega+k)^2} \right]^2 = 0
 \end{aligned}$$

donde hemos empleado la normalización usual.

Cuando  $k\delta \gg 1$ , las tres superficies oscilan independientemente. La relación de dispersión se reduce al producto de tres relaciones de dispersión correspondientes a las tres discontinuidades aisladas. En el límite de la cuasi-neutralidad ( $\omega_p \rightarrow \infty$ ) la (III,26) tiende a

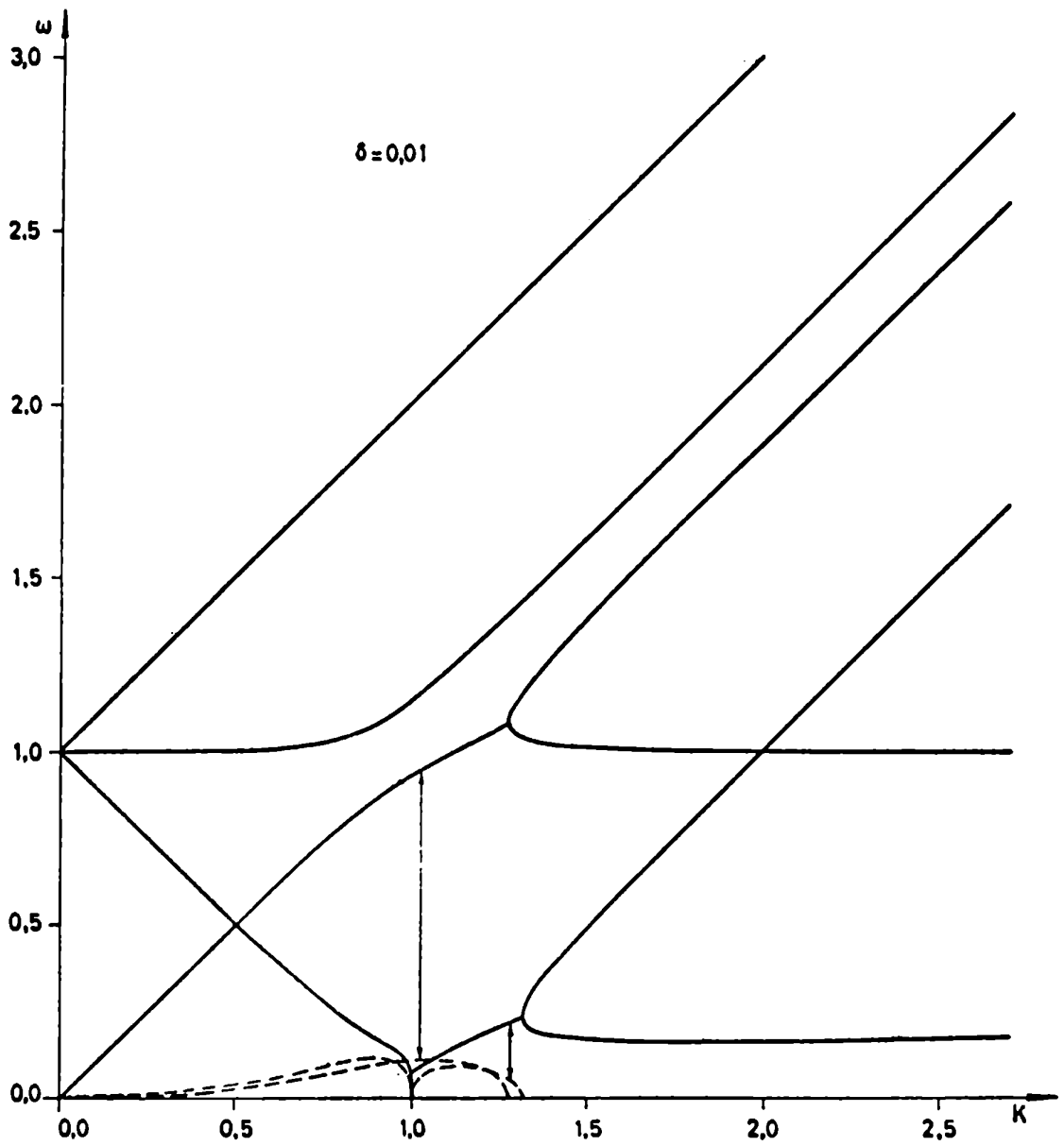
$$(III,29) \quad \omega^6 + \omega^4 k^2 [1 - 4 \exp(-2k\delta) + \exp(-4k\delta)] + \omega^2 \frac{k^4}{4} [1 + 3 \exp(-4k\delta)] + \frac{k^6}{4} [1 - \exp(-4k\delta)] = 0$$

Esta ecuación para  $\omega^2$  tiene siempre una raíz real por lo menos, la cual debe ser negativa puesto que el último término es positivo. Entonces para valores pequeños de  $k$  siempre hay un modo puramente inestable. Si  $\delta k \rightarrow 0$  se obtiene

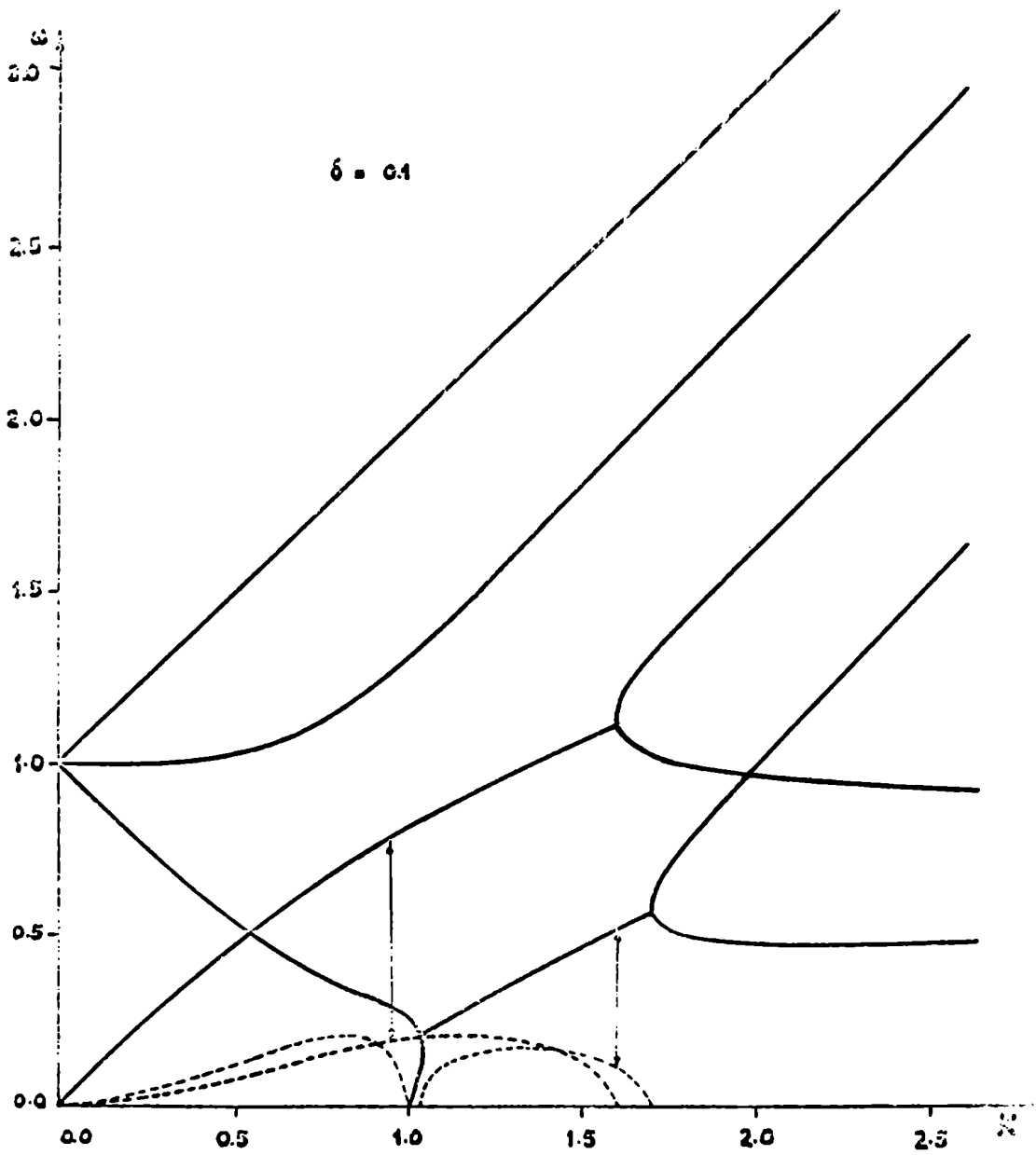
$\omega^2(\omega^2 - k^2)^2 = 0$ , hay dos raíces  $\omega^2 = k^2$ , y  $\omega^2 = 0$  corresponde a la raíz negativa, que es nula en este límite. Cuando  $\delta \rightarrow \infty$  las raíces de (III,29) son  $\omega^2 = -k^2$ ,  $\omega^2 = \pm i k^2/2$ , por lo tanto hay tres modos inestables:

$$\left. \begin{aligned} \omega &= -ik \\ \omega &= \frac{1}{2}(1+i)k \\ \omega &= \frac{1}{2}(-1+i)k \end{aligned} \right\} \text{super-estable}$$

estos resultados están de acuerdo, como debe ser, con los límites de cuasi-neutralidad para las superficies de discontinuidad aisladas. La (III,26) ha sido resuelta numéricamente y los resultados están ilustrados en las figuras (13 - 16), donde la parte real e imaginaria de  $\omega$  está representada en función de  $k$ , para algunos valores de  $\delta$ . Las líneas punteadas representan valores imaginarios de  $\omega$ , las flechas unen la parte real con su correspondiente parte imaginaria cuando es superestable

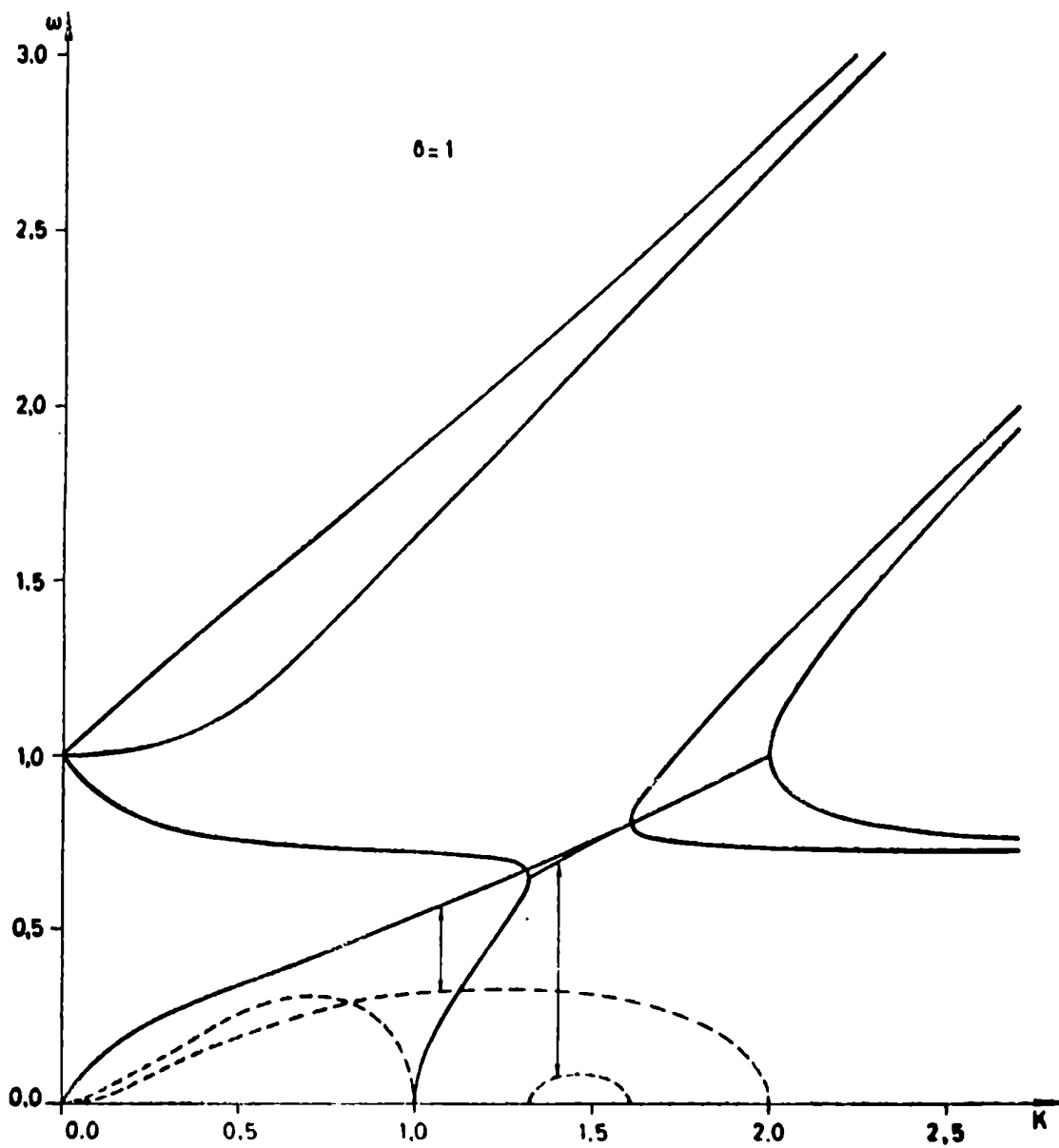


- FIG 13 -

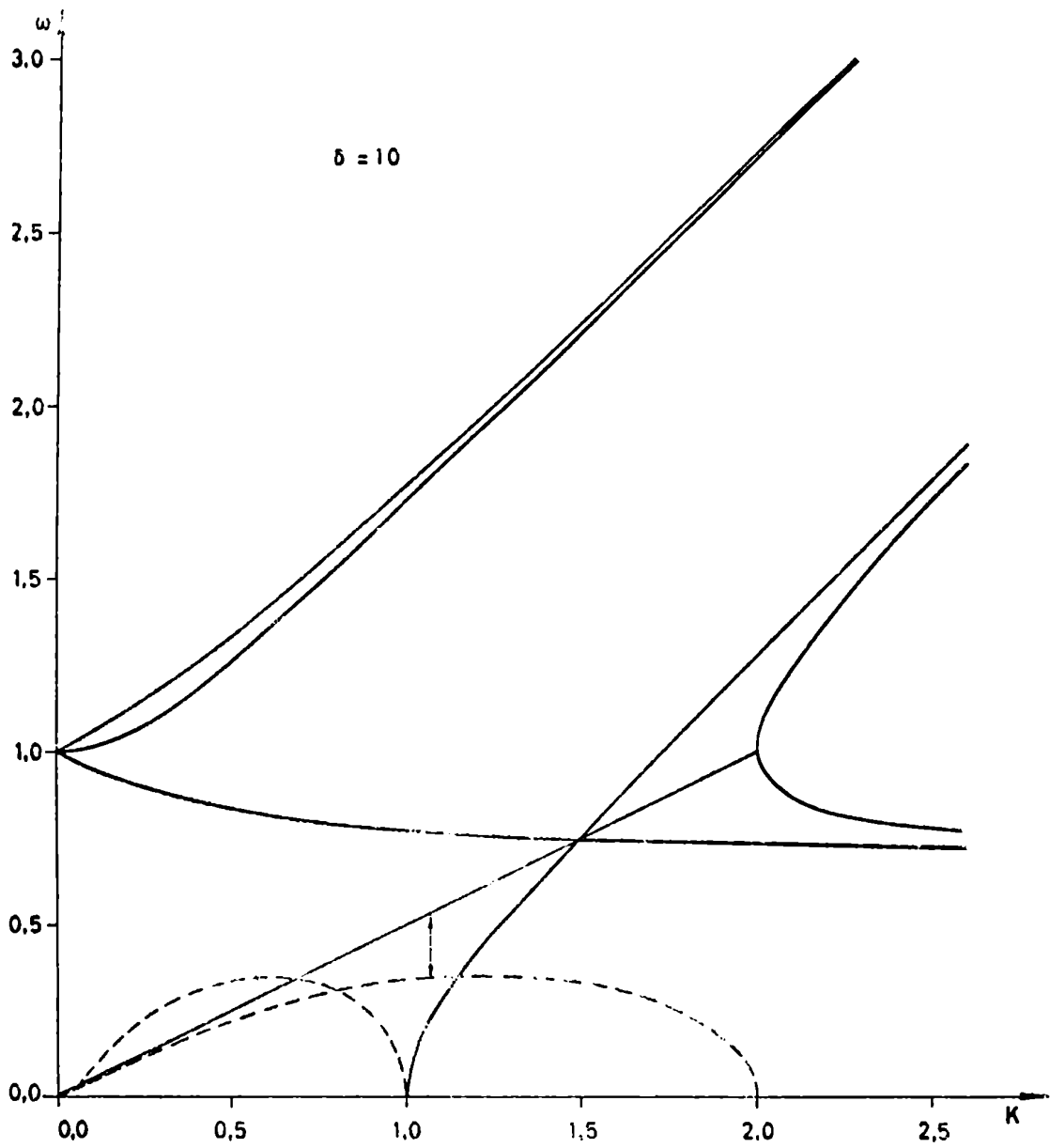


- FIG 14 -





- FIG 15 -



- FIG 16 -

5. Regiones de transición

En los párrafos precedentes la transición entre regiones de velocidad constante fué esquematizada mediante saltos bruscos en la velocidad. Los resultados no pueden aplicarse cuando la longitud de onda se hace menor que el espesor de la transición. Consideraremos por lo tanto el siguiente perfil continuo (ver fig. 19 )

$$\begin{aligned} u &= \frac{u_0}{d} y & \text{para } |y| < d \\ u &= u_0 & \text{para } y > d \\ u &= -u_0 & \text{para } y < -d \end{aligned}$$

En la región del gradiente lineal de (III,1) se escriba del siguiente modo<sup>(\*)</sup>

$$(III,30) \quad \frac{d^2 \varphi}{dy^2} - \frac{\varepsilon k}{(\omega - ky)[(\omega - ky)^2 - 1]} \frac{d\varphi}{dy} - S^2 k^2 \varphi = 0$$

donde  $y$ , está medido en unidades de  $d$ , y ha sido empleada la normalización usual. Si ponemos:

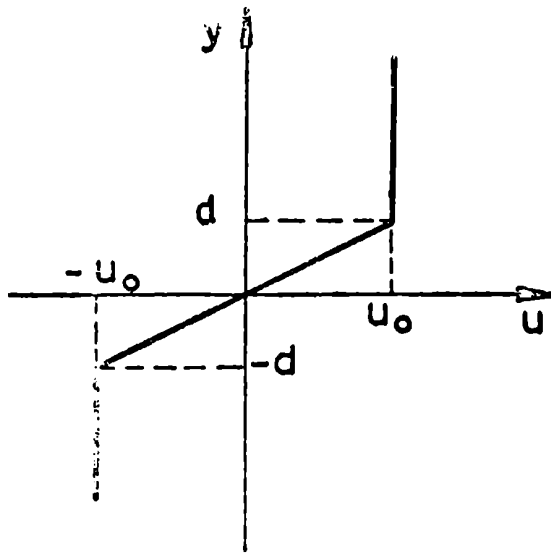
$$(III,31) \quad \left. \begin{aligned} \omega - ky &= \sigma \\ \rho &= \frac{\sigma}{(1 - \sigma^2)^{1/2}} \end{aligned} \right\} \nu$$

La ecuación se transforma en

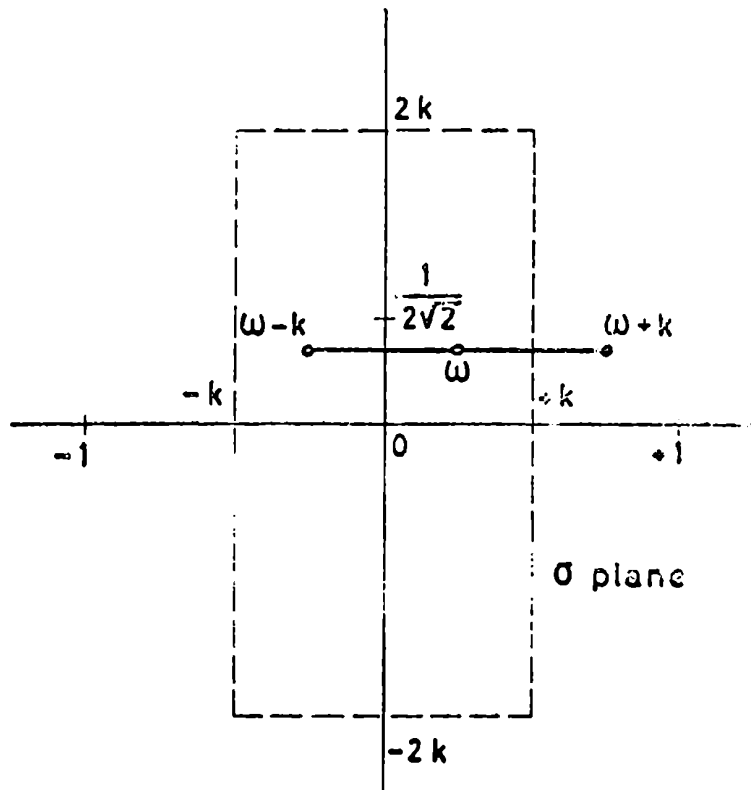
$$(III,32) \quad \frac{d^2 \nu}{d\sigma^2} - S^2 \nu = - \frac{3\sigma^2 - 2}{\sigma^2(\sigma^2 - 1)} \nu,$$

El dominio que nos interesa es ahora una línea en el plano complejo  $\sigma$ , que va desde  $\omega - k$ , a  $\omega + k$ . Las propiedades generales deducidas en el I.1 nos dan información a cerca de la ubicación de esos puntos. Las III. (7 - 6) nos dicen que  $|\omega_1| < k$  y  $|\omega_2| < 2k$ , o bien  $|\omega_2| < \frac{1}{2}\sqrt{2}$ . Por lo tanto podemos elegir de tal manera que el intervalo que nos interesa no contenga los puntos singulares  $\sigma = \pm 1$ , de la (III,32) Como se ve en la fig. 20, para ello basta con tomar  $k < \frac{1}{2}$  ( de todas maneras los puntos singulares  $\sigma = \pm 1$  quedan excluidos si  $\omega$  es complejo

(\*) Esta ecuación de acuerdo con la sistematización de Klein Bocher necesita de la coalescencia de 9 puntos singulares elementales por ello ha sido resuelta solo en forma aproximada.



- FIG 17 -



- FIG 18 -

En estas condiciones es posible obtener una solución asintótica de la (III,32) alrededor de  $\sigma = 0$  para valores grandes del parámetro  $\delta$  ( $\delta \gg 1$ ). Ello se realiza mediante el método de comparación de Jeffreys y Langer<sup>(7-8)</sup>, de la (III,33), con la ecuación:

$$(III,33) \quad \frac{d^2 \bar{v}}{d\sigma^2} - \delta^2 \bar{v} = \frac{2}{\sigma^2} \bar{v}$$

La diferencia entre  $\bar{v}$  y  $v$  puede aceptarse con un valor del orden de  $\delta^{-1}$ , uniformemente, en un dominio del plano  $\sigma$  que contiene  $\sigma = 0$ , y excluye los demás puntos singulares de la (III,32). La (III,33) tiene por solución

$$\bar{v} = c_1 \exp(\delta\sigma) \left(\frac{2}{\sigma} - \delta\right) + c_2 \exp(-\delta\sigma) \left(\frac{2}{\sigma} + \delta\right)$$

... través de la (III,31) se obtiene entonces la solución aproximada:

$$(III,34) \quad \varphi = [1 - (\omega - ky)^2]^{-1/2} \left\{ c_1 \exp[\delta(a - by)] [1 - \delta(\omega - ky)] + c_2 \exp[-\delta(\omega - by)] [1 + \delta(\omega - ky)] \right\}$$

que representa el primer término de un desarrollo en potencias decrecientes de  $\delta^{-1}$ .

Esta solución debe ser conectada con

$$\begin{aligned} \rho &= a \exp(-k\delta y) && \text{en } y = y_1, \text{ con} \\ \rho &= b \exp(k\delta y) && \text{en } y = y_2, \text{ para lo} \end{aligned}$$

cual se exige la continuidad tanto de  $\rho$  como de  $\rho'$ .

Al calcular el campo eléctrico a partir de la (III,34) solo los términos de orden  $\delta^{-1}$  deben ser conservados; la condición de compatibilidad para las ecuaciones lineales y homogéneas en las constantes  $a, b, c_1, c_2$ , proporciona la relación de disper

siòn siguiente

$$(III,35) \quad 4\delta^2 \omega^2 = 4\delta^2 k^2 - 4\delta k + 1 - \exp(-4k\delta)$$

Los modos inestables son puramente crecientes; el valor crítico de  $k$  que separa los modos estables de los inestables es dado por  $k\delta \approx (4/5)^2$ . Cuando  $k\delta \ll 1$ , es decir para longitudes de onda mucho mayores que  $d$ , encontramos  $\omega = \pm ik$ , en acuerdo con el límite cuasi neutro del III 1.2. En el caso opuesto,  $k\delta \gg 1$ , el plasma es estable y se tiene  $\omega = \pm k$ . La velocidad de crecimiento máxima se obtiene para  $k\delta \approx \frac{2}{5}$  y vale  $\delta \omega_{\max} \approx \frac{1}{5}$ . El límite en el cual estos resultados son válidos,  $\delta = \frac{d\omega_p}{u_0} \gg 1$ , corresponde a oscilaciones cuasi-neutrales puesto que puede obtenerse también de la (III,1), cuando  $\omega_p \rightarrow \infty$ . El método asintótico seguido aquí permite establecer claramente el rango de valores de  $k$ , para los cuales vale la cuasi-neutralidad. Se puede observar que los valores de  $\delta$  son generalmente elevados en las situaciones usuales físicas de laboratorio. Por ejemplo con  $n \approx 10^{14} \text{ cm}^{-3}$ ,  $u_0$  entre  $10^7$  y  $10^8$  cm/seg y transiciones del orden de 1 cm, tenemos para  $\delta$  valores de  $6 \cdot 10^3 - 6 \cdot 10^4$ . En el caso de las ondas hidromagnéticas  $\delta$  es del orden de la relación entre la velocidad de la luz y la velocidad de Alfvén definida con la masa de los electrones, un número generalmente bastante grande.

Desde el punto de vista de la teoría de la inestabilidad por deslizamiento, en las discontinuidades de 1.2-4, es importante mostrar como esos resultados se obtienen por continuidad cuando hacemos tender a cero el espesor de la transición. En otras palabras demostrar que no se trata de modos de oscilación introducidos artificialmente por la discontinuidad matemática. Con este fin, se puede obtener de la (III,32) otra aproximación, si consideramos valores de  $k$ , tales que el coeficiente de  $\nu$  en el lado izquierdo, no se anule nunca. A partir de (III,6) y (III,32) obtenemos la condición

$$(III,36) \quad 2k < \sqrt{\frac{2}{3}} - \epsilon$$

donde  $\epsilon$  es un número positivo pequeño. Cuando esta desigualdad se cumple podemos aproximar la solución de (III,32), para

$$\delta \ll 1, \text{ con}$$

$$(III,37) \quad \sigma = c_1 \frac{\sqrt{1-\sigma^2}}{\sigma} + c_2 \frac{\sqrt{1-\sigma^2}}{\sigma} \left\{ -\sigma + \frac{1}{2} \ln \frac{1+\sigma}{1-\sigma} \right\}$$

la cual es la solución de la ecuación para  $\delta = 0$ . Por supuesto esta aproximación no es refinada, en el sentido que la cota del error no es uniforme en la región de  $\sigma$  fijada por la (III,36), pero de todas maneras fijado  $\epsilon$  siempre puede hallarse un  $\delta$  suficientemente pequeño, para que la (III,37) no supere un error prefijado.

La conexión con las soluciones válidas fuera de la región del gradiente se realiza con la condición física de continuidad de potencial y campo eléctrico. De esta manera se obtiene la relación de dispersión

$$(III,38) \quad 2\delta k + \frac{\delta}{2} \ln \frac{(1-k)^2 - \omega^2}{(1+k)^2 - \omega^2} + \left[ 2 - \frac{1}{1-(\omega+k)^2} - \frac{1}{1-(\omega-k)^2} \right] = 0,$$

para  $\delta \ll 1$ , es decir bajas densidades y espesor  $d \rightarrow 0$ .

La (III,38) debe ser resuelta por iteración por coherencia en el procedimiento de aproximación. En el límite  $\delta \rightarrow 0$  se obtiene la (III,11) correspondiente al perfil a escalón con velocidad doble. La primera iteración da

$$(III,39) \quad \omega^2 = \frac{1}{2} \left\{ 2k^2 + 1 \pm \sqrt{8k^2 + 1} + \delta g(k) \left( 1 \pm \frac{2k^2 - 1}{\sqrt{8k^2 + 1}} \right) \right\},$$

$$g(k) = k - \frac{1}{4} \ln \frac{1 + 4k \mp \sqrt{8k^2 + 1}}{1 - 4k \mp \sqrt{8k^2 + 1}},$$

donde  $k$  está condicionado por la (III,36).

Referencias

1. Bohm D. Gross E.P. Phys.Rev. 75, 1851, 1864 (1949).
2. Büneman O. Phys.Rev.Lett. 1,8 (1958).
3. Bernstein I. Trehan S. Nuclear Fusion 1, 3 (1960).
4. Adlam J.H. Allen J.E. Phyl.Mag. 3,448 (1958).
5. Büneman O. Phys.Fluids Sup. 7, S3, nº 11 (1964).
6. Ince, Ordinary Differential Equations, p.494, New York.
7. Erdélyi A. Journal Math.Phys. 1, 16 (1960).
8. Jeffreys, Asymptotics Approximations, P. 4.7, Oxford (1967)



IV INESTABILIDAD POR DESLIZAMIENTO EN UN PLASMA FRIO CON CAMPO MAGNÉTICO EXTERNO

1. Nodos de oscilación electrostáticos para un perfil en escalón con  $k_y = 0$

En presencia de un campo magnético paralelo al flujo los nodos de oscilación de un plasma con gradiente de velocidad se vuelven notablemente complejos y aparece una variedad de nuevos fenómenos. Nos limitaremos a estudiar los nodos electrostáticos de oscilación, partiendo de la (II,30), para un perfil en escalón. Supondremos constante la densidad del plasma, velocidades iguales para ambas especies de partículas, de manera que el plasma no transporta corriente eléctrica, y nos limitaremos a considerar las oscilaciones electrónicas ( $m_i \rightarrow \infty$ ).

El campo magnético tiende a convertir las oscilaciones laterales al flujo, de las partículas en movimiento de giración alrededor de las líneas de fuerza. La longitud de onda paralela al flujo y la longitud de penetración lateral de la oscilación de superficie son ahora diferentes, y se pueden manifestar además oscilaciones espaciales amortiguadas del campo eléctrico en la dirección perpendicular a la superficie de discontinuidad. Un hecho interesante está dado por los modos de oscilación para  $\Omega_{ce} > \omega_p$ , los cuales son estables, pero se propagan perpendicularmente a la superficie de discontinuidad. Es decir aparecen ondas progresivas, no amortiguadas, perpendicularmente a la dirección del flujo.

El perfil a escalón puede ser tomado, sin pérdida de generalidad como  $\bar{u} = U$  para  $y > 0$  (región 1) y  $\bar{u} = -u$  para  $y < 0$  (región 2). Aquí  $u$  es una velocidad constante positiva. Examinaremos primero los modos con  $k_y = 0$ , la (II,30) se reduce a

$$(IV,1) \quad \left\{ \phi \left( 1 - \frac{\omega_p^2}{\bar{\omega}^2 - \Omega^2} \right) \right\}' - k_{||} \left( 1 - \frac{\omega_p^2}{\bar{\omega}^2} \right) \phi = 0$$

En cada región las soluciones son las exponenciales  $e^{\pm k_{||} y}$ ,  
donde

$$(IV,2) \quad K_{1,2} = \frac{1 - \frac{\omega_p^2}{\bar{\omega}_{1,2}^2}}{1 - \frac{\omega_p^2}{\bar{\omega}_{1,2}^2 - \Omega^2}}$$

Podemos asegurar la convergencia en el infinito en las dos regiones, definiendo  $K_1$  y  $K_2$  con la condición  $Re[K_{1,2}] > 0$ . Las soluciones convergentes son entonces

$$(IV,3) \quad \begin{aligned} \phi_1 &= A e^{i(k_{\parallel} x - \omega t) - K_1 y} && \text{para } y > 0, \\ \phi_2 &= B e^{i(k_{\parallel} x - \omega t) + K_2 y} && \text{para } y < 0. \end{aligned}$$

Debemos empalmar ahora  $\phi_1$  y  $\phi_2$  a través de  $y = 0$ . El campo eléctrico debe ser finito en todas partes, por lo tanto  $A = B$ . Integrando la (IV,1) a través de la superficie de discontinuidad tenemos la siguiente condición en  $y=0$

$$(IV,4) \quad \phi_1' \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\bar{\omega}_1^2 - \Omega^2}\right) = \phi_2' \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\bar{\omega}_2^2 - \Omega^2}\right), \quad (y = 0)$$

que nos da la siguiente relación de dispersión

$$(IV,5) \quad 0 = \sqrt{\frac{1 - \frac{\omega_p^2}{(\omega - k_{\parallel} u)^2}}{1 - \frac{\omega_p^2}{(\omega - k_{\parallel} u)^2 - \Omega^2}} \left(1 - \frac{\omega_p^2}{(\omega - k_{\parallel} u)^2 - \Omega^2}\right)} + \sqrt{\frac{1 - \frac{\omega_p^2}{(\omega + k_{\parallel} u)^2}}{1 - \frac{\omega_p^2}{(\omega + k_{\parallel} u)^2 - \Omega^2}} \left(1 - \frac{\omega_p^2}{(\omega + k_{\parallel} u)^2 - \Omega^2}\right)}$$

Debemos recordar que en la (IV, 5) las raíces están definidas con parte real positiva, y que por lo tanto el signo entre ambos términos de la ecuación no es indiferentemente positivo o negativo. Racionalizando la (IV,5) se obtiene

$$(IV,6) \quad \frac{\omega^2}{\omega_p^2 + \Omega^2} = \frac{1}{\bar{\omega}_1^2} + \frac{1}{\bar{\omega}_2^2} - \frac{\Omega^2}{\bar{\omega}_1^2 \bar{\omega}_2^2}$$

La (IV,6) además de contener las soluciones posibles de la (IV,5), contiene también las soluciones de una ecuación asociada, precisamente la ecuación que se obtiene de la (IV,5) cambiando el signo entre los dos términos de la ecuación. Naturalmente las raíces de esta ecuación asociada que también se encuentran en la (IV,6) no satisfacen la condición de empalme (IV,4).

En el límite cuasi-neutro,  $\omega_p \rightarrow \infty$ , la (IV,6) da  $\omega^2 \approx \frac{\Omega^2}{2} - k_{\parallel}^2 u^2$ , vamos a ver luego que, de estos valores

de  $\omega^2$ , solo los correspondientes a  $\omega^2 < 0$ , es decir los modos inestables, son físicamente posibles, esto es son soluciones de la (IV,5).

Vamos a definir los siguientes parámetros adimensionales

$$\omega/\omega_p \rightarrow \omega, \frac{k_{\perp} u}{\omega_p} \rightarrow k, \Omega/\omega_p \rightarrow h,$$

midiendo todas las frecuencias en unidades de  $\omega_p$ . Las soluciones de la (IV,6) se pueden escribir entonces como

$$(IV,7) \quad \omega^2 = \frac{1+k^2}{2} + k^2 \pm \sqrt{(1+h^2)(1+8k^2-k^2)}$$

Los valores de  $\omega$  obtenidos de (IV,7) que pertenecen a la ecuación asociada de la (IV,5), son espurios y deben ser eliminados. Por ejemplo las raíces complejas que se encuentran para  $h > 1$  en la (IV,7) son espurias. Se puede controlar fácilmente este hecho examinando el entorno de  $k = 0$ , la (IV,7) da raíces sobreestables, pero en este caso los dos términos de la (IV,5) son iguales y la suma no es nula. También es simple de controlar el límite  $h \gg 1, k$ ; en este caso  $\omega^2 \approx \frac{k^2}{2}(1+i)$  y la (IV,5) no puede satisfacerse para estos valores de  $\omega$ . Este resultado coincide con la espontánea conjetura que un campo magnético muy fuerte debería tender a estabilizar el flujo, por lo menos respecto de oscilaciones puramente electrostáticas ( la posibilidad de "two-stream" ha sido excluida desde el comienzo ), en virtud del efecto de "anclaje" de las partículas a las líneas de campo.

Consideremos también el límite  $k \gg 1, h$ , entonces

$$\omega = k \left( 1 \pm \frac{1}{2} \sqrt{2(1+h^2)} k^{-1} + O(k^{-3}) \right) \quad \text{y se verifica que}$$

$$(IV,8) \quad K_1 = k \left( 1 + O(k^{-3}) \right) \sqrt{\left( \frac{k^2-1}{h^2+1} \right)}$$

$$K_2 = k \left( 1 + O(k^{-3}) \right)$$

donde la raíz está definida con la parte real positiva. Entonces la (IV,5) se reduce a

$$\frac{k+1}{k^2-1} \sqrt{\left( \frac{k^2-1}{h^2+1} \right)} + 1 = O(k^{-3})$$

(\*) Mientras esta tesis se encontraba en preparación apareció un artículo de Talwar y Lalra en NUCLEAR FUSION, Vol 7, 17 (1967) sobre el mismo argumento, donde este punto fué pasado por alto. Como consecuencia se admiten en dicho artículo soluciones espurias sobreestables, no se determinan las regiones de existencia de modos y no se ponen de manifiesto los modos con propagación lateral para  $\Omega > \omega_p$ . El autor, con la colaboración de J. Gratton, ha publicado un trabajo donde se aclaran estas cuestiones, ver Ref 1.

de donde se ve que solo para  $\omega < 0$  están permitidas estas raíces.

Debe preverse el caso en que  $K_{1,2}$  resulten ser imaginarios puros. Si esto sucede el problema no está determinado, puesto que se tendrían dos soluciones acotadas para  $\phi$  en cada región. Es necesario en este caso imponer alguna condición de contorno adicional. Si resultara que al mismo tiempo  $\omega$  es real (que es precisamente lo que ocurre aquí) entonces hay dos maneras de determinar el problema. Por un lado, podemos estudiar la propagación de una onda generada en el infinito, con una frecuencia prefijada, y su interacción con la superficie de discontinuidad de las velocidades. Por otro lado, podemos limitarnos a considerar solamente aquellas ondas que se originan por oscilaciones de la superficie, y luego se propagan al infinito en ambas direcciones. Estas constituirían las oscilaciones propias del sistema. El aceptar solamente ondas salientes es una condición que está más de acuerdo con el espíritu del análisis en modos normales que hemos seguido hasta aquí. Naturalmente también el primer tipo de problemas es interesante aunque no lo trataremos aquí.

Seguiremos el segundo enfoque, exigiendo que los modos con  $\omega$  real y  $K_{1,2}$  imaginarios cumplan la condición  $Im(K_{1,2}) < 0$ . De este modo la velocidad de fase corresponde a ondas salientes en ambas regiones. Podría objetarse que la forma correcta de imponer la condición de radiación es la de exigir que la velocidad de grupo corresponda, en ambas regiones a ondas salientes, con el fin de ponerse a cubierto de la eventualidad que se presente dispersión anómala, en la relación entre  $\omega$  e  $Im(K_{1,2})$ . Puede verse, sin embargo que, en virtud de la posibilidad de elegir el signo de  $\omega$ , en nuestro problema no se presentan inconsistencias usando la condición recién mencionada. Es fácil ver que en este caso la relación de dispersión es nuevamente la (IV,5), la cual engloba entonces todos los casos que se pueden presentar.

Debido a la peculiar condición sobre la parte real (o imaginaria) de las raíces cuadradas en (IV,5), la tarea de eliminar las soluciones espurias de la (IV,7) es un tanto engorrosa, y aquí citaremos solamente los resultados. En el apéndice 4 pueden verse algunos detalles de este análisis.

Es conveniente distinguir entre los casos  $h < 1$  y  $h > 1$ , y además estableceremos una distinción entre los dos signos de la (IV,7) denominando "rama superior" al  $\omega^2$  resultante de tomar el signo + y "rama inferior" al que resulta de tomar el signo - . Bastará con analizar el caso de  $\omega > 0$  (o bien  $\text{Im}(\omega) > 0$ ) puesto que la sustitución  $\omega \rightarrow -\omega$ , equivale a intercambiar los papeles de las regiones 1 y 2.

a) Rama inferior,  $h < 1$

A medida que se incrementa  $k$ , partiendo de cero, encontramos

a<sub>1</sub>) Un intervalo de  $k$  en el cual no hay solución posible de la (IV,5), que se extiende desde  $k^2 = 0$  hasta  $k^2 = k_1^2 \equiv \frac{1}{2}(1 + h^2 - \sqrt{1 + h^4})$

a<sub>2</sub>) Desde  $k^2 = k_1^2$  hasta  $k^2 = k_2^2 \equiv \frac{1}{2}(1 + h^2 + \sqrt{1 + h^4})$  se extiende un intervalo de nodos inestables. Para estos nodos  $\omega$  es imaginario puro, la perturbación crece monotonamente con el tiempo, sin oscilaciones. Este conjunto de modos surge con continuidad a partir de los nodos inestables para  $h = 0$  de III F.2 . Los  $K_{1,2}$  correspondientes son complejos. El campo eléctrico presenta oscilaciones amortiguadas en el espacio, hacia ambos lados de la superficie de discontinuidad. Son estas las únicas raíces inestables que admite la (IV,5). La máxima velocidad de crecimiento se encuentra para  $k_M = \sqrt{\frac{31}{8} \frac{h^2}{1+h^2}}$  y vale  $\text{Im}(\omega) = \sqrt{\frac{1}{2} \frac{h^2}{1+h^2}}$ .

Como puede apreciarse en la fig.20 la región de nodos inestables se va reduciendo a medida que  $h$  aumenta para desaparecer en  $h = 1$ . La propiedad estabilizadora del campo magnético se confirma aquí con el doble efecto de reducir el ancho del espectro de nodos inestables y al mismo tiempo disminuir la velocidad de crecimiento de la inestabilidad (ver fig. 22 ).

a<sub>3</sub>) A partir de  $k_2$  hasta  $k_3 \equiv \frac{1}{2}(\sqrt{h^2 + 1} + 1)$  hay una estrecha banda del espectro donde no hay nodos permitidos.

a<sub>4</sub>) Para todo  $k > k_3$  existen oscilaciones estables. Los correspondientes  $K_{1,2}$  son reales, y por lo tanto son estas oscilaciones de la superficie de discontinuidad, amortiguadas en la dirección y .

b) Rama inferior,  $h > 1$

Para  $h > 1$  la (IV,5) admite solamente raíces estables. Estos nodos ocupan en el plano  $(h,k)$  una banda diagonal como se ve en la fig.20. Los límites de esta banda están dados por  $k = k_3$  como

cota superior y para la cota inferior hay que distinguir entre los casos  $1 < h \leq \sqrt{3}$  y  $h > \sqrt{3}$ . En el primer caso el límite inferior es  $k = k'' = \sqrt{\frac{h^2-1}{2}}$  mientras que en el segundo caso el límite inferior es  $k = k_1 = \frac{1}{2}(\sqrt{h^2+1} - 1)$ . La peculiaridad de esta banda de modos es que los  $k_{1,2}$  correspondientes son imaginarios puros (ver fig.24). Es decir estos modos se propagan en la dirección perpendicular a la superficie de discontinuidad. Para  $h > \sqrt{3}$  esta banda tiene un ancho constante en números de onda igual a  $\omega_p/h_0$ , y un ancho constante también en frecuencias  $\omega$  igual a  $\omega_p$  (Ver fig.22).

La (IV,7) presenta raíces complejas espurias por debajo de  $k''$ . Las raíces reales de (IV,7) que se encuentran para  $k > k_2$ ,  $1 < h$  y para  $k'' < k < k_2$ , cuando  $\sqrt{3} < h$ , son también espurias.

c) Rama superior,  $h < 1$

Se encuentran soluciones de la (IV,5), estables desde  $k = k_1$  hasta infinito. Los  $k_{1,2}$  correspondientes a estos modos son reales, y tal como en el caso (a4) corresponden a ondas superficiales.

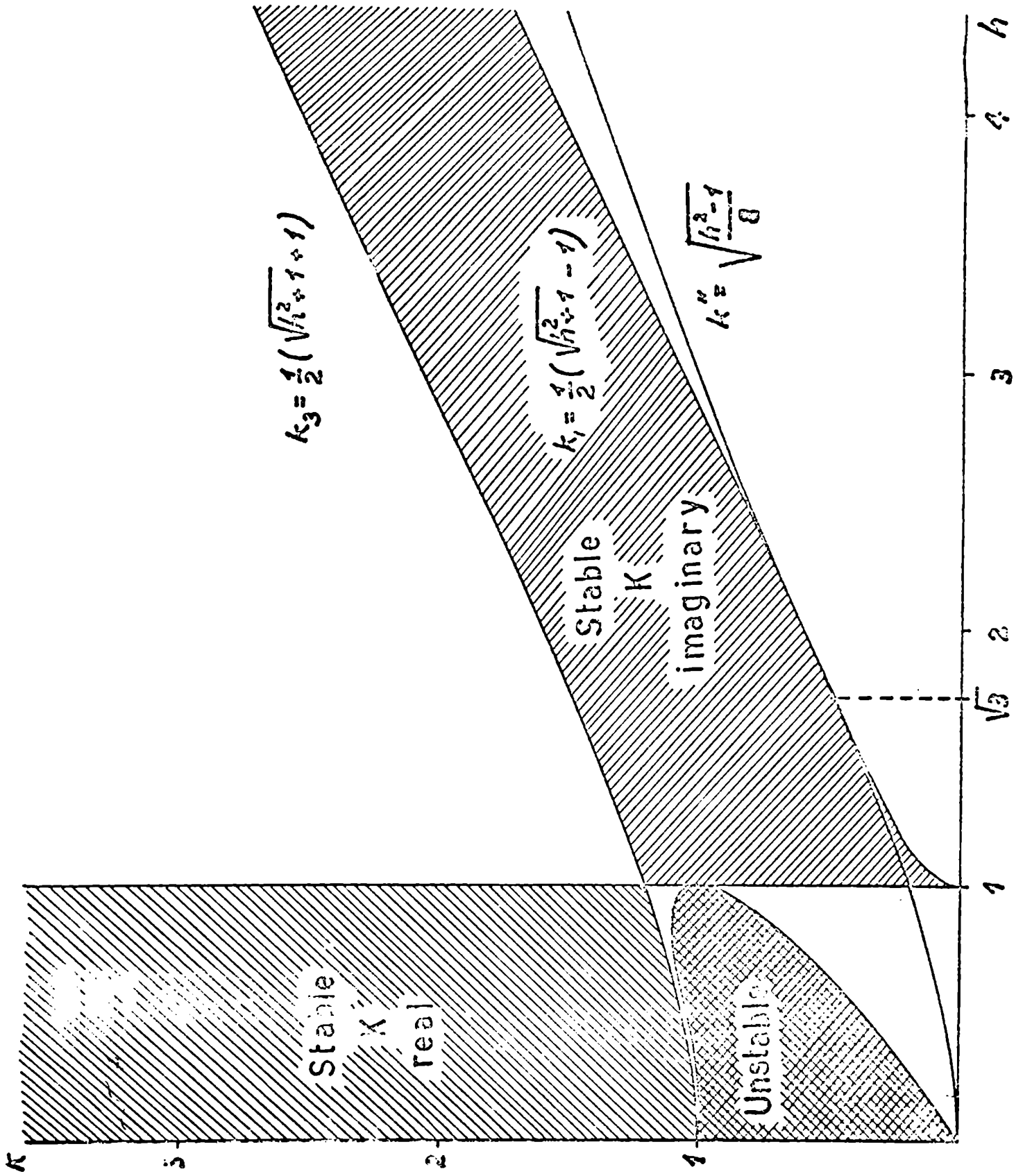
d) Rama superior,  $h > 1$

Hay una pequeña región de modos permitidos estables que se extiende desde  $k = k''$  hasta  $k = k_1$  para  $1 < h < \sqrt{3}$ . Estos modos tienen  $k_{1,2}$  imaginarios y representan ondas progresivas en las direcciones  $\pm y$ , como en el caso (b) y complementan aquellos modos de la rama inferior (Véase figs. 21 y 22). En apéndice 4-d se analiza en detalle el entorno de la línea  $k_1$  de transición entre soluciones admisibles y espurias.

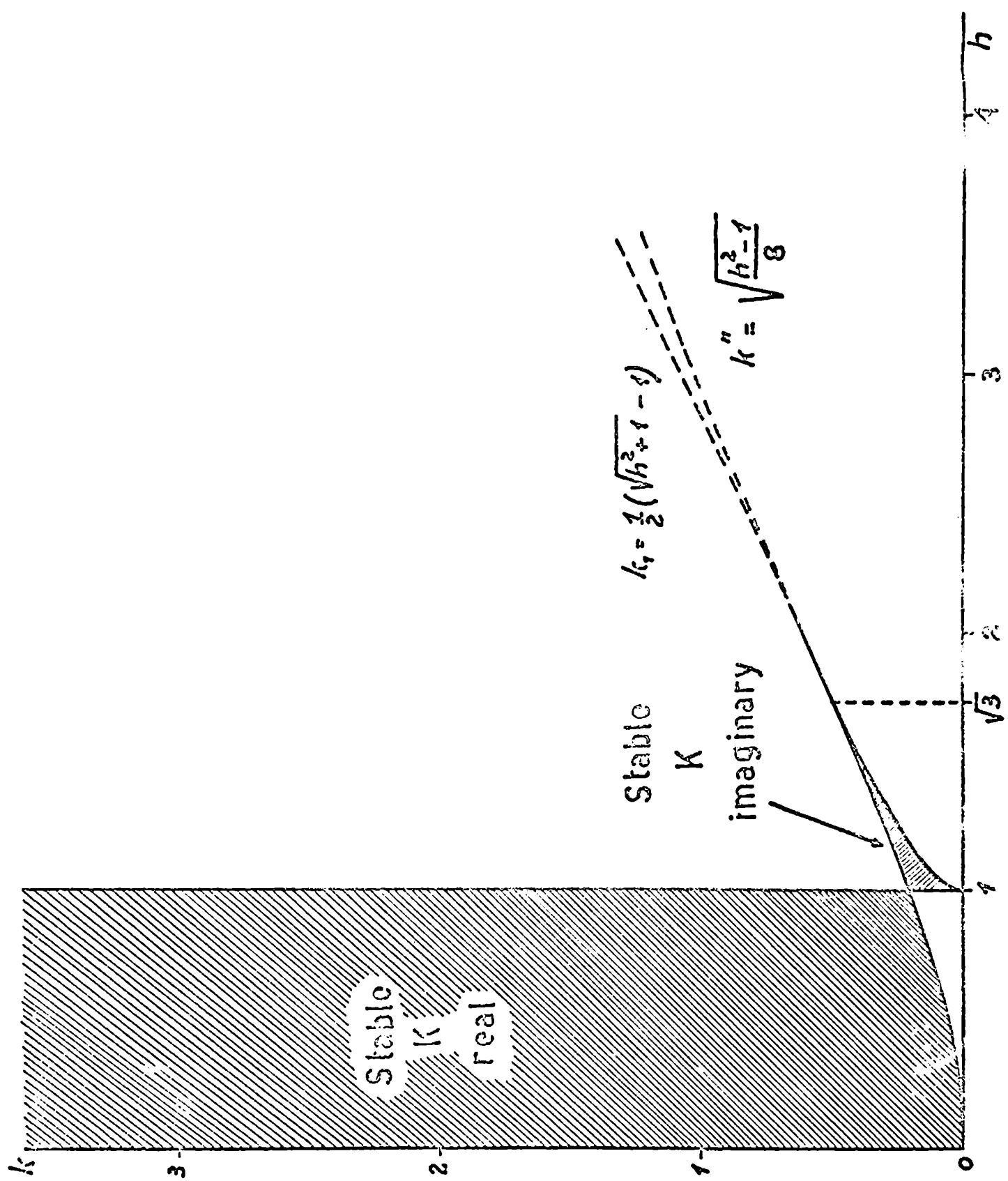
Todos los resultados de este análisis fueron controlados mediante una tabulación numérica de la (IV,5).

En las figuras 20 y 21 se han representado las regiones de existencia de los modos para las ramas inferior y superior respectivamente en el plano  $(h,k)$ . Estas figuras se tomaron de la Ref. 1.

En la figura 22 se ha representado las soluciones de la (IV,5) en función de  $k$  para diversos valores del parámetro  $h$ . Para los modos inestables se ha graficado  $\text{Im}(\omega) > 0$ , y con líneas de trazos la velocidad de crecimiento  $\omega_{M1}$ . Las figuras laterales indican esquemáticamente las regiones de existencia y estabilidad, que acabamos de discutir, y aclaran la pertenencia de los valores

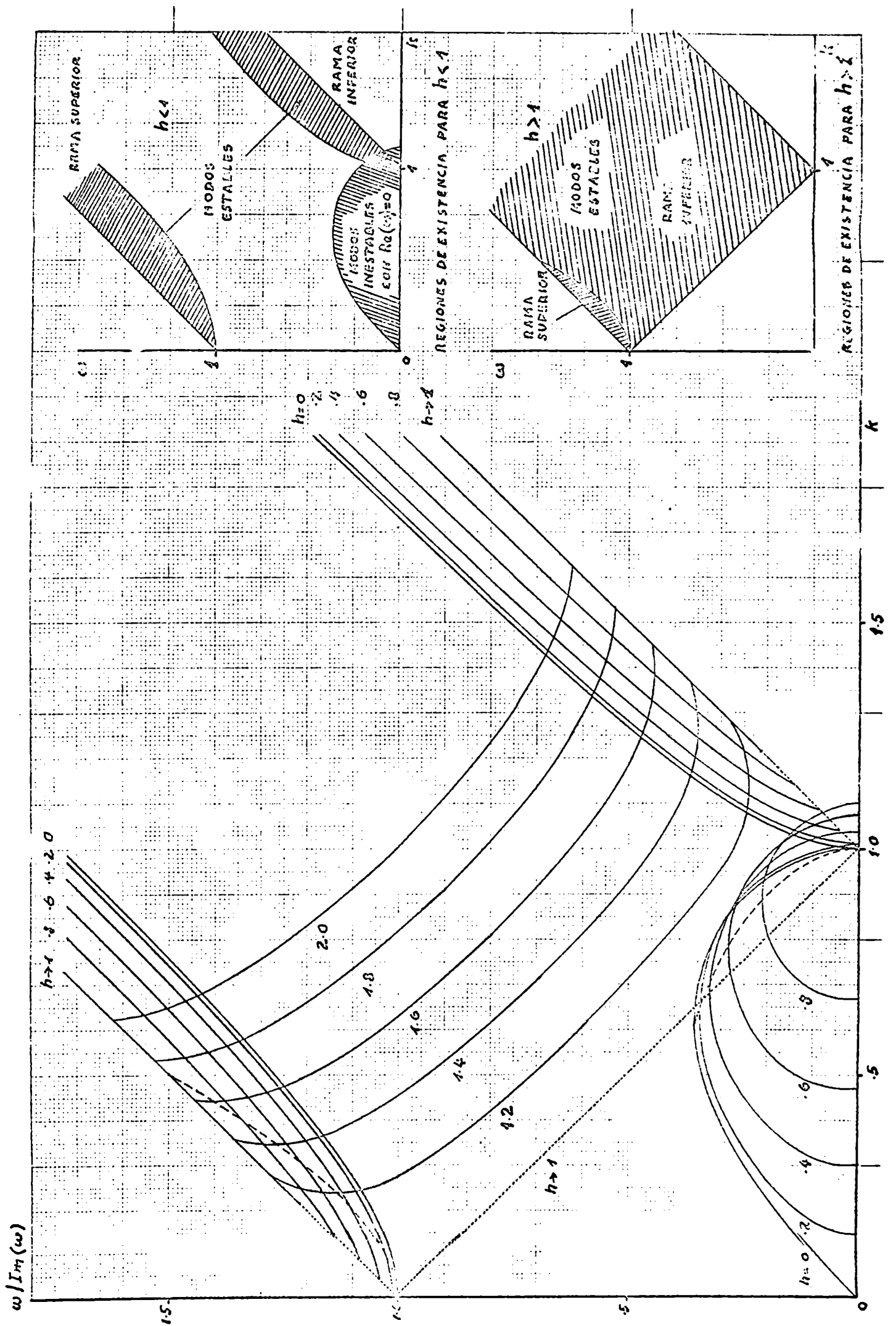


- FIG 20 -



- FIG 21 -





RELACION DE DISPERSION PARA LOS MODOS CON  $K_L = 0$  EN EL PERFIL EN ESCALON

de  $\omega(k)$  a la rama superior o inferior. Con línea punteada se ha señalado el límite  $h \rightarrow 1^+$  para ambas ramas. La línea de trazos del ángulo superior izquierdo del diagrama separa las ramas inferior y superior para  $h > 1$ , y corresponde a la frontera  $k''$  de la fig. 21. Como se ve ambas ramas se continúan y complementan en forma natural. La determinación positiva de  $\omega$  puede dar lugar a dispersión anómala para el número de onda  $k_y$  en la dirección  $x$ , en el caso de  $h > 1$ .

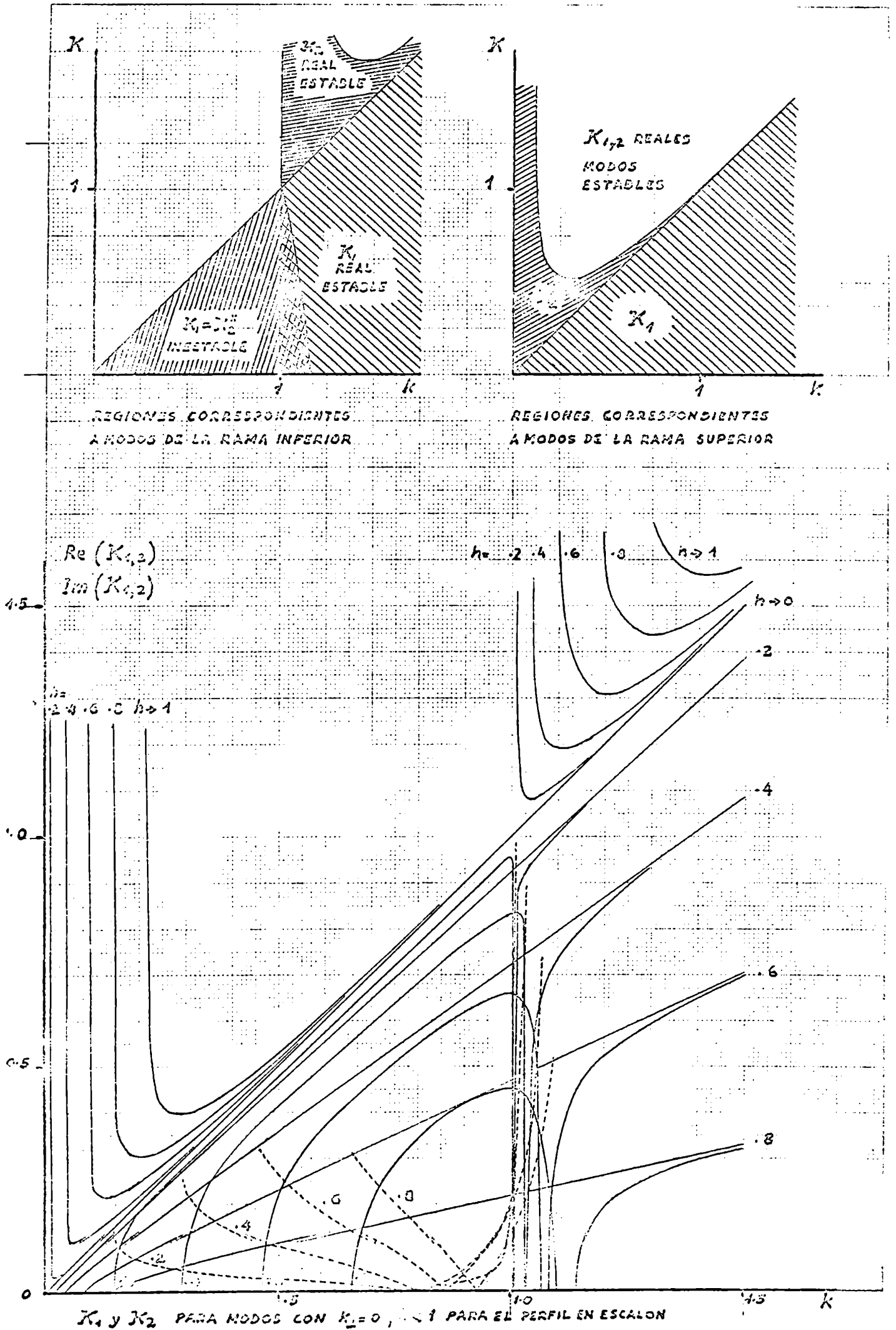
En la figura 23 se representan las partes reales (líneas llenas) e imaginarias (líneas de trazos) de  $K_{1,2}$  en función de  $k$  para los valores de  $h$  menores que 1 considerados en la fig. 22. La parte real de  $K_{1,2}$  da una medida de la influencia de la perturbación de la superficie en sentido lateral. Los nodos con  $Re(K_{1,2})$  cercano a cero indican que la oscilación afecta a una región extensa del plasma del lado de la superficie que corresponda. Cerca de los polos de  $Re(K_{1,2})$  la distancia de penetración del campo eléctrico de la perturbación tiende a cero. Como en la figura anterior hay diagramas auxiliares para facilitar la comprensión del gráfico principal.

Observemos que: i) en la zona inestable la perturbación es simétrica a ambos lados de la superficie. En los bordes de esta región  $K_{1,2}$  tienden a ser imaginarios puros. Es decir se tienen oscilaciones espaciales en  $y$ , que afectan zonas muy extensas del plasma, las cuales crecen monótonamente en el tiempo.

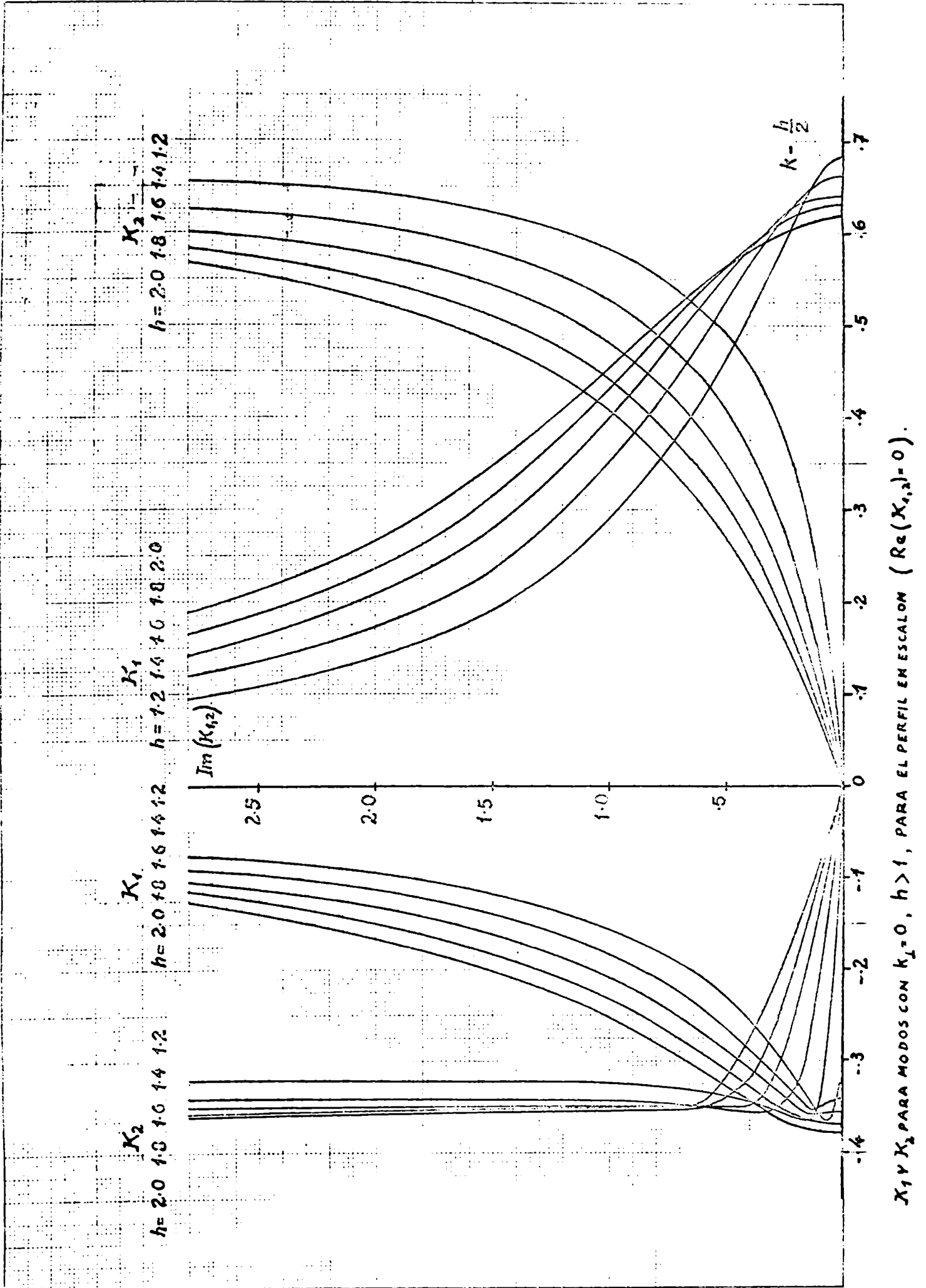
ii) Para los modos estables, en los extremos  $k_1$  y  $k_2$  de las regiones permitidas,  $K_1 = 0$ ,  $K_2 = \infty$  es decir las oscilaciones de la región 1 están desacopladas de la región 2, la cual no es perturbada. Esto corresponde a  $\omega > 0$ , naturalmente existe también la raíz  $-\omega$  para la cual la situación de las regiones 1 y 2 se invierte.

iii) Como vemos de (IV,8) las asíntotas de  $K_{1,2}$  para  $k \rightarrow \infty$ , para ambas ramas tienden a coincidir. Pero mientras  $K_2$  no depende de  $h$  en ese límite,  $K_1$  tiende a cero para  $h \rightarrow 1$ .

En la figura 24 se representan  $Im(K_{1,2})$  de los modos con propagación transversal que aparecen cuando  $h > 1$ , en función, aquí, de  $k = h/2$ , con el fin de hacer coincidir los cercos de  $K_2$  que ocurren en  $k = h/2$ . En esta figura no se ha hecho



- FIG 23 -



- FIG 24 -

distinción entre las ramas inferior y superior. El repliegue de las líneas  $\text{Im}(K_{1,2})$  en el ángulo inferior izquierdo corresponde al pasaje de modos de la rama inferior a modos de la rama superior que ocurren en  $k = k''$  para  $h < \sqrt{3}$ . Comparando la fig.24 con la fig.22 vemos que siempre es posible construir paquetes de ondas que se alejan de la superficie de discontinuidad hacia el infinito en ambas regiones eligiendo convenientemente en cada caso la determinación del signo de  $\omega$ .

2. Modos de oscilación con longitud de onda pequeña en la dirección z, ( $k_2 \gg k_1$ )

Cuando  $k_2 \neq 0$ , en cada región el potencial satisface la ecuación ( Ver II,30 )

$$\phi'' \left( 1 - \frac{1}{\bar{\omega}_{1,2}^2 - h^2} \right) - \frac{\alpha^2}{\bar{\omega}_{1,2}^2} \left[ k^2 \left( 1 - \frac{1}{\bar{\omega}_{1,2}^2} \right) + p^2 \left( 1 - \frac{1}{\bar{\omega}_{1,2}^2 - h^2} \right) \right] \phi = 0$$

donde hemos usado la adimensionalización del paragrafo anterior y además hemos definido  $p = \frac{h_1 \rho}{h_2 \rho}$ . Las soluciones son nuevamente del tipo (IV,3) donde ahora los  $K_{1,2}$  se definen como

$$(IV,9) \quad K_{1,2} = \sqrt{p^2 + k^2 \frac{\left( 1 - \frac{1}{\bar{\omega}_{1,2}^2} \right)}{\left( 1 - \frac{1}{\bar{\omega}_{1,2}^2 - h^2} \right)}}$$

y como antes  $\text{Re}(K_{1,2}) > 0$  o bien si la parte real es nula,  $\text{Im}(K_{1,2}) < 0$  en correspondencia de  $\omega$  real. Si  $\text{Re}(K_{1,2}) > 0$  la condición de canal es ahora

$$(IV,10) \quad K_1 \left( 1 - \frac{1}{\bar{\omega}_1^2 - h^2} \right) + K_2 \left( 1 - \frac{1}{\bar{\omega}_2^2 - h^2} \right) = hp \left[ \frac{1}{\bar{\omega}_1 (\bar{\omega}_1^2 - h^2)} - \frac{1}{\bar{\omega}_2 (\bar{\omega}_2^2 - h^2)} \right]$$

Estudiaremos las soluciones de esta relación de dispersión solo en el límite  $k_2 \gg k_1$ . En el límite  $p^2 \rightarrow \infty$  la (IV,10) se reduce a

$$(IV,11) \quad \mathcal{J} = \frac{1}{(\omega - k \mp h)(\omega - k)} + \frac{1}{(\omega + k \pm h)(\omega + k)}$$

El signo superior corresponde al límite  $p \rightarrow +\infty$ , viceversa el signo inferior es para el límite  $p \rightarrow -\infty$ . Notese que las ecua-

ciones (IV,10) y (IV,11) no son simétricas respecto de un cambio de signo en  $p$ . Esto se debe a la diferencia en el movimiento de los electrones en los casos  $\uparrow p$ . Esto puede verse observando que, si también cambiamos el signo del campo magnético, se reproduce la situación anterior. Analizaremos entonces por separado los casos  $p \gtrless 0$ .

a) Límite  $p \rightarrow +\infty$

En la figura 25 se ha representado esquemáticamente la función

$$F_+(w) = \frac{1}{(w-k-h)(w-k)} + \frac{1}{(w+k-h)(w+k)}$$

que es simétrica respecto de  $w=0$ , y tiene polos en  $w = \pm k$ ,  $w = \pm(k+h)$ . Obsérvese que  $F_+(w)$  tiene un mínimo en  $w=0$ , donde vale  $2/p(k+h)$ . Entonces la ecuación  $F_+(w) = 2$  tendrá siempre dos raíces reales con  $|w| > k+h$ . Las otras dos raíces serán reales o complejas conjugadas según que  $k(k+h) \gtrless 1$  respectivamente. El valor crítico  $k_c$  que separa los modos estables de los inestables es  $k_c = \frac{k}{2} (\sqrt{1 + 4/h^2} - 1)$ . En la figura 27 se representan las regiones de estabilidad en el plano  $(h,k)$ . Para los modos inestables  $w$  es imaginario puro. La máxima velocidad de crecimiento de la inestabilidad es  $\text{Im}(w_M) = \frac{1}{2} \sqrt{h^2 + 2}$ , y tiene lugar para  $k_M = \frac{k}{2} \left[ \sqrt{1 + \frac{4}{h^2} \frac{2h^2 + 3}{h^2 + 2}} - 1 \right]$ . A medida que  $h$  crece el ancho de la banda inestable se reduce y las longitudes de onda longitudinales correspondientes a la inestabilidad se alargan. En general  $w$  se obtiene como

$$(IV,12) \quad w = \frac{2k(k+h) + h^2 \pm 1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(h^2 + w^2 + 4k(k+h))(h^2 + 2)}$$

que tiende al límite correcto, correspondiente a III P.2 cuando  $h \rightarrow 0$ .

b) Límite  $p \rightarrow -\infty$

En este caso tenemos que considerar la función

$$F_-(w) = \frac{1}{(w+k-h)(w-k)} + \frac{1}{(w+k-h)(w+k)}$$

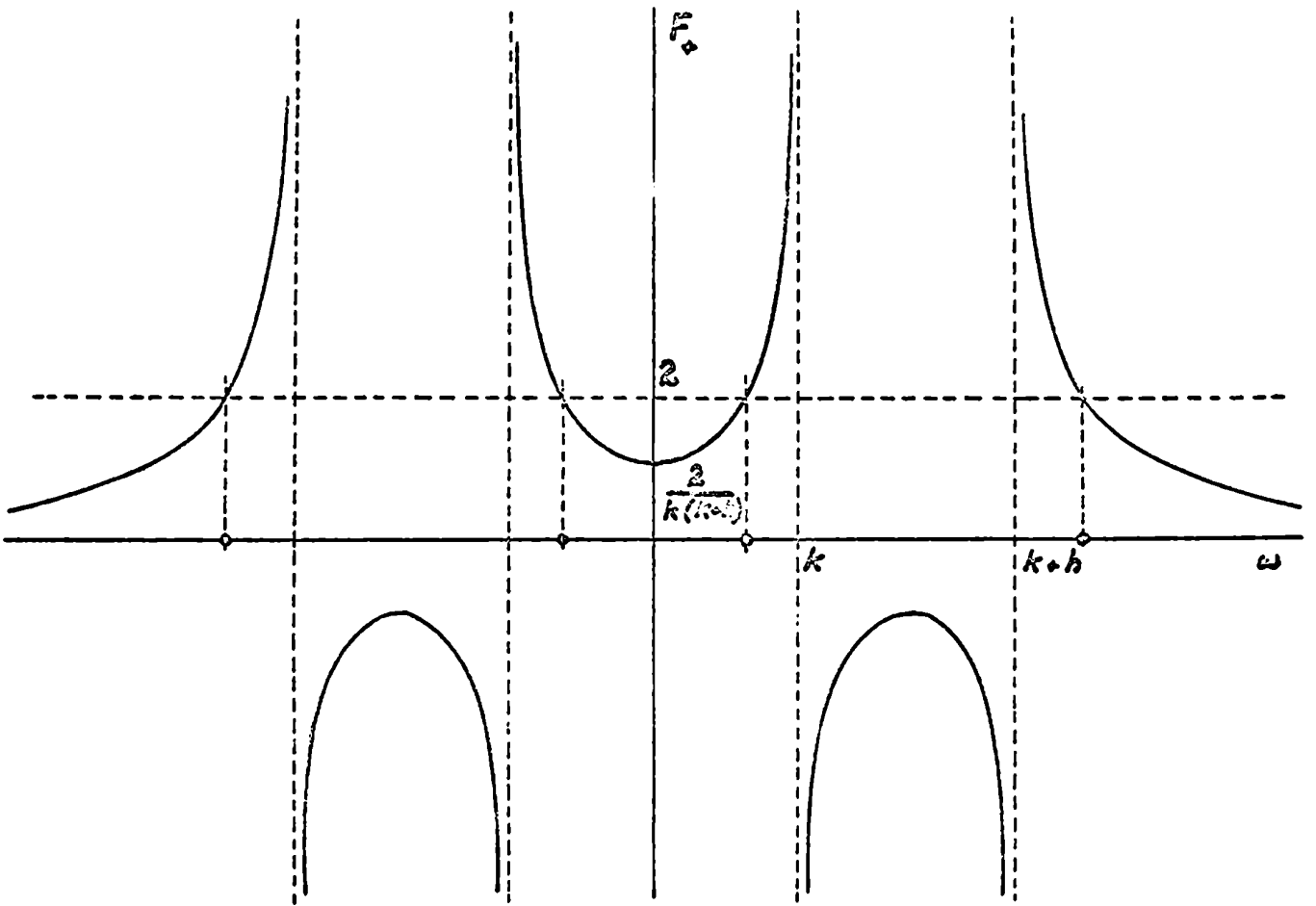
que también es simétrica respecto de  $w=0$ . Conviene distinguir los casos  $k < h$  y  $k > h$ . En el primer caso se tiene la situación que se representa esquemáticamente en la fig.26. Todas las raíces de  $F_-(w) = 2$  son reales, y los correspondientes modos son

estables. Para  $k > h$ , el comportamiento de  $F_-(\omega)$  es igual al ilustrado en la fig. 25 para  $F_+$ , sustituyendo  $k$  por  $k - h$ , y  $k + h$  por  $k$ . El mínimo de  $F_-$  en el origen, vale ahora  $2 / k(k-h)$ . El valor crítico de  $k_c^*$  es para estos modos  $k_c^* = \frac{h}{2} \left[ \sqrt{1 + 2/2h} + 1 \right]$ . En la figura 28 se indican las regiones de estabilidad para este caso. La máxima velocidad de crecimiento es nuevamente  $\omega_M$  y se produce para  $k_M^* = k_M + h$ . A medida que el campo magnético aumenta los modos inestables se desplazan hacia las longitudes de onda longitudinales cortas. Los valores de  $\omega$  se obtienen de (IV,12) cambiando  $k$  por  $k-h$  y  $k+h$  por  $k$ .

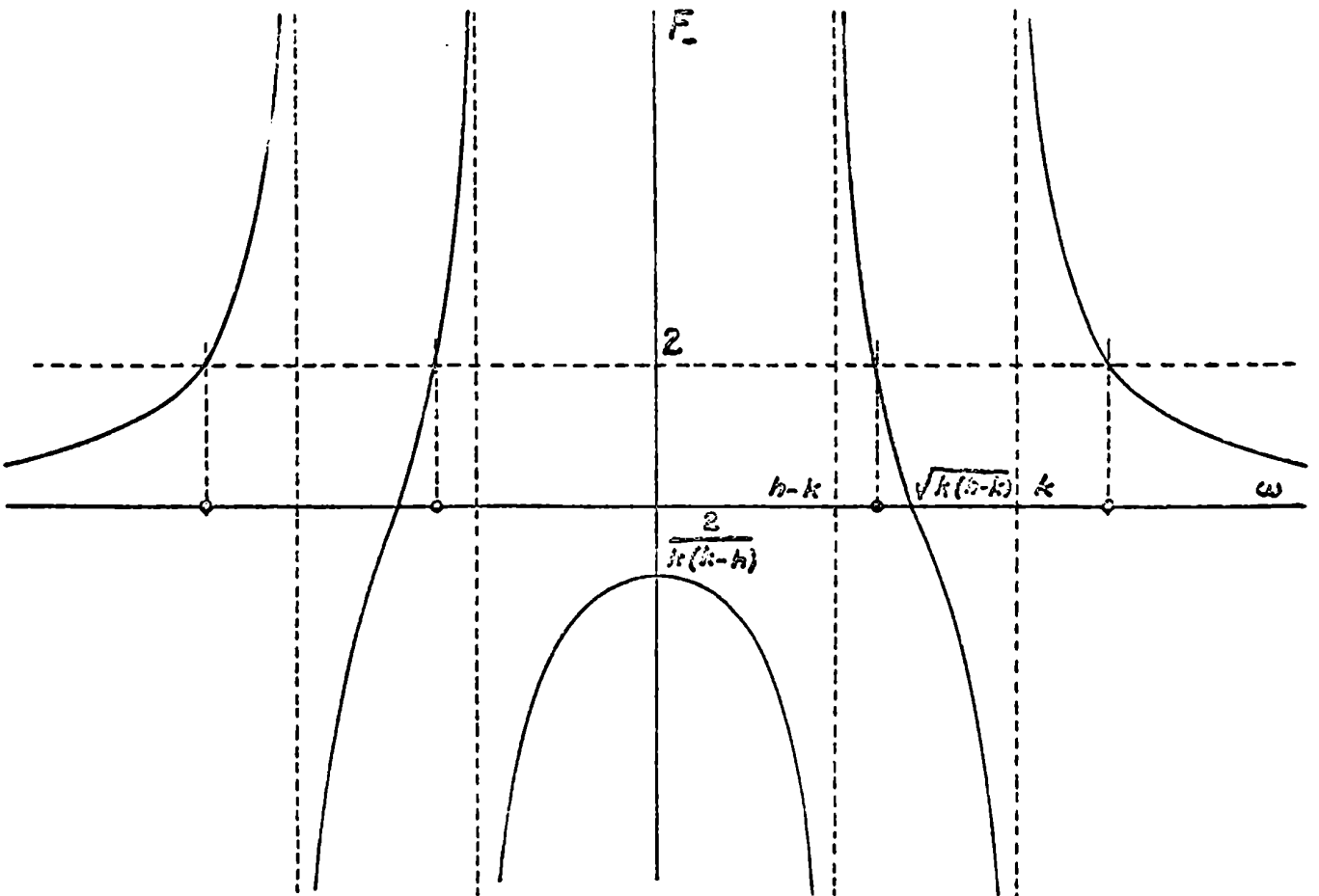
En ambos casos ( $p \rightarrow +\infty$ ) el campo eléctrico de la perturbación se amortigua exponencialmente en la dirección y a ambos lados de la superficie de discontinuidad. El ancho de las bandas inestables decrece, en ambos casos, al crecer  $h$ , como  $\Delta k \approx 1/h$  para  $h \gg 1$ . Nuevamente un campo magnético muy fuerte tiende a estabilizar el flujo.

### Referencias

1. F.Gratton, J.Gratton, NUCLEAR FUSION 8 nº 3 (1968).

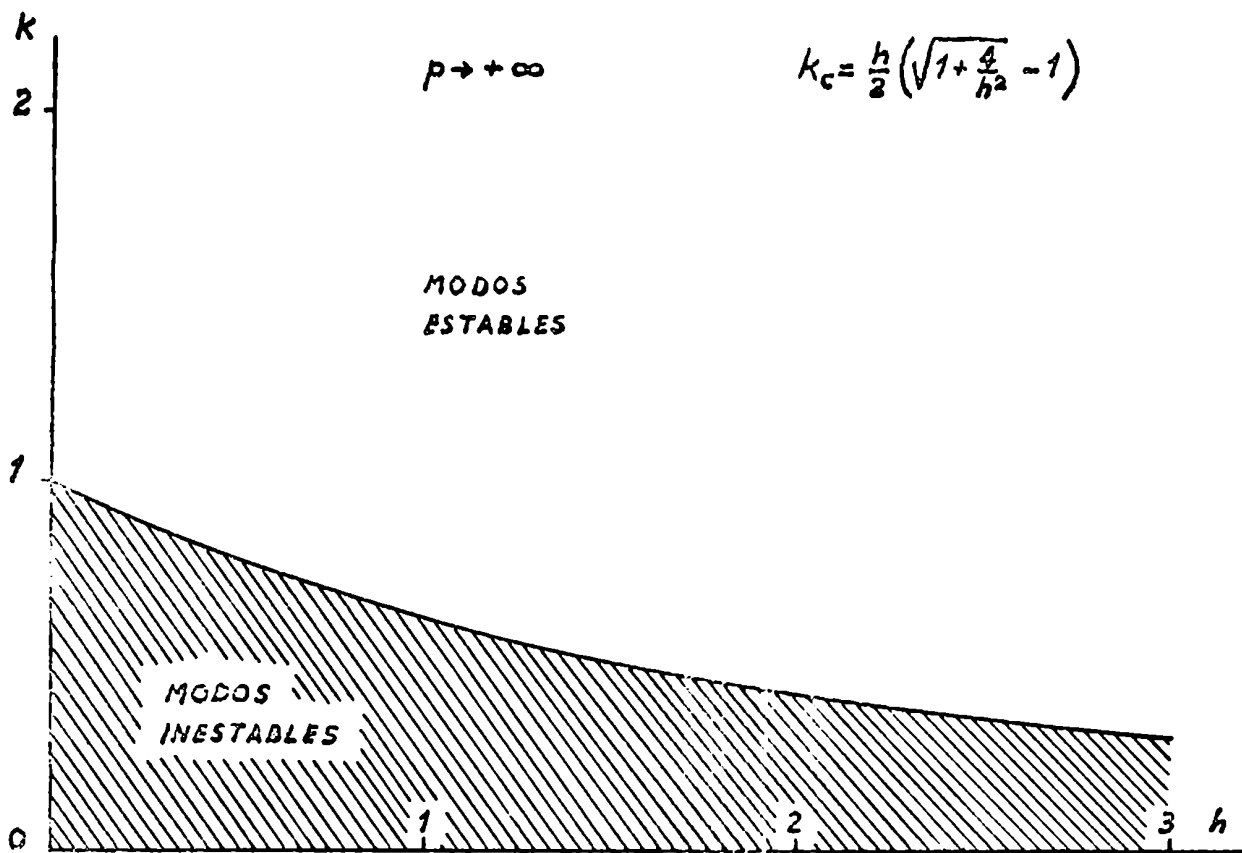


- FIG 25 -



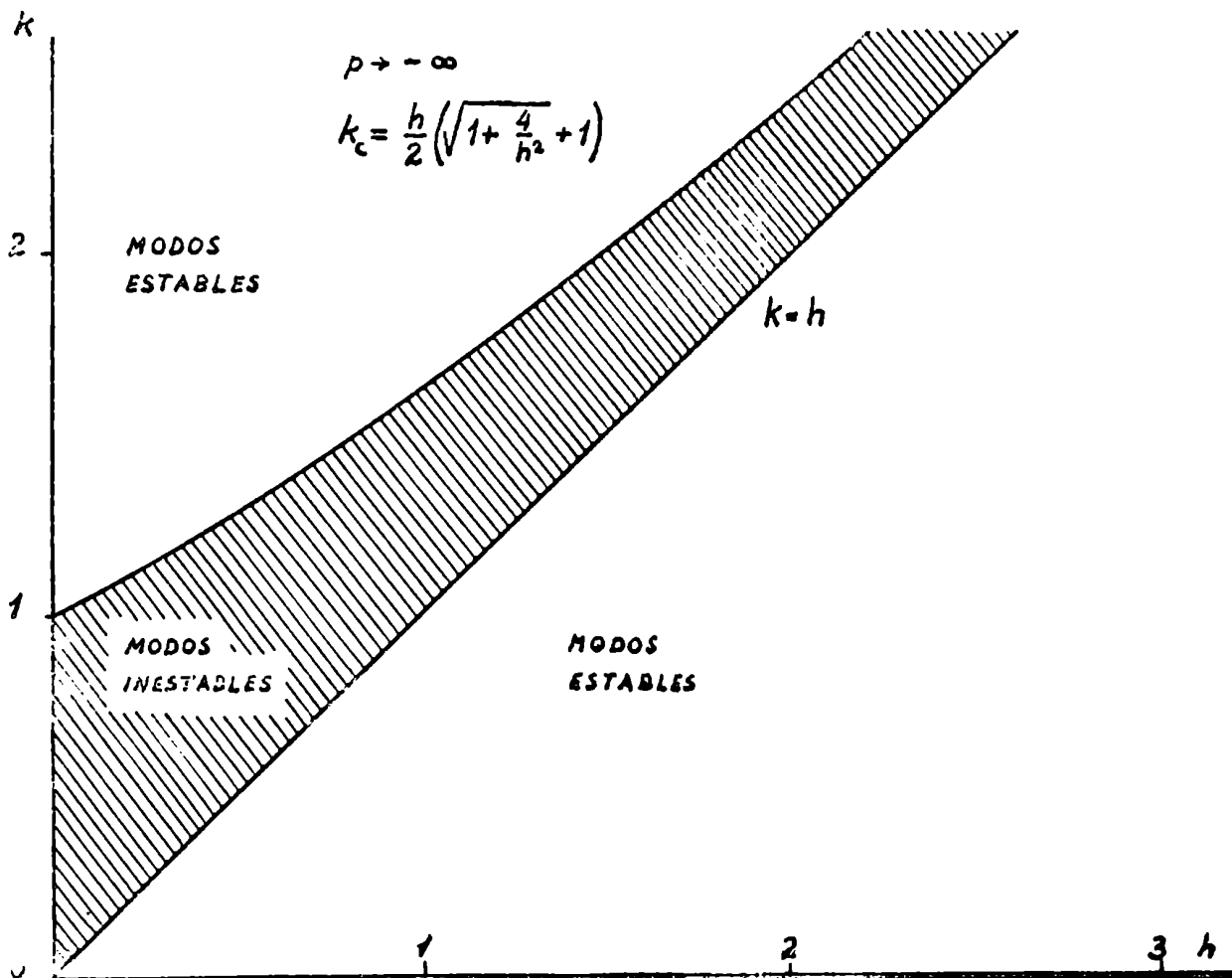
- FIG 26 -





REGIONES DE ESTABILIDAD DE MODOS CON  $k_L \rightarrow +\infty$  PARA EL PERFIL EN ESCALON

- FIG 27 -



REGIONES DE ESTABILIDAD DE MODOS CON  $k_L \rightarrow -\infty$  PARA EL PERFIL EN ESCALON

- FIG 28 -

## V CARACTERÍSTICAS FÍSICAS DE LA INESTABILIDAD

### 1. Mecanismo físico de la inestabilidad

Cuando se producen en los plasmas movimientos relativos entre grupos de partículas, pueden originarse oscilaciones que aumentan en el tiempo, hasta que las interacciones no lineales entre las ondas ponen un límite al crecimiento. La velocidad relativa de los haces de partículas se reduce, mientras que la cantidad de movimiento del conjunto se conserva. La energía así liberada alimenta las oscilaciones de los campos eléctricos. El mecanismo físico de la inestabilidad por deslizamiento consiste en un proceso de acumulación de cargas. Para visualizarlo mejor conviene trazar un esquema del movimiento de las partículas. Considérese el perfil a escalón III,P.2, que es el caso más simple. Desde el punto de vista físico se puede esperar que la inestabilidad se origina sobre la superficie de variación de la velocidad. Por lo tanto hay que partir con una perturbación de dimensiones finitas en la dirección  $y$ . Con un campo electrostático esto no es posible sin una componente de  $\vec{E}$  según  $y$ . Se tendrá entonces necesariamente una velocidad de perturbación en la dirección perpendicular al flujo. El problema es bidimensional, a diferencia de las oscilaciones longitudinales en un plasma homogéneo. En las regiones donde  $u' = 0$  la ecuación  $\text{rot } \vec{E} = 0$  implica  $\text{rot } \delta \vec{v} = 0$ , la circulación de la velocidad perturbada es nula. Esto significa que en la dirección perpendicular al movimiento del plasma la perturbación tiene dimensiones del orden de la longitud de onda. La ecuación (III,20) para la densidad de carga indica que en las regiones donde el gradiente de velocidad es nulo, no hay acumulación de carga espacial.

El nodo más inestable ocurre para  $k u_0 = \sqrt{3/2} \frac{\omega_p}{2}$  y le corresponde  $\omega = i \omega_p / 2\sqrt{2}$ . El potencial está dado por  $\text{Re} \left\{ \phi_0 \exp \left( ikx \mp ky + \frac{\omega_p t}{2\sqrt{2}} \right) \right\}$  donde el signo se refiere

a las dos regiones  $y \gtrless 0$ . La velocidad transversal resulta

$$\begin{aligned} \delta v_{(1)} &= A \cos(kx + 2\pi/3), \quad y > 0 \\ (V,1) \quad \delta v_{(2)} &= A \cos(kx + \pi/3), \quad y < 0 \end{aligned}$$

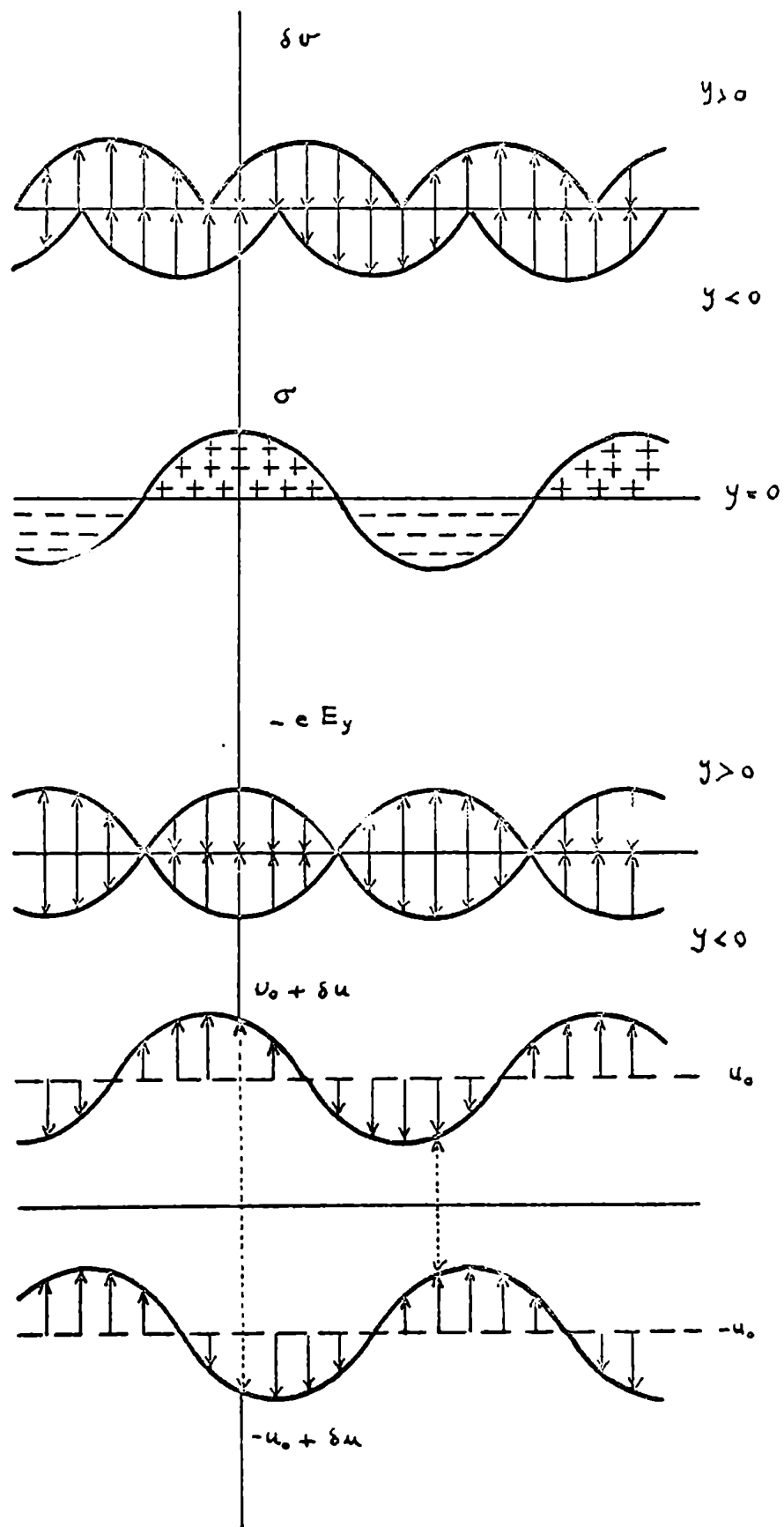
la amplitud  $A$ , vale  $\sqrt{3/4} \left( \frac{e \phi_0}{m U_0} \right) \exp \left\{ \frac{\omega_p}{2\sqrt{2}} \left( t - \sqrt{3} \frac{|y|}{U_0} \right) \right\}$ . La velocidad paralela está dada por

$$(V,2) \quad v = U_0 \pm A \cos(kx \pm \pi/6)$$

En el perfil a escalón la carga eléctrica se acumula solo en la superficie de discontinuidad. Integrando la (III,20) entre  $\epsilon$  y  $y - \epsilon$ , y pasando al límite  $\epsilon \rightarrow 0$ , se obtiene

$$(V,3) \quad 4\pi\sigma = \sqrt{3/2} \frac{\omega_p^2}{U_0} \phi_0 \cos kx \exp(\omega_p t / 2\sqrt{2}),$$

siendo  $\sigma = -e \int \delta n \, dy$ . En la fig. 29 están representadas estas cantidades y la fuerza eléctrica, con amplitudes arbitrarias, en un instante dado, en el entorno de  $y = 0$  (el esquema se repite con amplitud exponencialmente decreciente a ambos lados de la superficie de separación). Los electrones se dirigen a las zonas donde la carga superficial es máxima y positiva, y son rechazados por las zonas de carga negativa. La figura indica claramente que la mayor velocidad relativa, entre las partículas que se mueven de un lado y del otro de la superficie, tiene lugar en correspondencia del máximo de densidad positiva. Por el contrario, la mínima velocidad relativa tiene lugar en la zona negativa. Esto significa que los electrones son acelerados en la región positiva y permanecen allí un tiempo menor, del que transcurren en la región negativa donde son decelerados. La distribución de carga superficial tiende a crecer. Que el efecto sea acumulativo depende de las fases relativas de  $\delta v$ ,  $\delta u$  y  $\sigma$ , las cuales varían con  $k$ . Esta inter-



- FIG 29 -

pretación se puede confirmar de la siguiente manera.<sup>(5)</sup>

Sea una perturbación de carga superficial tal que el movimiento correspondiente sea estacionario, esto es  $\omega = 0$ . El potencial que hace posible esta situación está dado por la ecuación de Poisson, de la cual se deduce

$$(V,4) \quad 4\pi \sigma_p = \phi'(0^+) - \phi'(0^-)$$

Por otro lado las partículas en su movimiento generan una carga dada por

$$4\pi e \delta n = - \frac{\omega_p^2}{U^2} \phi + \left( \frac{\omega_p^2 \phi'}{k^2 U^2} \right)'$$

y para una superficie de discontinuidad:

$$(V,5) \quad 4\pi \sigma_n = \frac{\omega_p^2}{k^2 U_0^2} (\phi'(0^+) - \phi'(0^-))$$

Para que  $\sigma_n$  pueda mantener el campo  $\phi'$ ,  $\frac{\omega_p^2}{k^2 U_0^2}$  debe ser igual a uno. Si  $\omega_p^2 / k^2 U_0^2 > 1$  el campo eléctrico comienza a crecer, y el estado del sistema deja de ser estacionario, de acuerdo con la (III,11).

El mecanismo de acumulación de cargas actúa también en los perfiles continuos. El proceso se desarrollará en toda la región del gradiente de velocidad, que aquí ha sido idealmente reducida a una superficie. Es de esperar que el efecto estará atenuado, en relación a las menores velocidades relativas entre las corrientes adyacentes de partículas.

Las relaciones de dispersión para el problema de la inestabilidad por deslizamiento, pueden ser usadas para estudiar el problema conjugado de este, vale decir, la amplificación de ondas que penetran en el plasma, producidas por un mecanismo de excitación exterior al sistema. En el trabajo de Sturrock<sup>(6)</sup> se dan los criterios para distinguir las ondas evanescentes de las que son amplificadas por el plasma, mediante el examen de las relaciones de dispersión. La cuestión está vinculada con el

caracter absoluto o convectivo de la inestabilidad.

## 2. Efectos debidos a la presión finita

Es un hecho interesante que en ausencia de temperatura el plasma es inestable en el límite casi neutro,  $\omega_p \rightarrow \infty$ , con una velocidad de crecimiento igual a la de la inestabilidad de Kelvin-Helmholtz para los fluidos neutros. Los mecanismos físicos son sin embargo muy distintos.

En la sección VI se consideran las modificaciones introducidas por la dispersión de velocidades paralelas al flujo en base a la II.31. Aquí se examinará brevemente la influencia de una presión isotrópica finita.

Además del mecanismo de acumulación de cargas, interviene el mecanismo hidrodinámico de formación de vórtices. En ausencia de colisiones no hay una solución estacionaria para un flujo de perfil variable. Por ello, alejándonos del esquema de la sección II, nos situaremos en un régimen intermedio, de colisiones bastante frecuentes, como para garantizar la validez de la aproximación hidrodinámica para los electrones con un tensor de presiones isotrópico. Se trata de la misma aproximación que se emplea en la teoría elemental de las ondas iónicas<sup>(1)</sup>. La cadena de las ecuaciones hidrodinámicas se cierra con la ecuación adiabática

$$(V,6) \quad \frac{d}{dt} (p n^{-\gamma}) = 0$$

La dificultad reside, como es bien sabido, en que el valor  $\gamma = 5/3$  no se aplica para los plasmas<sup>(2)</sup>, sino en un régimen completamente colisional. Cuando las colisiones son poco frecuentes,  $\gamma$  vale 2 o 3 según el tipo de compresión que tiene lugar durante las oscilaciones. Bastará con obtener resultados cualitativos de estos cálculos: los nuevos modos de oscilación debidos a la presión, y en que sentido esta actúa sobre la estabilidad del sistema. Consideremos densidad y presión constantes en el estado estacionario, entonces la (V,6) da

$$(V,7) \quad \delta p = \gamma \kappa T \delta n$$

Las ecuaciones hidrodinámicas linealizadas junto con la ecuación de Poisson, forman el siguiente sistema

$$(V,8) \quad \begin{aligned} -i\bar{\omega} \delta u + \delta v u' &= ik \frac{e}{m} \phi - ik V^2 \frac{\delta n}{n} , \\ -i\bar{\omega} \delta v &= \frac{e}{m} \phi' - V^2 \frac{\delta n'}{n} , \\ -i\bar{\omega} \delta n &= -ik n \delta u - (n \delta v)' , \\ -k^2 \phi + \phi'' &= 4\pi e \delta n , \end{aligned}$$

siendo  $V^2 = \gamma \frac{\kappa T}{m}$ . Eliminando  $\delta u$ ,  $\delta v$  y  $\delta n$  se obtiene

$$\left\{ \frac{V^2}{\bar{\omega}^2} \phi''' + \left(1 - \frac{\omega_p^2 + k^2 V^2}{\bar{\omega}^2}\right) \phi' \right\}' - k^2 \left\{ \frac{V^2}{\bar{\omega}^2} \phi'' + \left(1 - \frac{\omega_p^2 + k^2 V^2}{\bar{\omega}^2}\right) \phi \right\} = 0$$

la cual se reduce a la (III,1) para  $V=0$ . Poniendo  $\Lambda = 1 - \frac{\omega_p^2 + k^2 V^2}{\bar{\omega}^2}$ , y  $\pi = \frac{V^2}{\bar{\omega}^2}$  podemos escribir

$$(V,9) \quad \begin{cases} (\Lambda \phi' + \pi \psi')' - k^2 (\Lambda \phi + \pi \psi) = 0 \\ \psi = \phi'' \end{cases}$$

La ecuación correspondiente a los gases neutros se obtiene en el límite  $\omega_p^2 \rightarrow 0$ , pero manteniendo al mismo tiempo  $\frac{1}{4\pi e} (\phi'' - k^2 \phi) = \delta n$ , finito. Pasando a la variable  $\delta p$  se obtiene

$$(V,10) \quad \left( \frac{\delta p'}{\bar{\omega}^2} \right)' + \left( 1 - \frac{k^2 V^2}{\bar{\omega}^2} \right) \frac{\delta p}{V^2} = 0$$

El problema de la estabilidad de un perfil a escalón fué

investigado por Landau<sup>(3)</sup> (1944). La relación de dispersión se obtiene imponiendo la igualdad de las presiones y la continuidad de  $\delta p / \bar{\omega}^2$ .

La solución es  $\delta p = A \exp \{ \pm \sqrt{k^2 - \frac{1}{V^2}} y \}$  debiendo los nodos satisfacer las condiciones que hemos enumerado en P.1 Secc. IV. Se obtiene así:

$$(V,11) \quad \frac{\bar{\omega}_1^4}{\bar{\omega}_2^4} = \frac{k^2 V^2 - \bar{\omega}_1^2}{k^2 V^2 - \bar{\omega}_2^2}$$

Introduciendo las siguientes cantidades adimensionales  $\frac{U_0}{V} = x$ ,  $\omega/kV = y$ , se deduce

$$(V,12) \quad y^2 = 1 + x^2 \pm \sqrt{1 + 4x^2}$$

de donde se desprende que en el límite  $U_0 \ll V$ ,

$$y^2 \approx \begin{cases} 2 + 3x^2 & \text{rama estable} \\ -x^2 & \text{rama inestable} \end{cases}$$

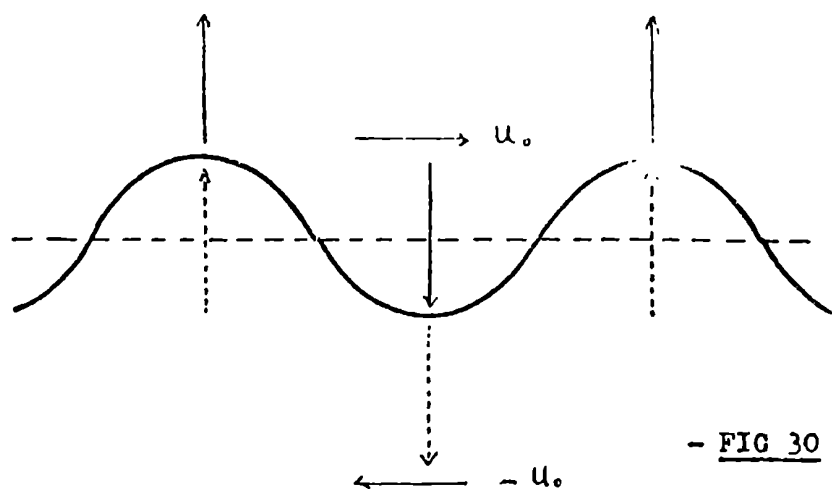
Para  $x \geq \sqrt{2}$  la rama inferior se vuelve estable para cualquier longitud de onda.<sup>(\*)</sup> La mayor intensidad de la inestabilidad se alcanza, para una dada longitud de onda, cuando  $U_0/V = \sqrt{3}/2$  siendo entonces  $\omega = i kV/2$ .

El mecanismo físico de la inestabilidad se puede comprender considerando una perturbación sinusoidal de la superficie que separa los flujos opuestos.

Se tiene el problema de un fluido que se desliza sobre una pared con ondulaciones de pequeña amplitud. Como es bien sabido, la presión aumenta alejándose del centro de curvatura de las líneas de corriente. El balance de presiones sobre la superficie

(\*) Un análisis general de la estabilidad de fluidos superpuestos, que incluye los resultados clásicos de Rayleigh-Taylor y Kelvin-Helmholtz puede hallarse en Phys. Fluids 7, 1099 (1964), M. Plenet, Din Yu Hsieh. Los autores proponen una explicación para el resultado paradójico de la estabilidad supersónica en los gases neutros.





- FIG 30 -

no puede cumplirse, el flujo no puede mantenerse estacionario y la perturbación aumenta.

Al contrario de lo que sucede en los plasmas, los modos con mayor velocidad de crecimiento corresponden a  $\lambda \rightarrow 0$ . Los resultados de III, 4.2 se modifican de la siguiente manera. El sistema (V,9) admite soluciones del tipo  $\phi = \phi_0 e^{\alpha y}$ ,  $\psi = \psi_0 e^{\alpha y}$ , siendo  $\alpha$  una raíz de

$$(V,13) \quad \pi \alpha^4 + \alpha^2 (\Lambda - k^2 \pi) - k^2 \Lambda = 0$$

En  $y=0$ , vamos a exigir la continuidad de  $\phi$  y de  $\delta p$  (también  $\phi''$  será continua pues  $\delta n$  es proporcional a  $\delta p$ ).

La primera de las (V,9) nos dice que

$$(\Lambda \phi' + \pi \psi')_1 = (\Lambda \phi' + \pi \psi')_2$$

el subíndice indica las regiones  $y \gtrless 0$ . De esta ecuación se deduce

$$(V,14) \quad \frac{\alpha_1^2}{\alpha_2^2} = \frac{\Lambda_2 + \pi_2 \alpha_2^2}{\Lambda_1 + \pi_1 \alpha_1^2}$$

Los valores de  $\omega$  que se obtengan de la (V,14) deben ser examinados en lo que se refiere a la convergencia de los respectivos modos y la ausencia de ondas entrantes si  $\omega$  es real (ver IV.2.1). La (V,13) da

$$(V,15) \quad \alpha^2 = - \left( \frac{\bar{\omega}^2 - \omega_p^2}{2V^2} \right) \left\{ 1 \mp \sqrt{1 + \frac{2k^2V^2}{\bar{\omega}^2 - \omega_p^2} - \left( \frac{2k^2V^2}{\bar{\omega}^2 - \omega_p^2} \right)^2} \right\}$$

La rama superior, en el límite de  $kV \ll \omega_p$ , se reduce a

$$(V,16) \quad \alpha^2 = k^2 \left( 1 - \frac{2k^2V^2}{\bar{\omega}^2 - \omega_p^2} \right)$$

conservando términos del orden más bajo significativo en .  
Reemplazando en (V,14) se obtiene

$$\omega^2 = k^2 u^2 + \frac{\omega_p^2}{2} \left( 1 - \frac{k^2V^2}{\omega_p^2} \right) \pm$$

$$(V,17) \quad \pm \frac{\omega_p^2}{2} \left( 1 - \frac{k^2V^2}{\omega_p^2} - 2 \frac{k^2u^2}{\omega_p^2 + 8k^2u^2} \frac{k^2V^2}{\omega_p^2} \sqrt{1 + \frac{8k^2u^2}{\omega_p^2}} \right)$$

a menos de términos en  $\left(\frac{kV}{\omega_p}\right)^4$ . Comparando esta expresión con la (III,11) se vé que la presión actúa en el sentido de disminuir la inestabilidad. Este resultado está de acuerdo con los conocimientos generales sobre las microinestabilidades<sup>(4)</sup>. Cualitativamente se puede decir que el mecanismo de acumulación de cargas no será eficaz, si las partículas logran dispersarse en la región perturbada, debido a la agitación térmica, durante un período de incremento de la inestabilidad. Esto conduce a la relación  $\lambda/V > 1/\omega$ , es decir en este caso  $u > V$ . En los modos pertenecientes a esta rama la presión no agrega nada nuevo: amortigua la inestabilidad porque la temperatura desordena el proceso. Distinto es el caso de la otra rama,  $\alpha^2$  vale, siempre en el límite  $kV \ll \omega_p$ ,

$$(V,18) \quad \alpha^2 = \frac{\omega_p^2 - \bar{\omega}^2}{V^2} \left( 1 + \frac{k^2V^2}{\omega_p^2 - \bar{\omega}^2} \right)$$

La (V,14) nos dá

$$(V,19) \quad \frac{\bar{\omega}_1^4}{\bar{\omega}_2^4} = \frac{\omega_p^2 + k^2V^2 - \bar{\omega}_1^2}{\omega_p^2 + k^2V^2 - \bar{\omega}_2^2},$$

un resultado interesante puesto que formalmente coincide con la relación de dispersión de Landau, (V,11), haciendo:

$$\omega_p^2 + k^2 V^2 \rightarrow k^2 V^2$$

A menos de términos del orden de  $(\frac{kV}{\omega_p})^4$ , obtenemos

$$(V,20) \quad \omega^2 = \omega_p^2 \left(1 + \frac{k^2 V^2}{\omega_p^2}\right) + k^2 U^2 \pm \omega_p^2 \left(1 + \frac{k^2 V^2}{\omega_p^2} - \frac{2 k^2 U^2}{\omega_p^2 + 4 k^2 U^2} - \frac{k^2 V^2}{\omega_p^2} \sqrt{1 + \frac{4 k^2 U^2}{\omega_p^2}}\right)$$

Tenemos un incremento de la inestabilidad. Para  $k^2 U^2 / \omega_p^2 = 3/4$  el máximo de la inestabilidad con  $\tau = 0$ , se obtiene

$$(V,21) \quad \omega^2 = \begin{cases} \frac{15}{4} \omega_p^2 + \frac{9}{4} k^2 V^2 \\ -\frac{\omega_p^2}{4} - \frac{k^2 V^2}{4} \end{cases}$$

Encontramos en primer lugar una velocidad de crecimiento mayor:  $\frac{\omega_p}{2}$ , contra  $\omega_p / 2\sqrt{2}$ , y luego la contribución favorable a la inestabilidad del término  $kV/2$ , como en la (V,12). En estos modos el mecanismo hidrodinámico de la inestabilidad, interviene activamente junto con el mecanismo electrostático. Para  $V \rightarrow 0$  queda  $\omega = i \omega_p / 2$ , pero naturalmente no hay contradicción con los resultados de la aproximación ffs. En efecto estos modos se anulan cuando  $V \rightarrow \infty$ , más rápidamente que cualquier potencia positiva de  $V$ , puesto que contienen el factor  $\exp\{-\frac{\omega_p}{V} y\}$ . Evidentemente, cuando  $kV \ll \omega_p$ , estos modos son predominantemente mucho más débiles que los de la rama anterior.

Conviene recordar finalmente, que cuando  $kV$  es comparable con  $\omega_p$ , esto es, para  $\lambda \sim \lambda_D$ , la experiencia que se extrae de problemas similares de oscilaciones longitudinales en los plasmas, indica la aparición del fenómeno del amortiguamiento de Landau, <sup>(\*)</sup> el cual se vuelve dominante para  $\lambda < \lambda_D$ . Para estas longitudes de onda no se pueden obtener resultados correctos en la aproximación hidrodinámica.

(\*) Vease también la sección VI.

Referencias

1. Spitzer Physics of Fully Ionized Gases, New York (1956).
2. Van Kampen Physica, 21, 949 (1955).
3. Landau L. Compt. Rend. Acad. Sci URSS, 44, 139 (1944).
4. Jackson E. A. Phys. Fluids, 3, 786 (1960).
5. Jackson J.D. J. Nuclear Energy, Part C, Plasma Physics,  
1 , 171 (1960).
6. Sturrock P. Phys. Rev. 112 , 1488 (1958).

## VI DISPERSIÓN DE VELOCIDADES EN LA DIRECCIÓN DEL FLUJO

### 1. Funciones de distribución generales

Vamos a considerar algunas propiedades de la inestabilidad cuya deducción requiera el menor número de hipótesis acerca de la función de distribución de las velocidades. Partiendo de la (II, 31) se obtiene

$$(VI, 1) \quad \int_{-\infty}^{\infty} (|\psi'|^2 + k^2 |\psi|^2) (1 + G) dy = 0$$

Supondremos que  $I_m(\omega) > 0$ ; separando la parte real de la imaginaria se obtiene, luego de una integración por partes:

$$(VI, 2) \quad \int (|\psi'|^2 + k^2 |\psi|^2) \left[ 1 - \frac{\omega_p^2}{k^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\left\{ \left( \frac{\omega_1}{k} - w - q \right)^2 - \frac{\omega_2^2}{k^2} \right\} f_0(y, q)}{\left\{ \left( \frac{\omega_1}{k} - w - q \right)^2 + \frac{\omega_2^2}{k^2} \right\}^2} dq \right] dy = 0$$

$$(VI, 3) \quad \int (|\psi'|^2 + k^2 |\psi|^2) \frac{\omega_p^2}{k^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\left( \frac{\omega_1}{k} - w - q \right) f_0(y, q)}{\left\{ \left( \frac{\omega_1}{k} - w - q \right)^2 + \frac{\omega_2^2}{k^2} \right\}^2} dq dy = 0$$

donde hemos puesto la función de distribución en la forma:

$$f_0 = f_0(y, v - w(y))$$

La función  $w(y)$  representa el perfil del promedio de las velocidades. Sea  $w_N$  la cota superior para  $|w(y)|$ . Vamos a exigir a  $f$  la condición  $f_0(y, q) = 0$  para  $|q| > q_0(y)$ . Naturalmente  $q_0$  es una estimación de la velocidad térmica: cuando nos alejamos del promedio de las velocidades  $f_0 \rightarrow 0$ ;  $q_0$  es un índice de este de crecimiento. De la (VI, 3) se concluye que

$$(VI,4) \quad \left| \frac{\omega_1}{k} \right| < W_M + q_{0M} ,$$

donde  $q_{0M}$  es la cota superior de  $q_0(y)$ . De la (VI,2) y (VI,4) encontramos que debe ser

$$(VI,5) \quad \frac{\omega_2}{k} < 2 (W_M + q_{0M})$$

Estas ecuaciones son la extensión de las (III,6), (III,7) cuando se toma en cuenta la dispersión de las velocidades.

Teorema 1: Si  $f_0(y, q)$  tiene un solo máximo en la variable  $q$ , y no presenta corriente media neta, sino solo diferencias de temperatura longitudinal en el flujo (es decir  $f_0$  es sinétrica) entonces el sistema es estable.

Si separamos la parte real de la imaginaria en la (VI,1) antes de la integración parcial, vemos inmediatamente que debe haber un punto  $y'$  tal que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\frac{\partial f_0}{\partial q}}{\left(\frac{\omega_1}{k} - W(y') - q\right)^2 + \frac{\omega_2^2}{k^2}} dq = 0 ,$$

siempre en la hipótesis que  $\omega_2 > 0$ . Puesto que  $\partial f_0 / \partial q$  es una función antisimétrica en  $q$ , esta relación puede ser satisfecha solo si  $\frac{\omega_1}{k} - W(y') = 0$ , de manera que

$$\left| \frac{\omega_1}{k} \right| < W_M$$

y cuando  $W(y) = 0$  debe ser  $\omega_1 = 0$ . Entonces la parte real de la (VI,1) nos señala que en algún punto  $y''$ , debe ser

$$r = \frac{\omega_2^2}{k^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{q \frac{\partial f_0}{\partial q}(y'', q)}{q^2 + \frac{\omega_2^2}{k^2}} dq$$

Pero esta relación no puede cumplirse puesto que el miembro de la izquierda es negativo en virtud de las hipótesis que hemos supuesto para  $f$  : simétrica con un solo pico. Por lo tanto debemos admitir que en este caso,  $\omega_2 \leq 0$ .

Este teorema nos lleva a la cuestión de extender las ecuaciones (II,29) y (II,31) a los casos en que  $I_{\omega}(\omega) < 0$ .

La función  $G$  aparece en la teoría de las oscilaciones longitudinales de plasma y su definición se extiende mediante el contorno de Landau<sup>(1)</sup>. Es fácil ver como se realiza esta generalización mediante el siguiente artificio. Se supone presente en el plasma una pequeña cantidad de átomos neutros. Entonces la ecuación de Boltzmann-Vlasov lleva en el miembro de la derecha el término  $-\dot{f}/\tau$ , que representa la alteración de

$f$  debida a las colisiones con los neutros. Es sabido que en muchos casos un término de este tipo constituye una aproximación razonable para las colisiones elásticas entre electrones y neutros. El tiempo de relajación  $\tau$  es constante y debe pensarse como un promedio de los tiempos de colisión. El único cambio que hay que introducir en las ecuaciones de la Secc.II es substituir  $\omega$  por  $(\omega + i/\tau)$ . La convergencia de las integrales de la Secc.II queda asegurada aún cuando  $\omega$  sea real. Si ahora reducimos cada vez más la cantidad de neutros,  $\epsilon = 1/\tau$  tenderá a cero. El límite de la función  $G$

$$G = \frac{\omega_p^2}{k^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\frac{\partial f_0}{\partial u}}{\frac{\omega}{k} + i\frac{\epsilon}{k} - u} du$$

para  $\epsilon \rightarrow 0$  vale

$$(VI,6) \quad G = \frac{\omega_p^2}{k^2} \left\{ P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\frac{\partial f_0}{\partial u}}{\frac{\omega}{k} - u} du - i\pi \left( \frac{\partial f_0}{\partial u} \right)_{u = \frac{\omega}{k}} \right\}$$

La función  $G\left(\frac{\omega}{k}\right)$  es una integral de Cauchy y el límite para  $\frac{\omega}{k}$  real está dado por las fórmulas de Plemelj<sup>(2)</sup>

$$(VI,7) \quad \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x \mp i\epsilon} dx = P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x} dx \pm i\pi \varphi(0)$$

Las integrales están calculadas en el sentido de la parte principal de Cauchy. Una manera elemental de obtener la (VI,7) es la siguiente

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x \mp i\epsilon} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(x) x}{x^2 + \epsilon^2} dx \pm i\epsilon \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(x) dx}{x^2 + \epsilon^2},$$

tomando el límite para  $\epsilon \rightarrow 0$ , el primer término tiende a la parte principal de  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x} dx$ ; la segunda integral puede aproximarse a  $\pm i\epsilon \varphi(0) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2 + \epsilon^2}$ , debido al agudo pico del integrando en  $x = 0$ ; en el límite el resultado es  $\pm i\pi \varphi(0)$ . Esta manera de extender la definición de  $G\left(\frac{\omega}{k}\right)$  es equivalente al procedimiento de Landau.

Entendemos en lo que sigue que la función  $G$  está definida por el contorno  $\mathcal{L}$  de la fig. 31. La (VI,6) corresponde al segundo contorno de la figura. La contribución del polo para

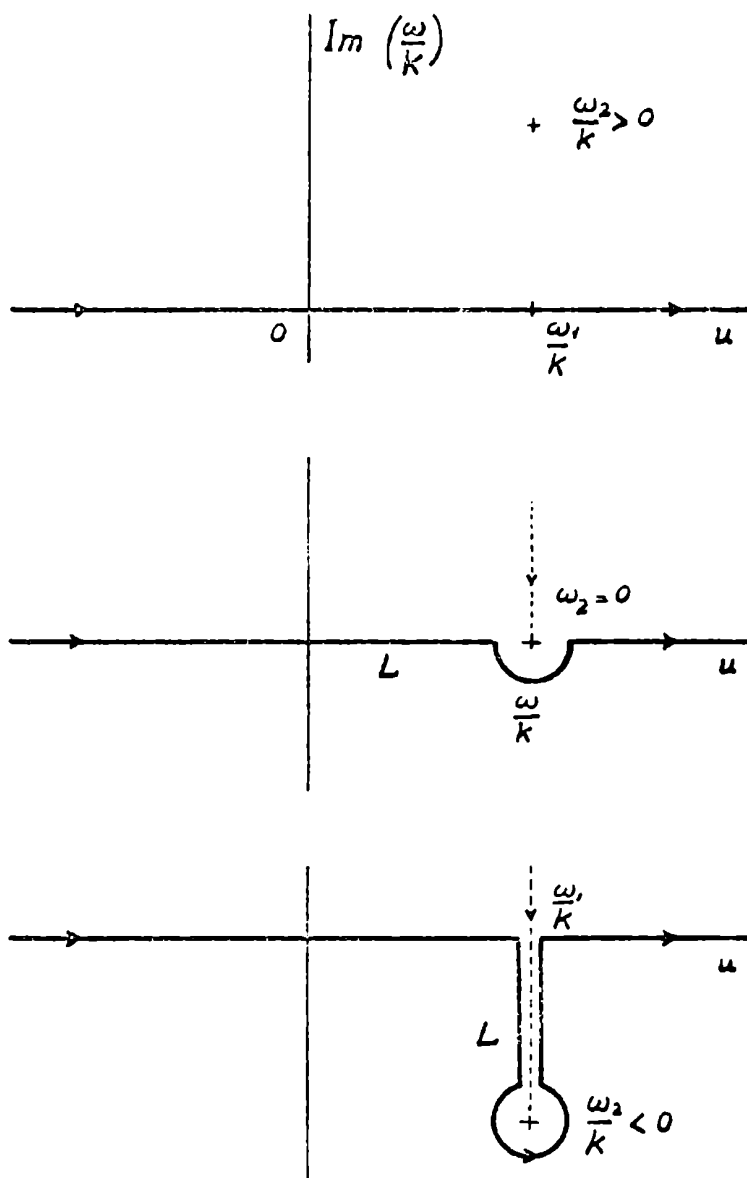
$I_m\left(\frac{\omega}{k}\right) < 0$  está ligada al amebiguamiento de Landau.

La integral de Cauchy que aparece en la función  $G$  es discontinua a través del eje real, como se vé por las fórmulas de Plemelj. Cualquiera sea el procedimiento de extensión, lo esencial es que el eje real conecta dos hojas de Riemann de la integral de Cauchy. El contorno de Landau nos dá la continuación analítica correcta.

El argumento del teorema 1 acerca de la estabilidad de las funciones de distribución con un solo máximo, no puede ser repetido para  $\omega_2 < 0$ . Cuando  $I_m(\omega) < 0$ , resulta

$$(VI,8) \quad G = \frac{\omega_P^2}{k^2} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial f_0 / \partial u}{\frac{\omega}{k} - u} du - 2\pi i \left( \frac{\partial f_0}{\partial u} \right)_{u = \frac{\omega}{k}} \right\}$$





- FIG 31 -

La función de distribución Lorentziana es suficientemente simple como para que la integral en G pueda evaluarse explícitamente:

$$(VI,9) \quad f_0(u, y) = \frac{\Delta(y)}{\pi \{ (u - u(y))^2 + \Delta(y)^2 \}}$$

La velocidad media es  $\bar{u}(y)$ , y  $\Delta(y)$  representa la velocidad térmica. Para la Lorentziana se obtiene

$$(VI,10) \quad 1 + G = 1 - \frac{\omega_p^2}{(\omega + i\Delta k - ku)^2}$$

cuando  $\text{Im}(\omega) > 0$ . Los resultados de la sección III se modifican reemplazando  $\omega$  por  $\omega + i\Delta k$ , si  $\Delta$  es constante. Es evidente que la dispersión térmica introduce un factor de amortiguamiento  $\exp\{-\Delta k t\}$ , en acuerdo a lo que ha sido tratado en la Secc.V P.2. Así, en el caso del perfil discon-

tinuo; (Secc. III P.2) en el límite  $ku \ll \omega_p$ , tenemos para la rama inestable

$$\omega = ik(u - \Delta)$$

de donde se desprende que el flujo es inestable solo si la velocidad media es mayor que la velocidad térmica.

## 2. Discontinuidad espacial de la función de distribución

Sean dos regiones del flujo caracterizadas por las funciones de distribución  $f_0^{(1)}(u)$  para  $y > 0$ ; y  $f_0^{(2)}(u)$  para  $y < 0$ . La distribución de velocidades es constante en cada región. Si buscamos oscilaciones del campo eléctrico en la superficie de separación, las cuales decrecen exponencialmente en cada región, obtenemos la siguiente relación de dispersión

$$(VI,11) \quad 1 + \frac{\omega_p^2}{k^2} \int_L \frac{\partial \bar{f}_0 / \partial u}{\frac{\omega}{k} - u} du = 0$$

donde  $\bar{f}_0 = \frac{1}{2} \{f_0^{(1)} + f_0^{(2)}\}$ , es la media aritmética de las funciones de distribución en las dos regiones. Esta es la bien conocida relación de dispersión para las oscilaciones de un plasma de electrones uniforme con distribución  $\bar{f}_0(u)$ . Vamos a consignar las principales propiedades de la (VI,11) que interesan a la inestabilidad por deslizamiento. Muchas otras propiedades pueden hallarse en las referencias al final de esta sección.

Teorema 2: Se puede demostrar que si  $\bar{f}_0(u)$  tiene un solo máximo el sistema no puede ser inestable.

Separando la parte real e imaginaria en la (VI,11), en el caso que  $\text{Im}(\omega) > 0$ ,

$$1 + \frac{\omega_p^2}{k^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial \bar{f}_0}{\partial u} \frac{\left(\frac{\omega_r}{k} - u\right)}{\left(\frac{\omega_r}{k} - u\right)^2 + \frac{\omega_i^2}{k^2}} du = 0$$

$$\frac{\omega_p^2}{k^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial \bar{f}_0}{\partial u} \frac{\omega_2/k}{\left(\frac{\omega_1}{k} - u\right)^2 + \frac{\omega_2^2}{k^2}} du = 0$$

Sea  $u_0$  la posición del único máximo de  $\bar{f}_0$ , en este punto  $\frac{\partial \bar{f}_0}{\partial u} = 0$ . Multiplicando la segunda ecuación por  $\frac{k}{\omega_2} \left(\frac{\omega_1}{k} - u_0\right)$  y restandola de la primera:

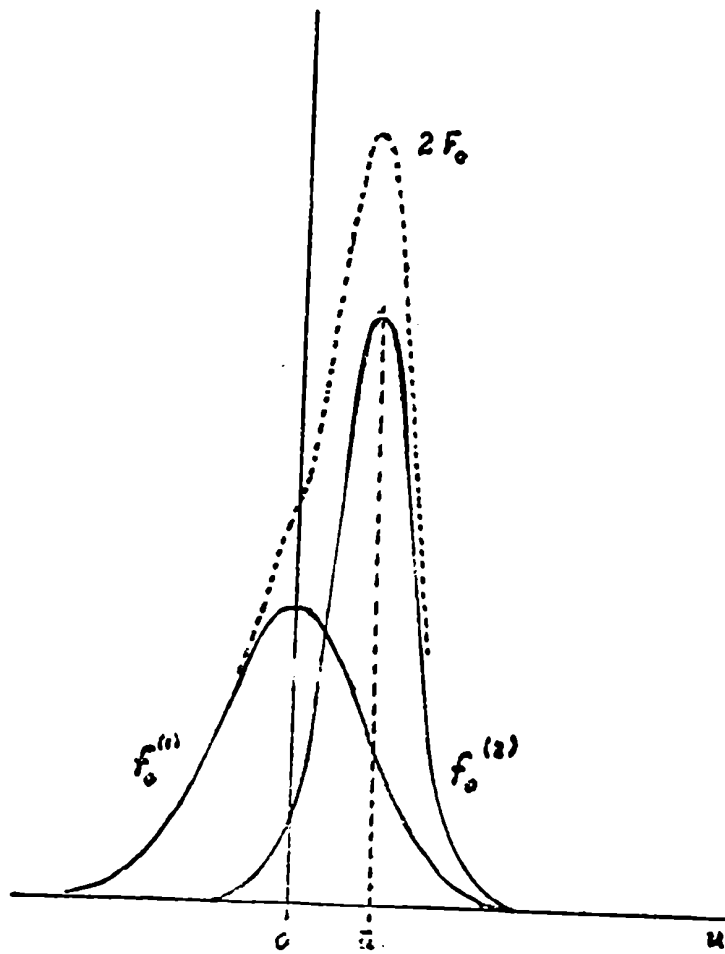
$$(VI,12) \quad 1 + \frac{\omega_p^2}{k^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial \bar{f}_0}{\partial u} \frac{u_0 - u}{\left(\frac{\omega_1}{k} - u\right)^2 + \frac{\omega_2^2}{k^2}} du = 0$$

Por la hipótesis  $\frac{\partial \bar{f}_0}{\partial u} (u_0 - u) \geq 0$ , luego la (VI,12) no admite soluciones con  $\omega_2 > 0$ .

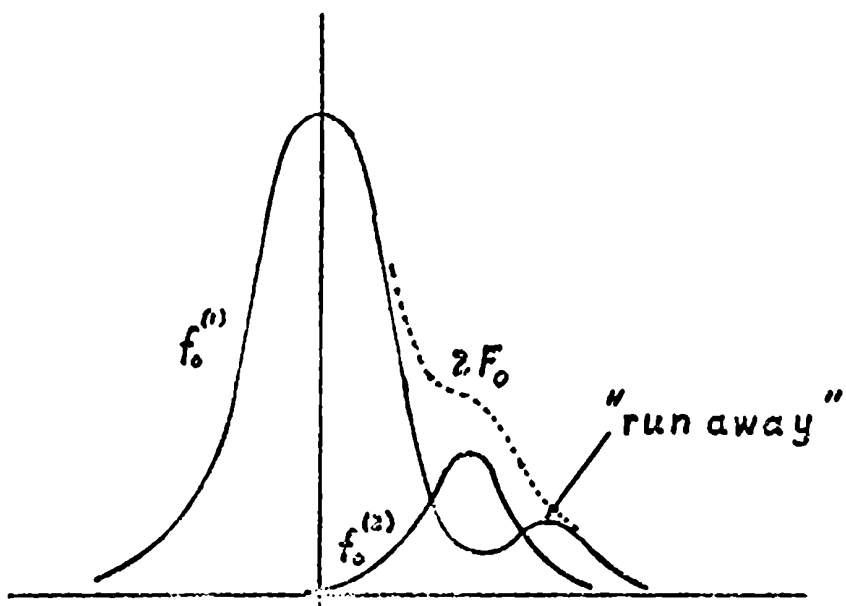
Extendiendo este razonamiento podemos modificar el teorema 1. Es fácil ver que si exigimos a la función  $f_0(y, u)$  la condición de tener un solo máximo en  $u$ , y este máximo está ubicado en la misma posición  $u_0$  cualquiera sea  $y$ , entonces podemos renunciar a la condición de simetría en la velocidad para  $f_0(y, u)$ , y sin embargo todavía podemos concluir que  $\omega_2$  no puede ser positiva.

Teorema 3: Una función de distribución  $f_0(y, u)$  con un solo pico en la velocidad  $u$ , cuya posición es constante en todo el espacio, es estable.

Retornando a la (VI,11) concluimos que si partimos de funciones  $f_0^{(1)}$ ,  $f_0^{(2)}$  con un solo máximo, maxwellianas por ejemplo, en cada región, la estabilidad del plasma dependerá de la separación de los picos. Si la dispersión térmica es lo suficientemente grande como para sumergir en un solo bloque los dos máximos el sistema será estable. Es el caso esquematizado en la fig. 32. Un hecho nuevo muy interesante es el siguiente: una función de distribución  $f_0^{(1)}$  inestable por la presencia de un pico secundario, debido por ejemplo a electrones "desbocados" ("run away" electrons), es estabilizada por una función de



- FIG 32 -



- FIG 33 -

distribución  $f_0^{(2)}$  de una zona adyacente, dispuesta de tal manera de formar un solo máximo en  $\bar{f}_0 = \frac{1}{2} \{ f_0^{(1)} + f_0^{(2)} \}$ . Un caso posible está esquematizado en la fig. 33.

Si  $\bar{f}_0$  presenta un mínimo, no necesariamente el plasma es inestable. Es preciso que los picos de  $f_0^{(1)}$  y  $f_0^{(2)}$  estén apreciablemente separados para que aparezcan modos exponencialmente crecientes.

Vamos a emplear en el análisis de la (VI,11) un método basado en la transformación de Fourier en el espacio de las velocidades. Aunque algo más elaborado, posee algunos meritos propios respecto del procedimiento usual.

En primer lugar vamos a obtener la relación de dispersión de las oscilaciones electrostáticas en un plasma homogéneo. La ecuación linealizada de Boltzmann-Vlasov es sometida a la transformación de Fourier en el espacio,  $f(\underline{x}, \underline{v}, t) \rightarrow f(\underline{k}, \underline{v}, t)$  y a la transformación de Laplace en el tiempo,  $f(\underline{k}, \underline{v}, t) \rightarrow f(\underline{k}, \underline{v}, p)$ . Las oscilaciones electrostáticas son unidimensionales de manera que es posible eliminar la dependencia de las velocidades perpendiculares al vector  $\underline{k}$  mediante una integración

$$(VI,12) \quad f(\underline{k}, u, p) = \int d^3v \delta(u - \frac{\underline{k} \cdot \underline{v}}{k}) f(\underline{k}, \underline{v}, p)$$

La ecuación transformada resulta

$$(VI,13) \quad (p + ik u) f - \frac{e}{m} E \frac{\partial f_0}{\partial u} = m(k, u)$$

donde hemos indicado con  $m(k, u)$  la condición inicial  $\hat{f}(\underline{k}, u, t=0)$ ,  $f_0(u)$  es la función de distribución de orden cero. El campo eléctrico satisface la ecuación de Poisson

$$(VI,14) \quad E(k, p) = \frac{4\pi n_0 e}{k} i \int_{-\infty}^{\infty} f(k, u, p) du$$

El procedimiento usual consiste en eliminar  $f$  entre (VI,14) y (VI,13). En cambio vamos a realizar una tercera transformación, esta vez sobre las velocidades. Sea  $\zeta$  una variable real, pondremos

$$(VI,15) \quad F(k, \zeta, p) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\zeta u} f(k, u, p) du$$

La (VI,14) se transforma en

$$(VI,16) \quad \frac{\partial F}{\partial \zeta} - \frac{p}{k} F = - \frac{M(k, \zeta)}{k} - \frac{i e}{m k} E F_0(\zeta)$$

siendo  $M(k, \zeta)$  la transformada de  $m(k, u)$ . La ecuación de Poisson resulta

$$(VI,17) \quad E(k, p) = \frac{4\pi n_0 e i}{k} F(k, \zeta=0, p)$$

La (VI,16) se integra con procedimientos elementales,

$$(VI,18) \quad F(k, \zeta, p) = - \int_{-\infty}^{\zeta} dz \left\{ \frac{M(k, z)}{k} + \frac{i e E(k, p)}{m k} F_0(z) \right\} e^{\frac{p}{k}(\zeta-z)}$$

La elección del signo queda libre, si es necesario, para asegurar la convergencia de la integral de acuerdo al valor de  $\text{Re}(p)$  (por ejemplo se usará el signo positivo para  $\text{Re}(p) > 0$ ). Combinando (VI,17) y (VI,18) se obtiene

$$(VI,19) \quad E(k, p) = \frac{\frac{4\pi n_0 e i}{k^2} \int_0^{\infty} G(k, z) e^{-\frac{p}{k} z} dz}{\left[ 1 + \frac{\omega_p^2}{k^2} \int_0^{\infty} z F_0(z) e^{-\frac{p}{k} z} dz \right]}$$

tomando  $F_0 \rightarrow n_0 \bar{F}_0$  es decir la función de distribución normalizada a 1. Si la perturbación inicial es una función regular

los polos de  $E(k, p)$  están dados por los ceros del denominador. El teorema de inversión de la transformada de Laplace, nos dice que cada polo  $p_i = p_i(k)$  contribuye con un término del tipo  $e^{p_i(k)t}$  (si se trata de polos de orden uno). Si la parte real de algún  $p_i(k)$  es positiva la perturbación crece exponencialmente.

La solución para  $E(k, p)$  deducida directamente de (VI,13) y (VI,14) es (Landau 1946):

$$(VI,20) \quad E(k, p) = \frac{\frac{4\pi n_0 e^2}{k} \int_{-\infty}^{\infty} du \frac{m(k, u)}{p + iku}}{1 - \frac{\omega_p^2}{k} i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f_0'(u) du}{p + iku}}$$

La transformada de Laplace parte de la hipótesis que  $\text{Re}(p) > 0$ , de modo que si los ceros del denominador de la (VI,20) se encuentran en el semiplano  $\text{Re}(p) < 0$ , hay que hallar la continuación analítica de la integral. Como hemos señalado en la Secc.VI F.1 ello se logra mediante el contorno de Landau. El denominador de la (VI,20) proporciona la relación de dispersión para las oscilaciones electrostáticas, equivalente a la (VI,11) del plasma discontinuo, poniendo  $p = -i\omega$  (\*\*)

De lo que precede se desprende que una expresión alternativa para la relación de dispersión (VI,11) se obtiene de la (VI,19)

$$(VI,21) \quad 1 + \frac{\omega_p^2}{k^2} \int_0^{\infty} dz F_0(z) e^{i \frac{\omega z}{k}} dz = 0$$

(\*) Esto es en los casos más simples, cuando el denominador no presenta puntos de ramificación, de otro modo hay contribuciones provenientes de los cortes en el plano complejo.

(\*\*) La relación entre el problema de modos normales y el de valores iniciales que presenta dificultades no triviales en el caso de un plasma, ha sido esclarecido por los trabajos de Van Kampen<sup>(3)</sup> y Case<sup>(4)</sup>.

siendo  $\bar{F}_0(z)$  la transformada de Fourier de la función de distribución  $\bar{f}_0(u)$ . Si la  $\bar{f}_0(u)$  es convulsiada, o combinación de este tipo de funciones, también lo es la  $\bar{F}_0(z)$ , por lo tanto, la convergencia de la integral está asegurada cualquiera sea el signo de  $\bar{I}_n(\omega)$ . Bajo este aspecto el procedimiento seguido en (VI,15) - (VI,19) no se presta a errores: la continuación analítica se presenta de un modo natural.

### 3. Criterios de Inestabilidad

La presencia de soluciones inestables en la (VI,21) se investiga mediante el diagrama de Nyquist (3), (4), (5).

Toda función  $\bar{f}_0(u)$  puede escribirse como suma de una función par,  $g_0(u)$ , y una impar,  $h_0(u)$ :

$$\begin{aligned} \bar{f}_0(u) &= \frac{1}{2} [\bar{f}_0(u) + \bar{f}_0(-u)] + \frac{1}{2} [\bar{f}_0(u) - \bar{f}_0(-u)] \\ &= \frac{1}{2} \{ g_0(u) + h(u) \} \end{aligned}$$

La función transformada se puede separar en parte real e imaginaria mediante las siguientes expresiones

$$\begin{aligned} \text{(VI,22)} \quad \bar{F}_0(z) &= G(z) - i H(z) \equiv \int_0^{\infty} g(u) \cos zu \, du \\ &\quad - i \int_0^{\infty} h(u) \sin zu \, du \end{aligned}$$

donde G y H son evidentemente funciones par e impar respectivamente.

Vamos a consignar también la fórmula siguiente

$$\bar{f}_0(u) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \{ G(z) \cos zu + H(z) \sin zu \} dz$$

que corresponde al teorema de inversión de la transformada de Fourier.

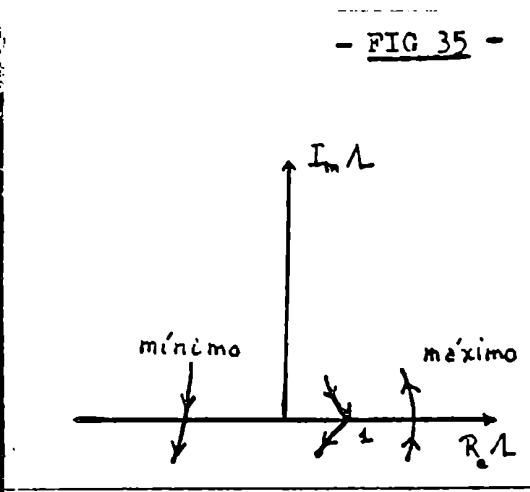
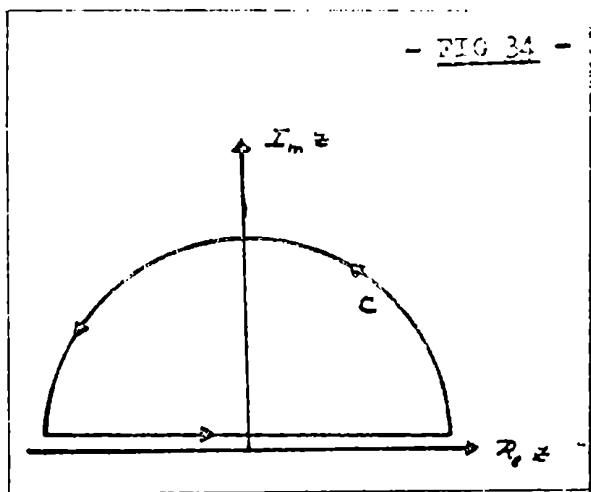
Indicaremos con  $A(\omega)$  la expresión (VI,21) considerandola como una función de la magnitud de fase  $\frac{\omega}{k} = U$  en el plano complejo  $U = U_1 + i U_2$ :



$$\Lambda(v) = 1 + \frac{\omega_p^2}{k^2} \int_0^\infty \bar{z} F_0(z) e^{i v z} dz$$

Si  $F_0(z)$  es una función analítica,  $\Lambda(v)$  es una función entera, sin polos a distancia finita (2), (5). Eligiendo el contorno C de la figura 34, el teorema del argumento nos dá el número de ceros de  $\Lambda(v)$  en el semiplano superior del plano v, es decir el número de raíces inestables de la (VI,21):

$$N = \frac{1}{2\pi i} \int_C dv \frac{\Lambda'}{\Lambda} = \frac{1}{2\pi} \Delta \arg \Lambda.$$



Para determinar la variación del argumento de  $\Lambda$  se traza la curva correspondiente al número complejo  $\Lambda(v)$  mientras v recorre el circuito C. Usando la (VI,2) tenemos

$$\text{Re } \Lambda = 1 + \frac{\omega_p^2}{k^2} \int_0^\infty \int (G \cos v, \zeta + H \sin v, \zeta) e^{-v_2 \zeta} d\zeta, \quad \text{(VI,23)}$$

$$\text{Im } \Lambda = \frac{\omega_p^2}{k^2} \int_0^\infty \int (G \sin v, \zeta - H \cos v, \zeta) e^{-v_2 \zeta} d\zeta.$$

Las dos integrales tienden a cero sobre el semicírculo en el semiplano superior v debido al integrando  $\exp(-v_2 \zeta)$ .

Además integrales del tipo

$$\int_0^{\infty} f(\zeta) \left\{ \begin{array}{l} \sin v, \zeta \\ \cos v, \zeta \end{array} \right\} d\zeta$$

tienden a cero para  $v \rightarrow \infty$  debido al lema de Riemann-Lebesgue (13).

Para ello la  $f(\zeta)$  debe ser una función de núcleo integrable. El diagrama de  $\Lambda$  es una curva cerrada puesto que  $\Lambda = 1$  para

$v \rightarrow \pm \infty$ , además la curva permanece en el punto (1,0)

mientras  $v$  recorre el semi-círculo de  $C$ . La variación del argumento de  $\Lambda$  depende entonces de lo que sucede sobre el eje real del plano  $v$ . Poniendo  $v_2 = 0$  se puede transformar la segunda de las (VI,23) del siguiente modo:

$$\begin{aligned} \text{Im } \Lambda &= - \frac{\omega_p^2}{k^2} \frac{\partial}{\partial v_1} \int_0^{\infty} (G \cos v, \zeta + H \sin v, \zeta) d\zeta = \\ \text{(VI,24)} &= - \frac{\omega_p^2}{k^2} \frac{\partial}{\partial v_1} \left( \pi \bar{f}_0(v_1) \right) \end{aligned}$$

Se puede observar de paso, que hemos demostrado por otra vía la fórmula de Plancherel. La curva correspondiente a  $\Lambda$  atraviesa el eje real en los puntos donde  $\bar{f}_0(u)$  tiene un máximo o un mínimo, pues la (VI,24) exige que  $\bar{f}_0'(u) = 0$ . Otro elemento de ayuda en el análisis del diagrama de Nyquist lo constituye el hecho que en los máximos de  $\bar{f}_0(u)$  la parte imaginaria de  $\Lambda$  pasa de valores negativos a positivos. Lo inverso ocurre en los mínimos. Estas nociones están reunidas en la fig 35. Si la curva  $\Lambda$  circunda el origen lo hace en sentido positivo, pues de otro modo  $N$  tomará valores negativos, mientras que  $\Lambda$  solo tiene ceros en el semiplano superior  $v$ . El número de veces que el diagrama de Nyquist rodea al origen corresponde al número de raíces inestables.

En el párrafo siguiente mostraremos como se calculan explícitamente las (VI,23) sobre la recta  $v_2 = 0$  para  $\bar{f}_0(u)$  que resulte de combinación lineal de funciones de distribución Maxwellianas.

Se puede notar que el pasaje de la curva  $\Lambda(\nu)$  a través del eje real en  $(1,0)$  es hacia abajo, como en los mínimos, pues  $\bar{f}'_0(\nu, \rightarrow \pm \infty) = 0$  en todas las funciones de distribución con sentido físico. Si la  $\bar{f}_0(u)$  tiene dos picos, habrá un punto  $\tilde{u}$  correspondiente al mínimo entre los picos, en el cual  $\bar{f}'_0(\tilde{u}) = 0$ , y allí el diagrama de Nyquist atravesará el eje pasando nuevamente del semiplano superior al inferior. Si este punto corresponde a  $\text{Re } \Lambda < 0$  el sistema es inestable porque la curva  $\Lambda(\nu)$  habrá rodeado el origen. Esto nos lleva al siguiente criterio de inestabilidad, formulado por Penrose<sup>(6)</sup> para un plasma uniforme.

Teorema 4: Es condición necesaria y suficiente para la inestabilidad del perfil a escalón, que  $\nu_1 = \frac{\text{Re } \omega}{k} = \tilde{u}$  corresponda a un mínimo

$$\bar{f}'_0(\nu_1) = 0$$

para el cual sea

$$(VI, 25) \quad \int_0^{\infty} \gamma \{ G \cos \nu_1 \gamma + H \sin \nu_1 \gamma \} d\gamma < 0 \quad (*)$$

La integral de la (VI, 25) puede ponerse también en la forma:

$$(VI, 26) \quad \frac{\partial}{\partial \nu_1} \int_0^{\infty} (G \sin \nu_1 \gamma - H \cos \nu_1 \gamma) d\gamma < 0$$

Si la función de distribución es simétrica con el mínimo en  $\nu_1 = 0$ , entonces  $H = 0$ ,  $G = F_0$ , y el criterio de inestabilidad toma la forma

$$(VI, 27) \quad \int_0^{\infty} \gamma F_0(\gamma) d\gamma < 0$$

(\*) En la formulación original el principio de Penrose se expresa así

$$\int_{-\infty}^{\infty} du \frac{f_0(u) - f_0(\tilde{u})}{(u - \tilde{u})^2} > 0$$

Una aplicación simple está dada por las funciones de distribución Lorentzianas (VI,9). Podemos considerar el deslizamiento de dos haces adyacentes con velocidades medias opuestas  $u$ , e igual dispersión térmica  $\Delta$ .

La estabilidad ha sido analizada en la referencia (4) y conduce a los resultados siguientes. La simetría de la situación física muestra evidentemente que  $\tilde{u} = 0$ ,  $\tilde{f}'_e(\tilde{u}) = 0$ . La integral (VI,27) vale  $2 \frac{(u^2 - \Delta^2)}{(u^2 + \Delta^2)^2}$ . No hay inestabilidad para  $u < \Delta$ . El estado marginal se tiene para  $u = \Delta$ . Los números de onda para los cuales pueden ocurrir oscilaciones crecientes están dados por  $\text{Re } \Lambda \leq 0$ , (VI,23) de la que se obtiene:

$$(VI,28) \quad \frac{k^2}{\omega_p^2} - \frac{2(u^2 - \Delta^2)}{(u^2 + \Delta^2)^2} \leq 0$$

para  $u > \Delta$  hay un conjunto de valores de  $k$  desde 0 hasta un máximo fijado por el signo igual en la (VI,17) para los cuales la inestabilidad puede ocurrir. El mayor valor del segundo término es  $0.25/\Delta^2$  para  $u = \sqrt{3}\Delta$ . El máximo número de onda inestable es  $k = 0.5 \frac{\omega_p}{\Delta}$ . Para diferencias de velocidades del flujo muy elevadas respecto a  $\Delta$ , el número de onda límite para la inestabilidad es  $k = \sqrt{2} \frac{\omega_p}{u}$ , de acuerdo a lo que ya habíamos establecido en Secc. III P.2. A medida que  $u$  se acerca al valor  $\Delta$  el rango de números de onda inestables decae rápidamente a cero. El amortiguamiento de Landau se vuelve dominante sobre la inestabilidad. Vamos a examinar este fenómeno en la siguiente sección junto con la estabilidad del flujo a escalarón representado por funciones Maxwellianas.

#### 4. Inestabilidad por deslizamiento en flujos Maxwellianos

En el límite de las longitudes de onda grandes es posible obtener una expresión para  $I_u(\omega)$  bajo la condición que  $I_u(\frac{\omega}{k})$  sea mucho menor que la velocidad de fase  $\text{Re}(\frac{\omega}{k})$ . Veremos "a posteriori" que estas hipótesis son consistentes con la relación

de dispersión (VI,21):

$$(VI,29) \quad \left. \begin{array}{l} v_1 \gg v_e \\ v_2 \ll v_1 \end{array} \right\} k \rightarrow 0$$

donde con  $v_e$  hemos indicado la velocidad térmica deducida de la función de distribución  $\bar{f}_0(u)$ . Escribiendo  $\langle u^n \rangle$  para el momento de orden  $n$  de  $\bar{f}_0$ , es fácil ver, partiendo de (VI,22) que

$$(VI,30) \quad \begin{array}{ll} G(0) = 1 & H(0) = 0 \\ G'(0) = 0 & H'(0) = \langle u \rangle \\ G''(0) = -\langle u^2 \rangle & H''(0) = 0 \\ G'''(0) = 0 & H'''(0) = -\langle u^3 \rangle \\ G^{IV}(0) = \langle u^4 \rangle & H^{IV}(0) = 0 \\ \dots & \dots \end{array}$$

Utilizando esta notación, será

$$v_e = \sqrt{-\frac{1}{2} [H'(0)]^2 - G''(0)} = \int (u^2 - \langle u \rangle^2) \bar{f}_0(u) du$$

La relación de dispersión es equivalente a las dos ecuaciones (VI,23) igualadas a cero. Utilizando la hipótesis (VI,29) y desarrollando la exponencial en  $I_m \Lambda = 0$ , se obtiene en el primer orden para  $v_2$ :

$$v_2 \approx \frac{\int_0^\infty \xi (G \sin v_1 \xi - H \cos v_1 \xi) d\xi}{\int_0^\infty \xi^2 (G \sin v_1 \xi - H \cos v_1 \xi) d\xi}$$

Transformando en derivadas los factores  $\xi$  y  $\xi^2$  se obtiene:

$$(VI,31) \quad v_2 \approx \frac{\frac{\partial}{\partial v_1} [\pi \bar{f}_0(v_1)]}{\frac{\partial^2}{\partial v_1^2} \int_0^\infty [G(\xi) \sin v_1 \xi - H(\xi) \cos v_1 \xi] d\xi}$$

El valor de  $v_1$  que hay que emplear en la (VI,31) se obtiene de la otra ecuación,  $R_e \Lambda = 0$ . Aquí basta detenerse al orden

cero en  $\omega_2$  :

$$(VI,32) \quad \frac{\partial}{\partial \omega_1} \int_0^{\infty} [G(\xi) \sin \omega_1 \xi - H(\xi) \cos \omega_1 \xi] d\xi = -\frac{k^2}{\omega_p^2}$$

Notemos que la derivada del segundo miembro de la (VI,32) nos dá la expresión que necesitamos en el denominador de la (VI,31),

$$\frac{\partial}{\partial \omega_1} \left( -\frac{k^2}{\omega_p^2} \right) = \frac{1}{\frac{\omega}{k} - \frac{\partial \omega}{\partial k}} \cdot \frac{2k^2}{\omega_p^2}$$

en esta expresión hemos puesto directamente  $\omega$  , por la parte real de  $\omega$  que se obtiene de la (VI,32). Reemplazando en la (VI,31):

$$(VI,33) \quad I_{\omega}(\omega) \simeq \omega \frac{\omega_p^2}{k^2} \frac{\pi}{2} f'_0 \left( \frac{\omega}{k} \right) \left[ 1 - \frac{k}{\omega} \frac{\partial \omega}{\partial k} \right]$$

Para valores grandes de  $\omega_1$  (VI,29) se puede usar el siguiente desarrollo que demostraremos en el apéndice n° 5,

$$(VI,34) \quad \int_0^{\infty} G(\xi) \sin \omega_1 \xi d\xi = \frac{G(0)}{\omega_1} - \frac{G''(0)}{\omega_1^3} + \frac{G^{IV}(0)}{\omega_1^5} + \dots$$

$$\int_0^{\infty} H(\xi) \cos \omega_1 \xi d\xi = -\frac{H'(0)}{\omega_1^2} + \frac{H'''(0)}{\omega_1^4} - \frac{H^{V}(0)}{\omega_1^6} + \dots$$

De (VI,30) y (VI,32) se obtiene:

$$\omega_1^2 = \frac{\omega_p^2}{k^2} \left[ 1 + \frac{2 \langle u \rangle}{\omega_1} + 3 \frac{\langle u^2 \rangle}{\omega_1^2} + 4 \frac{\langle u^3 \rangle}{\omega_1^3} + \dots \right]$$

La solución aproximada de esta ecuación es:

$$(VI,35) \quad \omega^2 \simeq \omega_p^2 \left( 1 + \frac{2k \langle u \rangle}{\omega_p} + \frac{3k^2 \langle u^2 \rangle}{\omega_p^2} \right)$$

Para una función de distribución sin corriente de masa resulta

$$(VI,36) \quad \omega^2 \simeq \omega_p^2 + 3k^2 \sigma_t^2$$

donde puede notarse el factor 3 en la corrección técnica que hemos mencionado en la Secc.V P.2. La expresión (VI,35) debe usarse junto con la (VI,33).

Para una función de distribución Maxwelliana

$$f_0(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} v_t} e^{-u^2/2v_t^2}$$

se obtiene el famoso factor de amortiguamiento de Landau

$$(VI,37) \quad I_{\omega}(\omega) \approx -\sqrt{\frac{\pi}{8}} \omega_p \left(\frac{\omega_p}{kv_t}\right)^3 e^{-\frac{\omega^2}{2k^2 v_t^2}}$$

La (VI,33) conduce generalmente a un amortiguamiento puesto que las funciones de distribución decrecen rápidamente para argumentos mucho mayores que  $v_t$ , a menos que haya grupos de partículas de altas energías, como en la situación física denominada "de electrones desbocados" (run away electrons). (\*)

Se puede notar que mientras la parte real de  $\omega$  (VI,35) no es muy sensible a la forma de las distintas funciones de distribución, el amortiguamiento de Landau, en cambio depende muy fuertemente de los detalles de la  $\bar{f}_0(u)$ .

Vamos a examinar ahora cuales son las condiciones para que la inestabilidad por deslizamiento pueda prevalecer sobre el amortiguamiento de las oscilaciones en el caso de un flujo discontinuo con funciones de distribución Maxwellianas en ambas regiones:

$$f_0^{(1)}(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} v_{t1}} e^{-\frac{(u-\bar{u}_1)^2}{2v_{t1}^2}}$$

$$f_0^{(2)}(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} v_{t2}} e^{-\frac{(u-\bar{u}_2)^2}{2v_{t2}^2}}$$

(\*) El mecanismo físico del amortiguamiento está expuesto en las referencias (4) y (12).

Comenzaremos con el caso de temperaturas iguales  $U_{t_1} = U_{t_2} = U_t$ . Sin mengua de la generalidad podemos estudiar flujos con velocidades medias opuestas:  $\bar{U}_1 = -\bar{U}_2 = \bar{U}$ . En este caso podemos emplear la (VI,27), puesto que  $\bar{f}_0'(U_1) = 0$  en  $U_1 = 0$ . Para la función transformada se tiene

$$2 F_0 = e^{-\frac{\gamma^2 U_t^2}{2} - i\gamma \bar{u}} + e^{-\frac{\gamma^2 U_t^2}{2} + i\gamma \bar{u}}$$

es decir

$$(VI,38) \quad F_0 = e^{-\frac{\gamma^2 U_t^2}{2}} \cos \gamma \bar{u}$$

La condición para la inestabilidad es:

$$I(U_t, \bar{u}) = \int_0^{\infty} \gamma e^{-\frac{\gamma^2 U_t^2}{2}} \cos \gamma \bar{u} d\gamma < 0,$$

la cual integrada por partes y realizada la substitución  $\frac{\gamma U_t}{\sqrt{2}} = x$ ,  $\frac{\sqrt{2} \bar{u}}{U_t} = q$  se convierte en

$$(VI,39) \quad q \int_0^{\infty} e^{-x^2} \sin qx dx > 1$$

Es fácil ver que para  $q \rightarrow 0$ , es decir  $\bar{U} \ll U_t$  el miembro de la izquierda tiende a cero, por lo tanto el sistema es estable. Por otra parte cuando  $q \rightarrow \infty$  (\*)

$$q \int_0^{\infty} e^{-x^2} \sin qx dx \rightarrow 1 + \frac{2}{q^2} > 1$$

el sistema se hace inestable para  $\bar{U} \gg U_t$ . Vamos a expresar la (VI,38) en términos de funciones tabuladas. La integral de la (VI,38) puede calcularse mediante la función error de argumento complejo<sup>(15)</sup>:

$$(VI,40) \quad \int_0^{\infty} dx e^{-x^2} \sin qx = -\frac{i\sqrt{\pi}}{2} e^{-\frac{q^2}{4}} \text{Erf}\left(\frac{iq}{2}\right),$$

(\*) Ver apéndice nº5,



$$\operatorname{Erf}\left(\frac{iq}{2}\right) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{iq/2} e^{-t^2} dt$$

Esta función puede obtenerse de las anteriores tablas de Fried y Conte<sup>(10)</sup>, donde hallamos la función

$$(VI,41) \quad \mathcal{Z}(q) = 2i e^{-q^2} \int_{-\infty}^{iq} e^{-t^2} dt$$

Esta función puede expresarse mediante la siguiente serie

$$\mathcal{Z}(q) = i\sqrt{\pi} e^{-q^2} - q \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-q^2)^n \pi^{1/2}}{(n+1/2)!},$$

de donde se desprende que si  $q$  es real,

$$(VI,42) \quad \operatorname{Re} \{ \mathcal{Z}(q) \} = -q \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-q^2)^n \pi^{1/2}}{(n+1/2)!}$$

función que se encuentra en las tablas de Fried y Conte. Por otra parte es fácil ver, empleando estas definiciones, que la (VI,30) se transforma en la

$$(VI,43) \quad -q' \operatorname{Re} [ \mathcal{Z}(q') ] > 1$$

$$q' = \frac{q}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{u}{v_t}$$

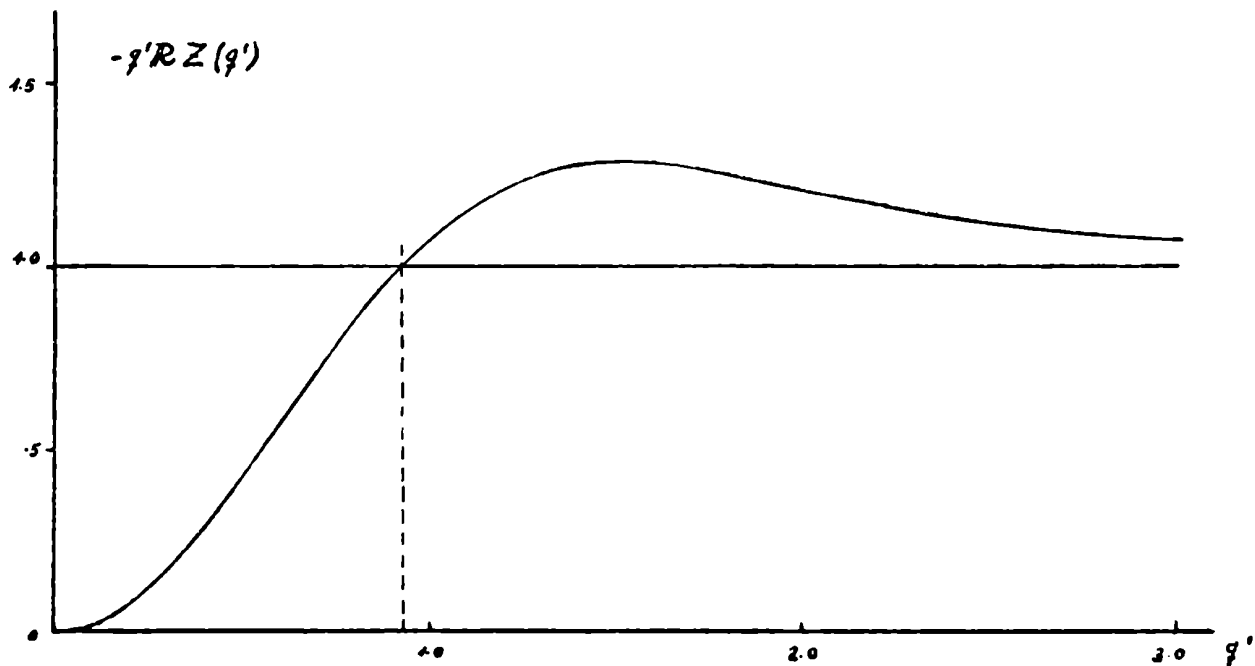
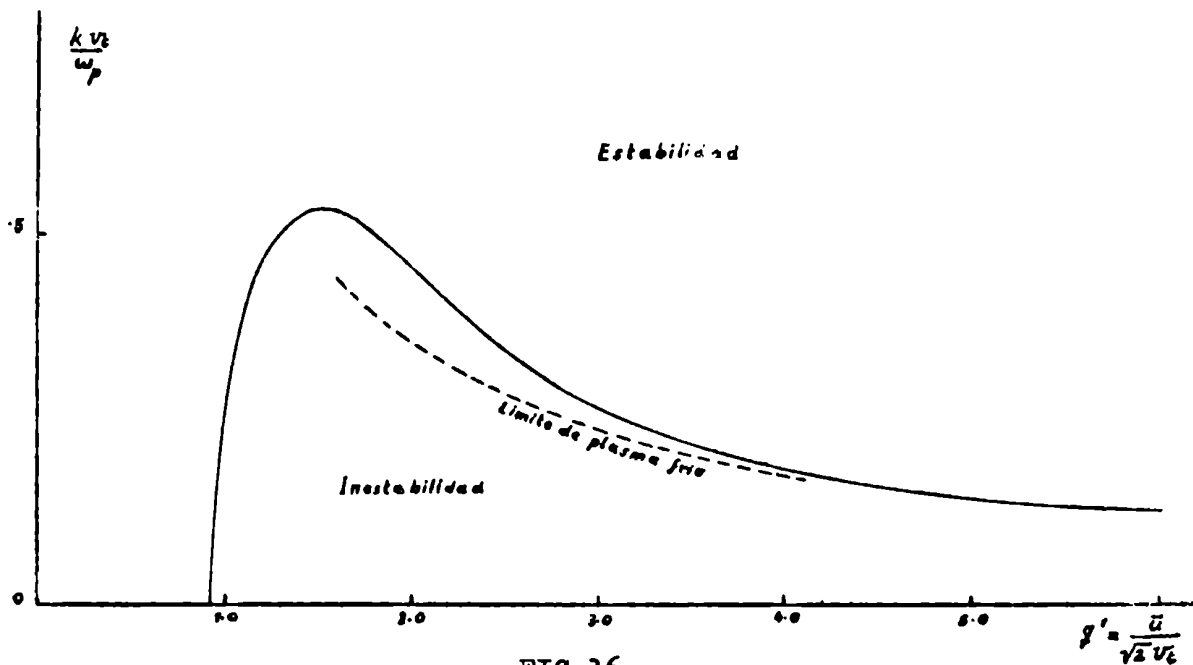
La función que interviene en la (VI,42) ha sido trazada en la Fig. 37. La velocidad crítica  $u_c$  para la inestabilidad es

$$(VI,44) \quad u_c = 1.3095 v_t$$

En la Fig. 36 hemos representado la línea de estabilidad marginal empleando la condición  $\operatorname{Re} \Lambda \leq 0$  con  $v_2=0$  y  $H=0$ , es decir

$$(VI,45) \quad \frac{k^2 v_t^2}{\omega_p^2} \leq -q' \operatorname{Re} [ \mathcal{Z}(q') ] - 1$$

La línea punteada corresponde al límite hidrodinámico de la Secc. III, P.2,  $k\bar{u} < \omega_p$ , que en las unidades actuales se escribe en la forma  $\frac{k\sqrt{v_e}}{\omega_p} \leq \frac{1}{\sqrt{2}q'}$ .



Referencias

1. Landau L. *Zurn.Eksp.Teor.Fiz.*, 10, 25 (1946).
2. Muskhelishvili N.I. *Singular Integral Equations*, Noordhoff, Groningen (1953).
3. Nyquist H. *Bell System Tech. J.* 11, 126 (1932).
4. Jackson J.D. *J.Nuclear Energy, Part C, Plasma Physics*, 1, 111 (1963).
5. Balescu R, *Statistical Mechanics of Charged Particles*, London (1963).
6. Penrose O. *Phys.Fluids*, 3, 258 (1960).
7. Jackson E.A. *Phys.Fluids*, 3, 786 (1960).
8. Bernstein et Al. *Nuclear Fusion*, 4, 61, (1964).
9. Stix T.H. *Theory of Plasma Waves*, Chap.7, New York (1962).
10. Fried B.D. Conte S. *The Plasma Dispersion Function*, New York
11. Fried B.D. Gould R.W. *Phys.Fluids*, 4, 139 (1961). / (1961).
12. Montgomery D.C. Tidman D.A. *Plasma Kinetic Theory*, pg. 265, New York (1964).
13. Carslaw H.S. *The Theory of Fourier's Series and Integrals*, pg. 271, New York (1930).
14. Thompson W.B. *An Introduction to Plasma Physics*. London (1964) pg. 230 .
15. Bateman H. *Tables of Integrals Transforms I* , pg 73 , New York (1954).

## Apendice nº 1

### Funciones de distribución para flujos con $\overline{v_x}$ finito

Funciones de distribución más generales que la (10), Secc. II, que representen flujos con temperatura transversal finita deben satisfacer la ecuación:

$$v \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{eB_0}{mc} w \frac{\partial f}{\partial v} - \frac{eB_0}{mc} v \frac{\partial f}{\partial w} = 0$$

Haciendo el cambio  $v = v_{\perp} \cos \varphi$ ,  $w = v_{\perp} \sin \varphi$ , esta ecuación se transforma en

$$v_{\perp} \cos \varphi \frac{\partial f}{\partial y} - \Omega \frac{\partial f}{\partial \varphi} = 0$$

siendo  $\Omega = \frac{eB_0}{mc}$ . La ecuación característica es  $\frac{dy}{v_{\perp} \cos \varphi} = \pi \frac{d\varphi}{\Omega}$ , es decir  $y + v_{\perp} \frac{\varphi}{\Omega} = c$ . Son posibles, entonces, soluciones del tipo  $f(u, v, y + \frac{w}{\Omega})$ , donde  $f$  es una función arbitraria. Entre estas nos interesan las que representan un plasma, con una corriente media según  $x$ , variable según  $y$ . Se puede probar, por ejemplo

$$f_0 = \frac{\alpha_{\perp}}{\pi} \sqrt{\frac{\alpha_u}{\pi}} e^{-\alpha_u [u - W(y + \frac{w}{\Omega})]^2 - \alpha_{\perp} (v^2 + w^2)}$$

en efecto, si calculamos  $\int u f_0 d^3v$ , se obtiene

$$\bar{u}(y) = \int_{-\infty}^{\infty} dw \sqrt{\frac{\alpha_{\perp}}{\pi}} W(y + \frac{w}{\Omega}) e^{-\alpha_{\perp} w^2}$$

una función de  $y$ . Al mismo tiempo no hay corrientes según  $y$ ,  $z$ , y la densidad es constante.

A este punto se pueden seguir dos caminos: a) analizar la aproximación de campo magnético fuerte  $\frac{w}{\Omega} \ll y$ ,

para  $W$  del orden de  $\frac{1}{\sqrt{\alpha_L}}$  (luego el integrando se anula por la Gaussiana), y desarrollar

$$W\left(y + \frac{v_z}{\Omega}\right) = W(y) + \frac{v_z}{\Omega} W'(y) + \frac{v_z^2}{2\Omega^2} W''(y) + \dots$$

de manera que

$$\bar{u}(y) = W(y) + \frac{1}{8} \frac{W''(y)}{\Omega^2 \alpha_L}$$

Entonces, en el caso de ser

$$\frac{1}{8} \frac{W''}{W} \frac{1}{\Omega^2 \alpha_L} \sim \left(\frac{v_z}{L}\right)^2 \ll 1$$

$W(y)$  tiene el significado de  $\bar{u}(y)$  a menos de términos en  $(v_z/L)^2$ . Esto es un límite para  $v_z$  grande, o temperatura transversal pequeña (o ambos simultáneamente).

b) Se pueden buscar perfiles particularmente simples; por ejemplo  $W = a\left(y + \frac{v_z}{\Omega}\right)$  da  $\bar{u}(y) = a y$  un perfil lineal para el flujo. Un perfil muy interesante se obtiene poniendo

$$W = u_0 \left[ H\left(\frac{v_z}{\Omega} + y\right) - H\left(\frac{v_z}{\Omega} - y\right) \right]$$

donde  $H$  representa la función de Heaviside. Calculando  $\bar{u}(y)$  se obtiene

$$u(y) = \frac{u_0}{\pi} \int_{-\sqrt{\alpha_L \Omega} y}^{\sqrt{\alpha_L \Omega} y} e^{-\xi^2} d\xi$$

$\alpha_L \Omega = r_L$ . Para  $y \rightarrow \pm \infty$ , se tiene  $u(y) \rightarrow \pm u_0$ . El espesor de la transición es claramente  $r_L$ . Tomando el límite  $r_L \rightarrow 0$  debemos tender hacia el perfil a escalón tratado en la Secc. VI.

El cálculo de las oscilaciones sigue el esquema del P.2, Secc. II, pero ahora los campos electromagnéticos quedan involucrados en las integrales sobre las órbitas, y se llega a una ecuación integrodiferencial. El problema presenta un grado de dificultad mayor, y será objeto de otra investigación.

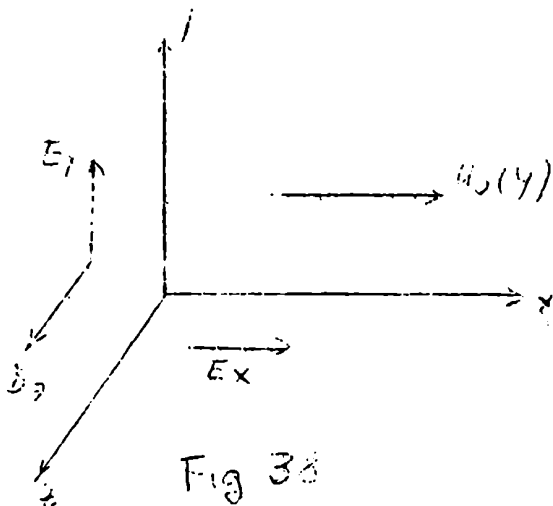
Apéndice nº2

Modos electromagnéticos en la inestabilidad por deslizamiento

Nos ocuparemos brevemente de examinar las variaciones que los nodos de oscilación electromagnéticos introducen en el cuadro de la inestabilidad por deslizamiento trazado en la Secc.III.

Hemos dicho que cuando la velocidad de fase es del orden de la velocidad del flujo, la aproximación electrostática es equivalente a la aproximación no-relativística (Secc.II, P.2). Consideraremos entonces movimientos de plasma a velocidades relativísticas, los cuales pertenecen al conjunto de los problemas de haces de partículas de alta energía emitidos por el sol o bien a situaciones experimentales como la de la máquina Astron por ejemplo, donde se emplean haces de electrones relativísticos.

Estudiaremos oscilaciones con la configuración de campos electromagnéticos presentados en la fig. 38.



Considerando perturbaciones independientes de la coordenada  $z$ , podemos analizar los nodos con  $E_z = 0$ ,  $B_y = B_x = 0$  como puede fácilmente verificarse de las componentes  $x, y$ , de la ecuación de Maxwell para el rotor de  $\underline{E}$ .

La ecuación del impulso para el flujo relativístico de un plasma frío es:

$$(12,1) \quad \frac{d}{dt} (m \gamma \underline{v}) = \underline{F}$$

siendo  $\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$  y  $\underline{F}$  la fuerza de Lorentz. Identificando el primer miembro de la (12,1) se obtiene, para la componente  $x$  por ejemplo,

$$\frac{d}{dt} \left\{ m \left[ 1 - \frac{(u + \delta u)^2 + \delta v^2}{c^2} \right]^{-1/2} (u + \delta u) \right\} \approx$$

$$\frac{d}{dt} \left[ m \gamma_0 \left( 1 + \frac{u \delta u}{c^2} \gamma_0^3 \right) (u + \delta u) \right] \approx$$

$$(A2,2) = m \left( \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} \right) (\gamma_0^3 \delta u) + m \frac{\partial}{\partial y} (\gamma_0 u) \delta v,$$

siendo  $\gamma_0 = \left( 1 - \frac{u^2}{c^2} \right)^{-\frac{1}{2}}$ , donde hemos usado la relación

$$\gamma_0^3 \frac{u^2}{c^2} + \gamma_0 = \gamma_0^3$$

En ausencia de campo magnético exterior o propio del plasma, las ecuaciones del movimiento, para cada especie de partículas son

$$(A2,3) \quad -i\bar{\omega} \gamma_0^3 \delta v = \frac{e}{m} E_x - \frac{d}{dy} (\gamma_0 u) \delta v$$

$$-i\bar{\omega} \gamma_0 \delta v = \frac{e}{m} E_y - \frac{eu}{mc} B_z$$

donde hemos puesto la dependencia del tipo  $Q(y) e^{-i(\omega t - kx)}$  para las perturbaciones y  $\bar{\omega} = \omega - k u(y)$ . La ecuación para  $\delta v$  lleva  $\gamma_0$ , como puede verse de la (A2,2), porque no hay componente de orden cero según  $y$ . La componente  $z$  del rotor de  $\underline{E}$ , nos da

$$(A2,4) \quad B_z = \frac{c}{\omega} (k E_y + i E'_x)$$

reemplazando en la segunda de las (A2,3) se obtiene

$$(A2,5) \quad -i\bar{\omega} \gamma_0 \delta v = \frac{e}{m} \frac{\bar{\omega}}{\omega} E_y - \frac{ie}{m} \frac{u}{\omega} \frac{dE_y}{dy}$$

La ecuación de las ondas electromagnéticas en el plasma se escribe como

$$(A2,6) \quad \nabla^2 \underline{E} - \nabla(\nabla \cdot \underline{E}) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \underline{E}}{\partial t^2} = 4\pi \frac{\partial \underline{j}}{\partial t}$$

donde la densidad de corriente  $\underline{j}$  está dada por

$$(A2,7) \quad j_x = \sum (e n \delta n + e n \delta u)$$

$$j_y = \sum (e n \delta v)$$

la suma es sobre las dos especies de partículas,

La perturbación de la densidad de carga se obtiene de la ecuación de continuidad

$$(A2,8) \quad -i\bar{\omega}\delta n + ikn\delta u + \frac{d}{dy}(n\delta v) = 0 \quad .$$

donde la densidad de orden cero, para mayor generalidad, también se ha supuesto variable con  $y$ . Calculando  $\delta u$ ,  $\delta v$  y  $\delta n$  en función de los campos eléctricos se obtiene de (A2-3,5,6):

$$(A2,9) \quad \begin{aligned} \delta u &= i \frac{e}{m} \frac{E_x}{\bar{\omega} \gamma_0^3} - \frac{(\delta_0 u)' e}{\bar{\omega} \gamma_0^3} \frac{u}{m \bar{\omega}} \frac{E_x'}{\gamma_0 \omega} - i \frac{(\delta_0 u)' e}{\gamma_0^3 \bar{\omega}} \frac{E_y}{m \gamma_0 \omega} \quad , \\ \delta v &= \frac{ie}{m} \frac{E_y}{\gamma_0 \omega} + \frac{e}{m} \frac{u}{\bar{\omega}} \frac{\bar{E}_x'}{\gamma_0 \omega} \quad , \\ \delta n &= \frac{ien}{m} \frac{k \bar{E}_x}{\bar{\omega}^2 \gamma_0^3} - \frac{ikn(\delta_0 u)'}{\bar{\omega}^2 \gamma_0^3} \left( i \frac{e}{m} \frac{E_y}{\gamma_0 \omega} + \frac{e}{m} \frac{u}{\bar{\omega}} \frac{\bar{E}_x'}{\gamma_0 \omega} \right) - \\ &\quad - \frac{i}{\bar{\omega}} \left\{ \frac{ien}{m} \frac{E_y}{\gamma_0 \omega} + \frac{en}{m} \frac{u}{\bar{\omega}} \frac{\bar{E}_x'}{\gamma_0 \omega} \right\}' \quad . \end{aligned}$$

podemos ahora calcular explícitamente las (A2,5,7):

$$(A2,10) \quad \begin{aligned} c^2 \frac{d^2}{dy^2} E_x + \omega^2 \bar{E}_x - ic^2 k \frac{d\bar{E}_y}{dy} &= -i\omega 4\pi j_x \quad , \\ (\omega^2 - c^2 k^2) \bar{E}_y - ic^2 k \frac{d\bar{E}_x}{dy} &= -i\omega 4\pi j_y \end{aligned}$$

Para la densidad de corriente se obtiene

$$(A2,11) \quad \begin{aligned} -i\omega 4\pi j_x &= \omega^2 E_x \sum \frac{\omega_{p\parallel}^2}{\bar{\omega}^2} - i \sum \left\{ (E_y - \frac{iu}{\bar{\omega}} E_x') \frac{\omega_{p\parallel}^2 u}{\bar{\omega}} \right\}' \quad , \\ -i\omega 4\pi j_y &= \sum \omega_{p\perp}^2 E_y - i \sum \omega_{p\perp}^2 \frac{u}{\bar{\omega}} E_x' \quad , \end{aligned}$$

donde hemos puesto

$$(A2,12) \quad \omega_{p\parallel}^2 = \frac{\omega_p^2}{\gamma_0^3} \quad \omega_{p\perp}^2 = \frac{\omega_p^2}{\gamma_0}$$



Las frecuencias de plasma longitudinales y transversales, respectivamente.

De la segunda ecuación ( A2, 10 ) podemos obtener  $E_y$  en función de  $E_x$ ,

$$(A2,13) \quad k E_y = \frac{2 E_x}{\omega^2} \frac{\left( \omega^2 c^2 - \sum \frac{k u}{\omega} \omega_p^2 \right)}{\left( \omega^2 k^2 c^2 - \sum \omega_p^2 \right)}$$

Reemplazando ( A2, 13 ) y ( A2,11 ) en ( A2,10 ) se obtiene una ecuación diferencial para los nodos de oscilación, a través de la cual se pueden determinar las frecuencias características

$$(A2,14) \quad \frac{d}{dy} \left[ \frac{d E_x}{dy} \left( \omega^2 k^2 c^2 + \frac{\left( k^2 c^2 - \sum \frac{k u}{\omega} \omega_p^2 \right)^2}{\left( \omega^2 k^2 c^2 - \sum \omega_p^2 \right)} + \sum \omega_p^2 \left( \frac{k u}{\omega} \right)^2 \right) \right] + \omega^2 k^2 \left( 1 - \sum \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \right) E_x = 0$$

En primer lugar veamos como se recupera la aproximación electrostática en el límite  $c \gg \omega$ . Ordenando la ( A2,14 ) en potencias crecientes de  $\left( \frac{\omega}{kc} \right)^2, \left( \frac{\omega}{kc} \right)^4$ :

$$\begin{aligned} E_x'' + \frac{\omega^2}{c^2 k^2} E_x k^2 \left( 1 - \sum \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \right) - \left\{ E_x' \left( 1 - \sum \frac{k u}{\omega} \frac{\omega_p^2}{k^2 c^2} \right) \right. \\ \left. \cdot \left( 1 + \frac{\omega^2}{c^2 k^2} - \sum \frac{\omega_p^2}{k^2 c^2} \right) \right\}' \\ \cdot \sum \frac{1}{k} E_x \frac{\omega_p^2}{\omega^2 c^2} \frac{k u}{\omega} \left[ \frac{k u}{\omega} + \left( 1 - \sum \frac{k u}{\omega} \frac{\omega_p^2}{k^2 c^2} \right) \left( 1 + \frac{\omega^2}{k^2 c^2} - \sum \frac{\omega_p^2}{k^2 c^2} \right) \right]' = 0 \end{aligned}$$

se obtiene

$$\begin{aligned} E_x'' + \omega^2 E_x k \left( 1 - \sum \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \right) - E_x' + \\ + \left\{ E_x' \left( \sum \frac{k u}{\omega} \omega_p^2 - \omega^2 + \sum \omega_p^2 + \sum \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \omega k \right) \right\}' \\ = 0 \left[ \left( \frac{\omega}{kc} \right)^4 \right] k^2 c^2 E_x \end{aligned}$$

es decir  $\left\{ E'_x \left( 1 - \sum \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \right) \right\}' - k^2 \left( 1 - \sum \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \right) E_x = 0$

a menos de términos del orden de  $\left( \frac{u}{kc} \right)^2 \bar{E}_x$ . En el mismo orden la (A2,13) se reduce a  $i k E_y = \bar{E}'_x$

es decir el rotor de  $\underline{E}$  es cero.

Cuando la velocidad de los iones y de los electrones es igual, es decir cuando el plasma se mueve en su conjunto, la ecuación (A2,14) puede ser notablemente simplificada. En este caso es posible despreciar las oscilaciones iónicas ( Secc.II,P.3 ), entonces resulta

$$k^2 c^2 \frac{(k^2 c^2 - \frac{k u}{\omega} \omega_{pL}^2)^2}{(k^2 c^2 + \omega_{pL}^2 - \omega^2)} + \omega_{pL}^2 \left( \frac{k u}{\omega} \right)^2 =$$

$$\frac{\omega^2 [k^2 c^2 (\omega_{pL}^2 - (\omega - k u)^2) - \omega_{pL}^2 k^2 u^2]}{\bar{\omega}^2 (k^2 c^2 + \omega_{pL}^2 - \omega^2)} =$$

$$= \omega^2 k^2 c^2 \left\{ 1 - \frac{\omega_{pL}^2}{\bar{\omega}^2} \left( 1 - \frac{u^2}{c^2} \right) \right\} / (k^2 c^2 + \omega_{pL}^2 - \omega^2) ,$$

y la (A2,14) puede ponerse de la forma

$$(A2,15) \quad \frac{d}{dy} \left\{ \frac{d \bar{E}_x}{dy} \frac{\left( 1 - \frac{\omega_{pL}^2}{\bar{\omega}^2} \right)}{\left( 1 + \frac{\omega_{pL}^2 - \omega^2}{k^2 c^2} \right)} \right\} - k^2 \left( 1 - \frac{\omega_{pL}^2}{\bar{\omega}^2} \right) \bar{E}_x = 0$$

Para el perfil en escalón, con densidad constante, se obtiene inmediatamente

$$(A2, 16) \quad \bar{\omega} - \frac{\omega_{pL}^2}{\bar{\omega}_1^2} - \frac{\omega_{pL}^2}{\bar{\omega}_2^2} = 0$$

Es decir se vuelven a obtener los resultados del P.2 Secc.III con la única variante de un período de aumento de la inestabilidad menor, en virtud de la masa relativísticamente dilatada.

El campo eléctrico decrece exponencialmente a ambos lados de la superficie de separación con un coeficiente exponencial <sup>(\*)</sup>

$$(A2,17) \quad K = k \sqrt{1 + \frac{\omega_{pL}^2 - \omega^2}{k^2 c^2}}$$

Se puede notar que en el caso ultrarelativístico,  $\omega_{pL} \approx c$ ,  $\omega_{pL}^2 \gg \omega_{p\parallel}^2$ , en el radicando predomina el término en  $\omega_{pL}^2$ , por lo tanto

$$(A2,18) \quad K \rightarrow \frac{\omega_{pL}}{c} = \frac{1}{d_L}$$

La perturbación se extiende, en sentido perpendicular al flujo, sobre distancias del orden de  $d_L$ , llamada "distancia piel sin colisiones", formada con la frecuencia de plasma transversal.

Si  $\gamma \gg 1$ , entonces para números de onda tales que  $k c > \frac{1}{2} \frac{\omega_p}{\sqrt{2}}$  puede haber propagación lateral de oscilaciones de la rama estable. En este caso  $\omega \approx kc$ , y  $K \approx ik \sqrt{\frac{\omega_{pL}}{kc} \left( \frac{\sqrt{2}}{\gamma} - \frac{\omega_{pL}}{kc} \right)}$ . Para velocidades clásicas resulta

$$(A2,19) \quad K = k \sqrt{\left\{ 1 + \frac{\omega_p^2}{2k^2 c^2} \left( 1 \pm \sqrt{1 + \frac{8k^2 u^2}{\omega_p^2}} \right) \right\}}$$

En  $k^2 c^2 \gg \omega_p^2$  entonces  $K \approx k$  de acuerdo con la aproximación electrostática. Si  $k^2 c^2 \ll \omega_p^2$  entonces a mayor razón  $k^2 u^2 \ll \omega_p^2$ , por lo tanto para la rama estable de la relación de dispersión resulta

$$(A2,20) \quad K \approx \frac{\omega_p}{c} = \frac{1}{d}$$

(\*) Se puede notar que en este caso no se presentan dificultades como las del P.1 Secc.IV por la determinación positiva de la raíz.

y para la rama inestable

$$(12.21) \quad \mathcal{K} \approx k$$

Lo que confirma el carácter electrostático del mecanismo de la inestabilidad.

En el caso que  $k^2 c^2 \gg \omega_p^2$  mientras que  $k^2 a^2 \ll \omega_p^2$  la corriente de materia no compensa exactamente la corriente de desplazamiento y  $H_z \neq 0$ , pero no hay propagación de ondas electromagnéticas en el sentido usual. En el caso de la rama estable solo hay arrastre de las perturbaciones por parte de los flujos de partículas.

Reduciéndose números, la condición para la aproximación electrostática, es

$$(12.22) \quad \lambda^2 \ll 10^{13} / n (\text{cm}^{-3})$$

por ejemplo, en la atmosfera solar esto requiere  $\lambda$  menores que  $10^{-1} \text{ cm}$  y en la corona solar  $\lambda$  menores que  $10^3 \text{ cm}$ .

Apéndice nº 3

Inestabilidad de dos haces en plasmas con densidad variable

Consideraremos brevemente el efecto de inhomogeneidades de la densidad, en direcciones transversales al haz, sobre la inestabilidad de "dos haces". En esta bien conocida inestabilidad el proceso de formación de aglomeraciones de cargas es el mismo que hemos invocado en la Secc. V para explicar el mecanismo de la inestabilidad por deslizamiento. Se trata de allí de un fenómeno localizado en la región del gradiente de la velocidad y en el caso límite de un proceso de superficie, mientras que aquí tiene lugar en todo el volumen ocupado por el haz.

Una reseña de la inestabilidad de dos haces puede hallarse en Plasma Oscillations, I y II, Bernstein I.B. y Trehan T.K., NUCLEAR FUSION, 3 (1960), 61 (1964).

El interés en estos problemas proviene, entre otros motivos, de la evidencia que se ha acumulado en los últimos tiempos acerca de su presencia en las erupciones solares y otros fenómenos del plasma interplanetario. En la conferencia de la IASA sobre "Flores", de 1963, Sturrock sostuvo que la inestabilidad podría ser suprimida por efecto de inhomogeneidades en los haces. En líneas generales se podría conjeturar que las alteraciones más notables de la inestabilidad de dos haces, provengan de variaciones de densidad ( y por lo tanto de velocidad ), en la dirección del haz. La razón es que en un plasma frío las partículas transportan directamente información acerca de las perturbaciones, a lo largo del haz. Lateralmente solo actúan los campos eléctricos. Con todo parece interesante averiguar, también, lo que sucede con las variaciones de la densidad en sentido perpendicular al movimiento. Recientemente, Harris examinó un caso límite: campo magnético externo, paralelo al haz, de intensidad infinita. Esta condición se elige para simplificar el problema, puesto que suprime las oscilaciones laterales de las partículas. La ecuación (II,30) contiene la extensión del problema de Harris para campo B finito, si se pone  $u_+ = 0$  y  $u_- = u = \text{constante}$ . El caso opuesto al de Harris, es decir campo magnético nulo, parece ser igualmente simple de estudiar.

El trabajo de Harris, presenta una elegante aplicación del método variacional de Rayleigh-Ritz, para la determinación aproximada de las frecuencias características de la inestabilidad. El método de Harris se presta igualmente bien para tratar el caso  $B = 0$ , y vamos a reproducirlo aquí.

Sea  $n_0$  el máximo valor de  $n(y)$ . Podemos escribir  $n = n_0 f(y)$  siendo  $1 \geq f(y) \geq 0$ . Conviene escribir la (II,33) mediante los siguientes operadores

$$\Delta \equiv \frac{d^2}{dy^2} - k^2, \quad \Delta_f \equiv \frac{d}{dy} \left( f \frac{d}{dy} \right) - k^2 f, \quad \mathcal{L} \equiv \Delta - \lambda \Delta_f,$$

donde  $\lambda$  es el parámetro que hemos definido en pg. 20 multiplicado por  $\omega_{p_0}^2 = 4\pi e^2 n_0 / m$ . Con esta notación la (II,33) es

$$(A3,1) \quad \mathcal{L} \varphi = 0$$

Para perfiles de densidad que tiendan a valores constantes en el infinito,  $\varphi \rightarrow 0$  para  $y \rightarrow \pm \infty$ . Sean  $\varphi, \psi$  funciones que cumplen esta condición, entonces es fácil ver que se cumple la relación

$$(A3,2) \quad \langle \psi, \mathcal{L} \varphi \rangle = \langle \mathcal{L} \psi, \varphi \rangle$$

es decir el operador  $\mathcal{L}$  es autoadjunto. De la (A3,1) se deduce

$$(A3,3) \quad \lambda = \frac{\langle \varphi^*, \Delta \varphi \rangle}{\langle \varphi^*, \Delta_f \varphi \rangle} = \frac{\omega_{p_0}^2}{(\omega - ku)^2} - \frac{\left(\frac{m}{M+}\right) \omega_{p_0}^2}{\omega^2}$$

La (A3,3) corresponde a la relación de dispersión de la inestabilidad de dos haces con una frecuencia de plasma modificada.

El miembro de la izquierda contiene un promedio de la densidad, ligado con  $|\varphi'|^2 + k^2 |\varphi|^2$ , cantidad que es proporcional a la densidad de energía electrostática de la perturbación. El menor valor posible para  $\lambda$  es 1, y corresponde a la inestabilidad de dos haces para un plasma con densidad constante.

Las ecuaciones (A3,1) y la (A3,3) están vinculadas por un principio variacional. La función  $\varphi$  que hace mínimo el valor de  $\lambda$  es solución de (A3,1). Si se varía la función  $\varphi$  en  $\epsilon \theta$  donde  $\epsilon$  es un infinitesimo de primer orden y  $\theta$  una función que se anula para  $y \rightarrow \pm \infty$ , se obtiene la siguiente variación para  $\lambda$

$$\delta \lambda = \epsilon \left\{ \frac{\langle \theta^*, \Delta \varphi \rangle + \langle \theta, \Delta_f \varphi^* \rangle}{\langle \varphi^*, \Delta_f \varphi \rangle} - \frac{\langle \varphi^*, \Delta \varphi \rangle}{\langle \varphi^*, \Delta_f \varphi \rangle^2} [\langle \theta^*, \Delta_f \varphi \rangle + \langle \theta, \Delta_f \varphi^* \rangle] \right\} + O(\epsilon^2)$$

donde hemos desarrollado la (A3,3) y hemos tenido en cuenta la

linealidad de los operadores y la (A3,2). En verdad,  $\mathcal{G}$  contiene dos funciones independientes, la parte real y la parte imaginaria. Por ello es posible operar como si  $\mathcal{G}$  y  $\mathcal{G}^*$  fueran independientes. Para que  $\lambda$  tenga un valor estacionario se debe cumplir

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\delta A}{\epsilon} = 0$$

de donde poniendo  $\theta = 0$ , se deduce

$$\langle \theta^*, \Delta \varphi \rangle - \lambda \langle \theta^*, \Delta_f \varphi \rangle = 0$$

es decir  $\langle \theta^*, \mathcal{L} \varphi \rangle = 0$ . Esta ecuación debe cumplirse para cualquier  $\theta^*$ , de modo que  $\lambda$  toma su valor mínimo, para una función  $\varphi$  tal que  $\mathcal{L} \varphi = 0$ .

La función  $F(\omega, k) = \omega_{p0}^2 \left[ (\omega - ku)^2 + \frac{m/M}{\omega^2} \right]$  tiene un polo en  $\omega = 0$  y otro en  $\omega = ku$ . Entre los polos tiene un mínimo,  $F_c$ , como en la figura 8 (III, P.3),

$$(A3,5) \quad F_c = \omega_{p0}^2 \frac{m}{M} \left\{ 1 + \left( \frac{1}{m} \right)^{2/3} \right\}^2 / k^2 u^2$$

Si la recta  $F = \lambda$ , corta la curva  $F$  por arriba del mínimo, la relación de dispersión tiene cuatro raíces reales. En cambio si la corta por debajo, habrá dos raíces complejas conjugadas. De manera que si  $F_c$  es menor que  $\lambda$  el sistema es estable y viceversa. El valor de  $\lambda$  puede ser determinado por aproximaciones sucesivas como en el método de Rayleigh-Ritz. Se estima la (A3,3) mediante funciones de prueba que satisfagan las condiciones de contorno y que contengan parámetros libres. Una vez calculadas las integrales de (A3,3) se determinan los parámetros de manera que  $\lambda$  tome el menor valor posible. De este modo funciones de prueba se aproximan a la función  $\varphi$  solución de la ecuación (A3,1).

Apéndice nº 4

Propiedades de la relación de dispersión de los modos electrostáticos con  $k = 0$  en un plasma frío en presencia de campo magnético.

Vamos a introducir las siguientes notaciones para abreviar la escritura de las fórmulas

$$K_{1,2} = k \sqrt{\frac{1 - \frac{1}{(\omega \mp k)^2}}{1 - \frac{1}{(\omega \mp k)^2 h^2}}} \equiv k \sqrt{\xi_{1,2}},$$

las raíces cuadradas están tomadas siempre con parte real positiva (o con parte imaginaria negativa). Pondremos también:

$$\xi_{1,2} = \frac{\omega_{1,2}^2}{\omega_{1,2}^2} \quad \omega_{1,2} = 1 - \frac{1}{(\omega \mp k)^2}, \quad \omega_{1,2}^* = 1 - \frac{1}{(\omega \mp k)^2 - h^2}$$

La relación de dispersión se escribirá del siguiente modo (A4,1)

$$\sqrt{\xi_1} W_1 + \sqrt{\xi_2} W_2 = 0$$

Conviene tener presente que  $\xi_{1,2}$  puede adoptar también las formas siguientes

$$(A4,2) \quad \xi_{1,2} = \frac{1 - \frac{h^2}{(\omega \mp k)^2}}{1 - \frac{h^2}{(\omega \mp k)^2 - 1}} = 1 + \frac{h^2}{(\omega \mp k)^2 [(\omega \mp k)^2 - (h^2 + 1)]}$$

Se pueden demostrar fácilmente, aunque mediante un algebra un tanto tediosa, las siguientes propiedades de la (A4,1),

a) Rama inferior,  $h < 1$ , modos inestables.

Los modos comprendidos en el intervalo  $(k_1, k_2)$  son inestables con  $\omega$  imaginario puro. Sea  $\omega = i\omega_2$ , donde

$$\omega_2^2 = \frac{1}{2} \left[ (1+h^2)(1+h^2 k^2) - \frac{1+h^2}{2} - k^2 \right]. \quad \text{En este caso resulta } \xi_1 = \xi_2^*,$$

$\omega_1 = \omega_2^*$ , (por lo tanto también  $K_1 = K_2^*$ ), de manera que  $(\sqrt{\xi_1} W_1)^* = (\sqrt{\xi_2} W_2)$ . Vamos a ver ahora que para este rango de valores de  $k$ , resulta ser  $\text{Re}[\sqrt{\xi_1} \omega_1] = 0$  de manera que los correspondientes valores de  $\omega$ , obtenidos de la (IV,7), satisfacen la (A4,1). En efecto se obtiene

$$\xi_1 = \frac{1 - k^2}{1 + h^2} \frac{(a+ib)^2}{a^2+b^2} \quad \omega_1 = \frac{-i(a-ib)}{(1+h^2)(1+b/k^2)}$$

donde  $a = 4k\omega_2 > 0$ , y  $b = -k^2(\sqrt{(1+h^2)(1+h^2 k^2 - a^2)} - 4k^2)$ . Entonces

$$(A4,3) \quad K_1 = k \sqrt{\xi_1} = k \sqrt{\frac{1-h^2}{1+h^2}} \frac{a+ib}{a^2+b^2}$$

y por lo tanto  $\text{Re}(\sqrt{\xi_1} \omega_1) = 0$ .



b)  $\omega$  real.

Las consideraciones que siguen valen bajo la hipótesis que  $\omega$  sea real. En este caso la (A4,1) se puede satisfacer solo si  $\xi_1 > 0$  y  $\xi_2 > 0$ , o bien  $\xi_1 < 0$  y  $\xi_2 < 0$ . Cumplida esta exigencia es necesario que  $\omega_2/\omega_1 < 0$ . Supongamos ahora que  $-\frac{\omega_2}{\omega_1} > 0$ , entonces podemos introducir esta cantidad dentro de las raíces cuadradas de la (A4,1) escribiendo

$$1 = \sqrt{\frac{\xi_1}{\xi_2}} \left( -\frac{\omega_1}{\omega_2} \right) = \sqrt{\frac{\xi_1}{\xi_2} \frac{\omega_1^2}{\omega_2^2} \frac{\omega_2^2}{\omega_1^2}} = \sqrt{\frac{\xi_1 \omega_1}{\xi_2 \omega_2}}$$

es decir que debe ser

$$\frac{\xi_1 \omega_1}{\xi_2 \omega_2} = 1$$

Pero esta última igualdad se cumple siempre como es fácil de verificar directamente, a partir de las definiciones y empleando

$$\text{de la relación } (1+k^2)(\omega^2+k^2-\frac{k^2}{2}) = (\omega^2-k^2)^2$$

Resulta entonces que, si  $\omega$  es real, la condición necesaria y suficiente para que los modos sean permitidos es que  $\omega_2/\omega_1 < 0$ .

Es de interés, entonces determinar cuando ocurren los cambios de signo de esta cantidad. Se encuentra que

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{h^2 A - 2\omega k}{h^2 A + 2\omega k}$$

siendo  $A = \frac{k^2+1}{2} - (\omega^2+k^2)$ . Conviene averiguar, por lo tanto, cuando  $h^2 A \geq 2\omega k$ . Encontramos que  $h^4 A^2 - 4\omega^2 k^2 = (1-h^4)\psi(h,k)$  donde definimos  $\psi(h,k) = \frac{1}{4}(h^2-4\omega k)(h^2+4\omega k)$ .

Los ceros de  $h^2 - 4\omega k = 0$ , para cada valor de  $h$  están

$$\begin{aligned} k_1 &= \frac{1}{2}(\sqrt{h^2+1} - 1) && \text{( simple )} \\ k_2 &= \frac{1}{2} && \text{( doble )} \\ k_3 &= \frac{1}{2}(\sqrt{h^2+1} + 1) && \text{( simple )} \end{aligned}$$

Se constata que, si  $\omega$  es real,  $k_1$  es un cero para la rama superior y  $\omega_1/\omega_2$  cambia de signo, para  $h < \sqrt{3}$ , en  $k_1$ , pero ya no lo hace si  $h > \sqrt{3}$ . En cambio  $k_2, k_3$  son ceros para la rama inferior. Cuando  $h > \sqrt{3}$ , entonces también puede cambiar de signo  $\omega_1/\omega_2$  en  $k_1$  para la rama inferior.

b<sub>1</sub>) Para la rama superior es siempre  $A < 0$ , entonces si  $h < 1$  los modos son permitidos a partir de  $k \geq k_1$ . Pero si, en cambio,  $1 < h < \sqrt{3}$ , las raíces son prohibidas para  $k > k_1$ , y permitidas si  $k < k_1$ . Si  $h > \sqrt{3}$ ,  $\omega_1/\omega_2$  no cambia de signo en  $k_1$ , y es

siempre positiva

b) Para la rama inferior  $\psi$  es positiva para  $k < k_3$  y negativa para  $k > k_3$ . Si  $h < 1$ , las soluciones  $\omega$  reales correspondientes a  $k < k_1$  son espurias, así como las comprendidas en el rango  $(k_2, k_3)$ . En cambio son permitidos los modos estables para  $k > k_3$ . Si  $h = 1$  son prohibidas en cambio las raíces  $\omega$  para  $k > k_3$  y permitidas las que corresponden a  $k < k_3$ . En el intervalo  $1 < h < \sqrt{3}$ , el límite inferior para el rango de modos estables permitidos está dado por  $k''$ , puesto que para  $k < k''$ ,  $\omega$  deja de ser real. Desarrollando la (14,1) en un entorno de  $k''$  se puede verificar que las raíces sobre-estables son espurias.

Si  $h > \sqrt{3}$  entonces se puede verificar que en  $k_1$  cambia el signo de  $w_1/w_2$ , siendo prohibidas las raíces estables con  $k < k_1$ .

El control de las precedentes afirmaciones se ve facilitado si se tiene en cuenta que:

$$\text{rama superior} \quad \omega_s(k_1) = \begin{cases} k_3 = k_1 + 1 & \text{si } h < \sqrt{3} \\ \sqrt{5k_1^2 + 2k_1} & \text{si } h > \sqrt{3} \end{cases}$$

$$\text{rama inferior} \quad \begin{aligned} \omega_s(k_3) &= \sqrt{5k_3^2 - 2k_3} \\ \omega_i(k_1) &= \begin{cases} \sqrt{5k_1^2 + 2k_1} & \text{si } h < \sqrt{3} \\ k_3 = k_1 + 1 & \text{si } h > \sqrt{3} \end{cases} \\ \omega_i(k_3) &= k_1 = k_3 - 1 \end{aligned}$$

Si  $\omega$  es complejo, los valores para la rama superior e inferior son conjugados,  $\omega_s = \omega_i^*$  y por lo tanto también  $w_{1s} = w_{1i}^*$ ,  $\sqrt{\zeta_{1s}} = (\sqrt{\zeta_{1i}})^*$  etc. Se concluye entonces que si

$$\text{también} \quad \sqrt{\zeta_{1s}} w_{1s} + \sqrt{\zeta_{2s}} w_{2s} \neq 0$$

$$\sqrt{\zeta_{1i}} w_{1i} + \sqrt{\zeta_{2i}} w_{2i} \neq 0$$

es decir que si  $\omega_s(k)$  no es solución tampoco lo es  $\omega_i(k)$ .

c) Rama superior

Conviene ver en detalle como la (14,1) se comporta al pasar de un rango de **valores** de  $k$  con soluciones a uno sin soluciones. **Tomemos** al efecto la rama superior  $\omega_s$  y desarrollemos la (14,1) alrededor de  $k''$ . Sea  $k = k_1 + \varepsilon$ , se obtiene

$$\sqrt{\zeta_{1s}} \approx \frac{2}{h} \sqrt{\frac{(1-h)^2 \varepsilon}{h^2 + 1 + 1 - h^2}}, \quad w_1 \approx -\frac{h^2}{1 - h^2}$$

$$\sqrt{\zeta_2} \approx \frac{h}{2} \sqrt{\frac{(h^2+1) + 1 - h^2}{(1+h^2)^2 \epsilon}} \quad \omega_2 \approx \frac{4(h^2+1)\epsilon}{\sqrt{h^2+1} + 1 - h^2}$$

en consecuencia

$$\sqrt{\zeta_1} \omega_1 = \begin{cases} \frac{\pm 2hi \sqrt{|\epsilon|}}{\sqrt{h^2+1} + 1 - h^2}, & \epsilon < 0 \\ \frac{\pm 2h \sqrt{|\epsilon|}}{\sqrt{h^2+1} + 1 - h^2}, & \epsilon > 0 \end{cases}$$

el signo superior para  $h < 1$ ; el signo inferior para  $h > 1$ ,

$$\sqrt{\zeta_2} \omega_2 = \begin{cases} \frac{-2hi \sqrt{|\epsilon|}}{\sqrt{h^2+1} + 1 - h^2}, & \epsilon < 0 \\ \frac{2h \sqrt{|\epsilon|}}{\sqrt{h^2+1} + 1 - h^2} \end{cases}$$

para  $0 < h < \sqrt{3}$ ; si  $h > \sqrt{3}$  ambas expresiones van multiplicadas por  $-i$ .

Por lo tanto se comprueba que para  $h < 1$  solo hay soluciones  $\omega_5$  para  $k > k_1$ , y los correspondientes  $k_{1,2}$  son reales. Para  $\sqrt{3} > h > 1$  solo hay soluciones  $\omega_5$  con  $k < k_1$  y los  $k_{1,2}$  son imaginarios. Para  $h > \sqrt{3}$  no hay soluciones en el entorno de  $k_1$  para  $\omega_5$ .

Apéndice nº 5

Algunas fórmulas asintóticas relativas a la sección VI, P.4

El siguiente método, debido a H.F. Willis (Phil. Mag. 39, 455, (1948).) permite hallar expresiones asintóticas para integrales del tipo

$$\int_0^{\infty} F(x,p) f(p) dp$$

para  $x \gg 1$ , donde  $F(x,p)$  es una función oscilante del tipo  $\sin(px)$ ,  $J_0(px)$ , etc. Se demuestra que si

$$(A5,1) \quad \int_0^{\infty} F(x,p) e^{-\alpha p} dp = \sum_{k=0}^{\infty} A_k \alpha^{-k},$$

entonces

$$(A5,2) \quad \int_0^{\infty} f(p) F(x,p) dp = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k f^{(k)}(0) A_k$$

donde esta última serie generalmente es asintótica,

Brevemente, y sin pretensiones de rigor matemático, el procedimiento a seguir es el siguiente. Partiendo de la integral

$$I(\alpha, x) = \int_0^{\infty} f(p) F(x,p) e^{-\alpha p} dp,$$

se admite que la  $f(p)$  tenga un desarrollo de Taylor alrededor del origen. Entonces se puede poner:

$$I(\alpha, x) = \int_0^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{p^k}{k!} f^{(k)}(0) F(x,p) e^{-\alpha p} dp =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \int_0^{\infty} F(x,p) p^k e^{-\alpha p} dp$$

supone que también  $\phi(\alpha) = \int_0^{\infty} F(x,p) e^{-\alpha p} dp$  admite un desarrollo en serie de potencias de  $\alpha$ .

$$\phi(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \alpha^{-n}, \quad A_n = \frac{\phi^{(n)}(\alpha)}{n!}$$

Derivando  $n$  veces respecto de  $\alpha$  se obtiene

$$\int_0^{\infty} F(x,p) p^n e^{-\alpha p} dp = (-1)^n \phi^{(n)}(\alpha),$$

por lo tanto

$$I(\alpha, x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k f^{(k)}(0) \frac{\phi^{(k)}(\alpha)}{k!}$$

Tomando el límite  $\alpha \rightarrow 0$  queda demostrada (A5,2). La exigencia de ser  $F(x,p)$  una función oscilante se debe a la necesidad

de asegurar la convergencia de la integral (A5,2) cuando  $x \rightarrow \infty$ . Si  $F(x,p) = \sin(px)$ ,  $\cos(px)$ , y si  $|f(p)|$  es integrable en  $(0, \infty)$ , el lema de Riemann-Lebesgue nos asegura que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} f(p) F(x,p) dp = 0$$

Podemos escribir entonces

$$(A5,3) \quad \int_0^{\infty} f(p) \sin px dp \approx \frac{f(0)}{x} - \frac{f'(0)}{x^3} + \frac{f''(0)}{x^5} + \dots,$$

$$(A5,4) \quad \int_0^{\infty} f(p) \cos px dp \approx -\frac{f'(0)}{x^2} + \frac{f''(0)}{x^4} - \frac{f'''(0)}{x^6} + \dots,$$

para lo cual se han usado las integrales

$$\int_0^{\infty} e^{-\alpha p} \sin xp dp = \frac{x}{\alpha^2 + x^2} = \frac{1}{x} \left( 1 - \frac{\alpha^2}{x^2} + \frac{\alpha^4}{x^4} + \dots \right),$$

$$\int_0^{\infty} e^{-\alpha p} \cos xp dp = \frac{\alpha}{\alpha^2 + x^2}$$

Si se desea obtener un desarrollo asintótico para

$$\int_0^{\infty} f(p) \frac{\sin xp}{p} dp$$

se puede partir de la integral

$$\int_0^{\infty} e^{-\alpha p} \frac{\sin xp}{p} dp = \text{arctg} \left( \frac{x}{\alpha} \right) = \frac{\pi}{2} - \frac{x}{\alpha} + \frac{\alpha^3}{3x^3} - \frac{\alpha^5}{5x^5} + \dots,$$

y se obtiene ( $x \gg 1$ )

$$(A5,5) \quad \int_0^{\infty} f(p) \frac{\sin xp}{p} dp = \frac{\pi}{2} f(0) - \frac{f'(0)}{x} + \frac{f''(0)}{3x^3} - \frac{f'''(0)}{5x^5} + \dots$$

-----

AGRADECIMIENTOS

Deseo expresar mi agradecimiento en primer lugar a mi colega y amigo Dr. A. Caruso del "Laboratorio Gas Ionizzati" de Frascati (Roma) con quien comenzamos a trabajar en el tema que constituye hoy el argumento de mi tesis. Muchas fértiles sugerencias conservé de la época de nuestra colaboración.

En general deseo agradecer aquí a los profesores de la "Scuola di Perfezionamento in Fisica" de la Universidad de Roma, y a las autoridades y colegas del "Laboratorio Gas Ionizzati", quienes tan cordialmente me iniciaron en la Física del Plasma. En especial modo deseo agradecer al Prof. B. Bertetti a quien debo tantas valiosas enseñanzas.

Conste también mi agradecimiento, por las becas y sostenimiento financiero que hicieron posible mi trabajo en Italia, a las siguientes instituciones: Escuela de Perfeccionamiento en Física de la Universidad de Roma, Comitato Nazionale per l'Energia Nucleare, y EURATOM.

Debe hacer constar ahora mi agradecimiento al Prof. J. Westerkamp de la Universidad de Buenos Aires por su apoyo y constante estímulo en mi trabajo.

Debe destacar la colaboración de Julio Gratton del Departamento de Física de la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, quien trabajamos recientemente sobre los temas contenidos en la cuarta sección de esta tesis.

En general voy en reconocimiento a todos los integrantes del nuevo grupo de física del plasma del Departamento de Física de nuestra Facultad, cuya grata atmósfera de estudio me ha estimulado a completar esta tesis.

Agradezco al Instituto de Cálculo de nuestra Facultad por haberme facilitado el uso de la computadora electrónica.

RESUMEN

El argumento de esta tesis es la teoría de las inestabilidades por deslizamiento en los plasmas. Se estudia la estabilidad de flujos paralelos de plasmas, con velocidad variable en una dirección transversal al flujo. Este tipo de problemas ha sido estudiado en el régimen magnetohidrodinámico por diversos autores, pero solo recientemente se ha encarado su estudio, para otros regímenes de frecuencias, y para otros modelos de plasmas, como los que responden a la ecuación de Boltzmann-Vlasov o a las ecuaciones para dos fluidos, por el autor y otros ( ver ref. 29,31,32,34, de la Secc.I ).

La mayor parte de los modos de oscilación estudiados en este trabajo son de carácter electrostático. El interés en este tipo de problemas se deriva, en parte por su vinculación con cuestiones relativas a la física del espacio interplanetario, en parte por su relación con los problemas de difusión anómala de partículas cargadas a través de un campo magnético, como lo han demostrado los trabajos de D'Angelo ( ref. 33 y 34, Secc. I ), y en parte, también, porque aumentan el caudal de información que se va acumulando acerca de inestabilidades en plasmas no uniformes. Luego de una breve introducción donde se expone el motivo del trabajo y su conexión con otros problemas afines, la sección II contiene la deducción de las ecuaciones de la inestabilidad por deslizamiento para modos de oscilación electrostáticos. El plasma se supone sin colisiones y se admite la presencia de un campo magnético externo paralelo a la dirección del flujo. Se adopta una geometría plana para el problema. Se consideran funciones de distribución sin dispersión de velocidades transversal al flujo. Los perfiles de densidad y velocidad no están sujetos a otras restricciones que las de tender a ser constantes en el infinito. La ecuación (II,29) contiene las soluciones de una variedad de problemas que se examinan en las secciones siguientes de la tesis.

La sección III contiene el estudio de esta inestabilidad en plasmas fríos, sin campo magnético. En III F.1 se obtiene una serie de propiedades generales de las frecuencias características, válidas para cualquier perfil de velocidades. Se

demuestra entre otras cosas que la máxima velocidad de crecimiento no puede superar el valor  $\frac{1}{2} \frac{v}{c}$ . Para el caso de un haz de partículas que atraviesa un plasma en reposo, siendo diferentes las densidades del haz y del plasma, se encuentra una relación de dispersión semejante a la de "dos-haces" para iones y electrones. El papel del cociente de masas en esta última, es jugado, en el caso de la inestabilidad por deslizamiento por el cociente de densidades, haz - plasma. En la sección III, P.3 se estudia un perfil de velocidades para un chorro de plasma. Debido a que la zona de influencia de la oscilación electrostática de cada superficie de discontinuidad, se extiende sobre una distancia del orden de la longitud de onda paralela al flujo, se encuentra que, si la longitud de onda es mucho menor que el diámetro del chorro las oscilaciones de ambas superficies son independientes y se vuelven a obtener los resultados de III,P.2. En cambio cuando la longitud de onda es mayor que el diámetro del chorro se constata que la velocidad de crecimiento de la inestabilidad disminuye (ver fig.10). Se estudian luego brevemente los modos de oscilación de un chorro cilíndrico. Se comprueba que la interferencia de las oscilaciones de la superficie del chorro no consigue atenuar la inestabilidad de los modos sin simetría azinutal. En la secc.III, P.4 se analiza la relación de dispersión para dos haces adyacentes que viajan en sentido contrario. Las figs. 13 a 16 representan las frecuencias características para diversos valores del diámetro de los chorros. En III, P.5 se trata la estabilidad de una zona de transición entre dos regiones con velocidad constante.

La sección IV contiene un análisis de la relación de dispersión para un perfil en escalón para un plasma frío con campo magnético externo. Se demuestra la influencia estabilizadora de campos magnéticos fuertes ( ver figs. 22, 27, y 28 ). Se dan las regiones de existencia de modos de oscilación, en un plano cuyos ejes coordenados representan el número de onda longitudinal y el campo magnético, eliminando soluciones espurias que no satisfacen las condiciones de contorno( ver figs.20 y 21 ), Se encuentran también modos estables que representan ondas que se propagan perpendicularmente a la superficie de discontinuidad



cuando  $\omega_{ce} > \omega_p$ . Se estudia además en detalle la distancia de penetración del campo eléctrico de las oscilaciones superficiales (ver figs. 23, 24).

La sección V P.1 contiene una breve discusión del mecanismo de la inestabilidad, en ausencia de campo magnético, señalándose la presencia de un proceso de acumulación de cargas eléctricas en superficie. En V P.2 se consideran los modos de oscilación de un perfil en escalón incluyendo un término de presión isotropa en las ecuaciones dinámicas de los electrones. La relación de dispersión se divide en dos ramas, una de las cuales surge con continuidad, a partir de la que corresponde a un plasma frío, aumentando progresivamente la temperatura. En esta rama la temperatura tiende a atenuar la inestabilidad por deslizamiento. La otra rama corresponde a la presencia de un mecanismo hidrodinámico de inestabilidad análogo al que, en los fluidos neutros, tiene lugar en la inestabilidad de Kelvin-Helmholtz. La máxima velocidad de crecimiento es, en esta rama, igual a  $u_p/2$ , mayor que en el caso frío. Sin embargo estos modos tienen una zona de influencia mucho menor que los modos de la otra rama. La amplitud del campo eléctrico de perturbación tiende exponencialmente a cero cuando la temperatura del plasma disminuye.

En la sección VI se estudian flujos de plasma, sin campo magnético, descritos por funciones de distribución con dispersión de velocidades paralela al flujo. En VI,P.1 se demuestran algunos teoremas generales de estabilidad para estas funciones de distribución. El caso de una discontinuidad en la función de distribución, tratado en VI,P.2 conduce a una relación de dispersión formalmente idéntica a la de Landau, si se toma el promedio de las funciones de distribución a ambos lados de la discontinuidad como la función de distribución del problema de Landau. Se exponen y resumen luego las bien conocidas propiedades de la relación de dispersión de Landau, empleando un método de análisis diferente del acostumbrado, basado sobre la transformación de Fourier en el espacio de las velocidades, los resultados se discuten desde el punto de vista de la inestabilidad por deslizamiento ( secc.VI, P.3 y P.4 ).

En los apéndices se discuten brevemente algunos temas vinculados con el texto, o bien se resumen algunos cálculos demasiado largos para ser reproducidos completamente en el texto. Cabe mencionar, en particular, el apéndice nº 2 donde se deducen las ecuaciones para los modos de oscilación electromagnéticos de la inestabilidad por deslizamiento para flujos de plasma relativísticos. Se discute también la correspondiente relación de dispersión para el perfil en escalón .

*J. P. Ventura*      *Jaime Juárez*

---

-----