

Tesis de Posgrado

Efectos de términos anarmónicos de la fuerza cuadrupolar en los isótopos de Cd

Dussel, Guillermo Gaspar

1967

Tesis presentada para obtener el grado de Doctor en Ciencias Físicas de la Universidad de Buenos Aires

Este documento forma parte de la colección de tesis doctorales y de maestría de la Biblioteca Central Dr. Luis Federico Leloir, disponible en digital.bl.fcen.uba.ar. Su utilización debe ser acompañada por la cita bibliográfica con reconocimiento de la fuente.

This document is part of the doctoral theses collection of the Central Library Dr. Luis Federico Leloir, available in digital.bl.fcen.uba.ar. It should be used accompanied by the corresponding citation acknowledging the source.

Cita tipo APA:

Dussel, Guillermo Gaspar. (1967). Efectos de términos anarmónicos de la fuerza cuadrupolar en los isótopos de Cd. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad de Buenos Aires. http://digital.bl.fcen.uba.ar/Download/Tesis/Tesis_1302_Dussel.pdf

Cita tipo Chicago:

Dussel, Guillermo Gaspar. "Efectos de términos anarmónicos de la fuerza cuadrupolar en los isótopos de Cd". Tesis de Doctor. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad de Buenos Aires. 1967. http://digital.bl.fcen.uba.ar/Download/Tesis/Tesis_1302_Dussel.pdf

**EFFECTOS DE TERMINOS ANARMONICOS DE LA FUERZA
CUADRUPOLAR EN LOS ISOTOPOS DE Cd**

Guillermo Gaspar Dussel

1967

UNIVERSIDAD NACIONAL DE BUENOS AIRES
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Departamento de Física

EPECTOS DE TERMINOS ANARMONICOS DE LA FUERZA
CUADRUPOLO EN LOS ISOTOPOS DE C4

Guillermo Gaspar Dussel

Tesis presentada para optar al título
de Doctor de la Universidad de Buenos Aires

Director: Daniel R. Bes

Daniel Bes

1967

1302 4.
q. 2

AGRADECIMIENTOS

El presente trabajo se inició mientras su autor se desempeñaba como docente en el Departamento de Física de la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales de la Universidad Nacional de Buenos Aires y fue terminado mientras desarrollaba tareas de investigación en la Fundación Bariloche.

Desea hacer llegar a las autoridades que oportunamente dirigieron el Departamento de Física su agradecimiento por el agradable clima de trabajo que supieron crear y a la Fundación Bariloche la hospitalidad generosamente brindada, que hiciera posible el completo desarrollo de este trabajo.

Es su propósito agradecer al Dr. D. R. Bes, quien sugiriera el tema del presente estudio, y que sin cuya invalorable colaboración jamás podría haber llegado a feliz término. Desea también mencionar a sus compañeros en el grupo de Física Nuclear: R. P. Ferazzo, J. Gratton y E. Broglia.

Todo el trabajo numérico fue realizado en la computadora Ferranti-Mercury del Instituto de Cálculo de la UNBA, a cuyas autoridades, en especial a V. Duran, cuya ayuda en el trabajo de programación fue inestimable, desea también hacer extensivas sus expresiones.

RESUMEN

El presente trabajo ha tenido como objeto extraer conclusiones sobre la influencia de los términos anarmónicos del hamiltoniano cuadrupolar en los núcleos esféricos.

Los cálculos se realizaron para los isótopos del Cd por la gran cantidad de información experimental que de ellos se conoce y por la ventaja que representa el hecho que tengan dos protones menos que capa cerradas, lo que permite tratarlos en acoplamiento intermedio.

En la introducción y en la primera sección se hace un pequeño resumen del método de cuasibosones, que es el método usual de tratar los estados colectivos de los núcleos esféricos. En la sección 2 se estudia una manera de introducir los términos anarmónicos de tercer orden. En la sección 3 se ve el modelo de Ras como fuente de anarmonicidades, mientras que en la sección 4 se expone una manera alternativa para su tratamiento. Se verifica que ambos métodos, el modelo de Ras y la descripción fenomenológica presentan ciertas características comunes: tales como el refuerzo entre las transiciones debidas a la parte armónica y a la parte anarmónica del operador cuadrupolar para el momento estático del primer estado dos más, y las contribuciones con signo distinto para las transiciones prohibidas en la aproximación armónica.

En la sección 5 se calculan los primeros estados excitados utilizando el modelo de Ras y se verifica que con la excepción del nivel 2^3 y las transiciones M1 se obtiene un acuerdo muy razonable con los resultados experimentales. A partir de una estructura microscópica se calculan los coeficientes que dan la magnitud de los términos cúbicos; puede observarse que aparecen en un rango razonable, aunque su valor es una función muy dependiente de las energías de los niveles de partícula independiente y por lo tanto no se pueden predecir con certeza cambios de núcleo a núcleo. Se estudia también la posibilidad de superponer el modelo de Ras con términos anarmónicos para los neutrones, y se observa que eso permitiría dar una

descripción bastante coherente con los resultados observados al variar el número de masa A , para ello sería necesario que las energías de los niveles de neutrones fuesen diferentes de los resultados utilizados previamente⁶⁾.

INDICE

Agradecimientos

Resumen

Introducción	1
1. Tratamiento de la fuerza cuadrupolar	7
2.- Introducción de términos anarmónicos	12
3.- Modelo de Ras	15
4.- Tratamiento de términos cúbicos	24
5.- Cálculos realizados	
1.- Aplicación del Modelo de Ras a los isótopos del Cd	31
2.- Introducción de términos anarmónicos en los neutrones	41
3.- Cálculo microscópico de $\epsilon^{(1)}$ y $\epsilon^{(4)}$.	45

Conclusiones

Apéndice 1.- Características de los operadores de creación de fermiones

Apéndice 2.- Cálculo de los elementos de matriz de una fuerza gaussiana

Apéndice 3.- Elementos de matriz de los operadores de probabilidades de transición

Referencias.

INTRODUCCION

El problema que se plantea en física nuclear de bajas energías es el de averiguar la estructura del núcleo atómico, el cual está compuesto por nucleones entre los que existen interacciones; las que se pueden conocer a partir de experiencias con sistemas de dos nucleones.

El problema de encontrar la estructura del núcleo a partir de las fuerzas internucleónicas es actualmente irresoluble en forma general, pero aún cuando fuese hallada una solución, su utilidad sería escasa dado que ella no nos daría ideas intuitivas del comportamiento de los nucleones y de las características nucleares. Estas ideas sólo se podrán obtener a partir de versiones simplificadas de lo que es el núcleo; a partir de las llamadas capas nucleónicas.

Estas versiones simplificadas del comportamiento de los nucleones son esencialmente maneras de reducir los grados de libertad del problema, utilizando para ello las evidencias experimentales que permiten en ciertos casos esas simplificaciones. Por ejemplo, se conoce que existen ciertos números de nucleones que corresponden a estructuras muy estables, lo que se llaman números mágicos o capas cerradas. Si se "agregan" nuevos nucleones, ellos van en primera aproximación, un campo cafrico que representa el efecto medio de la interacción con las capas cerradas, lo cual significa que en el hamiltoniano nuclear debe haber términos de la forma

$$H_{\text{part}} = \sum_{ejm} (E_{ej} - N) a_{ejm}^{\dagger} b_{ejm} \quad (1)$$

donde los operadores a_{ejm}^{\dagger} son operadores de creación de fermiones con momento angular j y proyección m .

Este hamiltoniano describe muy bien las interacciones existentes en núcleos en los que el número de protones y neutrones correspondan a capas cerradas, o los núcleos en los que hay un agujero o una partícula además de las capas cerradas.

Las soluciones de "partícula independiente" están degeneradas, y por lo tanto pequeñas interacciones residuales introducen correlaciones importantes. Por lo tanto si el número de partículas agregadas va en aumento, las fuerzas residuales entre los nucleones van adquiriendo una importancia creciente.

Experimentalmente se ha observado que en los núcleos par-par (es decir que el número de protones y el de neutrones sean pares) el estado fundamental tiene momento angular cero; y que la densidad de estados en la vecindad del estado fundamental es prácticamente constante. Este último efecto es una manifestación de la importancia de las fuerzas residuales, que hacen aparecer un "gap" en el espectro nuclear, porque de acuerdo al hamiltoniano de partículas independientes (1) el número de estados debe ir aumentando a medida que vamos agregando partículas.

Para explicar la existencia del "gap" es necesario introducir una fuerza de corto rango. Racah⁽¹⁾ resolvió el problema de una fuerza $\delta(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$ en una configuración $(j)^N$ y también el de la llamada fuerza de apareamiento, es decir

$$H_{\text{apareo}} = -\frac{G}{4} \sum_{j_1, j_2} a_{j_1}^{\dagger} a_{j_2}^{\dagger} a_{j_2} a_{j_1} \quad (2)$$

Los espectros resultantes de estas fuerzas son muy semejantes, y sus autofunciones idénticas, apareciendo en ambos casos un nivel con $I = 0$ mucho más ligado que los otros estados.

Para utilizar la fuerza de apareamiento en el caso nuclear es necesario hallar la solución para varios niveles no degenerados.

Para simplificar el tratamiento se supone que hay un solo tipo de partículas, dado que se desprecia la interacción de apareamiento neutrón-protón.

Primeramente se realiza una transformación canónica (transformación de Bogoliubov-Valatin) para introducir las cuasi-partículas

$$B^{\dagger} = (-) \quad (3a)$$

$$/ \quad C^{\dagger} = (-) \quad B_{\alpha}^{\dagger} = \quad (3b)$$

$$- \quad 1 \quad (3c)$$

Las relaciones de anticommutación de los dos operadores se pueden deducir a partir de las soluciones entre los operadores obteniéndose

$$\{ \quad \quad \quad \} = 0 \quad (4a)$$

$$\quad \quad \quad \quad (4b)$$

La transformación pueda ser elegida de tal manera que el estado fundamental corresponda al vacío de cuasi-partículas, es decir debe cumplir que $\langle 0 | 0 \rangle = 0$. Una forma posible de conseguir que se cumpla esta condición es reemplazando el vacío $|0\rangle$ por

$$|0\rangle = N \prod_{\alpha} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \left(\begin{matrix} 1 \\ 1 \end{matrix} \right) \begin{matrix} 1 \\ 1 \end{matrix} \right) \quad (5)$$

y para que esté normalizado es necesario que

$$N = \left(\prod_{\alpha} \left(\frac{1}{2} \right) \right)^{-1/2} \quad (6)$$

El hamiltoniano () al ser expresado en función de los operadores de cuasi-partículas tiene la forma

$$H = H_0 + H_{11} + H_{20} + H_{12} \quad (7a)$$

donde

$$U = \sum_j (U_{e_j} - \frac{\Delta}{G} - \frac{\Delta}{2} \sum_j (z_j + 1) V_j^2) \quad (7b)$$

$$H_{int} = - \sum_j \sqrt{U_{e_j} + V_{e_j}^2} [b_j^\dagger + b_j] + 2 \Delta \sum_j U_{e_j} V_{e_j} \quad (7c)$$

$$H_{e_0} = \sum_j (U_{e_j} + V_{e_j}^2) - [U_{e_j} + V_{e_j}^2] \times \left\{ (U_{e_j} - V_{e_j}) \frac{\Delta}{G} - V_{e_j} \right\} - C V_{e_j}^2 \quad (7d)$$

siendo

$$\Delta = G \sum_j (z_j + \frac{1}{2}) U_{e_j} V_{e_j} \quad (7e)$$

y H_{int} contiene términos con mayor número de operadores de creación y/o aniquilación de cuasi-partículas y se lo desprecia.

Las dos condiciones que deben cumplir los coeficientes U_{e_j} y V_{e_j} son:

- Que el número de partículas sea en promedio \bar{N} .
- Que el estado fundamental corresponda a un mínimo de la energía del hamiltoniano.

La primera condición implica que

$$\bar{N} = \langle 0 | \sum_{e_j, m} b_j^\dagger b_j | 0 \rangle = \sum_j U_{e_j} \quad (8)$$

Dado que restar a todas las energías de partícula independiente un factor constante es equivalente a restarle al hamiltoniano ese factor multiplicado por el operador número de partículas, al abandonar la restricción de que las autofunciones sean autofunciones del número de partículas, las energías absolutas adquieren sentido,

y por lo tanto su origen es un parámetro a ser determinado.

La segunda condición significa que

$$\frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{r}} = \dots \quad (9)$$

con la condición subsidiaria $\Delta \psi = 0$ (esta condición es necesaria para que la transformación sea canónica). Resolviendo la ecuación (9) se obtiene que

$\psi = \dots$. Elige el signo (-) para que Δ sea lo más grande posible, porque se espera que \dots de la contribución dominante a la energía del estado fundamental.

Con esa elección de signo el hamiltoniano (7a) queda de la forma

$$H = \dots \quad (10)$$

si se desprecia H_{int} , (en realidad sólo es necesario despreciar los términos de H_{int} que crean 4 cuasipartículas) la función de onda (5) es correcta. Dado que el estado fundamental y los estados excitados tienen que tener números pares de cuasipartículas, los primeros estados excitados corresponderán a un par de cuasipartículas, y serán de la forma \dots , y tendrán por lo tanto una energía \dots con lo que se obtiene el "gap".

El hamiltoniano que hemos utilizado hasta ahora no puede explicar la aparición de estados dentro del "gap". Se observa experimentalmente que al menos hay un estado dentro del gap, y que ese estado tiene características colectivas, por ejemplo, la probabilidad de transición entre ese estado y el fundamental es hasta 50 ó 100 veces más grande que la probabilidad de transición para una sola partícula; lo cual nos asegura que ese estado se debe al movimiento coherente de los nucleones. En las fuerzas residuales no se han considerado términos que puedan dar origen a esos movimientos coherentes. Para considerarlos, debemos recordar que la estructura de capas, al ser las órbitas de las partículas fuertemente asimétricas, implica una tendencia sistemática a la distorsión de la forma del núcleo, correspondiendo de la posición de equilibrio al resultado de la competición entre esa tendencia a

deformarse y el esfuerzo de la fuerza de apareamiento a hacer el núcleo esférico lo que hace que la forma del núcleo varíe con el tiempo.

Se necesita introducir términos adicionales en el hamiltoniano que dependan de la forma de la superficie nuclear, o dicho de otra forma, recordar que el potencial que ve cada nucleón es en promedio esférico, pero que depende de la posición de los otros nucleones.

Al hacer el desarrollo de Slater de un potencial de interacción entre dos partículas obtenemos

$$\sum_{\lambda} V_{\lambda}(r) = \sum_{\lambda} V_{\lambda}(r) \quad (11)$$

Los efectos coherentes son producidos por fuerzas de largo rango, las que están caracterizadas por bajos órdenes multipolares. El orden más bajo que tiene sentido considerar es $\lambda = 2$ (por que el $\lambda = 1$ es poco efectivo por razones de paridad).

Dado que la dependencia radial de la fuerza no es demasiado importante, podemos suponer que $V_{\lambda}(r) = -\frac{16\pi}{7} \chi(r) r^{\lambda}$ y por lo tanto, la fuerza residual a considerar es de la forma

$$\sum_{\lambda} V_{\lambda}(r) = \sum_{\lambda} \sum_{\mu} \chi_{\lambda} r^{\lambda} \quad (12)$$

donde χ_{λ} es el momento cuadrupolar de masa de la partícula (i).

SECCION 1Tratamiento de la fuerza cuadrupolar

Suponiendo que la magnitud de la fuerza cuadrupolar no alcanza para deformar al núcleo, se considera como primera aproximación en las funciones de onda a las soluciones de la fuerza de apareamiento; y por lo tanto es necesario pasar el hamiltoniano cuadrupolar al formalismo de cuasi-partículas.

El operador momento cuadrupolar puede ser puesto de la forma

$$\hat{Q}^T = \sum_{\mu} \langle 0^+ || Y_2 || 0^+ \rangle B_{\mu}^T b_{\mu} = \frac{1}{\sqrt{5}} \sum_{\mu} \langle 0^+ || Y_2 || 0^+ \rangle [E_{2\mu}]_{\mu} \quad (13)$$

y para pasarlo al formalismo de cuasipartículas hay que hacer la transformación inversa de (3), es decir

$$b_{\mu}^{\dagger} = u_{\mu} b_{\mu}^{\dagger} + (-)^{\mu} v_{\mu} c_{-\mu} \quad (14a)$$

$$c_{\mu} = (-)^{\mu+1} v_{\mu} b_{\mu}^{\dagger} + u_{\mu} c_{\mu} \quad (14b)$$

y por lo tanto

$$[E_{2\mu}]_{\mu} = (-)^{\mu+1} u_{\mu} v_{\mu} [E_{2\mu}]_{\mu} + (-)^{\mu} v_{\mu}^2 [E_{2\mu}]_{\mu} + u_{\mu}^2 [E_{2\mu}]_{\mu} - v_{\mu} v_{\mu} [E_{2\mu}]_{\mu} \quad (15)$$

llamando $U_{\mu} = [u_{\mu} \quad -v_{\mu}]_{\mu}$ $\bar{D}_{\mu}^{\dagger} = [c_{\mu}^{\dagger} \quad b_{\mu}^{\dagger}]_{\mu}$ $= \frac{(-)^{\mu}}{\sqrt{5}} \langle \dots \rangle$

(15) queda de la forma

$$(-)^{\mu+1} [u_{\mu} v_{\mu} (c_{\mu}^{\dagger} + b_{\mu}^{\dagger})] + u_{\mu}^2 c_{\mu}^{\dagger} + (-)^{\mu} v_{\mu}^2 b_{\mu}^{\dagger} \quad (16a)$$

y por lo tanto, si simetizamos la expresión al realizar la suma, podemos escribir el operador cuadrupolar como

$$\hat{Q} = \frac{1}{2} \sum_{\mu} \{ u_{\mu} (u_{\mu} v_{\mu} + v_{\mu} u_{\mu}) (c_{\mu}^{\dagger} + b_{\mu}^{\dagger}) + \dots \} \times$$

$$\times (u_{\mu} v_{\mu} - v_{\mu} u_{\mu}) [u_{\mu} c_{\mu}^{\dagger} + (-)^{\mu} v_{\mu} b_{\mu}^{\dagger}] =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{\nu} \left(\frac{1}{m} \right)^{\nu}$$

siendo

(17)

Si despreciamos los términos, que corresponden al scattering de cuasi-partículas, es decir, despreciando Q_{11} , el hamiltoniano total es equivalente a un conjunto de osciladores armónicos acoplados, cuyos modos normales nos dan los distintos modos de excitación del sistema.

Para encontrar los modos normales, realizamos una transformación canónica, es decir, buscamos un nuevo conjunto de operadores tales que

$$[H, \gamma] = -\frac{1}{2} \gamma^{\dagger} \quad (18)$$

Para calcular el conmutador, necesitamos calcular el conmutador de pares de operadores de fermiones. El conmutador de un par de operadores de creación con un par de operadores de aniquilación da (ver apéndice 1)

$$[c^{\dagger}_i, c^{\dagger}_j] = \delta_{ij} - \sum_k c^{\dagger}_k \quad (18a)$$

El segundo término corresponde nuevamente a términos que dependen del número de cuasi-partículas presentes, y se desprecian. Esta aproximación es llamada de cuasi-bosones, porque las excitaciones del sistema corresponderán a bosones.

Como los operadores γ_{ν} son los modos normales de vibración, serán una combinación lineal de los modos de oscilación anteriores, es decir

$$\gamma_{\nu} = \sum_{\mu} \left(\frac{1}{2} \right)^{\mu} - \left(\frac{1}{2} \right)^{\mu} \quad (19)$$

y por lo tanto, al hallar el conmutador (18) obtenemos (llamando $E_{12} = E_1 + E_2$)

$$[H, \Lambda] = \sum_{\omega} \bar{f}_{\omega} \left(\frac{\hbar \omega}{2} (a_{\omega} + a_{\omega}^{\dagger})^2 + \frac{\hbar \omega}{2} (a_{\omega} - a_{\omega}^{\dagger})^2 \right) - \frac{\hbar}{2} \sum_{\omega} \bar{f}_{\omega} \left(\frac{\omega}{2} (a_{\omega} + a_{\omega}^{\dagger})^2 + \frac{\omega}{2} (a_{\omega} - a_{\omega}^{\dagger})^2 \right) \quad (20)$$

$$\times \left(\sum_{\omega} \bar{f}_{\omega} \left(\frac{\hbar \omega}{2} (a_{\omega} + a_{\omega}^{\dagger})^2 + \frac{\hbar \omega}{2} (a_{\omega} - a_{\omega}^{\dagger})^2 \right) \right) = \Lambda^2 \quad (21)$$

los coeficientes de la transformación son

$$\lambda = \frac{\Lambda^2}{2} \frac{\hbar \omega}{\hbar \omega - \omega} \quad (22a)$$

$$\mu = \frac{\Lambda^2}{2} \frac{\hbar \omega}{\hbar \omega + \omega} \quad (22b)$$

Existen dos condiciones adicionales sobre estos coeficientes, que son

$$a) [\Lambda, \Lambda^{\dagger}] = 0 \quad (23)$$

b) Que los coeficientes Λ^{\dagger} sean autocoherentes

La condición a) significa $\sum_{\omega} \left(\frac{\hbar \omega}{2} - \frac{\hbar \omega}{2} \right) = 1/2$ y por lo tanto nos da la norma

$$\Lambda^{\dagger} = \sum_{\omega} \bar{f}_{\omega} \left(\frac{\hbar \omega}{2} (a_{\omega} + a_{\omega}^{\dagger})^2 + \frac{\hbar \omega}{2} (a_{\omega} - a_{\omega}^{\dagger})^2 \right) = 1 \quad (24)$$

$$\Lambda^{\dagger} = \left[2 \sum_{\omega} \bar{f}_{\omega} \left(\frac{\hbar \omega}{2} \frac{E_{\omega}}{E_{\omega} - \omega} \right) \right]^{-1/2}$$

Para que se cumpla la condición b) es necesario que

$$\Lambda^{\dagger} = \sum_{\omega} \bar{f}_{\omega} \left(\frac{\hbar \omega}{2} (a_{\omega} + a_{\omega}^{\dagger})^2 + \frac{\hbar \omega}{2} (a_{\omega} - a_{\omega}^{\dagger})^2 \right) \left[\frac{1}{E_{\omega} - \omega} + \frac{1}{E_{\omega} + \omega} \right] \quad (25)$$

$$\frac{1}{2} = \sum_{\omega} \bar{f}_{\omega} \left(\frac{\hbar \omega}{2} \frac{E_{\omega}}{E_{\omega} - \omega} \right)$$

Por último, sería cómodo tener el operador \hat{Q}_{20}^{-1} como función de los "modos normales", es decir, usar la transformación inversa de (19). Llamando

$$U_{\pm}^{(2)} = X_{\pm}^{(2)} + X_{\pm}^{(1)} \quad (26)$$

$$P_{\pm}^{(2)} = \left[\sum_{\alpha} \frac{N_{\alpha}}{\omega_{\alpha}} \left(d_{\alpha}^{(2)} + \dots \right) \right] \quad (27a)$$

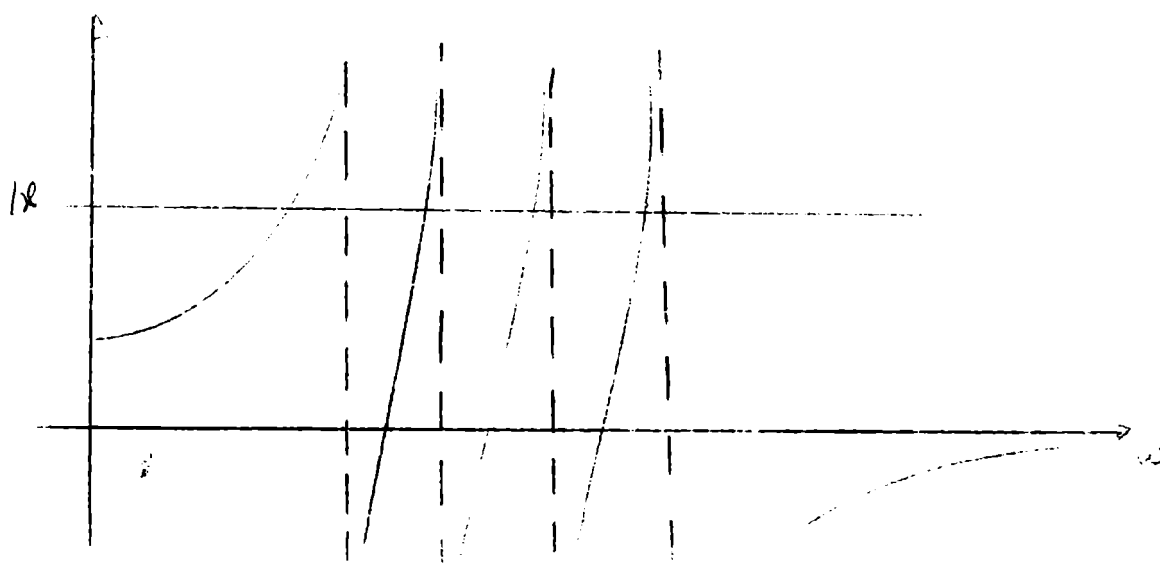
y por lo tanto

$$P_{\pm}^{(2)} = - \dots \sum_{\alpha} \frac{E_{\alpha}}{(\omega_{\alpha}^2 - \omega^2)} N_{\alpha} \dots \quad (27b)$$

quedando

$$Q = \sum_{\alpha} \left(\dots \right) \sum_{\alpha} N_{\alpha} \quad (28)$$

Para estudiar la naturaleza de las soluciones de (25), es conveniente hacer un gráfico de la ecuación de dispersión como función de ω . La intersección del segundo miembro con las líneas horizontales $\frac{1}{2}\epsilon = \text{constante}$ muestran que para valores de ϵ muy pequeños, las energías prácticamente no se apartan de las energías de un par de cuasi-partículas, pero al ir aumentando ϵ , el modo de menor energía es mucho más afectado que los demás modos, y para ϵ suficientemente grande, puede dar origen a una banda vibracional con un espaciado mucho menor que la energía de los estados de dos cuasi-partículas. Para valores de ϵ aún mayores, la frecuencia del modo colectivo se anula y se hace imaginaria, lo que significa que la fuerza de polarización se hace tan grande que el núcleo se deforma y las vibraciones son inestables.



La aproximación de cuasibosones es buena siempre que el número de cuasipartículas sea bajo y que simultáneamente el número de partículas reales sea relativamente alto; por lo tanto es de esperar que aparezcan discrepancias sistemáticas para núcleos próximos a capas cerradas. Sin embargo, mantener en (18b) el otro término del conmutador es equivalente a introducir en el hamiltoniano términos anarmónicos; lo mismo que ocurre si se retiene Q_{11} . Por lo tanto se puede usar la aproximación de cuasi-bosones como un primer orden y tratar luego perturbativamente los términos anarmónicos.

SECCION 2Introducción de los términos anarmónicos

En el tratamiento del hamiltoniano cuadrupolar se han hecho dos aproximaciones en las que se han despreciado términos proporcionales a la dispersión de cuasipartículas; y cuyas importancias relativas vamos a evaluar.

La primera aproximación ha sido el método de cuasibosones, que consistió en suponer que

$$[] = \quad (29)$$

La otra aproximación fue despreciar Q_{11} en el hamiltoniano cuadrupolar. Para evaluar la importancia relativa, es conveniente realizar un desarrollo de los operadores B_{11}^+ y B_{11} en serie de un conjunto de operadores A_{11}^+, A_{11} y que se supone cumplen relaciones de conmutación de bosones. Los coeficientes se eligen de tal forma que los desarrollos en serie cumplan las mismas relaciones de conmutación que cumplan los operadores originarios.

Como es (ver el apéndice 1 por la definición de \hat{p} y x_{123})

$$[B_{11}, B_{11}^+] = (1 + \hat{p}) \quad \text{---} \quad \sum_{\lambda} (\quad) (1 + \hat{p}) \quad (30)$$

$$[B_{11}^+, B_{11}^+] = 2 \sum_{\lambda} \frac{(1 + \hat{p}) (1 + \hat{p})}{2} x_{123} \quad (31)$$

se puede poner

$$B_{11} A_{11} = \sum_{\lambda} \frac{(1 + \hat{p}) (1 + \hat{p})}{2} \times \dots (B_{11} - B_{11}^+) A_{11} \quad (32)$$

$$B_{11}^+ = B_{11} + B_{11}^{\prime} = B_{11} + \sum_{\lambda} \frac{(1 + \hat{p}) (1 + \hat{p})}{2} \times \dots A_{11} A_{11} \quad (33)$$

donde los operadores B_{11}^{\prime} conmutan con los A_{11}^+ , y por lo tanto no dan ninguna contribución para núcleos pares.

Al reemplazar (32) y (33) en el hamiltoniano, el primero hace aparecer términos de cuarto orden y el segundo términos cúbicos. Aun cuando puedan dar contribuciones similares para la energía de los diversos estados, los términos de cuarto orden no se tratarán porque el efecto más importante que se espera de los sucesivos órdenes en el desarrollo en serie, es la violación de las reglas de selección del oscilador armónico, y los términos de cuarto orden, a los fines prácticos, tienen las mismas reglas de selección que los términos de segundo orden.

Esto justifica el seguir utilizando la aproximación de cuasibosones e introducir las anarmonicidades en el hamiltoniano a través de Q_{11} , porque de esa manera se tienen en cuenta todos los posibles términos de tercer orden.

El tratamiento de Q_{11} se puede hacer de dos maneras diferentes:

1^a En el caso de que haya pocas partículas del algún tipo, hacer un tratamiento exacto; estudiando las interacciones entre ellas y con el resto del núcleo utilizando las configuraciones de partículas independiente que aparezcan. Esto constituye la esencia del modelo de Ras, aunque sólo ha sido aplicado a núcleos con dos partículas fuera de capas cerradas. Si el otro tipo de partícula no está en capas cerradas, para ellas se puede utilizar la aproximación de cuasibosones o incluir términos cúbicos mediante el método que se describe a continuación.

2^a Reemplazar en el operador Q_{11} los operadores \hat{A}_i mediante (33). Como se ha supuesto que la aproximación de cuasibosones es válida, es $\hat{A}_i^+ = \hat{B}_i^+$, y por lo tanto, utilizando (27), obtenemos para Q_{11}

$$\hat{Q}_{11} = -\frac{1}{2} \sum_i \left(\hat{A}_i^+ + \hat{A}_i \right) \left(\hat{A}_i^+ - \hat{A}_i \right) \frac{1}{E_i - E_0} \times$$

$$\left(\frac{1}{E_i - E_0} \right) \left(\hat{A}_i^+ + \hat{A}_i \right) \left(\hat{A}_i^+ - \hat{A}_i \right) \quad (34)$$

$$= \sum_i \frac{1}{E_i - E_0} \left(\hat{A}_i^+ \hat{A}_i^+ - \hat{A}_i \hat{A}_i \right) - \sum_i \frac{1}{E_i - E_0} \left(\hat{A}_i^+ \hat{A}_i - \hat{A}_i \hat{A}_i^+ \right)$$

Considerando sólo el fonon adiabático U^+ , dado que es el que da una contribución más importante a \hat{Q}_{2f} , el operador cuadrupolar queda expresado de la forma

$$\hat{Q}_{2f} = \Lambda U^{(+)} + \Gamma^{(-)} \{U^{+} U^{+}\}^2 - \Gamma^{(+)} \{U^{-} U^{-}\}^2 \quad (35)$$

donde se han omitido los subíndices que indican a que fonon pertenecen las contribuciones.

Utilizando la forma completa del operador \hat{Q}_{2f} en el hamiltoniano, considerando como autofunciones en orden cero a las soluciones de cusibsones podemos diagonalizar los términos cúbicos.

SECCION 3Modelo de Ras

En un núcleo que tiene pocas partículas de algún tipo fuera de capas cerradas, se puede hacer una descripción detallada de la interacción entre ellas a partir de una fuerza de corto rango, considerando todas las configuraciones de partícula independiente que sean necesarias. Las interacciones entre esas partículas (que por razones de simplificación se supondrán protones) y el resto del núcleo, será la fuerza cuadrupolar, dado que en núcleos de peso mediano no tiene sentido considerar la fuerza residual de corto alcance entre partículas de distinto tipo por la poca superposición espacial de las respectivas funciones de onda.

Para la descripción de los neutrones se puede utilizar el método de cuasipartículas, se puedan considerar también términos cúbicos o una descripción fenomenológica. Por razones de simplificación se utilizará esta última, aunque ello no es esencial al modelo.

Se aplicará el modelo al caso en que hay dos partículas (o agujeros) fuera de capas cerradas, y que la fuerza residual entre ellas es de la forma

$$H_c = - (V \pi_s + V_t \tilde{\pi}_t) e^{-\frac{V_0 - \tilde{V}_t}{r}} \quad (36)$$

donde $\pi_s = \frac{1}{2}(1 - \sigma_z)$ (37a) y $\tilde{\pi}_t = \frac{1}{2}(1 + \sigma_z)$ (37b) son los operadores que separan la parte con spin cero y una de la fuerza de corto rango.

Los grados de libertad colectivos se representan por un hamiltoniano de la forma

$$H = \frac{1}{2} \sum_i (C_i Q_i + C_i^* Q_i^*) \quad (38)$$

donde Q_i representa el momento cuadrupolar instantáneo de masa de los neutrones.

El hamiltoniano de acoplamiento entre los dos tipos de partículas es

$$H_{cp} = -\gamma \sum_p (\pm \varphi_p) \chi_p^* \quad (39)$$

donde

$$\hat{H}_1 = \sum_i \gamma_i \left(\hat{p}_i^2 + \sum_l V_{il}(R, \theta) \right) \quad (39b)$$

y el signo \mp vale para agujeros y partículas respectivamente.

Se usan como autofunciones de onda en orden cero a las autofunciones del hamiltoniano previo a la introducción de (36) y (39); y se las denotará por $|J, M, D\rangle$ donde J significan todos los números cuánticos necesarios para especificar el estado de dos partículas con momento angular J ; M y D son el número de fonones y el momento angular total de las autofunciones de (38) e D son el momento angular total y su proyección.

Debido a que la interacción (39) tiene la regla de selección $\Delta N = \pm 1$ si se hace un tratamiento perturbativo se observa que no existen contribuciones a la energía de orden impar, y por lo tanto las energías (aunque no las autofunciones) de los estados resultantes serán independientes del signo de (39). Además, la forma de (39) implica una violación de las reglas de selección del oscilador armónico usado para describir los grados de libertad colectivos. Por ejemplo, Q_+ y Q_- tienen elementos de matriz no nulos entre el segundo estado con momento angular dos y paridad positiva y el estado fundamental; o el elemento de matriz diagonal en el primer estado dos (+) es también distinto de cero.

Estos elementos de matriz se deben a que la interacción conecta estados con la misma configuración de partícula independiente, como por ejemplo

$$\langle 2, 2, 0 | \hat{H}_1 | 2, 2, 0 \rangle \neq \langle 2, 2, 0 | \hat{H}_1 | 0, 0, 0 \rangle \quad (40)$$

Si se hubiesen representado los grados de libertad de los protones en la aproximación armónico, los elementos de matriz $\langle 2, 2, 0 | \hat{H}_1 | 0, 0, 0 \rangle$ deberían ser despreciados. Esto justifica la afirmación hecha previamente de que el modelo de IAS es una forma de considerar, al menos parcialmente, los términos cúbicos del hamiltoniano nuclear.

Al evaluar probabilidades de transición entre distintos niveles, los términos debidos a las transiciones de los protones contribuyen en orden par en teoría de perturbaciones

y por lo tanto los elementos de matriz correspondientes cambian de signo de acuerdo a que estemos trabajando con partículas o con agujeros. Los operadores de fonones tienen contribuciones no nulas en orden impar en teoría de perturbaciones, y por lo tanto el elemento de matriz resultante tiene un número par de factores $\langle NR || Q || NR' \rangle$ y un número impar de factores $\langle - || \hat{Q} || - \rangle$, por lo que también la contribución de los neutrones cambia de signo; la coherencia destructiva e de refuerzo que se observa al comienzo de la capa se mantiene si la capa está casi enteramente llena.

Para tener una idea cuantitativa de la influencia del hamiltoniano (39) se puede hacer un tratamiento perturbativo cuando los dos protones están en una misma capa con momento angular j , y estimar las probabilidades de transición entre los distintos niveles. La interacción entre las dos partículas (36), tiene como único efecto separar los estados con distinto momento angular. Para los valores usuales de la interacción (36) la diferencia entre el estado con momento angular dos y el estado con momento angular cero es de aproximadamente 1.5 MeV (notar que los elementos de matriz de (36) son diagonales).

Para evaluar (36) se usan como funciones de onda de dos partículas $|(\frac{1}{2} j_1) j_1 ; (\frac{1}{2} j_2) j_2 ; J M_j \rangle_a$ donde el subíndice a indica que están antisimetrizadas. Utilizando técnicas standard de acoplamiento de momentos angulares³⁾, obtenemos

$$\begin{aligned} \langle (\frac{1}{2} j_1) j_1 ; (\frac{1}{2} j_2) j_2 ; J M_j | \hat{V} | (\frac{1}{2} j_1) j_1 ; (\frac{1}{2} j_2) j_2 ; J M_j \rangle = & (-)^{J+R'+I+1} \begin{Bmatrix} J & R' & I \\ R & 2 & 2 \end{Bmatrix} \langle NR || Q || NR' \rangle_{\langle \eta \rangle} \times \\ \times [\langle \frac{1}{2} j_1 || Y_2 || \frac{1}{2} j_1 \rangle + \langle \frac{1}{2} j_2 || Y_2 || \frac{1}{2} j_2 \rangle] & \quad (41) \end{aligned}$$

Es

$$\langle \frac{1}{2} j_1 || Y_2 || \frac{1}{2} j_1 \rangle = (-)^{j_1+1} \hat{j}_1 \begin{Bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{Bmatrix} \langle Y_2 || Y_2 || Y_2 \rangle \quad (42a)$$

$$\langle \frac{1}{2} j_2 || Y_2 || \frac{1}{2} j_2 \rangle = (-)^{j_2+1} \hat{j}_2 \begin{Bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{Bmatrix} \langle Y_2 || Y_2 || Y_2 \rangle \quad (42b)$$

siendo $S_{l,l}$

Utilizando como funciones de onda radiales las funciones de onda del oscilador armónico²⁾ obtenemos

$$\langle n, l | r^{-1} | n, l \rangle = (-1)^{n+l} \langle n | r^{-1} | n \rangle \approx (-1)^{n+l} \lambda \quad (43)$$

donde se ha reemplazado el valor módulo del elemento de matriz de r^{-2} por una constante, dado que ellas son prácticamente constantes por zonas, y la observación de las reglas de selección está generalmente dada por la parte angular.

Para antisimetrizar las funciones de onda podemos utilizar que

$$|J, M, JH\rangle_s = \frac{1}{\sqrt{2(1+(-1)^{J+M})}} [|J, M, JM\rangle - (-1)^{J+M} |J, M, JH\rangle] \quad (44a)$$

donde

$$|J, M, JH\rangle = \sum_{m_1, m_2} \langle J_1, m_1, m_2 | J, M \rangle \psi_{J_1, m_1}(r_1) \psi_{J_2, m_2}(r_2) \quad (44b)$$

con lo que (41) queda expresado como

$$\begin{aligned} (-1)^{J_1+J_2+J+J+1} \frac{(-1)^{J+M}}{\sqrt{2(1+(-1)^{J+M})}} \langle n_1, l_1, n_2, l_2 | n, l \rangle & \left\{ \begin{matrix} J_1 & J_2 & J \\ J_1 & J_2 & J \end{matrix} \right\} (-1)^{J_1+J_2} \\ \times \left\{ \begin{matrix} J_1 & J_2 & J \\ J_1 & J_2 & J \end{matrix} \right\} & \times \left\{ \begin{matrix} J_1 & J_2 & J \\ J_1 & J_2 & J \end{matrix} \right\} \langle n_1, l_1, n_2, l_2 | n, l \rangle + (-1)^{J_1+J_2} \\ \times \langle n_1, l_1, n_2, l_2 | n, l \rangle & + \left\{ \begin{matrix} J_1 & J_2 & J \\ J_1 & J_2 & J \end{matrix} \right\} \langle n_1, l_1, n_2, l_2 | n, l \rangle \end{aligned} \quad (45)$$

que en el caso de que las dos partículas estén en la misma capa (nlj) ; se reduce a

$$(-1)^{J_1+J_2} \frac{(-1)^{J+M}}{\sqrt{2(1+(-1)^{J+M})}} \langle n, l, n, l | n, l \rangle \left\{ \begin{matrix} J_1 & J_2 & J \\ J_1 & J_2 & J \end{matrix} \right\} \langle n, l, n, l | n, l \rangle \quad (45a)$$

Dado que los niveles con $J \neq 2$ tienen más energía que el nivel con $J=2$; y que lo que se quiere observar es la influencia de no haber despreciado elementos de matriz de la

forma $\langle 20 | \dots | \rangle$ si se desprecian los niveles con $J \neq 2$ es

$$\langle 20 | X | 20 \rangle = \langle 20 | \dots | 20 \rangle = F(22) \quad (45b)$$

donde

$$\langle 20 | = \langle 20 | \dots | \rangle \quad X = \dots$$

Los efectos producidos por (36) que más interesan son los cambios en las reglas de selección para las transiciones entre los diversos niveles. El operador E2 tiene dos tipos de términos; uno es colectivo y tiene su primera contribución no nula en tercer orden (para las transiciones prohibidas en orden cero); y los términos de partícula, cuya primera contribución no nula es en segundo orden. El operador M1 (para la transición entre el segundo y el primer nivel des (+)) tiene su primera contribución no nula en tercer orden para ambos tipos de términos. Por lo tanto hay que calcular las funciones de onda hasta el tercer orden. En la tabla I están los resultados obtenidos para el nivel fundamental y los dos primeros niveles con momento angular dos.

El operador E2 se puede escribir como

$$E2 = \sum_{\lambda \mu} \frac{2}{4\pi} \frac{R^2}{\sqrt{2\lambda}} \sqrt{\frac{\omega}{2\kappa}} U^{(\lambda)} + \sum_{\lambda \mu} e r^{\lambda} Y_{\lambda \mu}(\theta, \phi) \quad (46)$$

y el operador M1

$$M1 = \frac{1}{e} \sqrt{\frac{3}{4\pi}} G_2 \vec{k} + \sum_{\lambda \mu} \left[\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{L \cdot \vec{k}}{2m e c} \right] \cdot \vec{\nabla} Y_{\lambda \mu}(\theta, \phi) \quad (47)$$

Los elementos de matriz que queremos calcular son iguales a

$$Q = - \frac{F(22) X}{\hbar} \frac{(3\epsilon^2 - \omega^2)}{(\epsilon^2 - \omega^2)^{3/2}} \left[\frac{E_2 \kappa}{\hbar} + 2 \frac{L \cdot \vec{k}}{2m e c} \right] \cdot \vec{\nabla} Y_{\lambda \mu} \quad (48a)$$

$$E = E(J=2) - E(J=0)$$

$$\langle 2^2 || E 2 || 0^1 \rangle = \frac{6F(22)X^3 \epsilon^2}{\sqrt{4\omega C} \int (\epsilon^2 - \omega^2)(\epsilon^2 - 4\omega^2)} \left[\frac{2R_0^2}{2\pi} - \gamma^* \left(\frac{\hbar}{M\omega_0} \right) (2m+l+3/2) \right] \quad (48b)$$

$$\langle 2^2 || M 1 || 2^1 \rangle = \frac{6F(22)\omega X^3 (5\epsilon^2 - \omega^2)}{\sqrt{\pi} \int (\epsilon^2 - \omega^2)^2 (\epsilon^2 - 4\omega^2)} \frac{\mu_0}{e} \left[G_R - \frac{\mu}{j} \right] \quad (48c)$$

donde

$$\gamma^* = \frac{3AR_0^2}{2\pi \langle j | r^2 | j \rangle} \frac{C}{\chi} \quad , \quad C^* = C \frac{g}{5\pi} A^2 m_p^2 R_0^4 \quad (48d)$$

En los tres elementos de matriz, los términos de transiciones de partículas y las contribuciones colectivas tienen la misma dependencia de la energía, lo cual simplifica la evaluación de la importancia relativa.

El hamiltoniano colectivo se derivó de la fuerza cuadrupolar

$$- \frac{\chi}{2} \sum_r Q_{2r}^* Q_{2r}$$

donde Q_{2r} es el momento cuadrupolar instantáneo de masa. La constante restituitiva C es igual a χ si el estado colectivo está suficientemente separado de los estados intrínsecos. La fuerza cuadrupolar es también responsable del potencial deformado (34) que actúa sobre las dos partículas. El campo producido por todas las otras partículas está representado por

$$- \chi \sum_{r \neq p} Q_r^{(prot)} Q_{2r}^* = - \chi \sqrt{\frac{16\pi}{5}} \langle j | r^2 | j \rangle \sum_{r \neq i} Y_{2r}(i) Q_{2r}^*$$

y por lo tanto

$$\eta = \chi \sqrt{\frac{16\pi}{5}} \quad (49)$$

lo que nos permite estimar que las contribuciones relativas de los términos colectivos y de las transiciones de partículas serán

$$\frac{\langle \dots \rangle}{\langle \dots \rangle} \approx \dots \quad (30a)$$

$$\frac{\langle \dots \rangle}{\langle \dots \rangle} \approx \dots \quad (30b)$$

$$\frac{\langle \dots \rangle}{\langle \dots \rangle} \approx \dots \quad (30c)$$

si suponemos que \dots y \dots son proporcionales.

La conclusión que podemos sacar es que a pesar de que (3)^f rompe las reglas de selección, tiende a preservarlas; es decir las contribuciones colectivas y debidas a las partículas son de signo contrario y de aproximadamente la misma magnitud, con la excepción del momento cuadrupolar estático, en el que hay un refuerzo.

Tabla 1**Tabla detallando las funciones de onda**

Estado fundamental			
orden	estados	amplitudes	estados no considerados
0	0.00.0	1	/
1	2.12.0	$\frac{X}{(\epsilon+\omega) \int}$	/
2	2.22.0	$-\frac{\gamma_{10}}{\int} \frac{F(22) X^2}{(\epsilon+\omega)(\epsilon+2\omega)}$	4.24.0
	0.20.0	$\frac{X^2}{\sqrt{10} \int \omega (\epsilon+\omega)}$	
3	0.30.0	$-\sqrt{\frac{2}{3}} \frac{F(22) X^3}{(2j+1)\omega(\epsilon+\omega)(\epsilon+2\omega)}$	2.32.0 ; 4.34.0 ; 6.36.0
Estado 2 ¹			
orden	estados	amplitudes	estados no considerados
0	0.12.2	1	/
1	2.00.2	$[5(2j+1)]^{-1/2} [\epsilon-\omega]^{-1} X$	/
	2.20.2	$\sqrt{\frac{2}{5}} [\int (\epsilon+\omega)]^{-1} X$	
	2.22.2	$\sqrt{\frac{2}{5}} [\int (\epsilon+\omega)]^{-1} X$	
	2.24.2	$3\sqrt{\frac{2}{5}} [\int (\epsilon+\omega)]^{-1} X$	
2	2.12.2	$-2F(22) [\int (\epsilon^2-\omega^2)]^{-1} X^2$	0.32.2 ; 4.12.2 4.32.2 con R=2,3,4,6
	2.30.2	$-\sqrt{\frac{6}{5}} \frac{F(22) X^2}{\int (\epsilon+\omega)(\epsilon+2\omega)}$	
	2.32.2	$-2\sqrt{\frac{2}{7}} \frac{F(22) X^2}{\int (\epsilon+\omega)(\epsilon+2\omega)}$	
	2.33.2	$\sqrt{6} \frac{F(22) X^2}{\int (\epsilon+\omega)(\epsilon+2\omega)}$	
	2.34.2	$-3\sqrt{\frac{22}{35}} \frac{F(22) X^2}{\int (\epsilon+\omega)(\epsilon+2\omega)}$	
3	0.22.2	$-3\sqrt{\frac{2}{5}} \frac{F(22) X^3}{(2j+1)\omega(\epsilon-\omega)(\epsilon+2\omega)}$	4.22.2 con R=2,4. ; 6.24.2

Estado 2^2

orden	estados	amplitudes	estados no considerados
0	0.22.2	1	/
1	2.12.2	$\frac{\sqrt{5}}{5} \frac{\lambda}{\lambda^2 - 1}$	
	2.30.2	$\frac{\sqrt{5}}{5} \frac{\lambda}{\lambda^2 - 1}$	
	2.32.2	$\frac{\sqrt{5}}{5} \frac{\lambda}{\lambda^2 - 1}$	
	2.33.2	$\frac{\sqrt{5}}{5} \frac{\lambda}{\lambda^2 - 1}$	
	2.34.2	$\frac{\sqrt{5}}{5} \frac{\lambda}{\lambda^2 - 1}$	
2	2.00.2	$\frac{\sqrt{5}}{5} \frac{\lambda^2}{\lambda^2 - 1}$	
	2.20.2	$\frac{\sqrt{5}}{5} \frac{\lambda^2}{\lambda^2 - 1}$	4.2R.2 con R = 2,4
	2.22.2	$\frac{\sqrt{5}}{5} \frac{\lambda^2}{\lambda^2 - 1}$	
	2.24.2	$\frac{\sqrt{5}}{5} \frac{\lambda^2}{\lambda^2 - 1}$	
0.12.2	$\frac{\sqrt{5}}{5} \frac{\lambda^2}{\lambda^2 - 1}$		
3	0.12.2	$\frac{\sqrt{5}}{5} \frac{\lambda^2}{\lambda^2 - 1}$	4.3R.2 ; 4.12.2 ; 0.32.0 6.3R'.2 ; 8.36.2

SECCION 4Tratamiento de términos cúbicos

Al incluir en el hamiltoniano el operador Q_{11} , aparecen términos cúbicos en los operadores de creación y aniquilación de fonones, pudiendo expresarse el hamiltoniano como

$$H = \sum_k \left[\frac{1}{2} \hbar \omega_k (a_k^\dagger + a_k) \right] - \lambda \sum_k (a_k^\dagger)^3 + \text{c.c.} \quad (51)$$

Para tener una idea cualitativa de la influencia de los términos cúbicos, se puede diagonalizar (51) como función de $\epsilon^{(3)} = \sqrt{\hbar} \lambda \omega_k^{-3/2}$, y estudiar la influencia que tienen en las energías de los autoestados y en las probabilidades de transición. Se desprecia $\epsilon^{(3)}$ porque en el límite adiabático es cero y se ha supuesto ya que es válida la aproximación adiabática al despreciar términos cúbicos en otro tipo de fonones.

Como los efectos que interesan se producen en estados de una y dos fonones, para hacer la diagonalización es suficiente considerar las contribuciones de los estados con tres fonones a esos estados; y considerar estados de hasta cuatro fonones como estados intermedios para la evaluación de los elementos de matriz reducidos de $\langle n | a^\dagger | m \rangle$. Para la evaluación de estos elementos de matriz, se utiliza que³⁾

$$\langle n | a^\dagger | m \rangle = \sqrt{\frac{n+1}{m}} \langle n+1 | m \rangle \quad (52)$$

donde los coeficientes $\langle n | m \rangle$ están evaluados en la referencia 1.

Los elementos de matriz reducidos de $\langle n | a^\dagger | m \rangle$ están en la tabla II, y en la tabla III están los elementos de matriz de $\langle n | a | m \rangle$.

Los resultados de la diagonalización del hamiltoniano (51) están condensados en las figuras 1, 2 y 3; como función de $\epsilon^{(3)}/\omega$. En la figura 1 está representado el cociente entre la energía del estado 2^1 y la energía que tendría si no se considerasen términos anarmónicos. En la figura 2 están representados las energías de los estados exci-

tados en unidades de la energía del estado 2^1 ; en línea llena los estados con $I = 2$, en raya los estados con $I = 0$ y en puntos los estados con $I = 4$. En la figura 3 están graficados los elementos de matriz reducida de $U_{\pm}^{(+)}$ y $\{U^{(+)}U^{(+)}\}$ para algunas transiciones. En línea llena están las contribuciones de $U_{\pm}^{(+)}$ y en rayas las de $\{U^{(+)}U^{(+)}\}$. Los elementos de matriz Q_{20} y Q_{11} serán proporcionales a ellos, y esa constante depende del núcleo en especial que se considere, es decir es necesario un conocimiento detallado de los niveles de energía de partícula independiente que determinan Λ y $\Gamma^{(-)}$.

Los resultados presentan cierto tipo de características que es interesante recalcar:

1.- El elemento de matriz de Q_{20} y Q_{11} son siempre coherentes para el momento cuadrupolar estático del primer estado $I = 2$, independientemente del signo de $\epsilon^{(-)}$; dado que si $\epsilon^{(-)} > 0$, como es siempre $\Lambda > 0$ debe ser $\Gamma^{(-)} < 0$ y por lo tanto se refuerzan; si $\epsilon^{(-)} < 0$ esto es equivalente a cambiarle el signo a las contribuciones a los distintos estados que tengan un número impar de fonones (o lo que es equivalente, que tengan un número par), y por lo tanto cambia de signo la contribución de Q_{20} por que conecta estados que difieren en un fonón. Por otro lado, dado que $\epsilon^{(-)} < 0$ debe ser $\Gamma^{(-)} > 0$, pero como Q_{11} conecta estados que tienen el mismo número de fonones o difieren en dos, no varía el signo del elemento de matriz de $\{U^{(+)}U^{(+)}\}$, y esto implica un cambio del signo del elemento de matriz de Q_{11} .

2.- Las contribuciones de Q_{20} y Q_{11} para las restantes transiciones prohibidas entre los estados $0^1, 2^1, 2^2, 2^3$ son siempre incoherentes. (La única excepción es la transición $2^2 \rightarrow 2^2$, en la que existe un refuerzo).

3.- En el espectro de energías el nivel con $I = 4$ tiene siempre menos energía que el segundo estado con $I = 2$. Por lo tanto, cualquier ordenamiento distinto revela que se está en presencia e de términos de cuarto orden o de acoplamiento con fonones no adiabáticos.

Características similares en las probabilidades de transición habían sido encontradas ya cuando se hizo el tratamiento perturbativo con el modelo de Ras, y por lo tanto es lícito asegurar que los términos cúbicos del hamiltoniano tienen como único efecto coherente al momento en el momento cuadrupolar estático del nivel 2^1 y no producen otros cambios apreciables en las reglas de selección del oscilador armónico; dado que

para los valores usuales de $\epsilon^{(-)}$ los elementos de matriz reducidos de las transiciones prohibidas son entre 5 y 10 veces más chicos que el elemento de matriz entre el estado 2^1 y el fundamental.

Tabla II

Elementos de matriz reducida de $\{u^{(+)}, u^{(+)}\}_m$

n	n	n'	n''	$\langle \text{tr} \{u^{(+)}, u^{(+)}\} \rangle_{n' n''}$	
0	0	0	0	10	
1	2	1	2	20	
1	2	3	0	24	
1	2	3	2	40/7	
1	2	3	4	192/7	
1	2	3	3	30	
2	2	2	2	192/7	8
2	0	2	2	24	
2	0	4	2	18	
2	2	4	2°	0	
2	2	2	4	374/49	
2	2	4	0	14/7	
2	2	4	2	40/49	8
2	2	4	2°	1760/49	
2	2	4	4°	192/49	
2	2	4	4°	2060/49	8
2	4	2	4	3040/49	
2	4	4	2	128/49	
2	4	4	2°	550/49	
2	4	4	4	880/49	
2	4	4	4°	424/49	
2	4	4	5	66	
2	4	4	6	390/7	
3	2	3	2	2420/49	
3	2	3	3	840/7	
3	2	3	4	1384/49	
3	4	3	4	3740/343	
3	4	3	6	204/77	
3	3	3	4	244/7	
3	3	3	3	0	
3	0	3	2	42/7	

El símbolo ° significa que los elementos de matriz reducida son números que surgen.

Tabla III

Elementos de matrices reducidas de $\{10^{-1} 10^{-2} 10^{-3}\}$

<u>N</u>	<u>R</u>	<u>N'</u>	<u>R'</u>	<u>$\langle N R \{10^{-1} 10^{-2} 10^{-3}\} N' R' \rangle$</u>
0	0	3	0	6
2	0	3	0	108/5
1	2	2	2	18
2	2	3	2	144/7
2	4	3	4	3564/35

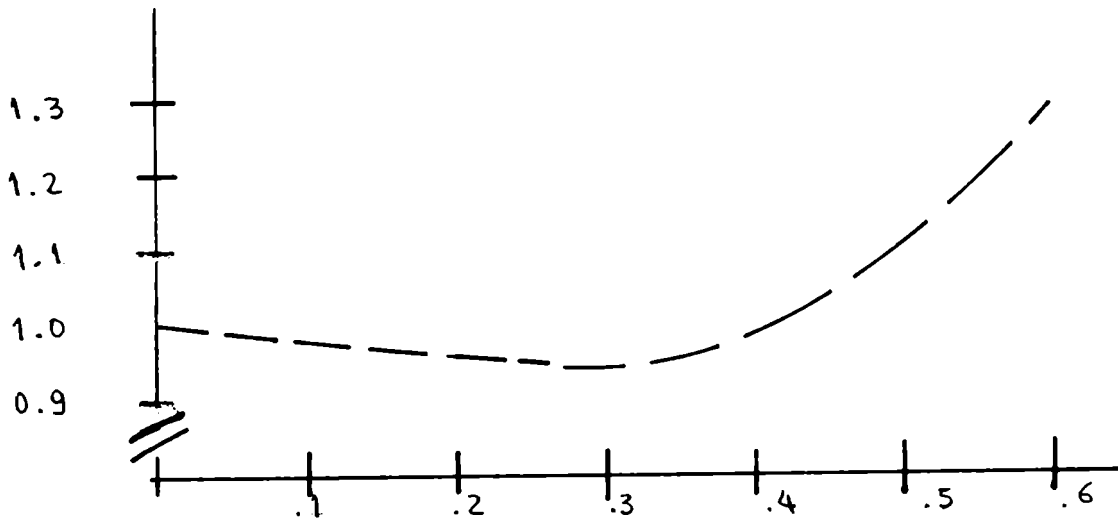


FIGURA 1

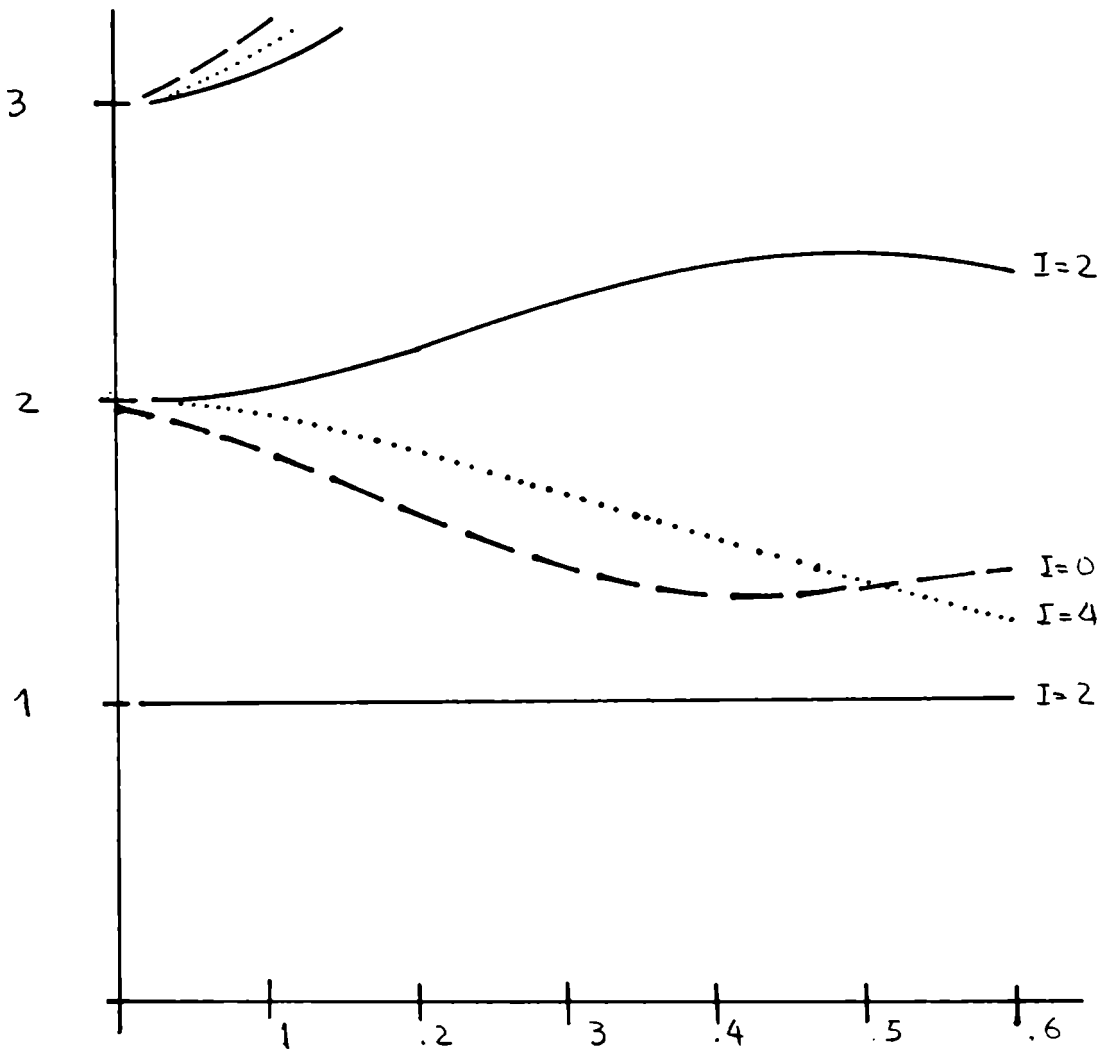


FIGURA 2

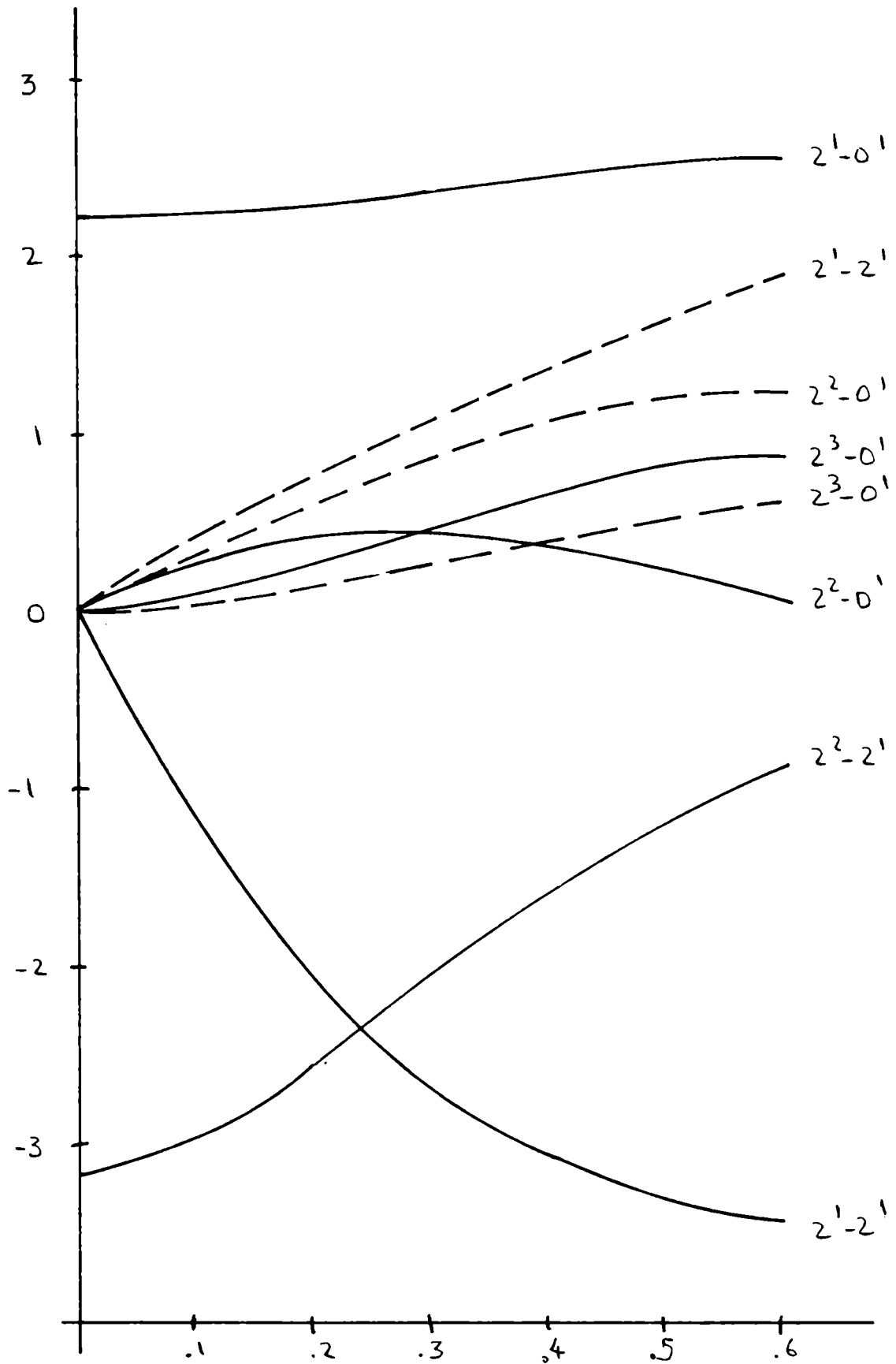


FIGURA 3

SECCION 5Cálculos realizados

1.- Aplicación del modelo de Ras a los isótopos del Cd.

Los isótopos del Cd reúnen todas las condiciones necesarias para que se les pueda aplicar el modelo de Ras. Tienen 48 protones, dos menos que capas cerradas lo que permite utilizar para ellos una descripción a partir de los estados de partícula independiente. Por otro lado, tienen entre 58 y 68 neutrones, de 8 a 18 fuera de capas cerradas, por lo que se pueda utilizar para ellos una descripción a partir de modos de excitación colectivos.

Se conocen el espectro y las probabilidades de transición entre los distintos niveles con bastante detalle, como se ilustra en la tabla IV; en la que se encuentran además las estimaciones para las probabilidades de transición que daría una descripción puramente vibracional.

Utilizando esas estimaciones, se observa que en el Cd^{110} , Cd^{112} y Cd^{114} el nivel 2^2 tiene características vibratorias, mientras en el Cd^{116} tiene una fuerte contribución de estados de partícula independiente. Por otro lado, en todos los casos medidos, la probabilidad de transición del 0^2 al 2^1 se aparta considerablemente del valor predicho por el vibrador. Todo esto indica que es necesario introducir términos cúbicos en el hamiltoniano.

Un primer intento de considerarlos, al menos parcialmente, es considerar los términos cúbicos que provienen de la interacción entre los protones y los neutrones mediante el modelo de Ras, tal como fue descrito en la Sección 3.

Para ello, es necesario hacer una selección de los estados de partícula independiente que se usaran para los protones. Por las datos experimentales, de la zona se sabe que sólo los niveles $0g\ 9/2$ y $1p\ 1/2$ tienen energías de partícula independiente a menos de un MeV del nivel de Fermi y por lo tanto es razonable utilizar sólo esos

estados para hacer una descripción detallada; colocando los otros estados de protones dentro del fonón. Es también necesario elegir el potencial de partícula independiente en el que se mueven los protones. Por razones de simplicidad, en el cálculo se supuso que era un oscilador armónico, usándose para su frecuencia la estimación de Moshevsky. Se calcularon los elementos de matriz de interacción entre las protones y el fonón de acuerdo al desarrollo hecho en la sección 3, por lo que el elemento de matriz es

$$2\sqrt{15} (-1)^{J_2+1} \frac{1}{J_2} \sqrt{\frac{1}{2}} \langle 1112 | V | 2 \rangle K \left(\begin{matrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{matrix} \right) \frac{1}{J_1} \frac{1}{J_2} \sqrt{1+(-1)^{J_1+J_2}} \quad (53)$$

$$+ (-1)^{J_1+J_2} \langle 1112 | V | 1 \rangle$$

donde $K \propto \eta$. Para las funciones de onda radiales se utilizó la misma fase que la definida en las tablas de Brody-Moshinsky²⁾. No ha sido necesario suponer que los elementos de matriz de r^2 son constantes, porque en el cálculo interviene sólo el nivel $0g9/2$; dado que el estado $(1p1/2)^2$ sólo pueda tener momento angular cero y por lo tanto no pueda acoplarse con el fonón.

Para la evaluación de los elementos de matriz de la fuerza de corto rango, se utilizó el método de Brody-Moshinsky, que está detallado en el apéndice 2.

Los elementos de matriz de los operadores de transición E2 y M1, que fueron definidos en (46) y (47), se calcularon de acuerdo a técnicas standard y los resultados obtenidos se encuentran en el apéndice 3.

a. Elección de parámetros.

Los parámetros que se han introducido son bastante numerosos, y por lo tanto es importante encontrar maneras de reducirlos. Los parámetros que han aparecido son: ω , V_0 , V_1 , d = Energía del estado $0g9/2$ - energía del estado $1p1/2$; $\chi = \sqrt{\frac{\hbar\omega}{2C}}$; K ; G_2 y g . Como la energía del fonón es independiente de los demás parámetros, se pueda utilizar como un parámetro para adimensionalizar las energías quedando de esa forma todos los resultados en unidades de la energía del fonón. Por lo tanto, si fijamos la energía del fonón a partir del valor de la energía del estado 2^1 , hemos reducido en uno el

número de datos y de parámetros.

Para el caso de los niveles $0g_{9/2}$ y $1p_{1/2}$, se observa que los elementos de matriz de la fuerza gaussiana que conectan estados con spin cero varían como ρ^2 , mientras que los que conectan estados con spin uno varían como ρ^3 , cuando el rango de la fuerza varía entre 1.5 y 2.4 fm, como se puede notar en la tabla V. Por lo tanto se puede fijar el valor del rango en 2 fm y reducir en uno los parámetros del cálculo.

Variando V_s y V_t en las zonas en que el ajuste con los datos experimentales es relativamente razonable, se observó que V_t no tenía prácticamente ninguna influencia, por lo que se utilizó siempre $V_s = V_t$.

γ se fijó de tal manera que la probabilidad de transición del primer estado excitado al fundamental tenga el valor experimental. Para G_R se utilizó la estimación del modelo hidrodinámico, es decir $G_R = Z/A$; y g se obtuvo a partir de datos experimentales existentes para los núcleos de In.

De esta manera, se han reducido a tres los parámetros libres, es decir $V = V_s$; K y d , pero hay dos datos experimentales menos para ajustar: la energía del 2^1 y $B(E2, 0^1 \rightarrow 2^1)$.

b) Resultados obtenidos.

El parámetro d sólo tiene influencia significativa sobre la posición del estado 0^2 . La energía del estado 0^2 decrece cuando d aumenta debido a que el "gap" que aparece por la fuerza de corto rango es más grande cuando los estados de partícula independiente están más próximos.

El signo de d es tomado de tal manera que el orden de los niveles en los núcleos de In sea el apropiado, es decir que el $0g_{9/2}$ sea el nivel fundamental y el $1p_{1/2}$ sea el estado excitado, siendo su energía menor que 0.5 MeV. Esto implica que los niveles de las "partículas sin interacción" tienen que tener el orden inverso, dado que el $1p_{1/2}$ no puede interactuar con el fondo mediante la fuerza cuadrupolar y el $0g_{9/2}$ sí le hace.

Cuando K aumenta, el centro de gravedad de los cinco niveles excitados distintos del 2^1 aumenta, lo cual puede ser interpretado como que el estado 2^1 queda más ligado debido a la coherencia entre la fuerza protón-fonón y los términos fonón-fonón. También el nivel 2^2 pasa a tener más energía que el estado 4^1 . Para poder ajustar el espectro de energías, los dos efectos sugieren que un rango posible para K es $2.3 \gg K \gg 1.6$.

Los valores de V también influyen mucho sobre esos cinco niveles. Existe una zona en la que los niveles se juntan, en acuerdo con los datos experimentales. Esta región es para $V \sim 40/\omega$ ($K = 2.3$); $\sim 45/\omega$ ($K = 2.0$) y $\sim 30/\omega$ ($K = 1.6$).

El hecho de que los niveles nunca están suficientemente juntos para $K = 2.9$ favorece la estimación hecha previamente para el rango de K .

La posición del nivel 4^1 es completamente insensible a todas las parámetros y es un poco menor que su valor experimental. Sin embargo, existen dos ajustes bastantes razonables si imponemos la condición de que las desviaciones de los valores experimentales para los cinco niveles excitados sea lo más pequeña posible ($K = 2.3$) o si pedimos que el orden de los niveles sea el mismo que el orden experimental pero admitimos que la energía absoluta del nivel 2^1 no ha sido suficientemente disminuida ($K=2.0$). En ambos casos $d \sim .21/\omega$ y $V \sim 40/\omega$ o $30/\omega$.

En la figura 4 están las energías de los diversos estados que se obtuvieron al variar los parámetros, en unidades de la energía del estado 2^1 . En línea llena están los estados con $I = 2$, en rayas los estados con $I = 0$ y con puntos los estados con $I = 4$.

En la figura 5 se encuentran los cuadrados de los elementos de matriz reducidos del operador $E2$ entre los distintos niveles. En las transiciones entre niveles con $I = 2$ está incluido el operador $M1$ de tal forma que la probabilidad de transición se pueda estimar suponiendo que el número graficado es el elemento de matriz reducido del operador $E2$; es decir se ha graficado

$$\left| \langle J_{\text{inicial}} \parallel E2 \parallel J_{\text{final}} \rangle \right|^2 + \frac{14770}{(\text{Energía experimental de la transición en MeV})} \left| \langle J_{\text{inicial}} \parallel M1 \parallel J_{\text{final}} \rangle \right|^2$$

Todos los cuadrados de elementos de matriz están en unidades de $e^2 10^{-52} \text{ cm}^4$ con la única excepción de la transición $2^1 - 2^1$, en la que se ha graficado el módulo del elemento de matriz en unidades de $e^2 \text{ fm}^2$.

Es especialmente interesante hacer notar que se pueden ajustar simultáneamente el valor experimental del momento cuadrupolar estático (curva c) y el $B(E2, 0^1 - 2^1)$ (curva 4). Como se predice teóricamente, los elementos de matriz de Q aumentan con K. En las regiones de mejor ajuste con las energías, el valor obtenido para Q es un poco menor que su valor experimental, pero es muy próximo a su límite inferior.

Como se dijo previamente, el oscilador armónico puro predice (además de la transición $0^1 - 2^1$) tres elementos de matriz no nulos entre los estados que se consideraron. Los cuadrados de los elementos de matriz reducidos, tomando $B(E2, 0^1 - 2^1) = 3000$, para las transiciones $0^2 - 2^1$ (curva 5); $2^1 - 2^2$ (curva 2 y b) y $2^1 - 4^1$ (curva 1) son respectivamente 2.000; 10.000; 18.000. Los valores experimentales son (para el Cd^{114}) 955 ± 185 ; 6.950 ± 1.550 y 19.000 ± 2200 respectivamente. El último no tiene un cambio significativo dentro del modelo, pero los dos restantes se obtienen dentro de los resultados experimentales para los valores de los parámetros citados previamente.

La transición $0^1 - 2^2$ (curva 6) está bien reproducida también, pero las transiciones que corresponden al decaimiento del estado 2^3 , es decir $2^3 - 2^0$ (curva 3 y a) y $2^3 - 0^1$ (curva 7); los resultados experimentales resultan 4 veces más chicos y 10 veces más grande que los resultados predichos. Por lo tanto, la información sobre las probabilidades de transición es reproducida muy razonablemente si se supone que hay sólo transiciones E2, exceptuando las transiciones que desprecian el nivel 2^3 .

La inclusión de las contribuciones de las transiciones M1 hace empeorar la situación. La transición $2^2 - 2^1$ resulta ser dos veces el valor experimental, y en la transición $2^3 - 2^1$ aumenta el desacuerdo.

Sin embargo, es difícil de extraer un resultado definitivo de la contribución de las transiciones M1, mientras no existan mediciones sobre las componentes M1 en la

desexcitación de los niveles. Por otro lado, teóricamente, las contribuciones de partícula independiente y de los fonones son siempre proporcionales y de signo contrario, al menos para las dos transiciones discutidas, siendo prácticamente independientes de los parámetros. Por lo tanto, con un ajuste razonable de g_p y g se puede hacer desaparecer prácticamente la contribución de M1 aunque los valores de g que resultan no serían coherentes con los conocidos experimentalmente.

Por lo tanto, con parámetros muy razonables existe un ajuste relativamente bueno de los resultados conocidos experimentalmente. El hecho de que el valor predicho para el momento cuadrupolar del estado 2^1 sea un poco pequeño, con el hecho adicional de que el nivel 2^1 tiene un poco más energía que la necesaria para obtener el espectro correcto, indican que las anarmonicidades introducidas no son suficientes, y que por lo tanto no es completamente lícito despreciar los términos cúbicos que se han despreciado.

Tabla IV

Datos experimentales para los isótopos del Cd

	106	108	110	112	114	116
Energía 2^1	630	633	636	618	558	587
Energía 0^2				1230(1.99)	1133(2.03)	1222(2.34)
Energía 2^2		1475(2.34)	1473(2.25)	1310(2.12)	1208(2.16)	1222(2.34)
Energía 4^1		1505(2.38)	1540(2.35)	1413(2.29)	1282(2.29)	1222(2.34)
Energía 0^3				1460(2.36)	1305(2.34)	1382(2.76)
Energía 2^3				1468(2.38)	1363(2.44)	
$B(E2, 0^1 \rightarrow 2^1)$	4700	5350±500	4590±540	5140±600	5100±200	5800±680
$B(E2, 0^1 \rightarrow 2^2)$			220±70	109±40	90±10	217±33
$B(E2, 0^1 \rightarrow 2^3)$				66±13	65±12	
$B(E2, 0^2 \rightarrow 2^1)$					985±185	990±185
$3B(E2, 2^2 \rightarrow 2^1)$			6500±2000	7700±1650	7000±1500	4400±950
$3B(E2, 2^3 \rightarrow 2^1)$				140±30	1000±200	
$9B(E2, 4^1 \rightarrow 2^1)$			12800±1500	17800±2200	19000±2200	17550±3700
$Q(2^1)$					-30 ± 25	

Las energías están en MeV; los números que están entre paréntesis son el cociente entre la energía del estado indicado y la energía del estado 2^1 .

Las probabilidades de transición reducidas $B(E2)$ están siempre en $e^2 \text{ fm}^4$, donde e es la carga elemental.

El momento cuadrupolar estático del nivel 2^1 está en barns o lo que es equivalente 10^{-24} cm^2 .

Los valores que se obtienen para las probabilidades de un oscilador armónico puro, de transición reducidas son:

$$\frac{B(E2, 0^2 - 2^1)}{B(E2, 0^1 - 2^1)} = \frac{2}{5} \quad ; \quad \frac{5B(E2, 2^2 - 2^1)}{B(E2, 0^1 - 2^1)} = 2 \quad ; \quad \frac{9B(E2, 4^1 - 2^1)}{B(E2, 0^1 - 2^1)} = \frac{18}{5}$$

Todos los demás elementos de matriz son nulos.

Tabla V

Valor de los elementos de matriz $\langle (j_1 j_1) J_1 M_1 | \bar{\pi} | (j_2 j_2) J_2 M_2 \rangle e^{-\frac{1}{2} \frac{J_1^2 + J_2^2}{I}}$

En la tabla los elementos de matriz están multiplicados por cien, siendo negativos los que están subrayados.

		Rango en J_2											
j_1	j_2	J	S	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9	2.0	2.1	2.2	2.3	2.4
1/2	1/2	0	0	139	159	180	203	226	251	277	304	352	360
		1		71	89	107	129	153	178	206	236	268	302
1/2	3/2	0	0	<u>103</u>	<u>114</u>	<u>125</u>	<u>133</u>	<u>142</u>	<u>150</u>	<u>156</u>	<u>161</u>	<u>166</u>	<u>169</u>
		1		18	22	27	32	38	43	49	55	61	67
3/2	3/2	0	0	315	350	383	417	450	484	518	551	585	619
		1		113	137	164	192	221	251	281	312	344	377
3/2	5/2	2	0	104	121	140	162	184	209	234	263	292	322
		1		97	121	145	171	198	226	255	285	316	348
3/2	5/2	4	0	50	57	66	74	84	94	106	119	133	148
		1		58	72	89	107	126	148	171	196	223	251
3/2	5/2	6	0	35	41	47	53	59	66	74	82	91	100
		1		47	60	74	90	107	126	147	170	194	220
3/2	5/2	8	0	25	29	34	39	44	50	56	62	68	75
		1		43	56	71	89	109	133	159	187	219	254

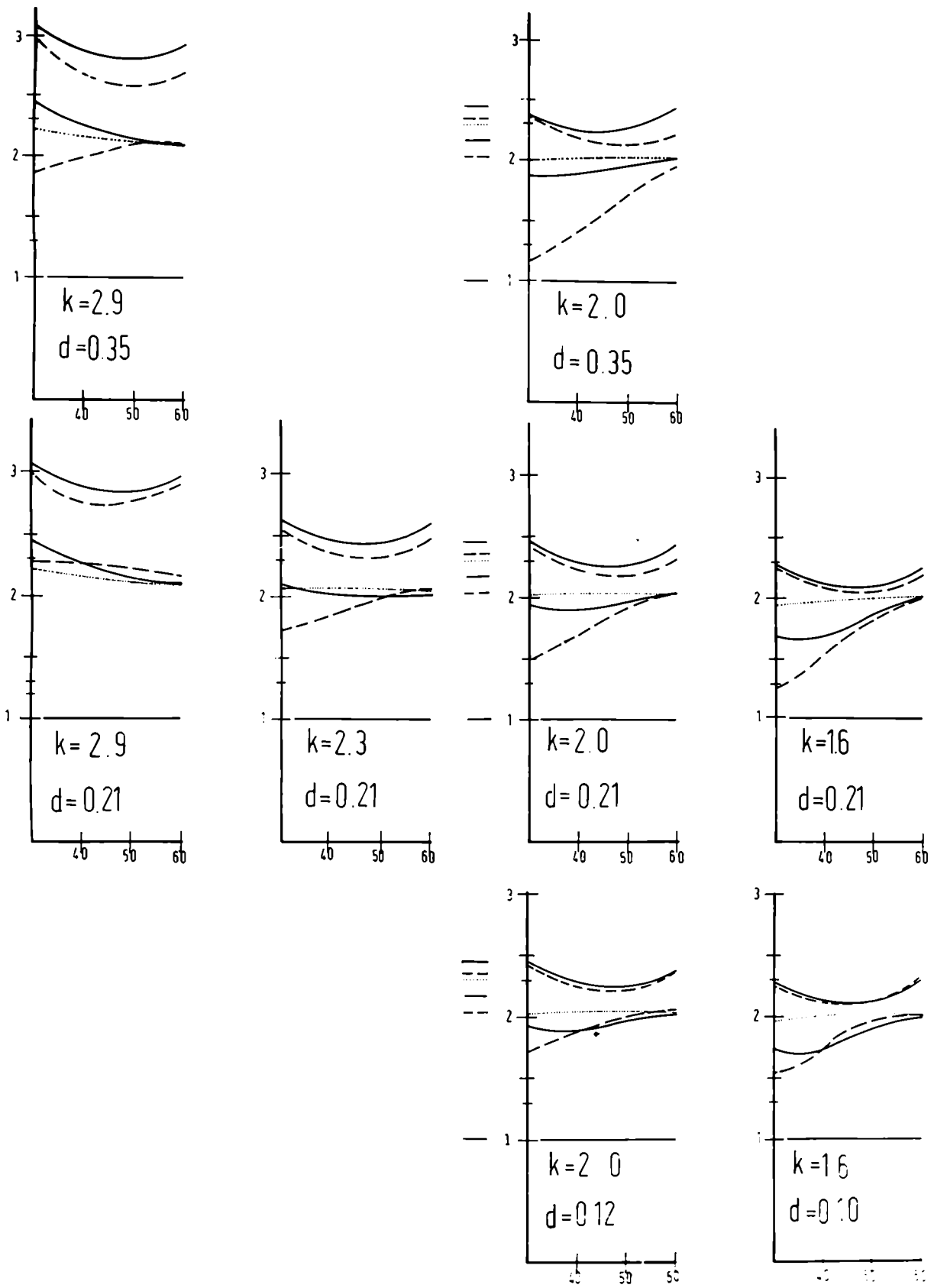


Figura 4

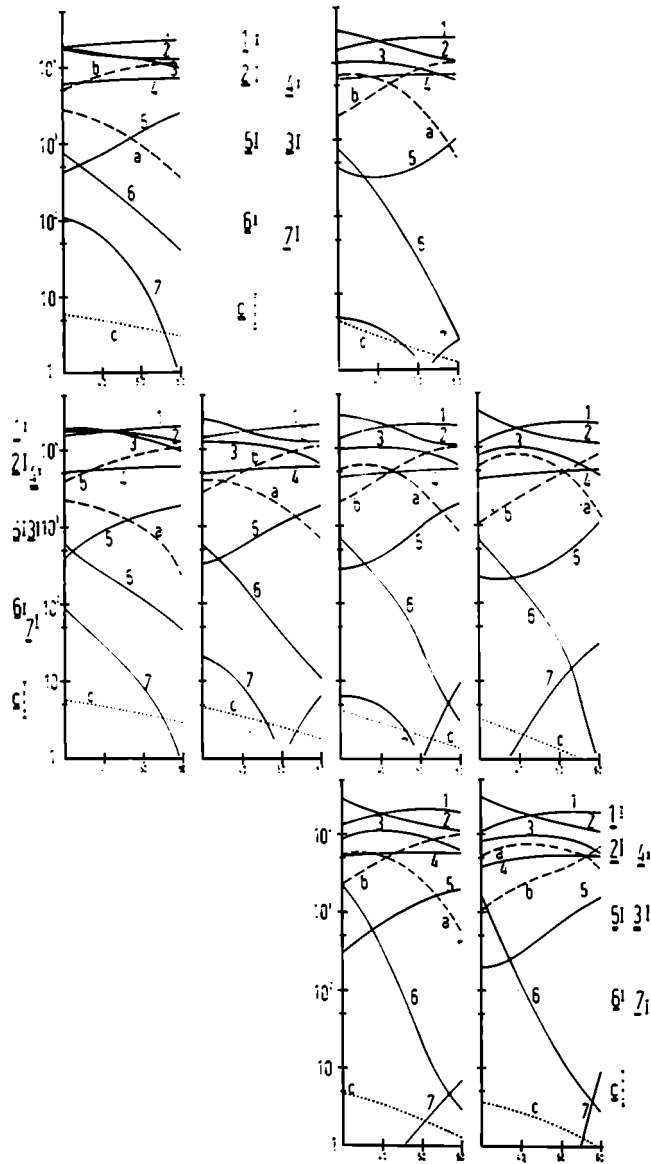


Figura 5

2.- Introducción de términos anarmónicos en los neutrones.

Con el modelo de Ras se han tratado los términos cúbicos de la interacción cuadrupolar neutrón-protón, pero no han sido retenidos los términos similares de la interacción entre los neutrones. Estos términos se pueden tratar a partir de una descripción fenomenológica, tal como se hizo en la sección 4 o a partir de una descripción microscópica de los grados de libertad de los neutrones. Este último tratamiento debería ir acompañado de una descripción microscópica de los términos armónicos del hamiltoniano del operador cuadrupolar y del cálculo de $Q_{\mathbf{R}}$.

En esta subsección se estudiará la descripción fenomenológica, para la cual es necesario hacer inicialmente una elección de los parámetros que se usan con el modelo de Ras e introducir en el hamiltoniano un término de la forma

$$e^{(-)} \{ U^{(+)} U^{(-)} \} \quad (54)$$

Habría que considerar también términos de la forma $e^{(+)} U^{(+)} U^{(-)}$, pero no se hace porque los elementos de matriz de ambos operadores son casi siempre proporcionales (la única excepción es el elemento de matriz que conecta el estado fundamental con el estado de tres fonones y momento angular cero), por otro lado esto introducirá un parámetro libre adicional que no agregaría nada a la descripción del sistema. Esta reducción en el número de parámetros puede ser totalmente lícita, pues aun cuando sólo se considera el fondo adiabático y los términos cúbicos no se deben a un efecto coherente de los nucleones, $e^{(-)}$ puede ser tan grande como $e^{(+)}$. Por lo tanto sólo se podrán obtener ideas cualitativas de la influencia de las anarmonicidades. Si se supone que el modelo de Ras más estas anarmonicidades en los neutrones constituyen una imagen satisfactoria del núcleo que permita obtener ideas cuantitativas, es necesario hacer un cálculo microscópico de $e^{(-)}$ y $e^{(+)}$, cambiando en forma coherente con los resultados experimentales para los isótopos de In las energías de partícula independiente de los protones

cuando se pasa de un isótopo de Cd a otro.

En las figuras 6 y 7 están graficados los resultados de introducir los términos cúbicos entre los neutrones. La convención de los gráficos es la misma que la de los gráficos 4 y 5 respectivamente. Los valores de los parámetros utilizados son los mismos que daban mejor ajuste en la Sección 5-1, tal como se indica en los gráficos.

Se realizaron cálculos para valores diferentes de los parámetros y las características generales son coincidentes con las de las figuras.

Los estados con momento angular dos son bastante afectados cuando se introducen los términos cúbicos, mientras que los estados con momento angular cero y cuatro no son mayormente modificados. Se observa el mismo tipo de resultados con las probabilidades de transición. Cuando $\epsilon^{(1)}$ aumenta se produce un cambio de estructura en los niveles 2^2 y 2^3 , pasando este último a tener características colectivas, mientras el nivel 2^2 adquiere características de partícula independiente. Las transiciones entre el nivel 0^2 y el 2^1 dependen ligeramente de las anarmonicidades, dado que éstas modifican la estructura del nivel 2^1 , lo que también se nota por el cambio muy grande que tiene el momento cuadrupolar estático, que para $\epsilon^{(2)} > .1$ tiene un elemento de matriz del mismo orden que el de la transición entre el estado 2^1 y el nivel fundamental.

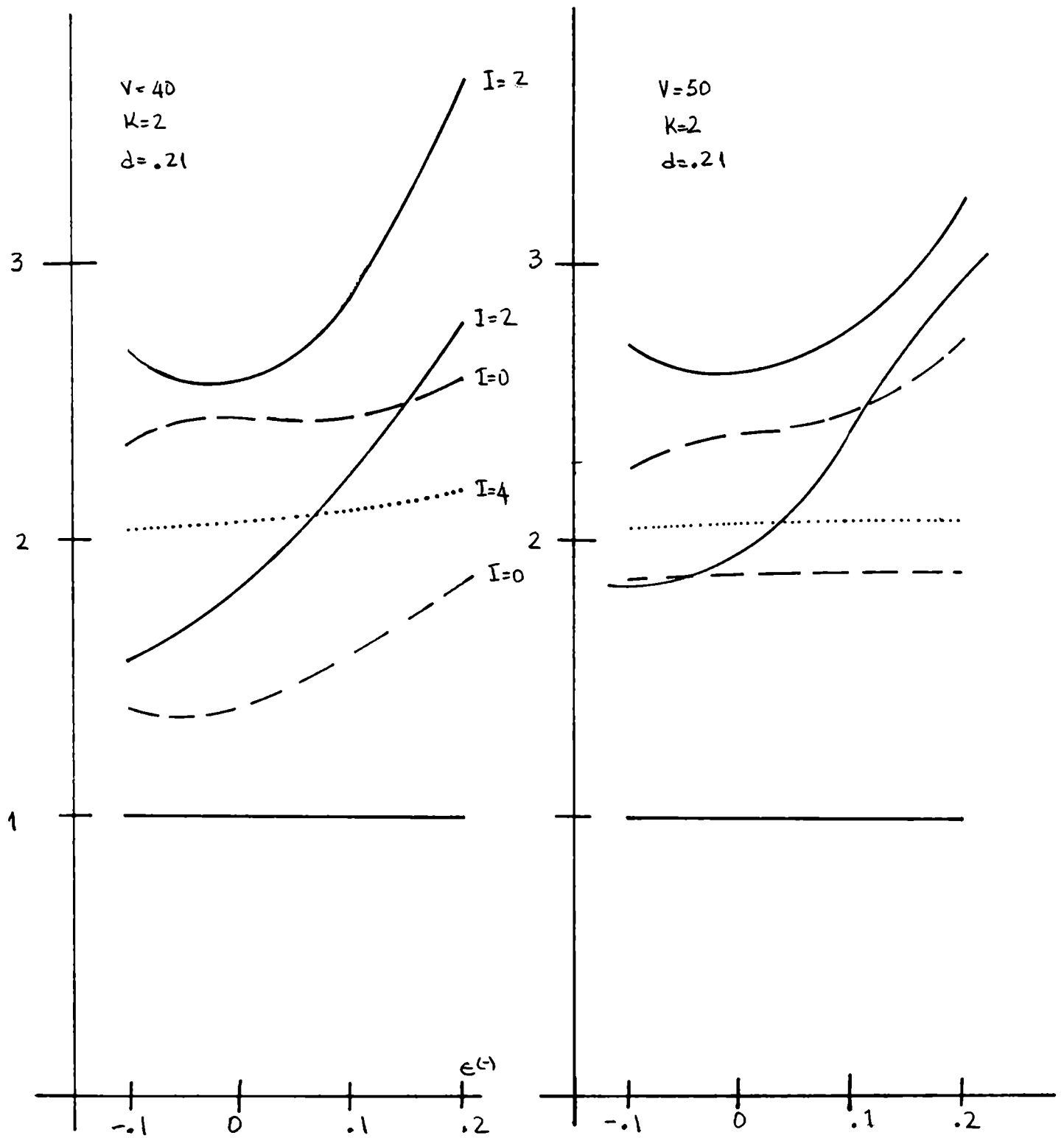


FIGURA 6.

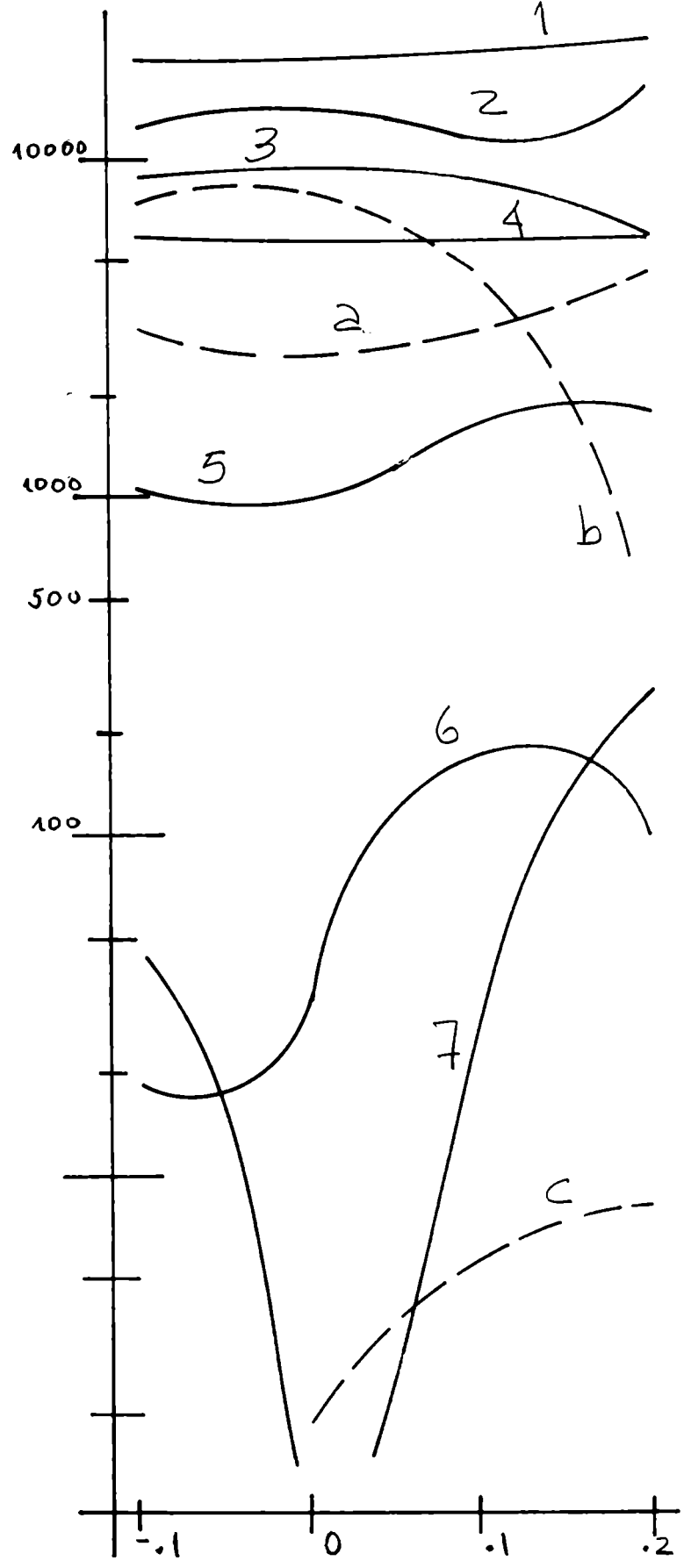
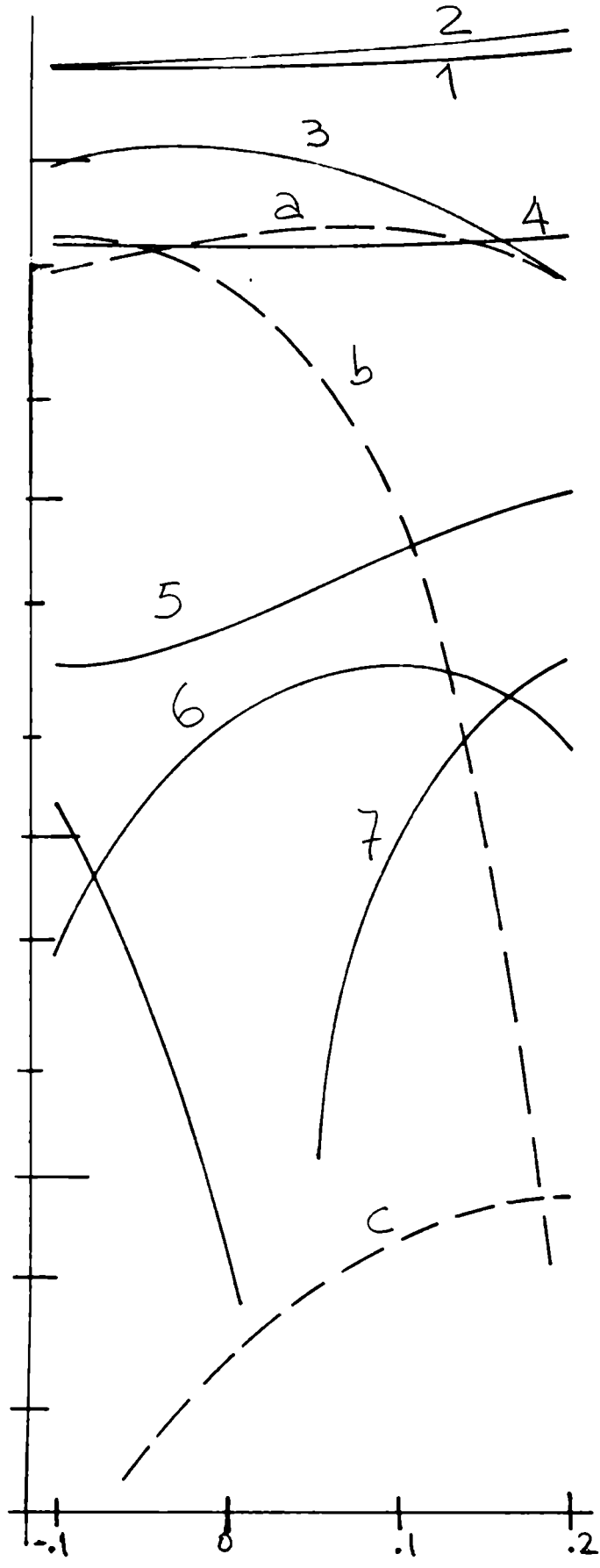


FIGURA 7

3.- Cálculo microscópico de $\epsilon^{(-)}$ y $\epsilon^{(+)}$.

Para el cálculo microscópico de $\epsilon^{(-)}$ y $\epsilon^{(+)}$ se utilizaron las definiciones dadas en las Secciones 2 y 4. Es necesario inicialmente elegir los niveles de partícula independiente que se quieren considerar y sus energías relativas.

Para los protones se tomaron en cuenta los niveles que se llenan entre 28 y 50 partículas, es decir el $0f_{7/2}$; $1p_{3/2}$; $1p_{1/2}$; $0g_{9/2}$. Para los neutrones se consideraron el $1d_{5/2}$; $0g_{7/2}$; $1d_{3/2}$; $2s_{1/2}$ y $0h_{11/2}$ que son los que se encuentran entre 50 y 82 partículas.

En cuanto a las energías de partícula independiente, se utilizaron las de Kisslinger y Sorensen⁶⁾ (K-S), que ellos encontraron como las energías que mejor ajustaban los espectros de los núcleos impares en un modelo coherente con el que usamos en esta sub-sección.

Se observó que los niveles $0f_{7/2}$ y $1p_{3/2}$ de protones no tienen ninguna influencia ni en los términos armónicos ni en los términos anarmónicos, por encontrarse muy lejos del nivel de Fermi. A pesar de ello fueron retenidos en los cálculos. Por otro lado, las energías de los niveles de neutrones influyen en forma muy crítica, como se puede ver en forma intuitiva al considerar las contribuciones a $\epsilon^{(-)}$ de los términos con $j_1=j_2=j_3$. A menos de un factor, que es función de la frecuencia, de χ y de las energías de partícula independiente; y que es el mismo para todos los términos; las contribuciones son de la forma

$$(-)^{j_1} \frac{V_j^2 (U_j^2 - V_j^2)}{(E_j^2 - \dots)} \dots \quad (55)$$

(para $\epsilon^{(-)}$ es necesario reemplazar en el numerador E_j^2 por U_j^2). Los coeficientes de Racah son mayores que cero para todo j , y $(-)^{j_1}$ tiene el mismo signo también para todo j , con lo que los signos de las contribuciones relativas serán positivos o negativos de acuerdo a que U_j^2 sea mayor o menor que V_j^2 .

En la tabla 6 están las energías de los distintos niveles para los diversos isótopos del Cd, que utilizaron K-8. Se puede observar que los niveles tienen energías similares. Cuando se calcula el efecto de la fuerza de apareamiento para los distintos isótopos del Cd se observa que hasta el Cd¹¹² todos los niveles (con la excepción del 1d5/2) tienen menos de la mitad de las partículas. En el Cd¹¹² el nivel 0g7/2 queda semilleno, y cuando se aumenta A empieza a llenarse el 0h11/2, que simultáneamente se acerca mucho al nivel de Fermi, por lo que domina las contribuciones de los restantes niveles a $\epsilon_n^{(-)}$.

Por lo tanto, si se calcula con una distancia relativa menor entre el 0g7/2 y el 0h11/2 se consiguen valores de $\epsilon_n^{(-)}$ menores, dado que la influencia de ambos niveles se contrarresta.

En la tabla 7 están los resultados obtenidos utilizando las energías de K-8 para el Cd¹¹², Cd¹¹⁴ y Cd¹¹⁶. La nomenclatura es ligeramente distinta de la utilizada en las secciones 2 y 4 porque las sumas se han realizado sólo sobre protones o neutrones, como se indica con los subíndices p o n. Se ha llamado

$$C_j = \left[\sum_l |q_l| \right] \frac{E_l}{(E^2 - \epsilon_j^2)} \Bigg|^{-1} \quad C = +1/2$$

$$\Lambda = \left[\langle \omega \rangle \kappa_S^2 \sum_{j2} |q_{j2}| \right] \frac{E}{(E^2 - \epsilon_j^2)} \Bigg|^{-1/2}$$

$$V_j^{(p)} = \pm 5 \left[\sum_l (V_l^{(p)})^2 + \frac{1}{2} (V_l^{(p)} - V_l^{(n)})^2 \right] \frac{q_l}{(E^2 - \epsilon_j^2)} \frac{1}{(E^2 - \epsilon_j^2)}$$

$$\left[\Lambda_S^2 \kappa_S^2 \right]$$

$$E^{(p)} = \Lambda_S - V_S^{(p)}$$

quedando

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_+} + \frac{1}{C_-} \quad) \quad \Lambda C = \Lambda_+ C_+ + \Lambda_- C_-$$

por lo tanto

$$E \pm C_{\pm} = -\sqrt{E} \frac{\Lambda_+ \Lambda_- C_{\pm}}{[\Lambda_+ C_+ + \Lambda_- C_-]^{1/2}} \left[\Lambda_+ C_+ \right]^{1/2} + \Lambda_- C_- \right]$$

Se ha considerado como unidad al parámetro de tamaño del oscilador armónico, quedando por lo tanto todas las energías en MeV y los cuadrados de las distancias en unidades de $1.0198 \times 10^{-26} \text{ A}^{1/3} \text{ cm}^2$.

Λ_+ y Λ_- han sido multiplicados por cien; todos los C_+ y C_- han sido multiplicados por mil; pero $\xi_n^{(\pm)}$ han sido multiplicados por diez mil.

En la tabla 8 se encuentran $\xi_n^{(\pm)}$ para distintas energías de partícula independiente. Se observa allí que la magnitud de $\xi_n^{(\pm)}$, y aún su signo, es fuertemente independiente de la distancia relativa de los niveles $0g_{7/2}$ y $0h_{11/2}$.

Tabla VI

Energías de partícula independiente utilizadas ⁶⁾

Protones

NA	0f5/2	1p3/2	1p1/2	0g9/2
108	-0.0776	0.5867	1.6487	2.7630
110	-0.0847	0.5853	1.6344	2.6038
112	-0.0914	0.5839	1.6203	2.4815
114	-0.0980	0.5825	1.6069	2.3594
116	-0.1042	0.5811	1.5937	2.2375
118				

Neutrones

A	1d5/2	1d3/2	0g7/2	2s1/2	0g11/2	Δ	λ
108	-0.0411	2.9608	1.1611	1.3461	2.5358	1.240	0.789
110	-0.0335	2.9319	1.1464	1.3379	2.5297	1.280	1.075
112	-0.0263	2.9037	1.1322	1.3298	2.5236	1.288	1.357
114	-0.0193	2.8764	1.1184	1.3220	2.5176	1.278	1.639
116	-0.0125	2.8498	1.1050	1.3144	2.5116	1.260	1.912
118	-0.0060	2.8239	1.0920	1.3069	2.5056	1.231	2.166

Tabla VII

Resultados obtenidos con las energías de Kisslinger y Sorensen

A = 112

	Λ_1	Λ_2	$\epsilon_1^{(1)}$	$\epsilon_1^{(2)}$	ϵ_2	ϵ_3	ϵ	$\Lambda\epsilon$	$-\epsilon_n^{(1)}$	$\epsilon_n^{(2)}$	$\epsilon_n^{(3)}$	$\epsilon_p^{(1)}$
0.6	836	227	454	78	119	377	91	650	302	1222	<u>27</u>	178
0.7	774	210	368	85	118	356	88	577	227	919	<u>34</u>	181
0.8	723	195	308	90	116	331	86	513	174	703	<u>41</u>	180
0.9	681	184	263	95	114	304	83	452	135	540	<u>46</u>	175
1.0	645	173	225	97	112	272	79	395	105	414	<u>52</u>	165
1.1	614	165	192	98	109	237	75	337	81	313	<u>76</u>	150
1.2	586	157	160	94	106	198	68	278	61	230	<u>83</u>	130
1.3	562	150	126	85	103	155	62	215	44	160	<u>88</u>	106
1.4	540	143	88	67	100	109	52	149	30	100	<u>114</u>	76

A = 114

0.6	843	227	228	68	115	374	88	639	984	1205	262	178
0.7	781	210	205	74	113	353	86	568	765	905	277	182
0.8	730	196	189	80	112	332	83	504	611	692	288	180
0.9	688	184	177	86	109	307	80	445	497	532	297	175
1.0	652	173	165	89	107	269	77	388	410	408	302	164
1.1	621	164	152	91	105	234	72	331	342	308	305	149
1.2	594	156	135	90	102	195	67	272	288	226	305	129
1.3	570	149	112	82	99	152	60	210	242	156	301	104
1.4	548	143	82	65	96	105	50	144	20	96	295	74

A = 116

0.6	822	228	28	53	110	371	89	518 ²	1342	1188	489	179
0.7	761	211	56	60	108	351	83	550	1050	894	521	182
0.8	711	196	77	65	106	327	80	489	838	684	547	181
0.9	669	184	93	71	104	299	77	431	685	669	568	175
1.0	634	173	104	77	102	267	74	377	568	404	585	165
1.1	604	164	109	80	99	232	69	322	477	305	597	150
1.2	577	156	108	81	96	193	64	265	403	223	605	129
1.3	553	149	97	76	93	150	58	205	343	154	610	104
1.4	532	142	75	62	90	103	48	140	294	94	609	73

Unidades de los resultados: se usó como unidad de longitud el parámetro de tamaño del oscilador armónico. Las energías están en Mev.

En las tablas se multiplicó por mil todos los resultados, con la excepción de Λ_1 y Λ_2 que fueron multiplicados por cien; y $\epsilon_n^{(1)}$ que fue multiplicado por diez mil.

Los números subrayados son negativos.

Tabla VIII

Variación de $\epsilon_n^{(-)}$ con las energías de partícula independiente

A	ω	1d3/2	1d3/2	0g7/2	2s1/2	0h11/2	(-)
114	0.7	0	3	1.4	1.6	2.5	-.505
114	0.7	0	3	1.4	1.6	2.5	-.564
114	0.7	0	3	1.4	1.6	2.0	-.142
114	0.7	0	3	1.4	1.6	1.7	-.088
114	0.7	0	3	1.4	1.6	1.4	.325
114	0.7	0	2.5	1.4	1.6	2.0	-.232
114	0.7	0	2.75	1.4	1.6	2.0	-.172
114	0.7	.3	3	1.4	1.6	2.0	-.855
114	0.7	0	3	1.1	1.4	2.5	-.764
114	0.7	0	3	1.15	1.4	2.5	-.719
114	0.7	0	3	1.2	1.4	2.5	-.676
114	0.7	0	3	1.3	1.4	2.5	-.595
114	0.7	0	3	1.4	1.4	2.5	-.523
114	0.7	0	3	1.5	1.4	2.5	-.459
114	0.7	0	3	1.6	1.4	2.5	-.401
114	0.7	0	3	1.7	1.4	2.5	-.349
114	0.7	0	3	1.8	1.4	2.5	-.302
114	0.7	0	3	1.3	1.5	2.5	-.587
114	0.7	0	3	1.3	1.6	2.5	-.578
114	0.7	0	3	1.3	1.75	2.5	-.564
114	0.7	0	3	1.3	1.4	2.35	-.492
114	0.7	0	3	1.3	1.4	2.65	-.693
112	0.7	0	3	1.4	1.6	2.0	-.131
116	0.7	0	3	1.4	1.6	2.0	-.104
110	1.0	0	2.2	.42	1.9	2.4	.388
112	1.0	0	2.2	.42	1.9	2.4	-.185
114	1.0	0	2.2	.42	1.9	2.4	-.585
116	1.0	0	2.2	.42	1.9	2.4	-.668
114	0.7	0	2.0	.42	1.9	2.4	-.483
114	0.7	0	2.1	1.4	1.6	1.4	.201
114	0.7	0	2.1	1.4	1.6	1.7	-.104
114	0.7	0	2.1	1.4	1.6	2.0	-.400
114	0.7	0	2.1	1.4	1.6	2.3	-.673
114	0.7	0	3	1.4	3.0	2.2	-.121

CONCLUSIONES

La causa de haber elegido los isótopos del Cd para estudiar en ellos la influencia de los términos anarmónicos del hamiltoniano cuadrupolar fue la gran cantidad de datos experimentales que se han medido cuyas características más notables son:

1.- Cumplen muy aproximadamente las reglas de selección del oscilador armónico para el decaimiento del nivel 2^2 al estado fundamental.

2.- Cambio de estructura del nivel 2^1 , que se manifiesta en un momento cuadrupolar estático grande y la disminución de los elementos de matriz que lo conectan con el triplete, variando estos con A.

3.- Aumento de Q con A.

4.- Orden de los niveles del triplete; el estado 0^2 se encuentra a veces (Cd^{112} y Cd^{114}) con menos energía que los otros estados del triplete, y en Cd^{116} es posible que tenga más energía que los otros dos estados; el estado 2^2 tiene siempre menos energía que el estado 4^1 .

5.- Aparición de estados que por sus energías y probabilidades de transición corresponden a un fonón no adiabático o excitaciones de pares de cuasipartículas con momento angular cero.

Utilizando una descripción fenomenológica de los términos cúbicos, tal como la discutida en la Sección 4 se pueden introducir varias de estas características, es decir se puede explicar el cumplimiento de las reglas de selección del oscilador armónico, la variación de los elementos de matriz de las transiciones desde el triplete, y la variación de Q con A. Para ello es necesario que $\epsilon^{(-)}$ aumente (siendo positivo) cuando se pasa de un isótopo de Cd a otro con mayor A. Esto es posible en una descripción microscópica variando la posición relativa de los niveles de neutrones y la distancia entre el $1p_{1/2}$ y $0g_{9/2}$ para los protones. Lo que no se puede obtener de una descripción microscópica de los términos cúbicos, tal como los hemos tratado, es el orden relativo de los niveles 2^2 y 4^1 . Cuando se hizo el cálculo con el modelo

de Raz se obtuvo el orden apropiado, y esto se debe a que consideramos términos de interacción entre estados con $J=4$ y estado con $J=2$. En el lenguaje de microscopióes eso implica retener términos de la forma $\{u^-, u^+, u^+\}$ que son los únicos términos cúbicos que pueden generarse de un hamiltoniano cuadrupolar que conecten un estado con $I=4$ y un estado con $I=2$.

Se varió el elemento de matriz de la fuerza gaussiana del estado con $J=4$, obteniéndose variaciones de hasta un 10% en la energía del estado con $I=4$ (para cambios) en un factor 1.5 de la magnitud de la fuerza, manteniéndose los elementos de matriz de los estados con $J=4$ constantes. Por otro lado, solamente variaba la energía del estado con $I=4$, manteniéndose los demás estados dentro del 2% de los valores que tenían para la gaussiana, lo que nos asegura que la posición del nivel 4^1 depende del acoplamiento entre el estado de $J=4$ con el estado de dos fonones.

Si se hace un cálculo con el modelo de Raz utilizando para las energías de partícula independiente de los protones las que se obtienen con el mismo valor de I y u^{\pm} que ajustan los datos de los isótopos del In (es decir la distancia relativa entre el nivel $1/2$ y el $9/2$; y para e^+ y e^- los calculados con las energías de K-6, se obtienen resultados que están en completo desacuerdo con los datos experimentales. Esto nos permite concluir que la bondad de los resultados obtenidos con el modelo de Raz se debe a que hemos simulado las características más notables que aparecen en la realidad, es decir, hemos retenido los términos cúbicos que acoplan el fonón adiabático consigo mismo y con los fonones no adiabáticos (uno para cada momento angular par). No podemos explicar por esa razón los resultados experimentales que dependen detalladamente de la estructura de los fonones no adiabáticos, como ser la probabilidad de desexcitación del estado 2^3 o el decaimiento M1 del estado 2^2 . Suponer que el fonón no adiabático con $J=2$ es debido a dos protones en la capa $g_{9/2}$ hace que la magnitud de las transiciones M1 sea excesivamente grande.

En este respecto podemos concluir que en todo cuanto se refiera a la estructura de estados de hasta dos fonones es suficiente retener los términos cúbicos con $J=2$, pero para poder explicar el orden de los niveles es necesario considerar términos que conecten fonones con distinto momento angular.

APENDICE 1

Características de los operadores de creación de fermiones³⁾

Sea $b_m^{(j)†}$ el operador de creación de un fermión de momento angular total j y proyección m , es decir que $b_m^{(j)†} |0\rangle = \psi_m^{(j)}(\vec{r})$ se transforma frente a rotaciones como la m -ésima columna de $D_{m m}^j(R_3)$, y por lo tanto se puede acoplar los operadores $b_m^{(j)†}$ utilizando los mismos coeficientes de Wigner que los utilizados para $\psi_m^{(j)}(\vec{r})$ es decir

$$\{b_m^{(j)†}\}^\dagger = \sum_{m_1} \langle j, m_1 | j, m \rangle L_{m_1}^{(j)†} \quad (A-1-1)$$

es un operador que crea un par de partículas con momento angular J y proyección M . Sin embargo, el operador de aniquilación $b_m^{(j)}$ se transforma como el complejo conjugado $D_{m m}^{j*}(R_3)$, lo que equivale a $(-)^{j-m} D_{m, -m}^j(R_3)$. Por lo tanto conviene definir un nuevo conjunto de operadores de aniquilación $c_m^{(j)}$, de la forma

$$c_m^{(j)} = (-)^{j-m} b_{-m}^{(j)} \quad (A-1-2)$$

los que se transforman frente a rotaciones como la m -ésima columna de $D_{m m}^j(R_3)$ y por lo tanto se los puede acoplar entre sí o con los operadores $b_m^{(j)†}$ utilizando los coeficientes de Wigner usuales.

Una de las características que interesa para los operadores de creación de fermiones son sus reglas de anti-conmutación, las que son

$$\{b_m^{(j)}, b_{m_1}^{(j)}\} = 0 \quad (A-1-3a)$$

$$= \sum_{m_1, m_2} \quad (A-1-3b)$$

Por otro lado, será útil conocer los conmutadores de pares de operadores de creación o el par de un operador de la creación con uno de aniquilación, es decir, los conmutadores de operadores de la forma

$$[b_m^{(j)†}, c_{m_1}^{(j)}] = \sum_{m_2} \langle j, m_2 | j, m \rangle L_{m_2}^{(j)†} \quad (A-1-4)$$

$$A_{12}^{-1+} = \sum_{m,m'} \langle j_1, m_1, m_2 | L_1 \rangle b_{m,m'}^{j_1, j_2, L} \quad (A-1-5)$$

Se calculará el conmutador $[L_1, A_{12}^{-1+}]$, y para los otros se dará sólo el resultado final.

Es

$$j_2^{-1+} = (-1)^{j_2 - m_2} \begin{bmatrix} j_2 & 1 & j_2 \\ -m_2 & 0 & -m_2 + 1 \end{bmatrix} \quad (A-1-6)$$

y por lo tanto

$$[L_1, A_{12}^{-1+}] = - \sum_{L_1} (-1)^{j_2 - m_2} \langle j_1, m_1, m_2 | L_1 \rangle \langle j_2, m_2, m_2 + 1 | L_1 \rangle \langle j_1, m_1, m_2 - 1 | L_1 \rangle A_{12}^{-1+} \\ + \sum_{L_1} (-1)^{j_2 - m_2} \langle j_1, m_1, m_2 | L_1 \rangle \langle j_2, m_2, m_2 - 1 | L_1 \rangle \langle j_1, m_1, m_2 + 1 | L_1 \rangle A_{12}^{-1+} \quad (A-1-7)$$

Efectuando la suma sobre todos los m's en el primer término, se obtiene

$$\sum_{L_1} (-1)^{j_2 - m_2} \langle j_1, m_1, m_2 | L_1 \rangle \hat{L}_1 \langle j_2, m_2, m_2 + 1 | L_1 \rangle A_{12}^{-1+} \quad (A-1-8)$$

Haciendo un cálculo similar con el segundo término, se obtiene para el conmutador

$$\sum_{L_1} (-1)^{j_2 - m_2} \langle j_1, m_1, m_2 | L_1 \rangle \left[\begin{matrix} L_1 & L_1 & L_1 \\ j_1 & j_2 & j_1 \end{matrix} \right] A_{12}^{-1+} + (-1)^{j_2 - m_2} \langle j_1, m_1, m_2 | L_1 \rangle \left[\begin{matrix} L_1 & L_1 & L_1 \\ j_1 & j_2 & j_1 \end{matrix} \right] A_{12}^{-1+} \quad (A-1-9)$$

Si se define un operador \hat{P}_2 , tal que $\hat{P}_2 \psi(2, 2', k) = (-1)^{j_2 - j_2' + k} \psi(2', 2, k)$ la expresión (A-1-9) se puede reducir a

$$\sum_{L_1} \frac{j_1 + j_2 - L_1}{2} \frac{j_1 + j_2 + L_1}{2} \psi(2, 2') A_{12}^{-1+} \quad (A-1-9b)$$

Donde

$$\chi(L_{\mu\nu}) = \left(\sum_{\mathbf{k}} \hat{L}(\mathbf{k}) \langle L_{\mu\nu} | \mathbf{k} \rangle (-) \right) \frac{1}{\epsilon} \quad (A1-10)$$

De igual manera se encuentra que

$$[\hat{A}, \hat{A}^\dagger] = (1 + \sum_{\mathbf{k}} (1 + \hat{p}_k)(1 + \hat{q}_k) \chi(L_{\mu\nu}) \hat{E}^{-1}) \quad (A1-11)$$

APENDICE 2Cálculo de los elementos de matriz de una fuerza gaussiana

Se quieren evaluar los elementos de matriz de una fuerza entre dos partículas de la forma

$$H_{12} = -(V_{1-} \Pi_{-} + V_{1+} \Pi_{+}) e^{-\frac{1}{2} \frac{r_1 - r_2}{f}^2} \quad (A-2-1)$$

donde

$$\Pi_{-} = \frac{1}{4} (1 - \vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2) \quad \text{y} \quad \Pi_{+} = \frac{1}{4} (1 + \vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2)$$

Las funciones de onda entre las que se quieren evaluar los elementos de matriz son de la forma $|l_1, m_1, N, l_2, m_2, R\rangle$, donde $(j_1, j_2) N$ son los números cuánticos que especifican el estado de las dos partículas, N y R son el número de fonones y el momento angular total y su proyección.

Utilizando las propiedades de ortogonalidad de los coeficientes de Clebsch-Gordan, se puede decir que

$$\langle l_1, m_1, N, l_2, m_2, R | H_{12} | l_1, m_1, N, l_2, m_2, R \rangle = \dots \times \langle l_1, m_1, N, l_2, m_2, R | \dots \rangle \quad (A-2-2)$$

El cálculo de los elementos de matriz se realiza en acoplamiento L-S, pasando luego a acoplamiento j-j mediante las fórmulas de transformación

$$|l_1, m_1, N, l_2, m_2, R\rangle = \sum_{j_1, j_2} \dots |j_1, m_1, j_2, m_2, R\rangle \quad (A-2-3)$$

El método que se utilizó fue el método de Hedy-Moshinsky, que consiste en expandir las funciones de onda de las dos partículas, cuya parte radial se supone es la del oscilador armónico, en un producto de funciones de onda del oscilador armónico; una de las cuales es la función de onda del centro de masa de las dos partículas y la otra es la que corresponde al movimiento relativo de ellas. Por lo tanto, se puede

escribir

$$|n, l, \lambda\rangle = \sum_{n' \in NL} \langle n' \in NL, \lambda_p | n, m, l, \lambda_p \rangle |n', NL, \lambda\rangle \quad (A-2-4)$$

donde

$$|n, NL, \lambda\rangle = \sum_{m_l} \langle n, l, m_l, m_l | \lambda_p \rangle K_{nl} \left(\left| \frac{2}{l+1} \right| \right) K_{nl} \left(\left| \frac{2}{l-1} \right| \right) Y_{lm_l} \left(\frac{2}{l+1} \right) Y_{lm_l} \left(\frac{2}{l-1} \right) \quad (A-2-5)$$

La ventaja del método estriba en que las integrales que se deben evaluar son de la forma

$$\begin{aligned} \langle n', NL, \lambda_p | H_c | n, NL, \lambda_p \rangle &= \int_{-1}^1 K_{nl}(r) K_{n'l'}(r) H_{nl}(r) H_{n'l'}(r) r^2 dr \\ &= \sum_p B(nl, n'l', p) I_p \end{aligned} \quad (A-2-6)$$

donde I_p son las integrales de Talmi que se definen como

$$I_p = \int_{-1}^1 r^p H_{nl}(r) H_{n'l'}(r) r^2 dr \quad (A-2-7)$$

y los coeficientes $B(nl, n'l', p)$, para cuya evaluación hay que utilizar las características de los polinomios de Laguerre, están evaluadas en las tablas de Brody-Moshinsky²⁾, lo mismo que los coeficientes $\langle n_l, NL, \lambda_p | n_1 l_1, n_2 l_2, \lambda_p \rangle$.

Por lo tanto, el elemento de matriz puede expresarse como

$$\begin{aligned} \langle n', NL, \lambda_p | H_c | n, NL, \lambda_p \rangle &= \sum_{n'' \in NL} \langle n'' \in NL, \lambda_p | n, m, l, \lambda_p \rangle \times \\ &\int_{-1}^1 K_{n'l'}(r) K_{n''}(r) H_{nl}(r) r^2 dr \end{aligned} \quad (A-2-8)$$

Pasando a acoplamiento j-j y antisimetrizando, se obtiene

$$\begin{aligned} \langle \psi_{12} | H_{12} | \psi_{12} \rangle &= -\frac{1}{2} \int \psi_{12}^* \psi_{12} \sqrt{\frac{z}{(1+z/2)}} \sqrt{\frac{z}{(1+z/2)}} \sum_{\lambda=0}^{\infty} \\ & V_K \hat{\Gamma}^{-1} \int \int \psi_{12}^* \left[K_{12} e^{-\frac{r^2}{2}} \right] \psi_{12} | \psi_{12} \rangle + \\ & + (-)^{1-S} \langle \psi_{12} | \left[\tilde{M}_{12} e^{-\frac{r^2}{2}} \right] | \psi_{12} \rangle \end{aligned}$$

(A-2-9)

donde $V_K = V_S$ si $S = 0$ y $V_K = V_T$ si $S = 1$.

La suposición de que el potencial de interacción es gaussiano se introduce al calcular las integrales de Talmi. Para un potencial gaussiano las integrales de Talmi dan

$$I = \frac{1}{\left[1 + \frac{z}{r^2} \left(\frac{I_0}{M \omega_0} \right) \right]^{1+1/2}} \tag{A-2-10}$$

APENDICE 3

Elementos de matriz de los operadores de probabilidades de transición

Los operadores de transiciones E1 y M1 ya fueron definidos en la página 19 como

$$E_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \hat{\mathbf{r}} \quad (A-3-1)$$

y

$$M1 = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}} \mathbf{e}_k \cdot \hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}} \mathbf{e}_k \cdot \hat{\mathbf{r}} - \frac{e\hbar}{m_0 c} \hat{\mathbf{p}} \cdot \hat{\mathbf{r}} \quad (A-3-2)$$

donde las constantes ϵ_0 , \hbar y m_0 dependen del modelo utilizado.

A) Evaluación de los elementos de matriz reducidos

Es conveniente separar los dos operadores en dos partes; una correspondiente a las transiciones de una sola partícula (en ambos casos el segundo término) y la otra parte correspondiente a transiciones colectivas.

Los elementos de matriz de las transiciones de partícula se evalúan utilizando que³⁾

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{k}, \lambda | \hat{\mathbf{r}} | \mathbf{k}', \lambda' \rangle &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int d\mathbf{r} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \hat{\mathbf{r}} e^{i\mathbf{k}'\cdot\mathbf{r}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int d\mathbf{r} e^{-i(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\cdot\mathbf{r}} \hat{\mathbf{r}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int d\mathbf{r} e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} \hat{\mathbf{r}} \quad (A-3-3) \end{aligned}$$

mientras que para las transiciones colectivas hay que utilizar que³⁾

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{k}, \lambda | \hat{\mathbf{p}} \cdot \hat{\mathbf{r}} | \mathbf{k}', \lambda' \rangle &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int d\mathbf{r} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \hat{\mathbf{p}} \cdot \hat{\mathbf{r}} e^{i\mathbf{k}'\cdot\mathbf{r}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int d\mathbf{r} e^{-i(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\cdot\mathbf{r}} \hat{\mathbf{p}} \cdot \hat{\mathbf{r}} \quad (A-3-4) \end{aligned}$$

Los elementos de matriz reducidos de $U^{(*)}$ se encuentran en la referencia 1, y los elementos de matriz de \bar{R} se evalúan en forma standard.

Cuando se evalúan los elementos de matriz reducidos de las transiciones de partícula, para los protones se obtiene si $n_1 l_1 j_1 = n_2 l_2 j_2$

$$\langle n_1 l_1 j_1 || U || n_2 l_2 j_2 \rangle = \sqrt{\frac{2j_2 + 1}{2j_1 + 1}} \left[1 + (-1)^{l_1 + l_2} \frac{j_1(j_1 + 1)}{l_1 + l_2} \right] \quad (A-3-5)$$

$$\langle n_1 l_1 j_1 || U || n_2 l_2 j_2 \rangle = (-1)^{l_1 + l_2} \sqrt{\frac{2j_2 + 1}{2j_1 + 1}} \left[\frac{j_1(j_1 + 1)}{(l_1 - l_2)(l_1 + l_2 + 1)} \right]^{1/2} \langle n_1 l_1 j_1 || U || n_2 l_2 j_2 \rangle \quad (A-3-6)$$

y si $n_1 l_1 j_1 \neq n_2 l_2 j_2$ iguales a

$$\langle n_1 l_1 j_1 || U || n_2 l_2 j_2 \rangle = (-1)^{l_1 + l_2} \sqrt{\frac{2j_2 + 1}{2j_1 + 1}} \frac{j_1(j_1 + 1)}{l_1 + l_2} \quad (A-3-7)$$

$$\langle n_1 l_1 j_1 || U || n_2 l_2 j_2 \rangle = (-1)^{l_1 + l_2 + 1} \sqrt{\frac{2j_2 + 1}{2j_1 + 1}} \left[\frac{j_1(j_1 + 1)}{(l_1 - l_2)(l_1 + l_2 + 1)} \right]^{1/2} \langle n_1 l_1 j_1 || U || n_2 l_2 j_2 \rangle \quad (A-3-8)$$

y los elementos de matriz de r^2 son iguales, a menos de una fase $(-1)^{n_1 l_1 + n_2 l_2}$, de los utilizados por Nilsson.

B) Evaluación de las constantes.

Quedan tres constantes para ser evaluadas: α , g y G_R . G_R y α dependen del modelo que se utilice para la descripción de las variables colectivas, mientras que g depende de las fuerzas nucleares y de su dependencia del spin.

B.1) Evaluación de g .

El operador momento magnético para las partículas es

$$\mu = \vec{L} + g \vec{S} \quad (A-3-9)$$

Si se agrega un protón a un núcleo de capas cerradas, se producirá un efecto de polarización del resto del núcleo (este efecto es el que se espera que produzca una variación del momento magnético y por lo tanto da aparición a g). Si el protón recién colocado tiene spin hacia arriba, "prefiere" los protones con el spin hacia abajo (por el principio de Pauli) y además "prefiere" los neutrones con el spin hacia abajo (en el deuterón el estado 3S está más ligado que el estado 1S). Ambos efectos tienen como resultado disminuir el momento magnético medio debido a la parte de spin, y por lo tanto se va a producir una disminución del factor g_p . Experimentalmente (en la referencia II están reducidos los resultados) se encuentra para los isótopos de In (49 protones) que $g_p = .55g_p$ libre lo cual es equivalente a $g = .80$, que fue el valor utilizado en los cálculos.

B.2) Evaluación de α .

Si se utiliza un modelo fenomenológico, se supone que la superficie nuclear puede ser descrita por una función de la forma

$$R = R_0 \left[1 + \sum_{\lambda} Y_{\lambda}^* (\theta, \phi) \right] \quad (A-3-10)$$

donde R_0 es el radio de equilibrio. Para una gota uniformemente cargada, el momento multipolar eléctrico de multipolaridad λ es

$$M(E, \lambda) = \frac{e}{4\pi} Z_0 K_0 X_{\lambda}^* \quad (A-3-11)$$

Para las transiciones cuadrupolares eléctricas, dado que $X_{\lambda}^* = \sqrt{\frac{2}{2C}} \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{2}} \right]$ se puede escribir el operador como

$$M(E, 2) = \frac{e}{4\pi} Z_0 K_0 \sqrt{\frac{2}{2C}} M^{(2)} \quad (A-3-12)$$

y por lo tanto

$$M(E, 2) = \frac{e}{4\pi} Z_0 K_0 \sqrt{\frac{2}{2C}} \quad (A-3-13)$$

Para la evaluación de R_0 se usó que $R_0 = r_0 A^{1/3} = 1.4 A^{1/3}$ fm.

Si se hace una descripción microscópica, es necesario introducir una "carga efectiva" para tener en cuenta las características de las capas cerradas que no se consideran en el cálculo.

En la referencia 12 se encuentra discutido el ejemplo de una capa cerrada más un número impar de partículas en una capa abierta, y se demuestra que la contribución de la capa cerrada a la transición E2 (se supone también que en la fuerza residual entre las partículas que están en la capa abierta y la capa cerrada hay una componente de fuerza cuadrupolar) es independiente de las características de la capa abierta y que se puede considerar como una "renormalización" de la carga.

Por lo tanto el operador de transición E2 será escrito como

$$E_2 = (e \dots) Q^{(p)} + C_{11} Q^{(n)} \quad (A-3-14)$$

donde $Q^{(p)}$ será el operador cuadrupolar de los protones y $Q^{(n)}$ el de los neutrones.

B.3) Cálculo de G_R

Si se utiliza un modelo fenomenológico, con la suposición de que la carga está uniformemente distribuida, se obtiene

$$G_L = \bar{E}/A \tag{A-3-15}$$

Si se intenta hacer una descripción microscópica, debemos expresar el operador dipolar magnético en función de los operadores $U^{(\pm)}$, para lo cual habrá que hacer un desarrollo similar al que se hizo en la fórmula (34) para el operador cuadrupolar.

Se obtiene que

$$M_{11} = \left[- \sum_{m_1, m_2} (-)^{m_1+m_2} \left\{ \begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{matrix} \right\}^{(-)} \frac{(-)^{m_1+m_2}}{1} \right]$$

$$\approx -2 \mu^{-1} \mu^+$$

(A-3-16a)

donde

(A.3.16b)

$$M_{11} = \dots \langle \dots \rangle$$

Utilizando que los elementos de matriz de $U^{(\pm)}$ y los de \bar{E} son proporcionales, siendo la constante de proporcionalidad $\sqrt{4/10}$, obtenemos que G_R es

$$G_L = \sqrt{\frac{10\pi}{5}} \cdot 2$$

(A-3-17)

Referencias

- 1) J. B. Ras, Phys. Rev. 114 (1959) 1116
- 2) T.A. Brody and M. Moshinsky, Tables of transformation brackets. Universidad Nacional Autónoma de México. Instituto de Física, México (1960)
- 3) A. de Shalit and I. Talmi, Nuclear Shell Theory (Academic Press, New York-London, 1963)
- 4) A. Bohr, Dan. Mat. Fys. Medd, 36 (1958) N° 14.
- 5) A. Bohr and B.R. Mottelson, Dan. Mat. Fys. Medd. 37, N° 16 (1953)
- 6) L.S. Kisslinger and E. Sorensen, Rev. Mod. Phys. 38 (1963) 853
- 7) V.N. Gamm, Y.I. Kharitonov, L.A. Sliv and G.A. Segomonova, Nucl. Phys. 28 (1961) 192
- 8) B.F. Bayman - Lectures on Quasi-particles and collective vibrations - 1960*
- 9) S.T. Beljaev and V.G. Zalevinsky, Nucl. Phys. 32 (1962) 582
- 10) D. R. Das - Teoría de Movimientos Nucleares Colectivos de Bajas Energías - 1961
- 11) O. Nathan, S.G. Nilsson, en Alpha-Beta and Gamma-Ray Spectroscopy - Capítulo X.
- 12) A. de-Shalit, Electromagnetic properties of Atomic Nuclei; en Selected Topics in Nuclear Theory (1963) 209.