

## Tesis de Posgrado

# Tecnología de sistemas discontinuos sólido-fluido : La transferencia de cantidad de movimiento entre cilindros coaxiales rotantes

Azize, Carlos Alberto

1966

Tesis presentada para obtener el grado de Doctor en Ciencias Químicas de la Universidad de Buenos Aires

Este documento forma parte de la colección de tesis doctorales y de maestría de la Biblioteca Central Dr. Luis Federico Leloir, disponible en [digital.bl.fcen.uba.ar](http://digital.bl.fcen.uba.ar). Su utilización debe ser acompañada por la cita bibliográfica con reconocimiento de la fuente.

This document is part of the doctoral theses collection of the Central Library Dr. Luis Federico Leloir, available in [digital.bl.fcen.uba.ar](http://digital.bl.fcen.uba.ar). It should be used accompanied by the corresponding citation acknowledging the source.

**Cita tipo APA:**

Azize, Carlos Alberto. (1966). Tecnología de sistemas discontinuos sólido-fluido : La transferencia de cantidad de movimiento entre cilindros coaxiales rotantes. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad de Buenos Aires.

[http://digital.bl.fcen.uba.ar/Download/Tesis/Tesis\\_1285\\_Azize.pdf](http://digital.bl.fcen.uba.ar/Download/Tesis/Tesis_1285_Azize.pdf)

**Cita tipo Chicago:**

Azize, Carlos Alberto. "Tecnología de sistemas discontinuos sólido-fluido : La transferencia de cantidad de movimiento entre cilindros coaxiales rotantes". Tesis de Doctor. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad de Buenos Aires. 1966.

[http://digital.bl.fcen.uba.ar/Download/Tesis/Tesis\\_1285\\_Azize.pdf](http://digital.bl.fcen.uba.ar/Download/Tesis/Tesis_1285_Azize.pdf)

**EXACTAS** UBA

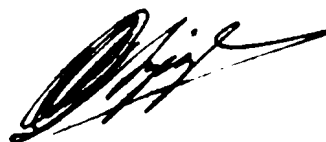
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales



**UBA**

Universidad de Buenos Aires

UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES  
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES



TECNOLOGIA DE SISTEMAS DISCONTINUOS SOLIDO-FLUIDO

La transferencia de cantidad de movimiento  
entre cilindros coaxiales rotantes

CARLOS ALBERTO AZIZE

RESUMEN DE LA

TESIS PRESENTADA PARA OPTAR AL TITULO DE  
DOCTOR DE LA UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES

1966

**Director de Tesis: Dr. Jorge J. Ronco**

**Este trabajo fue realizado mediante un subsidio otorgado por  
el Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas  
de la República Argentina**

Este trabajo tuvo por objeto el estudio de la transferencia de cantidad de movimiento desde un cilindro interior rotante hacia uno exterior inmóvil a través de un medio flúido.

El estudio se realizó en un amplio rango de número de Reynolds (entre 1 y  $10^6$ ) abarcando los regímenes laminar y turbulento neto..

Los datos experimentales, analizados e interpretados, condujeron al establecimiento de correlaciones generales que dan el valor del coeficiente de transferencia de cantidad de movimiento,  $C_D$ , en función del número de Reynolds,  $Re$ , y de los parámetros geométricos, en este tipo de sistemas.

---

El equipo, diseñado y construído al efecto, permitió medir el momento de torsión que aplicado al cilindro externo impide que el mismo rote en el sentido en que lo hace el interior.

Con el valor del momento se calcula el del número de potencia,  $P_o$ , correspondiente y al logaritmo de éste se lo representa gráficamente en función del logaritmo de  $Re$ .

Las curvas obtenidas con el cilindro externo de diversos diámetros, con distintos tamaños y números de cortacorrientes y con distintas alturas del sistema son sensiblemente paralelas entre sí, siendo su tendencia decreciente, en régimen turbulento.

Gracias al hecho que las curvas experimentales guarden el

paralelismo al que se hizo mención, se deduce que la función que vincula a los datos experimentales en régimen turbulento tiene la siguiente forma:

$$c_D = a_{00} \cdot f_0(B) \cdot f_1(n, h, d) \cdot f_2(Re)$$

en la cual  $f_0$  representa la corrección por el efecto de bordes B, esto es, la cantidad de movimiento que es transferida por otras superficies distintas a la lateral del cilindro interno y que debe ser eliminada para establecer la correlación;  $f_1$  es la función que da la influencia de la geometría del sistema: número de cortacorrientes  $n$ , ancho de los cortacorrientes  $h$ , diámetro del recipiente  $d$ ;  $f_2$  es la función que describe la forma de la curva en función de  $Re$ .

De las determinaciones efectuadas con sistemas de distintas alturas surge que  $f_0$  es una constante de valor 0,847 en el régimen turbulento.

El estudio de los datos experimentales conducentes a la evaluación de  $f_1$  origina las siguientes conclusiones:

- a) Las variables  $n$ ,  $h$ ,  $d$ , son interdependientes.
- b) Esta interdependencia queda definida por un grupo adimensional  $nh/d$ , que establece la medida de "baffled" del sistema.
- c) A  $Re$  constante, la cantidad de movimiento transferida crece asintóticamente hacia un valor máximo al crecer  $nh/d$ . La forma de la ecuación que describe este hecho,  $f_1 = K - (K-1)e^{-\gamma \frac{nh}{d}}$ , es de especial interés pues podría resultar de aplicación general

en el diseño de recipientes agitados, de mucha importancia técnica, en los que es conocido el hecho de que la potencia consumida a  $Re = cte.$  no crece por encima de cierto valor al aumentar  $h$  (sistemas "full baffled").

La forma de las curvas formadas por los datos experimentales puede ser expresada, con aproximación creciente, por las siguientes funciones ( $f_2$ ):

- I) Una función monómica simple de exponente de  $Re$  constante.
- II) Una función de la forma  $\phi^{-\frac{1}{2}} = M_1 \ln (Re \phi^{\frac{1}{2}}) + M_2$ , donde  $\phi = \frac{1}{2} c_D$  y  $M_1, M_2$  son constantes dependientes de la geometría del sistema, basada en el modelo teórico de Prandtl para la transferencia de cantidad de movimiento en régimen turbulento.
- III) Un monomio cuyo exponente de  $Re$  es función cuadrática de  $\ln Re$ .

La combinación de estas funciones con las halladas  $f_0$  y  $f_1$  conduce a las siguientes correlaciones finales para el régimen turbulento:

- I)  $c_D = 0,0443 (1,595 - 0,595 e^{-9,49 \frac{nh}{d}}) Re^{-0,24}$
- II)  $\phi^{-\frac{1}{2}} = 3,58 f_1^{-\frac{1}{2}} \ln (Re \phi^{\frac{1}{2}}) - (2,53 + 3,58 \ln f_1^{\frac{1}{2}}) f_1^{-\frac{1}{2}}$   
donde  $f_1 = 1,595 - 0,595 e^{-9,59 \frac{nh}{d}}$ .
- III)  $c_D = 60,66 (1,595 - 0,595 e^{-9,59 \frac{nh}{d}}) \cdot Re^{-1,8287 + 0,6060 \ln Re - 0,0726 (\ln Re)^2}$

siendo, para el caso de  $n = 0$ , notable la similitud de la primera de

éstas con la clásica de Blasius para el factor de fricción del flujo de flúidos por tuberías cilíndricas lisas.

Para el régimen laminar las funciones halladas tienen la forma:

$$c_D = \frac{c}{Re}$$

dependiendo c de las variables geométricas.

Tal como la teoría de la estabilidad del régimen laminar en este tipo de sistemas lo prevé, la transición a régimen turbulento se produce a muy bajos valores de Re (alrededor de 80).

A igualdad de Re, c es función creciente de h en el sistema en régimen laminar con cortacorrientes. Este hecho marca una diferencia respecto del flujo de flúidos por tuberías cilíndricas en el cual la rugosidad de la pared no influye sobre el factor de fricción en el caso de régimen laminar. Para interpretar este resultado se ha supuesto que la existencia de cortacorrientes disminuye el "diámetro efectivo" del cilindro externo.

UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES  
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES



TECNOLOGIA DE SISTEMAS DISCONTINUOS SOLIDO-FLUIDO

La transferencia de cantidad de movimiento  
entre cilindros coaxiales rotantes

CARLOS ALBERTO AZIZE

M 285 -  
ej. 2

TESIS PRESENTADA PARA OPTAR AL TITULO DE  
DOCTOR DE LA UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES

1966



**Director de Tesis: Dr. Jorge J. Ronco**

**Este trabajo fue realizado mediante un subsidio otorgado por  
el Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas  
de la República Argentina**

## AGRADECIMIENTO

Al Instituto de Cálculo de la Universidad de Buenos Aires por la colaboración prestada en la correlación analítica de los datos experimentales.

## I N D I C E

PREFACIO.....	1
1. INTRODUCCION,.....	4
1.1 Principios fundamentales. Ecuación de continuidad.....	4
1.2 Ecuación de Euler.....	6
1.3 Ecuación de Bernoulli.....	7
1.4 Concepto de tensión.....	8
1.5 El flujo de cantidad de movimiento.....	9
1.6 Ecuación de la energía mecánica.....	13
1.7 Flujo entre cilindros coaxiales rotantes.....	13
1.8 La ley de semejanza.....	18
1.8.1 La ley de semejanza aplicada al sistema de cilindros concéntricos rotantes.....	20
1.8.2 Los factores de fricción: $c_D$ coeficiente de arrastre o "drag coefficient".....	23
1.9 Turbulencia. Estabilidad del flujo laminar.....	25
1.10 La estabilidad del flujo entre cilindros coaxiales rotantes.....	28
1.11 El régimen turbulento.....	33
1.11.1 Perfil universal de velocidades y factor de fricción.....	38
2. PARTE EXPERIMENTAL.....	41
2.1 Introducción.....	41
2.2 Equipo utilizado.....	42
2.3 Determinaciones experimentales.....	46
2.4 Método de cálculo.....	48
2.5 Efecto de bordes.....	50
2.6 Resultados.....	52
2.6.1 Régimen laminar.....	52
2.6.2 Régimen turbulento.....	54
2.6.2.1 Efecto de bordes.....	56

2.6.2.2 Efecto del ancho de los cortacorrientes.....	58
2.6.2.3 Efecto del número de cortacorrientes.....	59
2.6.2.4 Efecto del diámetro del recipiente.....	60
2.6.2.5 Efecto combinado del ancho y número de cortacorrientes y del diámetro del reci- piente.....	61
2.6.2.6 Cambio de escala.....	63
2.7 Correlación analítica de los datos experimentales....	63
2.8 Conclusiones.....	72
2.8.1 Régimen laminar.....	72
2.8.2 Régimen turbulento.....	72
NOMENCLATURA.....	74
BIBLIOGRAFIA .....	79
GRAFICOS	
TABLAS	

## PREFACIO

La Ingeniería Química ha experimentado un enorme progreso en los últimos años.

Este progreso fue fruto del esfuerzo de numerosos investigadores que contribuyeron a incrementar el conocimiento de los principios fundamentales de la tecnología.

De estas contribuciones algunas se destacan especialmente por la originalidad de la idea básica, por la utilidad de los resultados obtenidos y porque abrieron nuevos caminos a la investigación científica.

Las de Chilton y Colburn pertenecen a este grupo.

Estos investigadores establecieron para ciertos sistemas la correlación que vinculaba a los diversos fenómenos de transferencia que parecieran completamente independientes entre sí.

Chilton y Colburn y la mayor parte de los investigadores que los siguieron se ocuparon de los sistemas continuos.

Hoy estudiamos la transferencia de cantidad de movimiento que se produce en un sistema discontinuo, el de los cilindros coaxiales rotatorios, con el objeto de determinar la correlación que vincula al factor de fricción con el Número de Reynolds y la geometría del sistema.

Los resultados obtenidos podrán ser comparados con los

de transferencia de materia, ya determinados con el mismo equipo y en el mismo Laboratorio (39), a fin de establecer si existe o no una analogía entre ambos fenómenos.

Este tipo de sistema, sin cortacorrientes, ha sido también estudiado por Taylor (33,35,36,37) y otros autores (40,41), principalmente desde el punto de vista de la distribución de velocidades en el flujo turbulento y su interpretación a la luz de las teorías sobre turbulencia.

La elección del sencillo sistema de estudio efectuada, se fundó en la necesidad de contar con alguno en el que se pudieran producir simultáneamente dos o más fenómenos de transferencia, se pudieran definir exactamente cada una de las variables intervinientes y, de ser posible, permitiera la aplicación de modelos teóricos o el desarrollo de otros nuevos de utilidad para casos más complejos.

Un cilindro soluble rotando en un medio flúido contenido en otro coaxil al primero, parece satisfacer estas condiciones. Materia y cantidad de movimiento se transfieren simultáneamente y todas las variables, en particular las áreas de las superficies de transferencia, pueden ser medidas.

En un sistema así, la máxima simplicidad consistiría en que ambos cilindros fueran de longitud infinita, pero, siendo esto irrealizable, se recurre al artificio de restringir la exis

tencia de material soluble a la parte central del cilindro rotante en las determinaciones de transferencia de materia. De esta forma la zona soluble se halla exclusivamente en contacto con flúido cuya dirección media es circular, lo que no ocurre en las bases.

En transferencia de cantidad de movimiento es necesaria la realización de determinaciones con sistemas de longitudes diferentes para descontar los efectos de bordes (2.5).

Una simplificación adicional se logra al eliminar la superficie libre del flúido mediante un disco que la cubre y sirve de tapa al recipiente.

Diseñado y construído el equipo de manera de cumplir estos requisitos, se procedió al trabajo experimental cuyos resultados se dan en las páginas que siguen luego de una introducción teórica.

## 1. INTRODUCCION

La tecnología del flujo de flúidos por tuberías y conductos abiertos, a través de lechos porosos y equipos de impulsión, del movimiento de sólidos en medios flúidos, el transporte neumático, etc., reconocen como fenómeno básico a la transferencia de cantidad de movimiento. El conocimiento de éste es la base racional para encarar los problemas tecnológicos.

La Fluidodinámica es la parte de la Mecánica de los Cuerpos Deformables que estudia estos fenómenos. La Ingeniería Química aprovecha las conclusiones que aquélla obtiene adaptándolas a los problemas prácticos que debe resolver en forma precisa pero simple.

Damos a continuación una breve revisión de los conceptos fluidodinámicos fundamentales de acuerdo a las publicaciones clásicas de la materia (6,10,11,15,16,28,29,31).

### 1.1 Principios fundamentales. Ecuación de continuidad

La fluidodinámica considera los flúidos como medios continuos. Esto significa que cuando se mencione en el tratamiento que sigue " un elemento de volumen " éste se supondrá que es muy pequeño en comparación con el volumen total del sistema, pero lo suficientemente grande como para contener un gran número de moléculas. Las expresiones "partícula de flúido" o "punto de un flúido" se entenderán en el mismo sentido.



La descripción matemática del estado de movimiento de un fluido se efectúa por medio de funciones que dan la distribución de la velocidad del fluido  $\vec{v} = \vec{v}(x,y,z,t)$  y de dos propiedades termodinámicas cualesquiera como por ejemplo la presión  $p = p(x,y,z,t)$  y la densidad  $\rho = \rho(x,y,z,t)$  ya que conocidas dos de las propiedades termodinámicas de un sistema están determinadas todas las demás por medio de la ecuación de estado.

Por tanto el estado de movimiento de un fluido queda determinado si se dan cinco cantidades que pueden ser: las tres componentes de la velocidad, la presión y la densidad. En general presión, densidad y velocidad son funciones de las coordenadas  $x, y, z$ , y del tiempo  $t$ . El origen de las coordenadas es fijo en el espacio y no en determinada partícula de fluido.

La ecuación de continuidad expresa el principio de conservación de la materia.

Considerando un volumen  $V_0$  en el espacio, la masa total de fluido que emerge del mismo es

$$\oint \vec{v} \cdot d\vec{A} \quad (') \quad (1.1-1)$$

integral calculada sobre la superficie cerrada que rodea al volumen en consideración.

(')  $d\vec{A}$  es por convención un vector de dirección normal a la superficie y de sentido dirigido hacia afuera del volumen que encierra. Por tanto  $\oint \vec{v} \cdot d\vec{A}$  es positivo cuando el fluido sale del volumen considerado.

Por otra parte la disminución de masa en este volumen por unidad de tiempo es

$$-\frac{\partial}{\partial t} \int \rho \, dV \quad (1.1-2)$$

o sea que

$$\oint_A \rho \vec{v} \cdot d\vec{\lambda} = -\frac{\partial}{\partial t} \int \rho \, dV \quad (1.1-3)$$

siendo

$$\oint_A \rho \vec{v} \cdot d\vec{\lambda} = \iiint_{V_0} \text{div} \cdot (\rho \vec{v}) \, dx \, dy \, dz \quad (1.1-4)$$

es

$$\int \left[ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div} (\rho \vec{v}) \right] dV = 0 \quad (1.1-5)$$

como la integral es válida para cualquier volumen debe ser:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div} (\rho \vec{v}) = 0 \quad (1.1-6)$$

que es la ecuación de continuidad. Desarrollando el término  $\text{div}(\rho \vec{v})$  se transforma en

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \, \text{div} \vec{v} + \vec{v} \cdot \text{grad} \rho = 0 \quad (1.1-7)$$

El vector  $(\rho \vec{v})$  es denominado velocidad másica y su módulo expresa la masa de fluido que atraviesa la unidad de área perpendicular a su dirección en la unidad de tiempo.

## 1.2 Ecuación de Euler

La segunda ley de la mecánica de Newton aplicada a una partícula de fluido puede expresarse como:

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} + \text{grad} \, p = \vec{F} \quad (1.2-1)$$

Llamando  $v_x, v_y, v_z$ , a las componentes de la velocidad

$\vec{v}$  en las direcciones x, y, z respectivamente y desglosando la

(1.2-1) en sus componentes cartesianas se obtiene:

$$\begin{aligned} \rho \left( \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) + \frac{\partial p}{\partial x} &= F_x \\ \rho \left( \frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) + \frac{\partial p}{\partial y} &= F_y \\ \rho \left( \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) + \frac{\partial p}{\partial z} &= F_z \end{aligned} \quad (1.2-2)$$

recordando que

$$\frac{dv_x}{dt} = \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} \quad (1.2-3)$$

La cuarta ecuación diferencial es la condición de incompresibilidad:

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \quad (1.2-4)$$

Las ecuaciones (1.2-2) y (1.2-4) constituyen las Ecuaciones de Euler de Movimiento Fluido Perfecto. Estas fueron deducidas por primera vez en 1755 y han sido empleadas para describir sistemas en flujo donde los efectos viscosos son despreciables.

### 1.3 Ecuación de Bernoulli

Haciendo algunas transformaciones del álgebra vectorial, las ecuaciones de Euler pueden escribirse

$$\rho \left( \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} - \vec{v} \times \text{rot } \vec{v} \right) + \text{grad} \left( \rho \frac{v^2}{2} + p \right) = \vec{F} \quad (1.3-1)$$

$$\text{div } \vec{v} = 0 \quad (1.3-2)$$

que es la forma invariante de las mismas que pueden particularizarse para cualquier tipo de coordenadas curvilíneas.

Las ecuaciones de Euler son "no lineales" y su integración presenta grandes dificultades.

Si el flujo es irrotacional y estacionario y además la fuerza externa deriva de un potencial, o sea:

$$\text{rot } \vec{v} = 0 \quad (1.3-3)$$

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = 0 \quad (1.3-4)$$

$$\vec{F} = - \text{grad } U \quad (1.3-5)$$

la ecuación (1.3-1) se transforma en

$$\text{grad} \left( \rho \frac{v^2}{2} + p + U \right) = 0 \quad (1.3-6)$$

que integrada resulta

$$\rho \frac{v^2}{2} + p + U = \text{const.} \quad (1.3-7)$$

que es la ecuación de Bernoulli. Si la única energía potencial es la gravitatoria,  $U = \rho gz$ , y finalmente

$$\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gz = \text{const} \quad (1.3-8)$$

#### 1.4 Concepto de tensión

Al aplicar un sistema de fuerzas en equilibrio a un sólido real en reposo, éste no se desplaza ni rota sino que se deforma hasta llegar al llamado "equilibrio de deformación".

Analizando el efecto producido dentro del cuerpo, se concluye que a través de cualquier superficie interior se transmite una fuerza que es la que mantiene el equilibrio de las partes

adyacentes.

A la fuerza ejercida por unidad de área de esta superficie se la denomina tensión  $\tau$ . El valor de esta magnitud no depende únicamente de cada punto sino también de la orientación de la superficie que lo contenga y sobre la cual la tensión es considerada.

El estado de tensión en un punto queda entonces unívocamente determinado si se conocen los valores de las componentes de las fuerzas en tres planos perpendiculares que lo contengan. De estos nueve valores, sólo seis son independientes y puede demostrarse (27) que la matriz de tensiones

$$\tau = \begin{pmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \tau_{zz} \end{pmatrix} \quad (1.4-1)$$

es simétrica con respecto a su eje principal, esto es,

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}, \quad \tau_{zx} = \tau_{xz}, \text{ etc.} \quad (1.4-2)$$

En otras palabras, el estado de tensión en un punto queda caracterizado por un tensor simétrico de segundo orden.

Cuando la tensión es paralela a la normal a la superficie es denominada presión; si ambas son perpendiculares se la llama tensión o esfuerzo de corte.

### 1.5 El flujo de cantidad de movimiento

A diferencia de los sólidos, los líquidos no pueden soportar tensiones en estado de reposo.

Esta observación, que puede considerarse como la definición de fluido en estado de reposo, se caracteriza matemáticamente en la forma:

$$\tau_{ik} = 0 \quad \text{si } i \neq k \quad (1.5-1)$$

En los sólidos la tensión produce deformación; en los líquidos los esfuerzos de corte originan la transferencia de can tidad de movimiento.

En los cuerpos sólidos tensión y deformación son propor cionales. En ciertos líquidos son proporcionales la tensión de corte y la velocidad de deformación. Esta última es la ley de Newton para la viscosidad, cuya expresión algebraica es:

$$\tau_{yx} = -\mu \frac{\partial v_x}{\partial y} \quad (1.5-2)$$

Los líquidos que la cumplen (es decir, aquellos en que  $\mu$  es independiente de  $\frac{\partial v_x}{\partial y}$ ) son los llamados newtonianos.

Sumada a las tensiones debidas a la fricción, existe en los líquidos una presión normal uniforme  $p$ , cuando actúa una fuerza exterior  $\vec{F}$ . Esta presión está determinada por la ecuación de estado  $p = p(\rho, T)$ , es una cantidad escalar y es igual a la presión hidrostática sólo cuando el líquido está en reposo.

Nota:  $\tau_{ik}$  simboliza la tensión en la dirección  $k$  aplicada en el plano  $i = \text{cte}$ .

El tensor de tensiones en este caso es, expresado en coordenadas cilíndricas:

$$\tau = \begin{pmatrix} p + \tau_{rr} & \tau_{r\theta} & \tau_{rz} \\ \tau_{\theta r} & p + \tau_{\theta\theta} & \tau_{\theta z} \\ \tau_{zr} & \tau_{z\theta} & p + \tau_{zz} \end{pmatrix} \quad (1.5-3)$$

Definiendo  $\text{Div } \tau$ , "divergencia vectorial", en la forma

$$\text{Div } \tau = \frac{d}{dV} \int \tau_{ik} dA \quad (1.5-4)$$

donde V es el volumen encerrado por A y  $\tau_{ik}$  es la componente de la tensión en el plano que contiene el elemento de superficie i y en la dirección k, puede demostrarse que

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = - \text{Div } \tau + \vec{F} \quad (1.5-5)$$

que escrita en coordenadas cilíndricas adquiere la forma

$$\begin{aligned} \rho \left( \frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta^2}{r} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} \right) &= - \frac{\partial p}{\partial r} - \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \tau_{rr}) + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} \right) + F_r \\ \rho \left( \frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_\theta}{\partial z} \right) &= - \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} - \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \tau_{r\theta}) + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial z} \right) + F_\theta \\ \rho \left( \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) &= - \frac{\partial p}{\partial z} - \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \tau_{rz}) + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} \right) + F_z \end{aligned} \quad (1.5-6)$$

La ecuación (1.5-5) es la llamada ecuación de movimiento. Su significado es enteramente equivalente a la segunda ley de Newton de la Mecánica: el primer miembro representa el aumento de cantidad de movimiento por unidad de tiempo de una partícula flúida; el segundo las fuerzas actuantes sobre la misma, expresado todo por unidad de volumen.

Cuando se aplica la ecuación de movimiento a un sistema constituido por un fluido incompresible y newtoniano ( $\rho = \text{cte.}$  y  $\mu = \text{cte.}$ ) su expresión se simplifica adquiriendo la forma

$$\begin{aligned} & \rho \left( \frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{v_z}{r} \frac{\partial v_r}{\partial z} \right) = \\ & = - \frac{\partial p}{\partial r} + \mu \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial v_r}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_r}{\partial \theta^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} \right] + F_r \\ & \rho \left( \frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_z}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial z} \right) = \\ & = - \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \mu \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial z^2} \right] + F_\theta \\ & \rho \left( \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} + \frac{v_z}{r} \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = \\ & = - \frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right] + F_z \end{aligned} \quad (1.5-7)$$

en coordenadas cilíndricas. Estas son las famosas ecuaciones de Navier-Stokes.

Pueden expresarse en la forma pseudovectorial:

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = -\nabla p + \mu \nabla^2 \vec{v} + \vec{F} \quad (1.5-8)$$

Las ecuaciones de movimiento de fluidos incompresibles fueron deducidas por primera vez por Navier (20) en 1827 y por Poisson (22) en 1831. Estos autores emplearon en su deducción argumentos basados en las fuerzas intermoleculares.

Saint Venant (32) y Stokes (30) en 1843 y 1845 respectivamente volvieron a inferirla en base a la ley de Newton para la



viscosidad, sin emplear hipótesis submacroscópicas.

### 1.6 Ecuación de la energía mecánica

Efectuando el producto escalar de  $\vec{v}$  por la ecuación de movimiento (1.5-5) se obtiene la ecuación de la energía mecánica:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} v^2 \right) = - \frac{1}{\rho} \vec{v} \cdot \text{Div} \tau + \frac{1}{\rho} \vec{v} \cdot \vec{F} - \frac{1}{\rho} \vec{v} \cdot \nabla p \quad (1.6-1)$$

Esta ecuación escalar describe la velocidad de variación de energía cinética por unidad de masa de una partícula fluida moviéndose en la dirección del flujo.

### 1.7 Flujo entre cilindros coaxiales rotantes

Se considerará el caso del movimiento de un fluido contenido en el espacio comprendido entre dos cilindros de radios  $R_1$  y  $R_2$  ( $R_1 < R_2$ ) coaxiales de longitud infinita, de los cuales el interior rota alrededor de su eje a una velocidad angular constante mientras que el externo permanece fijo.

Adoptando coordenadas cilíndricas se observa que por razones de simetría es:

$$v_z = v_r = 0; \quad v_\theta = v(r); \quad p = p(r) \quad (1.7-1)$$

Aplicando a este caso las ecuaciones de Navier-Stokes se obtiene

$$\frac{dp}{dr} = \rho \frac{v^2}{r} \quad (1.7-2)$$

$$\frac{d^2 v}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dv}{dr} - \frac{v}{r^2} = 0 \quad (1.7-3)$$

La solución de este tipo de ecuación diferencial es del tipo  $r^m$  con  $m = \frac{1}{2}$  de forma que

$$v = ar + \alpha'/r$$

Las constantes  $a$  y  $\alpha'$  pueden evaluarse a partir de las condiciones de contorno que en este caso indican que las velocidades del fluido en las superficies interior y exterior son iguales a las del sólido con el que se hallan en contacto; por lo tanto la velocidad en la superficie interna es igual a la del cilindro interno, mientras que en la exterior es nula. En símbolos:

$$\begin{aligned} v &= R_1 \Omega_1 \quad \text{si } r = R_1 \\ v &= 0 \quad \text{si } r = R_2 \end{aligned} \quad (1.7-5)$$

Así la distribución de velocidades entre las superficies cilíndricas resulta

$$v = - \frac{\Omega_1 R_1^2}{R_2^2 - R_1^2} r + \frac{\Omega_1 R_1^2 R_2^2}{R_2^2 - R_1^2} \frac{1}{r} \quad (1.7-6)$$

La distribución de presiones en el sistema puede calcularse integrando la ecuación (1.7-2) de lo que se obtiene aquella si se conoce el valor de la presión para algún valor de  $r$ . Muchos casos se presentan, en los que sólo se conoce la presión  $p_0$  del fluido en reposo ( a determinada altura ) y en los que el contenido de fluido y el volumen no cambian durante la rotación.

Este problema puede resolverse desechando provisoriamente la condición de incompresibilidad (1,2).

Definiendo las siguientes magnitudes en forma adimensional:

$$r'' = r/R_2 = \text{radio} \quad (1.7-7)$$

$$t' = \mu t / \rho R_2^2 = \text{tiempo} \quad (1.7-8)$$

$$v'_\theta = v / R_2 \Delta \Omega = \text{velocidad tangencial} \quad (1.7-9)$$

$$\Omega' = \Omega / \Delta \Omega = \text{velocidad angular} \quad (1.7-10)$$

donde  $\Delta \Omega = \Omega_2 - \Omega_1$

La ecuación (1.7-3) puede escribirse

$$\frac{\partial}{\partial r''} \left[ \frac{1}{r''} \frac{\partial}{\partial r''} (r'' v'_\theta) \right] = 0 \quad (1.7-11)$$

que junto con la (1.7-2) siguen siendo válidas para flujos isotérmicos estacionarios de flúidos compresibles siempre que el coeficiente de viscosidad no dependa de la presión.

Las ecuaciones (1.7-2) y (1.7-11) deben resolverse junto con la ecuación de estado la que es tomada aquí como los dos primeros términos de una serie de Taylor para en función de la energía libre  $G = H - TS$

$$\begin{aligned} \rho &= \rho_0 + \left( \frac{\partial \rho}{\partial G} \right) (G - G_0) + \dots \approx \rho_0 \left[ 1 + b_0 (G - G_0) \right] \\ &= \rho_0 \left[ 1 + b_0 \int_{p_0}^p \rho^{-1} d p \right] \end{aligned} \quad (1.7-12)$$

en la cual  $p_0$  y  $\rho_0$  son la presión y densidad uniformes cuando el sistema está en reposo y  $b_0$  es el valor de  $b = \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \rho}{\partial G} \right)_T = \left( \frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_T$  cuando  $\rho = \rho_0$ .

La función que da la distribución de velocidades en el sistema puede escribirse en función de las variables adimensionales como:

$$v_{\bullet}(r) = \left[ \frac{1 - \alpha(1 - K^2)}{1 - K^2} \right] r^n - \left[ \frac{K^2}{1 - K^2} \right] \frac{1}{r^n} = \lambda r^n - \lambda' r^{-n-1} \quad (1.7-13)$$

siendo  $K = R_1/R_2$ .

Introduciendo esta función en la (1.7-2) y suponiendo conocida como función de  $p$  se tiene:

$$\int_{p_0}^p \rho^{-1} dp = M \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{r^{n+2}}{Q^2} - \frac{Q^2}{r^{n+2}} \right) - 2 \ln r^n + C \right] \quad (1.7-14)$$

en donde  $M$  y  $Q$  son cantidades adimensionales:

$$M = \left( \frac{R_2 \Delta \Omega (1 - \alpha) Q}{Q^2 - \frac{1}{2} \frac{K^2}{1 - \alpha(1 - K^2)}} \right)^2 = (R_2 \Omega)^2 \lambda \lambda' \quad (1.7-15)$$

$$Q^2 = \left( \frac{1}{1 - \alpha(1 - K^2)} \right) = \frac{1}{\lambda} \quad (1.7-16)$$

La constante de integración  $C$  se determina por la condición normalizante:

$$\int_K^1 \rho_0 r^n dr^n = \int_K^1 \rho r^n dr^n \quad (1.7-17)$$

que no es sino una expresión de la conservación de la materia.

Esta ecuación se reduce a:

$$\int_K^1 \int_{p_0}^p \rho^{-1} dp r^n dr^n = 0 \quad (1.7-18)$$

debido a la ecuación de estado (1.7-12).

Reemplazando en la ecuación (1.7-18) para introducir la (1.7-14) se obtiene la constante de integración  $C$  y por tanto la

expresión final de la distribución de presiones:

$$\int_{p_0}^p \rho^{-1} dp = \quad (1.7-19)$$

$$= M \left( \frac{1}{2} \left( \frac{r^{*2}}{Q^2} - \frac{Q^2}{r^{*2}} \right) - 2 \ln r^* - 1 - \frac{1 + K^2}{4Q^2} - \frac{Q^2 + 2K^2}{1 - K^2} \ln k \right)$$

Para flúidos incompresibles el miembro de la izquierda de la ecuación (1.7-19) se hace igual a  $(p - p_0)/\rho_0$ .

En el caso del presente trabajo en que  $\Omega_1 \neq 0$  y  $\Omega_2 = 0$

es:

$$\left( \frac{p - p_0}{\rho_0 K^2 \Omega_1^2 R_1^2} \right) \left( \frac{1 - K^2}{K} \right)^2 = \quad (1.7-20)$$

$$= \frac{1}{2} \left( r^{*2} - \frac{1}{r^{*2}} \right) - 2 \ln r^* - 1 - \frac{1 + K^2}{4} - \frac{1 + 2K^2}{1 - K^2} \ln K$$

Esta función se da representada gráficamente en el trabajo citado (1,2).

Para calcular el momento necesario para hacer rotar el cilindro interior a una dada velocidad constante, se tendrá en cuenta que la fuerza que actúa sobre el mismo está dirigida en el sentido de su tangente; por tanto, la fuerza que actúa por unidad de área es la componente  $\tau_{r\theta}$  del tensor de tensiones. El momento total es entonces, el producto del valor de  $\tau_{r\theta}$  en  $r = R_1$  por el área de la superficie del cilindro interno.

El momento total por unidad de longitud del cilindro interno es entonces, el producto del valor  $\tau_{r\theta}$  en  $r = R_1$  por  $2\pi R_1$  y por el brazo de palanca  $R_1$ :

$$\tau_{\bullet} = 2\pi R_1 (\tau_{r\theta})_{r=R_1} R_1 \quad (1.7-21)$$

Para flúidos newtonianos la componente  $\tau_{r\theta}$  es:

$$\tau_{re} = -\mu \left[ r \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{v_\theta}{r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right] \quad (1.7-22)$$

que puede calcularse mediante la distribución de velocidades dada en (1.7-6).. De esta forma se obtiene:

$$(\tau_{re})_{r=R_1} = \frac{-2\mu\Omega R_2^2}{R_2^2 - R_1^2} \quad (1.7-23)$$

Finalmente:

$$\tau_b = - \frac{4\pi\mu\Omega_1 R_1^2 R_2^2}{R_2^2 - R_1^2} \quad (1.7-24)$$

### 1.8 La ley de semejanza

Al estudiar el movimiento de flúidos viscosos pueden obtenerse importantes conclusiones considerando las dimensiones de las diversas magnitudes involucradas.

Se considerará un tipo determinado de movimiento, como es la rotación de un cilindro en un flúido contenido en otro de mayor diámetro. Se llamarán sistemas "geoméricamente semejantes" los que se obtienen sustituyendo todas las dimensiones lineales por otras que sean múltiplos de la primera en una cantidad fija. De esta manera, si la forma del sistema está determinada basta con dar una sola dimensión lineal para que todas queden definidas.

Se supondrá flujo estacionario y flúido incompresible.

Las únicas constantes físicas del flúido que aparecen en las ecuaciones de Navier-Stokes, (1.5-8), son la densidad y la viscosidad.

Tomando como dimensión lineal característica para este sistema el diámetro del cilindro interno,  $D = 2R_1$ , es suficiente fijar su valor para que el tamaño del sistema quede establecido.

De la misma forma que para las dimensiones lineales, puede definirse una velocidad característica del sistema, que puede ser en este caso la velocidad tangencial del cilindro interno  $v_1$ .

Una vez elegidas la dimensión lineal y la velocidad características, pueden definirse las siguientes variables y operaciones adimensionales:

$$x' = \frac{x}{D} \quad y' = \frac{y}{D} \quad z' = \frac{z}{D} \quad (1.8-1)$$

$$v' = \frac{v}{v_1} \quad p' = \frac{p - p_a}{\rho v_1^2} \quad t' = \frac{tv_1}{D} \quad (1.8-2,3,4)$$

$$\nabla' = D\nabla = \left( \vec{i} \frac{\partial}{\partial x'} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y'} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z'} \right) \quad (1.8-5)$$

$$\nabla'^2 = D^2 \nabla^2 = \left( \frac{\partial^2}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2}{\partial z'^2} \right) \quad (1.8-6)$$

$$\frac{d}{dt} = \left( \frac{D}{v_1} \right) \frac{d}{dt'} \quad (1.8-7)$$

Las ecuaciones de la hidrodinámica pueden escribirse ahora en función de estas variables adimensionales:

$$(\nabla' \cdot \vec{v}') = 0 \text{ ecuación de continuidad (1.8-8)}$$

$$\frac{d\vec{v}'}{dt'} = -\nabla' p' + \left[ \frac{\mu}{D \rho v_1} \right] \nabla'^2 \vec{v}' + \left[ \frac{gD}{v_1^2} \right] \vec{g} \quad \text{ecuación de movimiento (1.8-9)}$$

En la ecuación (1.8-9) se ha supuesto que las únicas fuerzas externas que actúan sobre el sistema son las gravitatorias. En el sistema elegido para realizar este trabajo estas no actúan por no existir superficies libres.

La solución de la ecuación (1.8-9) depende de las condiciones de contorno (forma del sistema) y del valor de los coeficientes.

Cuando dos sistemas son geoméricamente semejantes y además son iguales los valores de los coeficientes adimensionales de la ecuación (1.8-9), se dicen "dinámicamente semejantes".

Estos coeficientes adimensionales son conocidos como números de Reynolds y de Froude:

$$Re = \frac{\rho D v_1}{\mu} = \text{Número de Reynolds} \quad (1.8-10)$$

$$Fr = \frac{v_1^2}{gD} = \text{Número de Froude} \quad (1.8-11)$$

La ley de semejanza, que expresa que la distribución de velocidades y presiones adimensionales es igual para sistemas dinámicamente semejantes (O. Reynolds, 1883), es simplemente una consecuencia de las ecuaciones fundamentales de la fluidodinámica.

La ley de semejanza es de útil aplicación en el cambio de escala de operaciones en las que se desconocen algunos datos fundamentales como distribución de velocidades, presiones, etc.

### 1.8.1 La ley de semejanza aplicada al sistema de cilindros concéntricos rotantes.



En un sistema como el empleado en las determinaciones experimentales del presente trabajo, la potencia  $P$  [ $FLt^{-1}$ ] consumida por el rotor es la siguiente (3):

$$P = \Omega_1 \tau_0 = \Omega_1 \left[ \mu \iint_{S_r} r \left( \frac{\partial v_\theta}{\partial n} \right) dS_r + \iint_{A_c} r P_{sup} dA_c \right] \quad (1.8.1-1)$$

siendo:

$\Omega_1$  = velocidad del rotor [ $t^{-1}$ ]

$D$  = diámetro del rotor [ $L$ ]

$\rho$  = densidad del fluido [ $ML^{-3}$ ]

$\mu$  = viscosidad del fluido [ $ML^{-1}t^{-1}$ ]

$S_r$  = área interior del cilindro externo.

$A_c$  = área de los cortacorrientes, considerada positiva del lado que enfrenta a la corriente y negativa en el opuesto.

$r$  = distancia radial desde cualquier elemento  $dA_c$  o  $dS_r$  hasta el eje de rotación.

$\underline{n}$  = distancia normal medida desde cualquier elemento  $dA_c$  o  $dS_r$  hacia dentro del sistema.

$\tau_0$  = momento necesario para la rotación del cilindro interno.

Definiendo las siguientes dimensiones características del sistema:

$D$  = longitud característica.

$D\Omega_1$  = velocidad característica.

$\rho \Omega_1^2 D^2$  = presión característica;

la expresión (1.8.1-1) puede escribirse en función de variables

adimensionales. Así:

$$P = \Omega_1^2 \mu D^3 \iint_{S'_r} r' \left[ \frac{\partial v'_z}{\partial z'} \right]_{\text{sup}} dS'_r + \Omega_1^3 D^5 \rho \iint_{A'_0} r' p'_{\text{sup}} dA'_0 \quad (1.8.1-2)$$

$$P'_0 = \frac{P}{\Omega_1^3 D^5 \rho} = \frac{\mu}{\Omega_1 D^2 \rho} \iint_{S'_r} r' \left( \frac{\partial v'_z}{\partial z'} \right)_{\text{sup}} dS'_r + \iint_{A'_0} r' p'_{\text{sup}} dA'_0 \quad (1.8.1-3)$$

Con las condiciones de contorno pueden en principio conocerse:

$$v' = v'(r', Re') \quad \text{y} \quad p' = p'(r', Re') \quad (1.8.1-4,5)$$

con las que podrían hacerse las dos integraciones, cuyos valores, que se calculan sobre el área lateral del cilindro externo y el área de los cortacorrientes, serán función de  $d/D$ ,  $n$  y  $h/D$ . (')

El cálculo de (1.8.1-3) lleva entonces a la expresión:

$$Po = Po(Re, \frac{d}{D}, n, \frac{h}{D}) \quad (1.8.1-6)$$

que muestra la dependencia del número de potencia de los otros grupos adimensionales del sistema.

Cabe aclarar, que el número de Froude  $Fr$ , no interviene en (1.8.1-4,5) por no existir superficies libres en el sistema en estudio.

(') Nota: en el presente trabajo se definen  $Re$  y  $Po$  en sus formas corrientes, esto es:  $Re$  según la ec. (1.8-10) y  $Po = P/\rho N^3 D^5$ .

$Re' = \Omega_1 D^2 \rho / \mu$  y  $Po'$  sólo difieren de  $Re$  y  $Po$  en un factor numérico.

1.8.2 Los factores de fricción:  $c_D$  coeficiente de arrastre o "drag coefficient".

En el flujo estacionario de un fluido incompresible merecen destacarse dos sistemas: (3)

- a) el flujo se mueve en un conducto recto de sección transversal constante.
- b) el fluido se mueve alrededor de un objeto sólido sumergido que tiene un eje o un plano de simetría.

El fluido ejercerá sobre el sólido una fuerza  $\vec{F}$ . Esta fuerza puede ser convenientemente descompuesta en dos partes:  $\vec{F}_s$  la fuerza que se ejercería sobre el sólido aún estando el fluido en reposo y  $\vec{F}_k$  la fuerza asociada al estado cinético del fluido.

El sistema en estudio en el presente trabajo pertenece al grupo b).

En este sistema  $\vec{F}_k$  actúa en dirección opuesta a la de la velocidad media del fluido.

Para ambos tipos de sistemas, a) y b) el valor de  $\vec{F}_k$  puede representarse arbitrariamente como el producto de un área característica  $S$  por una energía cinética característica por unidad de volumen  $q$  y por un número adimensional  $f$  conocido como factor de fricción:

$$F_k = S q f \quad (1.8.2-1)$$

La ecuación (1.8.2-1) no constituye una ley de la mecánica de los fluidos sino una definición de  $f$  ya que  $f$  no queda de

finido hasta que no se hallan determinado  $S$  y  $q$ .

Esta definición resulta útil ya que los factores de fricción pueden darse como funciones del número de Reynolds y la forma del sistema.

En el caso que nos ocupa se ha tomado el área característica  $S$  como la superficie lateral del cilindro interno y  $q$  como  $\frac{1}{2} \rho v_1^2$  siendo  $\rho$  la densidad del fluido y  $v_1 = \Omega_1 R_1$  la velocidad tangencial del rotor.

Generalmente para sistemas como el estudiado  $\vec{F}_k$  se denomina fuerza de arrastre o "drag" mientras que  $f$  es conocido como coeficiente de arrastre o "drag coefficient" y representado más comúnmente con el símbolo  $c_D$ , que es el que adoptamos.

Por tanto:

$$F_k = (\pi DL) \left( \frac{1}{2} \rho v_1^2 \right) c_D \quad y \quad (1.8.2-2)$$

$$c_D = \frac{F_k}{(\pi DL) \left( \frac{1}{2} \rho v_1^2 \right)} = \frac{F_k R_1}{(\pi DL) \left( \frac{1}{2} \rho v_1^2 \right) R_1} = \frac{\tau_o}{(\pi DL) \left( \frac{1}{2} \rho \Omega_1^2 R_1^2 \right) R_1} \quad (1.8.2-3)$$

$c_D$  puede calcularse en función de  $Re$  para el régimen laminar.

En efecto:

$$\tau_o = 2\pi R_1 L (\tau_{ro})_{r=R_1} \cdot R_1 \quad (1.8.2-4)$$

o bien

$$\tau_o = 2\pi k R_2 L (\tau_{ro})_{r=kR_2} \cdot kR_2 \quad (1.8.2-5)$$

siendo  $k = R_1/R_2$ .

Siendo:

$$\tau_{r\theta} = -\mu \left( r \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{v_\theta}{r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right) \quad (1.8.2-6)$$

y

$$v_\theta = \Omega_1 \left[ \frac{\kappa}{1 - \kappa^2} \right] \left[ \frac{R_2^2}{r} - r \right] \quad (1.8.2-7)$$

es:

$$[\tau_{r\theta}]_{r=\kappa R_2} = \frac{2 \mu \Omega_1}{1 - \kappa^2} \quad (1.8.2-8)$$

por tanto

$$\tau_0 = 4\pi \mu L \Omega_1 R_2^2 \left[ \frac{\kappa^2}{1 - \kappa^2} \right] \quad (1.8.2-9)$$

Por definición es:

$$c_D = \frac{\tau_0}{L R_1^4 \rho \Omega_1^2} \quad (1.8.2-10)$$

y

$$Re = \frac{\rho v_1 D}{\mu} = \frac{2 \rho \Omega_1 R_1^2}{\mu} \quad (1.8.2-11)$$

Combinando las ecuaciones (1.8.2-9), (1.8.2-10) y

(1.8.2-11) se obtiene finalmente:

$$c_D = \frac{8}{1 - \kappa^2} \cdot \frac{1}{Re} \quad (1.8.2-12)$$

### 1.9 Turbulencia. Estabilidad del flujo laminar

En el punto 1.7 se ha descrito el sistema de los cilindros rotantes suponiendo que el régimen es laminar, es decir, que son nulas las componentes axial y radial de la velocidad de flujo.

El régimen laminar estable puede existir en un sistema cuando una perturbación infinitesimal que pueda surgir en el flujo tienda a decrecer con el tiempo.

Por el contrario, cuando una pequeña perturbación aparezca en un flujo estacionario tiende a aumentar con el tiempo, el flujo no puede ser laminar sino turbulento.

La investigación matemática de la estabilidad del flujo se hace superponiendo una pequeña perturbación no estacionaria  $\vec{v}_I(x,y,z,t)$  al flujo estacionario cuya distribución de velocidades es  $\vec{v}_0(x,y,z)$ , con la condición que  $\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{v}_I$  satisfaga las ecuaciones de movimiento.

La función para  $\vec{v}_I$  se halla sustituyendo en las ecuaciones

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = - \frac{\nabla p}{\rho} + \frac{\mu}{\rho} \nabla^2 \vec{v} \quad (1.9-1)$$

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0 \quad (1.9-2)$$

la velocidad  $\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{v}_I$  y la presión  $p = p_0 + p_I$ , donde las funciones conocidas  $\vec{v}_0$  y  $p_0$  satisfacen las ecuaciones no perturbadas

$$(\vec{v}_0 \cdot \nabla) \vec{v}_0 = - \frac{\nabla p_0}{\rho} + \frac{\mu}{\rho} \nabla^2 \vec{v}_0 \quad (1.9-3)$$

$$\nabla \cdot \vec{v}_0 = 0 \quad (1.9-4)$$

Omitiendo los términos de orden superior al primero resulta:

$$\frac{\partial \vec{v}_I}{\partial t} + (\vec{v}_0 \cdot \nabla) \vec{v}_I + (\vec{v}_I \cdot \nabla) \vec{v}_0 = - \frac{\nabla p_I}{\rho} + \frac{\mu}{\rho} \nabla^2 \vec{v}_I$$

$$\nabla \cdot \vec{v}_I = 0$$

La condición de contorno es que  $\vec{v}_I$  se anula en las superficies sólidas fijas.

Así  $\vec{v}_I$  satisface un sistema de ecuaciones diferenciales lineales, con coeficientes que son función única de las coordenadas y no del tiempo. La solución general de este sistema puede representarse como una suma de soluciones particulares en las que  $\vec{v}_I$  depende del tiempo en la forma  $e^{-i\omega t}$ . Las "frecuencias"  $\omega$  no son arbitrarias sino que quedan determinadas resolviendo las ecuaciones (1.9-3 y 4) con las condiciones de contorno adecuadas. Las "frecuencias"  $\omega$  son en general complejas. Si existen  $\omega$  cuyas partes imaginarias son positivas,  $e^{-i\omega t}$  crecerá indefinidamente con el tiempo; por tanto estas perturbaciones una vez aparecidas crecerán y entonces este flujo será inestable respecto de las mismas.

Para que el flujo sea estable se requiere que la parte imaginaria de la "frecuencia"  $\omega$  sea negativa. Así cualquier perturbación que surja decrecerá exponencialmente con el tiempo.

La investigación matemática de la estabilidad es extremadamente complicada.

Experimentalmente se observa que el flujo laminar es estable para números de Reynolds suficientemente pequeños. Al aumentar  $Re$  se llega a un valor crítico  $Re_c$  a partir del cual el flujo es inestable para pequeñas perturbaciones.

El valor de  $Re_c$  depende de cada sistema en particular, por ejemplo, es  $2,1 \cdot 10^3$  en el caso de flujo de flúidos en tuberías cilíndricas rectas.

### 1.10 La estabilidad del flujo entre cilindros coaxiales rotantes

La estabilidad en este tipo de sistema puede estudiarse en dos casos simplificados.

En el primero de ellos, se supone que un elemento de fluido es desplazado del camino que sigue en el flujo considerado. Como consecuencia de este desplazamiento actúan sobre el elemento fuerzas tales que, si el flujo original es estable, tenderán a volverlo a su posición original.

En el flujo no perturbado cada partícula de fluido se mueve en una circunferencia de radio  $r = \text{cte.}$  alrededor del eje de los cilindros. Llamando  $\sigma = m_1 r^2 \omega_1$  al momento angular de un elemento de masa  $m_1$  cuya velocidad es  $\omega_1$ , la fuerza centrífuga que actúa sobre él es  $\sigma^2 / m_1 r^3$ . Esta fuerza está compensada por el gradiente radial de presión del fluido rotante.

Se supondrá ahora que el elemento de fluido es desplazado levemente desde su posición original  $r_0$  hasta  $r > r_0$ . El momento angular del elemento considerado permanece igual al valor original  $\sigma_0 = \sigma(r_0)$  y la fuerza centrífuga actuante sobre el elemento en la nueva posición es por tanto  $\sigma_0^2 / m_1 r^3$ . Para que el elemento tienda a volver a su posición original esta fuerza debe ser menor que el valor de equilibrio  $\sigma^2 / m_1 r^3$  que es balanceada por el gradiente de presión a la distancia  $r$ . De aquí se infiere que la condición necesaria para que la estabilidad exista es que



$\sigma^2 - \sigma_0^2 > 0$ . Desarrollando  $\sigma(r)$  en función de potencias de la diferencia positiva  $r - r_0$ , esta condición puede escribirse en la forma

$$\sigma \frac{d\sigma}{dr} > 0 \quad (1.10-1)$$

La velocidad angular de las partículas flúidas es, de acuerdo a (1.7-6):

$$\phi_1 = \frac{\Omega_2 R_2^2 - \Omega_1 R_1^2}{R_2^2 - R_1^2} + \frac{(\Omega_1 - \Omega_2) R_1^2 R_2^2}{R_2^2 - R_1^2} \frac{1}{r^2} \quad (1.10-2)$$

Calculando  $\sigma = m_1 r^2 \phi_1$  y eliminando los términos que son siempre positivos, la condición (1.10-1) se reduce a:

$$(\Omega_2 R_2^2 - \Omega_1 R_1^2) \phi_1 > 0 \quad (1.10-3)$$

La velocidad angular varía desde  $\Omega_1$  en el cilindro interno, hasta  $\Omega_2$  en el externo en forma monótona.

Si los cilindros rotan en sentidos opuestos,  $\phi_1$  cambia de signo en algún punto y como consecuencia (1.10-3) no se cumple para todos: el flujo es entonces inestable.

Si los cilindros rotan ambos en el mismo sentido, que se definirá como positivo,  $\phi_1$  es siempre positivo y la estabilidad del flujo existirá cuando

$$\Omega_2 R_2^2 > \Omega_1 R_1^2 \quad (1.10-4)$$

En el caso en que el cilindro interno sea estacionario mientras que el externo rote,  $\Omega_1 = 0, \Omega_2 \neq 0$ , el flujo es estable. Por el contrario, cuando el cilindro externo es estacionario y el interno es el que rota, el flujo es inestable.

Es de hacer notar que el método empleado no tiene en cuenta las fuerzas de fricción que actúan sobre el elemento de fluido desplazado y por tanto es sólo aplicables para pequeñas viscosidades (altos números de Reynolds).

Para investigar la estabilidad del flujo para cualquier  $Re$  debe seguirse el método general enunciado en 1.9 (33, 36).

Se tendrá en cuenta que tal como  $\vec{v}_0$ ,  $\vec{v}_I$  sólo depende de la coordenada cilíndrica  $r$ , y por tanto, para esta perturbación se cuenta con un sistema de ecuaciones cuyos coeficientes no dependen del tiempo ni de las coordenadas  $\theta$  y  $z$ . Las soluciones serán de la forma

$$\vec{v}_I = e^{i(kz - \omega t)} \vec{f}(r) \quad (1.10-5)$$

siendo la dirección del vector  $\vec{f}$  arbitraria; esta solución depende de  $z$  por el factor periódico  $e^{iks}$  y el número de ondas  $k$  da la periodicidad de la perturbación en la dirección  $z$ . Resolviendo las ecuaciones con las condiciones de contorno necesarias ( $\vec{v}_I = 0$  para  $r = R_1$  y  $r = R_2$ ) se obtendrán las posibles frecuencias  $\omega$  en función de  $k$  y teniendo a  $Re$  como parámetro:  $\omega = \omega(k, Re)$ . El punto donde a parece la inestabilidad está determinado por el menor valor de  $Re$  para el cual  $\gamma_1 = \text{Im } \omega$  se anule para cierto  $k$ . Para  $Re < Re_c$  la función  $\gamma_1(k, Re)$  es siempre negativa, pero para  $Re > Re_c$   $\gamma_1 > 0$  para cierto rango de  $k$ . Se llamará  $k_c$  al valor de  $k$  para el cual  $\gamma_1 = 0$  cuando  $Re = Re_c$ . La correspondiente función (1.10-5) superpuesta

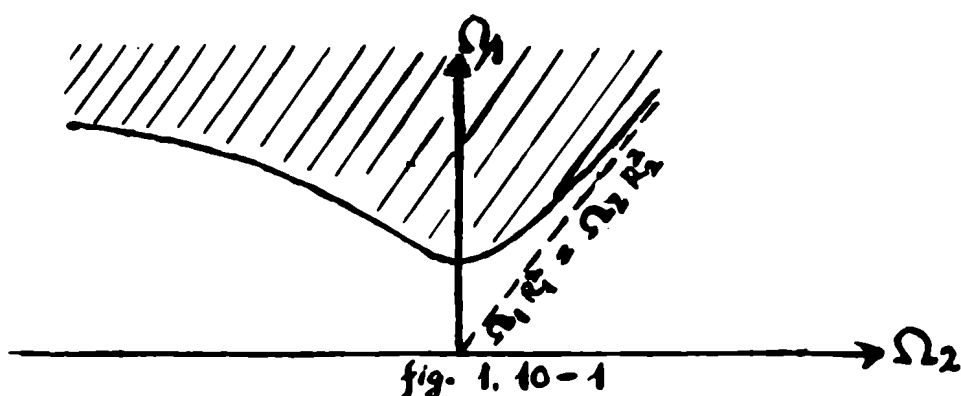
con la del flujo original, da la naturaleza del flujo que existe en el momento en que éste deja de ser estable. Es una función periódica a lo largo del eje de los cilindros y de longitud de onda igual a  $2\pi/k_c$ .

Se halla que el menor  $Re$  se obtiene cuando la frecuencia  $\omega(k)$  es imaginaria pura. De esta forma, cuando  $k = k_c$  no sólo es  $Im \omega = 0$  sino que  $\omega = 0$ . Esto indica que la primera inestabilidad del flujo entre cilindros rotantes conduce al establecimiento de otro flujo que es también estacionario.

Debido a la gran complejidad del cálculo, los resultados numéricos se han obtenido sólo para el caso en que el espacio comprendido entre los cilindros es pequeño ( $R_2 - R_1 \ll R_2$ ).

La figura 1.10-1 muestra un ejemplo de curva de separación de las regiones de flujos inestable (sombreado) y estable. El brazo de la derecha de la curva, es asintótico a la recta  $\Omega_2 R_2^2 = \Omega_1 R_1^2$ . Cuando el número de Reynolds aumenta los dos números  $\Omega_2 R_2^2/\nu$  y  $\Omega_1 R_1^2/\nu$  aumentan los factores iguales; en la figura 1.10-1 esto equivale a desplazarse, a lo largo de una recta que pase por el origen y tenga una pendiente determinada, en sentido ascendente. Se observa que en la parte derecha del diagrama las rectas en que se cumple la relación  $\Omega_2 R_2^2 / \Omega_1 R_1^2 > 1$  no interceptan en ningún punto la curva que limita la región de estabilidad: el flujo es estable. Inversamente cuando la relación existente es

$\Omega_2 R_2^2 / \Omega_1 R_1^2 < 1$  se alcanza la región de inestabilidad para  $Re$  su ficientemente grandes, de acuerdo a la ecuación (1.10-4) En la par te izquierda de la fig. 1.10-1 ( $\Omega_1$  y  $\Omega_2$  de signos contrarios)



cualquier línea que pase por el origen alcanza a cortar la curva y el flujo puede hacerse inestable para cualquier valor de la relación  $\Omega_2 R_2^2 / \Omega_1 R_1^2$  lo que está de acuerdo también a los resultados obtenidos anteriormente.

Para el caso en que el cilindro externo permanezca inmóvil la inestabilidad de flujo aparece cuando

$$\Omega_1 = 41,3 \nu / h' \sqrt{h' R_2} \quad (1.10-6)$$

donde  $h' = R_2 - R_1$ .

La estabilidad de flujo en la parte no sombreada de la fig. 1.10-1 no significa realmente que el flujo permanezca estacionario independientemente de que  $Re$  se haga suficientemente grande. Experimentalmente se conoce que existe un límite a partir del cual es posible la existencia de un flujo estable no estacionario. En esta región el flujo es "metaestable", es decir, estable con res-

pecto a pequeñas perturbaciones pero inestable con respecto a otras mas grandes. Si debido a estas perturbaciones aparece el flujo no estacionario en un lugar a lo largo de los cilindros, éste desplaza el flú. laminar en todo el espacio apareciendo el flujo turbulento totalmente desarrollado.

Un caso límite al de los cilindros coaxiales rotantes es cuando el radio es grande y el espacio  $h'$  pequeño: es el de dos planos paralelos en movimiento relativo. Este flujo es estable para perturbaciones infinitesimales para cualquier valor de  $Re = u'h/\nu$ , donde  $u'$  es la velocidad relativa de los planos. El movimiento turbulento estable se hace posible, sin embargo, para valores  $Re$  superiores a 1500.

### 1.11 El régimen turbulento

Aún cuando las ecuaciones fundamentales de la flúido-dinámica siguen siendo válidas para el régimen turbulento, su aplicación directa resulta imposible por no ser analíticamente resolubles en este caso.

Es por esto que el enfoque que generalmente se hace del problema se basa en considerar las magnitudes intervinientes promediadas en el tiempo. Así en lugar de considerar la velocidad de flujo instantánea, que es fluctuante, se considera la velocidad media en un intervalo de tiempo suficientemente grande con respecto al tiempo de la oscilación de la velocidad instantánea, pero lo su

ficientemente pequeño respecto del cambio temporal de la diferencia de presión que causa el movimiento.

Así la velocidad media queda definida por

$$\langle \vec{v} \rangle = \frac{1}{t_0} \int_t^{t+t_0} \vec{v} dt \quad (1.11-1)$$

y la velocidad instantánea puede simbolizarse como la suma de la velocidad promedio mas la fluctuación de velocidad  $v''$ :

$$\vec{v} = \langle \vec{v} \rangle + \vec{v}'' \quad (1.11-2)$$

En la misma forma que la velocidad, la presión instantánea puede definirse como suma de dos términos

$$p = \langle p \rangle + p'' \quad (1.11-3)$$

De acuerdo a estas definiciones, las ecuaciones de continuidad y movimiento pueden escribirse reemplazando  $\vec{v}$  y  $p$  en función de sus valores medios y fluctuaciones.

Analizando sólo la componente  $x$  resulta:

Ecuación de continuidad:

$$\frac{\partial}{\partial x} (\langle v_x \rangle + v''_x) + \frac{\partial}{\partial y} (\langle v_y \rangle + v''_y) + \frac{\partial}{\partial z} (\langle v_z \rangle + v''_z) = 0 \quad (1.11-4)$$

Ecuación de movimiento:

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho (\langle v_x \rangle + v''_x) = - \frac{\partial}{\partial x} (\langle p \rangle + p'') - \left[ \frac{\partial}{\partial x} \rho (\langle v_x \rangle + v''_x) (\langle v_x \rangle + v''_x) + \frac{\partial}{\partial y} \rho (\langle v_y \rangle + v''_y) (\langle v_x \rangle + v''_x) + \frac{\partial}{\partial z} \rho (\langle v_z \rangle + v''_z) (\langle v_x \rangle + v''_x) \right] +$$

$$+\mu \nabla^2 (\langle v_x \rangle + v_x'') + F_x \quad (1.11-5)$$

Habiéndose considerado un fluido newtoniano e incompresible.

Si estas ecuaciones son promediadas en el tiempo, en la misma forma que en (1.11-1) se obtiene:

Ecuación de continuidad promediada:

$$\frac{\partial \langle v_x \rangle}{\partial x} + \frac{\partial \langle v_y \rangle}{\partial y} + \frac{\partial \langle v_z \rangle}{\partial z} = 0 \quad (1.11-6)$$

Ecuación de movimiento promediada:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho \langle v_x \rangle}{\partial t} = & - \frac{\partial \langle p \rangle}{\partial x} - \left( \frac{\partial}{\partial x} \rho \langle v_x \rangle \langle v_x \rangle + \frac{\partial}{\partial y} \rho \langle v_y \rangle \langle v_x \rangle + \frac{\partial}{\partial z} \rho \langle v_z \rangle \langle v_x \rangle \right) - \\ & - \left( \frac{\partial}{\partial x} \rho \langle v_x'' v_x'' \rangle + \frac{\partial}{\partial y} \rho \langle v_y'' v_x'' \rangle + \frac{\partial}{\partial z} \rho \langle v_z'' v_x'' \rangle + \mu \nabla^2 \langle v_x \rangle + F_x \right) \end{aligned} \quad (1.11-7)$$

Mientras que la ecuación de continuidad promediada en el tiempo puede obtenerse por simple sustitución de  $\vec{v}$  por  $\langle \vec{v} \rangle$  en la ecuación (1.1-6) (para fluidos incompresibles), puede observarse que en la (1.11-7) aparecen nuevos términos que están relacionados con las fluctuaciones de la velocidad por turbulencia. Introduciendo la notación

$$\langle \tau_{xx}^{(t)} \rangle = \rho \langle v_x'' v_x'' \rangle; \quad \langle \tau_{xy}^{(t)} \rangle = \rho \langle v_x'' v_y'' \rangle \quad (1.11-8,9)$$

y empleando la forma pseudovectorial definida por la ecuación

(1.5-4) las ecuaciones de continuidad y de movimiento promediadas pueden escribirse, respectivamente, así:

$$(\nabla \cdot \langle \vec{v} \rangle) = 0 \quad (1.11-10)$$

$$\rho \frac{d\langle \vec{v} \rangle}{dt} = -\nabla \langle p \rangle - [\text{div} \langle \tau \rangle'] - [\text{div} \langle \tau \rangle''] + \vec{F} \quad (1.11-11)$$

Los términos definidos por las ecuaciones (1.11-8,9) suelen denominarse "tensiones de Reynolds" o "flujo turbulento de cantidad de movimiento". Para evaluarlos diversos autores han propuesto expresiones semi empíricas, siendo las principales las que siguen:

### Viscosidad turbulenta

Esta fue una de las primeras expresiones desarrolladas para el cálculo de las tensiones de Reynolds por analogía con la ley de Newton para la viscosidad (5):

$$\langle \tau_{yz}^t \rangle = -\gamma \frac{d\langle v_x \rangle}{dy} \quad (1.11-12)$$

donde  $\gamma$  es el llamado "coeficiente de viscosidad turbulenta".

### Teoría de la "longitud de mezclado"

Por analogía con la teoría cinética de los gases Prandtl (24) desarrollo el concepto de longitud de mezclado como la distancia  $l$  que debe recorrer una partícula flúida antes de que se modifique su cantidad de movimiento. Así la fluctuación de la velocidad se relaciona con  $l$  en la siguiente forma:

$$v'' = l \frac{d\langle v_x \rangle}{dy} \quad (1.11-13)$$

lo que significa que la variación de la velocidad depende del cambio en la velocidad media temporal entre dos puntos distanciados por  $l$  en la dirección  $y$ .

Teniendo en cuenta la ecuación de continuidad y la ecuaciones (1.11-8,9) se obtiene la ecuación que define  $l$ :



$$\langle \tau_{yx}^t \rangle = -\rho l^2 \left| \frac{d\langle v_x \rangle}{dy} \right| \frac{d\langle v_x \rangle}{dy} \quad (1.11-14)$$

El valor de  $l$  depende de la posición. Junto a la pared será 0. En base a consideraciones dimensionales se ha puesto con cierto éxito que  $l$  es proporcional a la distancia a la pared:

$$l = \kappa_1 y \quad (1.11-15)$$

En base a consideraciones diferentes Taylor (34) obtiene un resultado similar al expresado por la ecuación (1.11-14).

Von Kármán (13), en base a consideraciones de semejanza en flujo turbulento, sugirió una expresión para la longitud de mezclado  $l$  que es la siguiente:

$$l = \kappa_2 \frac{d\langle v_x \rangle / dy}{d^2\langle v_x \rangle / dy^2} \quad (1.11-16)$$

donde  $\kappa_2$  es una constante universal independiente de la configuración del contorno o número de Reynolds. Esta constante, que se determina a partir de datos de distribución de velocidades en tuberías, tiene el valor 0,40 para algunos autores y el de 0,36 para otros.

La expresión de von Kármán para la transferencia turbulenta de cantidad de movimiento es pues:

$$\langle \tau_{yx}^t \rangle = -\rho \kappa_2^2 \left| \frac{(d\langle v_x \rangle / dy)^3}{(d^2\langle v_x \rangle / dy^2)^2} \right| \frac{d\langle v_x \rangle}{dy} \quad (1.11-17)$$

Para el flujo tangencial entre cilindros concéntricos rotantes esta expresión se transforma en:

$$\langle \tau_{re}^t \rangle = -\rho \kappa^2 \left( \frac{\left( \frac{d\langle v_e \rangle}{dr} - \frac{\langle v_e \rangle}{r} \right)^3}{\frac{d}{dr} \left( \frac{d\langle v_e \rangle}{dr} + \frac{\langle v_e \rangle}{r} \right)^2} \right) \left( \frac{d\langle v_e \rangle}{dr} - \frac{\langle v_e \rangle}{r} \right) \quad (1.11-18)$$

Otra expresión para las tensiones de Reynolds ha sido desarrollada por Deissler (8):

$$\langle \tau_{yx}^t \rangle = -\rho n_1^2 \langle v_x \rangle y \left( 1 - e^{-\frac{n_1^2 \langle v_x \rangle y}{\nu} \frac{d\langle v_x \rangle}{dy}} \right) \quad (1.11-19)$$

Esta expresión describe bien el perfil de velocidades en la proximidad de la pared sólida para flujo isotérmico turbulento en tubos. (Datos de Deissler (7) y Laufer (17) ).

El valor de  $n_1$  según Deissler, es de 0,124 calculado en base a la distribución de velocidades hallada experimentalmente.

### 1.11.1 Perfil universal de velocidades y factor de fricción

Varios autores entre los que se encuentran Prandtl (25) von Kármán (14) y Reichardt (26) obtuvieron expresiones aproximadas para el perfil de velocidades para flúidos circulando en tuberías en régimen turbulento, considerando la relación entre tensión de corte y gradiente de velocidad.

Así, en base a las ecuaciones (1.11-14) y (1.11-15) se obtiene la expresión:

$$v_-^+ = \frac{v_x}{v_*} = \frac{1}{\kappa_1} \ln y_-^+ + \kappa_1' \quad (1.11.1-1)$$

donde

$$v_*^2 = \left( -\tau / \rho \right)^{1/2} \quad (1.11.1-2)$$

y

$$y_+^+ = \frac{y \rho v^+}{\mu} \quad (1.11.1-3)$$

Para tuberías cilíndricas lisas, Nikuradse (21) halló

$\chi_1 = 0,4$  y  $\chi_1^+ = 5,5$ . Diessler (8), en cambio, recomienda como mejores valores para  $\chi_1$  y  $\chi_1^+$  0,36 y 3,8 respectivamente. Así:

$$v_+^+ = 2,5 \ln y_+^+ + 5,5 \quad (') (1.11.1-4)$$

aplicable en la región de régimen turbulento neto donde  $y_+^+ > 26$ .

Para  $5 < y_+^+ < 26$  (zona "buffer") la expresión es:

$$v_+^+ = 5,0 \ln y_+^+ - 3,05 \quad (1.11.1-5)$$

Para  $y < 5$  (subcapa laminar) es:

$$v_+^+ = y_+^+ \quad (1.11.1-6)$$

La representación de  $v_+^+$  en función de  $\ln y_+^+$  se conoce como "perfil universal de velocidades" de Prandtl.

En base a la ecuación (1.11.1-4) puede calcularse el factor de fricción para el flujo turbulento de flúidos en tuberías cilíndricas lisas, obteniéndose:

$$\phi^{-\frac{1}{2}} = 2,5 \ln (\text{Re } \phi^{\frac{1}{2}}) \quad (1.11.1-7)$$

donde  $\phi = f/2$ .

Moody (18) observó que los datos experimentales para estos sistemas se ajustan mejor a la ecuación:

(') Nota: Los coeficientes numéricos de la ecuación (1.11.1-4) son los obtenidos por Nikuradse, que también recomienda Schlichting (29).

$$\sigma^{-\frac{1}{2}} = M_1 \ln (\text{Re } \sigma^{\frac{1}{2}}) + M_2 \quad (1.11.1-8)$$

donde  $M_1 = 2,5$  y  $M_2 = 0,3$ .

Theodorsen y Regier (38) obtuvieron la expresión:

$$\sigma^{-\frac{1}{2}} = 1,77 \ln (\text{Re } \sigma^{\frac{1}{2}}) - 1,2 \quad (1.11.1-9)$$

para cilindros rotando en medios flúidos infinitos.

## PARTE EXPERIMENTAL

### 2.1 Introducción

Para estudiar la transferencia de cantidad de movimiento que tiene lugar al rotar un cilindro en un medio fluido contenido en otro cilindro coaxial al primero, ha de disponerse de un sistema que permita la medición de cada una de las variables que participan en el fenómeno.

Estas son: el momento  $T_0$ , necesario para mantener la rotación del cilindro interior (rotor) a velocidad constante; la velocidad de rotación  $v_1$ ; la aceleración de la gravedad, la densidad y viscosidad del fluido y las características geométricas del sistema: longitud y diámetro de ambos cilindros, número y ancho de los certa corrientes, etc. (1)

La medida del momento es el mayor problema experimental y puede hacerse de dos maneras, de acuerdo al principio de conservación de la cantidad de movimiento:

- a) por la medida de la cantidad de movimiento que suministra el rotor al sistema;
- b) por la medida de la cantidad de movimiento que recibe el cilindro externo (recipiente).

En el caso a) la medición se realiza intercalando un dina

(1) Nota: Como ha sido explicado en 1.8.1 la aceleración de la gravedad no interviene como variable si se eliminan las superficies libres, como se ha hecho en el presente trabajo.

mómetro entre el cilindro interno y su eje propulsor. El dinamómetro gira con el rotor e indica el momento necesario para mantener el movimiento. La escala del instrumento se lee con la ayuda de un estroboscopio.

En el caso b) debe medirse el momento necesario para mantener inmóvil el cilindro externo.

Ambos sistemas son métodos adecuados de medición. Con el primero de ellos puede construirse un equipo versátil para estudiar las características geométricas del recipiente en la transferencia de cantidad de movimiento. En cambio no es adecuado para valuar pequeños consumos de potencia a velocidades relativamente altas ya que la fricción entre las piezas del dinamómetro puede afectar la lectura en una fracción considerable del total.

El segundo sistema, en cambio, se adapta mejor para estudiar la influencia de las variables distintas del tamaño y forma del recipiente; puede medir bajos consumos y es relativamente independiente de la velocidad del rotor.

Por estas razones se eligió este segundo tipo de sistema para el presente trabajo.

## 2.2 Equipo utilizado

El equipo utilizado en las experiencias, fig. 2.2-1, es esencialmente una balanza de torsión que consiste en un soporte, capaz de contener al recipiente, que pende suspendido de un alambre de

acero de 1 mm de diámetro y aproximadamente 2,5 m de largo.

Al soporte se adosa un fiel que señala una escala graduada y bajo la base de aquél se fija una polea a la que un fino hilo de algodón transmite la fuerza necesaria para mantener el recipiente en su posición original.

Esta fuerza se mide directamente por el valor de las pesas colocadas en un platillo que se halla unido al hilo de algodón que da al aparato mediante una transmisión de fricción despreciable.

la transmisión soporte-platillo es una cruz equilátera de material liviano (polimetacrilato de metilo) a través de cuyo punto de intersección pasa un delgado alambre de acero inoxidable al que es mantenido tenso por un soporte. A uno de los brazos de esta cruz se adosa el hilo que va al soporte de madera y a otro, adyacente al primero, el platillo.

El sistema se mantiene en su posición merced a finas guías de acero contenidas en sendos bujes de politetrafluoretileno ("Teflon").

El rotor se acopla mediante una unión roscada a un cabezal análogo al de una máquina rectificadora. Este es impulsado a través de poleas de diversos diámetros por un motor de corriente alternada monofásico de  $\frac{1}{4}$  HP y 1490 r.p.m.

En consecuencia la variación de velocidades no puede hacerse en forma continua sino en los siguientes puntos fijos:

245, 420,5, 665, 1065, 1070, 1565, 1765, 1785, 2480, 3025,

3810 y 4710 vueltas por minuto.

Una reducción especial, empleada únicamente en las determinaciones en régimen laminar, permitió obtener velocidades de 38, 44,8, 55,5 y 174 r.p.m.

El rotor está constituido por un eje de acero inoxidable en el que pueden calzarse anillos cilíndricos de este material y de distintas alturas.

De esta forma se logran longitudes variables del cilindro interior lo cual permite la evaluación posterior de los efectos de bordes, esto es, la contribución de las bases del cilindro y su eje impulsor a la cantidad de movimiento transferida.

Se usaron dos diámetros de rotor: de 30,0 mm y de 60,0 mm. La casi totalidad de las determinaciones realizáronse con este último utilizando el primero con el solo objeto de verificar el cambio de escala.

Las determinaciones con el rotor de 30,0 mm de diámetro se efectuaron con una altura del mismo de 120 mm.

El rotor de 60,0 mm de diámetro se utilizó con 120 mm, 180 mm y 240 mm de altura.

En relación con el rotor utilizado se emplearon recipientes de distintos diámetros y alturas.

Con el rotor de 60,0 mm de diámetro y 240 mm de altura se usaron recipientes de 360 mm de altura y tres diámetro diferentes:



244 mm, 196 mm y 122 mm.

Con el rotor de 60,0 mm de diámetro y alturas de 120 mm y 180 mm se usaron recipientes de altura mayor en 120 mm que la del rotor correspondiente.

De esta forma, el efecto de bordes en las determinaciones que sólo difieren en la altura del sistema es constante y por tanto, su magnitud determinable.

La altura de los recipientes se reguló mediante una tapa deslizable, a modo de pistón, que aquéllos poseían.

Con el rotor de diámetro menor se usó un recipiente de 180 mm de altura y 118 mm de diámetro.

Los recipientes fueron hechos de hierro siendo protegidos contra la corrosión con un recubrimiento epoxibituminoso.

Los cortacorrientes empleados en las experiencias eran también de hierro recubierto con pintura epoxi o bien de bronce. Estos se adhieren al recipiente mediante una mezcla de 5 partes de parafina con una parte de resina colofonia. Esta mezcla, fundida, se deja fluir por la línea de contacto del cortacorriente con la pared del recipiente, quedando aquél fijo al solidificar la mezcla.

En todos los casos la altura de los cortacorrientes es idéntica a la del recipiente y los anchos de cortacorrientes empleados fueron, para el rotor de 60,0 mm de diámetro, de 3, 12, 24, 48 y 60 mm y, para el rotor de 30 mm de diámetro, de 12 y 24 mm.

El ancho máximo de cortacorrientes que puede emplearse está limitado por la distancia libre entre los cilindros interior y exterior.

El número de cortacorrientes usados en las determinaciones fueron 1, 3, 6, 12, 24, 48 y 96.

Como medios flúidos se usaron agua y soluciones acuosas de glicerina de aproximadamente 50% y 97% de concentración. De esta forma el rango de números de Reynolds abarcado en las experiencias se extiende de 1 a  $10^6$ .

### 2.3 Determinaciones experimentales

El método seguido en la realización de las mediciones fue el siguiente:

- a) Armado del recipiente y rotor de acuerdo a las determinaciones a realizar.
- b) ensamble del equipo: el recipiente cerrado y vacío con el rotor en su interior se colocaba en el soporte de la balanza de torsión el que luego se suspendía del alambre de la misma mediante llaves adecuadas. Se roscaba luego el rotor al cabezal respectivo. Se ajustaba la posición del alambre de suspensión de manera quedara centrado por sí mismo, esto es, sin que mediara fuerza exterior alguna. Logrado esto se colocaban los bujes de politetrafluoretileno que mantendrían centrado el sistema una vez puesto en movimiento.

- c) Ajuste de la posición de cero: la posición del fiel puede fijarse dentro de cierta zona de la escala graduada mediante el tornillo (pitón) del que pende el soporte con el recipiente. Una vez fijada así, aproximadamente, la posición de equilibrio, ésta se determina exactamente promediando las lecturas de las posiciones extremas de pequeñas oscilaciones, en forma análoga a la que se realiza con una balanza analítica de platillos.
- d) Determinación de la sensibilidad: Se hace efectuando el agregado de un pequeño peso sobre el platillo del aparato. La nueva posición de equilibrio comparada con la original y en relación al peso colocado da la sensibilidad. Se la utiliza para estimar pequeñas fracciones del total cuando el sistema no es llevado exactamente a su posición primitiva en una determinación.
- e) Medición: se da marcha al cilindro interno y se aguarda un tiempo hasta que el flujo quede totalmente desarrollado. Este tiempo puede ser de media hora o más para las determinaciones en régimen laminar con glicerina y prácticamente cero en los regímenes altamente turbulentos.

El recipiente tiende a rotar en el sentido que lo hace el cilindro interno aún cuando no puede pasar de cierta posición merced a la existencia de un tope adecuado.

Alcanzado el estado de régimen se colocan pesas en el platillo de forma que el fiel del aparato indique la posición origi

nal.

Realizada la medición se detiene el aparato y se modifica la transmisión para obtener otra velocidad repitiendo para este punto el procedimiento indicado. Ocasionalmente las mediciones se realizan por duplicado o triplicado para verificar la fidelidad del sistema.

Cuando el medio fluido es glicerina concentrada (97-98%) la velocidad máxima a que se trabaja es 665 r.p.m. de forma de impedir la inclusión de aire en el seno del líquido, lo que hubiera alterado sus características fluidodinámicas. Por la misma razón con las soluciones de glicerina aprox. 50% de concentración no se sobrepasaron las 1100 r.p.m.

#### 2.4 Método de cálculo

Cálculo del número de Reynolds:

Se ha definido el Re en este trabajo por la expresión (1.8-10):

$$Re = \frac{v_1 \rho D}{\mu} \quad (2.4-1)$$

siendo  $v_1$  la velocidad tangencial del rotor,  $\rho$  la densidad del fluido, D el diámetro del rotor y  $\mu$  la viscosidad del fluido.

Las densidades del agua a distintas temperaturas se obtienen del manual de Hodgman (12) y las de las soluciones de glicerina se determinan experimentalmente con la balanza de Mohr o picnómetro.

Las viscosidades del agua a distintas temperaturas se ob-

tienen de tablas (12,19) mientras que las de las soluciones de gli  
cerina se determinan con viscosímetro de Oswald calibrados en el  
rango adecuado con soluciones preparadas con agua deionizada y gli  
cerina bidestilada en el laboratorio a partir de un producto de ca  
lidad Farmacopea.

Cálculo del número de potencia:

Llamando P a la potencia consumida por la rotación del ci  
lindro interior a una velocidad constante de  $\Omega$ , radianes por segun  
do es:

$$P = \Omega_1 \tau_o = 2\pi N \tau_o \quad (2.4-2)$$

siendo N la velocidad del rotor en vueltas por segundo.

En el aparato empleado  $\tau_o$  es medido por el producto de la  
fuerza aplicada por el radio de la polea, esto es:

$$\tau_o = g_o r_p p_1 \quad (2.4-3)$$

donde  $p_1$  se mide en gramos; por tanto:

$$P = 2\pi g_o N r_p p_1 \quad (2.4-4)$$

Siendo:

$$Po = \frac{P}{\rho N^3 D^5} \quad (2.4-5)$$

se obtiene que:

$$Po = 2\pi g_c r_p \frac{p_1}{\rho N^3 D^5} \quad (2.4-6)$$

Cálculo del coeficiente de arrastre ("drag coefficient"):

De acuerdo a la definición clásica (ver 1.8.2) se esta-  
blece  $c_D$  por la expresión:

$$c_D = \frac{\tau_o}{q S R_1} \quad (2.4-7)$$

siendo  $q$  la llamada presión dinámica definida como:

$$q = \frac{1}{2} \rho \Omega_1^2 R_1^2 \quad (2.4-8)$$

$R_1$  el radio del cilindro interior y  $S$  la superficie lateral del mismo.

El momento que figura en el numerador de la expresión que define  $c_D$  es el que transfiere la superficie lateral del rotor exclusivamente. El valor experimental deberá pues ser corregido por el ya mencionado "efecto de bordes" quedando en consecuencia la expresión en la forma:

$$c_D = \frac{\tau_o B_d}{q S R_1} \quad (2.4-9)$$

determinando  $B_d$  en la forma que se indicará en el punto siguiente.

### 2.5 Efecto de bordes

Como consecuencia inevitable del empleo de un sistema real para la determinación de los valores de transferencia de cantidad de movimiento entre cilindros concéntricos rotantes ésta se produce no sólo por la superficie lateral del cilindro sino también por la contribución de sus bases y eje sostén (bordes).

Es por tanto necesaria la corrección del valor medido en la experiencia real descontando la cantidad de movimiento transferida por los bordes.

Para hacerlo se requiere la valuación experimental de la magnitud del efecto de bordes, para lo cual, se realizan determina-

ciones con rotores de distinta longitud pero manteniendo constante la disposición geométrica del mismo dentro del recipiente con lo que se logra que la diferencia entre estas determinaciones sea función única de la superficie lateral del rotor.

Siendo por definición de  $c_D$ :

$$\tau_o = c_D \pi \rho \Omega_1^2 R_1^4 L \quad (2.5-1)$$

en un sistema "ideal" (sin efecto de bordes), en el sistema real será:

$$\tau_o = c_D \pi \rho \Omega_1^2 R_1^4 L + B_d \quad (2.5-2)$$

que es una ecuación lineal en  $L$  y  $\tau_o$ , cuyas constantes  $c_D$  y  $B_d$  pueden calcularse teniendo valores de  $\tau_o$  para dos valores de  $L$ .

En la práctica se hicieron determinaciones con tres alturas diferentes de rotor para valuar el efecto de bordes.

Multiplicando ambos miembros de la ecuación (2.5-2) por  $\pi^3 (4 \rho \Omega_1^2 R_1^5)^{-1}$  se obtiene:

$$Po = c_D \frac{\pi^4}{4 R_1} L + B' \quad (2.5-3)$$

de forma que el efecto de bordes puede evaluarse operando con los datos experimentales en la forma de "números de potencia".

Los datos experimentales expresados en la forma de números de potencia en función de  $Re$ , dan lugar a una curva cuya forma es la misma que la de  $c_D$  en función de  $Re$ .

Por esta razón en este trabajo se han expresado los datos experimentales en la forma de números de potencia. Así las funciones

obtenidas  $P_o = P_o(Re)$  se transforman en otras  $c_D = c_D(Re)$  mediante la simple aplicación de factores apropiados.

## 2.6 Resultados

### 2.6.1 Régimen laminar

Las determinaciones de transferencia de cantidad de movimiento se realizaron en el rango de números de Reynolds que va de 1 a  $10^6$  abarcando desde el régimen laminar hasta el turbulento neto.

Las curvas que representan el régimen laminar son rectas de pendiente -1 en el gráfico logarítmico doble y responden a una ecuación de la forma:

$$c_D = \frac{c}{Re} \quad (2.6.1-1)$$

La existencia de cortacorrientes afecta el valor de la constante  $c$  que es mínima para el sistema que no los tiene y mayor a medida que crece su ancho.

Este hecho puede interpretarse suponiendo que la existencia de cortacorrientes disminuye el diámetro efectivo del recipiente aumentando en consecuencia el gradiente de velocidad y por lo tanto el momento.

La existencia de régimen laminar en el caso de las experiencias realizadas con cortacorrientes queda probada por el valor -1 de la pendiente de la recta representativa en el gráfico logarítmico doble.



El efecto de bordes calculado en la forma ya descrita es, para los casos estudiados de régimen laminar, con o sin cortacorrientes y  $L = 24,0$  cm de  $14,1\%$ .

La expresión final que representa los resultados obtenidos con el recipiente de 196 mm de diámetro, 360 mm de alto, sin cortacorrientes y con el rotor de 60,0 mm de diámetro es:

$$c_D = \frac{8,42}{Re} \quad (2.6.1-2)$$

La expresión calculada teóricamente según la ec. (1.8.2-12) es para este caso:

$$c_D = \frac{8,83}{Re} \quad (2.6.1-3)$$

de forma que la constante experimental difiere de la teórica en  $4,7\%$ .

Si bien este resultado no es en si mismo importante ya que puede calcularse analíticamente, su concordancia con el valor calculado es una prueba de la fidelidad del aparato empleado.

En las determinaciones que corresponden al sistema formado por el recipiente de 196 mm de diámetro con tres cortacorrientes de 12 mm de ancho, la expresión que vincula los resultados experimentales es:

$$c_D = \frac{8,52}{Re} \quad (2.6.1-4)$$

Para el sistema cuyo recipiente es de 196 mm de diámetro con tres cortacorrientes de 48 mm de ancho la ecuación hallada es:

$$c_D = \frac{9,10}{Re} \quad (2.6.1-5)$$

El valor de las constantes  $c$  de estas expresiones podría

vincularse por la ecuación:

$$c = 8,39 + 0,146 \cdot h \quad (2.6.1-6)$$

donde  $h$  se expresa en cm, cuyo interés práctico es relativamente menor ya que generalmente no se usan cortacorrientes en los sistemas en régimen laminar.

La presencia de cortacorrientes influiría también en la ubicación del punto de transición de régimen laminar a turbulento. Este correspondería a un número de Reynolds mayor cuando no existen cortacorrientes, desplazándose hacia valores menores al crecer el ancho de aquéllos.

### 2.6.2 Régimen turbulento

Los datos experimentales de transferencia de cantidad de movimiento en régimen turbulento se encuentran representados gráficamente en las figuras 2.6.2-1, 2.6.2-2, 2.6.2-3 y 2.6.2.3-1 en escala doble logarítmica.

Puede observarse que en regímenes altamente turbulentos estas curvas no son rectas, no siendo aplicables, si se desea una aproximación grande, expresiones clásicas de la forma:

$$c_D = A_1 Re^m \quad (2.6.2-1)$$

a cada una de las curvas en donde  $A_1$  y  $m$  sean constantes.

Es posible obtener una buena aproximación a la curva experimental con una parábola cúbica aun cuando una mayor exactitud se obtendría, posiblemente, con una expresión de grado superior.

Resulta también evidente que las curvas obtenidas para distintas condiciones experimentales (distintos anchos de cortacorrientes, distinto número de los mismos y distintas alturas del sistema) guardan un notorio paralelismo en la representación doble logarítmica. Este hecho es adoptado como hipótesis a fin de simplificar la correlación analítica de los datos experimentales.

La verosimilitud de esta hipótesis quedará evidenciada por el valor de la desviación cuadrática media que se obtenga suponiendo este modelo.

Así es que a los datos experimentales se ajustó una ecuación de la forma:

$$\ln Po = \ln a_0 + a_1 \ln Re + a_2 (\ln Re)^2 + a_3 (\ln Re)^3 \quad (2.6.2-2)$$

Sentada la hipótesis del paralelismo de las diversas curvas en el gráfico logarítmico doble, el término independiente  $\ln a_0$  es característico de cada una de ellas siendo función de las otras variables, distintas del número de Reynolds, que intervienen en el fenómeno. Los otros coeficientes  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $a_3$  son comunes a todas las curvas y determinan su forma. La ecuación resultante es:

$$\ln Po = \ln a_{0_1} - 4,2107 \ln Re + 1,3955 (\ln Re)^2 + - 0,1673 (\ln Re)^3 \quad (2.6.2-3)$$

El valor de los términos independientes  $\ln a_{0_1}$  se determina por el método de los mínimos cuadrados para cada una de las curvas con los resultados que se indican en la tabla X.

En el punto 2.7 se dará una referencia más detallada sobre el método seguido en el cálculo.

#### 2.6.2.1 Efecto de bordes

La figura 2.6.2.1-1 muestra las curvas que representa las determinaciones efectuadas con recipientes y rotores que sólo difieren en la altura.

Las experiencias se realizaron en el recipiente de 196 mm de diámetro con 360 mm, 240 mm y 180 mm de altura. Correspondientemente se usaron rotores de 60 mm de diámetro con 240 mm, 180 mm y 120 mm de altura.

La distancia de las bases del cilindro interno a las del externo es constante en todos los casos e igual a 60 mm.

Estas determinaciones se hicieron sin cortacorrientes y con sistemas que tenían tres cortacorrientes de 3 mm y 60 mm de ancho.

Puede observarse que las curvas de  $P_o$  en función de  $Re$  son aproximadamente paralelas en la representación doble logarítmica.

Matemáticamente un conjunto así de funciones puede vincularse por una ecuación del tipo:

$$\ln P_o = \ln A_L + \ln f(Re) \quad (2.6.2.1-1)$$

donde  $A_L$  es una función de  $L$  independiente de  $Re$  y  $f(Re)$  es independiente de  $L$ . (En la representación gráfica puede decirse que  $A_L$  define la "altura" de la curva mientras que  $f(Re)$  da su forma).

También puede escribirse:

$$Po = A_L \cdot f(Re) \quad (2.6.2.1-2)$$

derivando con respecto a L:

$$\frac{\partial Po}{\partial L} = f(Re) \frac{dA_L}{dL} \quad (2.6.2.1-3)$$

y dividiendo ambos miembros por  $Po = A_L \cdot f(Re)$  es:

$$\frac{1}{Po} \frac{\partial Po}{\partial L} = \frac{1}{A_L} \frac{dA_L}{dL} \quad (2.6.2.1-4)$$

Por otra parte al ser  $\zeta'_0$  función lineal de L (ver párrafo 2.5) es también  $Po$  función lineal de esta variable, por tanto:

$$Po = B' + \frac{\partial Po}{\partial L} L \quad (2.6.2.1-5)$$

siendo  $B'$  la contribución al número de potencia total que hacen los bordes o, en otras palabras, es el efecto de bordes expresado en la forma de número de potencia.

También es:

$$B' = Po - \frac{\partial Po}{\partial L} L = Po \left( 1 - \frac{1}{A_L} \frac{dA_L}{dL} \right) L = \beta Po \quad (2.6.2.1-6)$$

ya que por la ec. (2.6.2.1-4) es:

$$\frac{\partial Po}{\partial L} = \frac{Po}{A_L} \frac{dA_L}{dL} \quad (2.6.2.1-7)$$

Queda así demostrado que, para una altura del sistema determinada, el efecto de bordes es una fracción constante del número de potencia medido en condiciones reales (con efecto de bordes) independiente del número de Reynolds.

Así:

$$Po_{\text{corr}} = (1 - \beta) Po = \alpha Po \quad (2.6.2.1-8)$$

En adelante se llamará a  $\beta$  coeficiente de efecto de bordes y a  $\alpha$  coeficiente de corrección por efecto de bordes.

Como corolario importante de este resultado es de mencionar que las correlaciones entre los datos experimentales podrán obtenerse operando directamente con éstos (sin corregirlos por efecto de bordes). Multiplicando el resultado así hallado por el coeficiente de corrección por efecto de bordes se tendrá la correlación verdadera.

#### 2.6.2.2 Efecto del ancho de los cortacorrientes

En la figura 2.6.2.2-1 puede visualizarse la influencia del ancho de los cortacorrientes en el coeficiente de transferencia de cantidad de movimiento.

En este gráfico se ha representado la relación entre el coeficiente de transferencia de cantidad de movimiento considerado y el que corresponde a la determinación a igualdad de  $Re$  pero sin cortacorrientes en función del ancho de los mismos. Las experiencias representadas en la figura 2.6.2.2-1 se realizaron con tres cortacorrientes.

Puede observarse que en la zona de valores de  $h$  cercanos a 0 la función es rápidamente creciente mientras que para valores mayores tiende asintóticamente a un valor constante.

Esto ocurre cuando la relación del ancho de los cortacorrientes al diámetro del recipiente es aproximadamente 10%; a partir de ese valor no hay aumento sensible del número de potencia con ancho de cortacorrientes mayores. Esta condición suele denominarse

en la literatura de lengua inglesa como sistema "full baffled".

Debido al hecho que las curvas representativas de  $c_D$  en función de  $Re$  son paralelas en gráfico logarítmico doble para distintos anchos de cortacorrientes bastará, para obtener el valor correspondiente a una experiencia con cortacorrientes, el multiplicar el que corresponde a una determinación sin cortacorrientes por un factor constante independiente del número de Reynolds.

El valor máximo de este factor es, como se verá en 2.7, 1,595. En otras palabras, para un determinado número de Reynolds la potencia máxima que puede consumir el sistema al introducirle cortacorrientes es, aproximadamente, 60% mayor que la que corresponde a un sistema que no los tenga.

### 2.6.2.3. Efecto del número de cortacorrientes

Se realizaron determinaciones con 1, 3, 6, 12, 24, 48 y 96 cortacorrientes distribuidos equidistantemente en la pared del recipiente.

Los resultados de estas determinaciones están graficados en la figura 2.6.2.3-1.

Puede observarse que el comienzo de la curva es similar al que corresponde al caso anterior aunque decrece a partir de cierto punto.

Existe una explicación sencilla a la presencia de un máximo en la curva que da  $c_D$  en función de  $n$ . Al aumentar el número de

cortacorrientes adosados a la pared del recipiente disminuye el espacio existente entre éstos que se convierte en una "zona muerta" desde el punto de vista fluidodinámico. Así el efecto es equivalente al de tener un recipiente de menor diámetro con menor ancho de cortacorrientes. De hecho, si el número de cortacorrientes fuera infinito el sistema sería idéntico a otro de diámetro de cilindro exterior menor en dos veces el ancho de los cortacorrientes. Como veremos más adelante, variaciones pequeñas en el diámetro del recipiente no tienen prácticamente influencia en el  $c_D$ , de manera que este valor tiende a decrecer cuando el aumento de número de cortacorrientes torne al recipiente del sistema cada vez más "liso".

Es interesante notar que el valor máximo que alcanza la curva es aproximadamente igual al valor máximo que se obtiene en un sistema de tres cortacorrientes al aumentar el ancho de los mismos.

#### 2.6.2.4 Efecto del diámetro del recipiente

Comparando las curvas obtenidas con los diversos recipientes se observa:

- a) A igualdad de  $Re$ ,  $c_D$  parece independiente del diámetro del recipiente en los casos de experiencias realizadas sin cortacorrientes. Lo mismo ocurre para sistemas con cortacorrientes cuyos anchos son relativamente grandes ( $h > 0,1 d$ ).
- b) Existe influencia del diámetro del recipiente en los casos de sistemas con cortacorrientes de pequeños anchos, siendo mayor  $c_D$



cuanto menor el diámetro del recipiente, a igualdad de las otras variables.

Estos hechos pueden aparecer contradictorios ya que  $c_D$  aumenta con la disminución de  $d$  para pequeños anchos de cortacorrientes y sin embargo no existe influencia alguna cuando el ancho de cortacorrientes se hace 0. El punto siguiente dará una explicación completa de los hechos observados.

#### 2.6.2.5 Efecto combinado del ancho y número de cortacorrientes y del diámetro del recipiente

De lo expuesto anteriormente surge a primera vista la existencia de una interrelación de las variables  $n$ ,  $h$ ,  $d$ .

En efecto, puede observarse que manteniendo constante el número de cortacorrientes,  $c_D$  aumenta al aumentar  $h$  siendo  $d$  constante. También aumenta  $c_D$  al disminuir  $d$  manteniendo constante el ancho de los cortacorrientes (cuando  $0 < h < 0,1 d$ ). Los valores obtenidos en estas experiencias mostrarían que  $c_D$  depende en realidad de la relación  $h/d$ .

Por otra parte la curva de  $c_D$  en función de  $n$  es, hasta su meseta, muy similar a la de  $c_D$  en función de  $h$  siendo fácil verificar en algunos casos particulares que a igualdad de las otras variables  $c_D = \text{cte. si } nh = \text{Cte.}$

En síntesis:

- A igualdad de  $d$  y  $Re$ ,  $c_D$  es función de  $n.h$ .

- A igualdad de  $n$  y  $Re$ ,  $c_D$  es función de  $nh/d$ .

Por tanto la función total lo es del grupo adimensional  $nh/d$ , a igualdad de  $Re$ , lo que se muestra en la figura 2.6.2.5-1 en donde se representa el coeficiente relativo de transferencia de cantidad de movimiento en función de este grupo, a  $Re = cte.$ , siendo notorio que los puntos se hallan sobre una misma curva.

La función será válida para  $n < 20$  ya que alrededor de ese punto comienza a evidenciarse la disminución de  $c_D$  con  $n$  por el efecto de "alisamiento" del recipiente descrito en 2.6.2.3.

La figura 2.6.2.5-1 muestra también que  $c_D$  tiende asintóticamente a una constante cuando  $nh/d$  aumenta, pudiéndose considerar que  $c_D$  es función única de  $Re$  cuando  $nh/d > 0,3$  aproximadamente.

En base a estas consideraciones, se intenta describir matemáticamente el comportamiento del sistema en lo que respecta a la influencia de  $nh/d$  mediante una función exponencial.

Las condiciones que se imponen a esta función son:

- ser creciente;
- asumir el valor 1 para  $nh/d = 0$ ;
- tender hacia un valor constante  $K$ , igual a la relación entre  $c_D$  para el sistema "full baffled" y  $c_{D_0}$  del sistema sin cortacorrientes a igualdad de  $Re$ , cuando  $nh/d \rightarrow \infty$ .

La función que satisface estas condiciones, que con las

condiciones de extremo impuestas representa la variación del coeficiente relativo de transferencia de cantidad de movimiento con  $nh/d$  a  $Re = cte.$ , es la siguiente:

$$\frac{c_D}{c_{D_0}} = K - (K - 1) e^{-\gamma \frac{nh}{d}} \quad (2.6.2.5-1)$$

En el punto 2.7 de este trabajo se describirá el método utilizado para evaluar esta función.

#### 2.6.2.6 Cambio de escala

Los datos experimentales muestran que el cambio de escala se realiza en este sistema de acuerdo a lo previsto por la teoría.

Así, puede observarse que los números de potencia obtenidos para números de Reynolds comprendidos entre  $10^4$  y  $5 \cdot 10^4$  aproximadamente se encuentran sobre la misma curva que los obtenidos para  $Re$  comprendidos entre aprox.  $5 \cdot 10^4$  y  $10^6$  habiéndose hallado los primeros trabajando con soluciones de glicerina como medio flúido mientras que en los últimos se empleó agua. A igualdad de  $Re$ ,  $Po$  es el mismo cualesquiera sean los medios flúidos empleados.

También las determinaciones Nos. 251 al 265 (Tabla VII) realizadas con un sistema más pequeño pero geoméricamente semejante al normalmente utilizado verifican el cumplimiento de la teoría del cambio de escala.

#### 2.7 Correlación analítica de los datos experimentales

El análisis dimensional aplicado al sistema en estudio establece la existencia de una función de la forma:

$$Po = f( Re, \text{ geometría} ) \quad (2.7-1)$$

estando definido el número de potencia Po como:

$$Po = \frac{P}{\rho N^3 D^5} \quad (2.7-2)$$

De acuerdo a lo expresado en 2.4 el coeficiente de arrastre queda definido en la forma:

$$c_D = \frac{\tau_a}{q S R_1} \quad (2.7-3)$$

siendo:

$$q = \frac{1}{4} \rho \Omega^2 R_1^2 \quad \text{y} \quad S = 2\pi R_1 L \quad (2.7-4,5)$$

Transformando la ec. (2.7-2) se obtiene:

$$Po = \frac{P}{\rho N^3 D^5} = \frac{\pi^3 \tau_a}{4 \rho \Omega^2 R_1^2} \quad (2.7-6)$$

Comparando la ec. (2.7-6) con la (2.7-3) resulta:

$$c_D = \frac{4}{\pi^4} \frac{R_1}{L} Po \quad (2.7-7)$$

e introduciendo este resultado en (2.7-1) queda finalmente:

$$c_D = \frac{4}{\pi^4} \frac{R_1}{L} f(Re, \text{ geometría} ) \quad (2.7-8)$$

Las ecuaciones (2.7-7) y (2.7-8) muestran que la función para  $c_D$  puede calcularse operando directamente con los datos experimentales de números de potencia. Puede verse también que en la expresión de  $c_D$  aparece explicitado el factor de forma del cilindro  $R_1/L$ .

Como ya ha sido expresado en 2.6.2 y 2.6.2.1, para el análisis matemático de los datos de transferencia de cantidad de movi-

miento se sienta la hipótesis que los mismos, representados en escala logarítmica doble en función de Re, describen curvas que son paralelas entre sí.

Así la función a hallarse tendrá la siguiente expresión:

$$c_D = \frac{4}{\pi} \alpha a_{00} \frac{R_1}{L} f_1(nh/d) \cdot f_2(Re) \quad (2.7-9)$$

donde  $f_1$  es independiente de Re y  $f_2$  independiente de  $nh/d$  y por tanto calculables por separado.  $\alpha$  es el coeficiente de corrección por efecto de bordes definido por la ec. (2.6.2.1-8).  $a_{00}$  es la constante de proporcionalidad.

De acuerdo a lo expresado en 2.6.2 la curva que se adopta para la descripción matemática de los datos experimentales de  $\ln Po$  en función de  $\ln Re$  es la parábola cúbica.

Para la determinación de los coeficientes  $a_1, a_2, a_3$  que aparecen en la ecuación (2.6.2-2) se ajusta, por el método de los cuadrados mínimos, una parábola cúbica al conjunto de curvas que poseen valores experimentales en todo el rango estudiado del régimen turbulento neto. (Determinaciones Nos. 88 al 106, 116 al 135, 187 al 198 y 266 al 320)

La función así hallada posee los coeficientes  $a_1, a_2, a_3$ , que definen la forma de la curva y son comunes a todas ellas mientras que el  $\ln a_0$  aquí obtenido es un promedio de las ordenadas en el origen de todas las curvas que intervienen en el cálculo y no tiene significado especial. Esta función es la (2.6.2-3). (Los términos inde-

pendientes de las parábolas cúbicas se expresan como logaritmos a fin de simplificar la expresión monómica (2.7-9) en que se expresa finalmente la correlación).

Es de hacer notar que se observa gráficamente que la parábola (2.6.2-3) describe con mucha aproximación la forma de las curvas experimentales en el rango de números de Reynolds comprendido entre  $10^4$  y  $6.10^5$ , mientras que para Re mayores a  $6.10^5$  los valores que da la función son algo mayores que los obtenidos experimentalmente.

El paso siguiente en el cálculo es determinar los términos independientes de (2.6.2-3) que corresponden a cada curva en particular. A igualdad de altura del sistema, los términos independientes serán función única de  $nh/d$  y serán empleados para la determinación de  $f_1$ .

El cálculo de los términos independientes se hace aplicando (2.6.2-3) a cada curva estableciendo que sea mínima la suma de los errores cuadráticos.

Realizado este cálculo puede observarse que si se incluyen en el mismo los valores experimentales correspondientes a Re mayores que  $6.10^5$  la función analítica queda por debajo de la experimental en la representación gráfica, debido a la circunstancia apuntada más arriba. Si en cambio se excluyen estos valores, ambas coinciden con buena aproximación.

Para cada curva experimental se dispone entonces de una fun

ción de la forma:

$$\ln Po_1 = \ln a_{o1} + a_1 \ln Re + a_2 (\ln Re)^2 + a_3 (\ln Re)^3 \quad (2.7-10)$$

Restando de ambos miembros de esta igualdad el término  $\ln a_{oo}$  que es el término independiente de las determinaciones realizadas sin cortacorrientes ( $nh/d = 0$ ) se tiene:

$$\ln \frac{Po_1}{a_{oo}} = \ln \frac{a_{o1}}{a_{oo}} + a_1 \ln Re + a_2 (\ln Re)^2 + a_3 (\ln Re)^3 \quad (2.7-11)$$

sacando  $\ln Re$  como factor común:

$$\ln \frac{Po_1}{a_{oo}} = \ln \frac{a_{o1}}{a_{oo}} + \left[ a_1 + a_2 \ln Re + a_3 (\ln Re)^2 \right] \ln Re \quad (2.7-12)$$

y, pasando a la forma exponencial:

$$Po_1 = a_{oo} \frac{a_{o1}}{a_{oo}} Re^{[a_1 + a_2 \ln Re + a_3 (\ln Re)^2]} \quad (2.7-13)$$

La expresión general se obtendrá hallando la función que vincule  $a_{o1}/a_{oo}$  con  $nh/d$ . Definiendo  $f_2(Re)$  como:

$$f_2(Re) = Re^{[a_1 + a_2 \ln Re + a_3 (\ln Re)^2]} \quad (2.7-14)$$

y comparando con (2.6.2.5-1) y con (2.7-9) es:

$$f_1(nh/d) = \frac{c_D}{c_{D0}} = \frac{Po}{Po_0} = \frac{a_o}{a_{oo}} = K - (K - 1) e^{-\gamma \frac{nh}{d}} \quad (2.7-15)$$

Para la valuación de esta función se asignan valores numéricos a  $K$  en el entorno de su valor aproximado ( que se determina gráficamente), obteniendo los correspondientes valores de  $\gamma$  por el método de los cuadrados mínimos aplicado a los puntos que no estén próximos a la asíntota ( $nh/d < 0,25$ ). El par de valores de  $K$  y  $\gamma$  que se elige es el que de resultados cuya desviación cuadrática sea menor (').

(') Nota: La desviación cuadrática se calcula en base a todos los

Así se obtuvieron los siguientes valores :

K	desv.cuad.
1,580	0,00364
1,585	0,00264
1,590	0,00199
1,595	0,00168
1,600	0,00169
1,610	0,00265

(Tabla 2.7-1)

eligiéndose en consecuencia el valor  $K = 1,595$ . El valor de  $\chi$  correspondiente es  $\chi = 9,5944$ .

Finalmente la función (2.7-15) asume la siguiente expresión:

$$f_1(nh/d) = 1,595 - 0,595 e^{-9,5944 \frac{nh}{d}} \quad (2.7-16)$$

y la ecuación que da el número de potencia (sin corrección por efecto de bordes) para este sistema es:

$$Po = 1,395 \cdot 10^4 \left( 1,595 - 0,595 e^{-9,5944 \frac{nh}{d}} \right) \cdot Re \left\{ -1,8287 + 0,6060 \ln Re - 0,0726(\ln Re)^2 \right\} \quad (2.7-17)$$

El desvío cuadrático de esta función con respecto a 113 valores experimentales es de  $5,4 \cdot 10^{-4}$ .

Aún cuando las curvas de  $\ln Po = f(\ln Re)$  no son rectas

Nota ( de la pág. anterior): datos (estén o no cercanos a la asíntota) que intervienen en la evaluación de  $f_1(nh/d)$  ponderándolos con un peso igual al del número de observaciones experimentales a partir de las cuales fueron a su vez calculados.



en un sentido estricto, es interesante analizar la desviación que una función lineal de  $\ln P_o$  en función de  $\ln Re$  presenta, teniendo en cuenta la notable simplificación en el cálculo que significa una expresión de este tipo.

Siguiendo estrictamente los mismos pasos que los realizados para la obtención de la ecuación (2.7-17) se halla que:

$$\ln P_o = \ln a_o - 0,2403 \ln Re \quad (2.7-18)$$

Con los términos independientes  $\ln a_o$  correspondientes a cada una de las curvas se ajusta una función del tipo (2.7-15). Así, el mejor valor de  $K$  resulta 1,595, idéntico la encontrado para el caso anterior, y el  $\gamma$  correspondiente es  $\gamma = 9,486$ . Es interesante notar que la función que da la influencia de los cortacorrientes no varía grandemente al calcularla a partir del ajuste lineal con respecto a la calculada a partir del ajuste con parábolas cúbicas.

Finalmente, la ecuación que vincula  $P_o$  con el resto de las variables que intervienen en el sistema (sin corrección por efecto de bordes) es:

$$P_o = 12,03 \left( 1,595 - 0,595 e^{-9,49 \frac{nh}{d}} \right) Re^{-0,24} \quad (2.7-19)$$

El desvío cuadrático de esta función con respecto a los 113 valores experimentales es de 2,40. El desvío cuadrático medio es de  $2,1 \cdot 10^{-2}$ .

Como puede observarse, a pesar de que el ajuste a través de parábolas cúbicas es notablemente más preciso que el realizado en

forma lineal, la aproximación que da este último es satisfactoria para las aplicaciones técnicas.

También es interesante destacar que el valor del exponente del número de Reynolds,  $-0,24$ , es parecido al de  $-0,25$  ó  $-0,27$  que menciona la literatura para el factor de fricción  $f$  de la ecuación de Fanning (4,9,23).

Como ha sido ya explicado en 2.6.2.1 las correlaciones finales corregidas por los efectos de bordes pueden obtenerse a partir de las no corregidas multiplicándolas por el factor de corrección por efecto de bordes  $\alpha$ .

El cálculo del efecto de bordes realizado en base a determinaciones experimentales realizadas en sistemas de  $nh/d$  iguales a 0, 0,04592 y 0,9184 da como resultado 15,6%, 15,9% y 14,4% respectivamente cuando  $L = 24,0$  cm. Siendo estos valores aproximadamente iguales, se ha tomado el promedio de ellos, 15,3%, como el representativo del efecto observado para todo  $nh/d$  y  $L = 24,0$  cm. El valor del coeficiente de corrección por efecto de bordes es por tanto  $\alpha = 0,847$ .

Aplicando este factor y al mismo tiempo, transformando  $P_o$  en  $c_D$  según la ecuación (2.7-7) se obtienen las correlaciones finales:

$$c_D = 60,66 \left( 1,595 - 0,595 e^{-9,59 \frac{nh}{d}} \right) \text{Re} \left[ -1,8287 + 0,6060 \ln \text{Re} - 0,0726 (\ln \text{Re})^2 \right] \quad (2.7-20)$$

$$c_D = 0,0443 \left( 1,595 - 0,595 e^{-9,49 \frac{nh}{d}} \right) \text{Re}^{-0,24} \quad (2.7-21)$$

La primera de estas ecuaciones, (2.7-20), permite calcular

con buena aproximación  $c_D$  en el rango  $10.000 < Re < 600.000$ , mientras que la (2.7-21) da, con aproximación algo menor,  $c_D$  en el rango  $10.000 < Re < 1.000.000$ .

La figura 2.7-1 permite visualizar la aproximación de estas funciones a los datos experimentales.

Resulta de particular interés la aplicación de una ecuación del tipo (1.11.1-8) a los datos experimentales del régimen turbulento.

Siendo, de acuerdo a la expresión (2.7-9):

$$c_{D^0} = \frac{\pi^4}{4\alpha} \frac{L}{R_1} \frac{Po}{f_1(nh/d)} \quad (2.7-22)$$

y aprovechando los valores de  $\alpha$  y  $f_1$  que se han obtenido en el cálculo anterior, se determina el valor de los coeficientes numéricos  $M_1$  y  $M_2$  en base al conjunto de curvas que posean datos experimentales en todo el rango estudiado del régimen turbulento.

De esta forma, los valores obtenidos son:

$$M_1 = 3,58 f_1^{-\frac{1}{2}} \quad (2.7-23)$$

$$M_2 = -(2,53 + 3,58 \ln f_1^{\frac{1}{2}}) f_1^{-\frac{1}{2}} \quad (2.7-24)$$

donde  $f_1$  es la expresión (2.7-16).

La expresión final es por tanto:

$$\phi^{-\frac{1}{2}} = 3,58 f_1^{-\frac{1}{2}} \ln (Re \phi^{\frac{1}{2}}) - (2,53 + 3,58 \ln f_1^{\frac{1}{2}}) f_1^{-\frac{1}{2}} \quad (2.7-25)$$

Cuando no existen cortacorrientes  $f_1 \equiv 1$  y la ecuación (2.7-25) se reduce a:

$$\phi^{-\frac{1}{2}} = 3,58 \ln(Re \phi^{\frac{1}{2}}) - 2,53 \quad (2.7-26)$$

En la figura 2.7-1 puede observarse la aproximación de esta función a los datos experimentales.

## 2.8 Conclusiones

### 2.8.1 Régimen laminar

Tal como la teoría lo prevé se ha observado que la existencia de este tipo de régimen es sólo posible para muy bajos valores de  $Re$ .

En el régimen laminar se manifiesta que la existencia y el ancho de los cortacorrientes influyen en el valor del coeficiente de transferencia de cantidad de movimiento  $c_D$ , a  $Re$  constante. Se registra aquí una diferencia de comportamiento con el flujo de flúidos por tuberías cilíndricas, en el cual la rugosidad de la pared no influye sobre el factor de fricción en el caso del régimen laminar. Este hecho se ha interpretado suponiendo que la existencia de cortacorrientes disminuye el "diámetro efectivo" del recipiente.

### 2.8.2 Régimen turbulento

Se ha observado que la familia de curvas descritas en coordenadas logarítmicas por los datos experimentales de  $c_D$  en función de  $Re$ , teniendo a  $n$ ,  $h$  y  $d$  como parámetros son de pequeña curvatura y sensiblemente paralelas entre sí.

La forma de estas curvas puede ser expresada, con aproximación creciente, por las siguientes funciones:

- a) Una función monómica simple de exponente de  $Re$  constante.

b) Una función de la forma  $\phi^{\frac{1}{2}} = M_1 \ln (Re \phi^{\frac{1}{2}}) + M_2$  basada en el modelo teórico de Prandtl para la transferencia de cantidad de movimiento en régimen turbulento.

c) Un monomio cuyo exponente de Re es función cuadrática de  $\ln Re$ .

La primera de estas funciones guarda una notable similitud con la clásica de Blasius para el flujo de flúidos por tuberías.

El estudio de la influencia de cortacorrientes sobre la transferencia de cantidad de movimiento origina las siguientes conclusiones:

I) Las variables  $n$ ,  $h$  y  $d$  son interdependientes.

II) Esta interdependencia queda definida por un grupo adimensional,  $nh/d$ , que establece la medida de "baffled" del sistema.

III) A  $Re = cte$ . la cantidad de movimiento transferida crece asintóticamente hacia un valor máximo al crecer  $nh/d$ . La forma de la ecuación que describe este resultado,  $f_1 = K - (K - 1)e^{-\gamma \frac{nh}{d}}$ , es de especial interés pues podría resultar de aplicación general en el diseño de recipientes agitados, de mucha importancia técnica, en los que es conocido el hecho de que la potencia consumida a  $Re = cte$ . no crece por encima de cierto valor al aumentar  $h$ .

NOMENCLATURA

- $a$  = coeficiente numérico, ec. (1.7-4).  
 $a'$  = coeficiente numérico, ec. (1.7-4).  
 $a_0, a_1, a_2, a_3$ : coeficientes numéricos de la ec. (2.6.2-2)  
 $a_{00}$ :  $a_0$  para  $n = 0$ .  
 $A_1$ : coeficiente numérico, ec. (2.6.2-1).  
 $\bar{A}$ : área perpendicular al flujo.  
 $A_c$ : área de los cortacorrientes.  
 $A_L$ : función definida por la ec.(2.6.2.1-1).  
 $b$ : coeficiente de compresibilidad.  
 $b_0$ : coeficiente de compresibilidad cuando  $\rho = \rho_0$ .  
 $B'$ : efecto de bordes expresado como número de potencia.  
 $B_d$ : momento medido debido al efecto de bordes.  
 $c = c_D Re$  en régimen laminar.  
 $c_D$ : coeficiente de arrastre, "drag coefficient", factor de fricción o coeficiente de transferencia de cantidad de movimiento.  
 $C$ : constante de integración (genérico).  
 $d = 2R_2$ , diámetro del cilindro externo.  
 $D = 2R_1$ , diámetro del cilindro interno.  
 $e = 2,7183$ , base de los logaritmos naturales.  
 $f$ : función, en forma genérica.  
 $f_1$ : función que expresa la influencia del grupo  $nh/d$  sobre  $c_D$  a  $Re$  constante.  
 $f_2$ : función que expresa la influencia de  $Re$  sobre  $c_D$  a  $nh/d = cte$ .  
 $[F]$ : dimensión fuerza.  
 $\vec{F}$ : fuerza, distribución de fuerzas en función de la posición y el tiempo.  
 $F_x, F_y, F_z$ : componentes de  $\vec{F}$  en las direcciones  $x, y, z$ , respectivamente.  
 $\vec{F}_s$ : fuerza ejercida por un fluido sobre un sólido, aún en estado de

reposo del fluido.

$\vec{F}_k$ : fuerza ejercida sobre un sólido por un fluido debida al estado cinético de éste.

$\vec{g}$ : aceleración de la gravedad.

$g_c = 981$  dina/gramo-fuerza.

$G = H - TS =$  energía libre.

$h$ : ancho de los cortacorrientes.

$h' = R_2 - R_1$ .

$H$ : entalpía.

$i$ : subíndice genérico.

$i$ : unidad imaginaria:  $i^2 = (-1)^{\frac{1}{2}}$ .

$\vec{i}$ : vector unitario en la dirección  $x$  y sentido positivo.

$\vec{j}$ : vector unitario en la dirección  $y$ , sentido positivo.

$k$ : subíndice genérico

$k$ : "frecuencia" de una perturbación en la dirección  $z$ .

$\vec{k}$ : vector unitario en la dirección  $z$ , sentido positivo.

$k_c$ : valor crítico de  $k$ .

$K$ : valor máximo de  $c_D/c_{D_0}$ ; asíntota de la función (2.6.2.5-1).

$l$ : longitud de mezclado (Prandtl).

$\{L\}$ : dimensión longitud.

$L$ : longitud del cilindro interno.

$M$ : función definida por la ec.(1.7-15).

$m$ : exponente numérico, ec. (2.6.2-1).

$m_1$ : masa de un elemento de fluido.

$n$ : número de cortacorrientes.

$\underline{n}$ : distancia en la dirección normal a una superficie.

$n_1$ : constante numérica, ec. (1.11-19).

$N$ : velocidad del cilindro interno en vueltas por segundo.

$p$ : presión, distribución de presiones en función de la posición y el tiempo.

$p' = p/\rho\Omega^2 D^2$ , presión adimensional.

- $p''$ : fluctuación de  $p$ , ec. (1.11-3).
- $p_0$ : presión uniforme del sistema en reposo.
- $p_1$ : peso aplicado al platillo del aparato de medición.
- $p_I$ : perturbación no estacionaria de presión.
- $P$ : potencia necesaria para mantener la rotación del cilindro interno a velocidad constante.
- $q = \frac{1}{2} \rho v_1^2$ .
- $Q$  = función definida por la ec. (1.7-16).
- $r$ : coordenada radial, coordenadas cilíndricas.
- $r' = r/D$ , radio adimensional.
- $r'' = r/R_2$ .
- $r_0$ : valor particular de  $r$ .
- $r_p$ : radio de la polea de medición del aparato empleado.
- $R_1$ : radio del cilindro interno.
- $R_2$ : radio del cilindro externo.
- $S = 2\pi R_1 L$ , área característica.
- $S$ : entropía, punto 1.7.
- $S_r$ : área interior del cilindro externo.
- $t$ : tiempo.
- $t' = \mu t / \rho R_2^2$ , tiempo adimensional.
- $t_0$ : valor particular de  $t$ .
- $T$ : temperatura (absoluta).
- $u'$ : velocidad relativa de planos paralelos.
- $U$ : energía potencial.
- $\vec{v}$ : velocidad lineal, distribución de velocidades en función de la posición y el tiempo.
- $v_x, v_y, v_z$ : componentes de  $\vec{v}$  en las direcciones  $x, y, z$ , respectivamente.
- $v_\theta, v_r$ : componentes de  $\vec{v}$  en las direcciones tangencial y radial, respectivamente.
- $v'_\theta = v_\theta / R_2 \Delta \Omega$ , velocidad tangencial adimensional.



$\vec{v}''$ : fluctuación de  $\vec{v}$ , ec.(1.11-2).

$v^{\#} = (-\tau/\rho)^{\frac{1}{2}}$ , velocidad característica o "shear stress velocity".

$v_{-}^{\dagger} = v_{x}/v^{\#}$ , velocidad adimensional.

$\vec{v}_0$ : valor particular de  $\vec{v}$ .

$\vec{v}_I$ : perturbación no estacionaria.

$v_1$ : velocidad tangencial del cilindro interno.

$V$ : volumen.

$V_0$ : cierto volumen definido en el espacio.

$x, y, z$ : coordenadas cartesianas rectangulares.

$x' = x/D, y' = y/D, z' = z/D$  : coordenadas cartesianas rectangulares adimensionales.

$y$ : distancia a la pared sólida, ec. (1.15-15).

$y^{\dagger} = y \rho v^{\#} / \mu$ , distancia a la pared sólida adimensional; ec. (1.11.1-3).

$\alpha$ : coeficiente de corrección por efecto de bordes.

$\beta$ : coeficiente de efecto de bordes.

$\gamma$ : coeficiente numérico del grupo  $nh/d$  en la ec. (2.6.2.5-1).

$\gamma_1$ :  $\text{Im } \omega$ .

$\phi = c_D/2 = f/2$ .

$\phi_1$ : velocidad angular de un elemento de fluido en consideración.

$\kappa = R_1/R_2$ .

$\kappa_1 = 1/y$ , ec. (1.11-15).

$\kappa_2$ : constante definida por la ec. (1.11-16).

$\kappa'_1$ : constante definida por la ec. (1.11.1-1).

$\lambda$ : constante definida por la ec. (1.7-13).

$\lambda'$ : constante definida por la ec. (1.7-13).

$\mu$ : coeficiente de viscosidad ( $\text{g cm}^{-1}\text{seg}^{-1}$ ).

$\nu = \mu/\rho$ , viscosidad cinemática.

$\Omega_1$ : velocidad angular del cilindro interno ( $\text{seg}^{-1}$ ).

$\Omega_2$ : velocidad angular del cilindro externo. ( $\text{seg}^{-1}$ ).

$\Delta\Omega = \Omega_2 - \Omega_1$ .

$\Omega' = -\Omega_1/\Delta\Omega$ , velocidad angular adimensional.

$\omega$ : "frecuencia" de la perturbación  $\vec{v}_1$ .

$\pi = 3,1416$ .

$\rho$ : densidad ( $\text{gcm}^{-3}$ ); distribución de densidades en función de la posición y el tiempo.

$\rho_0$ : densidad uniforme del sistema en reposo.

$$\sigma = m_1 r^2 \phi_1.$$

$\sigma_0$ : valor particular de  $\sigma$ .

$\tau$ : tensor de tensiones.

$\tau_{ik}$ : tensión en la dirección  $k$  aplicada sobre el plano  $i = \text{cte}$ .

$\theta$ : coordenada angular, coordenadas cilíndricas.

$\tau_0$ : momento necesario para mantener la rotación del cilindro interior a velocidad constante.

$$\tau'_0 = \tau_0/L.$$

$$\nabla = \left[ \vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z} \right].$$

$$\nabla' = D \nabla.$$

$$\nabla^2 = \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right)$$

$$\nabla'^2 = D^2 \nabla^2.$$

$$\text{Div} = \frac{d}{dV} \int \tau_{ik} dA$$

$\langle \rangle$ : media temporal en un punto.

Fr: número de Froude =  $v_1^2/gD$ .

Po =  $P/\rho N^3 D^5$ , número de potencia.

Po' =  $P/\rho \Omega_1^3 D^5$ , número de potencia, ec. (1.8.1-3).

Po<sub>corr.</sub> =  $\alpha$  Po.

Re =  $\rho v_1 D/\mu$ , número de Reynolds.

Re' =  $\rho \Omega_1 D^2/\mu$ , número de Reynolds, ec. (1.8.1-3).

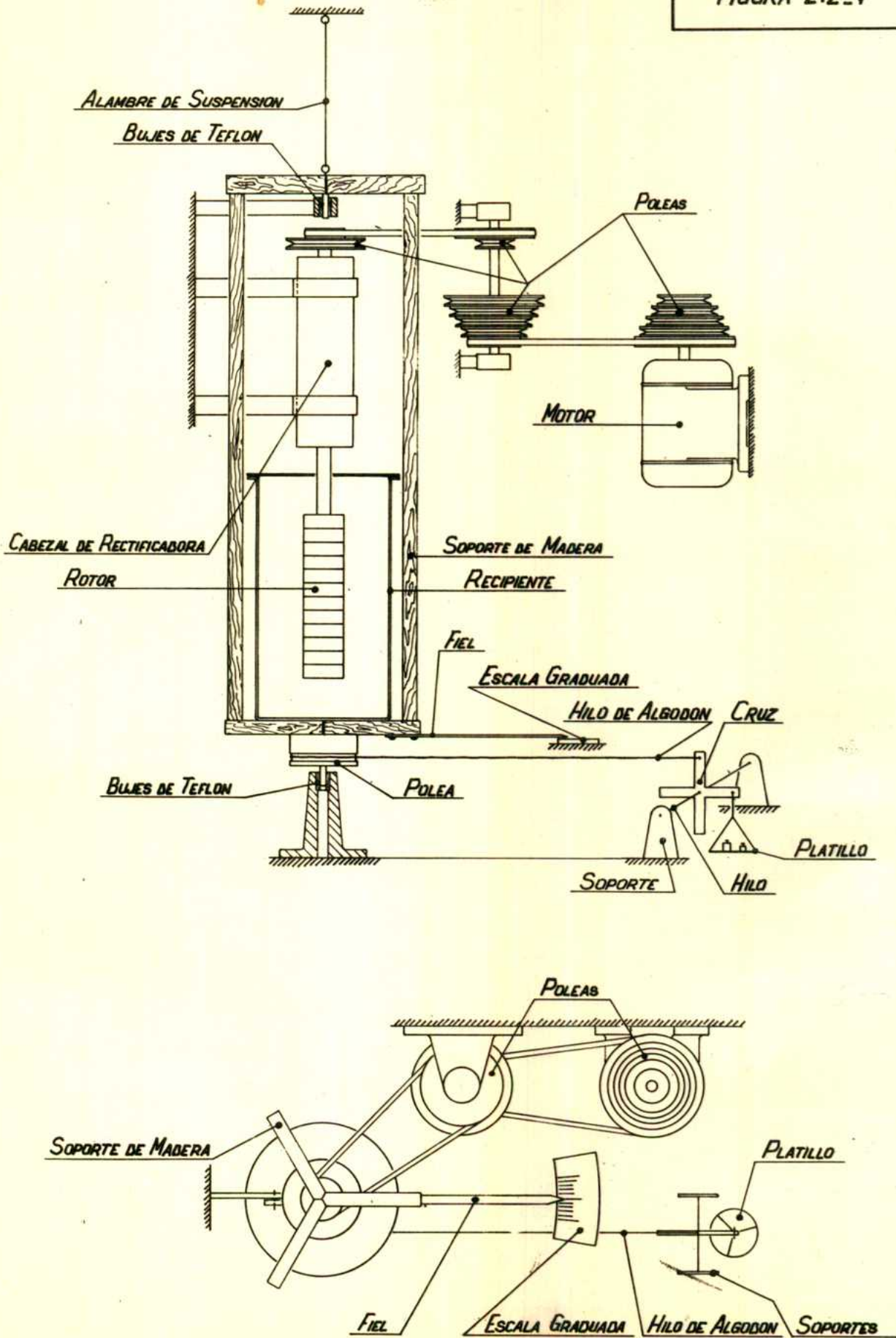
Re<sub>c</sub>: número de Reynolds crítico para el cual se produce la transición de régimen laminar a turbulento.

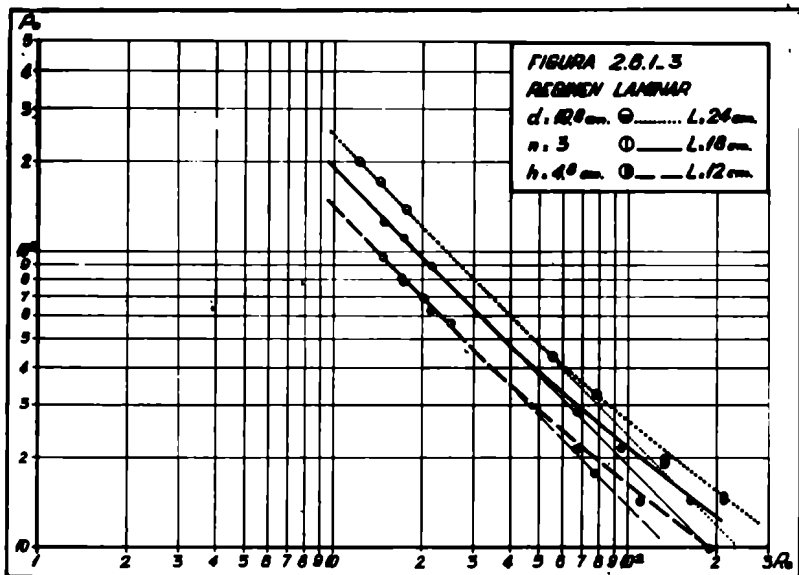
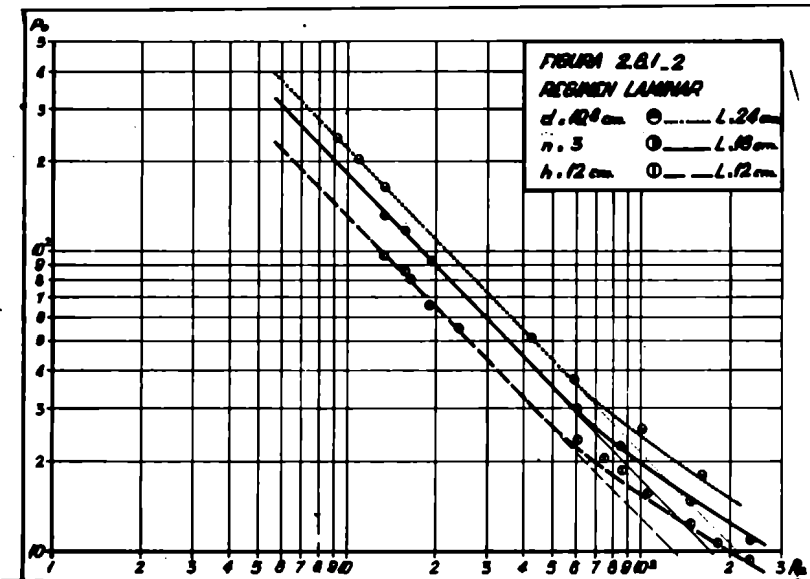
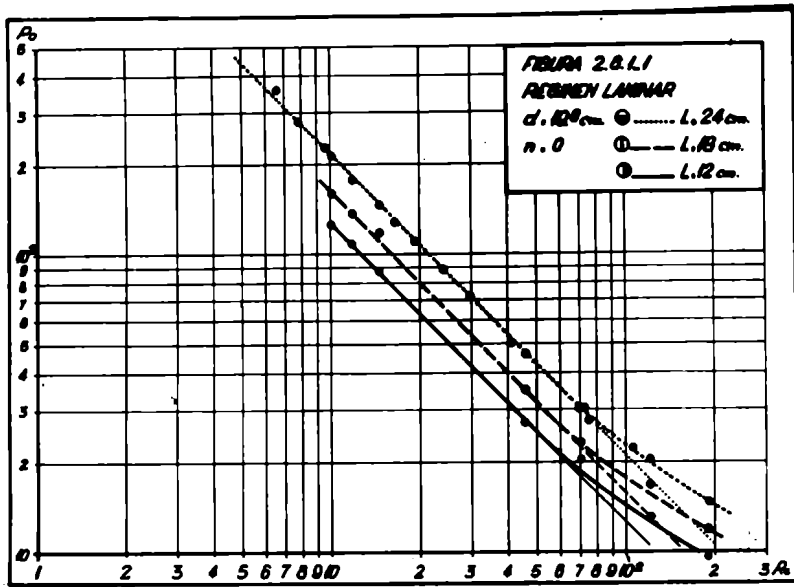
BIBLIOGRAFIA

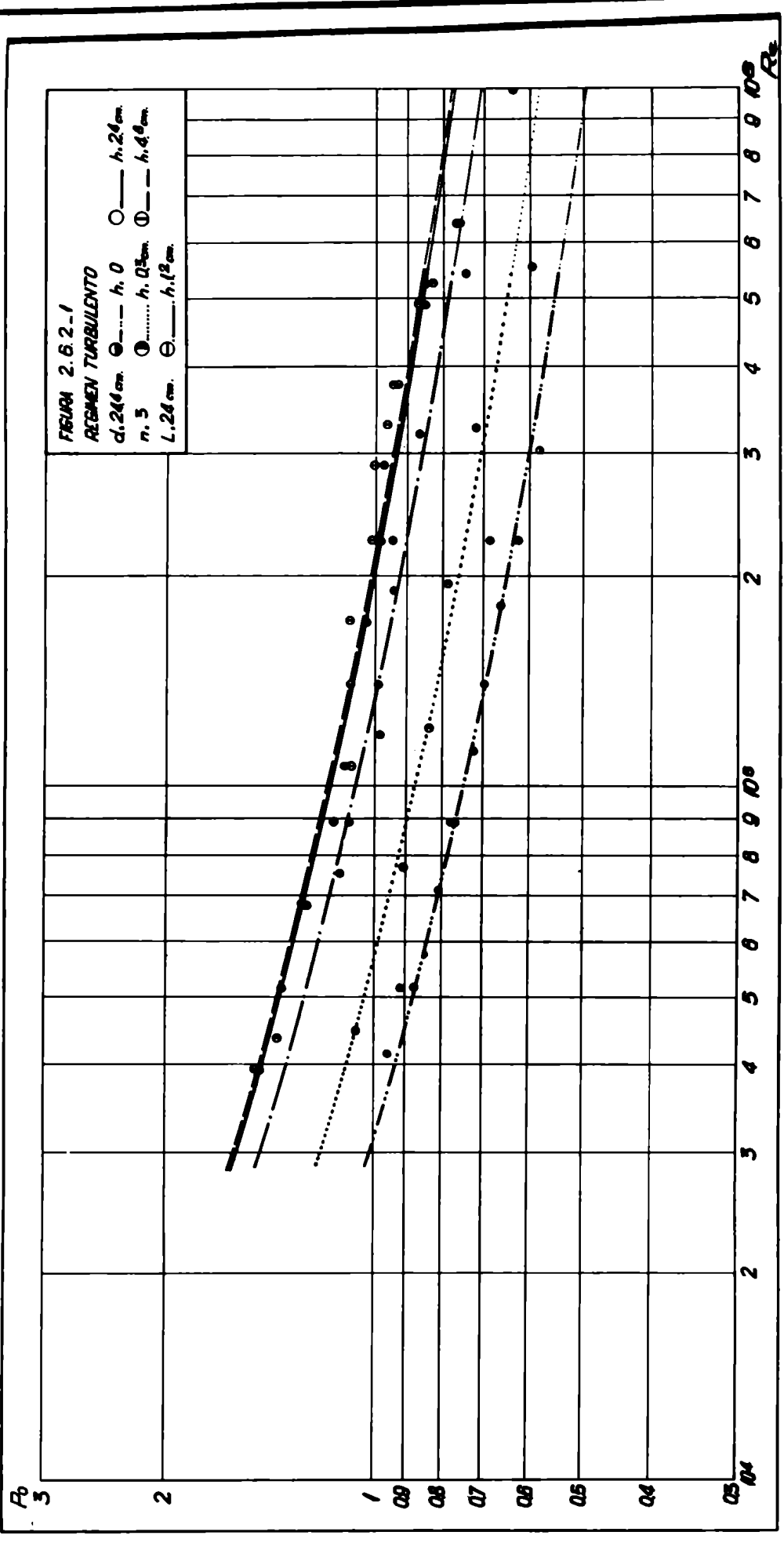
- (1) Bird, R.B. y Curtiss, C.F.: Chem. Eng. Sci. 11, 108 (1959).
- (2) Bird, R.B., Curtiss, C.F. y Stewart, W.E.: Chem. Eng. Sci. 11, 114 (1959).
- (3) Bird, R.B., Stewart, W.E. y Lightfoot, E.N.: "Transport Phenomena" Wiley, New York, 1960.
- (4) Blasius, H.: Forsch. Ver. deut. Ing. 131, (1913).
- (5) Boussinesq, T.V.: Mém. prés. Acad. Sci. 3 ed, Paris 23, 46 (1877).
- (6) Coulson, J.M. y Richardson, J.F.: "Chemical Engineering" 2nd. ed. Macmillan, New York, 1964.
- (7) Deissler, R.G.: NACA Tech. Note 3016 (1953).
- (8) Deissler, R.G.: NACA Report 1210 (1955).
- (9) Drew y Genereaux: Trans. Am. Inst. Chem. Engrs. 32, 16-17 (1936).
- (10) Durand, W.F.: "Aerodynamic Theory" J. Springer, Berlin, 1935, vol. III.
- (11) Goldstein, S.: "Modern Developments in Fluid Dynamics" Oxford, 1938, (Reprinted 1957).
- (12) Hodgman, C.D.: "Handbook of Chemistry and Physics" 41st. ed.
- (13) Kármán, Th. von: J. Aeronaut. Sci. 1, (1) (1934).
- (14) Kármán, Th. von: Trans. Am. Soc. Mech. Eng. 61, 705 (1939).
- (15) Lamb, H.: "Hydrodynamics" Dover, New York, 1945.
- (16) Landau, L.D. y Lifshitz, E.M.: "Fluid Mechanics", Course of Theoretical Physics, vol.6, Pergamon Press, London, 1959.
- (17) Laufer, J.: NACA Tech. Note 2954 (1953).
- (18) Moody, L.F.: Trans. Am. Soc. Mech. Engrs. 61, 671 (1944).
- (19) National Research Council of the U. S. A.: "International Critical Tables of Numerical Data, Physics, Chemistry and Technology". McGraw-Hill, New York, 1929.
- (20) Navier, M.: Mem. de l'Acad. d. Sci. 6, 389 (1827).
- (21) Nikuradse, J.: Forsch. 356 d. Ver. deut. Ing. (1932).

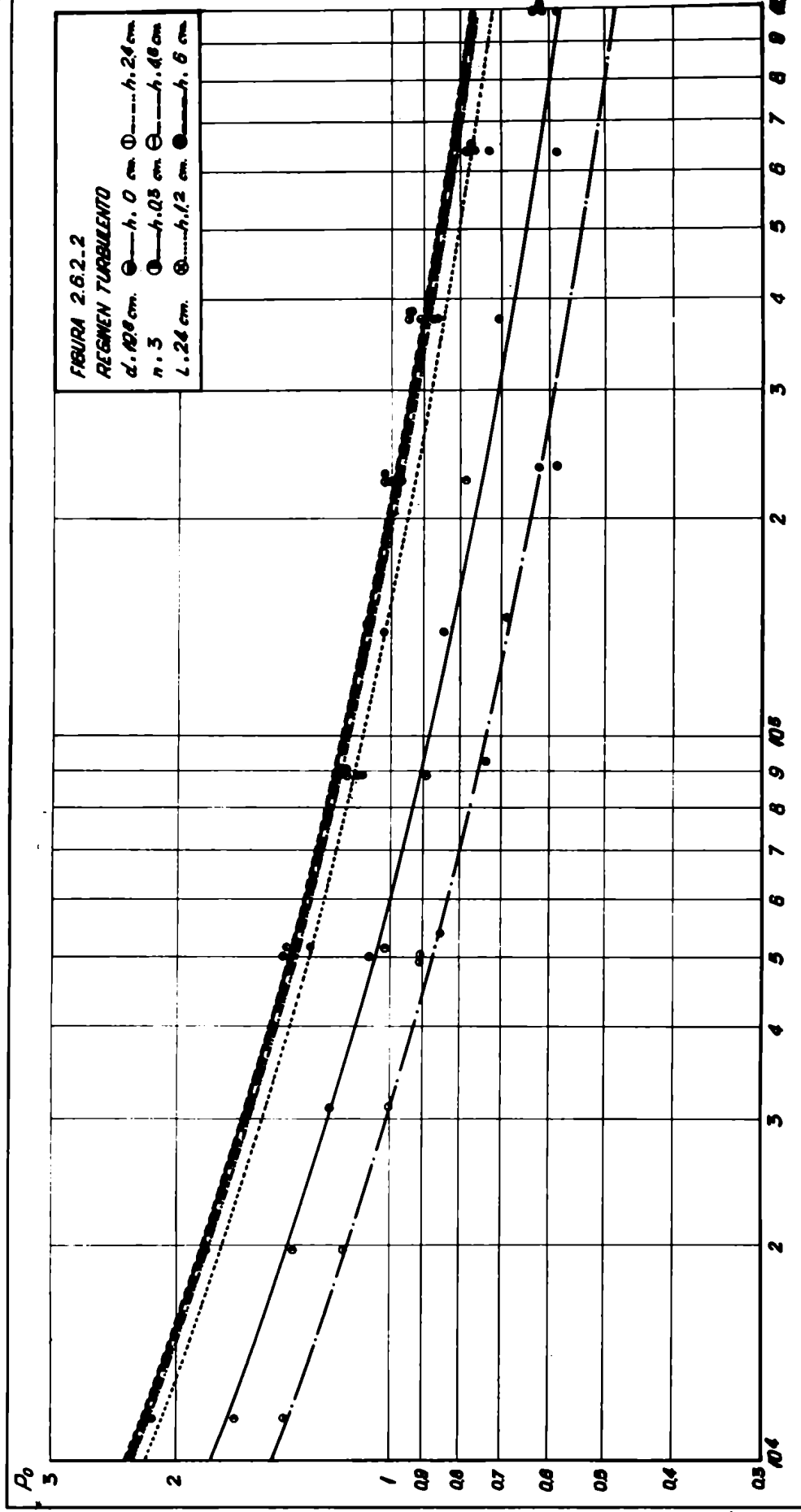
- (22) Poisson, S.D.: J. de l'Ecole polytech. 13, 1 (1831).
- (23) Prandtl, L.: Physik. Z. 11, 1072 (1910).
- (24) Prandtl, L.: Z. Angew. Math. Mech. 5, 136 (1925).
- (25) Prandtl, L.: Z. Ver. deut. Ing. 77, 105 (1933).
- (26) Reichardt, H.: Z. angew. Math. Mech. 20, 297 (1940).
- (27) Santaló, L.A.: "Vectores y Tensores" EUDEBA, 1961 p. 280.
- (28) Sommerfeld, A.: "Lectures on Theoretical Physics" vol. II: "Mechanics of Deformable Bodies", Academic Press, New York, 1949-56.
- (29) Schlichting, H.: "Boundary Layer Theory" McGraw-Hill, New York, 1955.
- (30) Stokes, G.G.: Trans. of the Cambr. Phil. Soc. 8 (1845).
- (31) Streeter, V.: "Fluid Mechanics" McGraw-Hill, New York, 1962.
- (32) St. Venant, B. de: Comptes Rendues 17, 1240 (1843).
- (33) Taylor, G.I.: Phil. Trans. A223, 289 (1923).
- (34) Taylor, G.I.: Proc. Roy. Soc. A135, 698 (1932). (London).
- (35) Taylor, G.I.: Proc. Roy. Soc. (London) A151, 494 (1935).
- (36) Taylor, G.I.: Proc. Roy. Soc. (London) A157, 546-578 (1936).
- (37) Taylor, G.I.: Proc. Roy. Soc. (London) A165, 501 (1938).
- (38) Theodorsen, T. y Regier, A.: NACA Report 793 (1944).
- (39) Trabucchi, M.: "Tecnología de Sistemas Discontinuos Sólido-Fluido-Transferencia de materia en sistema que involucran difusión y reacción química". Tesis doctoral, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales de la Universidad de Buenos Aires, 1963.
- (40) Watendorf: Proc. Roy. Soc. A 148, 565-598 (1935).
- (41) Wendt, F.: Ingen-Arch. 4, 577 (1933).

FIGURA 2.2-1

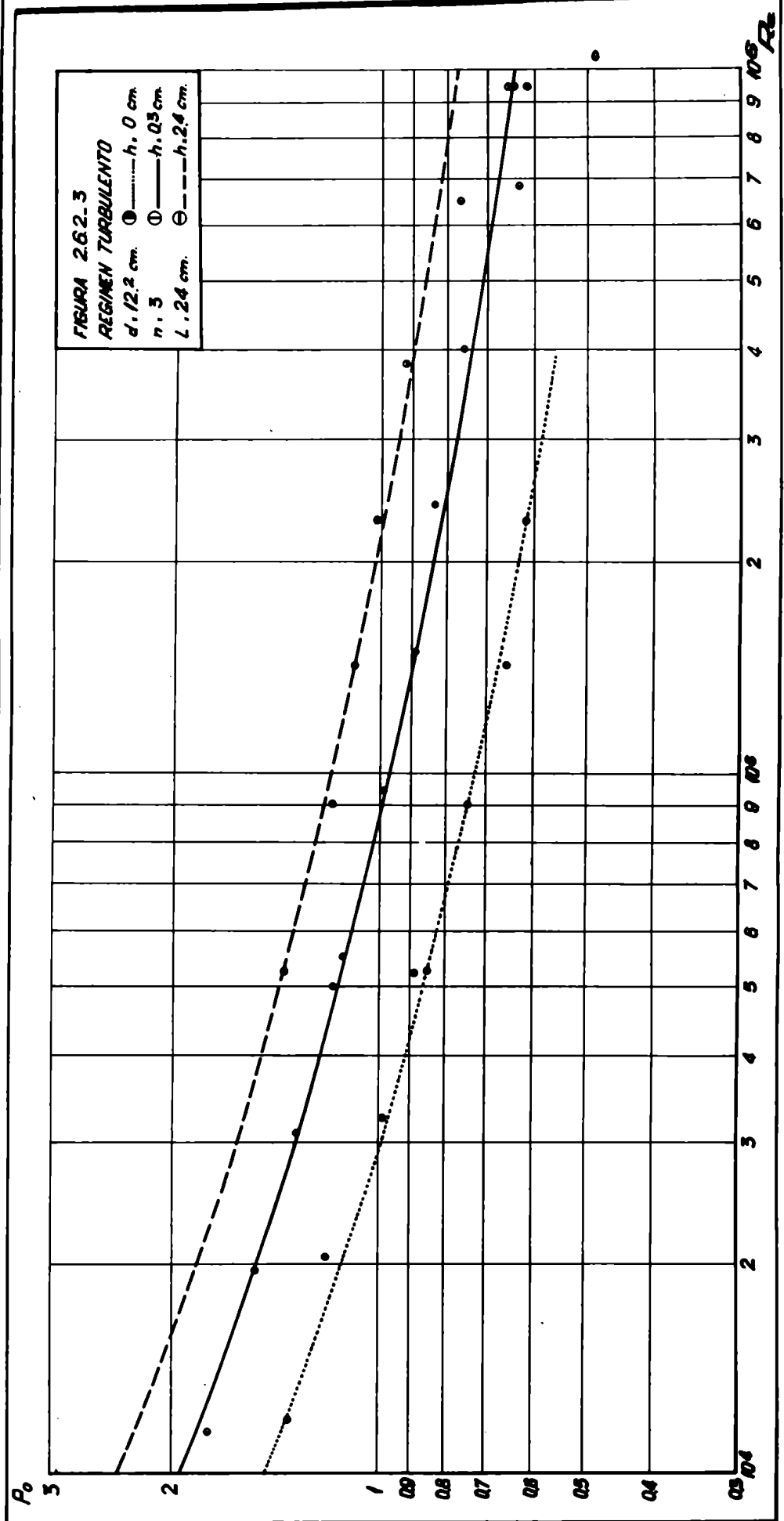




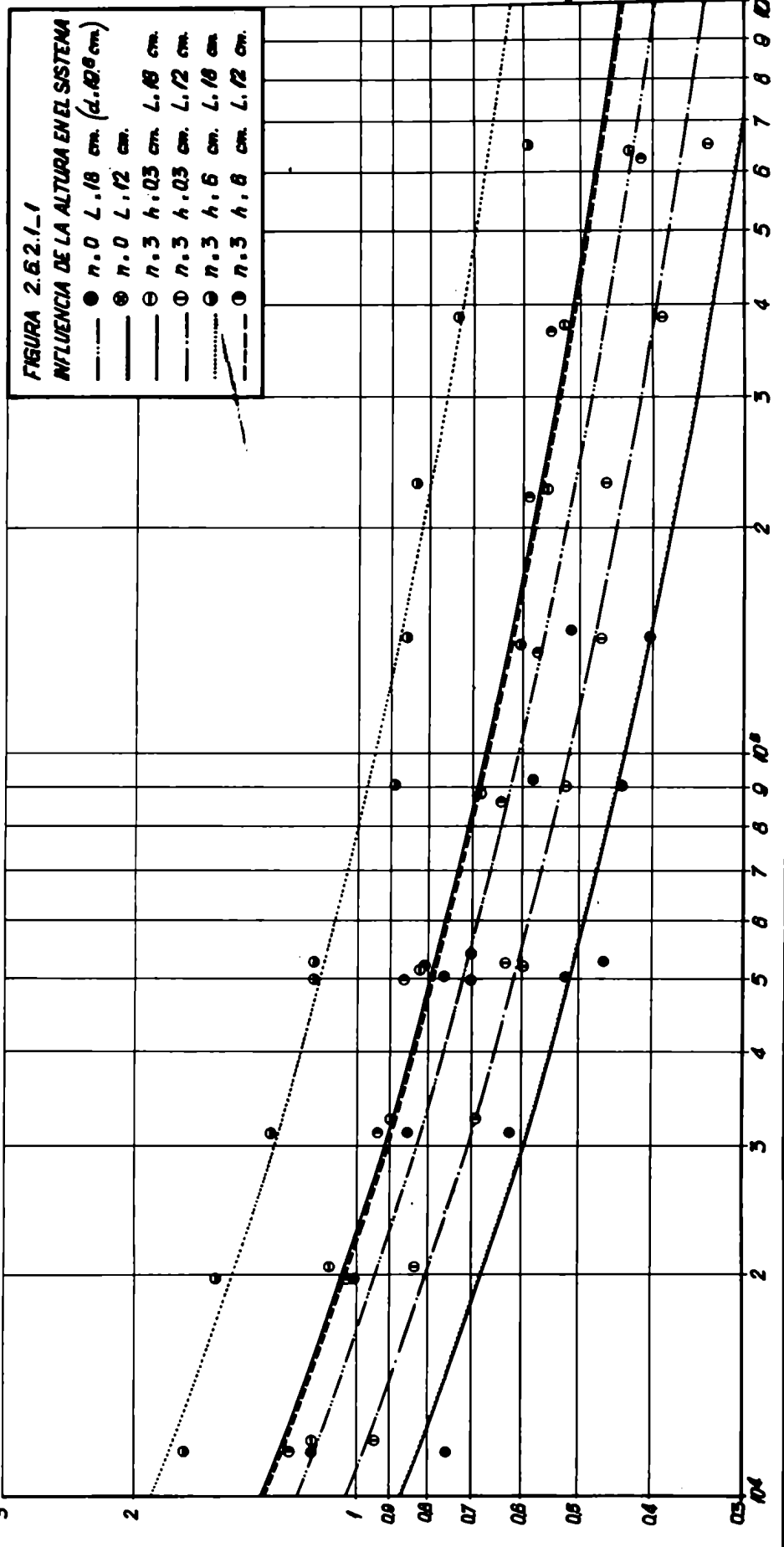






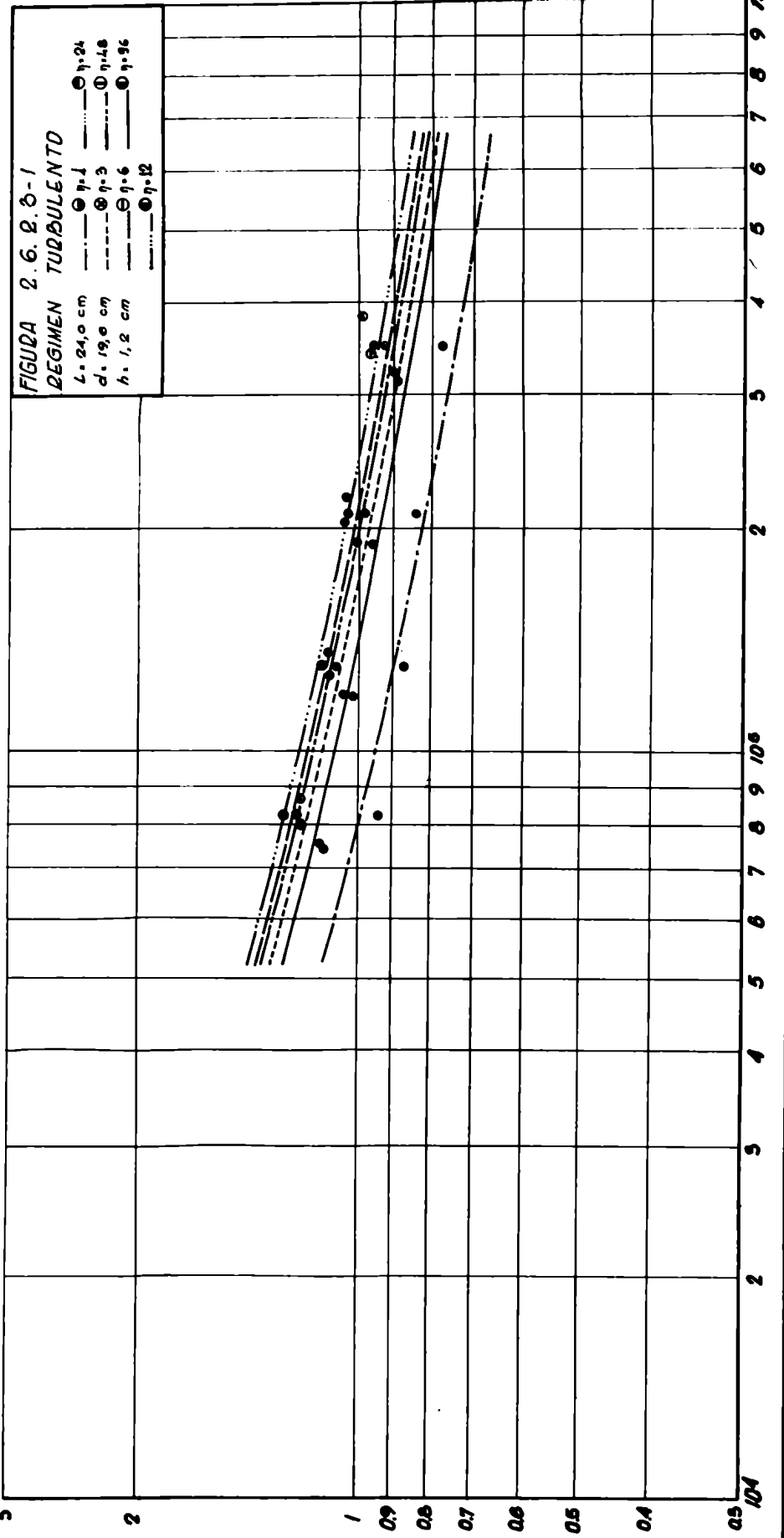


$P_0$   
3



$Re$   
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

$R_0$



0.5  
10<sup>4</sup>

2

3

4

5

6

7

8

9

10<sup>5</sup>

2

3

4

5

6

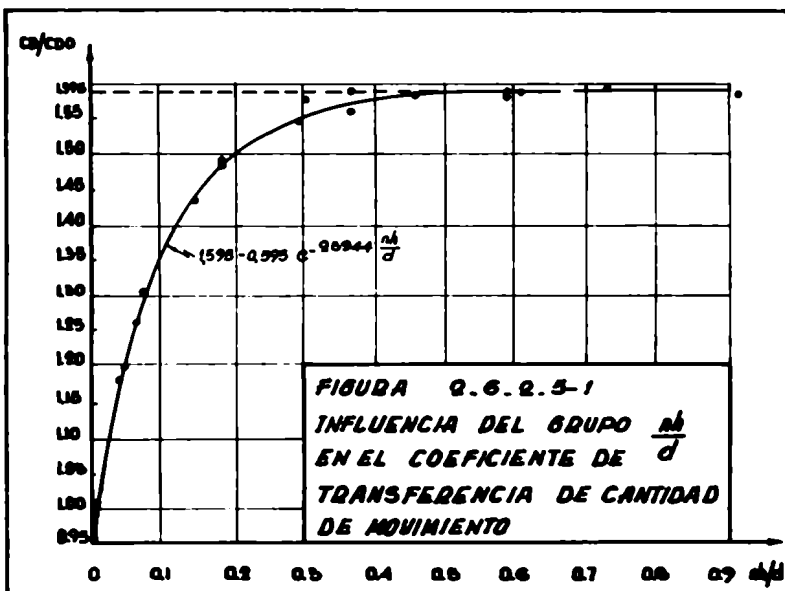
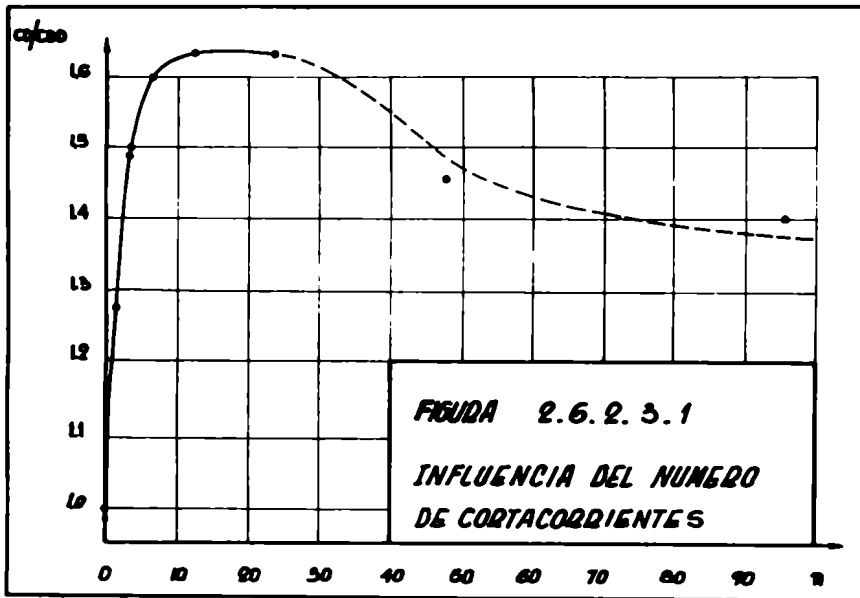
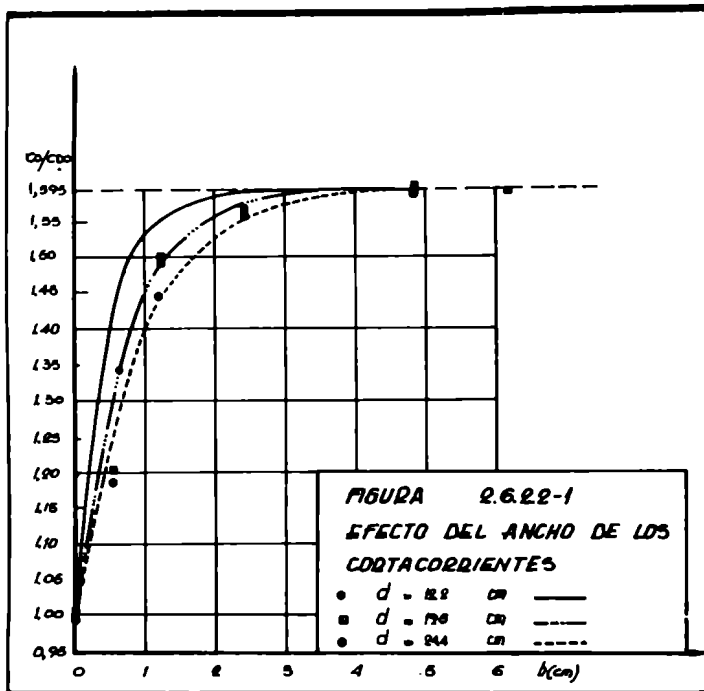
7

8

9

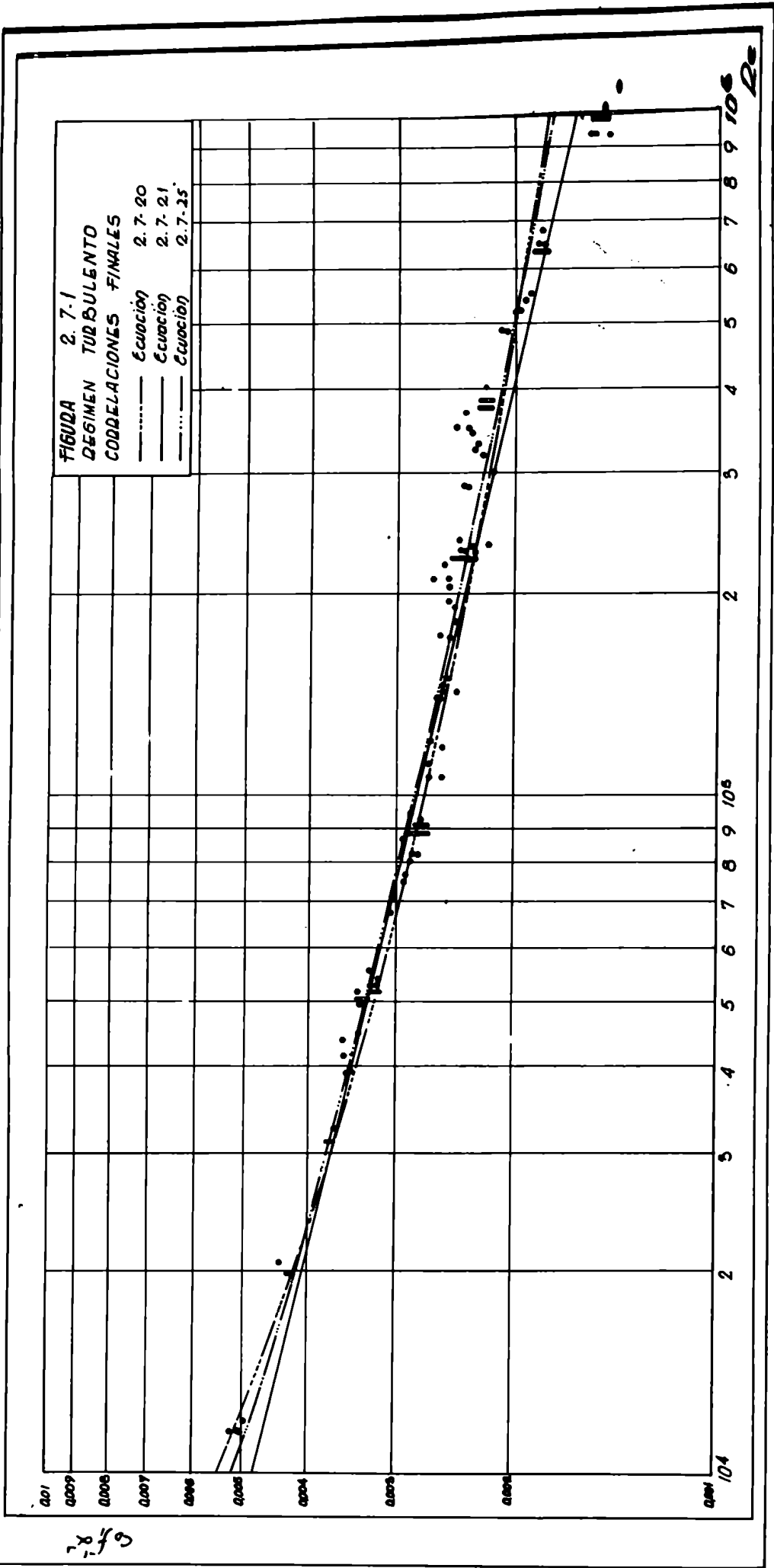
10<sup>6</sup>

$R_0$



**FIGURA 2.7-1**  
**REGIMEN TURBULENTO**  
**CORRELACIONES FINALES**

— Ecuación 2.7-20  
 - - - Ecuación 2.7-21  
 ····· Ecuación 2.7-25



7-279

Tabla I

Determinaciones en la zona de régimen laminar  
con glicerina concentrada.

D = 6,0 cm    d = 19,6 cm    n = 0

Det.	r.p.m.	$\rho$	$\mu$	$P_i$	Re	Po
Nº	—	g cm <sup>-3</sup>	cp	gr	—	—
a)                    L = 24,0 cm						
1	38	1,253	898	31,7	9,99	222,5
2	44,8	1,253	898	37,1	11,78	187,1
3	55,5	1,253	898	46,6	14,60	153,3
4	174	1,253	898	145	45,76	48,49
5	245	1,253	823	190	70,31	32,08
6	420,5	1,253	823	376	120,68	21,54
7	665	1,253	823	669	190,85	15,32
8	38	1,249	545	19,1	16,41	134,5
9	44,8	1,249	545	22,9	19,35	115,9
10	55,5	1,249	545	28,2	23,97	93,20
11	174	1,249	545	86	75,14	29,28
12	245	1,249	545	139	105,8	23,47
13	38	1,254	1380	53,9	6,51	378,0
14	44,8	1,254	1380	58,4	7,67	294,5
15	55,5	1,254	1380	73	9,51	241,6
16	174	1,254	1380	227	29,80	75,83
17	245	1,254	1380	313	41,97	52,77
18	420,5	1,254	1380	559	72,03	31,98
b)                    L = 18,0 cm						
19	38	1,253	898	23,7	9,99	166,4
20	44,8	1,253	898	28,3	11,78	142,8
21	55,5	1,253	898	37,3	14,60	122,8
22	174	1,253	898	109	45,76	36,54
23	245	1,253	823	143	70,31	24,21
24	420,5	1,253	823	305	120,7	17,46
25	665	1,253	823	540	190,8	12,36
c)                    L = 12,0 cm						
26	38	1,253	898	18,4	9,99	129,1
27	44,8	1,253	898	22,1	11,78	111,4
28	55,5	1,253	898	27,4	14,60	90,11
29	174	1,253	898	83	45,76	27,71
30	245	1,253	823	125	70,31	21,05
31	420,5	1,253	823	235	120,7	13,47
32	665	1,253	823	430	190,8	9,22

Tabla II

Determinaciones en la zona de régimen laminar  
con glicerina concentrada.

$D = 6,0 \text{ cm}$      $d = 19,6 \text{ cm}$      $n = 3$      $h = 1,2 \text{ cm}$

Det.	r.p.m.	$\rho$	$\mu$	$p_1$	Re	Po
Nº	—	$\text{g cm}^{-3}$	cp	gr	—	—
a) $L = 24,0 \text{ cm}$						
33	38	1,253	974	35,4	9,21	248,4
34	44,8	1,253	974	41,6	10,86	210,0
35	55,5	1,253	974	51,5	13,46	169,5
36	174	1,253	974	160	42,19	53,69
37	245	1,253	974	228	59,41	38,43
38	420,5	1,253	974	460	102,0	26,33
39	665	1,253	974	814	161,3	18,64
b) $L = 18,0 \text{ cm}$						
40	38	1,253	675	19,3	13,30	135,2
41	44,8	1,253	675	23,8	15,68	120,0
42	55,5	1,253	675	28,9	19,42	95,07
43	174	1,253	675	91	60,88	30,52
44	245	1,253	675	135	85,73	22,83
45	420,5	1,253	675	264	147,1	15,15
46	665	1,253	675	488	232,7	11,18
c) $L = 12,0 \text{ cm}$						
47	38	1,253	675	14,0	13,30	98,27
48	44,8	1,253	675	17,1	15,68	86,47
49	55,5	1,253	675	20,5	19,42	67,28
50	174	1,253	675	72	60,88	23,94
51	245	1,253	675	111	85,73	18,71
52	420,5	1,253	675	216	147,1	12,35
53	665	1,253	675	417	232,7	9,56
54	38	1,249	545	11,5	16,41	80,85
55	44,8	1,249	545	13,2	19,35	66,89
56	55,5	1,249	545	16,9	23,97	55,86
57	174	1,249	545	60	75,14	20,57
58	245	1,249	545	94	105,8	15,87
59	420,5	1,249	545	185	181,6	10,66
60	665	1,249	545	330	287,2	7,60

Tabla III

Determinaciones en la zona de régimen laminar  
con glicerina concentrada.

D = 6.0 cm    d = 19,6 cm    n = 3    h = 4,8 cm

Det.	r.p.m.	$\rho$	$\mu$	$P_1$	Re	Po
Nº	—	g cm <sup>-3</sup>	cp	gr	—	—
a)                    L = 24,0 cm						
61	38	1,253	740	28,5	12,13	200,0
62	44,8	1,253	740	33,9	14,30	171,1
63	55,5	1,253	740	41,9	17,71	137,8
64	174	1,253	740	131,5	55,53	43,84
65	245	1,253	740	192	78,19	32,41
66	420,5	1,253	740	336	134,2	19,25
67	420,5	1,253	740	346	134,2	19,83
68	245	1,253	740	194	78,19	32,75
69	665	1,253	740	632	212,2	14,48
70	665	1,253	740	646	212,2	14,80
b)                    L = 18,0 cm						
71	38	1,249	608	17,7	14,72	124,8
72	44,8	1,249	608	21,8	17,35	110,3
73	55,5	1,249	608	26,8	21,50	88,55
74	174	1,249	608	83	67,40	28,29
75	245	1,249	608	127	94,91	21,46
76	420,5	1,249	608	250	162,9	14,35
c)                    L = 12,0 cm						
77	38	1,249	608	13,2	14,72	93,19
78	44,8	1,249	608	15,2	17,35	76,91
79	55,5	1,249	608	18,7	21,50	61,68
80	174	1,249	608	61	67,40	20,86
81	38	1,249	523	11,1	17,12	78,11
82	44,8	1,249	523	13,4	20,18	68,04
83	55,5	1,249	523	16,8	25,00	55,58
84	174	1,249	523	50,6	78,37	17,22
85	245	1,249	523	83	110,3	14,01
86	420,5	1,249	523	167	189,4	9,63
87	665	1,249	523	280	299,5	6,44



Tabla IV

Determinaciones en la zona de régimen turbulento  
con agua y soluciones de glicerina.

L = 24 cm D = 6,0 cm d = 12,2 cm

Det.	n	h	r.p.m.	$\rho$	$\mu$	$p_i$	Re.10 <sup>-4</sup>	Po
Nº	-	cm	---	g cm <sup>-3</sup>	cp	gr	--	--
88	0	0	245	1,114	4,289	7,1	1,200	1,348
89	0	0	420,5	1,114	4,289	18,4	2,056	1,187
90	0	0	665	1,114	4,289	38,2	3,256	0,985
91	0	0	1065	1,114	4,289	88	5,214	0,884
92	0	0	245	0,9968	0,8737	4,0	5,265	0,849
93	0	0	420,5	0,9968	0,8737	10,3	9,036	0,742
94	0	0	665	0,9968	0,8737	22,6	14,29	0,651
95	0	0	1065	0,9968	0,8737	54,4	22,88	0,611
96	3	0,3	245	1,114	4,482	9,3	1,148	1,766
97	3	0,3	420,5	1,114	4,482	23,3	1,970	1,502
98	3	0,3	665	1,114	4,482	50,8	3,116	1,309
99	3	0,3	1065	1,114	4,482	116	5,013	1,165
100	3	0,3	245	0,9962	0,8360	5,3	5,502	1,125
101	3	0,3	420,5	0,9962	0,8360	13,7	9,441	0,987
102	3	0,3	665	0,9962	0,8360	30,6	14,93	0,882
103	3	0,3	1070	0,9962	0,8360	74,6	24,03	0,830
104	3	0,3	1785	0,9962	0,8360	188	40,09	0,752
105	3	0,3	3025	0,9962	0,8360	450	67,93	0,627
106	3	0,3	4710	0,9962	0,8360	840	105,8	0,483
107	3	2,4	245	0,9968	0,8737	6,5	5,265	1,379
108	3	2,4	420,5	0,9968	0,8737	16,2	9,036	1,167
109	3	2,4	665	0,9968	0,8737	37,7	14,29	1,086
110	3	2,4	1070	0,9968	0,8737	90,8	22,99	1,010
111	3	2,4	1785	0,9968	0,8737	229	38,36	0,915
112	3	2,4	3025	0,9968	0,8737	546	65,00	0,760
113	3	2,4	4710	0,9968	0,8737	1130	94,59	0,649
114	3	2,4	4710	0,9968	0,8737	1110	9459	0,637
115	3	2,4	4710	0,9968	0,8737	1060	94,59	0,609

Tabla V

Determinaciones en la zona de régimen turbulento  
con agua y soluciones de glicerina.

L = 24,0 cm

D = 6,0 cm

d = 19,6 cm

Det.	n	h	r.p.m.	$\rho$	$\mu$	$p_i$	$Re \cdot 10^{-4}$	$Po$
Nº	-	cm	---	$g \text{ cm}^{-3}$	cp	gr	---	---
116	0	0	245	1,114	4,482	7,4	1,148	1,405
117	0	0	420,5	1,114	4,482	18,0	1,970	1,160
118	0	0	665	1,114	4,482	42,7	3,116	1,000
119	0	0	1065	1,114	4,482	90	4,990	0,904
120	0	0	1070	1,114	4,482	91	5,013	0,906
121	0	0	245	0,9965	0,8545	4,0	5,383	0,849
122	0	0	420,5	0,9965	0,8545	10,2	9,239	0,735
123	0	0	665	0,9965	0,8545	23,8	14,61	0,686
124	0	0	1065	0,9965	0,8545	55,2	23,40	0,620
125	0	0	1070	0,9965	0,8545	52,6	23,51	0,585
126	3	0,3	245	1,114	4,482	8,7	1,148	1,652
127	3	0,3	420,5	1,114	4,482	21,3	1,970	1,373
128	3	0,3	665	1,114	4,482	47	3,116	1,211
129	3	0,3	1070	1,114	4,482	107	5,013	1,065
130	3	0,3	245	0,9970	0,8937	4,8	5,147	1,018
131	3	0,3	420,5	0,9970	0,8937	12,4	8,833	0,893
132	3	0,3	665	0,9970	0,8937	29,2	13,97	0,841
133	3	0,3	1070	0,9970	0,8937	70,6	22,48	0,785
134	3	0,3	1785	0,9970	0,8937	176	37,50	0,703
135	3	0,3	3025	0,9970	0,8937	420	63,55	0,584
136	3	1,2	245	0,9970	0,8937	6,1	5,147	1,294
137	3	1,2	420,5	0,9970	0,8937	15,2	8,833	1,094
138	3	1,2	665	0,9970	0,8937	35,5	13,97	1,022
139	3	1,2	1070	0,9970	0,8937	87	22,48	0,967
140	3	1,2	1785	0,9970	0,8937	218	37,50	0,871
141	3	1,2	1785	0,9970	0,8937	216	37,50	0,863
142	3	1,2	3025	0,9970	0,8937	525	63,55	0,730
143	3	1,2	4710	0,9970	0,8937	1020	98,94	0,585
144	3	1,2	420,5	0,9970	0,8937	15,5	8,833	1,116
145	3	1,2	420,5	0,9985	1,045	15,6	7,562	1,122
146	3	1,2	665	0,9985	1,045	36,5	11,95	1,049
147	3	1,2	1065	0,9985	1,045	90,0	19,15	1,009
148	3	1,2	1785	0,9985	1,045	228	32,10	0,910
149	1	1,2	420,5	0,9978	0,9579	13,0	8,241	0,936
150	1	1,2	665	0,9978	0,9579	30,2	13,03	0,869

Tabla V (continuación)

Determinaciones en la zona de régimen turbulento  
con agua y soluciones de glicerina.

L = 24,0 cm

D = 6,0 cm

d = 19,6 cm

Det.	n	h	r.p.m.	$\rho$	$\mu$	$p_i$	$Re \cdot 10^{-4}$	Po
Nº	-	cm	--	$g \text{ cm}^{-3}$	cp	gr	---	---
151	1	1,2	1065	0,9978	0,9579	74,9	20,87	0,840
152	1	1,2	1785	0,9978	0,9579	193	34,98	0,771
153	6	1,2	420,5	0,9980	0,9810	16,6	8,047	1,195
154	6	1,2	665	0,9980	0,9810	38,2	12,73	1,099
155	6	1,2	1065	0,9980	0,9810	93,2	20,38	1,046
156	6	1,2	1785	0,9980	0,9810	242	34,16	0,966
157	12	1,2	420,5	0,9978	0,9579	17,5	8,241	1,259
158	12	1,2	665	0,9978	0,9579	39,0	13,03	1,122
159	12	1,2	1065	0,9978	0,9579	93,0	20,87	1,043
160	12	1,2	1785	0,9978	0,9579	240	34,98	0,958
161	24	1,2	420,5	0,9973	0,9142	16,6	8,635	1,195
162	24	1,2	665	0,9973	0,9142	38,4	13,66	1,105
163	24	1,2	1065	0,9973	0,9142	93,0	21,87	1,044
164	24	1,2	1785	0,9973	0,9142	247	36,66	0,987
165	48	1,2	420,5	0,9978	0,9579	16,85	8,241	1,213
166	48	1,2	665	0,9978	0,9579	37,4	13,03	1,076
167	48	1,2	1065	0,9978	0,9579	87,8	20,87	0,985
168	48	1,2	1785	0,9978	0,9579	232	34,98	0,927
169	96	1,2	420,5	0,9986	1,056	15,6	7,476	1,122
170	96	1,2	665	0,9986	1,056	35,6	11,85	1,023
171	96	1,2	1065	0,9986	1,056	86	18,94	0,964
172	96	1,2	1785	0,9986	1,056	224	31,30	0,894
173	3	2,4	245	0,9970	0,8937	6,4	5,147	1,357
174	3	2,4	420,5	0,9970	0,8937	16,0	8,833	1,152
175	3	2,4	665	0,9970	0,8937	37,5	13,97	1,080
176	3	2,4	1070	0,9970	0,8937	91	22,48	1,012
177	3	2,4	1785	0,9970	0,8937	228	37,50	0,911
178	3	2,4	3025	0,9970	0,8937	550	63,55	0,765
179	3	2,4	4710	0,9970	0,8937	1066	98,94	0,612
180	3	4,8	245	0,9970	0,8937	6,6	5,147	1,400
181	3	4,8	420,5	0,9970	0,8937	16,4	8,833	1,181
182	3	4,8	665	0,9970	0,8937	37,5	13,97	1,080
183	3	4,8	1070	0,9970	0,8937	92	22,48	1,023
184	3	4,8	1785	0,9970	0,8937	237	37,50	0,947
185	3	4,8	3025	0,9970	0,8937	564	63,55	0,785
186	3	4,8	4710	0,9970	0,8937	1100	98,94	0,631

**Tabla V (continuación)**

**Determinaciones en la zona de régimen turbulento  
con agua y soluciones de glicerina.**

**L = 24,0 cm**

**D = 6,0 cm**

**d = 19,6 cm**

Det.	n	h	r.p.m.	$\rho$	$\mu$	$P_1$	$Re \cdot 10^{-4}$	$Pe$
Nº	-	cm	---	$g \text{ cm}^{-3}$	cp	gr	---	---
187	3	6,0	245	1,114	4,482	11,4	1,148	2,164
188	3	6,0	420,5	1,114	4,482	28,2	1,970	1,817
189	3	6,0	665	1,114	4,482	61	3,116	1,572
190	3	6,0	1070	1,114	4,482	142	5,013	1,413
191	3	6,0	245	0,9968	0,8737	6,4	5,265	1,358
192	3	6,0	420,5	0,9968	0,8737	16,0	9,036	1,152
193	3	6,0	665	0,9968	0,8737	37,6	14,29	1,083
194	3	6,0	1070	0,9968	0,8737	92	22,99	1,023
195	3	6,0	1785	0,9968	0,8737	235	38,36	0,939
196	3	6,0	3025	0,9968	0,8737	554	65,00	0,771
197	3	6,0	4710	0,9968	0,8737	1080	101,2	0,620
198	3	6,0	1785	0,9968	0,8737	234	38,36	0,935

**Tabla VI**

**Determinaciones en la zona de régimen turbulento  
con agua.**

**L = 24,0 cm**

**D = 6,0 cm**

**d = 19,6 cm**

Det.	n	h	r.p.m.	$\rho$	$\mu$	$P_1$	$Re \cdot 10^{-4}$	$Pe$
Nº	-	cm	---	$g \text{ cm}^{-3}$	cp	gr	---	--
199	0	0	245	0,9989	1,1111	4,5	4,140	0,953
200	0	0	245	0,9970	0,8937	4,3	5,147	0,912
201	0	0	245	0,9970	0,8937	4,1	5,147	0,870
202	0	0	420,5	0,9989	1,1111	11,2	7,106	0,805
203	0	0	420,5	0,9970	0,8937	10,7	8,833	0,771
204	0	0	420,5	0,9970	0,8937	10,6	8,833	0,763
205	0	0	665	0,9989	1,1111	24,8	11,24	0,713
206	0	0	665	0,9970	0,8937	24,0	13,97	0,691
207	0	0	1065	0,9970	0,8937	55,0	22,37	0,618
208	0	0	1065	0,9970	0,8937	60,5	22,37	0,680
209	0	0	1070	0,9989	1,1111	59,0	18,08	0,655
210	0	0	1785	0,9989	1,1111	145	30,16	0,578

Tabla VI (continuación)

Determinaciones en la zona de régimen turbulento  
con agua.

L = 24,0 cm

D = 6,0 cm

d = 24,4 cm

Det.	n	h	r.p.m.	$\rho$	$\mu$	$p_i$	Re.10 <sup>-4</sup>	Po
Nº	-	cm	--	g cm <sup>-3</sup>	cp	gr	---	---
211	3	0,3	245	0,9984	1,030	5,0	4,466	1,059
212	3	0,3	420,5	0,9984	1,030	12,6	7,665	0,906
213	3	0,3	665	0,9984	1,030	28,9	12,12	0,831
214	3	0,3	1070	0,9984	1,030	70,6	19,50	0,784
215	3	0,3	1785	0,9984	1,030	180	32,53	0,718
216	3	0,3	3025	0,9984	1,030	428	55,14	0,595
217	3	1,2	245	0,9986	1,056	6,5	4,365	1,377
218	3	1,2	420,5	0,9986	1,056	15,6	7,491	1,120
219	3	1,2	420,5	0,9970	0,8937	15,0	8,833	1,080
220	3	1,2	665	0,9986	1,056	34,1	11,85	0,980
221	3	1,2	665	0,9970	0,8937	34,2	13,97	0,985
222	3	1,2	1070	0,9986	1,056	86,0	19,06	0,940
223	3	1,2	1070	0,9970	0,8937	85,0	22,48	0,945
224	3	1,2	1785	0,9986	1,056	216	31,80	0,862
225	3	1,2	3025	0,9986	1,056	537	53,89	0,745
226	3	2,4	245	0,9992	1,171	6,9	3,936	1,459
227	3	2,4	420,5	0,9992	1,171	17,3	6,756	1,242
228	3	2,4	665	0,9992	1,171	38,6	10,68	1,108
229	3	2,4	1070	0,9992	1,171	95	17,19	1,032
230	3	2,4	1785	0,9992	1,171	244	28,68	0,974
231	3	2,4	3025	0,9992	1,171	613	48,60	0,850
232	3	4,8	245	0,9992	1,165	7,0	3,957	1,480
233	3	4,8	245	0,9970	0,8937	6,4	5,147	1,358
234	3	4,8	420,5	0,9992	1,165	17,7	6,791	1,271
235	3	4,8	420,5	0,9970	0,8937	15,9	8,833	1,145
236	3	4,8	665	0,9992	1,165	37,6	10,74	1,080
237	3	4,8	665	0,9970	0,8937	37,8	13,97	1,089
238	3	4,8	1065	0,9970	0,8937	87,4	22,37	0,981
239	3	4,8	1070	0,9992	1,165	98	17,28	1,088
240	3	4,8	1070	0,9970	0,8937	91	22,48	1,012
241	3	4,8	1785	0,9992	1,165	251	28,83	1,001
242	3	4,8	1565	0,9970	0,8937	185	32,88	0,962
243	3	4,8	1785	0,9970	0,8937	236	37,50	0,943
244	3	4,8	1785	0,9970	0,8937	232	37,50	0,927
245	3	4,8	3025	0,9992	1,165	627	48,86	0,870

Tabla VI ( continuación)

Determinaciones en la zona de régimen turbulento  
con agua.

L = 24,0 cm

D = 6,0 cm

d = 24,4 cm

Det.	n	h	r.p.m.	$\rho$	$\mu$	$p_1$	$Re \cdot 10^{-4}$	$Po$
Nº	-	cm	--	$g \text{ cm}^{-3}$	cp	gr	--	--
246	3	4,8	2480	0,9970	0,8937	400	52,10	0,828
247	3	4,8	2480	0,9970	0,8937	410	52,10	0,849
248	3	4,8	3025	0,9970	0,8937	552	63,55	0,768
249	3	4,8	3025	0,9970	0,8937	544	63,55	0,757
250	3	4,8	4710	0,9970	0,8937	1110	98,94	0,637

Tabla VII

Determinaciones en la zona de régimen turbulento  
con agua.

L = 12,0 cm

D = 3,0 cm

d = 11,8 cm

Det.	n	h	r.p.m.	$\rho$	$\mu$	$p_1$	$Re \cdot 10^{-4}$	$Po$
Nº	-	cm	---	$g \text{ cm}^{-3}$	cp	gr	---	---
251	3	1,2	665	0,9968	0,8737	1,7	3,572	1,567
252	3	1,2	1070	0,9968	0,8737	3,7	5,748	1,316
253	3	1,2	1785	0,9968	0,8737	8,9	9,589	1,138
254	3	1,2	3025	0,9968	0,8737	24,5	16,25	1,091
255	3	1,2	4710	0,9968	0,8737	53	25,53	0,974
256	3	2,4	665	0,9972	0,9142	1,6	3,419	1,474
257	3	2,4	665	0,9972	0,9142	1,7	3,419	1,566
258	3	2,4	1070	0,9972	0,9142	4,0	5,550	1,423
259	3	2,4	1070	0,9972	0,9142	3,8	5,550	1,352
260	3	2,4	1785	0,9972	0,9142	9,4	9,177	1,202
261	3	2,4	1785	0,9972	0,9142	9,1	9,177	1,163
262	3	2,4	3025	0,9972	0,9142	23,9	15,55	1,064
263	3	2,4	3025	0,9972	0,9142	25	15,55	1,113
264	3	2,4	4710	0,9972	0,9142	55	24,21	1,010
265	3	2,4	4710	0,9972	0,9142	54	24,21	0,991

Tabla VIII

Determinaciones en la zona de régimen turbulento  
con agua y soluciones de glicerina.

L = 18,0 cm

D = 6,0 cm

d = 19,6 cm

Det.	n	h	r.p.m.	$\rho$	$\mu$	$P_r$	$Re \cdot 10^{-4}$	$Po$
Nº	-	cm	---	$g \text{ cm}^{-3}$	cp	gr	---	---
266	0	0	245	1,114	4,482	6,1	1,148	1,157
267	0	0	420,5	1,114	4,482	15,7	1,970	1,011
268	0	0	665	1,114	4,482	33,1	3,116	0,852
269	0	0	1065	1,114	4,482	69,6	4,990	0,699
270	0	0	245	0,9965	0,8545	3,3	5,383	0,700
271	0	0	420,5	0,9965	0,8545	8,05	9,239	0,580
272	0	0	665	0,9965	0,8545	17,9	14,61	0,516
273	3	0,3	245	1,114	4,289	6,1	1,200	1,158
274	3	0,3	420,5	1,114	4,289	17,0	2,056	1,096
275	3	0,3	665	1,114	4,289	34,9	3,256	0,900
276	3	0,3	1065	1,114	4,289	80,8	5,214	0,812
277	3	0,3	245	0,9970	0,8937	3,9	5,147	0,827
278	3	0,3	420,5	0,9970	0,8937	9,5	8,833	0,684
279	3	0,3	665	0,9970	0,8937	20,9	13,97	0,602
280	3	0,3	1070	0,9970	0,8937	50,0	22,48	0,556
281	3	0,3	1785	0,9970	0,8937	132,6	37,50	0,530
282	3	0,3	3025	0,9970	0,8937	310	63,55	0,432
283	3	6,0	245	1,114	4,482	9,0	1,148	1,709
284	3	6,0	420,5	1,114	4,482	24,0	1,970	1,547
285	3	6,0	665	1,114	4,482	51,0	3,116	1,314
286	3	6,0	1065	1,114	4,482	114	4,990	1,146
287	3	6,0	245	0,9968	0,8737	5,4	5,265	1,146
288	3	6,0	420,5	0,9968	0,8737	12,4	9,036	0,893
289	3	6,0	665	0,9968	0,8737	29,8	14,29	0,859
290	3	6,0	1070	0,9968	0,8737	75	22,99	0,834
291	3	6,0	1785	0,9968	0,8737	182	38,36	0,728
292	3	6,0	3025	0,9968	0,8737	426	65,00	0,593
293	3	6,0	4710	0,9968	0,8737	910	102,1	0,523



Tabla IX

Determinaciones en la zona de régimen turbulento  
con agua y soluciones de glicerina.

L = 12,0 cm

D = 6,0 cm

d = 19,6 cm

Det.	n	h	r.p.m.	$\rho$	$\mu$	$p_i$	$Re \cdot 10^{-4}$	$Po$
Nº	-	cm	---	$g \text{ cm}^{-3}$	cp	gr	---	---
294	0	0	245	1,114	4,482	4,0	1,148	0,759
295	0	0	420,5	1,114	4,482	10,4	1,970	0,670
296	0	0	665	1,114	4,482	24,1	3,116	0,621
297	0	0	1070	1,114	4,482	52,8	5,013	0,525
298	0	0	245	0,9968	0,8737	2,2	5,265	0,467
299	0	0	420,5	0,9968	0,8737	6,1	9,036	0,439
300	0	0	665	0,9968	0,8737	14,0	14,29	0,403
301	3	0,3	245	1,114	4,289	5,0	1,200	0,950
302	3	0,3	420,5	1,114	4,289	13,0	2,056	0,838
303	3	0,3	665	1,114	4,289	26,8	3,256	0,691
304	3	0,3	1065	1,114	4,289	59,4	5,214	0,597
305	3	0,3	245	0,9968	0,8737	3,0	5,265	0,637
306	3	0,3	420,5	0,9968	0,8737	7,3	9,036	0,526
307	3	0,3	665	0,9968	0,8737	16,3	14,29	0,469
308	3	0,3	1070	0,9968	0,8737	41,8	22,99	0,465
309	3	0,3	1785	0,9968	0,8737	97	38,36	0,388
310	3	0,3	3025	0,9968	0,8737	242	65,00	0,337
311	3	6,0	245	1,114	4,482	6,5	1,148	1,234
312	3	6,0	420,5	1,114	4,482	16,0	1,970	1,032
313	3	6,0	665	1,114	4,482	36,4	3,116	0,938
314	3	6,0	1065	1,114	4,482	86,2	4,990	0,866
315	3	6,0	245	0,9973	0,9142	3,6	5,031	0,763
316	3	6,0	420,5	0,9973	0,9142	8,9	8,635	0,641
317	3	6,0	665	0,9973	0,9142	20,0	13,66	0,576
318	3	6,0	1070	0,9973	0,9142	53,0	21,97	0,589
319	3	6,0	1785	0,9973	0,9142	138	36,66	0,551
320	3	6,0	3025	0,9973	0,9142	300	62,12	0,417





Tabla X

Valores del término independiente  $\ln a_{0i}$  de la ecuación (2.6.2-3) para cada una de las curvas experimentales en régimen turbulento.

n	h	d	L	$\ln a_{0i}$
--	cm	cm	cm	---
a) D = 6,0 cm				
0	0	12,2	24,0	9,53511
0	0	19,6	18,0	9,33674
0	0	19,6	12,0	8,99672
0	0	24,4	24,0	9,55360
3	0,3	12,2	24,0	9,81527
3	0,3	19,6	24,0	9,73028
3	0,3	19,6	18,0	9,44904
3	0,3	19,6	12,0	9,19589
3	0,3	24,4	24,0	9,71402
1	1,2	19,6	24,0	9,78577
3	1,2	19,6	24,0	9,94283
3	1,2	24,4	24,0	9,91177
6	1,2	19,6	24,0	10,01196
12	1,2	19,6	24,0	10,03217
24	1,2	19,6	24,0	10,03280
48	1,2	19,6	24,0	9,91836
96	1,2	19,6	24,0	9,87769
3	2,4	12,2	24,0	10,00540
3	2,4	19,6	24,0	9,99324
3	2,4	24,4	24,0	9,98596
3	4,8	19,6	24,0	10,01435
3	4,8	24,4	24,0	10,00680
3	6,0	19,6	24,0	10,00779
3	6,0	19,6	18,0	9,79317
3	6,0	19,6	12,0	9,44206
0	0	19,6	24,0	9,54186
b) D = 3,0 cm				
3	1,2	11,8	12,0	10,00436
3	2,4	11,8	12,0	10,01118