Biblioteca Digital
F C E N - U B A

BIBLIOTECA CENTRAL LUIS F LELOIR
BIBLIOTECA CENTRAL LELOIR
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES UBA

Tesis de Posgrado

Inmersión de espacios métricos convexos en espacios euclideanos

Toranzos, Fausto Alfredo

1966

Tesis presentada para obtener el grado de Doctor en Ciencias Matemáticas de la Universidad de Buenos Aires

Este documento forma parte de la colección de tesis doctorales y de maestría de la Biblioteca Central Dr. Luis Federico Leloir, disponible en digital.bl.fcen.uba.ar. Su utilización debe ser acompañada por la cita bibliográfica con reconocimiento de la fuente.

This document is part of the doctoral theses collection of the Central Library Dr. Luis Federico Leloir, available in digital.bl.fcen.uba.ar. It should be used accompanied by the corresponding citation acknowledging the source.

Cita tipo APA:
Toranzos, Fausto Alfredo. (1966). Inmersión de espacios métricos convexos en espacios euclideanos. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad de Buenos Aires.
http://digital.bl.fcen.uba.ar/Download/Tesis/Tesis_1279_Toranzos.pdf

Cita tipo Chicago:
Toranzos, Fausto Alfredo. "Inmersión de espacios métricos convexos en espacios euclideanos". Tesis de Doctor. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad de Buenos Aires. 1966.
http://digital.bl.fcen.uba.ar/Download/Tesis/Tesis_1279_Toranzos.pdf

EXACTAS UBA
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales

UBA
Universidad de Buenos Aires

Dirección: Biblioteca Central Dr. Luis F. Leloir, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Universidad de Buenos Aires.
Intendente Güiraldes 2160 - C1428EGA - Tel. (++54 +11) 4789-9293
Contacto: digital@bl.fcen.uba.ar

1279

UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Departamento de Matemáticas

INMERSION DE ESPACIOS METRICOS CONVEXOS EN ESPACIOS EUCLIDEANOS
(Resumen)

Fausto Alfredo Toranzos

Tesis presentada para optar al título de
Doctor de la Universidad de Buenos Aires
Director: Dr. Luis Santaló
Año 1966

Una parte considerable del tratado "Theory and Applications of Distance Geometry" (Oxford, 1953) de L. M. Blumenthal, está dedicada a la consideración del siguiente problema genérico :

Problema I : "Dado un espacio métrico "modelo" M, fijar condiciones en la métrica de un espacio E que permitan asegurar la existencia de una isometría $f : E \longrightarrow M$ ".

Un caso particular, pero importante, de este problema es :

Problema II : "Idem que en Problema I, pero pidiendo que la aplicación f sea suryectiva".

Los casos concretos más importantes de estos problemas se presentan cuando el modelo M es el espacio euclideano n-dimensional $\mathbb{E}^n$ o el espacio de Hilbert H, y el espacio a estudiar es (métricamente) convexo. En estos casos, el libro de Blumenthal resuelve exhaustivamente el problema II. En cambio en el problema I, que como el mismo Blumenthal lo destaca en la página 91 del citado libro es más general y difícil que el II, solo obtiene soluciones parciales y poco satisfactorias.

El propósito central de esta tesis es dar solución completa al problema I en los casos concretos antes mencionados. Un segun- propósito, de tipo metodológico, es desarrollar una teoría de subconjuntos convexos de un espacio métrico, de eficacia análoga a la de la convexidad lineal.

El primer capítulo consiste en una reseña de los antecedentes históricos del problema central y las soluciones parciales que recibió.

En el segundo capítulo discutimos las interrelaciones de diversas definiciones de convexidad de espacios métricos, e introducimos una definición de subconjunto convexo de un espacio métrico, que conserva la más importante característica de la convexidad lineal, su interseccionalidad.

Es to nos permite desarrollar en el siguiente capítulo una teoría de cápsula convexa análoga a la del caso lineal. Incidentalmente caracterizamos los espacio métricos cuyas bolas son convexas mediante la propiedad de que el diámetro de un conjunto arbitrario coincide con el de su cápsula convexa.

El cuarto capítulo es una discusión detallada de la "propiedad euclideana débil de cuatro puntos" de Blumenthal, así como de otras propiedades más deébiles que ésta, pero que, en los casos significativos coinciden con ella.

En los capítulos quinto y sexto se desarrollan las herramientas básicas para atacar los problemas fundamentales. Se estudian aquí los conceptos de "cápsula afín"(análogo al de variedad linea generada),"espacio de tipo n" (análogo al de dimensión algebraica "simplex", etc.

El concepto de "punto internal" es introducido en el capítulo séptimo. La importancia de esta noción reside en que una de la diferencias metodológicas entre este trabajo y los de Blumenthal consiste en que dicho autor exige al espacio en estudio la "convexidad externa", que en nuestra terminología equivale a pedir que todo punto sea internal, restringiéndose a priori al problema II. Los resultados centrales de este capítulo son:(a) Equivalencia entre "tipo n" y "dimensión topológica n" (según Menger-Urysohn); (b) Versión métrica del famoso teorema de Riesz sobre caracterización de espacios normados finito-dimensionales, por la compacidad local.

En el capítulo octavo obtenemos nuestro primer teorema fundamental que responde al problema I cuando el modelo M es $\mathbb{E}^n$. El procedimiento es el siguiente :

(i) Definimos la noción de "funcional afín", análogo al de funcional lineal en un espacio vectorial.

(ii)Bajo ciertas condiciones, una determinada familia de funcionales afines, dotada de las operaciones puntuales, esuun espacio vectorial de dimensión n.

(iii)El dual algebraico del espacio considerado en (iii), provist de una métrica conveniente, es congruente con E^n.

(iv)Procediendo como en el Análisis Funcional (inyección en el doble dual) podemos construir una isometría del espacio original en el espacio métrico mencionado en (iii).

El resto de este capítulo consiste en varios corolarios y refinamientos del teorema fundamental.

En el capítulo noveno investigamos el concepto de "subespacio de deficiencia 1" análogo al de hiperplano de un espacio vectorial, y sus conexiones con las funcionales afines y los "planos de Leibniz".

En el capítulo décimo estudiamos (en tres diferntes instancias) la posibilidad de extender a todo el espacio una isometría definida en un subconjunto. Utilizamos luego estos lemas para obtener una nueva demostración del teorema del capítulo VIII, y un segundo teorema fundamental en que fijamos condiciones para que el espacio dado sea isométrico a un subconjunto de H.

Finalmente, en el último capítulo introducimos la noción de "espacio perfectamente estrellado" que generaliza ampliamente a la de espacio convexo, y extendemos a tales espacios los resultados de los capítulos VIII y X.

El método es predominantemente geométrico, y las principales herramientas son la propiedad de Blumenthal y la teoría de convexidad.

H.Ciranzan

UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Departamento de Matemáticas

INMERSION DE ESPACIOS METRICOS
CONVEXOS EN ESPACIOS EUCLIDEANOS

FAUSTO ALFREDO TORANZOS

Tesis presentada para optar al título de
Doctor de la Universidad de Buenos Aires

Director: Dr. Luis Santaló
Año 1966

I N D I C E

-------o-o-------

P R E F A C I O

El autor de esta tesis ha tenido el raro privilegio de contar, durante su realización, con el asesoramiento y consejo personal de tres de los más destacados geómetras contemporáneos, el Profesor Victor L. Klee, el profesor Leonard M. Blumenthal y el Dr. Luis Santaló. Encuentren ellos aquí la expresión de su sincero y respetuoso agradecimiento.

Corresponde también destacar que una parte considerable de este trabajo fué realizado durante el goce de una beca de investigación concedida por el Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas de la República Argentina.

F. A. T.

I - INTRODUCCION.-

La Geometría de Espacios Métricos (o Geometría de la Distancia en la terminología de L.M.Blumenthal) estudia aquellas propiedades y características de un espacio métrico que pueden expresarse en función de la métrica, o bien, en el lenguaje del Programa de Klein, es el estudio de las características que permanecen invariantes bajo el grupo de las isometrías.

Curiosamente, los primeros resultados en esta disciplina fueron publicados por J. de Tilly en 1892 [1], es decir, más de dos décadas antes de que M.Fréchet en su famosa tésis de 1906 definiera rigurosamente las "clases (E)" posteriormente denominadas "espacios métricos" por Hausdorff.

Otro antecedente histórico interesante lo constituyen dos trabajos de la escuela italiana de Peano (G.Peano [2], M.Pieri [3]) donde se axiomatiza la geometría euclideana utilizando como conceptos básicos ideas netamente métricas. En la memoria de Pieri,por ejemplo, se axiomatiza una relación de equivalencia $a \underset{c}{\approx} b$ cuyo significado intuitivo es "a y b equidistan de c".

Sin embargo, en estas axiomatizaciones se utilizan postulados no métricos (por ejemplo, el axioma de continuidad de Dedekind).

En la misma línea de pensamiento, B.Kagan [4] ,considera un conjunto M de elementos y una"distancia", es decir, una función d que a cada par de puntos de M asocia un número real no negativo. Considera también un grupo de transformaciones de M que dejan invariante la distancia. Los conceptos "entre" (x está entre a y b si $d(a,x) + d(x,b) = d(a,b)$), "triple lineal", "recta" y"plano" son definidos métricamente y se enuncian siete postulados que restringen estos conceptos y sirven como base axiomática a la geometría euclideana tridimensional. Este antecedente es particularmente importante en relación con el presente trabajo, ya que el primer postulado de Kagan constituye una definición buena (aunque muy restrictiva) de convexidad de espacios métricos, y una versión generalizada del postulado V es uno de los lemas básicos en nuestro desarrollo de la teoría de convexidad en espacios métricos, como veremos en el parágrafo 4.

La noción de "estar un punto entre otros dos" ("betweenness" en inglés), que ya está implícitamente contenida en los axiomas de orden del "Grundlagen" de Hilbert, es axiomatizada por Pasch en 1882 y estudiada in extenso por Huntington y Kline (1917;1924). Este concepto constituye un punto de contacto entre la Geometría de la Distancia y la teoría de conjuntos ordenados.

Paralelamente a estas investigaciones, la noción de subconjunto convexo de un espacio vectorial es introducida en forma casi simultánea por Minkowski (1910) y Caratheodory (1911). Este concepto,basado en la definición de segmento lineal, es aparentemente independiente de la métrica del espacio. Sin embargo existe una clara conexión intuitiva entre la idea de "segmento lineal" y la de "conjunto de puntos que están entre dos puntos fijos"; más aún, es posible demostrar que ambos conceptos coinciden en todos los espacios vectoriales métricos que pertenecen a una extensa familia (espacios de Banach estrictamente convexos) que contiene como casos particulares a los espacios euclideanos y de Hilbert.

En el segundo cuarto de siglo aparece el importante trabajo de Karl Menger, publicado en cuatro partes, las tres primeras en 1928 [5] y la cuarta en 1930 [6] . Esta extensa memoria puede considerarse como el orígen de la investigación sistemática de la Geometría de Espacios métricos. Es sugestivo que la "Erste Untersuchung" se subtitula "Theorie der Konvexität".

Es en este trabajo donde se define por primera vez en forma explícita, la convexidad en espacios métricos.

Menger plantea aquí dos problemas básicos de la Geometría de Espacios Métricos donde la convexidad juega un rol central: (1) El "Konvexifizierungsproblem"; (2) el problema de inmersión isométrica en espacios euclideanos. El primer problema consiste en fijar condiciones topológicas necesarias y suficientes para que un espacio sea homeomorfo a un espacio métrico convexo. En el segundo se trata de determinar condiciones métricas que aseguren la existencia de una isometría entre un espacio métrico convexo dado y un espacio euclideano.

Menger expuso estos problemas en un seminario que condujo en el Rice Institute (Texas, U.S.A.) durante el año lectivo 1930-31.

Una primera solución al problema (2) fue dada por W.A.Wilson en dos trabajos publicados en 1932 [7] y 1935 [8] , donde introduce como condición básica la "propiedad euclideana de cuatro puntos".

L.M.Blumenthal, discípulo de Menger, publica en 1938 un volumen de la serie "University of Missouri Studies" [9] . Este trabajo es un extenso "survey" de la Geometría de la Distancia y contiene, entre otras cosas, una detallada exposición de la solución de Wilson al problema (2) y soluciones parciales al problema (1) de convexificación.

Cabe acotar que el "Konvexifizierungsproblem" fué resuelto en forma completa en 1949 por B.H.Bing [10] . Esto permitió la creación de una nueva fuente de elegantes problemas: descripción de propiedades topológicas de un espacio mediante las métricas convexas que admite.

Blumenthal y sus discípulos de la Universidad de Missouri han producido hasta la fecha más de medio centenar de memorias sobre el tema, culminando con el libro [11] que se ha constituido en la obra clásica de consulta en el tema. En este tratado Blumenthal distingue dos casos diferentes del problema de inmersión en $\mathbb{E}^n$:
a) el "problema del espacio" en que se requiere que la aplicación del espacio métrico E en $\mathbb{E}^n$ sea una biyección, es decir, que E sea congruente con todo $\mathbb{E}^n$; y b) el "problema del subconjunto" donde no se impone ese requerimiento. En la página 91 dice textualmente "It is clear that the subset problem is more general than the space problem-indeed, it contains the space problem as a special case. It should also be remarked that a complete solution of the space problem may contribute little towards a solution of the subset problem, since in characterizing a space one frequently imposes from the outset certain obvious necessary conditions which are extraneous to the imbedding problem. On the other hand, if one has obtained necessary and sufficient conditions for congruent imbedding in a given space of an arbitrary member of a class of spaces, the characterization of the given space with respect to that class is reduced to characterizing the space among its subsets".

En este párrafo "problema de caracterización" es sinónimo de "problema del espacio" ya que fijar condiciones para que un espacio métrico sea congruente con $\mathbb{E}^n$ equivale a caracterizar métricamente (es decir, por propiedades de la distancia) a $\mathbb{E}^n$ entre todos los espacios métricos. Blumenthal dedica los capítulos IV y V de su libro, a obtener una solución del problema del espacio con condiciones considerablemente más débiles que las de Wilson, y a extender este resultado al espacio de Hilbert. Su principal progreso sobre las condiciones de Wilson consiste básicamente en sustituir la "propiedad euclideana de cuatro puntos" por una condición más débil que él denomina "propiedad euclideana débil de cuatro puntos" que restringe la posición de 4-uplas "planas".

En el presente trabajo utilizamos esta misma condición con el nombre de "propiedad de Blumenthal".

Posteriormente, Blumenthal [12] y Day [13] consiguieron reemplazar la propiedad de Blumenthal por propiedades del mismo tipo pero cada vez más débiles que denominaron "feèble euclidean four point property" y "queasy euclidean four point property" respectivamente. En el capítulo IV hacemos una discusión de esta propiedades.

Estos aportes constituyen una solución razonablemente satisfactoria del "problema del espacio" o "problema de caracterización", pero permiten obtener solamente resultados parciales e incompletos en el"problema del subconjunto" o "problema de inmersión isométrica".

El propósito principal del presente trabajo es resolver completamente el "problema del subconjunto" cuando el espacio métrico es convexo.

El procedimiento se basa en una definición de subconjunto convexo de un espacio métrico, más fuerte que la de Menger, pero que permite desarrollar una teoría de convexidad análoga a la de la convexidad lineal, y que a su vez permite introducir en el espacio métrico considerado una estructura seudolineal mediante la cual se puede reproducir muchos de los procedimientos de la geometría vectorial. Este método difiere radicalmente del utilizado por Wilson y Blumenthal.

El primer resultado fundamental (teorema de inmersión isométrica de un espacio métrico convexo en E^n) se obtiene mediante la aplicación de un procedimiento análogo a un recurso básico del Análisis Funcional, la inmersión de un espacio vectorial en su doble dual.

Obtener así mismo una versión métrica del teorema de Riesz de caracterización de espacio, normados de dimensión finita, mediante el cual podemos sustituir en el Teorema Fundamental la condición de dimensión finita por una condición topológica (compacidad local).

Como predijera Blumenthal en el párrafo transcripto más arriba, de nuestro Teorema Fundamental se deduce muy facilmente el Teorema de caracterización métrica de $\mathbb{E}^n$ del mismo Blumenthal.

Sustituyendo la condición de M-convexidad por otra ligeramente más restrictiva (convexidad densa) podemos prescindir de la condición de completitud del espacio, que era esencial en el tratamiento de Wilson y en el de Blumenthal.

El procedimiento utilizado para obtener el primer teorema fundamental, mediante la aplicación del espacio de las funcionales afines, no se adapta bien al tratamiento del caso de dimensión infinita. Para salvar esta dificultad definimos el concepto de "subespacio de deficiencia 1" análogo a la noción de hiperplano de un espacio vectorial. Este concepto está estrechamente relacionado (aunque no es equivalente) a las nociones de "planos de Leibniz" (conjunto de puntos equidistante de dos puntos dados) y de conjuntos de nivel de una funcional afín. Estas relaciones son estudiadas detenidamente en el Capítulo IX.

En el siguiente Capítulo se prueba un lema que permite extender una isometría de un subespacio de deficiencia I en E^{n-1}, a una isometría de todo el espacio en E^n. Utilizando este lema obtenemos una nueva demostración del Teorema de inmersión en E^n, así como un segundo Teorema Funadamental que fija condiciones sobre un espacio métrico convexo para que se pueda sumergir isométricamente en un espacio de Hilbert separable.

En el capítulo XI extendemos el segundo teorema fundamental a espacios "perfectamente estrellados". Este concepto es considerablemente más débil que la convexidad.

El método es predominantemente geométrico y las principales herramientas son la teoría de Convexidad y la "propiedad euclideana débil de cuatro puntos" de Blumenthal.-

II - CONVEXIDAD EN ESPACIOS METRICOS.

DIVERSAS DEFINICIONES.-

Como ya indicáramos, la noción de convexidad en espacios métricos es de importancia básica en este trabajo. En el presente capítulo compararemos las distintas definiciones de espacio métrico convexo y de subconjunto convexo de un espacio métrico que han sido formuladas hasta el presente.

En adelante, $(E;d)$ será un espacio métrico; sus puntos se representarán con letras minúsculas y sus subconjuntos con mayúsculas o con la notación habitual de llaves; la distancia entre a y b se notará $d(a,b)$.

Recordemos que un espacio métrico es un par (E,d) constituído por un conjunto E y una función $d:E\times E \longrightarrow R^+$ con las siguientes propiedades:

(i) $d(a,b) = 0 \Longleftrightarrow a=b$

(ii) $d(a,b) = d(b,a)$

(iii) $d(a,b) + d(b,c) \geq d(a,c)$

Diremos que y está entre x y z, o equivalentemente, que y es un interpunto del par $\{x;z\}$, si $d(x,y) + d(y,z) = d(x,z)$ (Notación: x y z).

Llamaremos <u>banda entre a y b</u> al conjunto de los interpuntos del par $\{a;b\}$ (Notación: $B(a,b) = \{x \in E : axb\}$).

Llamaremos <u>banda cerrada</u> entre a y b al conjunto $\bar{B}(a,b) = B(a,b) \cup \{a\} \cup \{b\}$.

Diremos que la banda $B(a,b)$ es <u>densa</u> si el conjunto $\{d(a,x) / d(a,b) : x \in B(a,b)\}$ es denso en $(0;1)$.

Diremos que $B(a,b)$ es <u>completa</u> si tal conjunto coincide con $(0;1)$.-

(<u>Kagan</u>): Diremos que (E,d) es <u>K-convexo</u> si para todo par $\{x;y\} \subset E$, $B(x,y)$ es completa.

(<u>Menger</u>): Diremos que (E,d) es <u>M-convexo</u> si para todo par $\{x;y\} \subset E$, $B(x,y) \neq \emptyset$.

(<u>Aronszajn</u>): Diremos que (E,d) es <u>A-convexo</u> si para todo par $\{x;y\} \subset E$, $\forall \beta > 0$, $\forall \alpha > 0$, $\alpha + \beta > d(x,y)$
$\exists z \in E$ tal que $d(x,z) < \alpha$, $d(z,y) < \beta$

(<u>Convexidad densa</u>): Diremos que (E,d) es <u>densamente convexo</u> si para todo par $\{x;y\} \subset E$, $B(x,y)$ es densa.

Hemos enunciado estas definiciones por orden cronológico de formulación. La primera (aunque en forma implícita, como postulado) data de 1902 [4] . La segunda apareció en 1928 en [5] . La tercera en 1930 en [14] . La cuarta definición (convexidad densa) aparentemente fué enunciada por primera vez en 1966 [15] por el autor de esta tesis.

<u>Proposición II.1</u> :

(E,d) es K-convexo $\Longrightarrow$ (E,d) es densamente convexo $\Longrightarrow$ (E,d) es M-convexo.

Trivial.

Proposición II.2 :

(E,d) es densamente convexo $\Longrightarrow$ (E,d) es A-convexo.

Sean $a,b \in E$, $d(a,b) = \delta > 0$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\alpha + \beta > \delta$
Luego, por la convexidad densa, $\exists$ $x \in B(a,b)$ tal que $\alpha > d(a,x) > \delta - \beta$. Luego $d(x,b)=d(a,b)-d(a,x) < \beta$ q.e.d.

Proposición II.3 : (Menger)

Si (E,d) es M-convexo y completo, entonces (E,d) es K-convexo.

Omitimos la demostración de este resultado clásico por ser muy extensa. La demostración original aparece en [5] pág.85 y sgtes. Una demostración más simple, pero igualmente extensa, debida a Aronszajn fué publicada en [11] pág.41 y sgtes.

Proposición II.4 :

Si (E,d) es A-convexo y compacto, entonces es K-convexo.

Sean $a,b \in E$, $d(a,b) = \delta > \alpha > 0$. Por la A-convexidad,
$\forall\, n \in \mathbb{N}$ $\exists$ $x_n \in E$ tal que $d(a,x_n) < \alpha + \frac{1}{n}$; $d(x_n,b) < \delta - \alpha + \frac{1}{n}$

Por la compacidad de E, la sucesión $\{x_n\}$ tieme un punto de acumulación x que es claramente un interpunto del par $\{a;b\}$ con $d(a,x) = \alpha$, $d(x,b) = \delta - \alpha$. Como a, b y α eran arbitrarios, (E,d) es K-convexo. q.e.d.

Corolario II.5 :

Si (E,d) es compacto, las cuatro nociones de convexidad son equivalentes.

Recordando que la compacidad implica completitud, el resultado es inmediato a partir de II.1 , II.2 , II.3 y II.4 .-

Damos a continuación tres contraejemplos que demuestran que los resultados previos son inmejorables.

Ejemplo II.6 :

(E,d) densamente convexo y no K-convexo.

Sea E = Q el conjunto de los números racionales con la métrica habitual d . Es claro que (E,d) es densamente convexo, pero entre los puntos 0 y 1 no existe ningún interpunto que diste $\frac{\sqrt{2}}{2}$ de 0, luego no es K-convexo.

Ejemplo II.7 :

(E,d) M-convexo y no A-convexo.

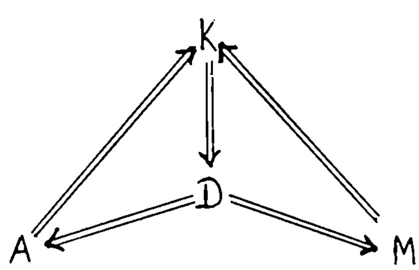
Sea $E = \{r \in \mathbb{R} : 0 \leq r < 1\} \cup \{2\}$ con la métrica habitual de la recta real. (E,d) es claramente M-convexo. Pero si $\alpha = 5/3$, $\beta = 2/3$, $d(0,2) < \alpha + \beta$ y sin embargo no existe $x \in E$ tal que $d(0,x) < \alpha$, y $d(x,2) < \beta$, luego (E,d) no es A-convexo.

Ejemplo II.8 :

(E,d) A-convexo y completo y no M-convexo.

En $\mathbb{R}^2$ sea $a = (1,0)$, $b = (-1,0)$, $c_n = (0,1/n)$, $n \in \mathbb{N}$, y sea B_n la unión de los segmentos cerrados de extremos $\{a;c_n\}$ y $\{c_n;b\}$ Finalmente sea $E = \bigcup_n B_n$. Definimos d(x,y) como el ínfimo de las longitudes de caminos (en E) que unen x con y. Es fácil verificar que (E,d) es A-convexo y completo pero no es M-convexo ya que el par $\{a;b\}$ no tiene interpuntos.

El siguiente gráfico resume los resultados previos :



Nos interesa ahora definir el concepto de subconjunto convexo de un espacio métrico. Es claro que cada uno de los cuatro conceptos anteriores induce una definición de subconjunto convexo, si se pide que el subconjunto dado, con la métrica restringida, sea K-, M-, A-, o densamente convexo.

Concretamente, sea M un subconjunto del espacio métrico (E,d). Diremos que M es <u>K-convexo</u> (respectivamente: <u>densamente convexo</u>; <u>M-convexo</u>) si para todo par $\{a;b\} \subset M$, la banda relativa $B(a,b) \cap M$ es completa (respectivamente: densa, no vacía). Diremos que M es <u>A-convexo</u> si $\forall \{a;b\} \subset M$, $d(a,b) = \delta > 0$, $\forall \alpha > 0$, $\forall \beta > 0$, $\alpha + \beta > \delta$ existe $x \in M$ tal que $d(a,x) < \alpha$, $d(x,b) < \beta$.

Lamentablemente, ninguna de estas definiciones sirve a nuestro propósito fundamental : construir en espacios métricos una teoría análoga a la de la convexidad lineal. La causa de esta falla reside en que, en general, la familia de subconjuntos convexos obtenida por cualquiera de las definiciones precedentes no es interseccional, como se ve en el siguiente contraejemplo.

<u>Ejemplo II.8</u> :

(E,d) K-convexo y compacto, M y N subconjuntos K-convexos de E, tales que $M \cap N$ no es K-convexo.

Sea E una circunferencia del plano $\mathbb{R}^2$ y d(x,y) la longitud del menor arco que une x e y. Entonces (E,d) es un espacio métrico compacto y claramente K-convexo. Sean $\{a;a'\}$ y $\{b;b'\}$ dos pares de puntos diametralmente opuestos, y sea M la semicircunferencia de extremos $\{a;a'\}$ que contiene b, y N aquella que contiene b'. Entonces M y N son K-convexos y $M \cap N = \{a;a'\}$ no es K-convexo. Es claro que tampoco es A-convexo o M-convexo.

Este inconveniente impide dar una definición satisfactoria de cápsula convexa de un conjunto arbitrario. Blumenthal intenta hacerlo ([11] - Teorema 19.1, página 52) para la M-convexidad, pero solo puede asegurar la existencia de cápsula convexa cuando el espacio total es M-convexo y compacto (luego K-convexo). Nada puede afirmar acerca de la unicidad de la cápsula. En efecto, en el ejemplo II.8, si llamamos $P = M \cap N$, tanto M como N pueden considerarse cápsulas K-convexas de P, es decir conjuntos K-convexos minimales que contienen a P.

Para obviar esta dificultad daremos una nueva definición de convexidad de subconjuntos que, por ser la única que utilizaremos en este trabajo, llamaremos convexidad a secas.

Diremos que el subconjunto M del espacio métrico (E,d) es <u>convexo</u> si para todo par $\{x;y\} \subset M$ es $M \supset B(x,y) \neq \emptyset$.

Observemos que si (E,d) es M-convexo, un subconjunto P será convexo sii para todo par $\{x;y\} \subset M$ vale $B(x,y) \subset M$. Nótese el paralelismo con la definición de convexidad lineal. Este concepto aplicado al espacio total coincide con la M-convexidad.

<u>Proposición II. 9</u> :

Sea $\{M_\lambda\}_{\lambda \in L}$ una familia de subconjuntos convexos. Entonces $M = \bigcap_{\lambda \in L} M_\lambda$ es convexo.

Sea $\{x;y\} \subset M$, entonces $\forall \lambda \in L$ $\{x;y\} \subset M_\lambda$, y por la convexidad de M_λ , $M_\lambda \supset B(x,y) \neq \emptyset$, luego B(x,y) está contenida en la intersección de todos los M_λ ,q.e.d.

Esta proposición básica es la que nos permite desarrollar en el próximo capítulo una satisfactoria teoría de cápsula convexa.

III - CAPSULA CONVEXA.-

En este capítulo supondremos que (E,d) es M-convexo. Sea $M \subset E$, y $\mathcal{K}(M) = \{L \subset E : L \text{ es convexo y } L \supset M\}$. Por II.9 la familia $\mathcal{K}(M)$ es interseccional, es decir la intersección de los elementos de una subfamilia de $\mathcal{K}(M)$ pertenece a $\mathcal{K}(M)$. Llamaremos <u>cápsula convexa</u> de M a la intersección de los elementos de la familia $\mathcal{K}(M)$. Por lo que hemos dicho, es claro que la cápsula convexa de M es un conjunto convexo, que contiene a M y que es minimal respecto a la relación de inclusión.

Veamos una definición constructiva de la cápsula convexa que ayuda a comprender la estructura de este concepto básico, y que nos será muy útil en el desarrollo posterior de la teoría.

Definimos $B(M,N) = \bigcup_{\substack{m \in M \\ n \in N}} \overline{B}(m,n)$; $C(A) = B(A,A)$

Definimos $C^n(A)$ inductivamente mediante

(i) $C^0(A) = A$

(ii) $C^{k+1}(A) = C(C^k(A))$

Finalmente llamemos $K(A) = \bigcup_{n=0}^{\infty} C^n(A)$

Veremos a continuación las propiedades básicas de este conjunto.

Proposición III.1 :

(i) $A \supset B \Longrightarrow K(A) \supset K(B)$.

(ii) $K(A) \supset A$.

(iii) $K(A)$ es convexo.

(iv) A es convexo $\Longleftrightarrow K(A) = A$.

(v) M es convexo y $M \supset A \Longrightarrow M \supset K(A)$.

(vi) $K(A)$ es la cápsula convexa de A.

(i) Observando que $A \supset B \Longrightarrow C(A) \supset C(B)$ resulta claramente.

(ii) Trivial.

(iii) Sea $\{a;b\} \subset K(A)$, entonces $a \in C^k(A)$ y $b \in C^j(A)$. Sea $n = \sup \{k;j\}$, entonces $B(a,b) \subset C^{n+1}(A) \subset K(A)$, q.e.d.

(iv) Si A es convexo, $A = C(A) = C^2(A) = \ldots = C^n(A) = \ldots = K(A)$. La recíproca es inmediata por (iii).

(v) Por (i) $K(A) \subset K(M) = M$ ya que M es convexo.

(vi) Sea A' la cápsula convexa de A. Entonces, como hemos visto, A' es convexo y $A' \supset A$, luego, por (v) vale $A' \supset K(A)$. Por otra parte, por (ii) y (iii) $K(A) \in \mathcal{K}(A)$, luego $K(A) \supset A'$, es decir que $A' = K(A)$ q.e.d.

En adelante denotaremos con $K(A)$ a la cápsula convexa del conjunto A.

Llamaremos <u>bola</u> de centro x_o y radio r al conjunto

$$U_{x_o,r} = \{x \in E : d(x,x_o) \leq r\}$$

El diámetro del conjunto A será el número no negativo (eventualmente infinito) :

$$\operatorname{diam} A = \sup \{d(x,y) : \{x;y\} \subset A\}$$

TeoremaIII.2 :

Si (E,d) es completo los siguientes enunciados son equivalentes;

(i) $\forall A \subset E$, $\operatorname{diam} A = \operatorname{diam} K(A)$.

(ii) $\forall x \in E$, $\forall r > 0$, es $U_{x,r}$ convexa.

(i)$\Longrightarrow$(ii) : Supongamos que existe $x_o \in E$, $r>0$ tales que la bola $U = U_{x_o,r}$ no es convexa. Esto equivale a afirmar que existe $t \in C(U)$ y $t \notin U$. Sean entonces a y b en U tales que $t \in B(a,b)$. Por un corolario de II.3 (ver, por ejemplo, [11] , página 41, teorema 14.1) existe $S \subset \bar{B}(a,b)$ tal que $t \in S$ y S es isométrico a un segmento lineal de longitud d(a,b). Por lo dicho antes vale $d(x_o,t) = r' > r$ y $d(x_o,a) = r'' \leq r$. Además la función $f(x) = d(x,x_o)$ es continua, luego toma en S todos los valores entre r' y r". Entonces existen tres puntos x, y, z en S tales que

I.- xyz

II.- $d(x,x_o) = d(z,x_o) = p < d(y,x_o)$

III.- $d(x,z) < p$

Consideremos entonces el conjunto $A = \{x;z;x_o\}$. Es claro que diam A = p y como $y \in K(A)$ será

diam $K(A) \geq d(x_o,y) > p =$ diam A , q.e.d.

(ii)$\Longrightarrow$ (i) : Sea A un conjunto arbitrario, $x \in A$ y diam A = r. Para todo $y \in A$, $d(x,y) \leq r$, luego $A \subset U_{x,r}$, pero entonces, por III.1 (v), $K(A) \subset U_{x,r}$ ya que $U_{x,r}$ es convexo. Sean ahora, z y t puntos de K (A) . Entonces, por lo visto, $\forall\, x \in A$, $z \in U_{x,r}$, lo que equivale a decir que $\forall\, x \in A$, $x \in U_{z,r}$, o lo que es lo mismo, que $A \subset U_{z,r}$. Razonando como antes, $K(A) \subset U_{z,r}$, lo que implica que $d(z,t) \leq r$. Pero como z y t eran puntos arbitrarios de K(A), diam K(A) = r, q.e.d.

IV - LA PROPIEDAD DE BLUMENTHAL.-

En este capítulo supondremos que (E,d) es M-convexo. Llamaremos triple (respectivamente : n-upla) a un conjunto formado por exactamente tres (respectivamente : n) puntos distintos. Un triple es lineal si uno de sus puntos está entre los otros dos. Una 4-upla (respectivamente : 5-upla) es plana si por lo menos uno (respectivamente : dos) de sus triples es lineal (respectivamente : son lineales).

Sean (E,d) y (F,d') espacios métricos, $M \subset E$. Diremos que M se puede sumergir isométricamente en F (Notación : $M \Subset F$) si existe una aplicación $f : M \longrightarrow F$ tal que para todo par $\{a;b\} \subset M$ $d(a,b) = d'(f(a),f(b))$. Tal aplicación es una isometría. De la definición resulta que f es inyectiva. Si además es biyectiva, es inmediato que f^{-1} también es una isometría. Entonces diremos que M y F son congruentes (Notación : $M \approx F$). f es una congruencia.

En adelante designaremos con $\mathbb{R}^n$ al espacio vectorial real n-dimensional y con $\mathbb{E}^n$ al mismo espacio con la métrica euclideana.

(E,d) goza de la propiedad de los dos triples (Notación : (E,d) es "2-3") si para toda 4-upla que tiene dos de sus triples lineales, los otros dos triples también lo son.

(E,d) es un espacio de Blumenthal si para cada 4-upla plana Q de E vale $Q \subset\!\!\approx \mathbb{E}^2$.

La propiedad que acabamos de definir puede interpretarse como una ligera generalización de la desigualdad triangular. En efecto, la desigualdad triangular se puede expresar pidiendo que cada triple T se pueda sumergir isométricamente en $\mathbb{E}^2$. Si es posible extender esta isometría a toda 4-upla T' formada por T más un punto x situado entre dos de los puntos de T, (E,d) es de Blumenthal. Sin embargo, como veremos más adelante, esta generalización es mucho más profunda de lo que parece a primera vista.

Es inmediato verificar que si (E,d) es de Blumenthal, entonces (E,d) es "2-3". La implicación inversa no se cumple, como se ve en el siguiente contraejemplo.

Ejemplo IV.1 :

(E,d) que es "2-3" pero no es de Blumenthal.

Sea E un hemisferio abierto de la superficie esférica unitaria de $\mathbb{E}^3$, y d(a,b) la longitud del (único) arco de geodésica que une a con b. Es fácil comprobar que (E,d) es "2-3" pero, por supuesto no es de Blumenthal.

Proposición IV.2 :

En un espacio de Blümenthal las bolas son convexas.

Sea $\{x;y\} \subset U_{t,r}$, $z \in B(x,y)$. Entonces, aplicando la propiedad de Blumenthal a la 4-upla $\{x;z;y;t\}$ resula que

$$d(t,z) < \max\{d(t,x);d(t,y)\} \leq r$$

luego z $U_{t,r}$, y por lo tanto este conjunto es convexo, q.e.d.

Corolario IV.3 :

Si (E,d) es de Blumenthal y $A \subset E$, diam K(A) = = diam A.

Inmediato de III.2 y IV.2.

Proposición IV.4 :

Si (E,d) es de Blumenthal y P es una 5-upla plana de E, entonces $P \approx \mathbb{E}^2$.

Sea $P = \{a;b;c;x;y\}$. Si dos de estos cinco puntos, por ejemplo x e y, son interpuntos de pares de P, llamemos B_x a la abnda que contiene a x , B_y a la que contiene a y. Distinguiremos dos casos.

(i) $B_x = B_y$: Será entonces, por ejemplo, axb y ayb. Por la propiedad de Blumenthal $\{a;x;b;c;\} \sim \{a';x';b';c'\} \subset \mathbb{E}^2$. Sea y' el punto del segmento lineal de extremos $[a', b']$ tal que $d(a',y') = d(a,y)$, luego $d(y',b') = d(y,b)$. Por la propiedad de Blumenthal será $\{a;y;b;c\} \sim \{a';y';b';c'\}$. Solo faltaría verificar que $d(x,y) = d(x',y')$. Supogamos que $d(a,x) < d(a,y)$. Entonces, por la propiedad "2-3", axy. Por lo tanto vale

$$d(x,y) = d(a,y) - d(a,x) = d(a',y') - d(a',x') = d(x',y')$$

(ii) $B_x \neq B_y$: Sea entonces axb y byc, por ejemplo. (La otra configuración posible en este caso sería axb y byx que se trata de la misma forma). Por la propiedad de Blumenthal, determinamos una 4-upla $\{a';x';b';c'\}$ de $\mathbb{E}^2$ tal que

$$\{a;x;b;c;\} \sim \{a';x';b';c'\} \qquad 1$$

La congruencia 1 implica las siguientes seis igualdades :

$$d(a,b) = d(a',b') \ ; \ d(b,c) = d(b',c') \ ; \ d(c,a) = d(c',a')$$

$$d(a,x) = d(a',x') \ ; \ d(b,x) = d(b',x') \ ; \ d(c,x) = d(c',x')$$

Sea como antes, y' el punto del segmento lineal determinado por b' y c' tal que $d(y',b') = d(y,b)$, y por lo tanto $d(y',c') = d(y,c)$. Por una segunda aplicación de la propiedad de Blumenthal resulta que

$$\{b;y;c;a;\} \sim \{b';y';c';a'\} \qquad 2$$

de donde $d(a,y) = d(a',y')$. Finalmente una tercera aplicación de la mencionada propiedad nos permite obtener

$$\{a;x;b;y\} \sim \{a';x';b';y'\} \qquad 3$$

que nos asegura la última igualdad $d(x,y) = d(x',y')$ necesaria para que se verifique

$$P = \{a;x;y;b;c\} \sim \{a';x';y';b';c'\} \subset \mathbb{E}^2$$

(iii) Un solo interpunto: Resta considerar la alternativa en que un solo punto $y \in P$ es interpunto de dos pares distintos de P. Una aplicación inmediata de la propiedad "2-3" reduce el problema a considerar el caso en que los cuatro elementos de esos dos pares son distintos. Sean entonces ayb, cyx. Por la propiedad de Blumenthal se verifica

$$\{a;y;b;c\} \sim \{a';y';b';c'\} \subset \mathbb{E}^2 \qquad 4$$

Sea $x' \in \mathbb{E}^2$, situado en la recta que determinan c' e y', y tal que $d(c',x') = d(c,x)$; $d(y',x') = d(y,x)$. Entonces, nuevamente por la propiedad de Blumenthal vale

$$\{c;y;x;a\} \sim \{c';y';x';a'\} \qquad 5$$

$$\{c;y;x;b\} \sim \{c';y';x';b'\} \qquad 6$$

lo que juntamente con 4 implican $P \sim \{a';b';c';x';y'\}$.

<u>Lema IV.5</u>:

Si (E,d) es completo y "2-3", para todo par $\{a;b\} \subset E$ es $\bar{B}(a,b) \sim [0;d(a,b)]$.

Por el corolario de II.3, citado en III.2, existe un conjunto S contenido en $\bar{B}(a,b)$ tal que $S \sim [0;d(a,b)]$. Supongamos que existe $x \in B(a,b)$, $x \notin S$, y sea $x' \in S$ tal que $d(a,x) = d(a,x')$. Pero como axb y ax'b, por la propiedad "2-3", el triple $\{a;x;x'\}$ es lineal. Entonces axx' , o bien ax'x. En el primer caso

$$d(a,x) < d(a,x')$$

y en el segundo caso

$$d(a,x') < d(a,x)$$

contradicción eb ambas alternativas. Luego $S = \bar{B}(a,b)$.

Dados tres puntos de E a, b, y c. Llamaremos <u>trilátero</u> con vértices en dichos puntos al conjunto

$$T(a,b,c) = \bar{B}(a,b) \cup \bar{B}(b,c) \cup \bar{B}(c,a)$$

Corolario IV.6 :

Si (E,d) es completo y de Blumenthal, $\{a;b;c\}$ y $\{a';b';c'\}$ son triples congruentes contenidos en E y en $\mathbb{E}^2$ respectivamente, entonces es $T(a,b,c) \sim T(a',b',c')$.

Es claro que, por IV.5 existe una aplicación biyectiva natural

$f : T(a,b,c) \longrightarrow T(a',b',c')$

Sea $\{x;y\} \subset T(a,b,c)$. Se presentan cuatro casos posibles :

(i) x e y son vértices de $T(a,b,c)$: Por el enunciado vale

$d(x,y) = d(f(x),f(y))$.

(ii) x e y pertenecen a la misma banda : Por IV.5 resulta

$d(x,y) = d(f(x),f(y))$.

(iii) x es vértice e y pertenece a la banda opuesta : Una aplicación inmediata de la propiedad de Blumenthal obtiene

$d(x,y) = d(f(x),f(y))$.

(iv) x e y pertenecen a distintas bandas: Aplicando la proposición IV.4 resulta la misma igualdad que en los casos anteriores. Es decir que la aplicación f es una congruencia.

Lema IV.7 :

Sea (E,d) de Blumenthal, $\{a;b;c;d\} \subset E$, $x \in B(a,b)$, $y \in \bar{B}(c,d)$, entonces $d(x,y) \leq \sup\{d(a,c);d(b,c);d(a,d);d(b,d)\}$.

Aplicando la propiedad de Blumenthal a $\{a;x;b;y\}$ resulta

$d(x,y) \leq \sup\{d(y,a);d(y,b)\}$ (1)

Razonando en la misma forma con $\{c;y;d;a\}$ obtenemos

$d(y,a) \leq \sup\ d(a,c);d(a,d)$ (2)

Repitiendo el razonamiento para $\{c;y;d;b\}$ resulta

$d(y,b) \leq \sup\{d(b,c);d(b,d)\}$ (3)

Finalmente, reuniendo (1) , (2) , y (3) resulta la tesis.

Proposición IV.8 :

Sea (E,d) densamente convexo y de Blumenthal, su completación es K-convexo y de Blumenthal.

Notaremos la completación de (E,d) con $(\bar{E},d)$ y sus puntos con letras minúsculas con sobrerraya. Sea $\bar{a};\bar{b} \in \bar{E}$, entonces existen dos sucesiones de Cauchy $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ en E tales que $a_n \longrightarrow \bar{a}$ y $b_n \longrightarrow \bar{b}$. Sea $\alpha = d(\bar{a},\bar{b})$. Notaremos

$$\varepsilon_m = \sup_{j,k \geq m} \{ d(a_j,a_k);d(b_j,b_k)\}$$

$$\delta_m = (m/m-1)\,\varepsilon_m$$

Es claro que las sucesiones $\{\varepsilon_m\}$ y $\{\delta_m\}$ son decrecientes y tienden a 0. Notaremos con $B_E(y,z) = B(y,z) \cap E$. Sea n_1 tal que $\varepsilon_{n_1} < \alpha .10^{-1}$ y sea $x_1 \in E$ tal que $a_{n_1} x_1 b_{n_1}$ y $d(a_{n_1},x_1) > \alpha/3$ $d(b_{n_1},x_1) > \alpha/3$. Sea n_2 tal que $\delta_{n_2} \leq \frac{1}{2}\delta_{n_1}$. Entonces, por IV.7 vale que

$$d(x_1,B_E(a_{n_2},b_{n_2})) \leq \sup \{ d(a_{n_1},a_{n_2});d(b_{n_1},b_{n_2})\} \leq \varepsilon_{n_1}$$

Luego existe $x_2 \in B_E(a_{n_2},b_{n_2})$ tal que $d(x_1,x_2) < \delta_{n_1}$

Análogamente, sea n_k tal que $\delta_{n_k} \leq \frac{1}{2}\delta_{n_{k-1}}$. Existe x_k en $B_E(a_{n_k},b_{n_k})$ tal que $d(x_{k-1},x_k)$. La sucesión $\{x_k\}$ está contenida en E y por construcción es de Cauchy. Sea $\bar{x}$ su límite en $\bar{E}$. Nuevamente por construcción $\bar{a} \neq \bar{x} \neq \bar{b}$. Es fácil ver que $\bar{a}\bar{x}\bar{b}$. Es decir que $(\bar{E},d)$ es M-convexo, y por II.3 K-convexo. Verificar que (E,d) también es de Blumenthal es rutinario si observamos que si $\{x_n\} \longrightarrow x$ y $\forall$ n vale $\{x_n;y;z;t\} \mathrel{\copyright} \mathbf{E}^2$ resulta, por la completitud de $\mathbf{E}^2$, que $\{x;y;z;t;\} \mathrel{\copyright} \mathbf{E}^2$.

Esta proposición justifica la definición de convexidad densa, ya que los ejemplos II.7 y II.8 muestran que si sustituimos "densamente convexo" por "M-convexo" o por "A-convexo", la proposición no se cumple. Luego será de utilidad para obtener una generalización de los teoremas fundamentales, quitando la hipótesis de completitud.

Proposición IV.9 :

Sea (E,d) completo y de Blumenthal, P un subconjunto convexo y $P' = P \cup \{x\}$. Entonces $K(P') = B(x,P)$.

Como $K(P') \supset B(x,P) \supset P'$, por III.1 (v) bastará con que demostremos que $B(x,P)$ es convexo. Sea $\{y;z\} \subset B(x,P)$, $t \in B(y,z)$. Existe un par $\{y';z'\} \subset P$ tal que $y'yx$, $z'zx$. Razonando como en IV.4, existe una isometría $f : \{x;y;y';z;z';t\} \longrightarrow \mathbb{E}^2$. Sea $u \in \mathbb{E}^2$ el punto de intersección de las rectas determinadas por los pares $\{f(x);f(t)\}$ y $\{f(y');f(z')\}$. Existe un único punto $t' \in B(y',z')$ tal que $d(f(y'),u) = d(y',t')$ y además valga $d(f(z'),u) = d(z',t')$. Entonces aplicando IV.6 a $T(x,y,z)$ y a $T(x,y',z')$ resulta que xtt'. Por la convexidad de P, $t' \in P$ y $t \in B(x,P)$. Luego $B(x,P)$ es convexo, q.e.d.

Diremos que el conjunto A es de Chebishev si para todo $x \in E$ existe un único punto $x' \in A$ tal que

$$d(x,x') = d(x,A) = \inf_{y \in A} \{d(x,y)\}$$

Proposición IV.10 :

En un espacio de Blumenthal, un conjunto convexo y compacto es de Chebishev.

Sea K convexo y compacto y sea $x \notin K$. Por compacidad existe por lo menos un punto $x' \in K$ tal que $d(x,x') = \inf_{y \in K} \{d(x,y)\}$. Supongamos que exista un segundo punto x'' K con la misma propiedad. Sea t el punto tal que $d(x',t) = d(x'',t) = \frac{1}{2} d(x',x'')$. Entonces $t \in B(x',x'') \subset K$. Aplicando la propiedad de Blumenthal al conjunto $\{x;x';t;x''\}$ resulta que $d(x,t) < d(x,x') = d(x,x'')$ lo que contradice claramente el criterio de selección de los puntos x' y x'' . Luego el punto x' es único.

Diremos que x es punto medio del par $\{a;b\}$ si se cumple $d(a,x) = d(x,b) = \frac{1}{2}\, d(a,b)$.

Diremos que (E,d) es fe4p (abreviatura de "feeble euclidean four points property", propiedad euclideana muy débil de cuatro puntos) si para cada 4-upla $Q \subset E$, tal que uno de los p puntos de Q sea punto medio de unpar en Q, vale $Q \approx \mathbb{E}^2$.

Proposición IV.11 :

Sea (E,d) completo, entonces es de Blumenthal sii es fe4p.

Es claro que un espacio de Blumenthal es fe4p. Veámos la recíproca. Sea (E,d) un espacio fe4p y $\{a;x;b;t\}$ una 4-upla plana con axb. Por el corolario de II.3 citado en III.2 existe un conjunto $S = S_{a,b} \subset \bar{B}(a,b)$ tal que $S \sim [0;d(a,b)]$. Si $\{y;z\} \subset S$, llamaremos $S_{y,z} = \bar{B}(y,z) \cap S_{a,b}$. Sea x_1 el punto medio de $\{a;b\}$ contenido en S. Por fe4p será $\{a;x_1;b;t\} \approx \mathbb{E}^2$. Si $x = x_1$, no queda nada por demostrar. En caso contrario, sea S_1 el "subsegmento" de S determinado por x_1 y que contiene a x, y sea x_2 el punto medio de los extremos de S_1. Supongamos por ejemplo que $S_1 = S_{a,x}$. Entonces, por la propiedad fe4p $\{a;x_2;x_1;t\} \approx \mathbb{E}^2$ y $\{a;x_2;x_1;b\} \approx \mathbb{E}^2$, y razonando como en IV.4, resultará $\{a;x_2;x_1;b;t\} \approx \mathbb{E}^2$. En particular será $\{a;x_2;b;t\} \approx \mathbb{E}^2$.
Iterando este razonamiento k veces, de los dos subsegmentos de S_{k-1} determinados por x_k, llamemos S_k aquel que contiene a x y sea x_{k+1} su punto medio. Luego $\{a;x_{k+1};b;t\} \approx \mathbb{E}^2$. Este proceso solamente se detendría si para algún $n \in \mathbb{N}$ fuera $x = x_n$. Pero entonces no quedaría nada por demostrar ya que la conclusión de la etapa anterior hubiera sido $\{a;x_n;b;t\} \approx \mathbb{E}^2$. Si tal cosa no sucede en ninguna etapa, el proceso continúa indefinida-

mente, y la sucesión $\{x_n\}$ tiende claramente a x. Aplicando el argumento usado al final de IV.8, resulta que $\{a;x;b;t\} \approx \mathbb{E}^2$. Luego E es de Blumenthal.

> El concepto de espacio fe4p fué definido por Blumenthal en [12] . La proposición anterior es una versión modificada del teorema 3.2 de la citada memoria, aún cuando en dicho teorema se agrega la hipótesis de convexidad externa del espacio, que como hemos visto es inesencial.

Diremos que (E,d) es <u>qe4p</u> (abreviatura de "queasy euclidean four points property", propiedad euclideana debilísima de cuatro puntos) si para todo par $\{a;b\} \subset E$ existe $x \in B(a,b)$ tal que para todo $t \in E$ valga $\{a;x;b;t\} \approx \mathbb{E}^2$

> En la proposición que sigue no vale la hipótesis general de M-convexidad de (E,d) ya que esta propiedad resultará de las demás condiciones que le impondremos al espacio.

<u>Proposición IV.12</u> : (Day)

Si (E,d) es un espacio métrico completo, los siguientes enunciados son equivalentes :

(i) (E,d) es K-convexo y de Blumenthal.

(ii) (E,d) es qe4p.

(i) $\Longrightarrow$ (ii): Inmediato.

(ii) $\Longrightarrow$ (i): Es claro que la propiedad qe4p implica la M-convexidad, luego por II.3 también la K-convexidad. Veamos que también implica la propiedad de Blumenthal.

Sea $\{a;b\} \subset E$ y $x \in B(a,b)$ el punto asociado por la propiedad qe4p a dicho par. Sea $\alpha = d(a,x)$. Entonces vale :

1) <u>Si $t \in B(a,b)$, $t \neq x$, $d(a,t) \neq \alpha$</u>. Supongamos que existe t en B(a,b) tal que $d(a,t) = \alpha$ y $t \neq x$. Aplicando qe4p $\{a;x;b;t\} \approx \mathbb{E}^2$ luego $d(x,t) = 0$, contradicción. Definamos la aplicación

$$f : \bar{B}(a,b) \longrightarrow [0;d(a,b)] \qquad \text{por } f(t) = d(a,t)$$

Sea $A = \{x \in B(a,b) : \forall\, s \in E,\ \{a;x;b;s\} \cong \mathbb{E}^2\} \cup \{a;b\}$.

2) La restricción de f a A es inyectiva. Sea $y;z \in A$. Entonces aplicando el razonamiento de 1 con $y = x$, $z = t$ resultará que $f(y) = d(a,y) \neq d(a,z) = f(z)$.

3) A es cerrado. Sea t un punto de acumulación de A. Existe entonces una sucesión $\{t_n\} \subset A$ tal que $\{t_n\} \longrightarrow t$. Pero entonces, $\forall\, n \in \mathbb{N}$ y $\forall\, s \in E$ vale que $\{a;t_n;b;s\} \cong \mathbb{E}^2$, y si razonamos como al final de IV.8, será $\{a;t;b;s\} \cong \mathbb{E}^2$ luego $t \in A$, q.e.d.

Sea $\mathcal{A} = \{M \subset A : f_{/M}$ es isometría$\}$. Podemos considerar $\mathcal{A}$ parcialmente ordenada por inclusión, Es claro que toda subfamilia $\mathcal{J} \subset \mathcal{A}$ linealmente ordenada tiene supremo, la unión de los conjuntos en $\mathcal{J}$, que claramente pertenece a $\mathcal{A}$. Entonces, por el pricipio maximal de Zorn, existe un conjunto $B \in \mathcal{A}$ maximal.

4) B es cerrado. Sea p un punto de acumulación de B y $\{c_n\}$ una sucesión contenida en B y tal que $c_n \longrightarrow p$. Entonces será

$f(p) = \lim f(c_n)$ y $\forall\, t \in B$ $d(t,p) = \lim d(t,c_n) = \lim |f(t)-f(c_n)| = |f(t) - f(p)|$. Supongamos que $p \notin B$, entonces $B' = B \cup \{p\}$ está en $\mathcal{A}$ y B' es estrictamente más grande que B contradiciendo la maximalidad, luego $p \in B$ y B es cerrado.

5) f(B) es cerrado. Sea γ un punto de acumulación de $f(B)$ y sea $\{\gamma_n\}$ una sucesión en $f(B)$ que converge a γ. $\forall\, n$ sea $p_n = f^{-1}(\gamma_n)$ $p_n \in B$, y $\{p_n\}$ es claramente una sucesión de Cauchy. Como B es completo, por 4 y la completitud de E, existe un punto p límite de esa sucesión. Es inmediato que $f(p) = \gamma$, luego $\gamma \in f(B)$.

6) $f(B) = [0;d(a,b)]$. Supongamos que no sea así. Entonces, por 5, el complemento de $f(B)$ en $[0;d(a,b)]$ es abierto. Eligiendo una componente conexa de tal conjunto, resulta que existen γ y δ en $f(B)$ tales que el intervalo abierto (γ, δ) está contenido en el complemento de $f(B)$. Sea $p = f^{-1}(\gamma)$ y $q = f^{-1}(\delta)$ y sea $r \in B(p,q)$ el punto asociado a dicho par por la propiedad qe4p.

Es fácil ver que $r \in B(a,b)$ ya que por lo visto anteriormente es

$$d(a,p) + d(p,q) + d(q,b) = d(a,b) \qquad (*)$$

$$d(p,q) = d(p,r) + d(r,q) \qquad (**)$$

y de la conjunción de (*) y (**) resulta

$$d(a,b) \leq d(a,r) + d(r,b) \leq d(a,p)+d(p,r)+d(r,q)+d(q,b) =$$

$$= d(a,p) + d(p,q) + d(q,b) = d(a,b)$$

y el signo de igualdad vale en toda la cadena. Por otra parte, si $s \in E$ es un punto arbitrario, resulta que $\{p;q;r;s\} \approx \mathbb{E}^2$. Como $B \subset A$ resulta que $B \cup \{s\} \approx \mathbb{E}^2$. Como en IV.6 resulta que $B' = B \cup \{r\}$ es tal que $B' \cup \{s\} \approx \mathbb{E}^2$, luego $B' \subset A$. Más aún, $\forall\, t \in B$ es $d(t,r) = |f(t) - f(r)|$ luego $f_{/B'}$ es una isometría, es decir que $B' \in \mathcal{A}$ lo que contradice la maximalidad de B. Por lo tanto $f(B) = [0;d(a,b)]$.

7) $\underline{B = A = B(a,b)}$. En efecto, por 6 y la definición de f vale

$$[0;d(a,b)] = f(B) \subset f(A) \subset [0;d(a,b)]$$

Entonces, por 2 resulta que $B = A$. Por definición es $B \subset B(a,b)$, pero usando 6 y razonando como en 1 resulta la inclusión inversa. Además, por 6 será $B \sim [0;d(a,b)]$; y por definición de A, $\forall\, s \in E$ es $B \cup \{s\} \approx \mathbb{E}^2$. Luego (E,d) es de Blumenthal, q.e.d.

Tanto la definición de espacio qe4p como el teorema precedente se deben a M. M. Day [13] . En realidad, IV.12 es una adaptación a nuestra terminología del teorema 2 de la memoria citada.

V - ESPACIOS DE TIPO n. GEOMETRIA DEL SIMPLEX.

En este capítulo supondremos que (E,d) es M-convexo y completo. Observemos también que al notar con $\{x;y\}$ un par de puntos, presuponemos tácitamente que $x \neq y$, es decir que dicho conjunto consta de exactamente dos puntos.

Si $\{x;y\} \subset E$, notaremos $\overrightarrow{xy} = \bar{B}(x,y) \cup \{t : xyt\}$; $\overleftrightarrow{xy} = \overrightarrow{xy} \cup \overrightarrow{yx}$.

Si A tiene por lo menos dos puntos, llamaremos <u>cápsula afín</u> de A al conjunto

$$\operatorname{af} A = \bigcup_{\{x,y\} \subset K(A)} \overleftrightarrow{xy}$$

Si A consta de un solo punto , o es vacío, definiremos convencionalmente af A = A.

> Este importante concepto será investigado con detenimiento en el próximo capítulo, una vez que hayamos desarrollado las herramientas necesarias para ello. Su introducción a esta altura se debe a que es imprescindible para definir la noción de conjunto independiente, base del material contenido en el presente capítulo.

Diremos que $M \subset E$ es un <u>conjunto independiente</u> si $\forall\, x \in M$ $x \notin af\,(M - \{x\})$.

> <u>Aclaración</u>: La notación "A - B", donde A y B son conjuntos, simboliza la diferencia conjuntista entre A y B, es decir el conjunto de puntos que pertenecen a A y no pertenecen a B. Habitualmente se utiliza la notación "$A \sim B$" pero nosotros ya la hemos utilizado para indicar congruencia entre A y B.

Si M es una (n+1)-upla independiente, llamaremos <u>n-simplex</u> al conjunto $K(M)$. Una <u>k-cara</u> de $K(M)$ será un conjunto de la forma $K(L)$, donde L es una (k+1)-upla contenida en M. Un <u>vértice</u> de $K(M)$ es una 0-cara, es decir un punto de M. Una <u>faceta</u> de $K(M)$ es una (n-1)-cara. Notaremos con $F(M)$ a la unión de todas las facetas de $K(M)$. La <u>n-célula</u> generada por M es $Z(M) = K(M) - F(M)$.

Si $n \in \mathbb{N}$, $x \in E$, notaremos $P(n,x)$ al siguiente enunciado:
(<u>P(n,x)</u>) "Existe un n-simplex $K(M)$ tal que $x \in K(M)$"
Diremos que (E,d) es un <u>espacio de tipo n</u> si $\forall\, x \in E$ $P(n,x)$ es verdadera y $P(n+1,x)$ es falsa.
Diremos que (E,d) es un <u>espacio de tipo infinito</u> si $\forall\, n \in \mathbb{N}$ y $\forall\, x \in E$, $P(n,x)$ es verdadera.

Diremos que $x \in E$ es un <u>punto terminal</u> si para todo par $\{a;b\} \subset E$ vale $x \notin B(a,b)$.

<u>Proposición V.1</u> :

Si E tiene más de un punto, los siguientes enunciados son equivalentes:
(i) $E \cong \mathbb{E}^1$.
(ii) (E,d) es "2-3" y de tipo 1.
Más aún, en las condiciones anteriores, (E,d) congruente con $\left\{\begin{array}{l}\text{un segmento}\\ \text{una semirrecta}\\ \text{toda la recta}\end{array}\right\}$ si tiene $\left\{\begin{array}{c}2\\1\\0\end{array}\right\}$ puntos terminales.

(i) $\Longrightarrow$ (ii): Trivial.

(ii) $\Longrightarrow$ (i): Veamos que todo triple de E es lineal. En efecto, sea $\{a;b;c\}$ un triple arbitrario de E. Por ser E de tipo 1, existe $\{x;y\} \subset B(a,b)$ tal que

$\{x;y;c\}$ es lineal (1)

Por otra parte, por construcción vale axb y ayb, luego por "2-3"

$\{a;x;y\}$ es lineal (2)

$\{b;x;y\}$ es lineal (3)

La conjunción de (1) y (2) implica que

$\{a;x;c\}$ es lineal (4)

La conjunción de (1) y (3) implica que

$\{b;x;c\}$ es lineal (5)

Luego, una vez más, (4) y (5) implican que $\{a;b;c\}$ es lineal.

Sea entonces $\{x_0;x_1\} \subset E$ tal que $d(x_0,x_1) = r$. Definimos $f(x_0) = 0$ $f(x_1) = r$. Si $y \in E - \{x_0;x_1\}$ vale una y solo una de las siguientes alternativas :

(a) yx_0x_1 (b) x_0yx_1 (c) x_0x_1y

En el caso (a) definimos $f(y) = -d(x_0,y)$. En los casos (b) y (c) definimos $f(y) = d(x_0,y)$. Es inmediato comprobar que la aplicación $f : E \longrightarrow \mathbb{E}^1$ es una isometría. Pero $f(E)$ será un conjunto K-convexo de $\mathbb{E}^1$, luego linealmente convexo. Puesto que también los puntos terminales se conservan por isometría, la segunda parte de la proposición resulta del hecho de que los únicos conjuntos convexos de la recta euclideana son los segmentos, las semirrectas y la recta total.

Ejemplo V.2 :

(E,d) K-convexo y de tipo 1, pero tal que no vale $E \hookrightarrow \mathbb{E}^1$

Sea E la unión de tres semirrectas con el mismo origen θ. Si x e y pertenecen a la misma semirrecta d(x,y) será la distancia euclideana. Si x e y pertenecen a distintas semirrectas definimos $d(x,y) = d(x,\theta) + d(\theta,y)$. Es fácil comprobar que (E,d) es K-convexo y de tipo 1, pero no es "2-3", y por ende no vale la congruencia $E \subseteq \mathbb{E}^1$. Este ejemplo, denominado "trípode", es mencionado en [12] , página 166.

En lo que resta de este capítulo supondremos que (E,d) es un espacio de Blumenthal.

Proposición V.3 :

Un n-simplex es compacto.

La demostración será por inducción sobre n. Por la segunda parte de V.1, vale para $n = 1$. Supongamos que se verifica para $n = p - 1$. Sea $M = \{x_o;x_1;\dots;x_p\}$ un conjunto indepediente y $\{y_i\}_{i=1}^{\infty}$ una sucesión arbitraria contenida en $K(M)$. Nos proponemos demostrar que tiene puntos de acumulación. Llamemos $F_i = K(M - \{x_i\})$. Para todo $t \in K(M) - F_1$ (respectivamente: $t \in K(M) - F_2$) sea $t' \in F_1$ (respectivamente: $t'' \in F_2$) tal que x_1tt' (respectivamente: x_2tt''). Si $t \in F_1$ (respectivamente: $t \in F_2$) sea $t' = t$ (respectivamente: $t''=t$). El lema IV.9 y la propiedad "2-3" aseguran que las aplicaciones $t \longrightarrow t'$ de $K(M)$ sobre F_1 y $t \longrightarrow t''$ de $K(M)$ sobre F_2 están bien definidas. Por la compacidad de F_1 existe una subsucesión $\{y'_{i_j}\}_{j=1}^{\infty}$ de y'_i que converge a $y_o \in F_1$. Por la misma razón existe una subsucesión $\{y''_{i_{j_k}}\}_{k=1}^{\infty}$ de $\{y''_{i_j}\}$ que converge a $y_{oo} \in F_2$. Es claro que $y'_{i_{j_k}}$ converge a y_o. Llamemos $z_k = y_{i_{j_k}}$ Si $a;b \in K(M)$, entonces de la propiedad de Blumenthal resulta que

$$d(\bar{B}(x_1,a'),b) \leq d(a',b') \quad ; \quad d(\bar{B}(x_2,a''),b) \leq d(a'',b'')$$

Por lo tanto

$$d(\bar{B}(x_1,y_o),\bar{B}(x_2,y_{oo})) \leq d(\bar{B}(x_1,y_o),z_k) + d(B(x_2,y_{oo}),z_k) \leq$$

$\leq d(y_o,z'_k) + d(y_{oo},z''_k)$

que converge a 0, y puesto que $\bar{B}(x_1,y_o)$ y $\bar{B}(x_2,y_{oo})$ son conjuntos cerrados existe $y \in B(x_1,y_o) \cap B(x_2,y_{oo})$, luego $y_o = y'$, $y_{oo} = y''$, y es fácil comprobar que $z_k \longrightarrow y$, luego y es punto de acumulación de $\{y_i\}$, y por lo tanto, K(M) es compacto.

<u>Lema V.4</u> :

La intersección de dos facetas de un n-simplex ($n \geq 2$) es una (n-2)-cara.

Sea $M = \{x_o;x_1;\ldots;x_n\}$ independiente, $F_i = K(M - \{x_i\})$, $J = F_o \cap F_1$, $H = K(M - \{x_o;x_1\})$. J es convexo por II.9, y es claro que $J \supset H$. Supongamos que existe $t \in J - H$. Por IV.9 existe $t' \in H$ tal que $x_o t t'$. Pero $\{t;t'\} \subset F_o$, luego $x_o \in af\ F_1 = af\ (M - \{x_o\})$, lo que contradice la independencia de M. Por lo tanto será $J = H$, q.e.d.

Si $M = \{x_o;x_1;\ldots;x_n\}$ es un conjunto independiente, llamaremos <u>células faciales</u> del n-simplex K(M) a las (n-1)-células de la forma $Z(M - \{x_i\})$.

<u>Corolario V.5</u> :

Las células faciales de un n-simplex ($n \geq 2$) son disjuntas dos a dos.

Inmediato a partir de V.4.

<u>Lema V.6</u> :

Las n-células ($n \geq 1$) son convexos no vacíos.

Demostraremos el lema por inducción sobre n. Si n = 1, sea $M = \{x_o;x_1\}$, $Z(M) = B(x_o,x_1) \neq \emptyset$. Supongamos demostrado el lema para $n = k - 1$. Sea $M = \{x_o;x_1;\ldots;x_k\}$ un conjunto independiente, $F_i = K(M - x_i)$ $(i = 0, 1, \ldots, k)$, $K' = K(M) - (F_o \cup \{x_o\})$. Claramente es $Z(M) \subset K'$. Sea $p: K' \longrightarrow F_o$ la aplicación usada en V.3, que "proyecta" K' en F_o. Esta función es claramente suryectiva. Además, si $y \in F_i$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$ $p(y) \in F_i \cap F_o = K(M - \{x_o; x_i\})$, y recíprocamente. Luego $x \in Z(M)$ sii $p(x) \in Z(M - \{x_o\})$. Pero por la hipótesis inductiva, la célula facial $Z(M - \{x_o\})$, que es una (k-1)-célula, es no vacía. Luego $Z(M) = p^{-1}(Z(M - \{x_o\})) \neq \emptyset$. Finalmente, sea $\{a;b\} \subset Z(M)$, $c \in B(a,b)$. Entonces $\{p(a);p(b)\} \subset Z(M - \{x_o\})$, y por la convexidad de las (k-1)-células, $p(c) \in B(p(a),p(b)) \subset Z(M - \{x_o\})$. Luego $c \in Z(M)$, que será convexo, q.e.d.

<u>Lema V.7</u> :

Sea M un conjunto independiente y finito, F_o una faceta de $K(M)$, $a \in F_o$, $b \in K(M) - F_o$, entonces $B(a,b) \subset Z(M)$.

Nuevamente usamos inducción sobre el número de elementos de M. Si M es un par, el lema es inmediato. Supongamos válido para n-uplas y sea $M = \{x_o; x_1; \ldots; x_n\}$. Para aplicar la hipótesis inductiva usaremos la función p que "proyecta" el n-simplex sobre una de sus facetas. Pero para asegurar que esta aplicación respete la "facialidad" (es decir, la propiedad de pertenecer a una faceta) es esencial que el par $\{a;b\}$ sea disjunto con la célula facial correspondiente a la faceta imagen de p. Pero como $n \geq 2$, descartando F_o siempre quedan n células faciales, que por V.5 son disjuntas dos a dos. Luego existe $x_i \in M$ tal que $b \notin Z(M - \{x_i\})$. Entonces, si $K' = K(M) - (F_i \cup \{x_i\})$ la función $p : K' \longrightarrow F_i$ respetará la"facialidad" de los puntos de $B(a,b)$, y por la hipótesis inductiva $p(B(a,b)) = B(p(a),p(b)) \subset Z(M - \{x_i\})$. Razonando como en V.6, $B(a,b) \subset Z(M)$, q.e.d.

<u>Corolario V.8</u> :

Si M es como en V.7 , $\{a;b\} \subset K(M)$ y además $B(a,b) \cap Z(M) \neq \emptyset$, entonces $B(a,b) \subset Z(M)$.

Si $\{a;b\} \subset Z(M)$ el corolario es inmediato por V.6. En cambio, si al menos uno de estos puntos está en $F(M)$, sea $t \in B(a,b) \cap Z(M)$. Entpnces, por la propiedad "2-3" es $B(a,b) = B(a,t) \cup \{t\} \cup B(t,b)$. Si $a \in F(M)$, $B(a,t) \subset Z(M)$ por V.7. Si $a \in Z(M)$, $B(a,t) \subset Z(M)$ por V.6. Análogamente $B(t,b) \subset Z(M)$.

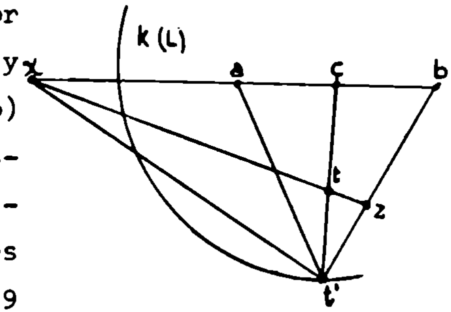
<u>Lema V.9</u> :

Sea L un conjunto independiente y finito, $x \in \mathrm{af}\, L$, $t \in Z(L)$, $x \neq t$. Entonces existe $\{t_1;t_2\} \subset F(L)$ tales que $t_1 t t_2$, y los triples $\{t;t_1;x\}$ y $\{t;t_2;x\}$ son lineales.

La demostración será por inducción sobre el número de elementos de L. Si card $L = 2$ es inmediato, ya que en este caso $F(L) = L$. Supongamos demostrado para n-uplas. Sea $L = \{x_0;x_1;\ldots;x_n\}$ un conjunto independiente. Consideraremos dos casos.

Caso 1: <u>x $K(L)$</u>. Sea $S = K(L)$ af $\{x;t\}$. Por II.9 S es convexo, por V.3 es compacto, y ya que contiene al menos dos puntos, será de tipo 1. Entonces, por la segunda parte de V.1, tiene exactamente dos puntos terminales t_1 y t_2 . Como $K(L)$ tiene n+1 facetas, por V.5 existe $x_i \in L$ tal que la célula facial $Z(L - \{x_i\})$ es disjunta con $\{t_1;t_2\}$. Definiendo como en V.6 $p: K' \longrightarrow F_i$ donde $K' = K(L) - (F_i \cup \{x_i\})$ y $F_i = K(L - \{x_i\})$, resulta que $S \subset K'$ y $\{p(t_1), p(t_2)\}$ son puntos terminales de $p(S)$. Por la hipótesis inductiva $\{p(t_1);p(t_2)\} \subset F(L - \{x_i\})$. Luego, recordando que en estas condiciones p conserva la facialidad, $\{t_1;t_2\} \subset F(L)$, q.e.d.

Caso 2: $\underline{x \notin K(L)}$. Podremos usar el mismo argumento del caso 1, si demostramos que S contiene al menos dos puntos distintos. Como $x \in$ af L, existe $\{a;b\} \subset K(L)$ tal que el triple $\{a;b;x\}$ es lineal. Si $\{a;b;t\}$ es lineal no queda nada por demostrar. Supongamos que no lo sea, y sea por ejemplo bax. Sea $c \in B(a,b)$ Aplicando el caso 1 al par $\{c;t\}$ existe $t' \in F(L)$ tal que ctt'. Consideremos ahora el triple $T = \{x;b;t'\}$ que es independiente por construcción. Por IV.9 $K(T) = B(x,\bar{B}(b,t'))$ y como $t \in Z(T)$ existe $z \in B(b,t')$ tal que xtz. Por la convexidad de K(L) es $z \in K(L)$. Luego es $\{t;z\} \subset S$, q.e.d.



<u>Proposición V.10</u> :

(E,d) es de tipo n sii contiene una (n+1)-upla independiente.

Sea $M = \{x_o;x_1;\ldots;x_n\}$ independiente y contenido en E, y sea $y \in E - K(M)$. Trataremos de probar que existe una (n+1)-upla independiente $M' \subset E$ tal que $y \in K(M')$. Sea $M_i = M - \{x_i\}$, $F_i = K(M_i)$ para $i = 0, 1, \ldots, n$. Supongamos que $y \in (\text{af } M_i) \cap (\text{af } M_j)$, $i \neq j$. Entonces existe $\{t_i;z_i\} \subset F_i$, $\{t_j;z_j\} \subset F_j$ tales que los triples $\{y;t_i;z_i\}$ y $\{y;t_j;z_j\}$ son lineales. Más aún, por V.9 podemos elegir $\{t_i;z_i\} \subset F(M_i)$, $\{t_j;z_j\} \subset F(M_j)$. Afirmamos que en estas condiciones $\{t_i;t_j;z_i;z_j\} \subset F_i \cap F_j = K(M - \{x_i;x_j\})$. En efecto, si no fuera así, aplicando convenientemente la propiedad "2-3" tendríamos un triple lineal constituído por puntos pertenecientes a tres distintas (n-2)-caras de K(M), y entonces, razonando como en V.4, resultaría que M no es independiente. Luego $y \in \text{af}(M-\{x_i;x_j\})$ Iterando este argumento n veces, si $y \in \text{af } M_k$ para $k = 0, 1, \ldots, n-1$

resulta que $y \in af(M - \{x_o;x_1;\ldots;x_{n-1}\}) = af(\{x_n\}) = \{x_n\}$, es decir $y = x_n \in K(M)$, contradicción. Entonces existen al menos dos facetas F_j y F_k tales que $y \notin af\ F_j$, $y \notin af\ F_k$. Eligiendo la primera de ellas, esto equivale a afirmar que $M' = M_j \cup \{y\}$ es un conjunto independiente que consta de n+1 puntos. Es claro que $y \in K(M')$, q.e.d.

Lema V.11 :

Sea M una n-upla independiente, $x \in E$ tal que $d(x,K(M)) < d(x,F(M))$. Entonces se verifica una y solo una de las siguientes alternativas :

(i) $x \in Z(M)$ (ii) $x \notin af\ M$

Es claro que vale una y solo una de las siguientes alternativas:
(i) $x \in K(M)$: Entonces $d(x,K(M)) = 0$, luego $x \in Z(M)$.
(ii) $x \notin K(M)$: Por IV.10 y V.3 existe un único $x' \in K(M)$ tal que realiza la mínima distancia de x a K(M). Por hipótesis $x' \in Z(M)$. Supongamos que $x \in af\ M$. Entonces estamos en la situación del lema V.9, luego existe $\{t_1;t_2\} \subset F(M)$ tales que $t_1x't_2$, y los triples $\{x;x';t_1\}$ y $\{x;x';t_2\}$ son lineales. Entonces xt_1x', o bien xt_2x'. Entonces $d(x,t_1) > d(x,x')$, o bien $d(x,t_2) < d(x,x')$, y en cualquiera de los dos casos se contradice la elección de x'. Por lo tanto, será $x \notin af\ M$, q.e.d.

La proposición que veremos a continuación, tal vez la más importante de este capítulo, sirve de conexión entre la estructura seudolineal de (E,d) y su estructura topológica, y a su vez nos servirá para esclarecer la relación entre el tipo de un espacio de Blumenthal y su dimensión topológica.

Proposición V.12 :

Las n-células son abiertas sii (E,d) es de tipo n.

Supongamos que (E,d) sea de tipo n. Sea Z(M) una n-célula y x un punto arbitrario de Z(M). Usando la notación del lema precedente $F(M) = \bigcup_{i=0}^{n} F_i$ y como cada F_i es un (n-1)-simplex, luego compacto por V.3, F(M) es compacto. Como $x \notin F(M)$, $\rho_x = d(x,F(M)) > 0$. Supongamos que $x \notin \text{int } Z(M)$. Sea entonces $\{y_i\}_{i=1}^{\infty}$ una sucesión contenida en el complemento de Z(M), y que converge a x. Entonces existirá $n \in \mathbb{N}$ tal que $d(y_n,x) < \frac{1}{2}\rho_x$. Es claro que $y_n \notin F(M)$.

$$d(y_n,F(M)) \geq d(x,F(M)) - d(y_n,x) > \tfrac{1}{2}\rho_x > d(y_n,x) \geq$$
$$\geq d(y_n,K(M))$$

Estamos entonces en la situación de V.11, luego como $y_n \notin K(M)$, será $y_n \notin$ af M. Entonces la (n+2)-upla $M' = M \cup \{y_n\}$ sería independiente, y por V.10, resultaría que (E,d) es de tipo $\geq n + 1$, contradicción. Luego $x \in \text{int } Z(M)$, es decir que Z(M) es abierto.
Recíprocamente, supongamos que (E,d) fuera de tipo distinto a n. Si tipo (E,d) < n, no existen n-siplex, y por ende no hay n-células. En cambio, si tipo (E,d) > n y Z(M) es una n-célula, existe $t \notin$ af M. Sea $x \in Z(M)$ (tal x existe por V.6) y sea $x_n \in B(x,t)$ tal que $d(x_n,x) = 1/n$. Obviamente, $x_n \notin$ af M, y a fortiori, $x_n \notin K(M)$. Pero $x_n \longrightarrow x$, luego $x \notin \text{int } Z(M)$. Z(M) no es abierto.

<u>Corolario V.13</u> :

Si (E,d) es de tipo n y K(M) es un n-simplex, $Z(M) \subset \text{int } K(M)$ y $F(M) \supset \text{front } K(M)$.

Inmediato de V.12 y V.3.

VI - CAPSULA AFIN.

En este capítulo supondremos que (E,d) es M-convexo, completo y de Blumenthal.

Diremos que M es un conjunto afín si para todo par $\{a;b\} \subset M$ se verifica $\overleftrightarrow{a\,b} \subset M$.

Lema VI.1 :

La intersección de una familia de conjuntos afines es afín.

Sea $\{M_\lambda\}_{\lambda \in L}$ tal que $\forall \lambda \in L$ M_λ sea afín, y sea $M = \bigcap_{\lambda \in L} M_\lambda$.

Si $\{a;b\} \subset M$, entonces $\forall \lambda \in L$ $\{a;b\} \subset M$, luego $\forall \lambda \in L$ $\overleftrightarrow{a\,b} \subset M_\lambda$ y por lo tanto $\overleftrightarrow{a\,b} \subset M$.

Lema VI.2 :

La unión de una sucesión creciente de conjuntos afines es afín.

Sea $\{M_i\}_{i=1}^{\infty}$ tal que

(i) $\forall n \in \mathbb{N}$ es M_n un conjunto afín.

(ii) $\forall n \in \mathbb{N}$ vale $M_n \subset M_{n+1}$.

Sea $M = \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n$ y sea $\{a;b\} \subset M$. Entonces $a \in M_k$, $b \in M_j$.

Llamemos $n = \sup \{k;j\}$. Por (ii) será $\{a;b\} \subset M_n$, luego $\overleftrightarrow{ab} \subset M_n \subset M$, q.e.d.

<u>Lema VI.3</u> :

Si M tiene más de un punto y $\{x;y\} \subset$ af M, entonces existe $\{v;x';y'\} \subset K(M)$ tal que $vx'x$ y $vy'y$.

Por definición de cápsula afín existe $P = \{x_1;x_2;y_1;y_2\} \subset K(M)$ tal que $\{x;x_1;x_2\}$ y $\{y;y_1;y_2\}$ son lineales. Sea $K = K(P)$. Es claro que $K \subset K(M)$. Se presentan tres casos posibles :

<u>Tipo $K = 1$</u>: Aplicando convenientemente la propiedad "2-3" resulta que todos los triples de la 6-upla $\{x;x_1;x_2;y_1;y_2;y\}$ son lineales, y entonces el lema es inmediato.

<u>Tipo $K = 2$</u>: Sea $T \subset K$ un triple independiente, y $v \in Z(T)$. Por V.9 existe $\{x';y'\} \subset F(T) \subset K$ tal que $vx'x$ y $vy'y$.

<u>Tipo $K = 3$:</u> Entonces P es independiente. Sea $v \in Z(P)$ (tal punto existe por V.6). Nuevamente aplicando el lema V.9 resulta que existe $\{x';y'\} \subset F(P) \subset K \subset K(M)$ tal que $vx'x$ y $vy'y$.

En la proposición siguiente veremos que la cápsula afín tiene un comportamiento similar al de la cápsula convexa estudiado en el capítulo III. En particular es importante verificar que la cápsula afín de cualquier conjunto es afín. Observemos que, a diferencia de la proposición III.1 sobre cápsula convexa, los resultados que siguen dependen esencialmente de la teoría del n-simplex que construímos en el capítulo anterior, y por lo tanto necesitan de la propiedad de Blumenthal. Sería interesante, aunque aparentemente difícil, desarrollar una teoría satisfactoria de cojuntos afines sin esta restricción, o con restricciones más débiles, la propiedad "2-3" por ejemplo. Sin embargo, las actuales hipótesis son satisfactorias para las necesidades del presente trabajo.

Proposición VI.4 :

(i) $A \supset B \Longrightarrow \text{af } A \supset \text{af} B$.

(ii) $\text{af } A \supset K(A) \supset A$.

(iii) af A es un conjunto afín.

(iv) $\text{af } A = A \Longleftrightarrow A$ es afín.

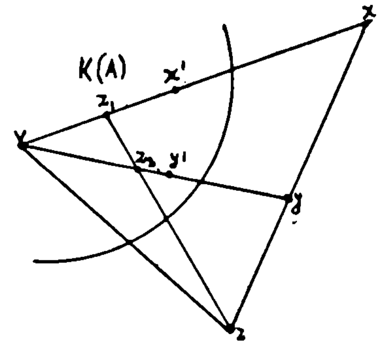
(v) M afín y $M \supset A \Longrightarrow M \supset \text{af } A$.

(vi) af A es la intersección de todos los conjuntos afines que contienen a A.

Todos estos enunciados se verifican en forma trivial o vacía cuando A es vacío o consta de un solo punto.Podemos suponer entonces que A tiene al menos dos puntos.

(i) Resulta inmediatamente, ya que por III.1 (i) es $K(A) \supset K(B)$.

(ii) Trivial, ya que $K(A) \supset A$ (III.1 (ii)) y $\overleftrightarrow{a\,b} \supset \{a;b\}$.



(iii)Sea $\{x;y\} \subset \text{af } A$, $z \in \overleftrightarrow{x\,y}$. Para fijar ideas, supongamos que vale xyz (las otras dos alternativas, xzy ó zxy , se tratan en forma totalmente análoga).Por VI.3 existe $\{v;x';y'\} \subset K(A)$ tales que vx'x y vy'y. Consideremos el triple $T = \{v;x;z\}$. $K(T) = B(z,\bar{B}(v,x))$ por IV.9. Entonces podemos definir una aplicación $p\colon \bar{B}(v,y) \longrightarrow \bar{B}(v,x)$ que a cada $t \in B(v,y)$ asocia el (único) punto $p(t) \in B(v,x)$ tal que ztp(t). Es inmediato que p es una aplicación biyectiva. Entonces existe $z_2 \in B(v,y')$ tal que $z_1 = p(z_2)$ esté en $B(v,x')$, y por construcción $\{z_1;z_2\} \subset K(A)$ y $z \in \overleftrightarrow{z_1\,z_2}$, luego $z \in \text{af } A$, q.e.d.

(iv) La implicación en un sentido resulta de (iii). Supongamos entonces que A es afín. En particular A es convexo, luego por III.1 (iv) será $K(A) = A$. Entonces $\text{af } A = \bigcup_{\{x;y\} \subset A} \overleftrightarrow{x\,y} = A$.

(v) Por (iv) y (i) es $M = \text{af } M \supset \text{af } A$.

(vi) Sea B la intersección de todos los conjuntos afines que contienen a A. Por VI.1 B es afín y $B \supset A$, luego por (v) $B \supset af\ A$. Por otra parte, por (iii) af A es afín y por (ii) $af\ A \supset A$, luego $af\ A \supset B$.

<u>Proposición VI.5</u> :

Sea A un subconjunto no vacío de E. Existe un conjunto independiente $M \subset A$ tal que af M = af A.

Consideremos la familia $\mathcal{J}_A$ de todos los subconjuntos independientes de A, parcialmente ordenada por inclusión. Es claro que toda subfamilia linealmente ordenada de $\mathcal{J}_A$ admite supremo (la unión de los elementos de la subfamilia). Entonces, por el lema de Zorn existe al menos un conjunto maximal $M \in \mathcal{J}_A$. Es inmediato (VI.4 (i)) que $af\ M \subset af\ A$. Supongamos que exista $x \in af\ A - af\ M$. Por definición de af A, existe $\{y;z\} \subset K(A)$ tales que $\{y;z;x\}$ es lineal. Al menos uno de estos dos puntos no pertenece a af M, ya que si ambos pertenecieran implicaría (VI.4 (iii)) que x af M Sea por ejemplo $y \in K(A) - af\ M$. Por definición de K(A) existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $y \in C^n(A)$. Luego existe $\{y_1;z_1\} \subset C^{n-1}(A)$ tales que $y \in B(y_1,z_1)$. Por la misma razón que antes, al menos uno de estos puntos no pertenece a af M. Supongamos por ejemplo que $y_1 \in C^{n-1}(A) - af\ M$. Iterando el mismo argumento n veces, tendremos finalmente que existe $y_n \in C^o(A) - af\ M = A - af\ M$. Entonces el conjunto $M' = M \cup \{y_n\} \in \mathcal{J}_A$, en contradicción con la maximalidad de M. Entonces af A = af M .

Diremos que la bola $U_{x,r}$ es <u>redonda</u> si para todo $y \in E$, $y \neq x$ vale diam $(\overleftrightarrow{x\,y} \cap U_{x,r}) = 2\,r$. Diremos que el espacio (E,d) es <u>espeso</u> si existe al menos una bola redonda contenida en E. Diremos que el conjunto convexo $M \subset E$ es <u>espeso</u> si existe $x \in M$, $r > 0$, tal que la bola relativa $U' = U_{x,r} \cap M$ sea (relativamente) reɔonda, es decir que $\forall\, y \in M$, $y \neq x$, sea diam $(\overleftrightarrow{x\,y} \cap U') = 2\,r$.

Proposición VI.6 :

Si M es convexo, compacto y espeso, af M es cerrado.

Sea $\{x_n\}_{n\geq 1}^{\infty}$ una sucesión de Cauchy en af M. Por la completitud del espacio total, existe $x \in E$ tal que $x_n \longrightarrow x$. Trataremos de mostrar que $x \in$ af M. Sea $I = \{n \in \mathbb{N}\ ;\ x_n \in M$. Hay dos casos :

so 1, I es infinito: Sea $\{x_{n_i}\}$ la subsucesión contenida en M. ˋ compacidad existe un punto de acumulación x_o de $\{x_{n_i}\}$ con- ido en M. Pero como esta subsucesión también converge a x, á $x_o = x$.

o 2, I es finito o vacío: Sin restricción de generalidad, omi- ndo a lo más un número finito de términos, podemos suponer que $\subset$ af M - M. Sea $y \in M$ el centro de una bola relativamente re- da contenida en M, cuyo radio sea $r > 0$. $\forall\, n \in \mathbb{N}$ $S_n = \overline{y\,x_n} \cap M$ un conjunto convexo, compacto y de tipo 1. Por V.1, S_n tiene ɔtamente dos puntos terminales, y es claro que y es uno de ɔs. Designemos con y_n al otro punto terminal. Por lo que he- dicho, la aplicación $x_n \longrightarrow y_n$ está bien definida, y es una racción, va que aplicando IV.4 a la 5-upla plana $\{x_n;y_n;y;y_m;x_m\}$ lta que $d(y_n,y_m) < d(x_n,x_m)$. Entonces la sucesión $\{y_n\}_{n\geq 1}^{\infty}$ es auchy y está contenida en el compacto M. Luego existe $y_o \in M$ que $y_n \longrightarrow y_o$. Es claro que existe $k \in \mathbb{R}^+$ tal que $\forall\, n$ $\mathbb{N}$ $,y) < k$. Mediante una aplicación standard de la propiedad de ɜnthal tenemos que $\forall\, n \in \mathbb{N}$ vale

$$\frac{d(y_n,y_o)}{d(x_n,\overrightarrow{y\,y_o})} \geq \frac{d(y_n,\overrightarrow{y\,y_o})}{d(x_n,\overrightarrow{y\,y_o})} > \frac{r}{k}$$

es decir que

$$d(x_n, \overrightarrow{y\,y_o}) < (k/r)\, d(y_n, y_o)$$

y este último término tiende claramente a cero con n. Finalmente

$$d(x, \overrightarrow{y\,y_o}) \leq d(x, x_n) + d(x_n, \overrightarrow{y\,y_o})$$

luego $d(x, \overrightarrow{y\,y_o}) = 0$, y como $\overrightarrow{y\,y_o}$ es un conjunto cerrado será $x \in \overrightarrow{y\,y_o} \subset \mathrm{af}\ M$, q.e.d.

<u>Corolario VI.7</u>:

Un conjunto afín de tipo finito es cerrado.

Sea A afín y tipo A = n, y sea K(M) un n-simplex contenido en A. K(M) es convexo y compacto por V.3. Veamos que es espeso. Sea $z \in Z(M)$ y $\rho_z = d(z, F(M))$. Como vimos en V.12, es $\rho_z > 0$. Es rutinario verificar, usando V.9, que la bola relativa $U' = U_{z,\rho_z} \cap A$ es relativamente redonda. Como es claro que A = af K(M) estamos en las hipótesis de VI.6.

VII - PUNTOS INTERNALES. TEOREMA DE RIESZ.

En este capítulo supondremos que (E,d) es M-convexo.

Diremos que el punto $x \in E$ es internal si $\forall\, y \in E$, $y \neq x$, existe z tal que yxz. El conjunto A es internal si $\forall\, x \in A$, x es internal.

Proposición VII.1:

Si (E,d) es completo, de Blumenthal y de tipo n, las afirmaciones siguientes son equivalentes :

(i) x es internal.

(ii) Existe una n-célula Z(M) que contiene a x.

(i) $\Longrightarrow$ (ii): Por ser (E,d) de tipo n, existe una (n+1)-upla independiente M' tal que $x \in K(M')$. Si $x \in Z(M')$ no queda nada por demostrar. Si $x \in F(M')$, sea L el más pequeño subconjunto de M' tal que $x \in K(L)$. Si L tiene más de un punto, obviamente será $x \in Z(L)$. Sea $y \in L$. Entonces es fácil verificar que $L' = (L - \{y\}) \cup x$ es independiente, y como es claro que af L' = af L, resulta que $M'' = (M' - \{y\}) \cup \{x\}$ también es independiente. Luego x es vértice del n-simplex K(M"). Por V.6 existe $z \in Z(M'' - \{x\})$, y puesto que x es internal existe t tal que zxt. Llamemos $M = (M'' - \{x\}) \cup \{t\}$. Es rutinario verificar que M es independiente y que $x \in Z(M)$.

(ii) $\longrightarrow$ (i): Si $x \in Z(M)$ y $t \neq x$, como es claro que $t \in af\, M$, por V.9 existirá $t' \in F(M)$ tal que txt'. Luego x es internal.

En adelante notaremos con $I(E)$ al conjunto de todos los puntos internales de (E,d).

<u>Lema VII.2</u> :

Sea (E,d) completo y de Blumenthal, $x \in I(E)$, $t \neq x$. Entonces $B(x,t) \subset I(E)$.

Sea $y \in B(x,t)$, z un punto arbitrario de E. Si $z \in \overleftrightarrow{xt}$ no hay nada que demostrar. Supongamos entonces que $z \notin \overleftrightarrow{xt}$. Como x es internal existe x' tal que zxx', es claro que $x' \notin \overleftrightarrow{xt}$. Entonces $y \notin B(t,x')$ ya que en caso contrario, por la propiedad "2-3" el triple $\{x;t;x'\}$ sería lineal. Entonces, si llamamos $P = \bar{B}(t,x')$ y $P' = P \cup \{z\}$, aplicando IV.9 es $K(P') = B(z,P)$. Luego, como $y \in K(P')$, $y \notin P$, existe $y' \in B(t,x')$ tal que zyy'. Como z era un punto arbitrario, resulta que y es internal, q.e.d.

<u>Corolario VII.3</u> :

Sea (E,d) completo y de Blumenthal. Si $I(E)$ es no vacío, es convexo y denso.

La convexidad de $I(E)$ es inmediata de VII.2. Veamos la densidad. Sea $x \in E$, $y \in I(E)$. $\forall\, n \in \mathbb{N}$ sea $y_n \in B(x,y)$ tal que $d(x,y_n) = 1/n$. Por VII.2 la sucesión $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ está contenida en $I(E)$, y es claro que $y_n \longrightarrow x$. Como x era un punto arbitrario, $I(E)$ es denso.

<u>Corolario VII.4</u> :

Si (E,d) es de Blumenthal y completo, y A es un conjunto internal, $K(A)$ también lo es.

Por VII.3 $I(E)$ es convexo, y $A \subset I(E)$, luego por III.1 (v) vale $K(A) \subset I(E)$.

<u>Corolario VII.5</u> :

Si (E,d) es completo, de Blumenthal y de tipo n, $I(E)$ es convexo, abierto y denso.

Sea $x \in I(E)$. Por VII.1 existe una n-célula $Z(M)$ tal que $x \in Z(M) \subset I(E)$. Por V.12, $Z(M)$ es abierta, luego $x \in \text{int}\,(I(E))$. Es decir que $I(E)$ es abierto.

Nuestro objetivo inmediato es demostrar la equivalencia para espacios M-convexos, completos y de Blumenthal, entrelas nociones de "tipo n" y de "dimensión topológica n" según Menger-Urysohn. Esta definición de tipo inductivo se enuncia así:

(i) El espacio vacío tiene dimensión - 1.

(ii) (E,d) tiene dimensión n si para cada $x \in E$, existen entornos arbitrariamente pequeños de x cuyas fronteras tengan dimensión menor que n.

Usaremos como texto de referencia en este tema el clásico tratado [16] . En nuestro teorema emplearemos los siguientes resùltados bien conocidos :

<u>Lema VII.6</u> :

La unión de una familia numerable de conjuntos cerrados de dimensión n tiene dimensión n.

Ver la demostración en Teorema III.2 de [16] , página 30.

<u>Lema VII.7</u> :

$\mathbb{E}^n$ tiene dimensión n.

Ver la demostración en Teorema IV.1 de [16] , página 41.

<u>Teorema VII.8</u> :

Si (E,d) es completo y de Blumenthal, los siguientes enunciados son equivalentes :

(i) (E,d) es de tipo n.

(ii) (E,d) tiene dimensión n.

(i) $\Longrightarrow$ (ii): Demostraremos la implicación por inducción. Recordando que el concepto de dimensión es topológico, es decir que se conserva por homeomorfismos, la demostración para n = 1 es inmediata por V.1 y VII.7. Supongamos demostrada la implicación para $n = k - 1$. Sea (E,d) un espacio de tipo k. Por la hipótesis inductiva y VII.6 resulta que si M es una (k+1)-upla independiente, F(M) tiene dimensión $k - 1$. Sea $x \in E$, consideraremos dos casos

Caso 1, <u>x es internal</u>. Sea $M = \{x_0;x_1;\ldots;x_k\}$ independiente, tal que $x \in Z(M)$ (tal M existe por VII.1), y sea $\rho > 0$ arbitrariamente pequeño. Sea $y_i \in \overrightarrow{x\,x_i}$ $(i = 0, 1, \ldots, k)$ tal que $d(x,y_i) = \rho$, y sea $M' = \{y_0;y_1;\ldots;y_k\}$. Es rutinario verificar que M' es independiente e internal. Entonces Z(M') es un entorno de x contenido en $U_{x,\rho}$, y por V.13 es front Z(M') = F(M') que tiene dimensión k-1, según hemos dicho. Entonces (E,d) tiene dimensión k en x.

Caso 2, <u>x no es internal</u>. Aplicando la definición de espacio de tipo n y un razonamiento usado en la primera parte de VII.1, resulta que existe una (k+1)-upla $M = \{x;x_1;x_2;\ldots;x_k\}$ independiente. Sea $\rho > 0$, arbitrariamente pequeño, en particular sea $\rho < \inf \{d(x,x_i): i = 1, 2, \ldots, k\}$. Sea $t \in Z(M - \{x\})$, y sea $y \in B(t,x)$ tal que $d(x,y) = \rho/4$. Llamemos $V = \{z \in F: d(y,z) < \rho/2\}$ $F = \{z \in E: d(y,z) = \rho/2\}$. Es claro que V es un entorno abierto de x, $V \subset U_{x,\rho}$ y además frontV = F. Si demostramos que F tiene dimensión menor o igual a $k - 1$ la implicación está demostrada.

Para todo i de 1 a k, sea $y_i \in B(x,x_i)$ tal que $d(y,y_i) = \rho/2$. Entonces es fácil verificar que $M' = \{x;y_1;y_2;\ldots;y_k\}$ es independiente, $y \in Z(M')$. Por V.9, $\forall\, z \in F$ existe $z' \in F(M')$ tal que zz'y. Es claro que la aplicación $g : z \longrightarrow z'$ de F en F(M') es inyectiva y continua (ya que es una contracción), luego es un homeomorfismo. Además g(F) es un subconjunto cerrado de F(M') que claramente contiene a la faceta $K(M' - \{x\})$. Luego, por la hipótesis inductiva, g(F) tiene dimensión $k - 1$, y como la dimensión es invariante por homeomorfismos, también F tiene dimensión $k - 1$, q.e.d.

(ii) $\Longrightarrow$ (i): Como tanto la dimensión como el tipo de (E,d) están unívoca e inambiguamente definidos, la demostración de esta implicación se reduce de inmediato a la anterior.

Lema VII.9:

Si (E,d) es de Blumenthal y localmente compacto, las bolas son compactas.

Recordemos que un espacio topológico es localmente compacto si todo punto admite al menos un entorno compacto. Para espacios métricos esto equivale a afirmar que $\forall\, x \in E$ existe $r > 0$ tal que $U_{x,r}$ es compacta. Sea $U = U_{x,r'}$, queremos demostrar que también U es compacta. Si $r' \leq r$ no hay nada que demostrar, ya que U sería un subconjunto cerrado de un compacto, luego compacto. Sea entonces $r' > r$. Es claro que $U_{x,r}$ como subespacio de E es completo. Entonces, por V.1, $\forall\, y \neq x$, el conjunto $S_y = \overrightarrow{x\,y} \cap U_{x,r}$ es congruente a un segmento. Si definimos $f(x) = x$, y para $y \in U_{x,r'}$, $y \neq x$, $f(y)$ como el único punto de S_y tal que $d(f(y),x) = (r/r')\, d(y,x)$, la aplicación $f : U \longrightarrow U_{x,r}$ es inyectiva. Además, por la propiedad de Blumenthal, f es una contracción, es decir $d(f(y),f(z)) < d(y,z)$. Luego f es continua y también $f^{-1}: f(U) \longrightarrow U$ lo es. Es decir que U es homeomorfo a $f(U)$. Pero $f(U) \subset U_{x,r}$ es claramente compacto, luego U también lo es.

Corolario VII.10:

Si (E,d) es de Blumenthal y localmente compacto, las siguientes afirmaciones son equivalentes :

(i) M es compacto.

(ii) M es acotado y cerrado.

(i) $\Longrightarrow$ (ii): Trivial.

(ii) $\Longrightarrow$ (i): Sea $r = \operatorname{diam} M$, $x \in M$. Entonces $M \subset U_{x,r}$ que es compacto por VII.9, luego M también lo es.

Proposición VII.11: Si (E,d) es de Blumenthal y localmente compacto, es completo y separable.

Sea $S = \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de Cauchy en E y $r > 0$. Existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $\forall\, n > k$ vale $d(x_n, x_k) < r$. Entonces la subsucesión $S' = \{x_k; x_{k+1}; x_{k+2}; \ldots\}$ está contenida en $U_{x,r}$, que es compacta por VII.9. Luego existe un punto x_0 de acumulación de S', y también de S. Pero como S es de Cauchy, $x_n \longrightarrow x_0$, es decir (E,d) es completo. Sea $x \in E$, n y m dos números naturales. Por VII.9 existe un conjunto finito $A_{n,m} \subset U_{x,n}$ tal que $\forall\, y \in U_{x,n}$ existe $y' \in A_{n,m}$ tal que $d(y,y') \leq 1/m$. Entonces el conjunto numerable $A_n = \bigcup_{m=1}^{\infty} A_{n,m}$ es denso en $U_{x,n}$, y el conjunto numerable $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ es denso en $\bigcup_{n=1}^{\infty} U_{x,n} = E$. Luego (E,d) es separable.

Es bien conocido, por su importancia en el Análisis Funcional, el Teorema de Riesz que caracteriza a los espacios normados de dimensión finita mediante la compacidad local. Todas las demostraciones de este resultado hacen uso de la estructura vectorial del espacio. Como culminación de este capítulo daremos una versión métrica del teorema de Riesz, adaptada a espacios de Blumenthal, y que sólo emplea la maquinaria seudolineal que hemos desarrollado en los capítulos anteriores. Cabe anotar que esta versión del teorema de Riesz apareció por primera vez en [17] .

Diremos que z es el antipodal de x respecto de y, si y es el punto medio del par $\{z;x\}$.

Teorema VII.12:

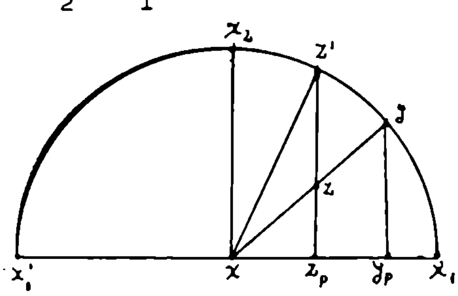
Si (E,d) es de Blumenthal, los siguientes enunciados son equivalentes :

(i) (E,d) es completo y tiene dimensión finita.

(ii) (E,d) es espeso y localmente compacto.

(i) $\longrightarrow$ (ii): Por VII.8 existe $n \in \mathbb{N}$ tal uqe (E,d) es de tipo n. Entonces, por el razonamiento usado en VI.7, (E,d) es espeso. Veamos la compacidad local. Sea $x \in I(E)$. Por VII.1 existe una célula $Z(M)$ tal que $x \in Z(M)$. Como vimos en V.12, existe $r > 0$ tal que $U_{x,r} \subset K(M)$. Pero por V.3 este conjunto es compacto, luego $U_{x,r}$ también lo es. Observemos que, aplicando el razonamiento de VII.9, toda bola con centro en un punto internal es compacta. Supongamos ahora que y no es internal. Por VII.3, $\forall\, r > 0$ existe z internal tal que $d(y,z) < r$; y por lo que acabamos de decir, $U_{z,r}$ es un entorno compacto de y. Luego (E,d) es localmente compacto.

(ii) $\Longrightarrow$ (i): Por VII.11, (E,d) es completo y separable. Supongamos que (E,d) sea de tipo infinito. Sea $U = U_{x,r}$ una bola redonda. Por VII.9 U es compacta. Sea $x_1 \in U$ tal que $d(x,x_1) = r$ y sea x_1' el antipodal de x_1 respecto de x. Llamemos $X_1 = \{x_1 ; x_1'\}$ $V_1 = \text{af } X_1 \cap U$. Es claro que $V_1 \neq U$ ya que en caso contrario sería $E = \text{af } X_1$ de tipo 1. Luego existe $x_2 \in U - V_1$ tal que $d(x_2,V_1) = \sup \{d(y,V_1) : y \in U\}$. Es claro que $d(x_2,x) = r$. Por IV.10 existe un único "pie" de x_2 en V_1 (es decir, un punto de V_1 que realiza la mínima distancia de x_2 a V_1). Afirmamos que el "pie" de x_2 en V_1 es x. En efecto, sea $y \in U$ tal que $d(y,x) = r$, y el "pie" de y en V_1 sea $y_p \neq x$. Entonces siempre es posible determinar $z \in B(x,y)$ tal que el pie de z en V_1



sea $z_p \in B(x,y_p)$. Llamando z' al punto de $\overrightarrow{z_p z}$ tal que $d(x,z') = r$, sumergiendo isométricamente en $\mathbb{E}^2$ las 4-uplas $\{y;x;y_p;x_1\}$ y $\{z';x;z_p;x_1\}$, y aplicando el teorema de Pitágoras a las imágenes, resulta que

$$d^2(z',V_1) = d^2(z',z_p) = d^2(z',x) - d^2(x,z_p) = r^2 - d^2(x,z_p) >$$
$$> r^2 - d^2(x,y_p) = d^2(y,z_p) = d^2(y,V_1)$$

Luego $y \neq x_2$, y el "pie" de x_2 en V_1 es x. Pero ahora, aplicándole el teorema de Pitágoras a la imagen congruente de $\{x_2;x_1;x;x_1'\}$ en $\mathbb{E}^2$ será

$$d(x_2,x_1) = d(x_2,x_1') = \sqrt{2}\, r$$

Sea x_2' el antipodal de x_2 respecto de x, $X_2 = X_1 \cup \{x_2;x_2'\}$; y $V_2 = \text{af } X_2 \cap U$. Nuevamente $V_2 \neq U$, ya que en caso contrario E coincidiría con af X_2 que es de tipo 2. Repitiendo el razonamiento, existe $x_3 \in U - V_2$ tal que $d(x_3,x) = r$ y se verifica

$d(x_3,x_i) = d(x_3,x_i') = \sqrt{2}\; r \quad (i = 1, 2)$. Como en cada caso $V_n \neq U$, ya que la igualdad implicaría que E coincide con af X_n, que es de tipo n, el proceso se puede iterar indefinidamente. Tendremos entonces una sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ contenida en U y tal que si $i \neq j$, $d(x_i,x_j) = \sqrt{2}\; r$. Es claro que tal sucesión carece de puntos de acumulación, lo que contradice la compacidad de U. Luego existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $U = V_n$, es decir $E = \text{af } X_n$ que es de tipo n. Finalmente, por VII.8, (E,d) tendrá dimensión n.

Ejemplo VII.13:

Espacio de Blumenthal localmente compacto pero de dimensión infinita.

Sea H el espacio de Hilbert de todas las sucesiones reales $\bar{x} =$

$= \{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ tales que $\sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 < \infty$, y sea $d(\bar{x},\bar{y}) = (\sum_{i=1}^{\infty} (x_i-y_i)^2)^{\frac{1}{2}}$. Es fácil ver que (H,d) es completo, de Blumenthal y de tipo infinito. Sea $E = \{ \bar{x} \in H : \forall\, n \in \mathbb{N}\ |x_n| \leq 1/n \}$. Por el bien conocido teorema de Tijonov, E es compacto. Luego (E,d) es de Blumenthal y localmente compacto. Pero como H = af E, resulta que (E,d) es de tipo infinito, luego de dimensión infinita. Observemos que (E,d) no es espeso.

VIII - PRIMER TEOREMA FUNDAMENTAL .

Sea $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$, diremos que f es una funcional afín en E si para cada triple $\{x;y;z\} \subset E$, tal que xyz, vale

$$d(x,z)\, f(y) = d(y,z)\, f(x) + d(x,y)\, f(z) \qquad (*)$$

Lema VIII.1 :

Sea (E,d) completo, M-convexo y de Blumenthal, f una funcional afín en E, $A \subset E$. Entonces los valores de f en A determinan los valores de f en af A, y sólo esos valores.

(i) $f(A)$ determina $f(C(A))$: Sea $x \in C(A)$, existe $\{b;c\} \subset A$ tal que bxc. Entonces $f(x) = (d(b,c))^{-1} \left[d(b,x)\, f(c) + d(x,c)\, f(b)\right]$.

(ii) $f(A)$ determina $f(K(A))$: Iterando el argumento de (i) resulta que $\forall\, n \quad \mathbb{N}$ $f(A)$ determinará $f(C^n(A))$, luego también determinará $f(K(A)) = \bigcup_{n=1}^{\infty} f(C^n(A))$.

(iii) $f(K(A))$ determina $f(\text{af } A)$: Sea $t \in \text{af } A$, existe $\{t_1;t_2\} \subset K(A)$ tal que $\{t;t_1;t_2\}$ sea lineal. Para fijar ideas supongamos que t_1t_2t. Entonces $f(t) = (d(t_1,t_2))^{-1} \left[d(t_1,t)f(t_2) - d(t_2,t)f(t_1)\right]$

(iv) Si $x \notin \text{af } A$, $f(x)$ no está determinado for $f(A)$: Si T es un triple lineal que contiene a x, $T \cap \text{af } A$ consta, a lo más,de un punto. Entonces, si sólo conocemos $f(\text{af } A)$, la ecuación $(*)$ tendrá dos incógnitas, y no podremos despejar el valor de $f(x)$.

En los dos siguientes corolarios suponemos que (E,d) es como en VIII.1.

Corolario VIII.2 :

Si J es un conjunto independiente y $\{\alpha_j\}_{j\in J}$ es un conjunto arbitrario de números reales en correspondencia biunívoca con J, existe una funcional afín f tal que $\forall\, j \in J$, $f(j) = \alpha_j$.

En efecto, por definición de conjunto independiente, $\forall\, j \in J$ es $j \notin$ af $(J - \{j\})$. Luego, por la segunda parte de VIII.1, $\forall\, j \in J$, f(j) no está determinado por f(af (J - $\{j\}$) y puede asumir cualquier valor real.

Corolario VIII.3 :

La familia de funcionales afines de E separa puntos.

En efecto, si $\{x;y\} \subset E$, $x \neq y$, $\{x;y\}$ es independiente, y por VIII.2 existe una funcional afín f tal que $f(x) = 1$, $f(y) = 0$.

Si f y g son funciones definidas en un conjunto M y a valores reales, podemos definir entre ellas, en forma natural, operaciones correspondientes a las operaciones entre números reales. Por ejemplo, llamaremos suma puntual de f y g, a la función $f+g : M \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$; producto puntual de f y g, a la función $f.g : M \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $(f.g)(x) = f(x).g(x)$. En particular, si $\alpha \in \mathbb{R}$ llamaremos producto puntual de α por f a la función αf tal que $(\alpha f)(x) = \alpha . f(x)$.

Proposición VIII.4 :

Sea (E,d) un espacio M-convexo, completo, de Blumenthal y de tipo n, $x_0 \in E$ y A(E) la familia de todas las funcionales afines en E que se anulan en x_0 . Entonces A(E) con las operaciones puntuales es isomorfo a $\mathbb{R}^n$.

Si $\{f;g\} \subset A(E)$, $\alpha \in \mathbb{R}$, queremos verificar que α f y f+g también pertenecen a A(E). Veamos que son funcionales afines, sea $\{x;y;z\}$ tal que xyz, entonces

$$d(x,z)(\alpha.f)(y) = \alpha(d(x,z)f(y)) = \alpha[d(y,z)f(x)+d(x,y)f(z)] =$$
$$= d(y,z)(\alpha f)(x) + d(x,y)(\alpha f)(z)$$

$$d(x,z)(f+g)(y) = d(x,z)f(y) + d(x,z)g(y) =$$
$$= [d(y,z)f(x) + d(x,y)f(z)] + [d(y,z)g(x) + d(x,y)g(z)] =$$
$$= d(y,z)\ [f(x) + g(x)] + d(x,y)\ [f(z) + g(z)] =$$
$$= d(y,z)\ (f+g)(x) + d(x,y)\ (f+g)(z)$$

Además ambas funcionales se anulan en x_o , ya que

$$(\alpha f)(x_o) = \alpha .f(x_o) = \alpha .0 = 0$$
$$(f+g)(x_o) = f(x_o) + g(x_o) = 0 + 0 = 0$$

Es rutinario verificar que A(E) dotado de esas operaciones es un espacio vectorial sobre el cuerpo de los reales.
Sea $M = \{x_o;x_1;\dots;x_n\}$ una (n+1)-upla independiente que contiene a x_o . Como (E,d) es de tipo n, af M = E. Por lo tanto un elemento cualquiera $f \in A(E)$ queda perfectamente definido si conocemos los valores de f(M), según vimos en VIII.1. Más aún, por VIII.2, si fijamos n números reales arbitrarios $\{\alpha_i\}_{i=1}^{n}$ existe $f \in A(E)$ tal que $\forall$ i , $f(x_i) = \alpha_i$ (Recordemos que por definición de A(E), $f(x_o) = 0 \ \forall \ f \in A(E)$). Entonces, para todo i de 1 a n, definimos $f_i \in A(E)$ tal que $f_i(x_i) = 1$; $f_i(x_j) = 0$ si $i \neq j$.
Es trivial verificar que la familia $\{f_i\}_{i=1}^{n}$ es una base de A(E), luego A(E) tiene dimensión (algebraica) n.

<u>Teorema VIII.5</u>:

Si (E,d) es M-convexo, completo, de Blumenthal y de tipo n, entonces $E \cong \mathbb{E}^n$.

Sea $x_o \in I(E)$, $A(E) = \{f : f \text{ func. afín en } E,\ f(x_o) = 0\}$. Desig-

naremos con E' al dual algebraico del espacio vectorial A(E). Es claro que E' también es isomorfo, como espacio vectorial, a $\mathbb{R}^n$. Sea $\pounds : E \longrightarrow E'$ la aplicación que a cada $x \in E$ asocia el elemento $\pounds(x) = x'$ definido por $x'(f) = f(x)$ $\forall f \in A(E)$. Es decir que x' es la transformación lineal de A(E) en $\mathbb{R}$ definida como "evaluación en x" de los elementos de A(E). Observemos que VIII.3 nos asegura que £ es inyectiva, ya que si $x \neq y$, existe $f \in A(E)$ tal que $f(x) \neq f(y)$, y por lo tanto $x'(f) \neq y'(f)$, luego $x' \neq y'$.
En lo que sigue trataremos de dotar a E' de una métrica d' tal que se verifiquen las siguientes condiciones :
a.- (E',d') es isomorfo a $\mathbb{E}^n$ como espacio vectorial métrico.
b.- £ es una isometría de (E,d) en (E',d').
Si $P \subset E'$ notaremos con convP a la cápsula convexa lineal de P.
Si $\{a';b'\} \subset E'$, notaremos con (a',b') al segmento lineal abierto de extremos a y b.
(i) <u>Si $x'=\pounds(x)$ $y'=\pounds(y)$, $\pounds(B(x,y)) = (x',y')$</u> : Sea $t \in B(x,y)$, entonces existe $\{\alpha;\beta\} \subset \mathbb{R}$, $\alpha > \beta > 0$ tales que $d(x,y) = \alpha$, $d(x,t) = \beta$ $d(t,y) = \alpha - \beta$. Luego $\forall f \in A(E)$ vale $\alpha f(t) = \beta f(y) + (\alpha-\beta)f(x)$ o lo que es lo mismo, $\forall f \in A(E)$ se verifica

$$t'(f) = \frac{\beta}{\alpha}y'(f) + \frac{\alpha-\beta}{\alpha}x'(f)$$

es decir que $t' \in (x',y')$. Luego $\pounds(B(x,y)) \subset (x',y')$. La inclusión inversa se obtiene de la misma forma.
(ii) <u>A es convexo sii £(A) es (linealmente) convexo</u>. Supongamos que A sea convexo, entonces, si $\{a';b'\} \subset \pounds(A)$, $\{a;b\} \subset A$, luego $B(a,b) \subset A$ y por (i) será $(a',b') = \pounds(B(a,b)) \subset \pounds(A)$, luego £(A) es linealmente convexo. Recíprocamente, sea £(A) convexo, $\{a;b\} \subset A$, $a' = \pounds(a)$, $b' = \pounds(b)$. Es claro que $(a',b') \subset \pounds(A)$. Entonces $B(a,b) = \pounds^{-1}((a',b')) \subset \pounds^{-1}(\pounds(A)) = A$. Luego A es convexo.
(iii) <u>Si $M \subset E$, $\mathrm{conv}(\pounds(M)) = \pounds(K(M))$</u>. Sea $x' \in \mathrm{conv}(\pounds(M))$ y supongamos que M es finito. Por inducción sobre el número de elementos de M demostraremos que existe $x \in K(M)$ tal que $\pounds(x) = x'$. Si card M = 2, por (i) esto es inmediato. Supongamos demostrado para

(k-1)-uplas, y sea card $M = k$. Si no existe ningún subconjunto propio L de M tal que $x' \in \operatorname{conv}(\mathcal{E}(L))$, sea $z' \in \mathcal{E}(M)$. Entonces existe $s' \in \operatorname{conv}(\mathcal{E}(M) - \{z'\})$ tal que $x' \in (z', s')$. Pero $(M - \{z\})$ es una (k-1)-upla, luego, por la hipótesis inductiva, existe s en $K(M - \{z\})$ tal que $\mathcal{E}(s) = s'$. Entonces, por (i)

$$x \in B(z,s) \subset B(z, K(M - \{z\}) = K(M) .$$

Si M es infinito, por el teorema de Caratheodory (ver, por ejemplo, [21] , Teorema 18, página 35), existe una (n+1)-upla $N \subset M$ tal que $x' \in \operatorname{conv}(\mathcal{E}(N)) = \mathcal{E}(K(N)) \subset \mathcal{E}(K(M))$. Luego $\operatorname{conv}(\mathcal{E}(M))$ $\mathcal{E}(K(M))$. Por III.1 (i) sabemos que $M \subset K(M)$, y por lo tanto $\mathcal{E}(M) \subset \mathcal{E}(K(M))$. Pero este último conjunto es convexo por (ii), luego $\mathcal{E}(K(M)) \supset \operatorname{conv}(\mathcal{E}(M))$.

(iv) <u>Si $t' \in E'$, $\exists\ \lambda > 0$, $\exists\ x \in E$ tales que $t' = \lambda\mathcal{E}(x)$</u>. Como vimos en la demostración de VI.7, existe una bola redonda $U = U_{x_o, r}$. Sea $M = \{x_1; x_2; \ldots; x_n\}$ una n-upla tal que $M' = M \cup \{x_o\}$ sea independiente. Razonando como en el caso 1 de VII.8, podemos elegir los elementos de M de forma que $\forall$ i de 1 a n $d(x_o, x_i) = r$. Observemos que si sustituímos uno de los elementos de M por su antipodal respecto de x_o , el conjunto resultante sigue siendo independiente. Sabemos que $\mathcal{E}(x_o) = \Theta$ (elemento neutro de E'). Si s y t son antipodales respecto de x_o , $\mathcal{E}(s) = -\mathcal{E}(t)$. Si $\forall$ i de 1 a n ponemos $\mathcal{E}(x_i) = x_i'$, por (iii) y (i) resulta que el conjunto $\{x_1'; \ldots; x_n'\}$ es una base de E'. Sea $t' \in E'$, entonces podemos expresar $t' = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\, x_i'$. Sin restricción de generalidad, podemos suponer que todos los coeficientes son no negativos. En efecto, si $\alpha_j < 0$ bastará con que sustituyamos x_j por su antipodal respecto de x_o y por lo que observamos antes, todo sigue valiendo. Sea $\lambda = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i > 0$, y sea $x' = \lambda^{-1} t'$. Entonces x' estará en $\operatorname{conv}(\mathcal{E}(M)) = \mathcal{E}(K(M))$. Luego existe $x \in K(M)$ tal que $x' = \mathcal{E}(x)$. Entonces $t' = \lambda\, \mathcal{E}(x)$.

(v) <u>Definición de la métrica en E'</u>. Sea $U' = \pounds(U)$. Por la redondez y (iv) resulta que para todo par $\{s';t'\} \subset E'$ existe $\alpha > 0$ tal que $\{\alpha s';\alpha t'\} \subset U'$. Entonces definimos :

$$d'(s',t') = \alpha^{-1}.\ d(\pounds^{-1}(\alpha s'),\pounds^{-1}(\alpha t')) \qquad (1)$$

Veamos que el valor de $d'(s',t')$ no depende de la elección de α , ya que si $\alpha_1 > \alpha_2 > 0$ verifican que $\{\alpha_1 s';\alpha_1 t';\alpha_2 s';\alpha_2 t'\} \subset U'$ llamemos $s_i = \pounds^{-1}(\alpha_i s')$, $t_i = \pounds^{-1}(\alpha_i t')$ para i = 1, 2.

Entonces, por (1) se cumple que

$$\frac{d(x_0,s_1)}{d(x_0,s_2)} = \frac{d(x_0,t_1)}{d(x_0,t_2)} = \frac{\alpha_1}{\alpha_2}$$

Aplicando IV.4, podemos sumergir isométricamente en $\mathbb{E}^2$ la 5-upla plana $\{t_1;t_2;x_0;s_1;s_2\}$, y por lo tanto

$$d(t_1,s_1) = (\alpha_1/\alpha_2)\ d(t_2,s_2)$$

y por eso $d'(s',t')$ valdría igual ya sea que usáramos α_1 ó α_2 en la definición (1). En particular, si $\{s',t'\} \subset U'$, podemos elegir $\alpha = 1$ y resulta que $\pounds : (U,d) \longrightarrow (U',d')$ es una isometría. Es rutinario verificar que d' es una métrica, y que £ es una isometría de (E,d) en (E',d').

(vi) <u>(E',d') es isomorfo a $\mathbb{E}^n$ como espacio vectorial métrico</u>.

Observemos que por la definición de d' vale

$$d'(\lambda x',\ y') = |\lambda|\ d'(x',y') \qquad (2)$$

Si $\{s';t'\} \subset \pounds(E)$, $s = \pounds^{-1}(s')$, $t = \pounds^{-1}(t')$, entonces por (i) resulta que $u = \pounds^{-1}(\frac{1}{2}(s'+t'))$ es el punto medio del par $s;t$. Entonces, si $\{x';y';z'\} \subset \pounds(E)$, $u' = \frac{1}{2}(x'+z')$, $v' = \frac{1}{2}(y'+z')$, sumergiendo isométricamente en $\mathbb{E}^2$ la 5-upla plana $\{x;u;z;v;y\}$ y usando el punto (v) resulta que

$$d'(u',v') = d'(\tfrac{1}{2}(x'+z'),\tfrac{1}{2}(y'+z')) = \tfrac{1}{2}\ d(x',y')$$

Pero por definición de d', podemos quitar la restricción de pertenecer a £(E), y combinando con (2) resulta que $\forall\ \{x';y';z'\} \subset E'$

$$d'(x'+z',y'+z') = d'(x',y') \qquad (3)$$

Es bien conocido (ver la demostración, por ejemplo, en [18] , 3.9, página 155) que todo espacio vectorial métrico cuya distancia sea positivamente homogénea (es decir, verifique (2)) e invariante por translaciones (es decir, verifique (3)) es un espacio normado cuya norma $\|x'\| = d'(\theta,x')$ verifica que $d'(x',y') = \|x' - y'\|$. Finalmente, por la clásica memoria [19] , sabemos que un espacio normado es euclideano ("inner-product space") si su norma verifica para todo par $\{x';y'\} \subset E'$

$$\|x' + y'\|^2 + \|x' - y'\|^2 = 2\,(\|x'\|^2 + \|y'\|^2)$$

o lo que es equivalente

$$\|\tfrac{1}{2}(x' + y')\| = \tfrac{1}{2}\,(2\,\|x'\|^2 + \|y'\|^2 - \|x' - y'\|^2)^{\frac{1}{2}} \qquad (4)$$

Supongamos que $\{x';y'\} \subset \mathcal{E}(E)$. Por ser E M-convexo, $t' = \frac{1}{2}(x'+y')$ está en $\mathcal{E}(E)$. Por (v) existe una 4-upla $\{x;y;t;o\} \subset E$ tal que $\{x';t';y';\theta\} \sim \{x;t;y;o\}$ y por la propiedad de Blumenthal existe una 4-upla $\{\ddot{x};\ddot{y};\ddot{t};\ddot{o}\} \subset \mathbb{E}^2$ tal que $\{x;t;y;o\} \sim \{\ddot{x};\ddot{t};\ddot{y};\ddot{o}\}$ y por la transitividad de la congruencia, será $\{x';t';y';\theta\} \approx \mathbb{E}^2$. Pero $\mathbb{E}^2$ es euclideano, luego vale

$$d(\ddot{t},\ddot{o}) = \tfrac{1}{2}\left[(2\,d^2(\ddot{x},\ddot{o}) + 2\,d^2(\ddot{y},\ddot{o}) - d^2(\ddot{x},\ddot{y})\right]^{\frac{1}{2}}$$

y por definición de congruencia, se cumple (4). Si x' e y' son arbitrarios (no necesariamente en $\mathcal{E}(E)$) basta elegir (por (iv)) una constante de homotecia que los mande a $\mathcal{E}(E)$. Como (4) es homogénea, dicha constante se simplifica, y (4) vale para todo par $\{x',y'\} \subset E'$. Entonces (E',d') es euclideano, y como por construcción era vectorialmente isomorfo a $\mathbb{R}^n$, (vi) es cierto, y hemos concluído el teorema.

Veremos a continuación varios refinamientos y corolarios del resultado fundamental que acabamos de demostrar.

El espacio métrico (E,d) es externamente convexo si todo punto de E es internal. La diferencia básica entre el presente trabajo y los resultados ya mencionados de Blumenthal reside en que aquí no requerimos que el espacio (E,d) sea externamente convexo.

Lema VIII.6 :

Sea (E,d) como en VIII.5 y $\mathcal{E} : E \longrightarrow \mathbb{E}^n$ la isometría de la tesis. Entonces $\mathcal{E}(E)$ es cerrado y $\mathcal{E}(I(E))$ es abierto en $\mathbb{E}^n$.

Sea $\{x'_n\}_{n,1}^{\infty}$ una sucesión convergente contenida en $\mathcal{E}(E)$. $\forall\, n \in \mathbb{N}$ sea $x_n = \mathcal{E}^{-1}(x'_n)$. Entonces $\{x_n\}_{n,1}^{\infty}$ es una sucesión de Cauchy contenida en E que es completo. Luego existe $x \in E$ tal que $x_n \longrightarrow x$, y por lo tanto $x'_n \longrightarrow \mathcal{E}(x) \in \mathcal{E}(E)$. Luego $\mathcal{E}(E)$ es cerrado.

Sea $y \in I(E)$. Por el razonamiento de VII .5 existe una bola redonda $U = U_{y,r} \subset I(E)$. Como vimos en la parte (iv) de VIII.5, $\mathcal{E}(U)$ es un entorno de $y' = \mathcal{E}(y)$ contenido en $\mathcal{E}(I(E))$. Por lo tanto $\mathcal{E}(I(E))$ es abierto.

Corolario VIII.7 : (Blumenthal)

Sea (E,d) completo, M-convexo, externamente convexo, de Blumenthal y de tipo n. $(E,d) \sim \mathbb{E}^n$.

Por VIII.5 existe una isometría $\mathcal{E} : E \longrightarrow \mathbb{E}^n$. Por la convexidad externa es $I(E) = E$, y por VIII.6 $\mathcal{E}(E)$ es un conjunto abierto y cerrado de $\mathbb{E}^n$. Pero $\mathbb{E}^n$ es conexo, luego $\mathcal{E}(E) = \mathbb{E}^n$, q.e.d.

El resultado que acabamos de demostrar es el teorema 50.4 de [11] , aún cuando, en dicho libro el autor expresa la noción de espacio de tipo n, o más exactamente la noción de conjunto independiente, de una forma diferente, pero que en este caso resulta fácilmente equivalente a nuestro enunciado. El método allí empleado difiere radicalmente del nuestro.

Corolario VIII.8 :

Si (E,d) es M- convexo, de Blumenthal, espeso y localmente compacto, existe un número natural n tal que $E \cong \mathbb{E}^n$.

Inmediato, de VII.8 y VII.12 y VIII.5.

Corolario VIII.9 :

Si (E,d) es M-convexo, completo, fe4p y de tipo n, $E \cong \mathbb{E}^n$.

Inmediato de IV.11 y VIII.5.

Corolario VIII.10:

Si (E,d) es completo, qe4p y de tipo n, $E \cong \mathbb{E}^n$.

Inmediato de IV.12 y VIII.5.

En los capítulos V y VI hemos estudiado la teoría de cápsula afín y espacios de tipo n para espacios métricos completos. En efecto, quitando la completitud es relativamente fácil construir contraejemplos a varios de los resultados allí obtenidos. En particular la noción de tipo n (y su conexión con la dimensión topológica) pierden significación. Sin embargo, siempre podemos definir tipo de un espacio así: Diremos que el espacio (E,d) no necesariamente completo, es de tipo n si su completación lo es.

Es claro que esta definición coincide con la previa si (E,d) ya era completo, puesto que en este caso la completación es congruente con el espacio.

Corolario VIII.11:

Si (E,d) es de Blumenthal, densamente convexo y de tipo n, $E \cong \mathbb{E}^n$.

Existe una inyección natural $p : E \longrightarrow \bar{E}$ de cada espacio en su completación. Por definición, esta aplicación es isométrica. Pero por IV.8, la completación $(\bar{E},d)$ satisface las hipótesis de VIII.5, luego existe una isometría $f: \bar{E} \longrightarrow \mathbb{E}^n$. La composición de estas dos aplicaciones $f \circ p : E \longrightarrow \mathbb{E}^n$ es la isometría que buscamos.

El teorema de VIII.5 y algunos de los corolarios aquí enunciados fueron expuestos por el autor en el 72nd. Annual Meeting de la American Mathematical Society, realizado en Chicago, USA, en enero de 1966. Un resumen de estos resultados apareció en [15] .

IX - SUBESPACIOS DE DEFICIENCIA 1.-

Investigamos aquí el concepto de "subespacio de deficiencia 1", análogo al de hiperplano en un espacio vectorial, y sus conexiones con las funcionales afines y los "planos de Leibniz".

En este capítulo (E,d) será M-convexo, completo y de Blumenthal.

Si S es un subconjunto afín propio de E, diremos que S es un subespacio de deficiencia 1 si existe $x \in E - S$ tal que valga $af(S \cup \{x\}) = E$.

Proposición IX.1 :

Sea S un subconjunto afín propio de E, entonces los siguientes enunciados son equivalentes :

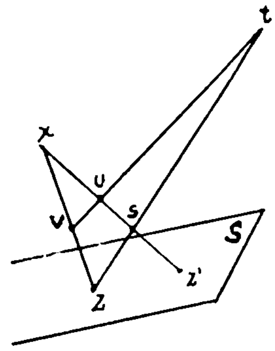
(i) S es un subespacio de deficiencia 1.

(ii) S es un elemento maximal en la familia de los subconjuntos afines propios de E.

(iii) $\forall\, y \in E - S$ vale $af(S \cup \{y\}) = E$.

(i) $\Longrightarrow$ (ii): Sea $x \in E - S$ tal que $af(S \cup \{x\}) = E$ y supongamos que exista un conjunto afín S' tal que $E \supset S' \supset S$ y $E \neq S' \neq S$. Sea $t \in S' - S$. Consideremos dos alternativas :

a) $B(x,t) \cap S \neq \emptyset$. Sea $y \in B(x,t) \cap S$. Entonces $\{x;t;y\}$ es lineal y $x \in af(S \cup \{t\}) \subset af\, S' = S'$.



b) $B(x,t) \cap S = \emptyset$. Como $t \in af(S \cup \{x\})$ existe $\{u;v\} \subset K(S \cup \{x\})$ tal que vut Pero por IV.9 $K(S \cup \{x\}) = B(x,S)$. Entonces, razonando como en VI.3, existe $\{z;z'\} \subset S$ y $s \in B(x,z')$ tales que tsz. Pero entonces, razonando como en a, vale también $x \in S'$.

En ambos casos $x \in S'$, luego $S \cup \{x\} \subset S'$, y por lo tanto $S' = af\ S' \supset af(S \cup \{x\}) = E$, contradicción. Entonces S es maximal.

(ii) $\Longrightarrow$ (iii): Sea $y \in E - S$ y sea $F = af(S \cup \{y\})$. Entonces $F = E$ ya que en caso contrario F sería un subconjunto afín propio estrictamente más grande que S, en contradicción con la maximalidad de S.

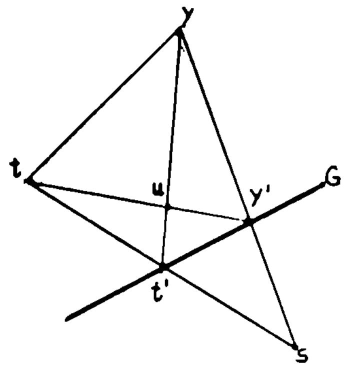
(iii) $\Longrightarrow$ (i): Trivial.

<u>Proposición IX.2</u> :

> Sea S un subespacio de deficiencia 1 y $k \in \mathbb{R}$. Entonces existe una funcional afín f en E tal que $S = \{x : f(x) = k\}$. Recíprocamente, sea g una funcional afín no constante en E, y sea k $\mathbb{R}$ tal que $\sup \{g(x): x \in E\} > k > \inf \{g(x): x \in E\}$. Entonces $\{x : g(x) = k\}$ es un subespacio de deficiencia 1.

Sea $x \in E - S$. Por IV.9 $\forall\ t \in K(S \cup \{x\})$ existe $t' \in S$ tal que xtt'. Definamos $g(y) = 0\ \forall\ y \in S$, $g(x) = 1$, y si $t \in K(S \cup \{x\})$ pongamos $g(t) = 1 - (d(x,t)/d(x,t'))$. Es claro que g es una funcional afín en $K(S \cup \{x\})$ que admite una única extensión afín (como en VIII.1) a todo E. Es rutinario verificar que $g(s) = 0$ sii $s \in S$. Finalmente llamando $f(x) = g(x) + k$ obtenemos la funcional afín que buscamos. Para la segunda parte de la proposición, sea $G = \{x : g(x) = k\}$. Es claro que G es afín, y puesto que g no es constante, es un subconjunto propio de E. Sea $y \in E$ tal que $g(y) < k$. Trataremos de verificar que $E = af(G \cup \{y\})$. Sea $t \in E - G$. Se presentan dos casos :

a) $g(t) > k$. Consideremos el segmento $B(y,t)$. Por la afinidad de g



existe $z \in B(y,t)$ tal que $g(z) = k$,
Luego $z \in G$ y $t \in af(G \cup \{y\})$.
b) $g(t) < k$. Sea s tal que $g(s) > k$ (tal s existe por la condición impuesta a k) y sean $\{y';t'\} \subset G$ tales que $tt's$ y $yy's$. Entonces, por IV.4, la 5-upla plana $\{t;t';s;y';y\}$ $\overset{\sim}{\subseteq}$ $\mathbb{E}^2$. Luego existe un punto u en $B(y',t) \cap B(y,t')$ y por lo tanto $t \in af(G \cup \{y\})$. Luego G es un subespacio de deficiencia 1.

Si $\{x;y\} \subset E$, llamaremos <u>plano de Leibniz</u> determinado por el par $\{x;y\}$ al conjunto

$$P_{x,y} = \{z \in E : d(x,z) = d(y,z)\}$$

<u>Proposición IX.3</u> :

Todo plano de Leibniz es un subespacio de deficiencia 1.

<u>$P_{x,y}$ es afín</u>: Sean $\{s;t\} \subset P_{x,y}$, $z \in \overrightarrow{st}$, entonces es fácil ver que los triángulos $K(\{s;z;x\})$ y $K(\{s;z;y\})$ son congruentes, luego vale $d(x,z) = d(y,z)$, es decir $z \in P_{x,y}$.

<u>$P_{x,y}$ es un suconjunto propio de E</u> : Trivial ya que x $P_{x,y}$.

<u>$af(P_{x,y} \cup \{x\}) = E$</u> : Sea $t \in E - P_{x,y}$. Debemos considerar dos posibles casos: (i) $d(t,x) > d(t,y)$. Definimos la función $h(z) = d(z,x) - d(z,y)$. Es claro que h es continua en el compacto $\bar{B}(x,t)$ y que $h(t) > 0$, $h(x) < 0$. Luego existe $z \in B(x,t)$ tal que $h(z) = 0$, es decir que $z \in P_{x,y}$. Por lo tanto $t \in af(P_{x,y} \cup \{x\})$.

(ii) $d(t,x) < d(t,y)$. Entonces, razonando como en el caso (i) existen $t' \in B(t,y) \cap P_{x,y}$, $x' \in B(x,y) \cap P_{x,y}$ y aplicando el razonamiento usado al final de IX.2, $t \in af(P_{x,y} \cup \{x\})$.

Es claro que no todo subespacio de deficiencia 1 es un plano de Leibniz. En la proposición a continuación caracterizamos los planos de Leibniz entre los subespacios de deficiencia 1., en el caso de dimensión finita. Esta caracterización no es válida para dimensión infinita, donde pueden no existir puntos internales, pero donde aún existen planos de Leibniz.

Proposición IX.4 :

Sea (E,d) de dimensión finita. Entonces $P \subset E$ es un plano de Leibniz sii es un subespacio de deficiencia 1 y contiene puntos internales.

Sea $P = P_{x,y}$ un plano de Leibniz, y por IX.3 un subespacio de deficiencia 1. Por VII.5 el conjunto de los puntos internales es denso y convexo. Luego existen puntos internales x' e y' tales que $d(x,x') > d(x',y)$, $d(y,y') > d(y',x)$. Entonces, razonando como en la proposición anterior, existe $t \in B(x',y') \cap P$, y t es internal. Recíprocamente sea P un subespacio de deficiencia 1 y $x \in P \cap I(E)$. Sea $z \in E - P$. Como E es localmente compacto, por VII.12 y VII.9, $\forall\ r > 0$ es $U_{z,r}$ es compacto. Como P es cerrado por VI.7, resulta que para r suficientemente grande $P \cap U_{z,r}$ es compacto, convexo y no vacío. Por IV,10 existe un único punto $z' \in P$ tal que $d(z,z') = d(z,P)$. Sea $z_o \in B(z,x)$ tal que (a) $d(z_o,z') = d(z_o,P)$; (b) z_o es el punto de $B(z,x)$ más próximo a x que verifica (a). Entonces es rutinario verificar que $\forall\ p \in P - \{z'\}$ la imagen del triple $\{p;z';z_o\}$ en $\mathbb{E}^2$ forma un triángulo rectángulo en z'. Sea $z'' \in P$ tal que $z'zz''$. Existe una aplicación biyectiva f que a cada $s \in B(z_o,z'')$ asocia su (único) punto más cercano en $B(z',z'')$. Sea $y_o = f^{-1}(x)$ y sea y_1 tal que y_oxy_1. Sin restricción de generalidad, supongamos que $d(y_o,x) > d(y_1,x)$, sea y_2 $B(y_o,x)$ tal que $d(y_2,x) = d(y_1,x)$. Finalmente es fácil verificar que P es el plano de Leibniz determinado por el par $\{y_1;y_2\}$.

X - SEGUNDO TEOREMA FUNDAMENTAL.-

En este capítulo estudiamos la posibilidad de extender a todo el espacio E una isometría definida en un subconjunto S y a valores en otro espacio métrico F. Consideramos tres diferentes instancias: (i) S es denso en E y F es completo. (ii) S es tal que af S = E y F es euclideano. (iii) S es un subespacio de deficiencia 1 en E y F = E^n . Utilizamos luego este último resultado para obtener una nueva demostración de VIII.5 y una generalización de este teorema donde, sustituyendo las condiciones de dimensión finita (tipo finito o compacida local) por separabilidad, fijamos condiciones para asegurar que (E,d) sea isométrico a un subconjunto del espacio de Hilbert H de las sucesiones reales de cuadrado sumable.

<u>Lema X.1</u> :

Sea S un subconjunto densoen E, (F,d') un espacio métrico completo y $f : S \longrightarrow F$ una isometría. Entonces existe una isometría $f^* : E \longrightarrow F$ tal que $f^*/_S = f$.

Sea $x \in E$ y $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión contenida en S que converge a x. Entonces definimos $f^*(x) = \lim f(x_n)$. Es claro que tal límite existe por ser F completo, y que no depende de la elección de la sucesión. Es fácil verificar que f* es una isometría y que f*/S = f.

Lema X.2 :

Sea (E,d) M-convexo, completo y de Blimenthal, S un subconjunto de E tal que af S = E y $f : S \longrightarrow H$ una isometría. Entonces existe una isometría $f^* : E \longrightarrow H$ tal que $f^*/_S = f$.

Sea $x \in C(S)$, entonces existe $\{y;z\} \subset S$ tal que yxz. Sea $f_1(x) = f(x)$ si $x \in S$, y si $x \in C(S) - S$ definamos $f_1(x)$ como el punto del segmento lineal de extremos $\{f(y);f(z)\}$ tal que $d(f_1(x),f_1(y)) = d(x,y)$. Si existe $\{y';z'\} \subset S$ tal que también y'xz', bastará aplicar IV.4 para sumergir en $\mathbb{E}^2$ la 5-upla plana $\{y;x;z;y';z'\}$, de donde resultará que $f_1(x)$ no depende de la elección del par $\{y;z\}$. Es inmediato verificar que $f_1 : C(S) \longrightarrow H$ es una isometría y que $f_{1/S} = f$. Reiterando el procedimiento, $\forall\, j \in \mathbb{N}$ existe una isometría $f_j : C^j(S) \longrightarrow H$ tal que si $j > k$ vale que $f_{j/C^k(S)} = f_k$ y $f_{j/S} = f$. Sea $K = K(S)$ y $f_o : K \longrightarrow H$ definida en forma obvia a partir de las f_j . Es claro que f_o es una isometría y que $f_{o/S} = f$.
Sea $u \in E$, entonces existe $\{s;t\} \subset K$ tales que $\{u;s;t\}$ sea lineal. Definamos como $f^*(u)$ el punto de la recta determinada por $f_o(s)$ y $f_o(t)$ y tal que verifique

$$d(f_o(s),f^*(u)) = d(s,u) \quad ; \quad d(f_o(t),f^*(u)) = d(t,u)$$

Si existe $\{s';t'\} \subset K$ tales que también $\{u;s';t'\}$ sea lineal, aplicando una vez más IV.4, podemos sumergir isométricamente en $\mathbb{E}^2$ la 5-upla plana $\{s;t;u;s';t'\}$, con lo que se ve que la definición de $f^*(u)$ no depende del par $\{s;t\}$. Es rutinario verificar que $f^* : E \longrightarrow H$ es una isometría que extiende a f.

Corolario X.3 :

El lema X.2 es válido sustituyendo H por $\mathbb{E}^n$.

Supongamos que E y S sean como en el enunciado de X.2 y que existe una isometría $f : S \longrightarrow \mathbb{E}^n$. Sea H_n el conjunto de elementos de con todas las coordenadas nulas salvo, tal vez, las primeras n. Es claro que existe una aplicación natural $p : \mathbb{E}^n \longrightarrow H_n$ que es a la vez isomorfismo algebraico e isometría. Pero entonces $p \circ f : S \longrightarrow H_n \subset H$ es una isometría. Luego estamos en las hipótesis de X.2 y existe una isometría $g : E \longrightarrow H$ que extiende a $p \circ f$. Pero por la construcción realizada en X.2 es evidente que la variedad lineal generada por $(p \circ f)(S)$, que es H_n, coincide con la generada por $g(E)$, es decir que $g(E) \subset H_n$. Pero entonces $f^* = p^{-1} \circ g$ es una isometría de E en $\mathbb{E}^n$, que restringida a S coincide con $p^{-1} \circ p \circ f = f$, q.e.d.

Proposición X.4 :

> Sea (E,d) un espacio M-convexo, completo y de Blumenthal y S un subespacio de deficiencia 1. Sea $f : S \longrightarrow \mathbb{E}^{n-1}$ una isometría. Entonces existe una isometría $f^* : E \longrightarrow \mathbb{E}^n$ tal que $f^*/_S = f$.

En el enunciado de esta proposición hemos contenido el "abuso de lenguaje" de considerar $\mathbb{E}^{n-1} \subset \mathbb{E}^n$, ya que es claro que es isométrico y vectorialmente isomorfo (por ejemplo) al subconjunto de todos los elementos de $\mathbb{E}^n$ que tienen la n-ésima coordenada nula. En adelante usaremos esta convención sin mención expresa. Sea $p : E \longrightarrow S$ la aplicación que a cada punto $x \in E$ asocia el punto de S más próximo a x. S es de dimensión finita y cerrado (por VI.7), luego la intersección con una bola cerrada es un compacto, y por IV.10 resulta que p está bien definida. Sea $x \in E - S$ tal que $af(S \cup \{x\}) = E$ y sea $x' = p(x)$. Existe una n-upla independiente M en S tal que $x' \in M$. Sea $y \in Z(M - \{x'\})$, $x_0 \in \bar{B}(x,y) \cap p^{-1}(x')$ tal que $d(y,x_0)$ sea mínima (la existencia y unicidad de tal punto es fácilmente verificable). Observemos que p restringida a $\bar{B}(x_0,y)$ es inyectiva, y además, para todo $s \in B(x_0,y)$ el triángulo de vértices $\{s;p(s);y\}$ es rectángulo en $p(s)$ (abuso de lenguaje). Sea z el punto medio del par $\{x_o;y\}$ y $z' = p(z)$. Por IV.4 resulta que z' será punto medio del par $\{x';y\}$. Por V.7 es $z' \in Z(M)$ y por VII.1 $z' \in I(S)$. Afirmamos que $\forall\ t \in S - \{z'\}$ el triángulo de vértices $\{z;z';t\}$ es rectángulo en z' (abuso de lenguaje). En efecto, supongamos que existiera $t \in S - \{z'\}$ tal que el ángulo formado por $\overrightarrow{z'z}$ y $\overrightarrow{z't}$ (abuso de lenguaje) fuera menor que $\pi/2$ (si este ángulo fuera mayor que $\pi/2$ nos reduciríamos a este caso considerando un punto t' tal que tz't', tal punto existe por ser z' internal). Entonces aplicando IV.6 al trilátero $T(t;z';z)$, resultaría que existe $s \in B(z',t)$ tal que $d(z,s) < d(z,z')$, lo que contradice la elección de z'. Entonces $\forall\ t \in S$ vale

$$d(t,z) = (d^2(t,z') + d^2(z',z))^{\frac{1}{2}}$$

Definamos como $f(z)$ a un punto de la recta normal a $\mathbb{E}^{n-1}$ por $f(z')$ tal que $d(f(z),f(z')) = d(z,z')$. Entonces, por lo que acabamos de ver $f : S \cup \{z\} \longrightarrow \mathbb{E}^n$ es una isometría. Por construcción $z \in E - S$, luego por IX.1 es $af(S \cup \{z\}) = E$, y la proposición resulta de X.3.

A continuación utilizaremos el resultado precedente para obtener una nueva demostración, considerablemente más corta que la directa, del teorema VIII.5 de inmersión en $\mathbb{E}^n$.

<u>Teorema VIII.5</u> : (Nueva demostración)

Si (E,d) es M-convexo, completo, de Blumenthal y de tipo n, entonces $E \subseteq \mathbb{E}^n$.

La demostración será por inducción. El teorema vale para n = 1 por V.1. Supongamos que se verifica para n = k - 1, y sea (E,d) un espacio de Blumenthal, completo, M-convexo y de tipo k. Entonces existe un conjunto independiente $M = \{x_o;x_1;\dots;x_k\} \subset E$. Sea $M_o = M - \{x_o\}$ y $S = af\ M_o$. Es claro que S es un subespacio de deficiencia 1 en E, ya que $af(S \cup \{x_o\}) = E$. Así mismo, es claro que (S,d) es un espacio de Blumenthal, M-convexo, completo (por VI.7) y de tipo k - 1. Entonces, por la hipótesis inductiva $S \subseteq \mathbb{E}^{k-1}$, y aplicando X.4 , $E \subseteq \mathbb{E}^k$, q.e.d.

Teorema X.5 :

Si (E,d) es M-convexo, completo, separable y de Blumenthal, entonces $E \cong H$.

Sea E tal espacio y $D = \{d_o; d_1; d_2; \ldots\}$ un conjunto numerable y denso en E. Definamos $x_o = d_o$, $x_1 = d_1$. Para $i \geq 2$ definamos x_i inductivamente de la siguiente forma. Sea $M_{i-1} = \{x_o; x_1; \ldots; x_{i-1}\}$ $F_{i-1} = \operatorname{af} M_{i-1}$ y sea x_i el primer elemento de D (en el orden de los índices) que no pertenece a F_{i-1}. Finalmente, sea M el conjunto de todos los x_i así obtenidos, y sea $F = \bigcup_i F_i$. Es trivial que $D \subset F$. Distinguiremos dos casos :

Caso 1, M es finito : Sea card $M = n+1$. Entonces $F = F^n$ y (F,d) es de Blumenthal. M-convexo, completo (por VI.7) y de tipo n. Entonces, por VIII.5 y por el artificio usado en X.3 es $F \cong H_n \subset H$. Pero además F es cerrado en E (por VI.7) y denso (ya que $D \subset F$), luego $F = E$.

Caso 2, M es infinito : Como vimos en el caso anterior $\forall\, n \in \mathbb{N}$ existe una isometría $f_n : F_n \longrightarrow H_n$. Más aún, como es claro que F_{n-1} es un subespacio de deficiencia 1 en F_n, por X.4 es posible elegir estas isometrías de forma que f_n restringida a F_{n-1} coincida con f_{n-1} (*). Definamos $f : F \longrightarrow H$ tal que si $t \in F_i$, $f(t) = f_i(t)$. Por la propiedad (*) que acabamos de mencionar, resulta que la aplicación f está bien definida, que restringida a F_i coincide con f_i y que es una isometría de F en H. Pero como $D \subset F$, es claro que F es denso en E. Puesto que H es completo, por X.1 existe una isometría $f^* : E \longrightarrow H$ que extiende a f.

Corolario X.6 :

Si (E,d) es M-convexo, completo, separable y fe4p, entonces $E \cong H$.

Inmediato de IV.11 y X.5.

Corolario X.7 :

Si (E,d) es completo, separable y qe4p, $E \approxeq H$.

Inmediato de IV.12 y X.5.

Corolario X.8 :

Si (E,d) es densamente convexo, separable y de Blumenthal, entonces $E \subseteq H$.

Sea $\bar{E}$ la completación de E. Entonces, por IV.8 $(\bar{E},d)$ es M-convexo y de Blumenthal. Una aplicación standard del proceso diagonal demuestra que $(\bar{E},d)$ es separable. Entonces $(\bar{E},d)$ satisface las hipótesis de X.5, y razonando como en VIII.11 resulta la tesis.

Corolario X.9 : (Blumenthal)

Si (E,d) es un espacio métrico las siguientes afirmaciones son equivalentes :

(i) $E \sim H$

(ii) (E,d) es M-convexo, completo, separable, de Blumenthal, externamente convexo y de dimensión infinita.

(i) $\Longrightarrow$ (ii) : Trivial.

(ii) $\Longrightarrow$ (i) : Con la notación de X.5 existe una isometría f^* de E en H. Trataremos de verificar que esta aplicación es suryectiva. Como la dimensión de E es infinita, es claro que estamos en el caso 2. Es fácil ver que todo subconjunto afín de E considerado como espacio métrico es externamente convexo. Entonces, por VIII.7

$$f^*(F_n) = f(F_n) = f_n(F_n) = H_n \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

Sea H_0 el conjunto de todos los elementos de H que tienen solo finitas coordenadas no nulas. Es claro que H_0 es denso en H. Además por la definición de f vale $f(F) = H_0$, y como

$$f^*(E) \supset f^*(F) = f(F) = H_0$$

será $f^*(E)$ denso y cerrado en H, luego $f^*(E) = H$, q.e.d.

XI - ESPACIOS ESTRELLADOS.

Puesto que a lo largo de todo este capítulo el conjunto E estará dotado de la misma métrica d, para simplificar la notación,en lugar de "el espacio métrico (E,d)" pondremos simplemente "E".

Diremos que E es estrellado en x si $\forall\, y \in E - \{x\}$, la banda B(x,y) es densa. El kernel de E es el conjunto

$$\ker E = \{x \in E : E \text{ es estrellado en } x\} .$$

> El concepto de conjunto estrellado en espacios vectoriales ha sido ampliamente estudiado por varios geómetras. En espacios métricos, un concepto análogo pero más débil que el nuestro (pidiendo que $B(x,y) \neq \emptyset$), fué enunciado por K. Menger en el ya mencionado Seminario del Rice Institute (1931) como debilitamiento (o más bien, localización) de su concepto de espacio M-convexo. Las noticias que hemos obtenido incluyen solamente el siguiente resultado trivial "E es M-convexo sii $\forall\, x \in E$, E es (débilmente) estrellado en x".

Llamaremos componente convexa de E a todo conjunto convexo de E maximal en el orden natural de inclusión. Una familia $\mathcal{M} = \{M_\lambda\}_{\lambda \in L}$ de componentes convexas de E es una familia fundamental si vale $E = \bigcup_{\lambda \in L} M_\lambda$.

Lema XI.1 :

La familia de todas las componentes convexas de E es una familia fundamental.

En efecto, si $x \in E$, mediante una aplicación standard del lema maximal de Zorn resulta que existe una componente convexa M de E tal que $x \in M$.

Lema XI.2 :

Las componentes convexas de un espacio de Blumenthal completo son conjuntos cerrados.

Sea P un subconjunto convexo de E. Entonces, razonando como en el capítulo III, Pes densamente convexo. Pero es claro que la clausura de P es congruente con la completación de P considerado como espacio métrico. Pero por IV.8 esta completación es M-convexa. Luego clP es convexo. Entonces, si M es una componente convexa de E, es M = cl M por la maximalidad, luego M es cerrado.

Proposición XI.3 :

Sea E completo y de Blumenthal, $\mathcal{M} = \{M_\lambda\}_{\lambda \in L}$ una familia fundamental de componentes convexas. Entonces $\ker E = \bigcap_{\lambda \in L} M_\lambda$.

Llamemos $M = \bigcap_{\lambda \in L} M_\lambda$. Sea $x \in M, y$ E. Entonces, por definición de familia fundamental, existe $\lambda \in L$ tal que $y \in M_\lambda$. Pero por XI.2 M es K-convexo y como $\{x;y\} \subset M_\lambda$, B(x,y) es completa, y por lo tanto densa. Luego $x \in \ker E$. Recíprocamente, sea $z \in \ker E$, y M_λ una componente convexa de E. Entonces, razonando como en IV.9, resulta que $B_\lambda = B(z,M_\lambda)$ es un conjunto convexo y $M_\lambda \subset B_\lambda \subset E$. Luego, por la maximalidad de M_λ es $M_\lambda = B$, luego $z \in M_\lambda$ $\forall \lambda \in L$. Es decir que $z \in M$, y por fin, M = ker E, q.e.d.

Una versión de XI.3, ligeramente más restringida, ya que solo se consideraban la familia de todas las componentes convexas y el espacio total era E^n, apareció en [20] , donde sirvió para resolver un problema sobre las funciones radiales de cuerpos estrellados.

Corolario XI.4 :

Si E es como en XI.3, ker E es convexo y cerrado.

Si M es un subconjunto convexo de E y $P \subset M$, notaremos con af_M P a la cápsula afín de P considerado como subconjunto del espacio M-convexo M. Diremos que E es <u>perfectamente estrellado</u> si para toda componente convexa M de E vale que $af_M(\ker E) = M$.

<u>Lema XI.5</u> :

Si E es completo, de Blumenthal y de dimensión n, las siguientes afirmaciones son equivalentes :

(i) E es perfectamente estrellado.

(ii) Para toda componente convexa M de E vale tipo M = tipo ker E = n.

(i) $\Longrightarrow$(ii): Por XI.2 y XI.4, tanto M como ker E son espacios métricos M-convexos, completos, de Blumenthal y de dimensión finita, luego sus tipos están bien definidos. Por otra parte, por XI.3 es $\ker E \subset M$, luego tipo M $\geqslant$ tipo ker E. Supongamos que tipo M $>$ tipo ker E. Existiría $t \in M - af_M(\ker E)$ lo que contradice (i). Luego tipo M = tipo ker E.

(ii) $\Longrightarrow$(i): Por V.10 existe una (n+1)-upla independiente $L \subset \ker E$. Supongamos que existiera $t \in M - af_M(L)$. Entonces $L' = L \cup \{t\} \subset M$ es independiente, luego tipo M $\geqslant$ n + 1, en contradicción con (ii). Entonces vale $M = af_M(L) \subset af_M(\ker E)$ q.e.d.

<u>Teorema XI.6</u> :

Si E es completo, separable, de Blumenthal y perfectamente estrellado, entonces E $\approx$ H.

Sea $D = \{d_1;d_2;d_3;\ldots\}$ un conjunto numerable y denso en E, Razonando como en XI.1, existe una componente convexa M_1 de E tal que $d_1 \in M_1$. Definamos $F_1 = M_1$. Sea n_2 el primer número natural tal que $d_{n_2} \notin M_1$. Sea M_2 una componente convexa que contenga a d_{n_2} y $F_2 = M_1 \cup M_2$. Iterando el proceso, sea n_k el primer número natural tal que $d_{n_k} \notin F_{k-1}$, sea M_k una componente convexa de E que contenga a

d_{n_k} , y sea $F_k = F_{k-1} \cup M_k$. Después de, a lo más, una sucesión numerable de pasos, habremos agotado todos los elementos de D.

(i) <u>$\ker E \hookrightarrow H$</u> : En efecto, es inmediato de XI.4 y X.5.

(ii) <u>$\forall n \in \mathbb{N}\ F_n \hookrightarrow H$</u> : Por inducción. Para n = 1, si $f_o : \ker E \longrightarrow H$ es la isometría cuya existencia afirma (i), por X.2 existe una isometría $f_1 : F_1 \longrightarrow H$ tal que $f_{1/\ker E} = f_o$. Supogamos que existe una aplicación isométrica $f_{k-1} : F_{k-1} \longrightarrow H$. Definamos $f_k : F_k \longrightarrow H$ de la siguiente forma. Si $x \in F_{k-1}$, $f_k(x) = f_{k-1}(x)$. Si $x \in F_k - F_{k-1}$ definimos como $f_k(x)$ a la extensión de f_o a M_k , que existe por X.5. Veamos que f_k es una isometría. Si $y \in F_{k-1}$, $z \in F_k - F_{k-1}$,entonces por construcción existe $j<k$ tal que $y \in M_j$. Por definición de completamente estrellado, existe $\{y_1;y_2;z_1;z_2\} \subset \ker E$ tal que los triples $\{y_1;y_2;y\}$, $\{z_1;z_2;z\}$ sean lineales. Pero entonces, razonando como en VI.3, existe $\{y';v;z'\} \subset \ker E$ tal que vy'y, vz'z. Entonces aplicando IV.4 a la 5 upla plana $\{y;y';v;z';z\}$, resulta que $d(f_k(y),f_k(z)) = d(y,z)$. En los otros dos casos posibles ($\{y;z\} \subset F_{k-1}$, o bien $\{y;z\} \subset M_k$) esta igualdad se cumple por construcción. Luego $f_k : F_k \longrightarrow H$ es una isometría, q.e.d.

(iii) <u>$E \hookrightarrow H$</u> : Sea $F = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$. Definimos $f : F \longrightarrow H$ en forma obvia a partir de las f_n . Por definición $\forall\ k<n\ f_{n/F_k} = f_k$. Luego f está bien definida y es una isometría. Pero por construcción $F \supset D$, luego F es denso en E. Por X.I existe una isometría $f^* : E \longrightarrow H$.

<u>Corolario XI.7</u> :

Si E es completo, de Blumenthal, perfectamente estrellado y n-dimensional, entonces $E \hookrightarrow \mathbb{E}^n$.

La misma demostración que el teorema anterior, sustituyendo donde corresponda X.5 por VIII.5 y X.2 por X.3.

B I B L I O G R A F I A

[1] - de Tilly, J. "Essai de géométrie analytique générale" - Memoire 5 - Academie Royale de Bélgique (1892-3).-

[2] - Peano, G. "La Geometria basata sulle idee di punto e distanza" - Atti della Reale Academia délle Scienze di Torino, 38 (1903) 6-10.-

[3] - Pieri, M. "La Geometría elementare instituta sulle nozioni di punto e sfera" - Memorie di Matematica e di Fisica della Societa Italiana delle Scienze, 15(1908) 345-450.-

[4] - Kagan, B. "Ein System von Postulaten welche die euklidische Geometrie definieren" - Jahresbericht der Deutschen Mathematiker Vereinigung" , 11 (1902) 403-424.-

[5] - Menger, K. "Untersuchungen über allgemeine Metrik I,II,III", Mathematische Annalen , 100 (1928) 75-163.-

[6] - Menger, K. "Zur Metrik der Kurven" Mathematische Annalen, 103 (1930) 466-501.-

[7] - Wilson, W. A. "A relation between metric and euclidean spaces" American Journal of Mathematics, 54(1932) 505-517.-

[8] - Wilson, W. A. "On the imbedding of metric sets in euclidean space" American Journal Mathematics, 57(1935) 322-326.-

[9] - Blumenthal, L. M. "Distance Geometries. A study of the development of abstract metrics" The University of Missouri Studies, 13-2 (1938).-

[10] - Bing,R. H. "Partitioning a set" Bulletin of the American Mathematical Society, 55 (1949) 1101-1109.-

[11] - Blumenthal, L. M. "Theory and applications of Distance Geo-

metry" Oxford (1953).-

[12]- Blumenthal, L. M. "Extension of a theorem of Jordan and von Neumann", Pacific Journal of Mathematics, 5(1955)161-167.-

[13] - Day, M. M. "On criteria of Kasahara and Blumenthal for inner-product spaces" Proc. of the A.M.S. , 10(1959) 92-100.-

[14] - Aronszajn, N. "Tesis" (inédita), Varsovia (1930).-

[15] - Toranzos, F. A. "Imbedding of convex metric spaces in E^n", Notices of the A.M.S. 13(1966) Abstract 630-71, pág.77.-

[16] - Hurewicz,W. & Wallman, H. "Dimension Theory" Princeton (1948).-

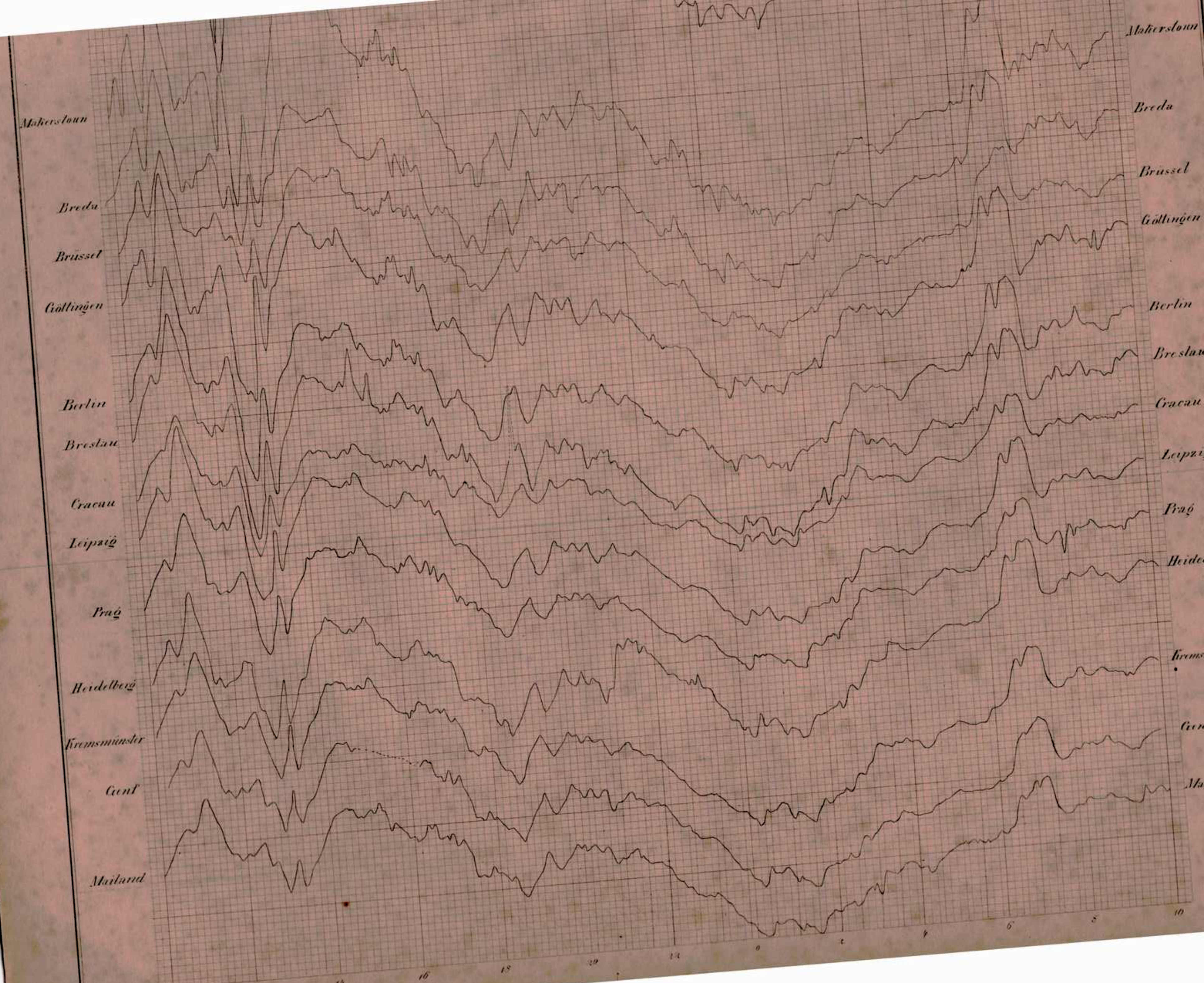
[17] - Toranzos, F. A. "A version of Riesz's theorem for convex metric spaces " Notices of the A. M. S. 13(1966) Abstract 66T-29, página 134.-

[18] - Taylor, A. "Introduction to Functional Analysis" N.York (1958)

[19] - Jordan, P. & von Neumann, J. "On inner-products in normed linear spaces" Annals of Mathematics, 36(1935) 705-718.-

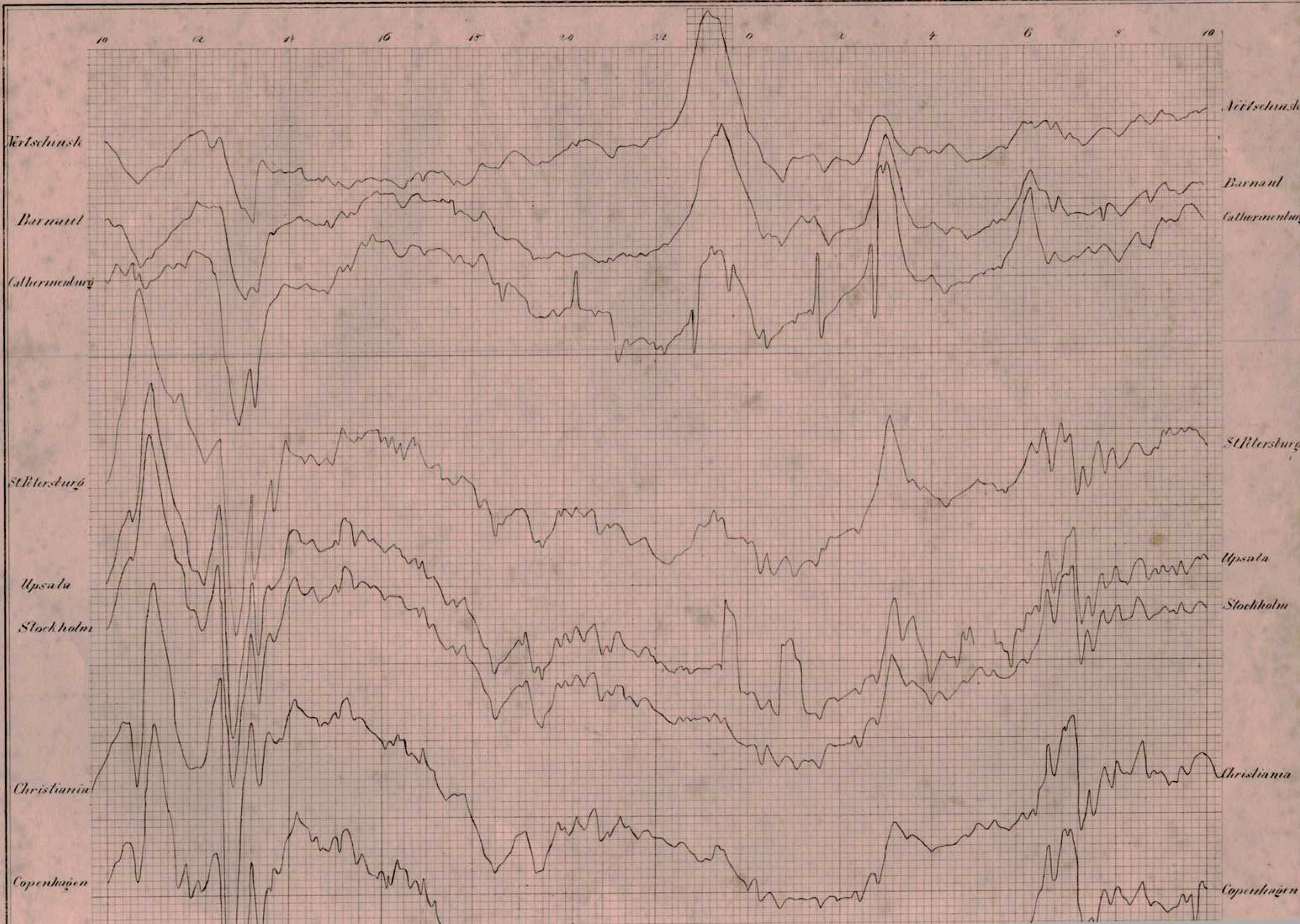
[20] - Toranzos, F. A. "Radial functions of convex and star-shaped bodies" a publicarse en American Mathematical Monthly.-

[21] - Eggleston, H. G. "Convexity" Cambridge Univ. Press (1958).-


Makerstoun
Breda
Brüssel
Göttingen
Berlin
Breslau
Cracau
Leipzig
Prag
Heidelberg
Kremsmünster
Genf
Mailand

Declinations-Beobachtungen vom 27 und 28. August 1841

Zu den Resultaten 1841.

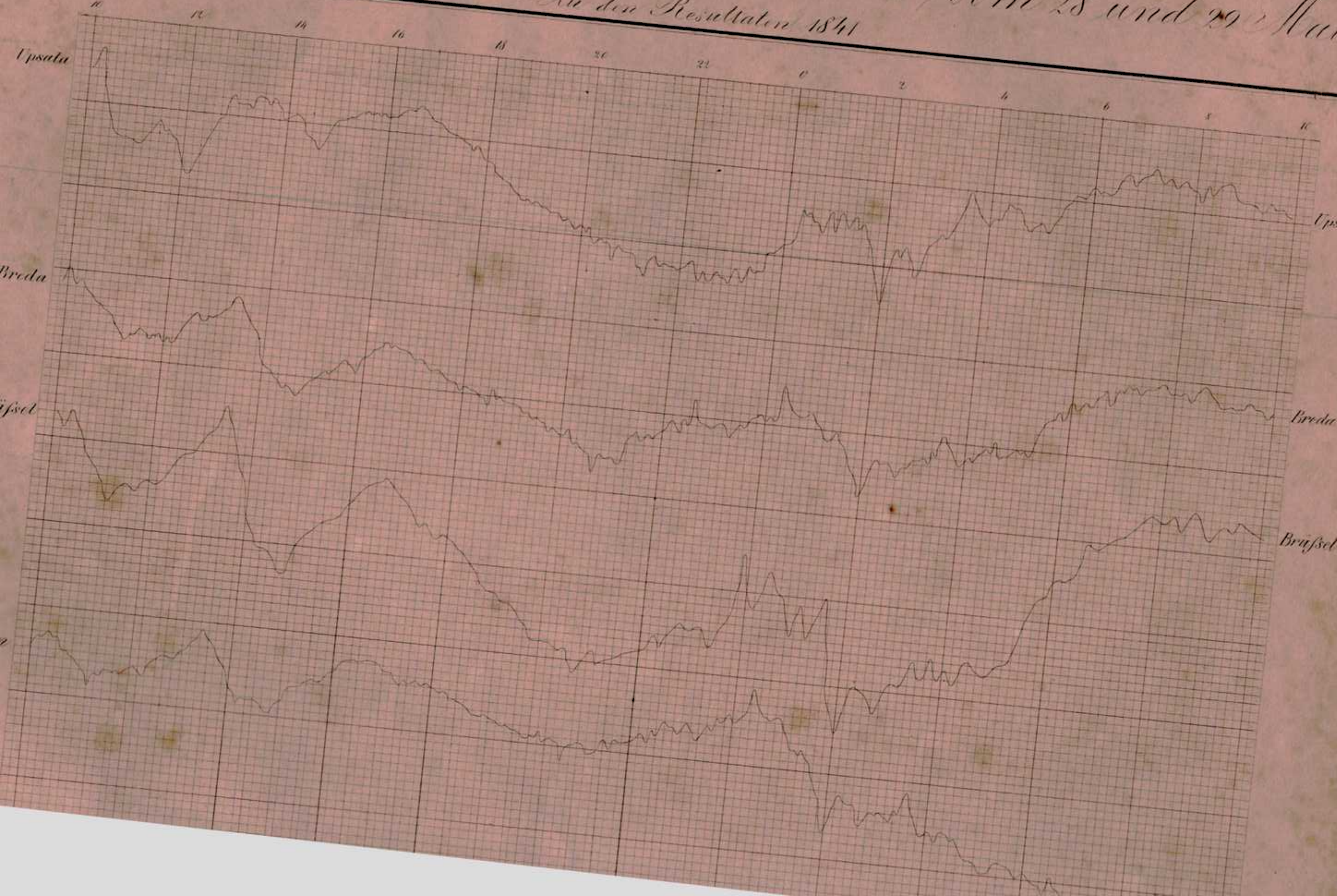


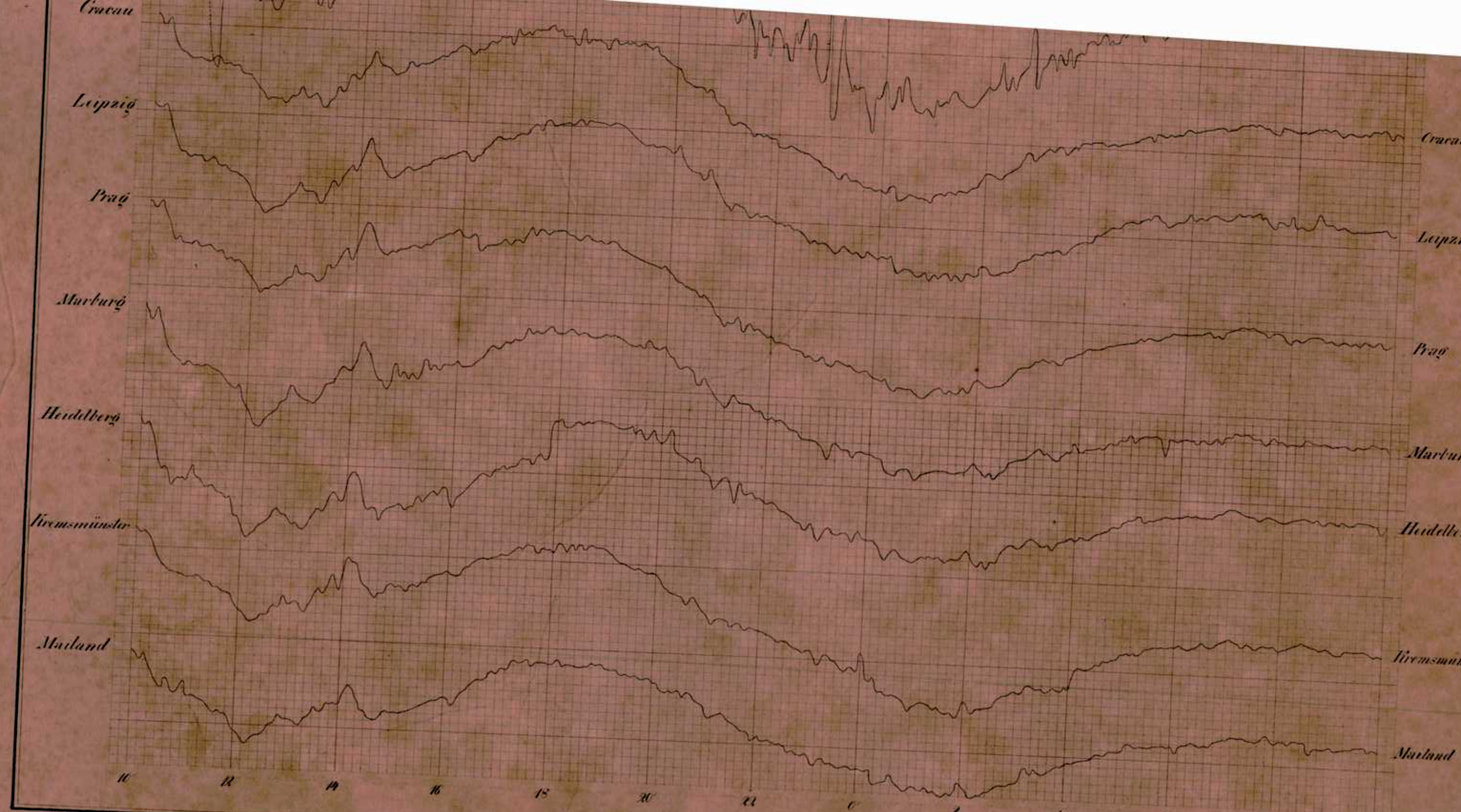

Prag
Kremsmünster
Mailand
Prag
Kremsmünster
Mailand
10
12
14
16
18
20
22
0
2
4
6
8
10

Beobachtungen der horizontalen Intensität vom 28 und 29 Mai 1841.

Zu den Resultaten 1841

TAF. IV.



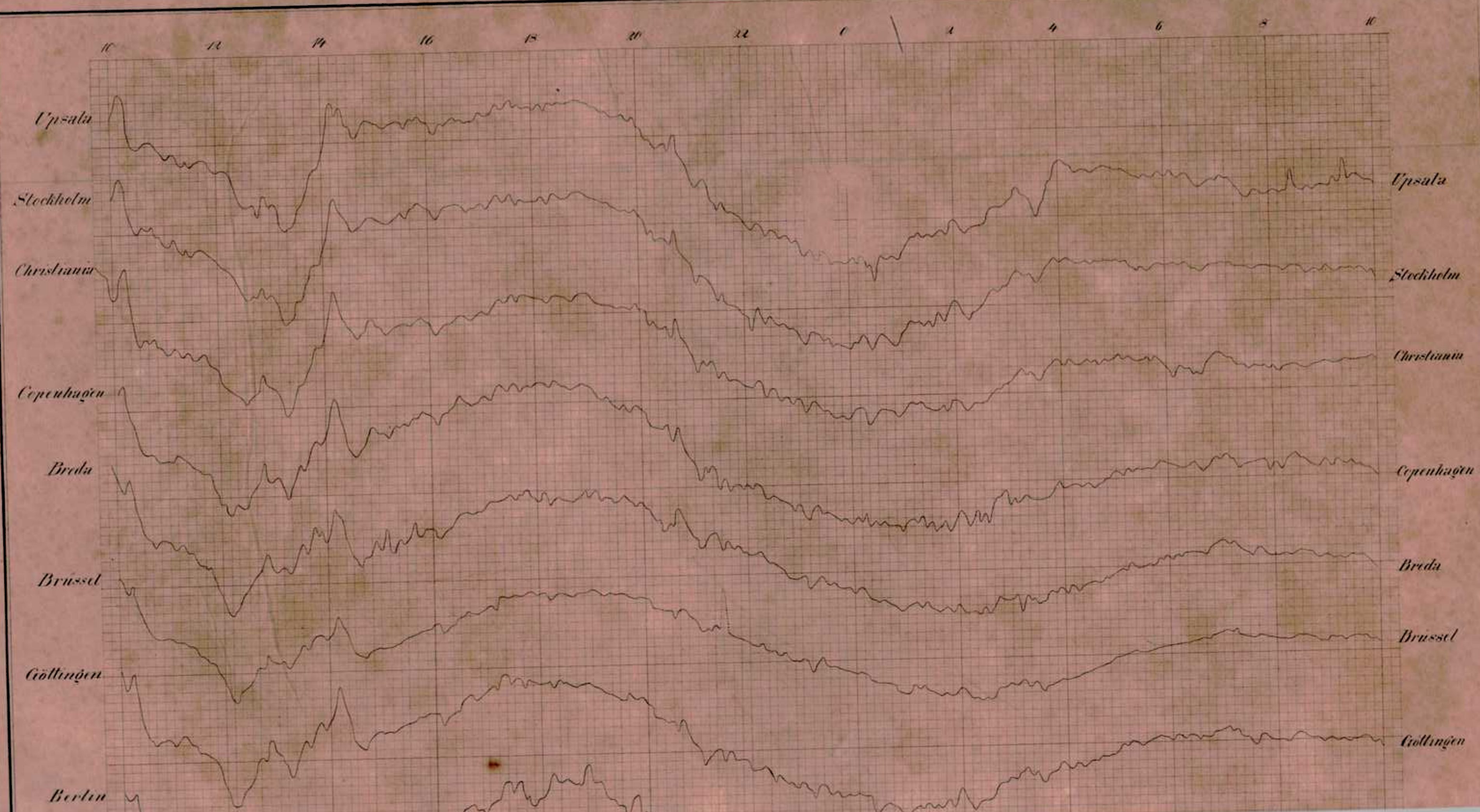


Lith. Anst. v. F. E. Rettmüller Göttingen

TAF. III.

Declinations-Beobachtungen vom 28. und 29. Mai 1841.

Zu den Resultaten 1841.

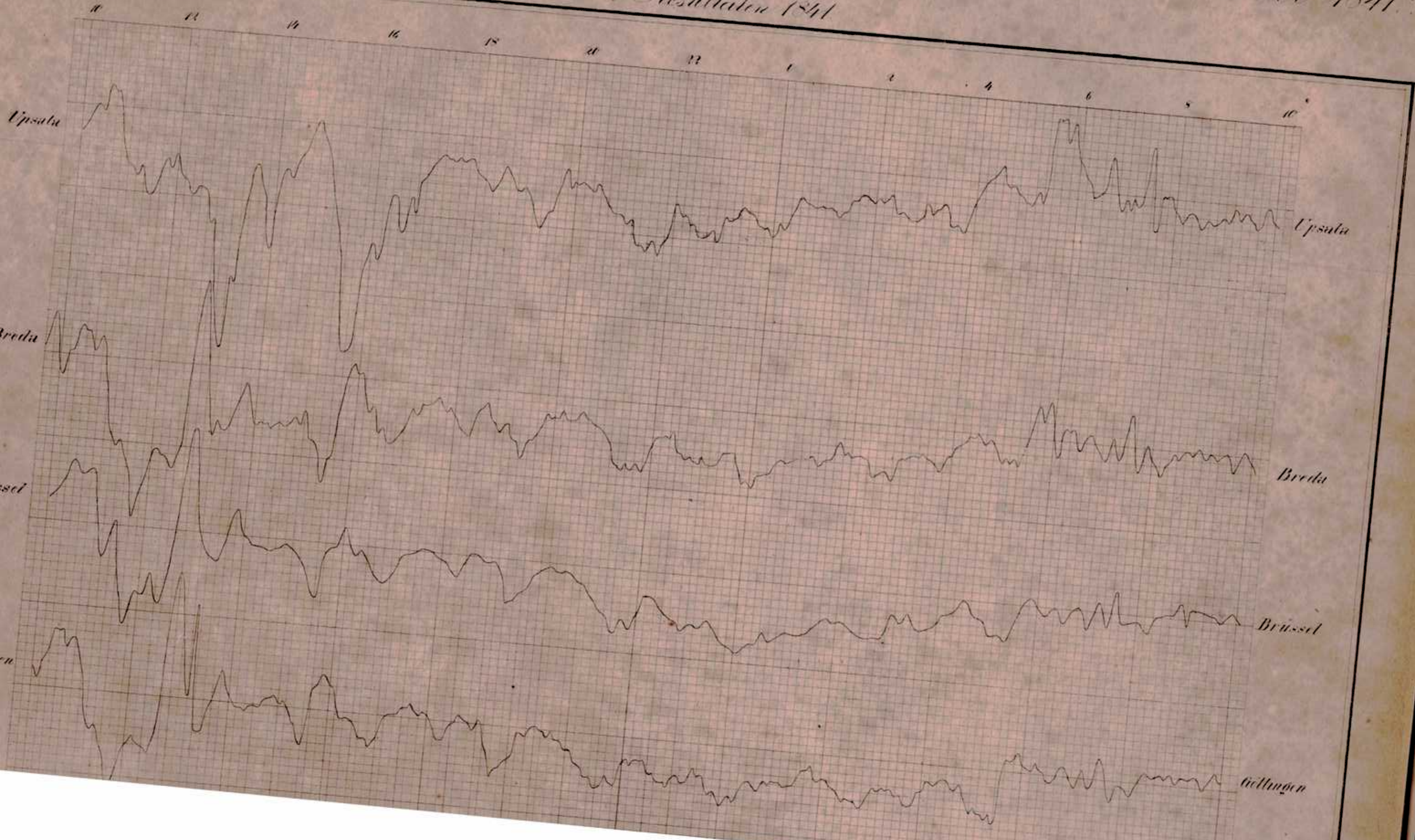


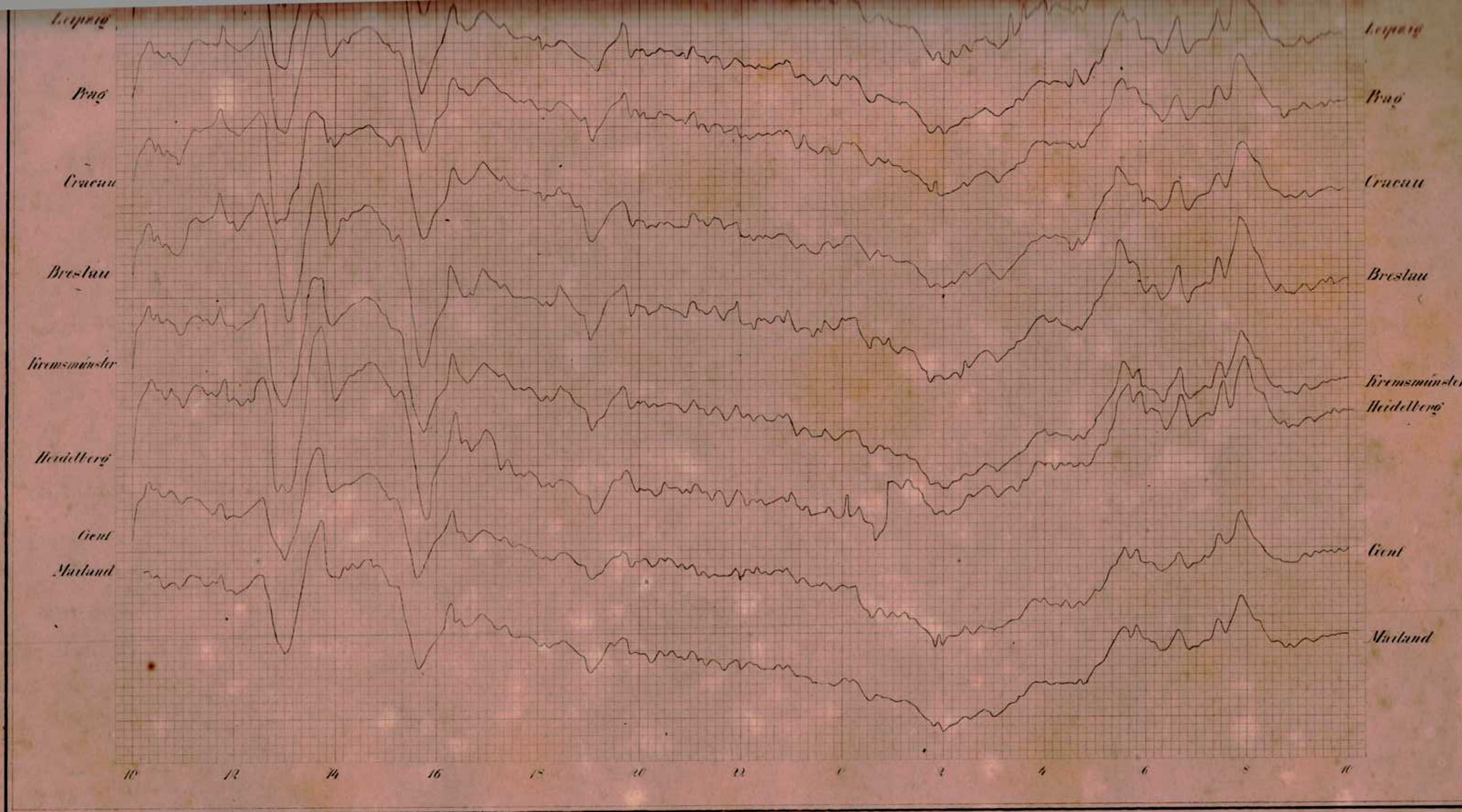

Breslau
Prag
Kremsmünster
Mailand
10
12
14
16
18
20
22
0
2
4
6
8
10
Bres
Prag
Kremsmün
Mailand

TAF. II.

Beobachtungen der horizontalen Intensität vom 26 und 27 Februar 1841.

Zu den Resultaten 1841.



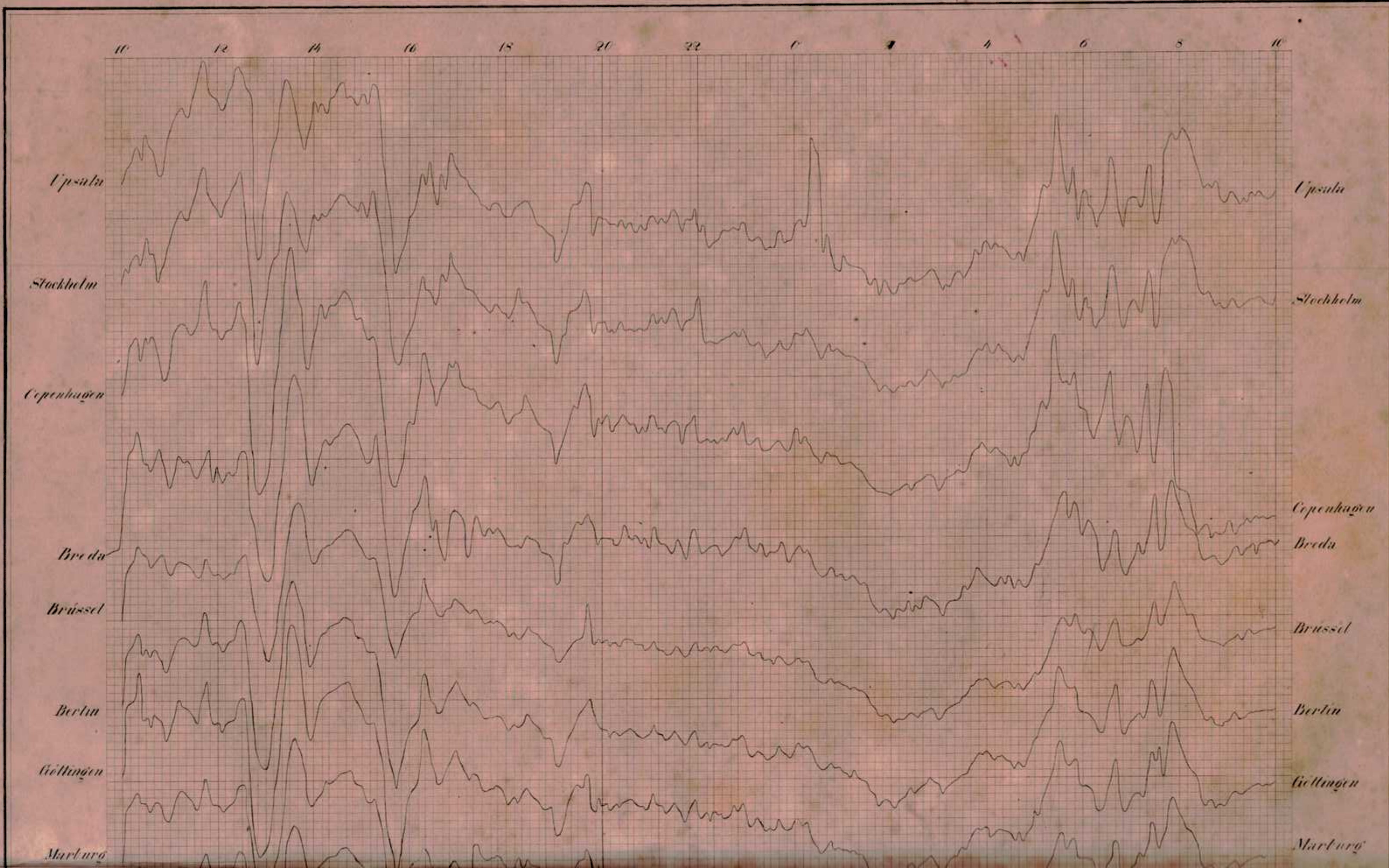


Leipzig
Prag
Cracau
Breslau
Kremsmünster
Heidelberg
Gent
Mailand
10
12
14
16
18
20
22
0
2
4
6
8
10

TAF. I.

Declinations-Beobachtungen vom 26. & 27. Februar 1841.

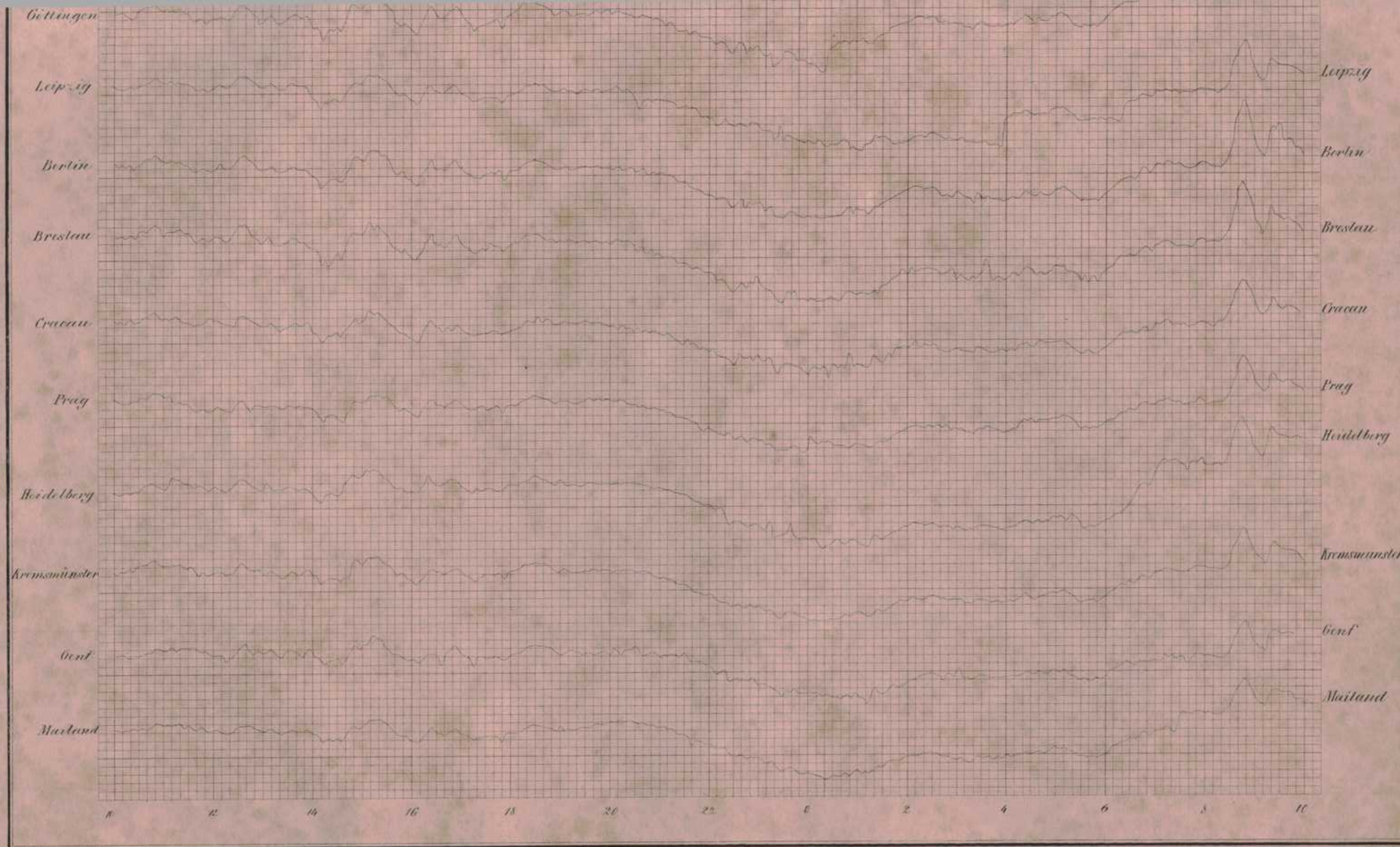
Zu den Resultaten 1841



TAF. VII.

Declinations-Beobachtungen vom 26. und 27. November 1841.

Zu den Resultaten 1841

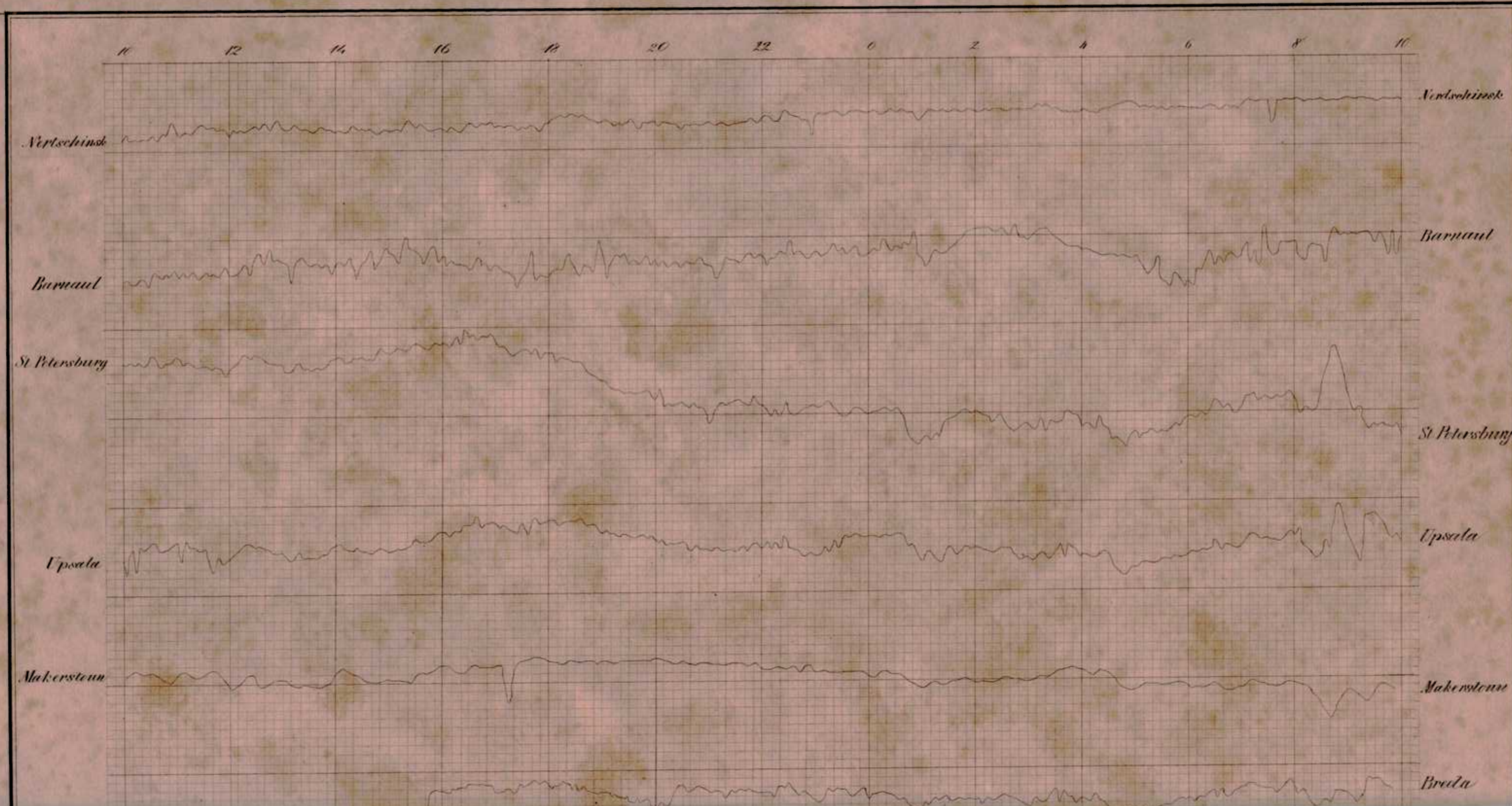


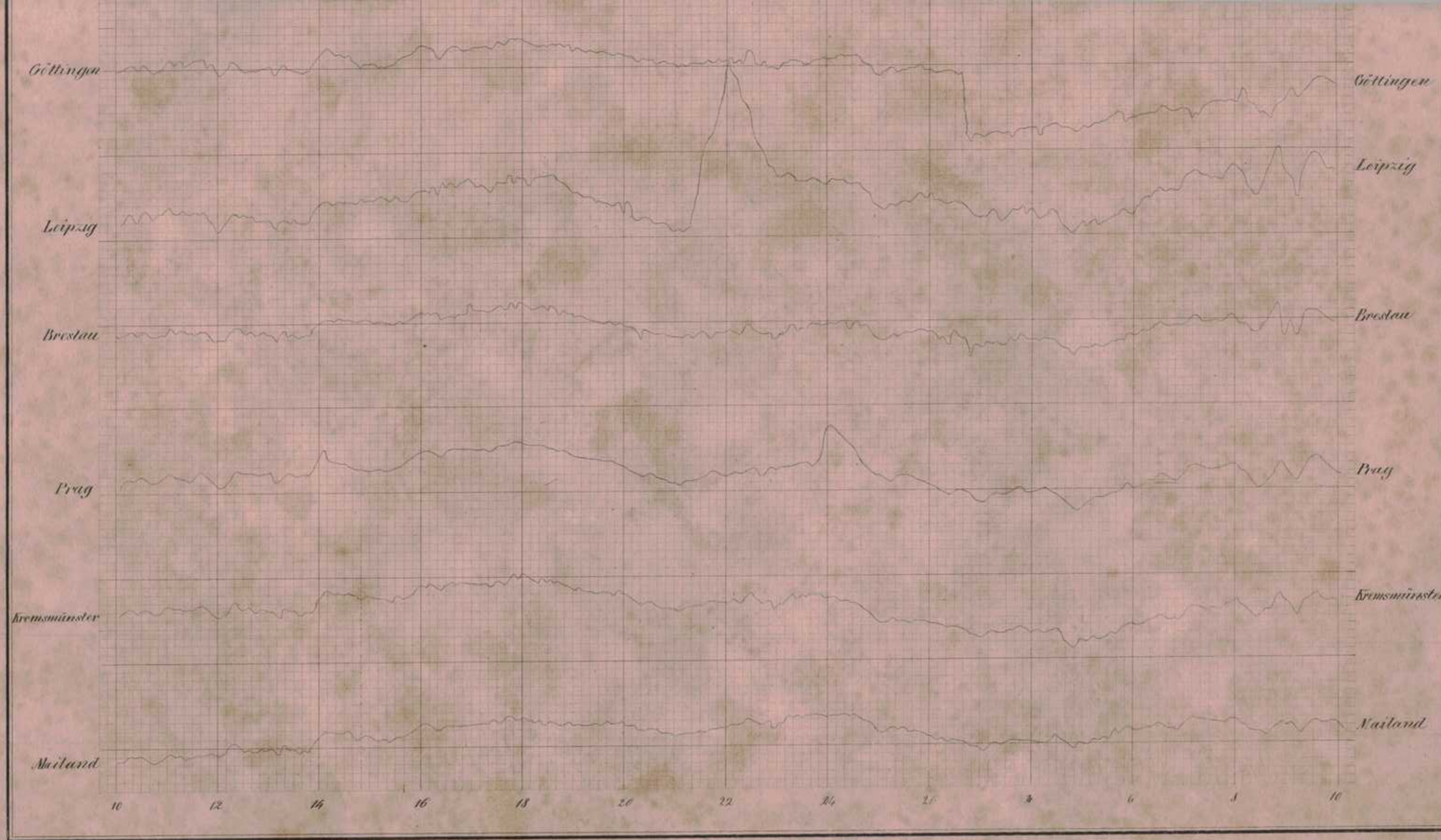
Göttingen
Leipzig
Berlin
Breslau
Cracau
Prag
Heidelberg
Kremsmünster
Genf
Mailand
Leipzig
Berlin
Breslau
Cracau
Prag
Heidelberg
Kremsmünster
Genf
Mailand
10
12
14
16
18
20
22
0
2
4
6
8
10

TAF. VIII

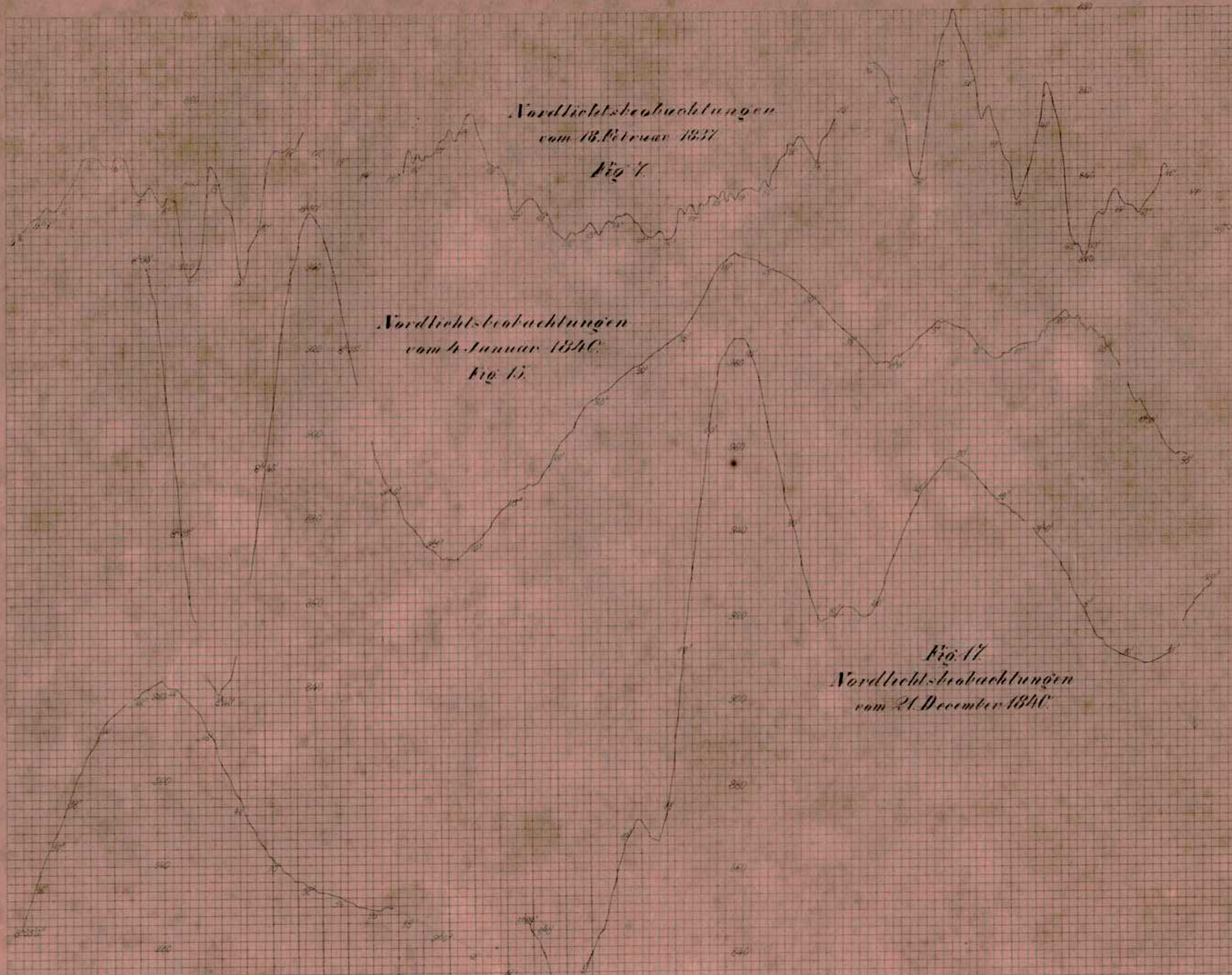
Beobachtungen der horizontalen Intensität vom 26 und 27 November 1841

Zu den Resultaten 1841




Göttingen
Leipzig
Breslau
Prag
Kremsmünster
Mailand
10 12 14 16 18 20 22 24 2 4 6 8 10
Göttingen
Leipzig
Breslau
Prag
Kremsmünster
Mailand

TAB. IV.



Nordlichtsbeobachtungen vom 18. Februar 1837. Fig. 7.

Nordlichtsbeobachtungen vom 4. Januar 1840. Fig. 15.

Fig. 17. Nordlichtsbeobachtungen vom 21. December 1840.

vom [illegible] September [illegible]

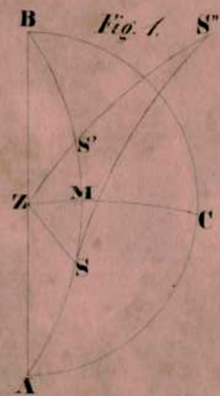


Fig. 1.

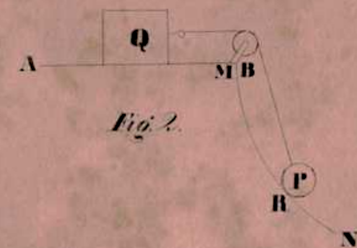


Fig. 2.

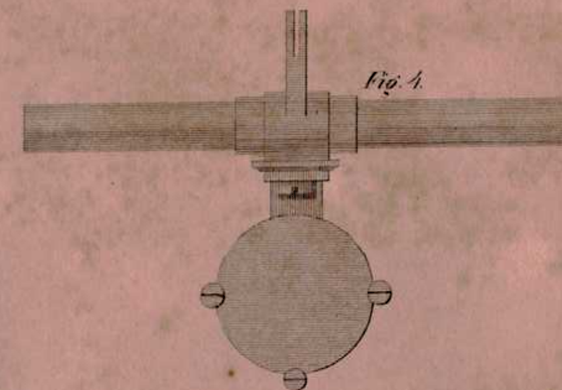


Fig. 4.

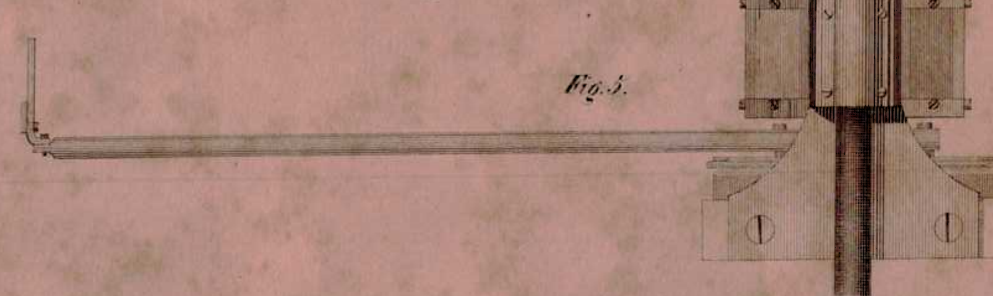


Fig. 5.

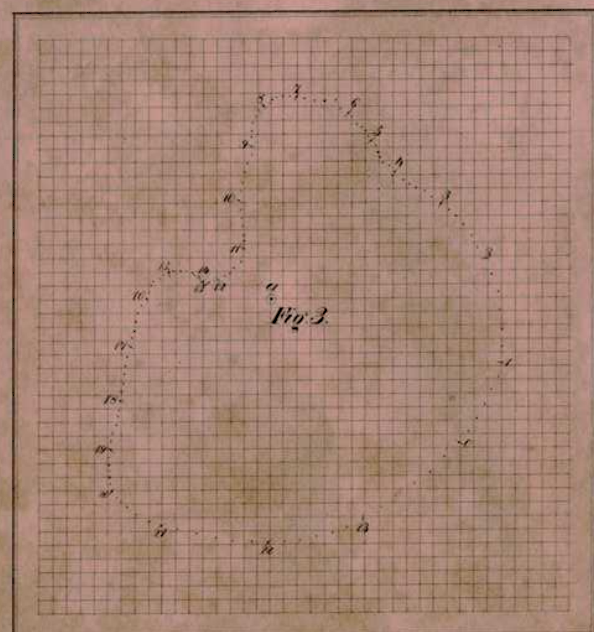


Fig. 3.

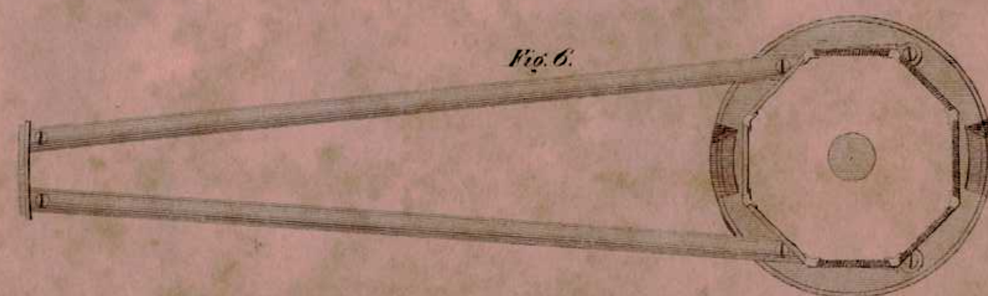


Fig. 6.

6.

Fig. 8.

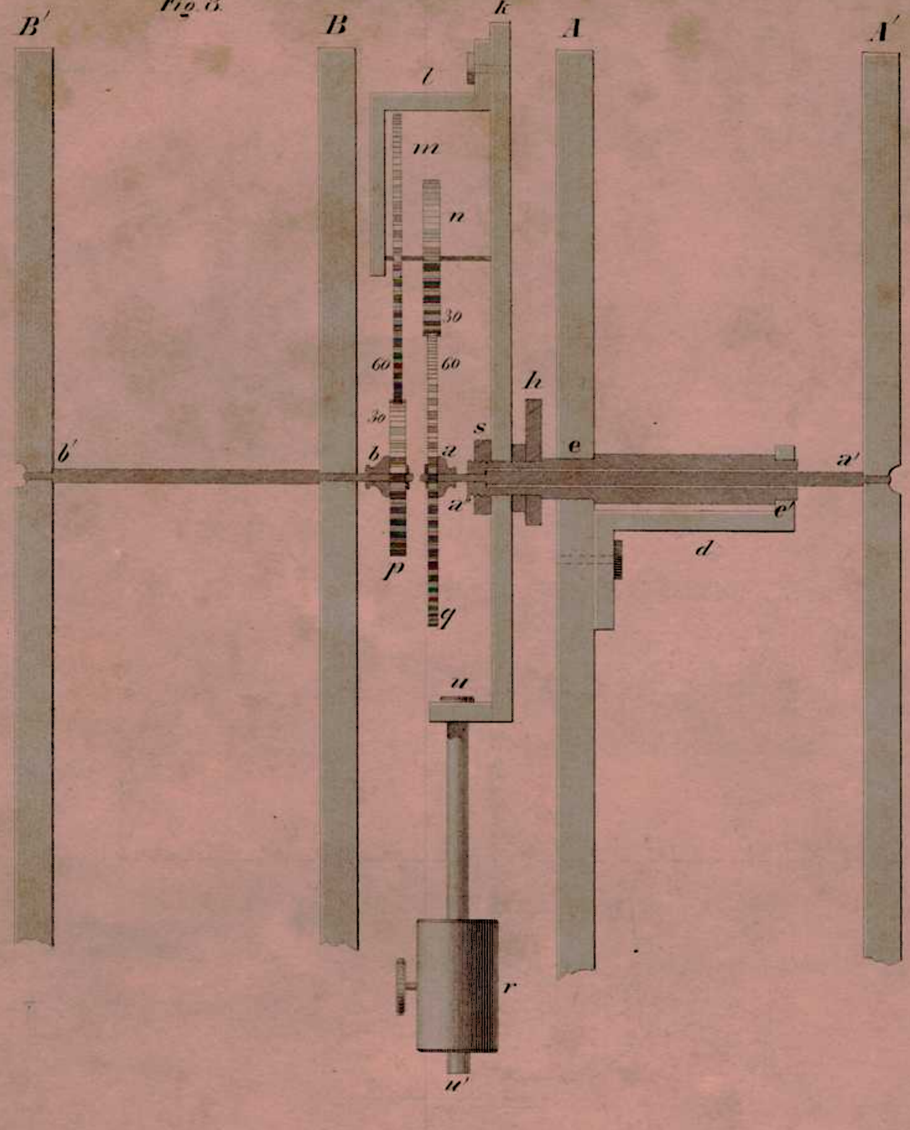


Fig. 9.

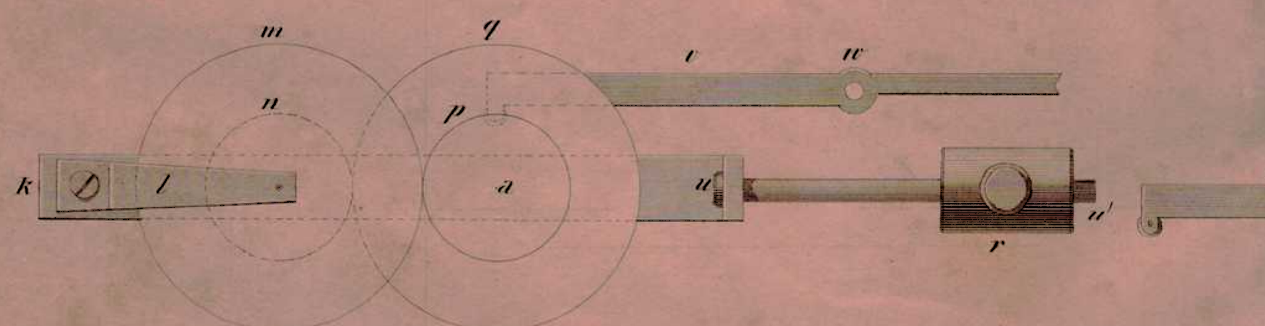
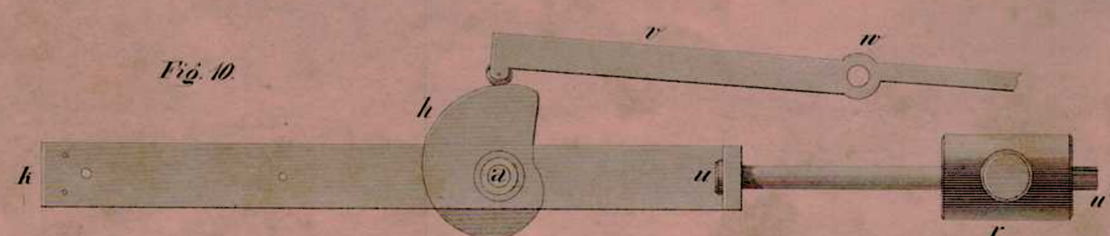


Fig. 10.



Lith. Anst. v. F. E. Ritmüller, Göttingen.

Fig. 11.

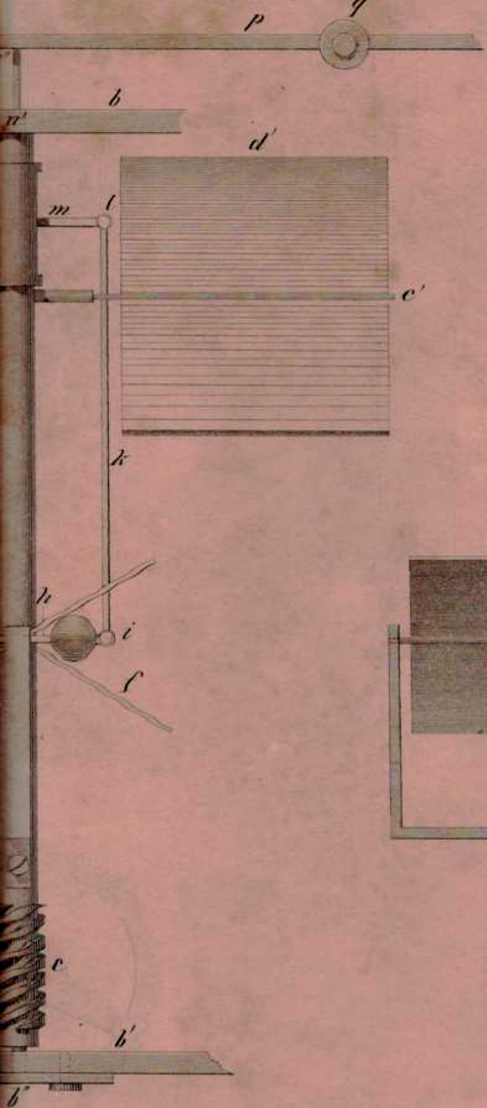


Fig. 12.

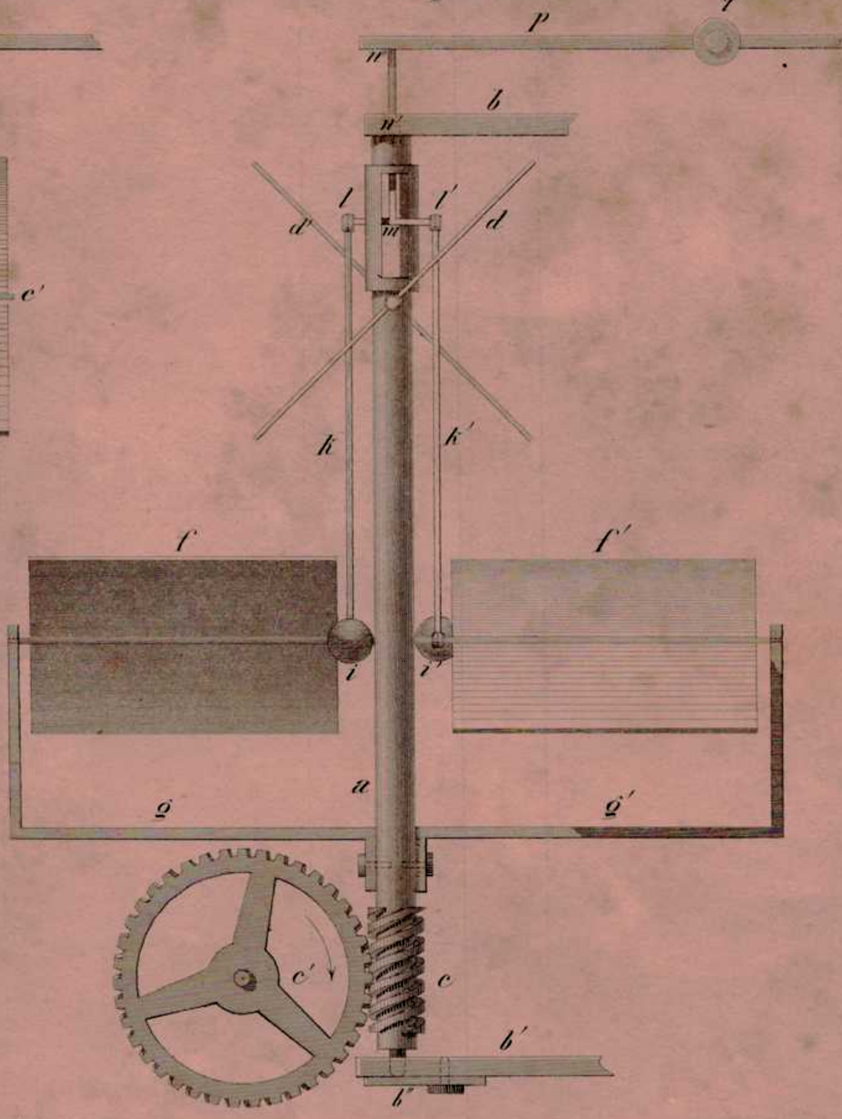


Fig. 13.

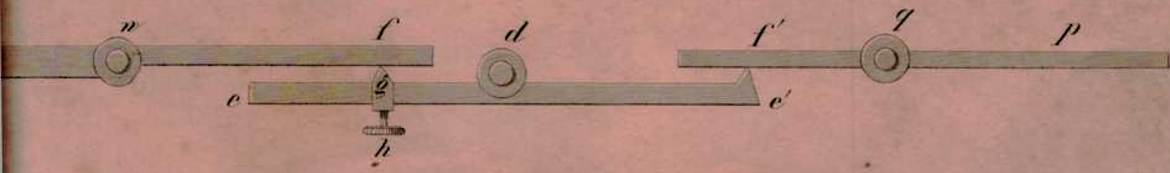


Fig. 14.