

## Tesis de Posgrado

# Aproximación determinantal en la dispersión pion - nucleon

Garibotti, Carlos Roberto

1963

Tesis presentada para obtener el grado de Doctor en Ciencias Físicas de la Universidad de Buenos Aires

Este documento forma parte de la colección de tesis doctorales y de maestría de la Biblioteca Central Dr. Luis Federico Leloir, disponible en [digital.bl.fcen.uba.ar](http://digital.bl.fcen.uba.ar). Su utilización debe ser acompañada por la cita bibliográfica con reconocimiento de la fuente.

This document is part of the doctoral theses collection of the Central Library Dr. Luis Federico Leloir, available in [digital.bl.fcen.uba.ar](http://digital.bl.fcen.uba.ar). It should be used accompanied by the corresponding citation acknowledging the source.

**Cita tipo APA:**

Garibotti, Carlos Roberto. (1963). Aproximación determinantal en la dispersión pion - nucleon. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad de Buenos Aires.  
[http://digital.bl.fcen.uba.ar/Download/Tesis/Tesis\\_1183\\_Garibotti.pdf](http://digital.bl.fcen.uba.ar/Download/Tesis/Tesis_1183_Garibotti.pdf)

**Cita tipo Chicago:**

Garibotti, Carlos Roberto. "Aproximación determinantal en la dispersión pion - nucleon". Tesis de Doctor. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad de Buenos Aires. 1963.  
[http://digital.bl.fcen.uba.ar/Download/Tesis/Tesis\\_1183\\_Garibotti.pdf](http://digital.bl.fcen.uba.ar/Download/Tesis/Tesis_1183_Garibotti.pdf)

UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES

FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

APROXIMACION DETERMINANTAL EN LA

DISPERSION FICM + NUCLEOS

Carlos R. Garibotti

RESUMEN

1963

*R. de Terr.* 1133

# DISCUSIÓN

En la teoría de potencial, el método de las funciones de Jost da una forma de calcular la amplitud de dispersión, en aquellos casos donde la constante de acoplamiento es de un orden tal, que la serie perturbativa carece de sentido. Estas funciones están definidas en términos de ciertas soluciones de la ecuación de ondas radial, lo cual limita su interpretación en casos más generales.

Un método idéntico a éste, cuando se considera potenciales radiales, es el determinantal, pero su planteo es formalmente más amplio y sugiere la posibilidad de extenderlo.

El objeto del presente trabajo, es estudiar la extensión, al caso en que exista la posibilidad de creación de partículas y, en particular, a la dispersión pión-nucleón. Mostramos que, de forma análoga al caso de un potencial, puede expresarse la amplitud de dispersión como cociente de dos funciones, en el caso de considerarse sólo procesos elásticos, y de dos matrices, cuando se toman en cuenta los canales inelásticos. Podemos asimismo mostrar que dichas funciones están ligadas mediante una relación de dispersión, y que si la amplitud es unitaria la función (o matriz) numerador  $r(s)$ , no tiene singularidades en la región física del plano  $s$ . Queda entonces, establecida una relación unívoca, entre la amplitud y  $r(s)$ , que permite calcular el desarrollo de ésta, a partir de la serie perturbativa de aquella. Sin embargo, no es posible probar que  $r(s)$  sea una función entera de la constante de acoplamiento, como ocurre cuando se trata un potencial, y únicamente puede tenerse la esperanza que los resultados sean razonables. El procedimiento anterior, puede también considerarse como una solución iterativa de las ecuaciones  $N/D$  de la teoría de matriz  $S$ . Esta interpretación nos permite mostrar que el método determinantal viola la simetría de cruces.

Aunque estas ideas pueden aplicarse a cualquier proceso, las usamos específicamente en la dispersión elástica pión-nucleón. El cálculo del primer orden determinantal es simple y da buenos valores para las ondas  $P$  pequeñas, pero no logra obtener una resonancia en la onda  $P_{33}$ . El paso natural de calcular el siguiente orden, resulta impracticable debido a la complejidad del

cuarte era en perturbative, en esta forma el criterio de aproximación determinantal no puede aplicarse. Recurrimos entonces a las reglas de cálculo del método N/D, introduciendo gráficos fenomenológicos, que representan las singularidades de la amplitud más cercanas a la región física, y que por lo tanto sólo describen el potencial de large range. Los gráficos considerados son, el intercambio de un nucleón por un  $\rho$  y un  $N^*$  en los canales cruzados y el polo directo del nucleón. El uso de la variable  $s$ , que tiene, respecto a la variable  $W$ , la ventaja de mejorar la convergencia de la relación de dispersión que aparece, presenta la dificultad de introducir un corte sinemático a lo largo del eje real negativo, que aunque no está acetado por la relación de unitariedad, su distancia a la región física nos permite suponer que su influencia no es grande. De otra forma, podemos interpretar, que los procesos fenomenológicos sólo representan un modo de considerar parte de la contribución de los órdenes perturbativos altos, y así independizarnos del análisis de las singularidades. Para evitar la divergencia de la contribución del  $N^*$ , debemos admitir que el  $\rho$  y el  $N^*$  se comportan como polos de Regge y no como partículas elementales; este nos autoriza a usar un corte en la integral, que simule el comportamiento asintótico de la amplitud. Sin embargo el cálculo es muy poco sensible a las variaciones de su valor, lo cual es una consecuencia de utilizar la variable  $s$ .

Usando las constantes de acoplamiento que resultan de considerar el intercambio de un  $\rho$  en algunos procesos usuales, se obtiene la resonancia de la onda  $P_{33}$  en 330 Mev., con un ancho excesivo. Nos vemos entonces precisados a tomar en cuenta la contribución inelástica en el factor de forma del pión, a través de una substracción; este produce mayores valores de las constantes de acoplamiento del  $\rho$ , lográndose así un buen acuerdo con todas las ondas P experimentales. Las ondas S, debido a la ausencia de la barrera centrífuga, dependen de la interacción de corto range y nuestro cálculo no da buenos resultados. En la última parte, discutimos la extensión del método, al caso en que existan varios canales posibles. Vemos que en el límite, de suponer que los elementos de la matriz sumador son funciones enteras, el método es completo y evita la necesidad de hipotéticas representaciones de las singularidades.

*Carlos Jambotti*

UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES

FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

APROXIMACION EXPERIMENTAL DE LA

DISPERSION FICOM DE NUCLEON

Carlos R. Garibetti

TESIS: 1183

Tesis presentada para optar al título de Doctor en Ciencias Físicas

Año: 1963

<b>RESUMEN</b>	1
<b>I. TEORIA DE POTENCIAL.</b>	
1. Ecuación de dispersión	1
2. Funciones de Jost	3
3. Método Determinantal	8
4. Relación entre $D_1$ y $\delta_1$	11
5. Convergencia y analiticidad de $D_1$	14
6. Método de cálculo y aplicaciones	19
<b>II. TEORIA DE CAMPOS</b>	
7. Introducción	23
8. Método Unicanal	27
9. Método de cálculo y comparación con el N/D	31
<b>III. DISPRESION ELASTICA PION - NUCLEON</b>	
10. Introducción	34
11. Cinemática	37
12. Diagramas perturbativos	
Término del nucleón	41
Mesón	42
Resonancia $N^*$	46
13. Análisis del cálculo y comparación con los resultados experimentales	48
Pole	51
Gráficos fenomenológicos	53
<b>IV. METODO MULTICANAL</b>	
14. Formulación	58
15. Propiedades analíticas de $r(s)$ y simetrización	61
16. Método de cálculo	65
<b>APENDICE I. Propiedades de las funciones especiales usadas</b>	68
<b>APENDICE II. Igualdad de la función de Jost y el determinante</b>	69
<b>APENDICE III. Singularidades de la amplitud de dispersión</b>	71
<b>Agradecimientos</b>	73
<b>Explicación de las figuras</b>	74
<b>Referencias</b>	76

I. TEORIA DE POTENCIAL

1. ECUACION DE DISPERSION

Consideremos la ecuación de Schrödinger con un hamiltoniano de interacción

$H_I$

$$H \Psi = (H_0 + H_I) \Psi = E \Psi \quad (1.1)$$

que, en el caso de un sistema de dos partículas en su centro de masa, se escribe

$$\left[ -\frac{\hbar^2}{2\mu} \nabla^2 + H_I(\vec{r}) \right] \Psi(\vec{r}) = E \Psi(\vec{r}) \quad (1.2)$$

donde  $\mu$  es la masa reducida del par y  $\vec{r}$  el radio vector relativo.

Por simplicidad particularizaremos el problema al de un potencial radial entre partículas sin spin, aunque un tratamiento similar es posible para un potencial invariante ante rotaciones; por lo tanto

$$H_I(\vec{r}) = \lambda V(r) \quad (1.3)$$

y la ecuación (1.2) puede escribirse:

$$\left[ \nabla^2 + \lambda \frac{2\mu}{\hbar^2} V(r) \right] \Psi(\vec{r}) = k^2 \Psi(\vec{r}) \quad (1.4)$$

con

$$k^2 = \frac{2\mu E}{\hbar^2}$$

El problema de dispersión se reduce a encontrar la solución de la ecuación diferencial (1.4), que satisface la condición física que en el infinito, sea la superposición de una onda plana más una onda esférica saliente. La ecuación diferencial (1.4) sujeta a la condición asintótica enunciada, puede expresarse como una ecuación integral

$$\Psi(\vec{k}, \vec{r}) = \Psi_0(\vec{k}, \vec{r}) + \lambda \int d^3r' G_+(\vec{k}, \vec{r}, \vec{r}') V(r') \Psi_+(\vec{k}', \vec{r}') \quad (1.5)$$

En el segundo miembro  $\Psi_0$  es la solución de la ecuación homogénea ( $H_I=0$ ), es decir una onda plana:

$$\Psi_0(\vec{k}, \vec{r}) = \left[ \frac{\mu k}{\hbar^2 (2\pi)^3} \right]^{1/2} e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} \quad (1.6)$$

con  $\hbar k$  es el momento lineal. Usamos la normalización:

$$\int d\vec{r}' \Psi_0^*(\vec{k}, \vec{r}) \Psi_0(\vec{k}', \vec{r}') = \frac{\mu k}{\hbar^2} \delta(\vec{k} - \vec{k}') = \delta(\epsilon - \epsilon') \delta(\Omega_k - \Omega_{k'}) \quad (1.7)$$

El otro término representa la solución particular, la condición de onda esférica saliente, define la función de Green

$$G_0(k, \vec{r}, \vec{r}') = -\frac{\mu}{2\pi\hbar^2} \frac{e^{ik|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \quad (1.8)$$

La expresión (1.5) es la ecuación integral de dispersión, cuya solución iterativa en potencias de  $\lambda$ , constituye la serie de Born del problema.

Dado que el potencial es central, es posible separar la parte angular en la ecuación (1.5), mediante una descomposición en ondas parciales; para ello desarrollemos todas las funciones que aparecen en la ecuación mencionada, en parte radial y angular. Las expresiones usuales se escriben:<sup>2</sup>

$$G_0(k, r, r') = \left(\frac{2\mu}{\hbar^2}\right)^{-1} \sum_l \frac{1}{r r'} G_2(k, r, r') \sum_m Y_l^m(\vec{r}) Y_l^m(\vec{r}') \quad (1.9)$$

con:

$$G_2(k, r, r') = (-1)^{l+1} k^{-1} u_2(kr_<) u_2(kr_>) \quad (1.10)$$

donde  $r_<$  es el menor y  $r_>$  el mayor entre  $r$  y  $r'$

$$\Psi_0(\vec{k}, \vec{r}) = \left(\frac{2\mu k}{\hbar^2}\right)^{1/2} (kr)^{-1} \sum_l i^l u_2(kr) \sum_m Y_l^m(\vec{r}) Y_l^m(\vec{k}) \quad (1.11)$$

siendo:<sup>3</sup>

$$\begin{aligned} u_2(k) &= \xi j_l(\xi) = \left(\frac{\pi \xi}{2}\right)^{1/2} J_{l+1/2}(\xi) \\ u_2(k) &= \sqrt{1-u_2^2(k) + i u_2(k)} = -i \xi h_l^{(2)}(\xi) = -i \left(\frac{\pi \xi}{2}\right)^{1/2} H_{l+1/2}^{(2)}(\xi) \end{aligned} \quad (1.12)$$

y  $Y_l^m(\Omega)$  son los esféricos armónicos.<sup>4</sup>

Estos desarrollos son la descomposición en ondas parciales de la onda plana (1.6) y la radial (1.8). La función de onda puede también descomponerse como

$$\Psi_0(\vec{k}, \vec{r}) = \left(\frac{2\mu k}{\hbar^2}\right)^{1/2} (kr)^{-1} \sum_l i^l \Psi_2(k, r) \sum_m Y_l^m(\vec{r}) Y_l^m(\vec{k}) \quad (1.13)$$

Reemplazando en la ecuación integral (1.5), separando variables y haciendo uso de las propiedades de ortogonalidad de los esféricos <sup>armónicos</sup>, el problema queda reducido a una ecuación integral para la función radial  $\Psi_2(k, r)$

$$\Psi_2(k, r) = u_2(kr) + \lambda \int_0^\infty dr' G_2(k, r, r') V(r') \Psi_2(k, r') \quad (1.14)$$



La descomposición (1.13) que define  $\Psi_2(k,r)$  coincide con la separación de variables en la ecuación (1.4), de forma que se satisface :

$$\left[-\frac{d^2}{dr^2} + \lambda V(r) + \frac{\ell(\ell+1)}{r^2}\right] \Psi_2(k,r) = k^2 \Psi_2(k,r) \quad (1.15)$$

con la condición física asintótica proyectada. La validez de esta ecuación puede probarse por otro lado, reemplazando directamente (1.14) en (1.15), usando las propiedades de las funciones de Bessel.

La ecuación integral (1.14) puede ser resuelta iterativamente

$$\begin{aligned} \Psi_2(k,r) = & u_2(kr) + \lambda \int_0^{\infty} dr' G_2(k,r,r') V(r') u_2(kr') + \\ & + \lambda^2 \int_0^{\infty} dr' G_2(k,r,r') V(r') \int_0^{\infty} dr'' G_2(k,r',r'') V(r'') u_2(kr'') + \dots \end{aligned} \quad (1.16)$$

Sin embargo es conocido, que esta serie no converge para grandes valores de la constante de acoplamiento  $\lambda$ , luego no es posible considerar el método iterativo como un procedimiento general de resolver el problema de dispersión. Es necesario encontrar soluciones de la ecuación (1.15) que sean funciones enteras de  $\lambda$ ,<sup>5</sup> y que al mismo tiempo estén relacionadas con las magnitudes físicas que describen el proceso. En la próxima sección, se probará que es posible hallar tales soluciones; aunque estas no satisfacen las condiciones de contorno físicas, se relacionan simplemente con la amplitud de dispersión y permiten el cálculo para un valor de  $\lambda$  cualquiera.

## 2. FUNCIONES DE JOST

Definiremos soluciones de la ecuación diferencial (1.15) que sean funciones enteras de  $\lambda$ , mediante una elección apropiada del comportamiento en el origen e en infinito. Para poder definir soluciones regulares, en el origen e en el infinito, es necesario limitar las condiciones del potencial, exijamos que en el origen vaya más lento que  $1/r^2$  y en infinito por debajo que  $1/r$ .<sup>6</sup> Con estas condiciones es posible elegir, una solución  $\Psi_2(k,r)$  que sea regular en el origen imponiendo la condición,<sup>7</sup>

$$\lim_{r \rightarrow 0} \Psi_2(k,r) = \frac{u_2(k,r)}{r^{\ell+1}} \quad (2.1)$$

Esta condición de nulidad en el origen, define  $\psi_\ell(k,r)$  a menos de una constante multiplicativa. De (1.15) y (2.1) es evidente que:

$$\psi_\ell(k,r) = \psi_\ell(-k,r) \quad (2.2)$$

La condición impuesta en infinito al potencial, permite definir otra solución  $f_\ell(k,r)$ , que se comporta como:<sup>8</sup>

$$\lim_{r \rightarrow \infty} f_\ell(k,r) = u_\ell(kr) = i^\ell e^{-ikr} \quad (2.3)$$

Mientras que cerca del origen, como  $V(r)$  es superado por el término centrífugo,  $f_\ell(k,r)$  debe tender a una solución de partícula libre. Esta debe ser proporcional a  $u_\ell(kr)$  para que se cumpla (2.3), por lo tanto  $f_\ell(kr)$  no es regular en cero.<sup>9</sup> Notemos que  $f_\ell(-kr)$  también es solución y es independiente de  $f_\ell(kr)$  para  $k$  real,

$$f_\ell^*(-k,r) = (-1)^\ell f_\ell(k,r) \quad (2.4)$$

Para estudiar las propiedades de  $\psi_\ell(k,r)$  y  $f_\ell(k,r)$  en término de  $\lambda$ , es conveniente obtener ecuaciones integrales para ambas; definamos la función:

$$\begin{aligned} g_\ell(k,r,r') &= \frac{\lambda(\ell+1)}{2k} [u_\ell(kr) u_\ell(-kr') - u_\ell(-kr') u_\ell(kr)] \\ &= \frac{1}{k} [u_\ell(kr') N_\ell(kr) - u_\ell(kr) N_\ell(kr')] \end{aligned} \quad (2.5)$$

Por reemplazo directo en la ecuación

$$\left[ -\frac{d^2}{dr^2} + \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} - k^2 \right] G_\ell(k,r,r') = \delta(r-r') \quad (2.6)$$

podemos verificar que:

$$G_\ell^{\psi}(k,r,r') = \Theta(r-r') g_\ell(k,r,r')$$

y

$$G_\ell^f(k,r,r') = -\Theta(r'-r) g_\ell(k,r,r') \quad (2.7)$$

son funciones de Green de la ecuación (1.15); de otra forma estas son las expresiones comunes de la función de Green, como combinación de las soluciones de la ecuación homogénea.<sup>10</sup>

Usando (2.7) podemos plantear las ecuaciones integrales que se desea:

$$\psi_\ell(k,r) = \frac{u_\ell(kr)}{k^{2\ell+1}} + \lambda \int_0^\infty dr' g_\ell(k,r,r') V(r') \psi_\ell(k,r') \quad (2.8)$$

y

$$f_\ell(k,r) = N_\ell(kr) - \lambda \int_r^\infty dr' g_\ell(k,r,r') V(r') f_\ell(k,r') \quad (2.9)$$

el primer sumando de ambas ecuaciones es la solución de la ecuación diferen

cial homogénea y es evidente que, las condiciones (2.1) y (2.3) se satisfacen.

Puede probarse a partir de estas expresiones, que las dos funciones definidas  $\psi_\ell(k,r)$  y  $f_\ell(k,r)$ , son funciones enteras de la constante de acoplamiento o intensidad del potencial  $\lambda$ .<sup>11</sup>

No es nuestro interés estudiar las propiedades de estas funciones, sino definir a partir de ellas cantidades que permitan describir en forma simple el proceso, y que al mismo tiempo converjan para todo  $\lambda$ . Definamos la función de Jost  $f_\ell(k)$ :

$$f_\ell(k) = W [f_\ell(k,r), \psi_\ell(k,r)] k^\ell \quad (2.10)$$

donde  $W$  indica el wronskiano de las dos funciones, esto es:

$$W [f(x), g(x)] = f(x) \frac{d g(x)}{d x} - \frac{d f(x)}{d x} g(x) \quad (2.11)$$

Dado que la ecuación (1.15) no contiene derivadas de primer orden, el wronskiano de dos de sus soluciones independientes no depende de  $r$ , por lo tanto podemos calcular  $f_\ell(k)$  en base a las condiciones límites:

$$f_\ell(k) = \lim_{r \rightarrow 0} [f_\ell(k,r) \psi_\ell'(k,r) - f_\ell'(k,r) \psi_\ell(k,r)] k^\ell \quad (2.12)$$

usando (2.1):

$$f_\ell(k) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{(kr)^\ell f_\ell(k,r)}{(2\ell-1)!!} \quad (2.13)$$

con (2.9), (2.5) y las condiciones límites de  $w_\ell(k,r)$  que se dan en el apéndice I,

$$\lim_{r \rightarrow 0} f_\ell(k,r) = \frac{(2\ell-1)!!}{(kr)^\ell} + \lambda \int_0^\infty dr' V(r') f_\ell(k,r') \frac{1}{k} \frac{(2\ell-1)!!}{(kr)^\ell} u_\ell(kr)$$

Reemplazando en (2.13) obtenemos una ecuación integral que permite calcular la función de Jost  $f_\ell(k)$ :

$$f_\ell(k) = 1 + \frac{\lambda}{k} \int_0^\infty dr f_\ell(k,r) V(r) u_\ell(k,r) \quad (2.14)$$

Tomando el límite en (2.12) para  $r$  tendiendo a infinito y procediendo en forma análoga,

$$f_\ell(k) = 1 + \lambda k^\ell \int_0^\infty dr \psi_\ell(k,r) V(r) w_\ell(k,r) \quad (2.15)$$

reemplazando  $\psi_\ell(k,r)$  por su solución iterativa:

$$\begin{aligned} \psi_\ell(k,r) = & \frac{u_\ell(kr)}{k^{\ell+1}} + \lambda \int_0^r dr' g_\ell(k,r,r') V(r') \frac{u_\ell(kr')}{k^{\ell+1}} \\ & + \lambda^2 \int_0^r dr' g_\ell(k,r,r') \psi_\ell(k,r') \int_0^{r'} dr'' g_\ell(k,r',r'') \psi_\ell(k,r'') \frac{u_\ell(kr'')}{k^{\ell+1}} + \dots \end{aligned} \quad (2.16)$$

que muestra que,  $\Psi_\ell(k,r)$  es una función real para  $k$  real.

El desarrollo de la función de Jost, en la constante de acoplamiento es:

$$f_\ell(k) = 1 + \frac{\lambda}{k} \int_0^\infty dr u_\ell(k,r) V(r) w_\ell(k,r) + \frac{\lambda^2}{k} \int_0^\infty dr \psi_\ell w_\ell(k,r) \int_0^r dr' g_\ell(k,r,r') \psi_\ell^{(1)} u_\ell(k,r') + \dots \quad (2.17)$$

Dado que para  $r$  pequeños el primer término de (2.16) describe esencialmente  $\Psi_\ell(k,r)$ , cuanto menor sea el rango del potencial, mejor será la convergencia de la serie (2.17). Como se verá más adelante, esta serie converge para todo valor de  $\lambda$ , es decir  $f_\ell(k)$  es una función entera de  $\lambda$ .

Es ahora necesario expresar la amplitud de transición en término de  $f_\ell(k)$ . Como  $f_\ell(k,r)$  y  $f_\ell(-k,r)$  son dos soluciones independientes de la ecuación diferencial (1.15), podemos expresar cualquier otra solución, tal como  $\Psi_\ell(k,r)$  como combinación lineal de ellas.

$$\Psi_\ell(k,r) = A_\ell(k) f_\ell(k,r) + B_\ell(k) f_\ell(-k,r) \quad (2.18)$$

efectuando el cálculo en  $r \rightarrow \infty$ :

$$W[f_\ell(k,r); f_\ell(-k,r)] = (-1)^\ell 2ik \quad (2.19)$$

por lo tanto reemplazando (2.18) en (2.10) y usando (2.19),

$$B_\ell(k) = -(-1)^\ell \frac{i}{2} k^{-(\ell+1)} f_\ell(k) \quad (2.20)$$

como  $\Psi_\ell(k,r)$  es una función par de  $k$ ,

$$A_\ell(k) = +B_\ell(-k)$$

$$\Psi_\ell(k,r) = \frac{i}{2} k^{-(\ell+1)} [f_\ell(-k) f_\ell(k,r) - (-1)^\ell f_\ell(k) f_\ell(-k,r)] \quad (2.21)$$

en el límite de  $r$  tendiendo a infinito es:

$$\Psi_\ell(k,r) \underset{r \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{2} \left(\frac{i}{k}\right)^{\ell+1} f_\ell(k) \left[ e^{-ikr} - (-1)^\ell \frac{f_\ell(k)}{f_\ell(-k)} e^{ikr} \right] \quad (2.22)$$

tenemos de esta forma expresada asintóticamente la solución  $\Psi_\ell(k,r)$  como combinación lineal de una onda esférica entrante, más una esférica saliente. Nótese que las funciones que estamos considerando están definidas a un factor  $r$  respecto a la función radial que resulta en la separación de la ecuación de Schrödinger, esto proviene de la descomposición (1.13), por consiguiente  $f_\ell(k,r)$  y  $f_\ell(-k,r)$  representan la onda esférica radial.

Comparemos la función  $\Psi_\ell(k,r)$ , con la solución física  $\Psi_\ell(k,r)$ , el comportamiento

te en infinito de esta es.<sup>12</sup>

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \Psi_l(k,r) = \frac{1}{(2l+1) i^l} A_l \text{Sen} \left( kr - \frac{l\pi}{2} + \delta_l \right) \quad (2.23)$$

reemplazando en (1.13) y exigiendo que  $\Psi_l(k,r)$  sea, asintóticamente, una onda plana más una esférica emergente resulta,

$$A_l = (2l+1) i^l e^{i\delta_l}$$

o sea:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \Psi_l(k,r) = \frac{1}{2} i^{\ell+1} \left[ e^{-ikr} - (-1)^l S_\ell(k) e^{ikr} \right] \quad (2.24)$$

con

$$S_\ell(k) = e^{2i\delta_\ell(k)} \quad (2.25)$$

por lo tanto, dado que  $\Psi_l(k,r)$  y  $\Psi_l(k,r)$  tienen igual comportamiento asintótico, deben ser proporcionales; de (2.22) y (2.23):

$$\Psi_l(k,r) = \frac{1}{k^{l+1}} f_\ell(-k) \Psi_l(k,r) \quad (2.26)$$

y

$$S_\ell(k) = f_\ell(k) / f_\ell(-k) \quad (2.27)$$

o sea

$$S_\ell(-k) = 1 / S_\ell(k) \quad (2.28)$$

Luego el método de las funciones de Jost, permite obtener los elementos de la matriz S, como cociente de dos funciones enteras en la constante de acoplamiento, esto ya es por sí una gran ventaja sobre el método perturbativo.

En la próxima sección demostraremos la convergencia de la serie de  $f_\ell(k)$ , e introduciremos un procedimiento que evita el uso explícito de la ecuación de Schrödinger y sus soluciones, y que en principio, es posible extenderlo a casos muy generales.

Antes podemos mostrar que tanto la fase como el módulo de  $f_\ell(k)$  tienen un significado físico directo, en efecto, como  $\Psi_l(k,r)$  es una función real, de (2.4) y (2.10) resulta:

$$f_\ell^*(k) = f_\ell(k) \quad (2.29)$$

esta relación representa la condición de unitariedad y simetría de S, de (2.27)

$$S_\ell^*(k) S_\ell(k) = 1 \quad S_\ell(k) = S_\ell^*(-k) \quad (2.30)$$

o sea:

$$|S_\ell(k)| = 1$$

y permite escribir

$$f_\ell(k) = |f_\ell(k)| e^{i\delta_\ell(k)} \quad (2.31)$$

es decir la fase de  $f_l(k)$  es realmente el corrimiento de fase del proceso. Para dar un sentido a  $|f_l(k)|$  observemos que de (2,1) y (2.25)

$$\lim_{r \rightarrow 0} \Psi_l(k,r) = \frac{u_l(k,r)}{f_l(k)} \quad (2.32)$$

como  $u_l(k,r)$  es la función de onda radial en ausencia de potencial, la llamamos  $\Psi_l^{(0)}(k,r)$  y de (2.29)

$$|f_l(k)|^{-2} = \lim_{r \rightarrow 0} |\Psi_l(k,r) / \Psi_l^{(0)}(k,r)|^2 \quad (2.33)$$

esto es la razón entre la probabilidad de encontrar la partícula en el origen, con un potencial  $V(r)$  a la de encontrarla allí libre, este cociente se le acostumbra llamar factor de incremento,<sup>13</sup> de esta forma la función de Jost contiene gran cantidad de información física. Por último hagamos notar que todas estas relaciones son válidas para  $k$  real, luego de introducir el procedimiento determinantal discutiremos la extensión al plano complejo.

### 3. METODO DETERMINANTAL:

La función de Jost como ha sido definida en la sección anterior, está íntimamente relacionada al método de Fredholm, aplicado a la ecuación (1.14).<sup>14</sup>

Esta es una ecuación integral de segundo orden cuyo núcleo es:

$$K(k,r,r') = G_2(k,r,r') V(r') \quad (3.2)$$

entonces su solución puede escribirse<sup>15</sup>

$$\Psi_l(k,r) = u_l(k,r) + \lambda \int_0^\infty K_l(k,r,r') u_l(k,r') dr' \quad (3.2)$$

donde:

$$K_l(k,r,r') = \frac{D_l(k,r,r')}{D_l(k)} \quad (3.3)$$

siendo  $D_l(k,r,r')$  el menor de Fredholm

$$D_l(k,r,r') = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\lambda)^n}{n!} \int_0^\infty dr_1 \dots \int_0^\infty dr_n V(r_1) V(r_2) \dots V(r_n) \Delta_l^n(k,r,r',r_1, \dots, r_n)$$

$$\Delta_l^n(k,r,r',r_1, \dots, r_n) = \begin{vmatrix} G_2(k,r,r') & G_2(k,r,r_1) & \dots & G_2(k,r,r_n) \\ G_2(k,r',r') & G_2(k,r',r_1) & \dots & G_2(k,r',r_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ G_2(k,r_n,r') & G_2(k,r_n,r_1) & \dots & G_2(k,r_n,r_n) \end{vmatrix} \quad (3.4)$$

y  $D_L(k)$  el determinante de Fredholm:

$$D_L(k) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \lambda^n \int_0^{\infty} dr_1 \dots \int_0^{\infty} dr_n V(r_1) \dots V(r_n) d_L^n(k, r_1, r_2, \dots, r_n)$$

con

$$d_L^n(k, r_1, r_2, \dots, r_n) = \begin{vmatrix} G_L(k, r_n, r_1) & \dots & G_L(k, r_1, r_n) \\ \vdots & & \vdots \\ G_L(k, r_n, r_1) & \dots & G_L(k, r_1, r_n) \end{vmatrix} \quad (3.5)$$

Es entonces posible probar, como se efectúa en el apéndice II, que es cierta la igualdad:

$$D_L(k) = f_L(-k) \quad (3.6)$$

Como hemos visto la función de Jost suministra toda la información necesaria en el problema de dispersión, esto sugiere introducir un método donde sea la magnitud fundamental y no un resultado del comportamiento asintótico de las soluciones de la ecuación de Schrödinger.

Definamos el determinante<sup>14</sup>

$$D(k) = \det \begin{pmatrix} E-H \\ E-H_0 \end{pmatrix} = \det (1 - G_0(E) H) \quad (3.7)$$

donde formalmente:

$$G_0(E) = (E - H_0)^{-1} \quad (3.8)$$

es la función de Green del sistema no perturbado.

Para dar un significado preciso a este determinante, debemos recurrir al hecho de que la teoría formal de dispersión puede considerarse como un caso límite de la teoría del espectro discreto.<sup>16</sup> Los estados de un sistema de energía positiva sometidos a una perturbación de rango finita, pueden considerarse como límites de los estados estacionarios de un sistema acotado en una caja esférica, cuando el radio de la caja tiende a infinito.

Es posible por consiguiente indicar los estados de la partícula libre como

$$\begin{aligned} \Psi_{\text{libre}} &= \Psi_i & \text{para } E \rightarrow \infty \\ H_0 \Psi_i &= E_0 \Psi_i \end{aligned}$$

Más adelante indicaremos explícitamente el procedimiento para efectuar esto.

Entonces  $D(k)$  será el determinante de la matriz del operador  $1-G(E)H_I$  tomada entre los autoestados de  $H_0$  en la caja; dicha matriz tiene dimensión infinita, pero es posible darle significado desarrollándola en menores, usando la representación *impulse*:<sup>14</sup>

$$D(k) = 1 - \sum_{k_1} \langle k_1 | G_0(E) H_I | k_1 \rangle + \dots + \sum_{k_1, \dots, k_n} \frac{(-1)^n}{n!} \begin{vmatrix} \langle k_1 | G_0(E) H_I | k_1 \rangle & \dots & \langle k_1 | G_0(E) H_I | k_n \rangle \\ \vdots & & \vdots \\ \langle k_n | G_0(E) H_I | k_1 \rangle & \dots & \langle k_n | G_0(E) H_I | k_n \rangle \end{vmatrix} + \dots \quad (3.9)$$

Al tender a infinito el volumen de cuantificación, las sumatorias pasan a ser integraciones sobre las tres componentes del momento.

Sin embargo  $D(k)$  definido en (3.7), <sup>que</sup> como ha sido probado no converge debido a la gran degeneración de los estados y por lo tanto no está definido.<sup>14</sup> Por otro lado para relacionarlo con (3.6) debemos proyectar sobre una onda parcial definida.

El operador de proyección sobre el subespacio de estados de momento angular  $l$  y componente  $m$  según  $z$ ,  $P_j = P_{jm}$ , restringiéndonos a un potencial radial  $H_I = \lambda V(r)$  satisface:

$$[P_j, H_I] = [P_j, H_0] = 0$$

y podemos escribir:

$$D(k) = \det \left\{ \left( \sum_l P_l \right) \left[ 1 - G_0(E) H_I \right] \right\} = \det \left[ 1 - \sum_l P_l G_0(E) H_I \right] = \prod_l \det (1 - G_0(E) H_I) = \prod_{l=0}^{\infty} D_l \quad (3.10)$$

donde se ha usado la propiedad de los proyectores:

$$P_i P_j = \delta_{ij} P_i \qquad \sum_l P_l = 1 \quad (3.11)$$

Al considerar un potencial central,  $D_l(k)$  no depende de  $m$  y puede ponerse:

$$D(k) = \prod_l \left[ D_l(k) \right]^{2l+1} \quad (3.11)$$

Es justamente este producto infinito el que provoca la no existencia del determinante total. El subdeterminante también tiene dimensión infinita y es necesario darle significado desarrollando en menores; en la representación coordenada:

$$D_l(k) = \det (1 - G_{0l}(E) H_I) = 1 - \sum_{r_1} \langle r_1 | G_{0l}(E) H_I | r_1 \rangle + \dots + \sum_{r_1, \dots, r_n} \frac{(-1)^n}{n!} \begin{vmatrix} \langle r_1 | G_{0l}(E) H_I | r_1 \rangle & \dots & \langle r_1 | G_{0l}(E) H_I | r_n \rangle \\ \vdots & & \vdots \\ \langle r_n | G_{0l}(E) H_I | r_1 \rangle & \dots & \langle r_n | G_{0l}(E) H_I | r_n \rangle \end{vmatrix}$$



Teniendo en cuenta que  $H_x |r_{i,n}\rangle = V(r_{i,n}) |r_{i,n}\rangle$  es diagonal en dicha representación y pasando al límite continuo:

$$D_\ell(k) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^{\infty} r_1^2 dr_1 \dots \int_0^{\infty} r_n^2 dr_n V(r_1) \dots V(r_n) \begin{vmatrix} \langle r_1 | G_{0,\ell} | r_1 \rangle & \dots & \langle r_1 | G_{0,\ell} | r_n \rangle \\ \vdots & & \vdots \\ \langle r_n | G_{0,\ell} | r_1 \rangle & \dots & \langle r_n | G_{0,\ell} | r_n \rangle \end{vmatrix} \quad (3.12)$$

como:

$$\langle r_i | G_{0,\ell}(E) | r_j \rangle = \frac{1}{r_i r_j} G_\ell(k, r_i, r_j) \quad (3.13)$$

donde la dependencia angular no se ha hecho explícita, pues se elimina por ortogonalidad, entonces este es precisamente el determinante resolvente del método de Fredholm, como se ha escrito en (3.5); así el subdeterminante parcial de  $D(k)$ , coincide con la función de Jost

$$D_\ell(k) = \det (1 - G_{0,\ell}(k) V(x)) = f_\ell(-k) \quad (3.14)$$

Es posible sin embargo definir el subdeterminante  $D_\ell(k)$  como factor del determinante total  $D(k)$ , y sin tomar en cuenta su relación con la ecuación de Schrödinger y las funciones de Jost, usar  $D(k)$  o  $D_\ell(k)$  como base para un método de cálculo. Para eso es necesario establecer una relación entre los corrimientos de energía, del sistema cuantificado en un recinto y el corrimiento de fase. Dado que se puede establecer una relación de este tipo en casos muy generales,<sup>16</sup> aún cuando el potencial no sea radial y por lo tanto la ecuación de Schrödinger no es separable, y no puede definirse la función de Jost en el sentido dado por (2.10), un método basado en  $D(k)$  tiene mayores posibilidades de aplicación que el método de Jost.

#### 4. RELACION ENTRE $D_\ell(E)$ Y LOS CORRIMIENTOS DE FASE

Mientras que el sistema cuantificado en una caja está caracterizado por el espectro de autovalores de la energía, el proceso de dispersión queda definido mediante los corrimientos de fase; efectuando el pasaje al límite del recinto infinito, es posible mostrar que los corrimientos de los niveles de energía debidos a la perturbación, son proporcionales a los corrimientos de fase. Puede probarse este para potenciales no separables y aún en el caso relativis-

ta<sup>16</sup>. Efectuaremos una prueba simple para el caso de que el potencial sea radial y de rango finito. El autoestado de energía y momento angular, para una partícula en un potencial  $V(r)$ , como se indica en (2.23), puede ponerse asintóticamente:

$$\Psi_l(k,r) \sim \text{sen} \left( kr - \frac{l\pi}{2} + \delta_l \right) \quad (4.1)$$

y en el caso de que la perturbación sea nula:

$$\Psi_l^{(0)}(k,r) \sim \text{sen} \left( kr - \frac{l\pi}{2} \right) \quad (4.2)$$

El reemplazo del espectro continuo por uno discreto se logra acotando el sistema en una esfera de radio  $R$  muy grande, imponiendo así a la función de onda una condición de contorno, que da los niveles energéticos.

Elijamos  $\Psi_l(k,R) = 0$ , esto hace que el  $n$ -ésimo nivel con momento angular sea:

$$E^{(n)} = \frac{(\hbar k^{(n)})^2}{2m}$$

donde  $k^{(n)}$  satisface

$$k_0^{(n)} R - \frac{\pi l}{2} = n\pi \quad \text{en el caso no perturbado}$$

$$y \quad k^{(n)} R - \frac{\pi l}{2} + \delta_l = n\pi \quad \text{en el caso perturbado}$$

o sea, los niveles no perturbados al aplicar la interacción se corren, y el corrimiento  $\Delta E^{(n)}$  es un índice de la intensidad de la perturbación.

La separación entre los niveles (fig.1) es:

$$\Delta E^{(n)} = E_0^{(n)} - E_0^{(n-1)} = \frac{dE}{dk} (k_0^{(n)} - k_0^{(n-1)}) = \frac{dE}{dk} \frac{\pi}{R} = \hbar \frac{v}{R}$$

donde  $v$  es la velocidad de la partícula, por lo tanto:

$$\Delta E^{(n)} = E_l^{(n)} - E_{0l}^{(n)} = \frac{dE}{dk} (k_l^{(n)} - k_0^{(n)}) = - \frac{dE}{dk} \frac{\delta_l(E)}{R} = - \frac{1}{\pi} \delta_l(E) dE^{(n)}$$

para  $R \rightarrow \infty$  los niveles se concentran, pero el cociente:

$$\frac{\Delta E_l}{\Delta E_0} = - \frac{1}{\pi} \delta_l(E) \quad (4.3)$$

continúa definiendo el corrimiento de fase en términos de las características del espectro discreto.

El corrimiento de fase, como queda definido por el comportamiento asintótico de la función de onda, está determinado a menos de un múltiplo de  $\pi$ .

$$S_l(E) = \delta_l^{(1)}(E) + \frac{1}{2}\pi$$

por lo tanto (4.3) resultaría:

$$\frac{dE_L}{dE_L} = -\frac{\delta_L'(E)}{\pi} - p_L \quad (4.4)$$

Exijamos ahora, que  $\delta_L''(E)$  cumpla la condición física:

$$\lim_{E \rightarrow 0} \delta_L''(E) = 0$$

entonces

$$\left( \frac{dE_L}{dE_L} \right)_{E=0} = -p_L \quad (4.5)$$

Este puede interpretarse como que la interacción provoca, que el nivel no perturbado de energía nula se desdoble en  $p_L$  niveles ligados,<sup>17</sup> por lo tanto el número de estados ligados puede suponerse en términos del corrimiento de fase que hemos definido como:

$$p_L = \frac{\delta_L(E)}{\pi} \quad (4.6)$$

Este es justamente el teorema de Levinson; ha sido probado en condiciones más generales, exigiendo únicamente la completitud del sistema de autofunciones.

Consideremos ahora el determinante

$$D_L(E) = \det(E - H_{eL}) \det(E - H_L)^{-1} \quad (4.7)$$

donde el subíndice l significa que se considera implícitamente la acción de un operador de proyección sobre l dudo. Dado que el valor del determinante es invariante ante una transformación de similaridad, puede ponerse

$$\det(E - H_L) = \prod_m (E - E_m^L)$$

este es su valor en la representación donde  $H_L$  es diagonal, y:

$$\det(E - H_{eL}) = \prod_m (E - E_m^e)$$

efectuando el determinante en la representación de  $H_{eL}$  diagonal,<sup>18</sup> por lo tanto

$$D_L(E) = \det(E - H_L) \det(E - H_{eL})^{-1} = \prod_m \left[ \frac{E - E_m^L}{E - E_m^e} \right] \quad (4.8)$$

En el espectro de H deben incluirse los estados ligados; separando estos

$$D_L(E) = \prod_L \left( 1 - \frac{E_L}{E} \right) \prod_m \left[ 1 - \frac{\delta E_m^L}{E - E_m^L} \right] = \prod_L \left( 1 - \frac{E_L}{E} \right) \prod_m \left[ 1 + \frac{\delta_L(E_m)}{\pi(E - E_m^L)} \right] \quad (4.9)$$

pues como hemos dicho antes, para los estados ligados  $E_m^L = 0$  y  $\delta E_m^L = E_L < 0$ . Efectuando el paso al límite del continuo, es decir  $R \rightarrow \infty$ ,  $dE_m \rightarrow 0$

$$1 + \frac{\delta_\ell(E^L) dE_m^L}{\pi(E-E_m^L)} \approx e^{\frac{\delta_\ell(E_m) dE_m}{\pi(E-E_m)}}$$

y de (4.9) resulta

$$D_\ell(E) = \prod_L \frac{E-E_L}{E^{\nu_L}} e^{i \int_0^\infty dE' \frac{\delta_\ell(E')}{E-E'}} \quad (4.10)$$

donde la integración se extiende desde 0 a  $\infty$ , debido a que  $\prod_m$  en (4.9) no contiene los estados ligados.

Esta expresión establece una relación entre el determinante parcial y los corrimientos de fase, usando<sup>19</sup>

$$\frac{1}{E-E' \pm i\epsilon} = \text{v. p.} \frac{1}{E-E'} \mp i\pi \delta(E-E') \quad (4.11)$$

en (4.10):

$$D_\ell^+(E) = \prod_L \frac{E-E_L}{E^{\nu_L}} e^{i \int_0^\infty dE' \frac{\delta_\ell(E')}{E-E'}} e^{-i\delta_\ell(E)} \quad (4.12)$$

esta expresión es justamente la correspondiente, en nuestro procedimiento, a la (2.30) del método de Jost. Repitamos que, como el punto fundamental de la teoría es la validez de la relación (4.3), en principio, salvo dificultades formales, es posible extenderla a todos los casos donde dicha relación sea válida; por lo tanto la relación (4.12) es mucho más amplia que la (2.34). Evidentemente en dichos casos el corrimiento de fase no corresponderá a un único momento angular, sino al conjunto de constantes de movimiento, definidas por las características de la interacción.

### 5. CONVERGENCIA Y ANALITICIDAD DE $D_\ell(E)$

Consideremos ahora las propiedades de convergencia del desarrollo de  $D_\ell(E)$  en términos de la constante de acoplamiento; escribamos

$$D_\ell(E) = \det [1 + K_\ell(E)]$$

con

$$K_\ell(E) = -G_\ell(E) H_I \quad (5.1)$$

Desarrollando el determinante por menores en la representación de energía:

$$D_2(E) = 1 - \text{Tr} K_2(E) + \sum_{E_1, E_2} \frac{(-1)^2}{2!} \begin{vmatrix} \langle E_{01} | K_2 | E_{01} \rangle & \langle E_{01} | K_2 | E_{02} \rangle \\ \langle E_{02} | K_2 | E_{01} \rangle & \langle E_{02} | K_2 | E_{02} \rangle \end{vmatrix} + \dots$$

donde  $\text{Tr}$  significa tomar la traza de la matriz o sea  $\text{Tr} K_2(E) = \sum_{E_{0i}} \langle E_{0i} | K_2 | E_{0i} \rangle$ , los  $\langle E_{0i} |$  son autoestados de  $H_0$  en esta representación

$$\langle E_{0i}' | G_{0e}(E) = \langle E_{0i}' | P_2 \frac{1}{E - H_0} = \langle E_{0i}' | \frac{1}{E - H_0} \delta_{e'e} = \frac{1}{E - E_{0i}'} \delta_{e'e}$$

y tenemos:

$$D_2(E) = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{E_{01} \dots E_{0n}} \frac{(-1)^n}{n!} \prod_{i=1}^n \frac{1}{E - E_{0i}} \delta_{e'e} \begin{vmatrix} \langle E_{01} | H_I | E_{01} \rangle & \dots & \langle E_{01} | H_I | E_{0n} \rangle \\ \vdots & & \vdots \\ \langle E_{0n} | H_I | E_{01} \rangle & \dots & \langle E_{0n} | H_I | E_{0n} \rangle \end{vmatrix} \quad (5.2)$$

$$= 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{E_{01} \dots E_{0n}} \frac{(-1)^n}{n!} \prod_{i=1}^n \frac{1}{E - E_{0i}} \delta_{e'e} \det_n H_I$$

Mostraremos ahora el siguiente teorema: si  $1 + \lambda K$  es una matriz hermitica no negativa, que depende de un parámetro  $\lambda$ , entonces

$$\det'(1 + \lambda K) = e^{-\text{Tr} \lambda K} \det(1 + \lambda K) \leq 1 \quad (5.3)$$

para probar esto observamos que, como:

$$\det(1 - \delta x) = 1 - \text{Tr}(\delta x)$$

resulta:

$$\det(A + \delta A) = \det A [1 + \text{Tr}(A^{-1} \delta A)]$$

$$\delta \det A = \det A \text{Tr} [A^{-1} \delta A]$$

llamemos  $A = 1 + \lambda K$  y definamos que las variaciones se efectúan respecto de  $\lambda$ , entonces:

$$\ln \det(1 + \lambda K) = \text{Tr} \int_0^\lambda \frac{1}{1 + \lambda K} K d\lambda = \text{Tr} \ln(1 + \lambda K)$$

o sea:

$$\det(1 + \lambda K) = e^{\text{Tr} \ln(1 + \lambda K)}$$

y el determinante primado como está definido en (5.3), queda:

$$\det'(1 + \lambda K) = e^{\text{Tr} [\ln(1 + \lambda K) - \lambda K]} \quad (5.4)$$

Si  $1+\lambda K$  es hermítica no negativa sus autovalores satisfacen  $1+\lambda k \geq 0$ , y usando una representación donde sea diagonal.

$$\det'(1+\lambda K) = e^{\sum [\ln(1+\lambda k) - \lambda k]} \quad (5.5)$$

el exponente tiene un máximo en  $\lambda k = 0$  y allí es nulo, entonces reemplazando en (5.5):

$$\det'(1+\lambda K) \leq 1$$

lo cual prueba el teorema.

El teorema anterior puede aplicarse directamente para demostrar la convergencia del desarrollo de  $D_\lambda(E)$  en términos de potencias de  $\lambda$

$$\begin{aligned} |D_\lambda(E)|^2 &= |\det(1+\lambda K_\lambda)|^2 = \det[(1+\lambda K_\lambda)(1+\lambda K_\lambda)^\dagger] = \\ &= e^{\text{Tr}(\lambda K_\lambda)(\lambda K_\lambda)^\dagger + \text{Tr}(\lambda K_\lambda + \lambda K_\lambda^\dagger)} \det'[(1+\lambda K_\lambda)(1+\lambda K_\lambda)^\dagger] \end{aligned}$$

Como  $(1+\lambda K_\lambda)$  es una matriz hermítica no negativa, su determinante primado es menor que uno, así las condiciones de convergencia pueden ponerse:

$$\text{Tr}(\lambda K_\lambda)(\lambda K_\lambda)^\dagger < \infty \quad (5.6)$$

$$\text{Tr}(\lambda K_\lambda) < \infty \quad (5.7)$$

estas ecuaciones nos permitirán obtener condiciones sobre el potencial, que aseguren la convergencia de  $D_\lambda(E)$ . Podemos escribir (5.6) como:

$$\begin{aligned} \text{Tr}(G_{0\lambda} H_I)(G_{0\lambda} H_I)^\dagger &= \int d^3 r_1 \dots d^3 r_n \langle r_1 | G_{0\lambda} | r_2 \rangle \langle r_2 | H_I | r_3 \rangle \langle r_3 | H_I^\dagger | r_4 \rangle \langle r_4 | G_{0\lambda} | r_1 \rangle \\ &= \int d^3 r_1 d^3 r_2 \langle r_1 | G_{0\lambda} | r_2 \rangle \langle r_2 | G_{0\lambda}^\dagger | r_1 \rangle [V(r_2)]^2 \end{aligned}$$

donde hemos usado:

$$\langle r | H_I | r' \rangle = V(r) \delta(r-r') \quad (5.8)$$

e sea admitimos un potencial radial.

De (3.13) y (1.10)

$$\langle r | G_{0\lambda}(E) | r' \rangle = \frac{1}{r r'} u_\lambda(k r_2) u_\lambda(k r_1)$$

luego sobreentendiendo la dependencia angular, ya que contribuye con integrales separadas, que se eliminan por ortogonalidad:

$$\begin{aligned} T_r(G_{oL} H_I)(G_{oL} H_I)^T &\sim \int_0^{\infty} r_2^2 dr_2 [V(r_2)]^2 \int \frac{r_1^2 dr_1}{r_1^2 r_2^2} u_L(kr_1) w_L^*(kr_1) u_L(kr_2) w_L(kr_2) \\ &\sim \int_0^{\infty} dr_2 [V(r_2)]^2 u_L(kr_2) w_L^*(kr_2) \end{aligned}$$

Usando el comportamiento asintótico de  $u_L(kr)$  y  $w_L(kr)$ ,<sup>9</sup> el integrando va en cero como  $r[V(r)]^2$ , por lo tanto para que converja,  $V(r)$  debe ser más convergente que  $r^{-1+\epsilon}$ , para  $r$  tendiendo a cero; en infinito va como  $[V(r)]^2$  así debe ser un potencial más decreciente que  $r^{-(\frac{1}{2}+\epsilon)}$ .

De manera análoga, la segunda condición puede ponerse:

$$T_r(G_{oL} H_I) = \int d^3r \langle r | G_{oL} | r \rangle \propto \int r^2 dr u_L(kr) w_L^*(kr) \frac{1}{r^2} = \int dr I(r) \quad (5.9)$$

usando las condiciones límites, resulta:

$$I(r) \xrightarrow{r \rightarrow 0} r V(r)$$

$$I(r) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} V(r)$$

por lo tanto, para que se cumpla (5.7), el potencial debe tender más rápido que  $r^{-2}$  para  $r \rightarrow 0$ , y en  $r \rightarrow \infty$  el potencial debe ir a cero más rápidamente que  $r^{-1}$  (fig.2).

De este modo, la segunda condición es más restrictiva y define para que tipo de potencial, el desarrollo del determinante parcial, en función de la constante de acoplamiento, será convergente para cualquier valor de esta, es decir será una función entera. En la figura 2 se muestran las condiciones límites del potencial.

Queremos ahora extender nuestras expresiones para valores complejos de la energía; el determinante  $D_L(E)$  queda extendido directamente a partir de su definición (3.7), de la ecuación formal (4.8) observamos que  $D_L(E)$  tiene ceros en los autovalores de  $H$  y polos en los de  $H_0$ , esto último podemos expresarlo explícitamente a partir de (5.2), usando allí la igualdad

$$\prod_{i=1}^n \frac{1}{E-E_i} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{E-E_i} \prod_{m \neq i} \frac{1}{E_i-E_m}$$

resulta

$$D_2(E) = 1 + \sum_{E_{0k}} \frac{r_{0k}(E_{0k})}{E - E_{0k}} \quad (5.10)$$

donde

$$r_{0k}(E_{0k}) = -\langle E_{0k} | H_2 | E_{0k} \rangle + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n!} \sum_{E_1, \dots, E_n} \prod_{l=1}^n \frac{1}{E_{0k} - E_l} \left| \begin{array}{l} \langle E_{0k} | H_2 | E_{0k} \rangle \langle E_{0k} | H_2 | E_{0l} \rangle \dots \langle E_{0k} | H_2 | E_{0n} \rangle \\ \langle E_{0l} | H_2 | E_{0k} \rangle \\ \vdots \\ \langle E_{0n} | H_2 | E_{0k} \rangle \dots \langle E_{0n} | H_2 | E_{0n} \rangle \end{array} \right|$$

la expresión (5.10) nos dice que,  $D_2(E)$  es una función analítica en todo el plano energía, salvo un conjunto infinito de polos en el eje real positivo.

Pasando al límite del continuo

$$D_2(E) = 1 + \int_0^{\infty} ds' \frac{r_2(s')}{E - s'} \quad (5.11)$$

o sea  $D_2(E)$  tiene un corte para valores físicos de la energía; esta ecuación es esencialmente una relación de dispersión, que podría haberse también probado ya que, por (A.8)

$$\lim_{E \rightarrow \infty} D_2(E) = 1 \quad (5.12)$$

y de (4.12) extendida al plano complejo

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} [D_2(\epsilon + i\epsilon) - D_2^*(\epsilon + i\epsilon)], \lim_{\epsilon \rightarrow 0} [D_2(\epsilon + i\epsilon) - D_2(\epsilon - i\epsilon)] = \int_0^{\infty} \frac{r_2(s')}{E - s'} ds' \quad \text{sen } \delta_2(E) = 2\pi r_2(E), \text{ en } E > 0$$

por lo tanto:

$$\begin{aligned} \text{Im } D_2(E) &= -\pi r_2(E) & \text{en } E > 0 \\ &= 0 & \text{en } E < 0 \end{aligned} \quad (5.13)$$

y resultaría así la ecuación (5.11); hagamos explícito que:

$$r_2^{-1}(E) = \frac{D_2(E)^{-1} D_2^*(E) - r_2(E)}{D_2^*(E) - D_2(E) + \int_0^{\infty} ds' \frac{r_2(s')}{E - s'}} \quad (5.14)$$

Podemos así escribir para valores físicos de la energía, usando (4.12) y (5.11)

$$r_2^{-1}(E) = -\frac{\text{Im } D_2^*(E)}{\text{Re } D_2^*(E)} = \frac{\pi r_2(E)}{1 + \int_0^{\infty} ds' \frac{r_2(s')}{E - s'}} \quad (5.15)$$

esta ecuación establece una relación directa entre la función  $r_2(E)$ , definida por (5.13), y los corrimientos de fase del proceso.

Igualmente la amplitud de transición es:

$$t_2(E) = \frac{e^{i\delta_2(E)} \text{sen } \delta_2(E)}{q} = \frac{\pi r_2(E)}{q R_2^*(E)} \quad (5.16)$$



y:

$$S_2(E) = e^{2i\delta_2(E)} = \frac{D_2^-(E)}{D_2^+(E)} \quad (5.17)$$

por lo tanto la amplitud ha quedado definida como cociente de dos funciones, que, como se ha mostrado, son funciones enteras de la constante de acoplamiento, para una amplia variedad de potenciales.

La condición asintótica (5.12), implica que

$$\lim_{E \rightarrow \infty} \gamma_2(E) = 0$$

y que

$$\lim_{E \rightarrow \infty} S_2(E) = 1 \quad (5.18)$$

es decir, el corrimiento de fase tiende a un múltiplo de  $\pi$  en altas energías.

La relación (4.12) muestra que  $D_2^+(E)$  tendrá ceros en la posición de los estados ligados, esto es sobre el eje real negativo; en términos de funciones de Jost, como resulta de (2.22), estos corresponderán a ceros de  $f_2(-k)$  en el eje imaginario negativo, ya que en ese caso la función decrece exponencialmente.

De (5.17) a estos estados ligados corresponderán polos de la matriz  $S$ ,<sup>20</sup> y podrán obtenerse como soluciones de la ecuación

$$D_2(E_i) = 0.$$

o sea

$$\int_0^\infty \frac{\gamma_2(E')}{E' - E} dE' = 1 \quad (5.19)$$

de este modo la función  $D_2(E)$  nos da toda la información necesaria sobre el problema físico, es decir corrimiento de fase y estados ligados.

Los polos espurios de  $S_2(E)$  provendrán de los polos de  $D_2^-(E)$ ; esto permite una neta diferencia entre ambos casos.

## 6. METODO DEL CALCULO Y APLICACIONES:

Las relaciones (5.11), (5.15) y (5.19), permiten considerar a  $r_2(E)$  como cantidad fundamental, ya que si se <sup>12</sup>conoce en la región física queda descrito el proceso.

Para calcularla a un dado orden, partiendo del hamiltoniano de interacción, se puede tomar la parte imaginaria del desarrollo en menores del determinante  $D_\ell(E)$ , dado en (3.12) ó (5.2), tomando los órdenes necesarios. Como se ha dicho en la página 6, el desarrollo será más convergente cuanto menor sea el rango del potencial, dado que la igualdad (3.6) es cierta orden a orden y las discusiones de aproximación valen en ambos casos. Por otro lado de (5.2), el orden enésimo del desarrollo es inversamente proporcional a la enésima potencia de la energía, y por tanto en altas energías los órdenes bajos serán más significativos.

Un método alternativo, más simple que el cálculo directo, puede usarse si se conoce el desarrollo perturbativo de  $t_\ell(E)$  o  $\text{tg } \delta_\ell(E)$ , este desarrollo no será una función entera de la constante de acoplamiento, pero suponiendo un  $\lambda$  pequeño tal que converja, (5.15) puede ponerse:

$$\pi r_\ell(E) = \text{tg } \delta_\ell(E) \left[ 1 + \int dE' \frac{r_\ell(E')}{E-E'} \right] \quad (6.1)$$

desarrollando:

$$\pi \left[ \lambda r_\ell^{(1)}(E) + \lambda^2 r_\ell^{(2)}(E) + \dots \right] = \left[ \lambda \text{tg } \delta_\ell^{(1)}(E) + \dots \right] \left[ 1 + \lambda \int dE' \frac{r_\ell^{(1)}(E')}{E-E'} \right] \quad (6.2)$$

igualando órdenes obtenemos:

$$\begin{aligned} \pi r_\ell^{(1)}(E) &= \text{tg } \delta_\ell^{(1)}(E) \\ \pi r_\ell^{(2)}(E) &= \text{tg } \delta_\ell^{(2)}(E) + \text{tg } \delta_\ell^{(1)}(E) \int_0^\infty dE' \frac{t_\ell \delta_\ell^{(1)}(E')}{E-E'} \\ \pi r_\ell^{(3)}(E) &= \text{tg } \delta_\ell^{(3)}(E) + \text{tg } \delta_\ell^{(2)}(E) \int_0^\infty dE' \frac{t_\ell \delta_\ell^{(1)}(E')}{E-E'} + \text{tg } \delta_\ell^{(1)}(E) \left[ \int_0^\infty dE' \frac{t_\ell \delta_\ell^{(2)}(E')}{E-E'} + \dots \right] \end{aligned} \quad (6.3)$$

y así sucesivamente. La serie para  $\text{tg } \delta_\ell(E)$  es válida para pequeños  $\lambda$ , pero la de  $r_\ell(E)$  obtenida a partir de esta por el procedimiento descrito y que difiere de aquella en los términos iterados, es una función entera, y por lo tanto puede extenderse para cualquier valor de  $\lambda$ . Una vez obtenida  $r_\ell(E)$ , el valor de  $\text{tg } \delta_\ell(E)$ , para valores cualquiera de  $\lambda$  y  $E$ , se obtiene reemplazando directamente en (5.15). Esta ecuación presenta una estructura formal que permite esperar ciertas ventajas inmediatas. La tangente del corrimiento de fase, es una función lisa de la energía, salvo en la proximidad de una resonancia, en ese caso la serie perturbativa se compone de términos muy grandes y es

necesario analizar altos órdenes, en cambio en la expresión (5.15) una resonancia está dada por un cero del denominador; o sea la condición a imponer es:

$$\int_0^{\infty} dE' \frac{r_E(E')}{E_R - E'} = -1 \quad (6.4)$$

donde  $E_R$  es la energía de resonancia. Por lo tanto el problema queda reducido a una serie que tiende a un valor finito, y se puede esperar, satisfacer la condición con pocos órdenes.

En la primera aproximación del método determinantal, además del primer orden perturbativo, aparecen partes de los órdenes superiores; en efecto, desollando el denominador en el numerador:

$$t_g \delta^{(1)}(\omega) = \frac{+ \pi r_E^{(1)}(\omega)}{1 + \int_0^{\infty} dE' \frac{r_E^{(1)}(E')}{\omega - E'}} = + \pi r_E^{(1)}(\omega) \left[ 1 - \int_0^{\infty} dE' \frac{r_E^{(1)}(E')}{\omega - E'} + \dots \right] \quad (6.5)$$

con el supraíndice [1] indicamos primera aproximación determinantal en el sentido que se muestra; reemplazando por (6.3):

$$t_g \delta^{(1)}(\omega) = t_g \delta_1^{(1)}(\omega) + \frac{t_g \delta_2^{(1)}(\omega)}{\pi} \int_0^{\infty} dE' \frac{t_g \delta_1^{(1)}(E')}{\omega - E'} + \dots \quad (6.6)$$

aunque no es posible establecer definitivamente el tipo de contribución que aportarán, compararemos los dos métodos en un par de casos simples.

Como se ha dicho en la página 6, usar potenciales de corto rango, permite esperar que el primer orden determinantal sea el más significativo.

a- Pozo esférico de potencial: El corrimiento de fase para la onda S, puede calcularse exactamente; imponiendo a la función de onda, la condición de continuidad en el borde del pozo, <sup>10</sup> resulta:

$$t_g \delta_0 = \frac{k t_g k'a - k' t_g k a}{k' + k t_g k'a t_g k a} \quad (6.7)$$

donde:

$$k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}$$

$$k'^2 = k^2 + \frac{2mV_0}{\hbar^2}$$

a, es el radio y  $V_0$  la profundidad del pozo,  $m$  es la masa reducida.

Del cálculo del primer orden o aproximación de Born, resulta:

$$t_g \delta^{(1)}(k) = \frac{mV_0}{\hbar^2 k^2} \left[ a k - \frac{1}{2} \sin 2ka \right] \quad (6.8)$$

reemplazando en nuestra expresión (6.1), obtenemos

$$\operatorname{tg} \delta^{(1)}(k) = \frac{\operatorname{tg}^{(1)} \delta^{(0)}(k)}{1 - \frac{m V_0}{2 \hbar^2 k^2} [1 - \cos 2ka]} \quad (6.9)$$

En el gráfico 3 se representan las tres funciones en función de  $k$ , vemos que el método da un buen resultado para todo valor de la energía.

b- Potencial exponencial: consideremos ahora el siguiente potencial

$$V(r) = -V_0 e^{-\frac{r}{b}}$$

para bajas energías, el corrimiento de fase, para la onda  $S$  puede ponerse: <sup>21</sup>

$$\operatorname{tg} \delta_0 = k \cdot b \left\{ \frac{\pi}{2} \frac{N_0(\xi_0)}{J_0(\xi_0)} - \ln \frac{\xi_0}{2} - C \right\}^{-1} \quad (6.10)$$

donde  $\xi_0 = b \left( \frac{2m V_0}{\hbar^2} \right)^{1/2}$ ,  $C = 0,5772$ ,  $J_0$  y  $N_0$  son respectivamente las funciones de Bessel y Hankel de orden cero.

Del primer orden perturbativo se obtiene:

$$\operatorname{tg} \delta_1(k) = \frac{1}{2b(k^2 + 1/b^2)} \quad (6.11)$$

y con el método determinantal:

$$\operatorname{tg} \delta(k) = \frac{b/2 \xi_0^2}{b^2 k^2 + (1/4 \xi_0^2/4)} \quad (6.12)$$

El gráfico 4 compara los tres procedimientos en pequeñas energías; es evidente que el primer orden determinantal es mucho mejor que la aproximación de Born.

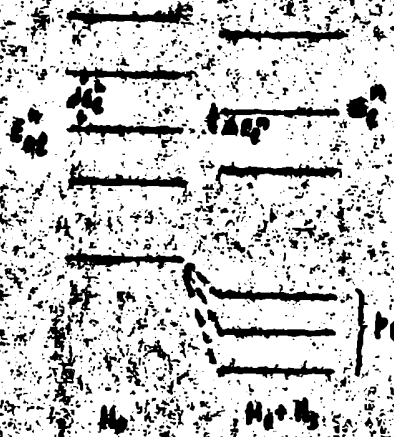


Fig 2



Fig 3

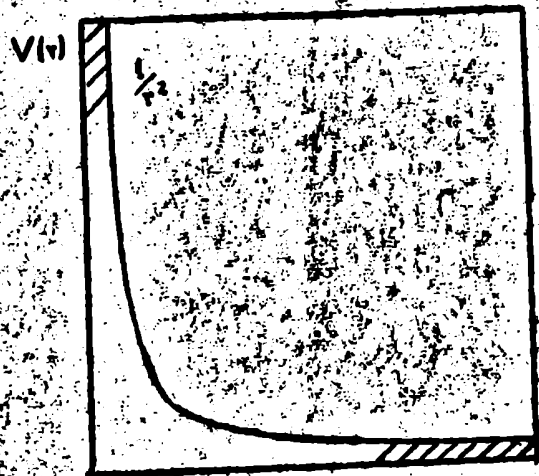


fig. 2



fig. 4

## II. TEORIA DE CAMPOS

### 7. INTRODUCCION :

La generalización del formalismo desarrollado para potenciales a teoría de campos no es inmediata. Las demostraciones de convergencia son por supuesto inválidas en este caso, y en general no es posible reemplazarlas más que por argumentos de plausibilidad, que se verán justificados e no, por los resultados obtenidos en el cálculo.

Discutiremos el caso de dispersión de piones por nucleones aunque la aplicación del método a otros casos no presenta ninguna dificultad escribiendo:

$$H = H_0 + H_1 \tag{7.1}$$

$H_0$  describe el campo de los piones y del nucleón desnudo. Pero, aún cuando no haya piones presentes,  $H_1$  produce una autopinteracción del nucleón corriendo su energía una cantidad  $\Delta$ , de tal forma que el nucleón tenga su masa experimental. De manera que si queremos considerar la dispersión de piones por un nucleón real debemos poner:<sup>12</sup>

$$H = (H_0 + \Delta) + (H_1 - \Delta) = H_0 + H_1 \tag{7.2}$$

Ahora los hamiltonianos  $H_0$  y  $H_1$  contienen operadores de creación y destrucción de los campos involucrados, por lo tanto los autoestados de  $H_0$ , no están unívocamente determinados por la energía  $W_0$  y los autovalores  $\vec{v}$  de las constantes de movimiento  $\vec{P}_0$ , tales como el momento angular total  $\vec{J}$  y el isospin total  $I$ , sino que contienen una degeneración debida al diferente número de partículas, la cual depende del valor de  $W_0$ . Para especificar completamente el autoestado de  $H_0$ , es necesario dar un conjunto de números cuánticos adicionales  $\vec{Y}_1$ , tales como momentos angulares, isospines parciales y energías de pares de partículas, que dependen del número  $p$  de partículas involucradas. El estado caracterizado por  $W_0, \vec{Y}$  y  $\vec{Y}_1$  lo llamaremos  $|W_0, \vec{Y}, \vec{Y}_1\rangle$ , este es también autoestado del operador número de partículas con autovalor  $p$ ; es evidente que su degeneración crece con

la energía considerada.

El paso natural a una teoría relativista sugiere reemplazar la energía  $W$  en el centro de masa del proceso, por el invariante  $s=W^2$ . El umbral del proceso elástico pión-nucleón será  $s_2 = (m+\mu)^2$ , y el primer proceso inelástico de creación de un pión comenzará en  $s_3 = (m+2\mu)^2$ , y así sucesivamente para estados más masivos. Entonces los autoestados de  $H_0$  de tipo  $\Upsilon$ , correspondientes a un nucleón y un pión consistirán en un continuo de estados, que se inicia en  $s_2$  y se extiende hasta infinito; sobrepuesto a este, a partir de  $s_3$ , tendremos un continuo de estados correspondientes a un nucleón y dos piones y así continuando. Este espectro continuo puede considerarse como límite del espectro discreto obtenido encerrando el sistema en una caja, si el radio de ésta se hace tender a infinito.

La matriz  $S$  tomada entre autoestados  $|W_0, \Upsilon, \Upsilon_p^i\rangle$  no es diagonal, ya que la interacción puede conectar estados de distinto número de partículas. Para una energía definida, puede ponerse formalmente:

$$S(w) = \begin{pmatrix} S_{11}^{\Upsilon}(w) & & \\ & S_{22}^{\Upsilon}(w) & \\ & & \ddots \end{pmatrix} \quad (7.3)$$

pues  $S$  es diagonal en las constantes de movimiento;  $\Upsilon_1, \Upsilon_2, \dots$  indican los posibles valores de estas; a la vez las  $S^{\Upsilon}(E)$  son matrices del tipo:

$$S^{\Upsilon}(w) = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} & \dots \\ S_{21} & S_{22} & \\ \vdots & & \end{pmatrix} \quad (7.4)$$

donde  $S_{r,s}$  indica que el estado inicial contiene  $s$  partículas y el final  $r$ . Estos elementos son a la vez matrices en los números cuánticos  $\Upsilon_1$  y  $\Upsilon_2$ , los posibles valores de estos vienen fijados por las condiciones de suma compatibles con  $\Upsilon$  y  $W_0$ , dado que deben tratarse de momentos angulares, isospines y energías parciales. El elemento  $S_{22}$  es un número único, pues como corresponde a la dispersión elástica, queda completamente descripto para  $\Upsilon$  y  $W_0$  dados. Para  $s < s_3$



ese es el único elemento no nulo, al crecer  $W$  comienzan a intervenir los procesos inelásticos y deben tenerse en cuenta los restantes elementos de la matriz.

Si pretendemos ahora escribir una expresión análoga a 5.1, para el determinante  $D_\gamma$  proyectado sobre valores de  $\gamma$  dados, encontraremos que no está definido debido a la degeneración en  $\delta_p$ .<sup>14</sup> Podemos notar esto considerando un desarrollo del determinante en menores de la forma 5.2; en él habrá que sumar <sup>sobre</sup> todos los estados posibles iniciales y finales con cualquier número de partículas, de forma que incluirá términos entre estados, donde algunas de las partículas no están conectadas por la interacción y que, por lo tanto, resultarán proporcionales a potencias del volumen de cuantificación; dado que se ha normalizado en un recinto, al tender el radio de este a infinito, esos términos provocan que  $D_\gamma$  diverja.

Otro problema surge del hecho de que para  $s > s_3$ , la matriz  $S$  no es diagonal y no será posible, usando autoestados de  $H_0$  del tipo  $|W, \gamma, \delta_p\rangle$ , definir corrimientos de fase, esto origina que las expresiones del tipo (4.3) carezcan de sentido.

Para salvar estas dificultades son posibles dos procedimientos:

El primero consiste en obtener autoestados de  $H_0$  que diagonalicen  $S$ , estos serán combinaciones lineales de estados de diferente número de partículas, es decir de diferentes  $\gamma_p$ .<sup>14</sup> La relación de unitariedad aplicada a la matriz  $S$  diagonal define ciertos corrimientos de fase, que se relacionan con el corrimiento energético, y permiten a priori desarrollar ecuaciones análogas a las de teoría de potencial. Sin embargo el gran número de componentes de la matriz  $S$ , causa que su diagonalización completa no sea prácticamente factible y se hace necesario tomar en cuenta solo aquellos estados que en bajas energías se reducen a los estados  $|W_0, \gamma, \delta_2\rangle$ , y a partir de ellos calcular un subdeterminante convergente de  $D_\gamma(W)$ . Es evidente que una restricción de este tipo limita la validez del procedimiento, que llamaremos unieanal, a bajas energías, de otra forma esta aproximación significa realmente despreciar los procesos inelásticos.

El otro método que llamaremos multicanal, no trata de establecer el determinante  $D_r(N)$ , sino que trabaja directamente con el operador de comparación:

$$K(w) = 1 - G_r(w) H_r \quad (7.5)$$

Usando en este operador la representación  $|N, \gamma, \gamma_r\rangle$ , puede mostrarse que se relaciona con los elementos de la matriz  $S$  no diagonalizada de una forma análoga a como lo hace la función de Jost en el caso potencial:

$$S_{rs}^{\gamma}(w) = [K^{\gamma}(w-i\epsilon)]_{r,l}^{-1} [K^{\gamma}(w+i\epsilon)]_{l,s} \quad (7.6)$$

donde los índices  $r$  y  $s$  representan las cantidades  $\gamma_r$  y  $\gamma_s$ , que están definidas para cada número de partículas. El índice  $l$  está contraído, esto implica sumar sobre todos los valores posibles de  $\gamma_l$  compatibles con  $\gamma$ .

Partiendo de esta expresión y haciendo uso de la unitariedad de la matriz  $S$ , puede finalmente obtenerse un sistema de ecuaciones que permiten calcular las amplitudes de dispersión.

Estas ecuaciones coinciden con las del método N/D generalizado<sup>23</sup>, y en el límite de tomar solo procesos elásticos se reduce al procedimiento unicanal.

## 8. METODO UNICANAL

Para energía debajo del umbral inelástico  $s < s_3$  la matriz  $S^{\gamma}(N)$  tendrá un único elemento distinto de cero, el  $S_{22}^{\gamma}(N)$ , cuya forma queda impuesta por la condición de unitariedad:

$$S^{\gamma}(w) = S_{22}^{\gamma}(w) = e^{2i\delta_{r,2}(w)} \quad (8.1)$$

donde la fase  $\delta_{r,2}(w)$  coincidirá con la deformación de la función asintótica radial del sistema nucleón-pión. Al aumentar la energía aparecen efectos inelásticos y para  $s_4 > s > s_3$  la forma de la matriz será, en la representación  $|N, \gamma, \gamma_r\rangle$

$$S^{\gamma}(w) = \begin{pmatrix} S_{22}^{\gamma}(w) & S_{23}^{\gamma}(w) \\ S_{32}^{\gamma}(w) & S_{33}^{\gamma}(w) \end{pmatrix} \quad (8.2)$$

y no será posible establecer un corrimiento de fase en esta representación.

Para hacerlo, es necesario obtener autoestados  $|W_0, \gamma, \alpha\rangle$  de  $H_0$  que diagonalicen  $S^\gamma$ ; estos no tendrán número definido de partículas, pues serán combinaciones lineales de autoestados de dos y tres partículas<sup>24</sup>:

$$|W_0, \gamma, \alpha\rangle = \alpha_\alpha |W_0, \gamma, \gamma'_2\rangle + \sum_{\gamma'_3} b_{\alpha\gamma'_3} |W_0, \gamma, \gamma'_3\rangle$$

Para mayores energías, la matriz  $S^\gamma$  tendrá más elementos, y su autoestado contendrá estados de más partículas. Si llamamos  $S_\alpha^\gamma$  a los autovalores de  $S^\gamma$  en esta nueva base, la condición de unitariedad permite escribir:

$$S_\alpha^\gamma(w) = e^{2i\delta_{\gamma,\alpha}(w)} \quad (8.3)$$

Si  $W_{\gamma,\alpha}$  son los autovalores de  $H$  en la caja, ha sido probado por De Witt,<sup>16</sup> que aún en el caso relativista degenerado continúa siendo válida la relación

$$\Delta W_{\gamma,\alpha} = W_{\gamma,\alpha} - W_{\gamma,\alpha}^0 = -\frac{1}{\pi} \delta_{\gamma,\alpha}(w) dw \quad (8.4)$$

Por lo tanto poseyendo una expresión del corrimiento de fase en términos del corrimiento energético, es posible definir el determinante y darle una relación precisa con la amplitud de dispersión.

Como se ha dicho usaremos como variable el invariante  $s$ , entonces es necesario reemplazar la definición (3.7) del determinante por:

$$D(s) = \det \left( \frac{S-H^2}{S-H_0^2} \right) = \det \left( \frac{W-H}{W-H_0} \right) \det \left( \frac{W+H}{W+H_0} \right) = D(w) D(-w) \quad (8.5)$$

Análogamente al caso potencial puede proyectarse en los subespacios de las constantes de movimiento  $\Gamma_0$ :

$$D(s) = \prod_{\gamma} D_{\gamma}(w) D_{\gamma}(-w) = \prod_{\gamma} D_{\gamma}(s) \quad (8.6)$$

Como se ha dicho en la introducción, estos determinantes  $D_{\gamma}(s)$ , debido a la degeneración en  $\delta$  no tienen un valor finito, pero podemos usar la representación  $|W, \gamma, \alpha\rangle$  para extraer subdeterminantes de  $D_{\gamma}(s)$  que sean convergentes. Usando la cuantificación en una caja puede ponerse formalmente:

$$D_{\gamma}(s) = \prod_{\alpha, \alpha'} \left( \frac{s - (S_{\gamma\alpha})_k}{s - (S_{\gamma\alpha'})_k} \right) = \prod_{\alpha} \left[ \prod_k \left( \frac{s - (S_{\gamma\alpha})_k}{s - (S_{\gamma\alpha})_k} \right) \right] = \prod_{\alpha} D_{\gamma,\alpha}(s) \quad (8.7)$$

donde el subíndice  $k$  especifica el autovalor de la energía.

Aparentemente la situación es análoga al caso potencial, sin embargo existe una diferencia básica, en ese caso el determinante es del operador  $1 - G_0 \epsilon H_I$ , que está bien definido; en cambio en teoría de campos debido a la degeneración en el número de partículas, no es posible expresar  $D_{Y,\alpha}(s)$  como determinante de ningún operador conocido, sino que está definido por la serie:

$$D_{Y,\alpha}(s) = 1 - \sum_{W_1} \langle W_{0,1}, Y, \alpha | R(s) | W_{0,1}, Y, \alpha \rangle + \sum_{W_1, W_2} \begin{vmatrix} \langle W_{0,1}, Y, \alpha | R(s) | W_{0,1}, Y, \alpha \rangle & \langle W_{0,1}, Y, \alpha | R(s) | W_{0,2}, Y, \alpha \rangle \\ \langle W_{0,2}, Y, \alpha | R(s) | W_{0,1}, Y, \alpha \rangle & \langle W_{0,2}, Y, \alpha | R(s) | W_{0,2}, Y, \alpha \rangle \end{vmatrix} \dots \quad (8.8)$$

con:

$$1 - R(s) = \frac{s - H^2}{s - H^2}$$

Como vemos de esta expresión, dado que existe solo un estado para cada energía, los  $D_{Y,\alpha}(s)$  no presentarán la divergencia de definición que contienen los  $D_Y(s)$ ; la no existencia de  $D_Y(s)$  puede atribuirse a la divergencia del producto infinito en (8.7).

Para poder construir  $D_{Y,\alpha}(s)$ , entonces es necesario diagonalizar la matriz  $S$  y obtener los estados  $|W_0, Y, \alpha\rangle$ , este es prácticamente muy complicado y nos vemos en la necesidad de restringir la aplicación del método, a energías para las cuales los procesos inelásticos sean poco importantes.

Entre todos los autoestados  $|W_0, Y, \alpha\rangle$  existe uno que para  $s_2 < s < s_3$  es simplemente  $|W, Y\rangle$ , lo llamaremos estado de "predominantemente dos partículas" y lo indicaremos  $|W, Y, 2\rangle$ ; para  $s > s_3$  este estado contiene mezcla de estados de dos, tres y más partículas, según la energía considerada; con él podemos construir el subdeterminante  $D_{Y,2}(s)$ . Es evidente que:

$$D_Y(s) = D_{Y,2}(s) \quad \text{en} \quad s_2 < s < s_3$$

$$D_Y(s) = D_{Y,2}(s) \prod_{\alpha \neq 2} D_{Y,\alpha}(s) \quad \text{en} \quad s > s_3$$

por otro lado podemos escribir:

$$D_{Y,2}(s) = D_{Y,2}(w) D_{Y,2}(-w) \quad (8.9)$$

Usando (8.4) y por un procedimiento totalmente análogo al de teoría de potencial se obtiene

$$D_{\gamma,2}(w) = e^{\frac{1}{\pi} \int_{s_2}^{\infty} \frac{dw' \delta_{\gamma,2}(w')}{w-w'}}$$

$$D_{\gamma,2}(-w) = e^{-\frac{1}{\pi} \int_{s_2}^{\infty} \frac{dw' \delta_{\gamma,2}(w')}{w+w'}}$$

donde hemos supuesto que no existen estados ligados. Reemplazando en (8.9) resulta

$$D_{\gamma,2}(s) = e^{\frac{1}{\pi} \int_{s_2}^{\infty} \frac{ds' \delta_{\gamma,2}(s')}{s-s'}} \tag{8.10}$$

de esta ecuación:

$$\log \delta_{\gamma,2}(s) = - \frac{\text{Im} D_{\gamma,2}^+(s)}{2e D_{\gamma,2}^+(s)} = - \frac{\gamma_{\gamma,2}(s)}{2e D_{\gamma,2}^+(s)} \quad \text{en } s > s_2 \tag{8.11}$$

Estas ecuaciones permiten describir completamente la dispersión en la región elástica. Fuera de ese rango los procesos inelásticos comienzan a influir, es necesario diagonalizar la matriz S hallar sus autofunciones y tomar en cuenta  $D_{\gamma,1}, D_{\gamma,3}, \dots$ , a partir de los cuales se podrían calcular los autovalores de S. En general este es un programa muy difícil de llevar a cabo y es necesario introducir aproximaciones. La más simple y razonable, es considerar que la ecuación (8.11) describe el corrimiento de fase elástico para toda energía, y tomar como autofunciones de "predominantemente dos partículas", para todo s, a las autofunciones para dos partículas, lo que en realidad solo es cierto en la región elástica. Sin embargo podemos esperar que esta aproximación sea buena en los casos en que los procesos inelásticos son pequeños y para s no mucho mayor que  $s_3$ .

No es posible prever que  $D_{\gamma,2}(s)$  sea una función entera de la constante de acoplamiento como en teoría de potencial. Únicamente el buen comportamiento de la función  $\gamma_{\gamma}(w)$  no relativista, nos autoriza a esperar, que  $\gamma_{\gamma,2}(s)$  goce de ventajas sobre el desarrollo perturbativo habitual cuando la constante de ac-

plamiento sea grande.

Atribuyendo a  $D_{r,2}(s)$  los procesos elásticos, la amplitud de dispersión elástica

$$t_r(s) = e^{i\delta_r(s)} \operatorname{sen} \delta_r(s) \quad (8.12)$$

puede expresarse en función de  $T_r(s)$ :

$$t_r(s) = \frac{1}{\operatorname{ctg} \delta_r(s) - i} = \frac{T_{r,2}(s)}{\mathcal{L}_e D_{r,2}^* + i \operatorname{Im} D_{r,2}^*} \quad (8.13)$$

De la definición (8.7) para  $D_{r,2}(s)$  obtenemos el límite

$$\lim_{c \rightarrow 0} D_{r,2}(s) = 1$$

y también nos muestra que como  $s_{ra}^* > s_2$ , sus únicas singularidades son polos en los autovalores de  $H_0$ , y en el límite de recinto infinito esto es un corte desde  $s_2$  a infinito, entonces puede ponerse:

$$\mathcal{L}_e D_{r,2}^*(s) = 1 + \frac{i}{\pi} \int_{s_2}^{\infty} \frac{\operatorname{Im} D_{r,2}^*(s')}{s' - s} ds' \quad (8.14)$$

de esta expresión:

$$t_r(s) = \frac{r_r(s)}{d_r(s)}$$

con:

$$d_r(s) = 1 - \frac{i}{\pi} \int_{s_2}^{\infty} \frac{r_r(s')}{s' - s} ds' \quad (8.15)$$

donde hemos sobrentendido el índice "2".

Probamos ahora que  $r_r(s)$  no tiene singularidades en la región física. La expresión (8.12) para la amplitud elástica satisface la condición:

$$t_r(s) t_r^*(s) = 2i t_r(s) t_r^*(s) \quad (8.16)$$

Esta expresión es equivalente a la relación de unitariedad de la matriz  $S$ , para valores de  $s$  en la región elástica, podrá suponerse válida en el resto del eje físico si se desprecian los canales inelásticos. Definiendo

$$t_r^{\pm}(s) = \lim_{c \rightarrow 0} t_r(s \pm i c)$$

podemos escribir la ecuación (8.16) como:

$$t_r^+(s) - t_r^-(s) = 2i t_r^+(s) t_r^-(s)$$

de (8.15) usando (4.11):

$$d_r^+(s) - d_r^-(s) = \begin{cases} -2i r_r(s) & s_2 < s \\ 0 & s < s_2 \end{cases} \quad (8.17)$$

o sea  $d_Y(s)$  unicamente tiene singularidades en la región física. Entonces:

$$r_Y^+(s) - r_Y^-(s) = t_Y^+(s) d_Y^+(s) - t_Y^-(s) d_Y^-(s) = [t_Y^+(s) - t_Y^-(s) - 2i t_Y^+(s) t_Y^-(s)] d_Y^+(s) = 0$$

esto prueba que  $r_Y(s)$  es analítica para valores físicos de  $s$ . Si no efectuáramos la aproximación de despreciar los procesos inelásticos, la relación (8.16) no sería completa y la función  $r_Y(s)$  definida por (8.13) solo sería analítica en  $s_2 < s < s_3$ .

### 9. METODO DE CALCULO Y COMPARACION CON EL N/D.

El procedimiento de cálculo efectivo es similar al usado en la sección 6 para el caso potencial, y nos permite obtener el desarrollo de  $r_Y(s)$  en términos de la constante de acoplamiento. A partir de la serie perturbativa de la amplitud de dispersión pión-nucleón, resultan expresiones análogas a (6.3), es decir

$$\begin{aligned} r_Y^{(2)}(s) &= t_Y^{(2)}(s) \\ r_Y^{(3)}(s) &= t_Y^{(3)}(s) + t_Y^{(2)}(s) d_Y^{(2)}(s) \quad \text{etc.} \end{aligned} \quad (9.1)$$

Como  $t_Y^{(1)}(s)$  es la aproximación de Born no tiene singularidades en  $s > s_2$ ;  $t_Y^{(2)}(s)$  puede tener, pero serán compensadas por las de  $d_Y^{(2)}(s)$ , de forma que  $r_Y^{(2)}(s)$  no tenga singularidades en la región física. El método no se altera si consideramos varias interacciones como posibles, por ejemplo  $\pi\pi$  y  $\pi\pi$ , o como usaremos más adelante  $\pi\pi$ ,  $\pi\pi$  y  $\pi\pi$ . Cada uno de los acoplamientos está definido por una constante de acoplamiento, y debemos desarrollar en términos de ellas y obteniendo expresiones análogas a (9.1). Como ejemplo consideremos el caso de dos constantes  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$ , entonces:

$$[t^{\lambda_1} + t^{\lambda_2} + t^{\lambda_1\lambda_2} + t^{\lambda_2\lambda_1} + \dots] [d^{\lambda_1} + d^{\lambda_2} + d^{\lambda_1\lambda_2} + d^{\lambda_2\lambda_1} + \dots] = r^{\lambda_1} + r^{\lambda_2} + r^{\lambda_1\lambda_2} + \dots$$

igualando:

$$\begin{aligned} r^{\lambda_1} &= t^{\lambda_1} \\ r^{\lambda_2} &= t^{\lambda_2} \\ r^{\lambda_1\lambda_2} &= t^{\lambda_1} d^{\lambda_2} + t^{\lambda_2} d^{\lambda_1} + t^{\lambda_1\lambda_2} \quad \text{etc.} \end{aligned} \quad (9.2)$$

En este caso ocurre una compensación de singularidades análoga a la discutida en el caso de una constante.

Podemos mejorar la convergencia de la función  $d_Y(s)$  normalizando  $r_Y(s)$  en un punto definido  $s_0$ . Definiendo.

$$\bar{r}_Y(s) = \frac{r_Y(s)}{\text{Re } d_Y(s_0)}$$

la ecuación (8.11) se puede poner como

$$\text{tg } \delta_Y(s) = \frac{r_Y(s)}{1 - \frac{1}{\pi} \int_{s_0}^{\infty} \frac{ds' r_Y(s')}{(s'-s_0)} - \frac{(s-s_0)}{\pi} \int_{s_0}^{\infty} \frac{ds' r_Y(s')}{(s'-s)(s'-s_0)}}$$

y desde que:

$$\text{Re } d_Y(s) = 1 - \frac{1}{\pi} \int_{s_0}^{\infty} \frac{ds' r_Y(s')}{s'-s_0}$$

resulta:

(9.3)

$$\text{tg } \delta_Y(s) = \frac{\bar{r}_Y(s)}{1 - \frac{s-s_0}{\pi} \int_{s_0}^{\infty} \frac{\bar{r}_Y(s') ds'}{(s'-s)(s'-s_0)}}$$

y:

(9.4)

$$t_0(s) = \frac{\bar{r}_Y(s)}{1 - \frac{s-s_0}{\pi} \int_{s_0}^{\infty} \frac{\bar{r}_Y(s') ds'}{(s'-s)(s'-s_0)}}$$

La función  $\bar{r}_Y(s)$  difiere de  $r_Y(s)$  únicamente en un factor constante, de forma que sus propiedades analíticas son idénticas. En el cálculo usaremos esta expresión sustraída y en lo sucesivo omitiremos la barra de  $\bar{r}$  en la notación. En el caso que la amplitud de dispersión tenga un polo, el residuo define la constante de acoplamiento; llamando  $s_0$  a la posición del polo, la ecuación sustraída (9.4) asegura que nuestra aproximación tenga el residuo correcto en dicho punto.

La expresión (9.4) es muy apta para fijar valores de constantes de acoplamiento en base a resonancias experimentales. Podemos ver que en el entorno de una resonancia de la onda  $\delta$ , puede darse a  $t_Y(s)$  una estructura del tipo de fórmula de Breit y Wigner. Supongamos que  $s_p$  sea la energía de resonancia entonces debe ser  $\delta(s_p) = \pi$  y de (9.3) resulta:

$$s_Y = s_0 + 4 / \bar{r}_Y(s_p) \quad (9.5)$$



con:

$$I_y(s) = \frac{1}{\pi} \int_{s_1}^{\infty} \frac{r_T(s') ds'}{(s'-s)(s'-s_0)}$$

Por lo tanto en un entorno de la energía de resonancia:

$$t_T^{\pm}(s) = \frac{r_T(s)/I_r(s)}{s_T - s - i \frac{r_T(s)/I_r(s)}{I_y(s)}} \quad (9.6)$$

que es formalmente una ecuación del tipo resonante con un ancho medio:

$$T_0 = \frac{r_T(s_T)}{I_y(s_T)} \quad (9.7)$$

De esta forma conocidas las características experimentales de la resonancia, pueden usarse las ecuaciones (9.5) y (9.7) para fijar parámetros teóricos.

El método determinantal como lo hemos planteado, puede también interpretarse como una forma de resolver las ecuaciones N/D de Chew y Mandelstam<sup>25</sup>. Describamos primero en qué consisten estas, escribiendo la amplitud de dispersión para  $\delta$  dados como:

$$t(s) = r(s)/d(s) \quad (9.8)$$

se adscriben a  $d(s)$  las siguientes singularidades en la región física ( $R_f$ ) de  $t$  y a  $r(s)$  el resto o sea:

$$\begin{aligned} \text{Im } d(s) &= r(s) \text{ Im } 1/t(s) = -r(s) && \text{en } s \in R_f \\ &= 0 && \text{en } s \notin R_f \\ \text{Im } r(s) &= d(s) \text{ Im } t(s) = 0 && \text{en } s \notin R_f \\ &= 0 && \text{en } s \in R_f \end{aligned}$$

entonces es posible admitir relaciones de dispersión para  $r$  y para  $d$

$$r(s) = \frac{1}{\pi} \int_{s \notin R_f} \frac{d(s') \text{ Im } t(s') ds'}{s'-s} \quad (9.9)$$

y normalizando  $d(s_0) = 1$ :

$$d(s) = 1 - \frac{(s-s_0)}{\pi} \int_{R_f} \frac{r(s') ds'}{(s'-s)(s'-s_0)} = 1 - \frac{(s-s_0)}{\pi} \int_{s \notin R_f} d(s') \text{ Im } t(s') \int_{R_f} \frac{ds'}{(s'-s)(s'-s_0)(s'-s')} \quad (9.10)$$

El procedimiento usual para resolverlas consiste en suponer un valor para  $\text{Im } t$  en la región no física, lo llamaremos  $\text{Im } t^A$ , reemplazando en (9.10) se obtiene una ecuación integral para  $d(s)$ , que puede ser resuelta numérica-

mente, entonces la ecuación (9.9) da  $r(s)$ . De esta forma obtenemos una amplitud  $t$ , que fuera de la región física tiene las singularidades de  $t^A$  supuesta y contiene la influencia de ellas en la región física; en efecto

$$\text{Im } t = \frac{\text{Im } r}{d}, \text{ Im } t^A \quad s \notin R_1$$

La relación de cruce se satisface, ya que  $t$  en el canal directo tiene todas las singularidades no físicas que le hemos adjudicado a través de  $t^A$ , y que provienen de procesos en los canales cruzados.

El método determinantal como se ha planteado implica resolver iterativamente el sistema de ecuaciones (9.9) y (9.10); en primer orden ponemos en (9.9)  $d(s') = 1, t(s') = t^A(s')$ , entonces  $r(s) = t^A(s)$  y obtenemos así  $d(s)$  en (9.10). Pero como por este procedimiento

$$\text{Im } t = \frac{\text{Im } r}{d} = \frac{\text{Im } t^A}{d} \quad s \notin R_1 \quad (9.11)$$

el valor de las singularidades de la amplitud obtenida no coincide con el de las supuestas. Por lo tanto el método determinantal solo satisface exactamente la relación de cruce en  $s = s_0$ . Sin embargo, como la elección de  $\text{Im } t^A(s)$  fuera de  $R_1$  es realmente cualitativa, podemos decir que, si  $d(s)$  es una función sin oscilaciones bruscas, de forma que, por (9.11), no distorsione mucho la relación entre las singularidades introducidas y las resultantes, la  $t$  determinantal es físicamente tan satisfactoria como la obtenida con el método  $H/D$ , mientras que su cálculo es mucho más simple.

### III. DISPERSION ELASTICA PION-NUCLEON

#### 10. INTRODUCCION

Vamos a aplicar el método descrito en la sección 8 a la dispersión pión-nucleón en bajas energías; en este caso el umbral elástico comienza en  $s_2 = (m+\mu)^2$  y el inelástico en  $s_3 = (m+2\mu)^2$ ; podemos por lo tanto esperar que hasta energías del orden de  $s_3$  (aproximadamente 200 Mev de energía del pión en el sistema de laboratorio), la influencia de los términos inelásticos sea pequeña y el método determinantal unicanal permita una descripción del proceso. En el proceso considerado (figura 5) no es un problema complicado obtener el segundo orden perturbativo, representado por los diagramas (6.a) y (6.b) y proyectando, aplicar el método a la amplitud correspondiente a una dada onda parcial; sin embargo el cálculo determinantal de los gráficos de cubte orden resulta numericamente impracticable. Aunque para verificar la eficacia del método sería necesario comparar los resultados obtenidos hasta el cuarto orden, con los que resultan de considerar solamente el segundo, la imposibilidad de efectuar esto, nos lleva a admitirla y agregando diagramas fenomenológicos con partículas inestables, en forma análoga a la usada en el método N/D<sup>26</sup>, tratar de obtener una aproximación a la información experimental que se conoce.

Si se admite la representación de Mandelstam, la amplitud de dispersión del proceso (figura 5), para una definida onda parcial, tiene en el plano  $s$ , el espectro de singularidades mostrado en la figura 7; en el apéndice III enunciaremos la procedencia de los distintos cortes. Si consideramos ahora que la amplitud en un punto está dada principalmente por las singularidades más cercanas;<sup>27</sup> como la región que nos interesa es la región elástica, es decir  $(m+\mu)^2 \leq s \leq (m+2\mu)^2$ , podemos restringirnos a incluir en  $\pi_l(s)$ , las siguientes singularidades no físicas:



fig 5

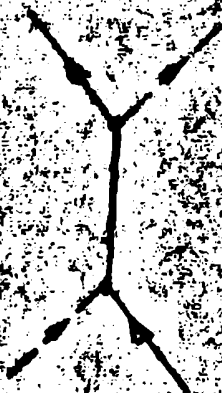


fig 6.a



fig 6.b



fig 6.c

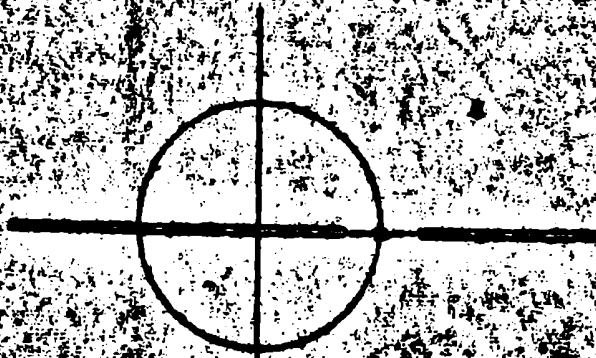


fig. 9

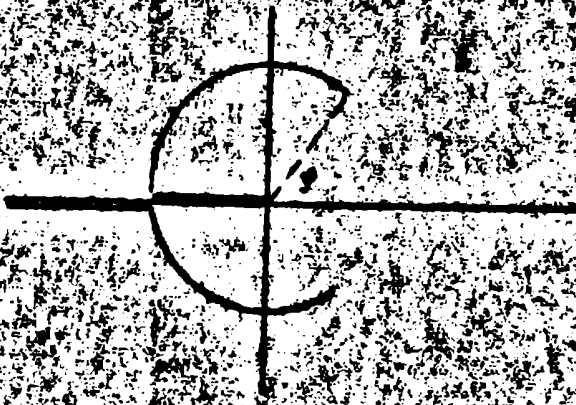


fig. 10

- a) el polo  $s = -m^2$
- b) el corte  $m^2(1 - \frac{\mu^2}{m^2})^2 \leq s \leq m^2 + 2\mu^2$
- c) parte del corte  $0 \leq s \leq (m - \mu)^2$
- d) parte del arco  $|s| = m^2 - \mu^2$

Esto implica tomar en los canales cruzados, únicamente los estados intermedios masivos (fig III.1, III.2 y III.3); desde otro punto de vista esta aproximación puede interpretarse como que tomamos en cuenta solo la parte exterior del potencial;<sup>27</sup> este argumento permite esperar que será posible lograr mejores resultados en bajas energías, para las ondas P y D, donde la barrera centrífuga apantalla la parte interior del potencial, que en las ondas S, las cuales dependerán entonces de los procesos de mayor orden en los canales cruzados.

Debemos considerar con que diagramas representaremos los ciertos seleccionados, para ello adoptamos en los canales cruzados los sistemas físicos intermedios, cuya masa sea del orden del rango de energía que nos interesa;<sup>28</sup> esto corresponde a tomar en el corte  $0 \leq s \leq (m - \mu)^2$  y en el círculo solo las zonas más cercanas a la región física; es decir <sup>los</sup> diagramas de las figuras 8.a y 8.b. Sin embargo es conocido experimentalmente que en bajas energías, el proceso  $\pi + N \rightarrow \pi + N$  está dominado por la resonancia llamada  $N^*$ , esto permite simplificar el cálculo reemplazando el gráfico 8.a por el 9.a, donde el  $N^*$  es una partícula de spin  $3/2$  e isospin  $3/2$ . Análogamente puede procederse con el gráfico 8.b reemplazándolo por el 9.b donde se introduce el  $\rho$ , esto es, la más baja resonancia experimental del proceso  $\pi + \pi \rightarrow \pi + \pi$  y que tiene spin 1 e isospin 1. Así, suponemos que estas resonancias pueden tratarse en forma similar a partículas elementales, esto es cierto en el orden en que la resonancia sea estrecha (larga vida media). Las constantes de acoplamiento de estas partículas con el  $\pi$  y el  $N$  pueden calcularse a partir de procesos experimentales, la manera de efectuarlo la discutiremos cuando calculemos dichos gráficos. El polo en  $s = m^2$  es producido por el gráfico 6.a, y el corte b) por el polo cruzado representado en la fig 6.b; por tanto incluir dichos diagramas, implica considerar totalmente esas singularidades.

La amplitud perturbativa obtenida de los diagramas 6.a, 6.b, 9.a y 9.b, proyectada

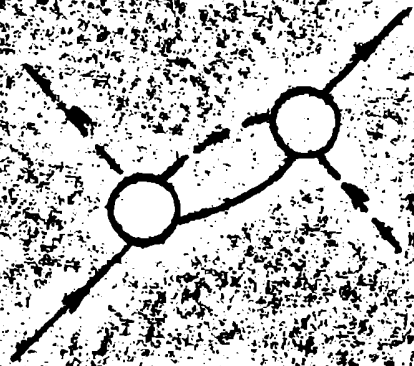


fig 8.a

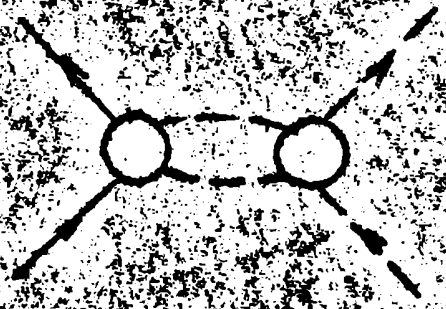


fig 8.b

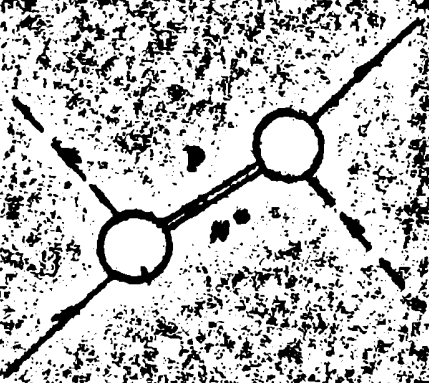


fig 9.a

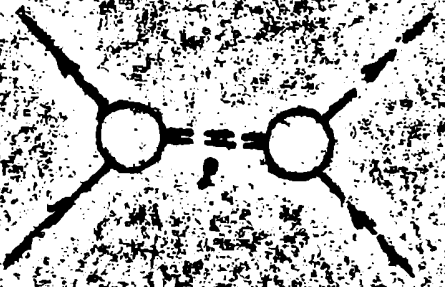


fig 9.b

sobre momento angular total y paridad definidos, constituyen la función  $r(s)$  que mediante la ecuación 9.4, nos permitirá obtener la amplitud de transición en lo que podríamos llamar primer orden fenomenológico, esto, en otro sentido, podría pensarse como un desarrollo en primer orden de cada una de las constantes de acoplamiento que aparecen en dichos gráficos.<sup>29</sup> Por la construcción que hemos efectuado para  $r(s)$ , esta función no tiene cortes en la región física lo cual asegura que la amplitud de transición obtenida desde la ecuación 9.4 satisface la relación de unitariedad.

## 11. CINEMATICA.

Resumiremos las fórmulas cinemáticas de la dispersión pión-nucleón.<sup>30</sup>

Usando la métrica:<sup>31</sup>

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & +1 \end{pmatrix} \quad (11.1)$$

y con:

$$\gamma^0 = \beta \quad \vec{\gamma} = \beta \vec{\alpha} \quad \gamma_5 = \gamma_0 \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3$$

donde  $\beta$  y  $\alpha_i$  son las matrices de Dirac. La ecuación de movimiento para un nucleón libre será:

$$(-i\gamma \partial + \frac{m c}{\hbar}) \psi = 0 \quad (11.2)$$

usando las unidades tales que  $\hbar = c = 1$  y la notación  $\not{p} = \gamma_\mu p_\mu$ , la solución de onda plana de esta ecuación es:

$$\psi(x) = e^{-ipx} u(p)$$

donde el spinor satisface:

$$(\not{p} - m) u(p) = 0 \quad (11.3)$$

con la normalización

$$\bar{u}_r(p) \gamma_0 u_s(p) = u_r^\dagger(p) u_s(p) = \delta_{rs} E/m$$

donde  $r$  y  $s$  individualizan el spin, los spinores de energía positiva solucio-



nes de la ecuación (11.3) se escriben:

$$u^s(p) = \frac{1}{[2m(E+m)]^{1/2}} \begin{pmatrix} E+m \\ \vec{\sigma} \cdot \vec{p} \end{pmatrix} \chi^s \quad (11.4)$$

siendo  $\sigma_i$  las matrices de Pauli y  $\chi^s$  el autovector del spin.

Llamando  $p$  y  $q$  a los tetramomentos del nucleón y mesón incidentes,  $p'$  y  $q'$  el de los salientes,  $s$  e  $i$  el spin e isospin del nucleón y  $\lambda$  el isospin del pion, el elemento de matriz  $S$  del proceso (figura 5) es:

$$\begin{aligned} S_{fi} &= \langle p' q' s' i' \lambda' | p q s i \lambda \rangle = S_{fi} - i T_{fi} \\ &= S_{fi} - i (2\pi)^4 \delta^4(p+q-p'-q') \left( \frac{m^2}{p_0 p'_0 q_0 q'_0} \right)^{1/2} \bar{u}_f(p') M u_i(p) \left( \frac{1}{2\pi} \right)^6 \end{aligned} \quad (11.5)$$

donde  $\bar{u}_f M u_i$  es un invariante Lorentz,<sup>31</sup> y puede escribirse en términos de los escalares independientes del proceso, de la forma:

$$M = -A + \not{Q} B \quad (11.6)$$

con  $Q = \frac{q+q'}{2}$ , siendo  $A$  y  $B$  dos funciones que dependen de escalares Lorentz. Elijamos estos como:

$$\begin{aligned} s &= (p+q)^2 = (p'+q')^2 \\ \bar{s} &= (p'-q')^2 = (p-q)^2 \\ t &= (p-p')^2 = (q'-q)^2 \end{aligned} \quad (11.7)$$

de su definición resulta que:

$$s + t + \bar{s} = 2m^2 + 2\mu^2$$

por lo tanto solo dos de ellos son independientes; esto corresponde al hecho de que un choque elástico está definido si se conoce la energía y el ángulo de dispersión. En el sistema de centro de masa del proceso, resulta:

$$\begin{aligned} s &= (E+\omega)^2 = W^2 \\ t &= -2q^2(1-\cos\theta) \\ \bar{s} &= \frac{(m^2-\mu^2)^2}{s} - \frac{1-\cos\theta}{2} + (2m^2+2\mu^2/c) \frac{1+\cos\theta}{2} \end{aligned} \quad (11.8)$$

donde  $W$  es la energía total,  $k-p_0 = p'_0$ ,  $\omega = q_0 = q'_0$ , y  $\theta$  el ángulo de dispersión. Definiendo

$$f = \sqrt{\frac{E}{m}} \left\{ f_1 + f_2 \frac{(\vec{\sigma} \cdot \vec{p}')(\vec{\sigma} \cdot \vec{p})}{p^2} \right\}$$

tal que la sección eficaz diferencial entre estados de spin definido esta dada por:

$$\frac{d\sigma_{fi}}{d\Omega} = |\chi_f^\dagger f \chi_i|^2$$

resulta

$$\hat{u}_f(\vec{p}') M u_i(\vec{p}) = \frac{4\pi W}{m} \chi_f^\dagger \left\{ f_1 + \frac{(\vec{\sigma} \cdot \vec{p}')(\vec{\sigma} \cdot \vec{p})}{p^2} f_2 \right\} \chi_i$$

de donde

$$\begin{aligned} f_1 &= \frac{E+m}{8\pi W} \left\{ -A + (W-m) B \right\} \\ f_2 &= \frac{E-m}{8\pi W} \left\{ A + (W+m) B \right\} \end{aligned} \quad (11.9)$$

Descomponiendo en ondas parciales

$$\chi_f^\dagger f \chi_i = 4\pi \sqrt{\frac{E}{m}} \sum \left\{ f_{2+} (\chi_f^\dagger R_{2+} \chi_i) + f_{2-} (\chi_f^\dagger R_{2-} \chi_i) \right\}$$

siendo  $R_{2+}$  y  $R_{2-}$  los proyectores sobre estados de paridad  $(-1)^l$  y de momento angular,  $j=l+\frac{1}{2}$  y  $j=l-\frac{1}{2}$  respectivamente:

$$R_{2+} = \frac{1}{4\pi} \left[ (l+1) P_l(\cos\theta) - i P_l'(\cos\theta) \vec{\sigma} \cdot (\hat{q}' \wedge \hat{q}) \right]$$

$$R_{2-} = \frac{1}{4\pi} \left[ l P_l(\cos\theta) + i P_l'(\cos\theta) \vec{\sigma} \cdot (\hat{q}' \wedge \hat{q}) \right]$$

por lo tanto

$$f_1(s, \vec{s}, t) = \sum_{l=0}^{\infty} f_{2+}(s) P_{l+1}'(\cos\theta) - \sum_{l=1}^{\infty} f_{2-}(s) P_{l-1}'(\cos\theta)$$

$$f_2(s, \vec{s}, t) = \sum_{l=0}^{\infty} [f_{2-}(s) - f_{2+}(s)] P_l'(\cos\theta)$$

Invirtiendo estas expresiones:

$$f_{2+}(s) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 [f_1(s) P_l(\cos\theta) + f_2(s) P_{l+1}'(\cos\theta)] d\cos\theta \quad (11.10)$$

Usando la relación de unitariedad para la matriz S, puede expresarse la amplitud  $f_{\lambda\lambda}$  en función del respectivo corrimiento de fase, esto es:

$$f_{\lambda\lambda}(s) = \frac{e^{i\delta_{\lambda\lambda}(s)} \operatorname{sen} \delta_{\lambda\lambda}(s)}{q} \quad (11.11)$$

donde:

$$q^2 = \frac{[s - (m+\mu)^2][s - (m-\mu)^2]}{4s}$$

No hemos considerado aún el spin isotópico, éste para un sistema de un nucleón y un pión puede adoptar los valores  $\frac{1}{2}$  ó  $3/2$ , y como la interacción pión-nucleón satisface independencia de carga, no depende de la tercera componente del isospin,<sup>22</sup> y es suficiente proyectar sobre el isospin total, poniendo

$$M = M^+ \delta_{\lambda\lambda'} + M^{-\frac{1}{2}} [\tau_{\lambda}, \tau_{\lambda'}]$$

donde  $\frac{1}{2} \tau_{\lambda}$  representa el isospin del nucleón ( $\lambda = 1, 2, 3$ ). Usando los proyectores sobre isospin bien definidos<sup>30</sup>

$$\begin{aligned} \langle \lambda' | R^{\frac{1}{2}} | \lambda \rangle &= \frac{1}{3} \tau_{\lambda'} \tau_{\lambda} \\ \langle \lambda' | R^{\frac{3}{2}} | \lambda \rangle &= \delta_{\lambda\lambda'} - \frac{\tau_{\lambda'} \tau_{\lambda}}{3} \end{aligned}$$

se obtiene

$$\begin{aligned} M^{\frac{1}{2}} &= M^+ - M^- \\ M^{\frac{3}{2}} &= M^+ + 2M^- \end{aligned} \quad (11.12)$$

siendo:

$$M^{\frac{1}{2}, \frac{3}{2}} = -A^{\frac{1}{2}, \frac{3}{2}} + B^{\frac{1}{2}, \frac{3}{2}}$$

las amplitudes de isospin bien definido.

Tenemos de esta forma completo el esquema de cálculo, conocida M a partir de las reglas de Feynman, (11.12) nos permite obtener  $A^I$  y  $B^I$ , usando (11.9) obtenemos  $f_1^I$  y  $f_2^I$  las cuales mediante la ecuación (11.10) nos dan las amplitudes de transición de momento angular, paridad e isospin definidos.

## 12. DIAGRAMAS PERTURBATIVOS

Término del nucleón,

En el análisis de singularidades de las amplitudes de dispersión para pión-nucleón supuesta válida la representación de Mandelstam, los polos directo y cruzado de la figura 5, constituyen en el plano  $s-w^2$  las singularidades más cercanas a la región física, pueden por eso interpretarse como las contribuciones más importantes a la interacción de largo rango entre el pión y el nucleón,<sup>27</sup> por lo tanto la dispersión en baja energía será dominada por dichos diagramas. Además el diagrama cruzado produce, en el plano  $s$ , un corte a lo largo del eje real negativo, esto es equivalente a una fuerza de muy corto rango; para explicar su presencia es necesario observar que  $1/s-m^2$ , además de representar el gráfico 6.b, al integrar sobre los tetramomentos intermedios, incluye el gráfico 6.o; en el vértice (2) la conservación de la energía se viola fuertemente y por la relación de incertesa el range de la fuerza que lo produce es muy corto.<sup>32</sup>

El lagrangiano pseudoscalar para la interacción pión-nucleón es:<sup>31</sup>

$$G \bar{\Psi} \gamma_5 \vec{\tau} \Psi \vec{\phi}$$

donde  $\Psi$  y  $\vec{\phi}$  son los campos involucrados y  $G$  la constante de acoplamiento renormalizada ( $g^2 = G^2/41 \approx 16$ ). Usando las reglas de Feynman, el cálculo de los diagramas 6.a y 6.b es directo y se obtiene<sup>30</sup>

$$\begin{aligned} A^{1/2, 1/2} &= 0 \\ B^{1/2} &= -G^2 \left( \frac{3}{s-m^2} + \frac{1}{3-m^2} \right) \\ B^{3/2} &= 2G^2 / (s-m^2) \end{aligned} \quad (12.1)$$

Usando las ecuaciones (11.9) y (11.10) obtenemos las amplitudes de dispersión con  $1$  y  $\bar{3}$  definidos.

$$\begin{aligned} f_{\bar{3}}^{\bar{3}}(s) \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} &= - \binom{3}{0} \frac{1}{s-m^2} [a \delta_{2,0} + b \delta_{2,1,0}] + \binom{1}{2} \frac{1}{2q^2} [a Q_2(\gamma) + b Q_{2,1}(\gamma)] \\ a &= g^2 \frac{(E+m)(w-m)}{2w} & b &= g^2 \frac{(E-m)(w+m)}{2w} \end{aligned} \quad (12.2)$$

donde  $Q_2(\gamma)$  son los polinomios de Legendre de segunda especie,<sup>2</sup> de orden

l y argumento:

$$\gamma(s) = \frac{m^2 + 2\mu^2 - s}{2q^2} + 1$$

Notemos que el polo directo solo contribuye a las ondas  $S^{\frac{1}{2}}$  y  $P^{\frac{1}{2}}$

Meson  $\rho$ :

Debemos ahora calcular la contribución de la partícula  $\rho$  al proceso (fig 9.b). Por razones análogas a las discutidas en el caso del nucleón en el canal cruzado, esta partícula contribuye tanto a las fuerzas de largo rango como a las de rango corto. Analicemos las singularidades que describe; el intercambio de una partícula de masa  $m_\rho$  en el canal  $t$ , introduce en la amplitud de dispersión un denominador

$$t - m_\rho^2 = -2q^2(1 - \cos \theta) - m_\rho^2$$

que al anularse es el causante de las singularidades del gráfico 9.b, que ocurren en:

$$q^2 = -\frac{m_\rho^2}{2(1 - \cos \theta)} \quad (12.3)$$

Esto produce en el plano  $q^2$  un corte en  $q^2 \leq -m_\rho^2/4$ ; para reflejarlo en el plano  $s$ , debemos remarcar que la relación entre  $q^2$  y  $s$  no es unívoca, mientras que a un  $s$ , dado corresponde un valor de  $q^2$ , la inversa está dada por:

$$s = (q^2 + m^2) + (q^2 + \mu^2) \pm 2[(q^2 + m^2)(q^2 + \mu^2)]^{1/2}$$

a un  $q^2$  fijo corresponden dos valores de  $s$ . Reemplazando aquí,  $q^2$  por (12.3):

$$s = -\frac{m_\rho^2}{1 - \cos \theta} + m^2 + \mu^2 \pm 2 \left[ \left( m^2 + \mu^2 - \frac{m_\rho^2}{1 - \cos \theta} \right)^2 - (m^2 - \mu^2)^2 \right]^{1/2}$$

Variando  $\cos \theta$  entre  $-1$  y  $+1$ , es descripta la singularidad mostrada en la figura 10 donde  $\psi$  depende del valor de  $m_\rho$ . ( $m_\rho > 2\mu$ )

$$\tan \psi = 2 \left[ \left( \frac{m^2 - \mu^2}{m^2 + \mu^2 - \frac{m_\rho^2}{2}} \right)^2 - 1 \right]^{1/2} \quad (12.4)$$

para el valor adoptado de la masa del bipión  $m_\rho = 5\mu$  resulta  $\psi \approx 54^\circ$ . Aparentemente no tomamos en cuenta las singularidades más cercanas, esto es  $\psi$  pequeños, sin embargo esta región corresponde a intercambiar un par de piones con energía  $t$  menor a  $m_\rho^2$  (fig 8.b). Dada la información experimental del dominio

de la resonancia  $\rho$ , la parte imaginaria de  $f_1$  sobre esa región es pequeña y esencialmente puede despreciarse, <sup>26,33</sup>

Efectuemos ahora el cálculo perturbativo de nuestro diagrama. La partícula  $\rho$  tiene  $J=1^+$ ,  $T=1$  y por tanto está descrita por una función de onda  $\rho_\mu^i$ , que es un tetravector Lorentz, y un pseudovector en el espacio de spin isotópico. <sup>34</sup>

Estas características de la partícula  $\rho$  permiten definir unívocamente su interacción con las otras partículas. Como el pión es una partícula pseudoescalar en el espacio Lorentz y pseudovector en el isospacio, <sup>34</sup> es evidente que el vértice  $\pi N \rho$  (fig 11.a) estará dado por:

$$\lambda_{\pi} \epsilon_{ijk} (q^i q^j)_{\mu} \quad (12.5)$$

$\epsilon_{ijk}$  es el tensor de antisimetría tridimensional,  $i$  y  $j$  son los índices de isospin de los piones, notemos que el otro vector independiente  $(q^i - q^j)_{\mu}$  no contribuye debido a la condición de Lorentz  $k_{\mu} \rho^{\mu} = 0$ . El vértice  $N N \rho$  (fig 11.b) es formalmente análogo al del factor de forma del nucleón, o sea contiene un término de tipo eléctrico y otro de tipo magnético, la diferencia consiste en la parte isotópica ya que el  $\rho$  puede ser cargado, entonces

$$[C_1 \gamma_{\mu} + C_2 \sigma_{\mu\nu} (\not{p} - \not{p}') ] \tau_k \quad (12.6)$$

de forma que  $\tau_k \rho^k$  es un escalar propio en el isospacio; usamos

$$\sigma_{\mu\nu} = \gamma_{\mu} \gamma_{\nu} - \gamma_{\nu} \gamma_{\mu}$$

La interacción  $\rho N$  (fig 11.c) únicamente pueda ocurrir, con el  $\rho^0$ , esto es:

$$\lambda_{\gamma} \delta_{k,3} \quad (12.7)$$

donde hemos contraído el índice vectorial del bipión con el del fotón.

Usando estas reglas y el propagador del mesón vectorial de momento  $k_{\mu}$ ,

$$\frac{1}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2 - m_{\rho}^2} \left[ \delta_{\mu\nu} - \frac{k_{\mu} k_{\nu}}{k^2} \right]$$

tenemos completo el esquema para calcular el diagrama de figura 9.b.

Es claro que a nuestra suposición de considerar la resonancia  $\rho$  como una partícula elemental debemos agregarle la hipótesis de que los vértices de interacción son puntuales, esto es suponer que  $\lambda_{\pi}, C_1, C_2$  y  $\lambda_{\gamma}$  son constantes y las determinaremos a partir de gráficos fenomenológicos.

Procedamos ahora a calcular el diagrama que nos interesa (fig 9.b); a partir de las reglas anteriores, se puede calcular el elemento de la matriz S (11.5); como de (11.12)

$$i \epsilon_{ijk} Z_k = \frac{1}{2} [Z_i, Z_j] = \begin{cases} 2 & \tau = 1/2 \\ -1 & \tau = 3/2 \end{cases}$$

resulta inmediatamente:

$$A(s, \bar{\epsilon}, t) \begin{pmatrix} \tau = 3/2 \\ \tau = 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \frac{2}{t - m_\pi^2} \lambda_\pi C_2 \left( s + \frac{m_\pi^2}{2} - m^2 - \mu^2 \right)$$

$$B(s, \bar{\epsilon}, t) \begin{pmatrix} \tau = 3/2 \\ \tau = 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \frac{2}{t - m_\pi^2} \lambda_\pi (C_1 + 2 m C_2)$$

Usando las ecuaciones (11.9) y (11.10) podemos calcular la contribución a la amplitud proyectada:

$$f_{\ell+}^{\rho}(\theta) \begin{pmatrix} \tau = 3/2 \\ \tau = 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \left\{ U Q_{\ell}(\eta) + V Q_{\ell+1}(\eta) \right\}$$

siendo

$$U = \frac{E+m}{8\pi q^2 w} \left\{ \lambda_\pi C_2 \left( s + \frac{m_\pi^2}{2} - m^2 - \mu^2 \right) - (W-m) \lambda_\pi (C_1 + 2m C_2) \right\}$$

$$V = -\frac{E-m}{8\pi q^2 w} \left\{ \lambda_\pi C_2 \left( s + \frac{m_\pi^2}{2} - m^2 - \mu^2 \right) + (W+m) \lambda_\pi (C_1 + 2m C_2) \right\}$$

y

$$\eta = 1 + \frac{m_\pi^2}{2q^2}$$

Es necesario determinar las constantes de acoplamiento que aparecen en estas formulas. Para eso extendamos nuestra aproximación de que las singularidades más cercanas determinan el proceso en bajas energías a las reacciones  $\pi\pi \rightarrow \pi\pi$  y  $\pi\pi \rightarrow \gamma$ ; como hemos dicho esto implica suponer el dominio de los estados intermedios de menor energía en los canales cruzados. Por tanto consideraremos que la dispersión  $\pi\pi$  está suficientemente representada por el gráfico 12.a, efectuando su cálculo se obtiene<sup>30</sup>

$$\frac{1}{p} e^{i\delta_{\pi\pi}} \sin \delta_{\pi\pi} = \frac{\lambda_\pi^2}{6\pi \sqrt{t}} \frac{p^2}{t - m_\pi^2}$$

donde p es el momento en el centro de masa. Comparando con la fórmula de resonancia de Frazer y Fulco:<sup>33</sup>

$$\Gamma' = \frac{\lambda_\pi^2}{48\pi} = \frac{m_\rho^2}{8 p^2} \Gamma \tag{12.9}$$

siendo  $\Gamma$  el ancho de la resonancia.

Comparando el resultado del cálculo del factor de forma del pión (fig 12.b) usando el bipión, con la expresión dada por Frazer y Fulco:

$$F_{\pi} = \frac{m_{\rho}^2}{m_{\rho}^2 - t}$$

se obtiene:

$$\lambda_{\pi} \lambda_{\rho} = e m_{\rho}^2 \quad (12.10)$$

Para determinar  $C_1$  y  $C_2$  debemos recurrir al factor de forma del nucleón (fig 12.c), el bipión solo contribuye a la parte isovectorial, en este caso usamos como comparación las expresiones experimentales de Clement y Villi<sup>26</sup>

$$F_1^V(t) = \frac{g}{2} \left[ 1 - a_V + \frac{a_V m_{\rho}^2}{m_{\rho}^2 - t} \right]$$

$$F_2^V(t) = \frac{eg}{2m} \left[ 1 - b_V + \frac{b_V m_{\rho}^2}{m_{\rho}^2 - t} \right]$$

donde  $g=1.83$ . Relacionando con el resultado obtenido del gráfico 12.c, luego de efectuar una sustracción, resulta<sup>30</sup>

$$a_V = -\frac{2C_1 \lambda_{\rho}}{e m_{\rho}^2} \quad (12.11)$$

$$b_V = -\frac{2m}{g e} \frac{C_2 \lambda_{\rho}}{m_{\rho}^2}$$

De esta forma tenemos completo el esquema para determinar las constantes de acoplamiento que necesitamos:

$$\lambda_{\pi} C_1 = -24 \pi \Gamma' a_V \quad (12.12)$$

$$\lambda_{\pi} C_2 = -\frac{g}{m} 24 \pi \Gamma' b_V$$

Los factores de forma (12.11) verifican bien los datos experimentales con  $a_V = b_V = 1.62$ ,<sup>35</sup> usando  $\Gamma' = 0.4$  resulta:

$$\lambda_{\pi} C_1 = -48.8$$

$$\lambda_{\pi} C_2 = -13.2 \mu^{-1}$$

Estos valores pueden expresarse en la notación de Frautschi y Walecka<sup>26</sup> como:

$$\gamma_1 = \frac{\lambda_{\pi} C_1}{6} = -8.12$$

$$\gamma_2 = \frac{\lambda_{\pi} C_2}{6} m = -14.84$$

(12.13)

Hagamos notar que como era de esperar, las constantes de acoplamiento no dependen de la masa del bipión.



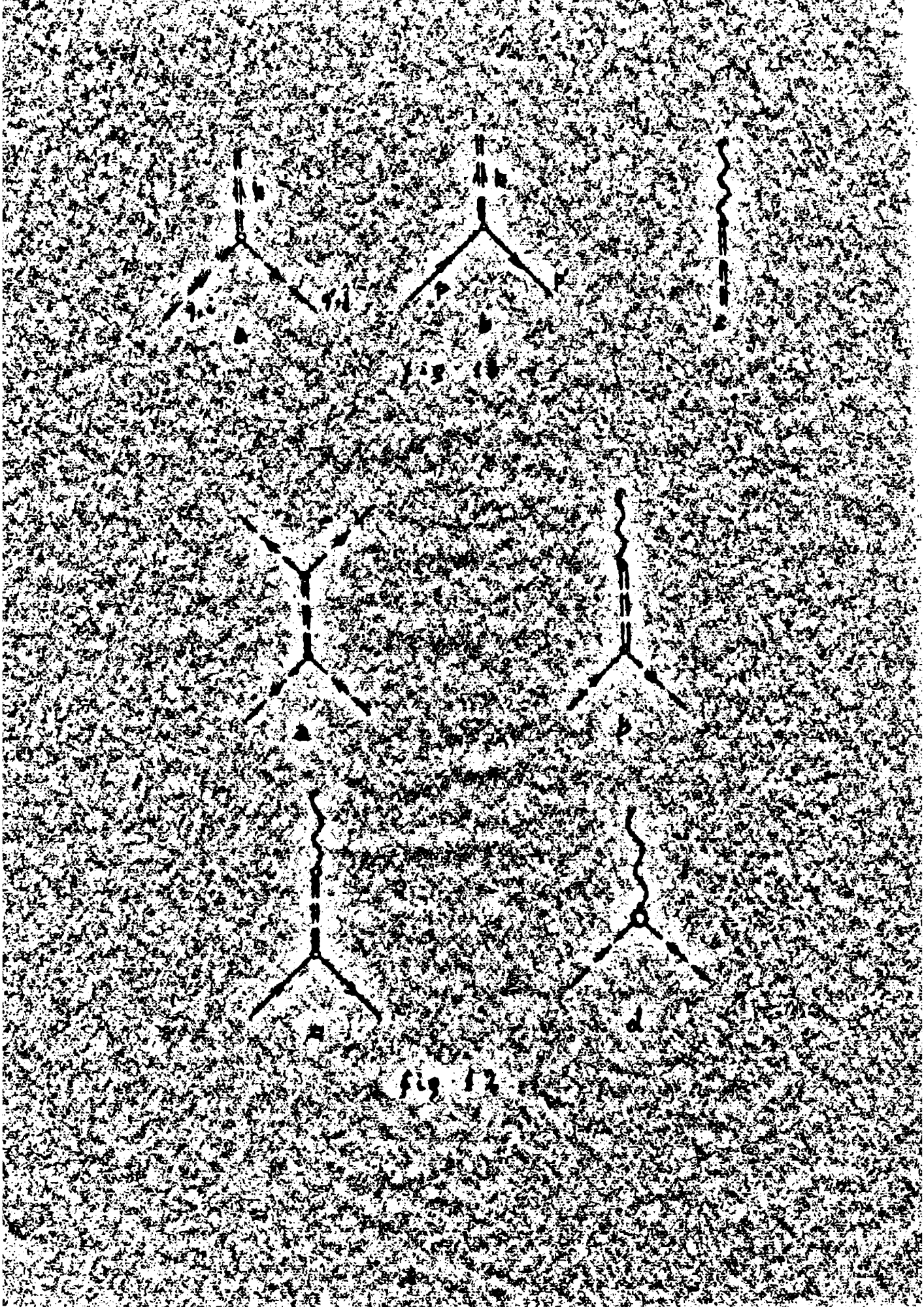


fig 12

### Resonancia $N^*$

Esta resonancia considerada como partícula de masa  $M$ , spin  $3/2$  y spin isotópico  $3/2$ , puede describirse por un campo espin-vestorial  $\Psi_\mu$ , que satisfaga las ecuaciones de Dirac-Schwinger, en el espacio de los momentos:

$$(\not{P} - M) \Psi_\mu = 0$$

con las condiciones suplementarias

$$P_\mu \Psi_\mu(P) = 0 \quad \gamma^\mu \Psi_\mu(P) = 0$$

Por tanto, de las dieciséis componentes de  $\Psi_\mu$ , únicamente cuatro son independientes, esto asegura que la partícula tiene spin definido.

Para obtener el propagador del  $N^*$ , debemos construir el proyector para spin  $3/2$ . Usando la expresión general para cualquier spin,<sup>36</sup> este resulta:

$$\Theta_\mu^\nu(3/2) = -\delta_\mu^\nu + \frac{1}{3} \gamma_\mu \gamma^\nu + \frac{\not{P}}{M^2} (P^\nu \gamma_\mu - P_\mu \gamma^\nu) + \frac{2}{3} \frac{P_\mu P^\nu}{P^2} \quad (12.14)$$

De la misma forma, puede obtenerse el proyector sobre isospin  $3/2$ , que es análogo al usado en (11.12)

$$T_{\rho\alpha}(3/2) = \delta_{\rho\alpha} - \frac{1}{3} \tau_\rho \tau_\alpha$$

Con estos proyectores, el propagador del  $N^*$  resulta simple de escribir:

$$S_{\mu\alpha\rho}^{\nu} = \frac{i}{(2\pi)^4} \frac{\not{P} + M}{P^2 - M^2} \left\{ -\delta_\mu^\nu + \frac{1}{3} \gamma_\mu \gamma^\nu - \frac{1}{3} \frac{\not{P}}{M^2} (P_\mu \gamma^\nu - P^\nu \gamma_\mu) + \frac{2}{3} \frac{P_\mu P^\nu}{P^2} \right\} \left( \delta_{\mu\alpha} - \frac{1}{3} \tau_\mu \tau_\alpha \right) \quad (12.15)$$

Dado que en nuestra notación  $\epsilon_{\mu\nu} = \epsilon^{\mu\nu} = \sigma_{\mu\nu}$ , no es necesario cuidar la variancia de los índices;  $\beta$  es el isospin del pión final y  $\alpha$  el del inicial.

El  $N^*$  tiene paridad positiva, pues es una resonancia de la onda P del sistema nucleón-pión, pero el índice vectorial de  $\Psi_\mu$  se transforma con paridad impar; de manera tal que la única interacción posible  $[NN^*]$  es proporcional a:<sup>37</sup>

$$\bar{\Psi}_\nu \Psi_\mu \partial_\mu \varphi$$

de forma que en el vértice pongamos:

$$\lambda_\mu \gamma_\mu \quad (12.16)$$

Con estas reglas, el cálculo del diagrama (fig 9.a) no presenta dificultad; como:

$$\delta_{\lambda\lambda'} - \frac{1}{3} \tau_\lambda \tau_{\lambda'} = \begin{cases} 4/3 & \text{si } T=1/2 \\ 1/3 & \text{si } T=3/2 \end{cases}$$

resulta:

$$A \begin{pmatrix} 1/2 \\ 3/2 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} \frac{\lambda^2 q_r^2 (E_r + m)}{9} \left[ \frac{M+m}{E_r+m} \delta \alpha(s) + \frac{M-m}{E_r-m} \right] \frac{1}{M^2 - E^2} = - \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} \frac{\lambda^2 q_r^2 (E_r + m)}{9} \frac{\chi_1(s)}{M^2 - E^2}$$

$$B \begin{pmatrix} 1/2 \\ 3/2 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} \frac{\lambda^2 q_r^2 (E_r + m)}{9} \left[ -\frac{1}{E_r-m} + \frac{3 \alpha(s)}{E_r+m} \right] \frac{1}{M^2 - E^2} = - \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} \frac{\lambda^2 q_r^2 (E_r + m)}{9} \frac{\chi_2(s)}{M^2 - E^2}$$

donde:

$$M = W_r$$

$$q_r^2 = \frac{[M^2 - (m + \mu)^2] [M^2 - (m - \mu)^2]}{4M^2}$$

$$E_r^2 = q_r^2 + m^2$$

(12.17)

$$\alpha(s) = 1 + \frac{2m^2 + 2\mu^2 - s - M^2}{2q_r^2}$$

De las expresiones para A y B, usando (11.9) y (11.10) se obtiene:

$$f_{\ell_2}^{N^*} \begin{pmatrix} 1/2 \\ 3/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} \frac{\lambda^2 q_r^2 (E_r + m)}{16\pi W q_r^2 \cdot 9} \left\{ (E_r + m) [-\chi_1 + (W - m) \chi_2] Q_{\ell_2}(\xi) + (E_r - m) [\chi_1 + (W + m) \chi_2] Q_{\ell_2+1}(\xi) \right\} \quad (12.18)$$

$$\xi = 1 - \frac{s + M^2 - 2m^2 - 2\mu^2}{2q_r^2}$$

o abreviadamente:

$$f_{\ell_2}^{N^*} \begin{pmatrix} 1/2 \\ 3/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} \left\{ \Omega_{\ell_2} Q_{\ell_2}(\xi) + \Omega_{\ell_2+1} Q_{\ell_2+1}(\xi) \right\}$$

donde los  $Q_{\ell}(\xi)$  han sido definidos en el apéndice I

Para determinar la constante  $\lambda$ , usaremos el intercambio de un  $N^*$  en el canal directo (fig 13.b), ese diagrama introduce en la amplitud  $f_{\ell_2}^{N^*}(s)$  un polo, para  $s = M^2$ . Usando las reglas anteriores obtenemos cerca del polo:

$$f_{\ell_2}^{N^*}(s) = \frac{\lambda^2 q_r^2}{24\pi M} \frac{E_r + m}{M - W} \quad (12.19)$$

donde  $E_r$  está definido por las expresiones (12.17)

Podría ahora calcularse  $\lambda$ , en forma análoga a la efectuada con el mesón  $\rho$ , usando una fórmula de Breit y Wigner, expresar  $\lambda$ , en términos del ancho experimental de la resonancia. Sin embargo con el objeto de no introducir nuevos números en el cálculo, usaremos la fórmula de rango efectivo de Chew y Low para relacionar  $\lambda$ , con la constante de acoplamiento  $g_{\rho N^*}$  (12.19):

y de la fórmula de Chew y Low <sup>33</sup>

$$t_{\beta} \delta_{\beta}^2 = \frac{q}{8} \left(\frac{f}{f_0}\right)^2 q^3 \frac{M-m}{W-m} \frac{1}{M-W}$$

donde  $f$  es la constante de acoplamiento pseudovectorial  $f^2 = \left(\frac{M}{2m}\right)^2 g^2$

De aquí resulta, comparando los residuos en el polo:

$$\lambda^2 = \frac{32\pi M}{k_{r+m}} \left(\frac{q}{2m}\right)^2 \quad (12.20)$$

De esta forma tenemos completo el esquema de cálculo para la contribución del  $N^0$ .

### 13. ANALISIS DEL CALCULO Y COMPARACION CON LOS RESULTADOS EXPERIMENTALES

Con las amplitudes perturbativas que hemos obtenido en la sección anterior queda establecido nuestro esquema de cálculo, pues escribimos:

$$r_{L_2}^I(s) = t_{L_2}^I(s) = q f_{L_2}^I(s) = q \left[ f_{L_2}^{I^0}(s) + f_{L_2}^{I^1}(s) + f_{L_2}^{I^N}(s) \right] \quad (13.1)$$

Dado que la amplitud de dispersión pión-nucleón tiene un polo en  $s = -m^2$  (debido al gráfico 6.a) y que su residuo define la constante de acoplamiento renormalizada  $g^2$ , exigimos que nuestra amplitud determinantal también lo tenga, para ello usamos la expresión sustraída (9.3) con  $s = -m^2$ , o sea:

$$t_{\beta} \delta_{L_2}^I(s) = \frac{q(s) f_{L_2}^I(s)}{1 - (s-m^2) \frac{q}{2} \int_{(m+\mu)^2}^{\infty} \frac{q(s') f_{L_2}^I(s') ds'}{(s-s')(s'-m^2)}} \quad (13.2)$$

Analicemos las propiedades de convergencia de la integral que aparece en el denominador. Usando la fórmula límite:

$$\Theta_2(x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \ln \frac{x}{x-1} - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m}$$

obtenemos el siguiente comportamiento de las contribuciones a la amplitud, cuando  $s$  tiende a infinito,

$$\begin{aligned} f_{L_2}^{I^0}(\frac{\lambda_1}{2}) &= -\binom{0}{2} \frac{g^2}{4\pi^2 v_0} [\delta_{L_2,0} + \delta_{L_2,0}^0] + \binom{2}{2} \frac{g^2}{2s v_0} (-1)^{L+1} \Theta_{L,2} \\ f_{L_2}^{I^1}(\frac{\lambda_1}{2}) &= -\binom{-1}{2} \frac{\lambda_1 C_1}{4\pi^2 v_0} \ln s \\ f_{L_2}^{I^N}(\frac{\lambda_1}{2}) &= -\binom{1}{4} \frac{\lambda_1^2 s^{1/2}}{4\pi^2} (-1)^{L+1} \Theta_{L,2} \end{aligned} \quad (13.3)$$

siendo:

$$\Theta_{L,1} = 1/(L+1) \quad \Theta_{L,2} = -1/2$$

Dado que  $q(s)$  tiende como  $s^{\frac{1}{2}}$ , la integral sobre las contribuciones del nucleón y del mesón  $\rho$  son convergentes, no así la proveniente de la resonancia  $\rho$ . Esto es una consecuencia de la hipótesis que las resonancias pueden considerarse como partículas elementales aún en altas energías.

Si se supone válida la representación de Regge para la amplitud de dispersión, la existencia de una resonancia en el canal cruzado no debe interpretarse como una partícula elemental de spin definido, sino como el intercambio de un polo de Regge; esto se altera la situación para valores del momento transferido en el entorno de la masa de resonancia, pero si, la extensión analítica fuera del polo. En esta formulación las resonancias de baja energía en un canal determinan el comportamiento asintótico en el otro. Para energías altas y momento transferido no muy grande, la amplitud en el canal  $s$  está dominada por la contribución del polo de mayor momento angular complejo<sup>38</sup>

$$A^R(s,t) = \frac{\beta \alpha}{\sqrt{s} \sin \pi \alpha(t)} \gamma_{\alpha}(t) \left( \frac{2s}{s_2 - t} - 1 \right) \quad (13.4)$$

Si en la trayectoria de  $\alpha(t)$  existe una resonancia de momento angular  $j$ , y masa  $M$  entonces  $\alpha(M^2) = j - \frac{1}{2}$ , y cerca de  $t = M^2$  y puede ponerse:<sup>38</sup>

$$A^R(s,t) = \frac{C(M^2) \gamma_{j-\frac{1}{2}} \left( \frac{2s}{s_2 - t} - 1 \right)}{t - M^2} \quad (13.5)$$

esta expresión es la que se obtiene considerando la resonancia como partícula elemental pero mientras en ese caso es válida para todo momento transferido, en la interpretación como polo la expresión está dada por la ecuación (13.4). Las expresiones (13.4) y (13.5) muestran que los diferentes comportamientos asintóticos son:

$$\begin{array}{l} A^R(s,t) \xrightarrow{s \rightarrow \infty} g(t) s^{\alpha(t)} \\ A^E(s,t) \xrightarrow{s \rightarrow \infty} h(t) s^{j-\frac{1}{2}} \end{array}$$

El comportamiento de  $A^E(s,t)$  es el que hemos obtenido en (13.3). Observemos ahora que en la región física del canal directo  $t$  debe ser menor que cero, en ese caso puede demostrarse que  $\alpha(t)$  debe ser menor que uno,<sup>38</sup> y nuestras integrales convergerían si suponemos el  $\rho$  y el  $N^*$  como polos de Regge. Para poder hacer esto necesitaríamos conocer las trayectorias de ambas particu-

las, esto nos es desconocido, por lo tanto trataremos de simular su comportamiento asintótico introduciendo una función de corte. Esta nueva interpretación parece arbitraria, sin embargo como desconocemos las contribuciones inelásticas, la necesidad de introducir un corte puede interpretarse como un modo de reconocer nuestra ignorancia en esas regiones.

Usaremos como función de corte directamente un escalón, y queda entonces como problema la elección del valor de la energía de corte ( $s_c = W_c^2$ ). Aún no se ha entendido bien, si el nucleón puede generarse como estado ligado e es típicamente elemental; para evitar el problema de que si también es necesario cortar, e no, la integral sobre su contribución, elegiremos un corte lo suficientemente alto, de forma que la elección de una u otra interpretación no afecte nuestro cálculo. Aunque  $W_c$  no tiene por que tener el mismo valor para las distintas contribuciones y ondas parciales, hemos supuesto un único valor  $W_c = 250 \mu$ , este valor ha quedado definido de tal forma que la diferencia entre cortar e no la integral del nucleón, produzca una variación máxima de un 3% en su valor; esto asegura nuestra independencia del dilema. Como integramos sobre  $W^2$ , la contribución del  $\rho$  converge rápidamente y la del  $N^*$  diverge lentamente, esto evita que la elección de  $W_c$  resulte crítica así si tomamos  $W_c = 300 \mu$  la integral sobre  $f^2(s)$  solo varía en un 2% y la de  $f^{N^*}(s)$  en un 10%.

Vemos que a diferencia con la que ocurre en el plano  $W$ , nuestro cálculo es muy poco sensible a las variaciones de  $W_c$ . La razón de esto puede verse, si escribimos el denominador de (13.2) como:

$$\frac{1}{(W-m)} \int_{m^2}^{\infty} \frac{q(W') \frac{1}{2} (W') dW'}{(W'-W)(W'-m)} = \frac{2W'(W+m)}{(W'+W)(W'+m)}$$

e sea, trabajar en el plano  $W$  es análogo a introducir en el plano  $W$  una función de corte del tipo

$$C(W') = \frac{2W'(W+m)}{(W'+W)(W'+m)} \quad (13.6)$$

El efecto de este corte aumenta con  $W^2$ , disminuyendo la influencia de la región de alta energía. De esta forma, esto pueda interpretarse como en el pla-

no  $S$  disminuye la importancia de la interacción de corto rango, como conocemos su expresión este resultado es conveniente.

Pelo.

Analizaremos en primer lugar los resultados dados por el más bajo de orden determinantal en  $G^2$ , o sea consideraremos solo la contribución de los polos del nucleón directo y cruzado, sin introducir gráficos fenomenológicos, entonces:

$$r_{2+}^{\pm}(s) = q(s) f_{2+}^{\pm}(s) \quad (13.7)$$

en este caso la integral que aparece en el denominador de (13.2) es convergente.

La característica experimental más notable que presenta en bajas energías la dispersión de piones por nucleones, es la resonancia de la onda  $P_{3/2}^{3/2}$  en 190 Mev de energía del pión en el sistema de laboratorio ( $E_n^{\text{lab}}$ ), que en energía total en centro de masa es  $W=8.82 \mu$ . En la figura 14 comparamos el corrimiento de fase de esta onda que resulta aplicando nuestro método, con el obtenido en un trabajo anterior donde usamos el método determinantal en el plano  $W$ . También nos ha parecido interesante mostrar el resultado obtenido por Frautschi y Walecka, usando el método N/D. Podemos ahora tratar de justificar las razones que conducen a estos diferentes resultados. Es evidente, que en todos los casos se obtienen corrimientos de fase positivos, de forma que puede interpretarse que el nucleón cruzado produce en esta onda una fuerza atractiva. Esto explica el hecho que mientras se obtiene una resonancia usando la variable  $W$ , no ocurre tal cosa con la  $s$ ; como se ha dicho, usar la variable  $W^2$  puede considerarse como la introducción de una particular función de corte en el plano  $W$ , la cual tiene como efecto disminuir la atracción de corto rango debida a  $r_{2+}^{3/2}(s)$ ; por lo tanto la curva de  $S_{33}(W)$  desciende y no se alcanza a producir la resonancia. En cambio mediante el método N/D se obtiene la resonancia en una energía muy baja, mostrando que se introduce una fuerza demasiado atractiva. Desde el punto de vista de la teoría de matrices  $S$ , este método es más correcto que el determinantal, puesto que como di-

jimos en la página 33, satisface la relación de cruce. La singularidad de la amplitud obtenida mediante el método determinantal, en la región no física, es:

$$\text{Im } t_{33}^{(U)N}(s) = \frac{\text{Im } q f_{33}^N(s)}{d_{33}^N(s)}$$

de nuestro cálculo resulta  $d_{33}^N(s) > 1$  para  $s < m^2$ , de forma que ha sido de-crementada la influencia del corte negativo proveniente del nucleón cruzado. Esto es equivalente a decir que la amplitud resultante es producida por una fuerza menos atractiva que la que se toma en cuenta en el método N/D, y explica la diferencia entre los resultados.

El resto de las ondas P resultan negativas, es decir se comportan como si el potencial que las engendrara fuera repulsivo y por lo tanto puede esperarse que dependan poco de la interacción de corto rango. Esto es lo que se manifiesta en el cálculo, pues logramos una buena descripción de dichas ondas. En los gráficos 15.16 y 17 comparamos los corrimientos de fase obtenidos, considerando únicamente el nucleón, con los experimentales. Una buena información experimental para cada onda parcial en bajas energías, está dada por las longitudes de dispersión.

$$a_{2j}^{2j} = \lim_{s \rightarrow (m+\mu)^2} [q^{2j+1}(s) \text{ctg } \delta_j^1(s)]^{-1} \quad (13.8)$$

Los valores obtenidos y su relación con los experimentales,<sup>39</sup> están dados en la siguiente tabla:

ondas	experimentales	calculados
$a_1^1$	$-0.104 \pm 0.006$	$-0.115$
$a_3^1$	$-0.030 \pm 0.005$	$-0.04$
$a_1^3$	$-0.040 \pm 0.004$	$-0.04$
$a_3^3$	$0.215 \pm 0.004$	$0.135$

Como es habitual en todo método que usando el acoplamiento pseudoescalar, analice la interacción pión-nucleón, los corrimientos de las ondas S calculados, no están de acuerdo con los experimentales. Como mostramos en el gráfico 18, la onda  $S^{3/2}$  resulta demasiado grande y la  $S^1$  tiene su signo invertido.



Interpretaremos los resultados como si la dispersión fuera producida por un potencial, el cual depende de los números cuánticos. Venos que todas las ondas  $P$  pequeñas, debido a que provienen de un potencial repulsivo, al cual se agrega el centrífugo, dependen poco de la estructura interior de la interacción, y el término del nucleón que constituye la parte exterior del potencial, da una buena explicación de ellas.

En cambio la onda  $P_{33}$ , que es atractiva para toda energía, y la  $S^{3/2}$  que no es atrallada por el potencial centrífugo, dependen de los detalles de interacción de corto range y no se logra un buen resultado. En ambas es necesario introducir contribuciones que aumenten la atracción.

Más adelante veremos que en la onda  $S^4$ , aparecen procesos inelásticos de range medio muy importantes, los cuales podrían impenarse a la fuerte repulsión producida por el nucleón.

Desde el punto de vista determinantal es notable que en segundo orden permita obtener un resultado bastante bueno, y podemos pensar que las interacciones de corto range que parecen necesarias, se lograrían introduciendo órdenes superiores en la constante de acoplamiento. Como hemos dicho nos ha resultado impracticable.

#### Gráficos fenomenológicos.

Hemos mostrado en la sección anterior, que la atracción originada por el intercambio de un nucleón en el canal cruzado, no resulta suficiente para producir una resonancia en la onda  $P_{33}$  del canal directo; además esa contribución junto a la del polo directo produce una repulsión excesiva en las ondas  $S$ . Como una primera aproximación, para tratar de resolver estos dos problemas, introduciremos los gráficos fenomenológicos estudiados en la sección 12.

Antes de discutir los resultados obtenidos, escribamos las ecuaciones que dan la aproximación determinantal de los corrimientos de fase. Haciendo explícita la dependencia en el isospin, para poder valorar los pesos de las diferentes contribuciones:

$$\begin{aligned}
 f_{21}^N(s) &= \binom{0}{-2} p_{2r} + \binom{3}{1} n_{2r} \\
 f_{22}^S(s) &= \binom{-1}{1} b_{2r} \\
 f_{21}^{N^*}(s) &= \binom{1}{4} c_{2r}
 \end{aligned}
 \tag{13.9}$$

y llamando con mayúsculas las integrales correspondientes en el denominador de (13.2) resulta

$$Q \cot \delta_{\frac{3}{2}} \left( \begin{matrix} r=3/2 \\ r=1/2 \end{matrix} \right) = \frac{1 - \binom{0}{-2} P_{2r} - \binom{1}{-1/2} N_{2r} + \binom{1/2}{-1} B_{2r} - \binom{1}{4} C_{2r}}{\binom{0}{-2} p_{2r} + \binom{1}{-4} n_{2r} - \binom{1/2}{-1} b_{2r} + \binom{1}{4} c_{2r}}
 \tag{13.10}$$

donde las integraciones sobre  $b_q$  y  $c_q$  están cortadas en  $W_c = 250 \mu$ . El polo del nucleón unicamente contribuye a las ondas  $S_{\frac{3}{2}}$  y  $P_{\frac{1}{2}}$ . De esta forma podemos discutir a priori en que ondas puede esperarse mayores modificaciones respecto a lo obtenido con el nucleón solo.

La contribución del bión suministra en la onda  $P_{33}$ , la atracción necesaria para producir una resonancia, en cambio el aporte del  $N^*$  es muy pequeño. El valor relativo de la contribución del bión a la del nucleón, es cuatro veces mayor en  $L=1/2$  que en  $L=3/2$ ; este nos lleva a esperar, que si pretendemos arreglar el problema de la resonancia  $33$  unicamente con estos procesos, será necesario utilizar grandes valores de las constantes de acoplamiento del  $\rho$ . Si usamos las constantes determinadas en la página 45, la resonancia se produce en una energía demasiado alta,  $W_r \sim 9.6 \mu$  ( $E_r^{lab} \sim 330$  Mev). Definiendo un ancho medio a través de la ecuación:

$$e^{i\delta_{33}} \sin \delta_{33} = \frac{\Gamma}{W_r - W - i\Gamma}$$

y con (9.6) resulta:

$$\Gamma = \frac{g_r f_{33}(s_r)}{2W_r J_{33}(s_r)} = \frac{g_r f_{33}(s_r)}{2W_r} (s_r - m^2)$$

reemplazando por los valores calculados se obtiene  $\Gamma \sim 1.35 \mu$ , esto en energía del pión es un ancho de 250 Mev; este valor es excesivo, y muestra que la atracción es insuficiente, Una posibilidad de incrementarla consiste en

aumentar las constantes de acoplamiento del bispión; para eso es necesario re-interpretar el esquema mediante el cual las calculamos. Análogamente a como se ha efectuado en el caso del factor de forma del nucleón, debemos suavizar nuestra hipótesis, de que el bispión es el único responsable de la distribución de carga del pión, y admitir que existe un aporte de los procesos de alta energía. Esto es equivalente a efectuar una sustracción en la relación de dispersión para  $F_{\pi}(t)$ ,<sup>33</sup> o sea que la fórmula de Frazer y Fulco debe escribirse como:

$$F_{\pi}(t) = 1 - \alpha + \frac{\alpha t r}{t_r - t}$$

donde  $1 - \alpha$  representa los procesos desconocidos. Para tomar en cuenta estos debemos introducir en nuestro cálculo de la página 45, un gráfico hipotético (fig 12.d) que represente la contribución de alta energía, y supondremos que es posible describirlo mediante una constante  $\beta$ , de esa forma el vértice indicado puede escribirse:

$$\beta(q+q') \mu \epsilon_{sr3} \frac{\lambda (2\pi)^4 \delta^4(q'+k-q)}{(2\pi)^{1/2} (2\omega \omega' k_0)^{1/2}}$$

entonces resulta:

$$1 - \alpha = \beta$$

$$\lambda_{\pi} \lambda_{r2} = \alpha t_r$$

de donde:

$$C_1 \lambda_{\pi} = -24 \pi f' a_1 / \alpha$$

$$C_2 \lambda_{r2} = -24 \pi f' b_1 g / \alpha \tag{13.11}$$

Vamos a suponer que  $\alpha$  es un parámetro desconocido, menor que uno, y elegiremos su valor de forma de obtener la resonancia  $F_{33}$  en la posición correcta. Usando la ecuación (9.5) con  $M_{\pi} = 8.34 \mu$ , resulta

$$\alpha = 0.455$$

Esto da para las constantes de acoplamiento del bispión valores muy grandes:

$$g_1 = -17.827$$

estos valores los llamaremos fenomenológicos, y nos permiten obtener la resonancia en el lugar deseado, y con un ancho medio  $\Gamma = 0.535 \mu$ ; sea energía del pión en centro de laboratorio estos valores son;  $E_{\pi}^{lab} = 190 \text{ Mev}$  y  $\Gamma_{\pi} = 85 \text{ Mev}$ ;

el ancho que es realmente lo único que obtenemos, está en excelente acuerdo con el experimental. En la figura 14 aparece el corrimiento de fase para esta onda calculado con los parámetros teóricos y con los experimentales; en la figura 19 comparamos la función  $\frac{1}{3} \frac{d^3}{dw} \times \text{ctg } \delta_{33}$  calculada, con la fórmula de rango efectivo de Chew y Low.

Consideremos ahora en conjunto las ondas P. En las ondas con  $J=3/2$  todas las contribuciones en el numerador de la ecuación (13.10) son menores que uno, de forma que el signo viene dado por el denominador, así mientras que en el estado con  $I=3/2$  las contribuciones del nucleón y del bión actúan como atractivas, y la del  $N^*$  como repulsión, en el estado con  $I=1/2$  tienen efectos opuestos, debido a los factores de spin isotópico. Esto quiere decir que si aumentamos  $a$  o  $b$  variando las constantes de acoplamiento, el corrimiento de fase de la onda  $P_{33}$  crece, y el de la  $P_{13}$  se hace más negativo; este es lo que observamos en los gráficos 14 y 16. Si en cambio incrementamos  $C$ , por ejemplo aumentando la energía de corte, el módulo de los corrimientos de ambas ondas disminuye de valor, como  $C$  es el término que más depende del valor del corte, la onda  $P_{13}$ , debido al factor 4 de spin isotópico, es porcentualmente más influenciada por la variación del corte que la  $P_{33}$ .

Aunque los resultados sean poco sensibles con  $W_c$ , este es realmente un parámetro. Le hemos dado un valor bien definido con el argumento de no afectar la contribución del nucleón, sin embargo queda como pregunta: por que no elegir un valor mayor? Vimos que en la onda  $P_{33}$ , el  $S$  actúa como atractivo y el  $N^*$  como repulsivo, de forma que si elegimos un corte mucho mayor, la contribución del  $N^*$  se impondría y sería necesario, para producir la resonancia, que los parámetros del  $S$  fueran extraordinariamente grandes.

Las ondas P con  $J=1/2$  resultan ambas negativas, todas las contribuciones en el estado con  $I=3/2$  son repulsivas; y en la onda con  $I=1/2$  aparece el polo directo que actúa como muy repulsivo y determina el signo. El  $N^*$  introduce en esta última onda una fuerte atracción que la compensa en parte; esta característica es la usada en los cálculos de bootstrap, para obtener

en esa onda el nucleón como estado ligado, de las fuerzas introducidas en los canales cruzados, es ese caso el polo del nucleón no se considera y la onda  $P_{11}$  es positiva. En las figuras 15 y 17 están representados los corrimientos de fase obtenidos.

Pasemos a las ondas  $S$ , como vimos en un párrafo anterior, la contribución del nucleón es repulsiva, en cambio la del bispin resulta atractiva e influye más en el estado de isospin  $\frac{1}{2}$ . El efecto del  $N^*$  es repulsivo en ambas ondas, pero debido al factor  $N$ , en la onda  $S_{\frac{1}{2}}$  supera la atracción del  $\rho$ , originando que los corrimientos de fase sean más negativos que con el nucleón solo (fig 18). En las ondas  $S_{\frac{3}{2}}$  ambos efectos se compensan, como puede verse en la figura 19. Ninguna de las ondas  $S$  calculadas están de acuerdo con los datos experimentales, podemos pensar que debido a la ausencia de la barrera centrífuga es necesario tomar en cuenta la interacción de corto rango. Si bien la onda  $S_{\frac{3}{2}}$  resulta excesiva, su signo y forma están dados por nuestro cálculo, en cambio los corrimientos de fase de la onda  $S_{\frac{1}{2}}$  se muestran negativos y muy grandes. Para obtener un resultado razonable para esta onda, sería necesario que la influencia de los procesos de alta energía sea muy grande, entonces lo que en realidad puede esperarse, ya que existen muchos procesos inelásticos que contribuyen a ella. En efecto, si reemplazamos los estados de varios piones por resonancias, los posibles estados inelásticos intermedios de menor energía, son los sistemas  $N-\eta$ ,  $N-\omega$ ,  $K-\Delta$  y  $N-\rho$ ; donde  $\eta$  y  $\omega$  son las resonancias de tres piones en 540 y 760 Mev respectivamente; ambas tienen isospin cero, de forma que los tres primeros sistemas contribuyen solamente a los estados con spin  $\frac{1}{2}$ , del proceso  $\pi N \rightarrow \pi N$ , mientras que el último,  $N-\rho$ , contribuye al caso  $L=\frac{1}{2}$  cuatro veces más que al  $L=\frac{3}{2}$ . Vemos entonces que la contribución inelástica en la onda  $S_{\frac{1}{2}}$  es importante y podría introducir una atracción de rango medio que domine la repulsión externa debida al nucleón.<sup>40</sup> No hemos tratado de introducir estos procesos, pero su evaluación podría efectuarse usando el procedimiento multicanal que describimos en la siguiente sección.



fig. 13

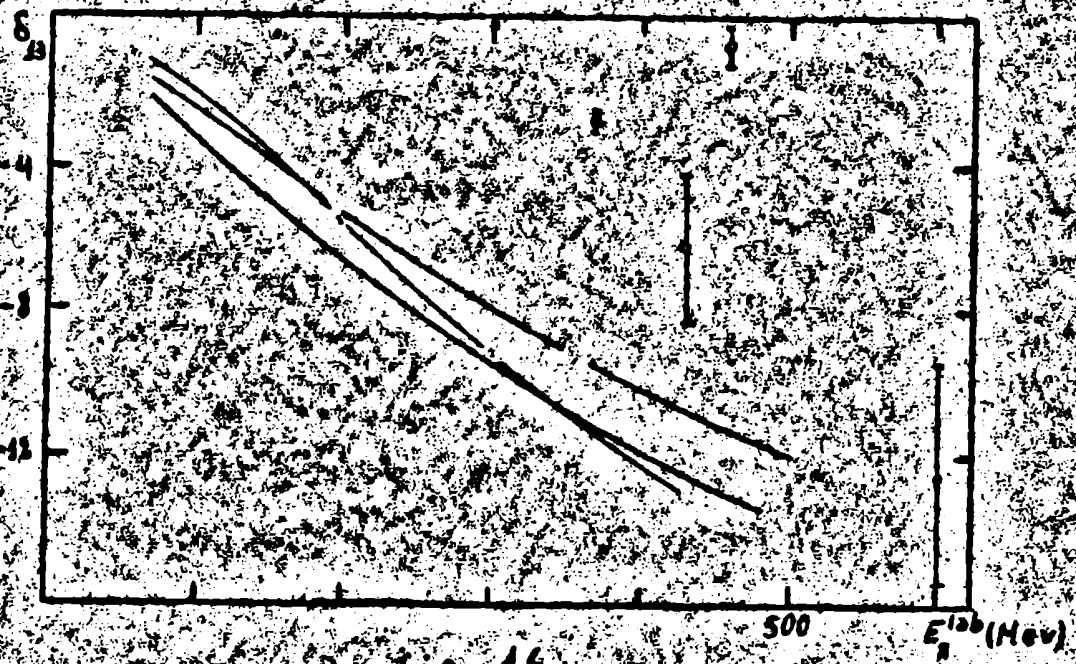


fig. 16

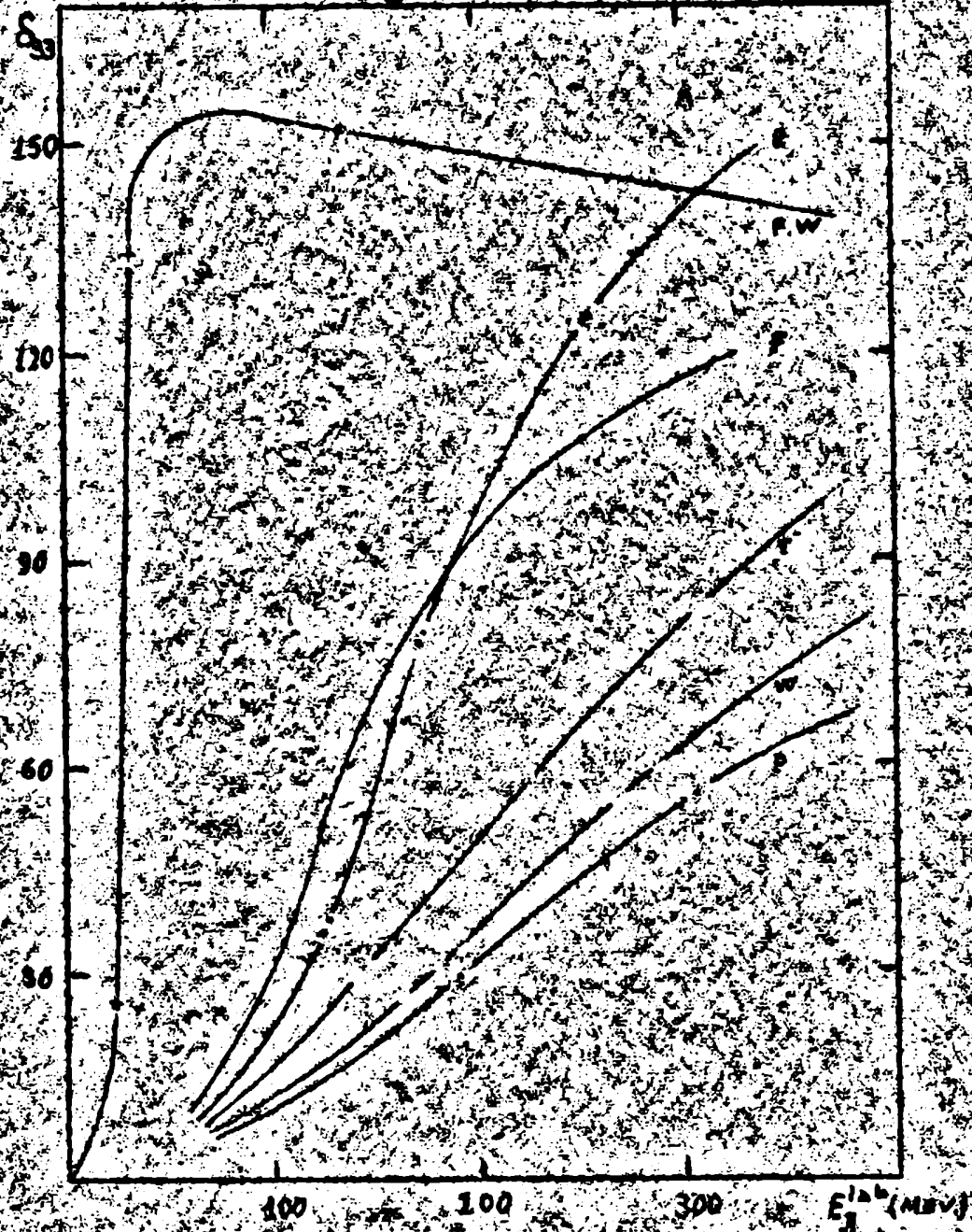
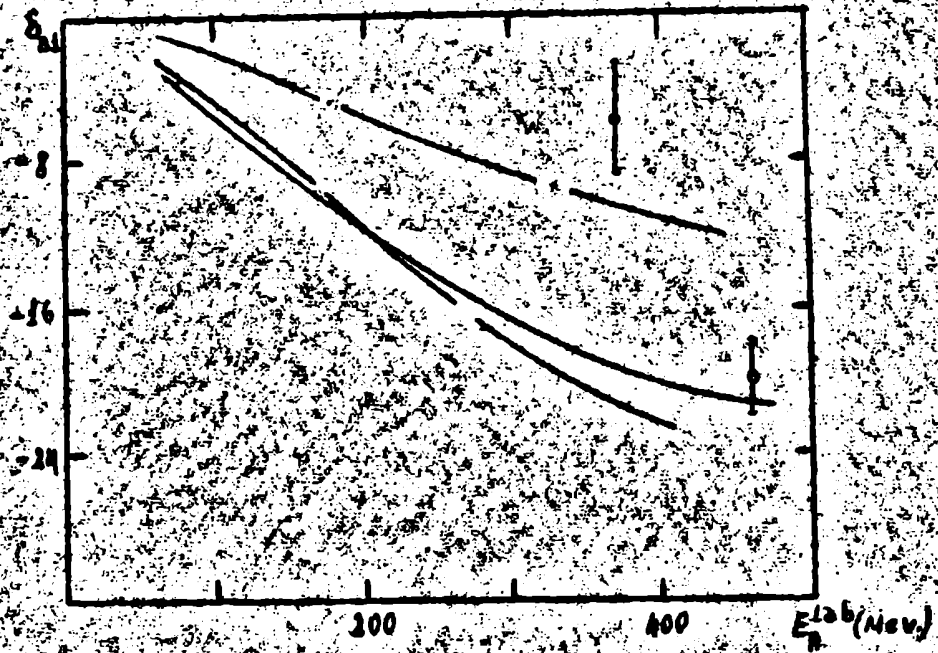
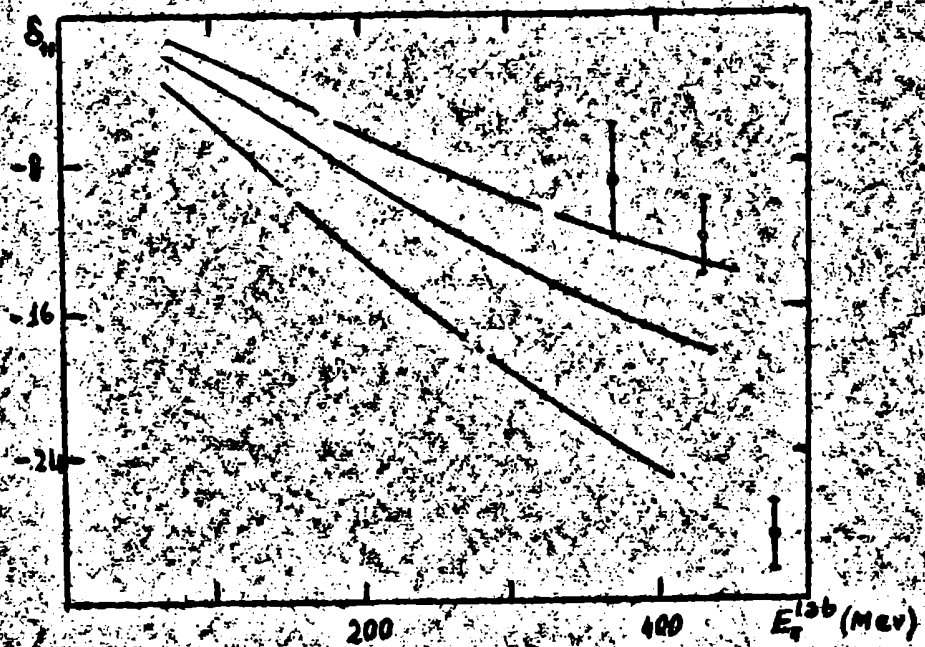


Fig. 14



**fig. 15**



**fig. 17**



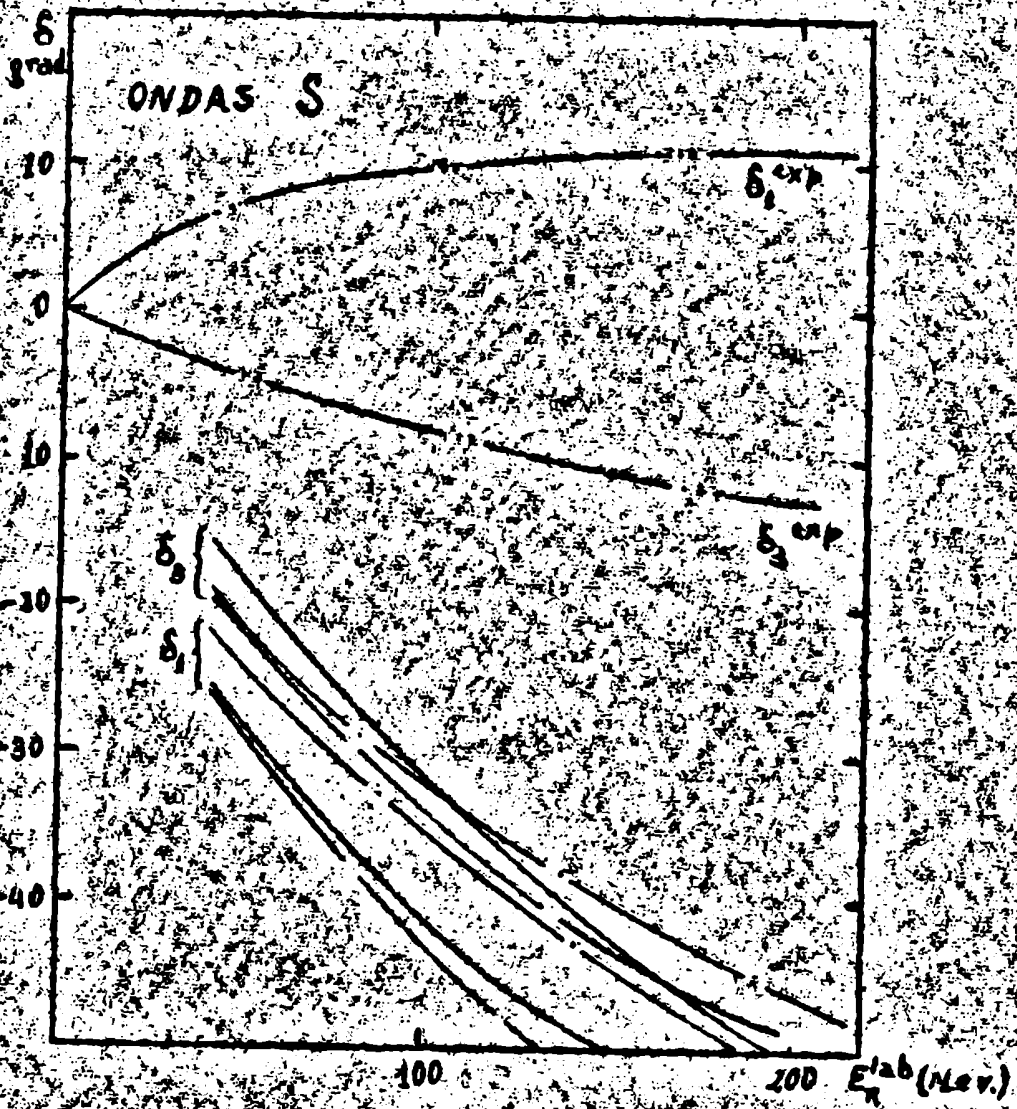


fig. 18 y 19

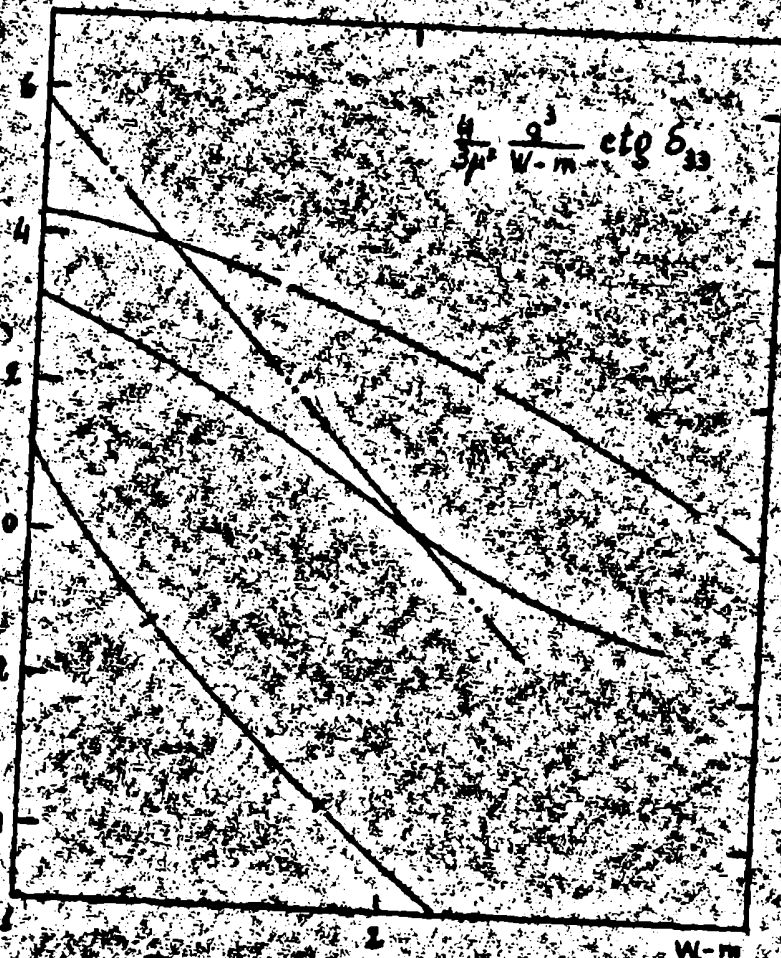


fig 20

W-m  
μ

IV. METODO MULTICANAL.

14. FORMULACION

Consideraremos ahora el segundo procedimiento descrito en la sección 7, el cual permite tener en cuenta los procesos inelásticos y da, al menos formalmente, un planteo completo del proceso de dispersión.

Definamos el operador

$$k(w) = 1 - G_0(w) H_2 \quad (14.1)$$

siendo:

$$G_0(w) = (w - H_0)^{-1}$$

el operador resolvente de orden de  $H_0$ . Queremos expresar los elementos de la matriz S en términos de los  $K_j$ ; escribimos:

$$S(w) = 1 - 2\pi i \delta(w - H_0) T(w)$$

donde la expresión del operador de transición  $T(w)$  en función de la interacción es: <sup>41</sup>

$$T(w) = H_2 [1 - G_0(w) H_2]^{-1}$$

si definimos:

$$K^{\pm}(w) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} [1 - G_0(w \pm i\epsilon) H_2] \quad (14.2)$$

resulta:

$$\begin{aligned} K^-(w) [K^+(w)]^{-1} &= 1 + [G_0(w+i\epsilon) - G_0(w-i\epsilon)] H_2 [1 - G_0(w+i\epsilon) H_2]^{-1} \\ &= 1 - 2\pi i \delta(w - H_0) T(w-i\epsilon) \end{aligned} \quad (14.3)$$

donde hemos usado la expresión formal:

$$\frac{1}{w - H_0 \pm i\epsilon} = \mathcal{P} \frac{1}{w - H_0} \mp \pi i \delta(w - H_0)$$

de la ecuación (14.3) resulta:

$$K^-(w) - K^+(w) = 2\pi i T(w) = 2\pi i \delta(w - H_0) T(w+i\epsilon) K^+(w) \quad (14.4)$$

quedando definido de esta forma el operador  $K(w)$ .

Ya se ha visto (sección 7) que para valores definidos de los números

cuanticos  $\gamma$  y  $\gamma'$ , existen infinitos valores posibles de la energía, y que debido a que el sistema se ha encerrado en una caja constituyen un espectro discreto. Tomando los elementos de matriz de la igualdad de operadores (14.4), entre estados  $|W, \gamma, \gamma_j\rangle$  de igual energía y constantes de movimiento  $\gamma$ , pero distintos  $\gamma'$ , es decir diferente número de partículas, teniendo en cuenta que  $T(W)$  es diagonal en  $W$  y en  $\gamma$ , resulta: <sup>42</sup>

$$\frac{1}{\hbar} \langle w, \gamma, \gamma'_i | T(w) | w, \gamma, \gamma'_j \rangle = \sum_{k, l} \int \int \bar{g}_k(w) \bar{g}_l(w') \langle w, \gamma'_i | T_\gamma(w) | w', \gamma'_k \rangle \delta(w-w') \frac{\delta_{\gamma'_k \gamma'_l}}{g_k(w')} \delta(w'-w'') \langle w'', \gamma'_l | K_\gamma^+(w) | w, \gamma'_j \rangle$$

entonces

$$\frac{1}{\hbar} \langle \gamma'_i | T_\gamma(w) | \gamma'_j \rangle = \sum_{k, l} \langle \gamma'_i | T_\gamma(w) | \gamma'_k \rangle \bar{g}_k(w) \delta_{\gamma'_k \gamma'_l} K_\gamma^+(w) | \gamma'_j \rangle \quad (14.5)$$

los índices  $i, j, k, l$  indican el número de partículas del estado. Por lo tanto la sumatoria sobre  $k, l$  implica sumar sobre todo el conjunto de números cuanticos  $\gamma'_k$ ; esto significa, sumar sobre todos los momentos angulares, espines e isospines parciales compatibles con el valor de  $\gamma$  considerado; e integrar sobre todas las energías parciales compatibles con  $W$ . El subíndice  $\gamma$  en los operadores, indica que la igualdad es válida entre las submatrices  $\gamma$  de  $T$  definido, las cuales también podrían obtenerse proyectando la matriz total. La relación (14.5) puede escribirse formalmente:

$$T_{ij}^\gamma(w) = \sum_k T_{ik}^\gamma(w) D_{kj}^{+\gamma}(w) \quad (14.6)$$

donde se ha definido:

$$D_{kj}^{+\gamma}(w) = \prod \bar{g}_k(w) K_{kj}^{+\gamma}(w)$$

y hemos indicado el conjunto de las  $\gamma'$  simplemente por el subíndice de número de partículas.

Estas ecuaciones pueden escribirse en función de la variable  $s$ :

$$T_{ij}^\gamma(s) = \sum_k T_{ik}^\gamma(s) D_{kj}^{+\gamma}(s) \quad (14.7)$$

$$D_{kj}^{+\gamma}(s) = \prod g_k(s) K_{kj}^{+\gamma}(s)$$

donde ahora  $g_k(s)$  tiene una expresión funcional diferente a la de  $\bar{g}_k(w)$ .

Extendamos directamente  $D_{ij}^{+T}(s)$  al plano complejo y definamos la matriz  $r_{ij}^T(s)$  para valores complejos de  $s$  mediante la ecuación (14.7). Como vemos de la definición (14.2) y (14.6) los elementos  $D_{ij}^T(s)$  poseen un corte en el eje real positivo, para  $s > s_{ij}^0$  (siendo  $s_{ij}^0$  el umbral del proceso  $i \rightarrow j$ ) y la discontinuidad a través de él, es:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} D_{ij}^T(s) = \pi \rho_{ij}^T(s) \int_{s_0}^{\infty} K_{ij}^{TT}(s) = \rho_{ij}^T(s) r_{ij}^T(s) \quad \text{en } s > s_{ij}^0 \quad (14.8)$$

Podemos mostrar entonces que  $D_{ij}^T(w)$  satisface una relación de dispersión. La ecuación (14.4) define  $r(w)$  en función de  $H_I$ :

$$r(w) = \pi \delta(w - w_0) H_I \quad (14.9)$$

entonces:

$$\delta(w - w_0) K(w) = \delta(w - w_0) - \frac{1}{\pi} G_0(w) r(w)$$

tomando los elementos de matriz de esta ecuación entre estados  $\langle w' \gamma' |$  / de igual energía pero distinto número de partículas

$$\delta(w - w') \langle w' \gamma' | K^T(w) | w' \gamma' \rangle = \frac{\delta(w - w')}{\rho_{ij}^T(w')} \delta_{\gamma' \gamma'} - \frac{1}{\pi(w - w')} \langle w' \gamma' | r^T(w) | w' \gamma' \rangle$$

por (14.9) en el elemento de  $r(w)$  debe ser  $\pi \delta(w - w_0)$ , integrando sobre  $w'$

$$\rho_{ij}^T(w) \langle w' \gamma' | K^T(w) | w' \gamma' \rangle = \delta_{\gamma' \gamma'} - \frac{1}{\pi} \int_{w_0}^{\infty} \frac{\langle w' \gamma' | r^T(w') | w' \gamma' \rangle}{w - w'} \rho_{ij}^T(w') dw'$$

formalmente

$$D_{ij}^T(w) = \delta_{ij} - \frac{1}{\pi} \int_{w_0}^{\infty} \frac{\rho_{ij}^T(w') r_{ij}^T(w')}{w - w'} dw' \quad (14.10)$$

o sea, si la integral es convergente:

$$\lim_{w \rightarrow \infty} D_{ij}^T(w) = \delta_{ij}$$

y  $D_{ij}^T(s)$  tendrá el mismo límite. Entonces, si efectuamos la hipótesis que la función  $D_{ij}^T(s)$  extendida al plano complejo  $s$ , no tiene otras singularidades que el corte físico del proceso; usando (14.8) podemos escribir una relación de dispersión:

$$D_{ij}^T(s) = \delta_{ij} + \frac{1}{\pi} \int_{s_0}^{\infty} \frac{\rho_{ij}^T(s') r_{ij}^T(s')}{s' - s} ds' \quad (14.11)$$

El problema por lo tanto consiste en obtener  $r_{ij}^T(s)$ ; a partir de ellos (14.11) nos da  $D_{ij}^T(s)$  e invirtiendo la ecuación (14.7) calcular la matriz de transición. Las ecuaciones básicas (14.7) y (14.11) coinciden con las del

método N/D multicanal.<sup>43</sup> Las demostraciones efectuadas son válidas únicamente en la región física, que es donde están definidos los autoestados  $|W, \gamma, \gamma_i\rangle$ , y es necesario hacer la hipótesis, de que es posible escribir la ecuación (14.7) en todo el plano complejo. Creemos sin embargo que este procedimiento es más natural que suponer directamente  $T=N/D$ , atribuyendo por principio las singularidades de N y D. Evidentemente si únicamente se considera en (14.6) sistemas elásticos  $i \rightarrow j, k=2$ , este método se reduce al unicanal discutido en la sección 8.

15. PROPIEDADES ANALITICAS DE  $r(s)$  Y SIMETRIZACION

La condición de conservación de la probabilidad impone que la matriz S sea unitaria en la región física,

$$SS^\dagger = 1$$

donde "†" significa tomar el transpuesto conjugado, y se refleja en la matriz T como

$$T^\dagger(w) - T(w) = iW \delta(w - H_0) T(w)$$

tomando los elementos de matriz de esta ecuación, entre estados  $|W, \gamma, \gamma'\rangle$  de igual energía, y teniendo en cuenta que T conecta solo estados de igual W y  $\gamma$ , resulta:

$$T_{ij}^{\gamma\gamma'}(w) - T_{ij}^{\gamma'\gamma}(w) = 2W i \sum_k T_{ik}^{\gamma\gamma'}(w) \delta_k(w) T_{kj}^{\gamma\gamma'}(w) \quad (15.1)$$

Esta relación es válida en la región física del proceso considerado  $i \rightarrow j$ , donde S(W) es unitaria. Puede expresarse en términos de la variable s,

$$T_{ij}^{\gamma\gamma'}(s) - T_{ij}^{\gamma'\gamma}(s) = 2W i \sum_k T_{ik}^{\gamma\gamma'}(s) \delta_k(s) T_{kj}^{\gamma\gamma'}(s) \quad (15.2)$$

La invariancia ante inversión temporal exige que la amplitud de dispersión sea simétrica,<sup>44</sup> de forma que puede reemplazarse  $T_{ij}^{\gamma\gamma'}(s)$  por  $T_{ij}^{\gamma\gamma}(s)$ .

Podemos ahora mostrar que cada elemento de la matriz  $r(s)$  no tiene singularidades, en la región física del proceso que representa. A partir de

(14.8), sobreentendiendo los índices y tenemos

$$D_{ij}(s) - D_{ij}^*(s) = 2i \rho_{ij}(s) r_{ij}(s) \quad \text{en } s > s_{ij}^0$$

$$= 0 \quad \text{en } s \neq s_{ij}^0 \quad (15.3)$$

y por lo tanto:

$$r_{ij} - r_{ij}^*(s) = \sum_k [T_{ik} D_{kj} - T_{ik}^* D_{kj}^*] = \sum_k [T_{ik} - T_{ik}^* + 2i \rho_{ik} T_{ik}] D_{kj} = 0$$

esta relación se satisface en la región donde  $T_{ik}$  es unitaria, como los procesos  $k$  deben ser estados intermedios posibles en la transición  $i \rightarrow j$ ,  $T_{ik}$  satisface unitariedad en  $s \neq s_{ij}^0$  y allí  $r_{ij}(s)$  es analítica.

Considerando todas nuestras cantidades como matrices, las ecuaciones de partida del método serán:

$$r(s) = T(s) D(s) \quad (a)$$

$$D(s) = 1 + \int_s^{\infty} ds' \frac{\rho(s') r(s')}{s' - s} \quad (b) \quad (15.4)$$

$$T^*(s) = T(s) \rho(s) T^*(s) \quad (c)$$

donde  $\rho(s)$  es una matriz diagonal.

Podemos invertir la relación (15.4a)

$$T(s) = r(s) D^{-1}(s) \quad (15.5)$$

como  $D^{-1}(s)$  tiene solo singularidades sobre el eje  $\text{Re } s = \sigma$ ,  $r(s)$  debe contener todas las singularidades de  $T(s)$  exteriores, siendo:

$$\text{Im } r = 0 \quad \text{en } s > s_0$$

$$= \text{Im } T \cdot D \quad \text{en } s \neq s_0 \quad (15.6)$$

$$\text{Im } D = \text{Im } T^{-1} \cdot r = \rho \cdot r \quad \text{en } s > s_0$$

$$= 0 \quad \text{en } s \neq s_0$$

Dado que el procedimiento de cálculo que usaremos, se basa en el desarrollo perturbativo de los elementos de la matriz de transición, y no en una representación determinada de sus singularidades, no es necesario discutir el espectro de estas, el cual ha sido justificado únicamente para procesos

de cuatro partículas, y muy poco es conocido acerca de las propiedades analíticas de las amplitudes de reacción con mayor número de partículas.<sup>23</sup>

Hemos dicho que por invariancia ante inversión temporal la amplitud de dispersión debe ser simétrica, para lograr que nuestra amplitud satisfaga esta condición, reemplazemos la ecuación (15.4b), que expresa  $D(s)$  en términos de  $r(s)$  por:<sup>45</sup>

$$D_1(s) = \frac{[r^t(s)]^{-1} r(s) + 1}{1} + \frac{1}{i} \int_{s_0}^{\infty} ds' \frac{\rho(s') r(s')}{s'-s} + \frac{1}{i} [r^t(s)]^{-1} \int_{s_0}^{\infty} ds' \frac{r^t(s') \rho(s')}{s'-s} r(s) \quad (15.7)$$

donde el supraíndice  $t$  indica transponer la matriz. Aunque  $D_1(s)$  es esencialmente diferente a  $D(s)$ , como sigue siendo válida la ecuación:

$$\text{Im } D_1(s) = \rho(s) r(s) \quad \text{en } s > s_0$$

las condiciones de unitariedad y analiticidad de  $r$  se siguen cumpliendo. Tampoco se ven desvirtuadas las demostraciones efectuadas, a partir de la teoría formal de dispersión, en la sección anterior. Sin embargo  $\text{Im } D_1(s) \neq 0$  en  $s \neq s_0$ , entonces (15.6) no es válida y no es posible establecer un sistema de ecuaciones integrales, como se hace en el método  $H/D$ , en cambio el método determinantal es aplicable.

Como (15.7) no determina unívocamente  $r(s)$  a partir de  $T(s)$ ,<sup>45</sup> y para mayor simplicidad definiremos una matriz  $\pi(s)$  simétrica, entonces:

$$D_1(s) = 1 + \frac{1}{i} \int_{s_0}^{\infty} ds' \frac{\rho(s') r(s')}{s'-s} + \frac{1}{i} r^t(s) \int_{s_0}^{\infty} ds' \frac{r(s') \rho(s')}{s'-s} r(s) \quad (15.8)$$

y:

$$r(s) = r(s) D_1^{-1}(s) = r(s) \left[ r(s) + \frac{1}{i} \int_{s_0}^{\infty} ds' \frac{\rho(s') r(s')}{s'-s} + \frac{1}{i} \int_{s_0}^{\infty} ds' \frac{r(s') \rho(s')}{s'-s} r(s) \right]^{-1} r(s) \quad (15.9)$$

la amplitud de dispersión construida de esta forma es simétrica. En realidad la definición de  $D_1(s)$  no es la más general posible, es posible probar que la amplitud simétrica sí:<sup>46</sup>

$$\text{Im } T = (\text{Im } T)^t \quad \text{en } s > s_0$$

donde " $t$ " indica transponer. Esto permite definir una  $D_1(s)$  más general que la dada por (15.7), pero en ese caso no es posible obtener unívocamente una  $r(s)$  definida.<sup>45</sup> De todas formas para el método determinantal la expresión (15.8)



es suficiente. En la sección siguiente mostraremos el método de cálculo en el caso no simetrizado, aplicarlo a este es únicamente una dificultad práctica debido a los productos matriciales que aparecen en (15,9).

16. METODO DE CALCULO:

El proceso de cálculo es análogo al caso unicanal de la sección 8, esto es, obtener el desarrollo de  $r(s)$ , a partir del desarrollo perturbativo de  $T(s)$ . Supongamos que la interacción está definida por una sola constante de acoplamiento. Definiendo:

$$f(s) = \int_{s_0}^{\infty} ds' \frac{g(s') r(s')}{s' - s} \quad (16.1)$$

es:

$$r(s) = T(s) + T(s) f(s) \quad (16.2)$$

desarrollando ambos miembros en serie de la constante de acoplamiento e igualando potencias:

$$\begin{aligned} r^{(0)} &= T^{(0)} \\ r^{(1)} &= T^{(0)} + T^{(0)} f^{(0)} \\ \text{con: } f_1^{(0)}(s) &= \int ds' \frac{g(s') T^{(0)}(s')}{s' - s} \\ r^{(2)} &= T^{(0)} + T^{(0)} f^{(1)} + T^{(1)} f^{(0)} \\ \text{con: } f_2^{(0)}(s) &= \int ds' \frac{T^{(0)}(s') + T^{(1)}(s') f_1^{(0)}(s')}{s' - s} \quad \text{etc.} \end{aligned} \quad (16.3)$$

evidentemente este desarrollo debe efectuarse para cada elemento  $r_{ij}(s)$ . Cada orden del desarrollo de  $r_{ij}(s)$  no tendrá singularidades, en la región física que le corresponde, siempre que se tomen en cuenta todos los procesos posibles en los productos matriciales. Invertiendo la expresión (16.2) puede obtenerse  $T(s)$ , como cociente de dos series matriciales, cuyo buen comportamiento se espera verificar

$$\begin{aligned} T(s) &= r(s) [1 + f(s)]^{-1} \\ T(s) &= [r^{(0)}(s) + r^{(1)}(s) + \dots] [1 + f^{(0)}(s) + f^{(1)}(s) + \dots]^{-1} \end{aligned} \quad (16.4)$$

El método planteado de este modo es completo, ya que introduce los procesos posibles; pero no parecería prácticamente realizable dado que las matrices consideradas son infinitas, y la inversión de  $1+f(s)$ , necesaria en (16.4), no es factible. Sin embargo, la hipótesis de que las series convergen, permite suponer que la situación puede describirse por los ordenes inferiores; en ese caso es posible invertir y resolver el problema.

Como ejemplo de aplicación consideremos la dispersión pión-nucleón. Desarrollando los elementos de  $r(s)$  hasta el cuarto orden:

$$r(s) = r^{(0)} + r^{(1)} + r^{(2)} = \begin{pmatrix} T_{11}^{(0)} + T_{22}^{(0)} + T_{33}^{(0)} + T_{44}^{(0)} & [1+f(s)] T_{12}^{(0)} & T_{24}^{(0)} \\ T_{12}^{(0)} & T_{22}^{(0)} + T_{33}^{(0)} + T_{44}^{(0)} & 0 \\ T_{14}^{(0)} & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (16.5)$$

donde:

$$\begin{aligned} T_{11}(s) &= T_{11}^{(0)} (\pi + N \rightarrow \pi + N) \\ T_{22}(s) &= T_{22}^{(0)} (\pi + N \rightarrow \pi + \pi + N) = T_{22} r_2 \\ T_{33}(s) &= T_{33}^{(0)} (\pi + N \rightarrow \pi + \pi + \pi + N) = T_{33} r_3 \\ T_{44}(s) &= T_{44}^{(0)} (\pi + \pi + N \rightarrow \pi + \pi + N) = T_{44} r_4 \end{aligned} \quad (16.6)$$

Por integración directa de cada elemento de  $r(s)$  se obtiene:

$$1+f(s) = \begin{pmatrix} D_{11} = 1 + f_{11}^{(0)} + f_{22}^{(0)} & f_{12}^{(0)} & f_{14}^{(0)} \\ f_{12}^{(0)} & D_{22} = f_{22}^{(0)} + f_{33}^{(0)} & 0 \\ f_{14}^{(0)} & 0 & f_{44}^{(0)} \end{pmatrix}$$

Es necesario invertir esta matriz; consideremos la matriz:

$$H(s) = \begin{pmatrix} D_{22} & 0 \\ 0 & f_{44} \end{pmatrix}$$

si:

$$d(s) = \det H(s) = \det (D_{22} \quad f_{44}) \quad (16.7)$$

será:

$$H^{-1}(s) = \begin{pmatrix} G_{22} & 0 \\ 0 & f_{44}^{-1} \end{pmatrix}$$

con:

$$G_{22} = \frac{\text{menor de } D_{22} \text{ en } H}{d} \quad (16.8)$$



De acuerdo a nuestra convención original, la suma sobre índices indica sumar sobre  $\ell$ , esto es sumar sobre momentos angulares e isospines parciales, e integrar sobre energías parciales de pares de partículas.

Aunque el planteo formal es directo, la realización de este cálculo resulta demasiado complicada, debido al gran número de gráficos de Feynman que aparecen, y a la complejidad de los proyectores de tres y cuatro partículas. Sin embargo el método es completo.

Hemos supuesto que ocurre únicamente interacción pión-nucleón pura, pero como método de simplificación, podría introducirse las interacciones del nucleón y pión con partículas resonantes, como el meson  $\rho$  y el meson  $\omega$ , es decir suponer que los piones se acoplan, preponderantemente de una forma definida, de ese modo puede efectuarse el siguiente reemplazo, en los procesos a considerar,

$$\begin{array}{lll}
 N\pi \rightleftharpoons N\pi\pi & \text{por} & N\pi \rightleftharpoons N\rho \quad \text{o sea} \quad T_{11} \longrightarrow T_{\pi\rho} \\
 N\pi\pi \longrightarrow N\pi\bar{\pi} & & N\rho \longrightarrow N\rho \quad T_{33} \longrightarrow T_{\rho\rho} \\
 N\pi \longrightarrow N\pi\pi\pi & & N\rho \rightleftharpoons N\omega \quad T_{24} \longrightarrow T_{\rho\omega} \\
 N\pi\pi \longrightarrow N\pi\pi\pi & & N\rho \rightleftharpoons N\omega \quad T_{34} \longrightarrow T_{\rho\omega} \\
 N\pi\pi\pi \longrightarrow N\pi\pi\pi & & N\omega \longrightarrow N\omega \quad T_{44} \longrightarrow T_{\omega\omega}
 \end{array}$$

Estos son todos procesos entre cuatro partículas, de spin e isospin bien definidos, de forma que los proyectores y gráficos que deben considerarse son simples, y el cálculo se abrevia notablemente. Esto es lo único que se ha intentado realizar hasta el momento con el método N/D generalizado. Dado que el comportamiento analítico en la zona inelástica no se conoce, solo es posible reemplazar los cortes por una cantidad de polos de residuo y posición ajustables.<sup>47</sup> En cambio el método determinantal multicanal, permite introducir los procesos de tres y cuatro partículas de una forma bien específica, mediante el cálculo de los diagramas perturbativos correspondientes.

APENDICE I.

a) El comportamiento asintótico de las funciones radiales usadas es:

$$\begin{aligned} u_2(\xi) &\longrightarrow \text{sen}(\xi - \frac{\pi l}{2}) \\ v_2(\xi) &\longrightarrow -\text{cos}(\xi - \frac{\pi l}{2}) \\ w_2(\xi) &\longrightarrow \lambda^l e^{-i\xi} \end{aligned} \quad (\text{I.1})$$

para  $\xi \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} u_2(\xi) &\longrightarrow \xi^{2l+1} / (2l+1)!! \\ v_2(\xi) &\longrightarrow -(2l-1)!! / \xi^l \\ w_2(\xi) &\longrightarrow (2l-1)!! / \xi^l \end{aligned} \quad (\text{I.2})$$

ante inversión de eje

$$\begin{aligned} u_2(-\xi) &= (-1)^{2l+1} u_2(\xi) \\ v_2(-\xi) &= (-1)^l v_2(\xi) \end{aligned} \quad (\text{I.3})$$

b) Los wronskianos usados son:

$$\begin{aligned} W[v_2(kr), u_2(kr)] &= k \\ W[f_2(kr), g_2(kr)] &= W_2(kr) \end{aligned} \quad (\text{I.4})$$

c) Definimos los polinomios de Legendre de segunda especie mediante la ecuación

$$Q_l(x) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{P_l(t)}{x-t} dt \quad \therefore Q_l(-x) = (-1)^{l+1} Q_l(x) \quad (\text{I.5})$$

de forma que:

$$\begin{aligned} Q_0(x) &= \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} \\ Q_1(x) &= \frac{x}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} - 1 \\ Q_2(x) &= \frac{1}{4} (2x^2-1) \ln \frac{1+x}{1-x} - \frac{3}{2} x \end{aligned} \quad (\text{I.6})$$

Sus propiedades límites son:

$$\begin{aligned} Q_l(x) &\xrightarrow{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^{l+1}} \frac{e!}{(2l+1)!!} \\ Q_l(x) &\xrightarrow{x \rightarrow 0} \frac{1}{2} \ln \frac{x}{x-1} - \sum_{m=1}^l \frac{1}{m} \end{aligned} \quad (\text{I.7})$$

APENDICE II

Probaremos que  $D_2(k) = F_2(-k)$ . Usando (1.10) podemos escribir:

$$D_2(-k) = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} k^n \int_0^{\infty} dr_1 \int_0^{r_1} dr_2 \dots \int_0^{r_{n-1}} dr_n V(r_1) \dots V(r_n) d_2(k, r_1, \dots, r_n) \quad (II/1)$$

con

$$d_2(k, r_1, \dots, r_n) = \begin{vmatrix} \omega_2(kr_1) & \omega_2(kr_2) & \dots & \omega_2(kr_1) & \omega_2(kr_n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \omega_2(kr_n) & \omega_2(kr_1) & \dots & \omega_2(kr_n) & \omega_2(kr_n) \end{vmatrix} = \omega_2(kr_1) \begin{vmatrix} \omega_2(kr_2) & \dots & \omega_2(kr_n) \\ \vdots & & \vdots \\ \omega_2(kr_n) & \omega_2(kr_1) & \dots & \omega_2(kr_n) & \omega_2(kr_n) \end{vmatrix} \\ = \omega_2(kr_1) \cdot S_2(k, r_1, r_2, \dots, r_n)$$

por lo tanto:

$$S_2(k, r_1, r_1, r_2, \dots, r_n) = 0$$

De donde:

$$D_2(-k) = 1 + k^2 \int_0^{\infty} dr \omega_2(kr) V(r) g_2(kr) \quad (II.2)$$

$$g_2(kr) = \omega_2(kr) + \sum_{n=2}^{\infty} k^n \int_0^{\infty} dr_1 \int_0^{r_1} dr_2 \dots \int_0^{r_{n-1}} dr_n V(r_1) \dots V(r_n) S_2(k, r_1, r_2, \dots, r_n) \quad (II.3)$$

usando las fórmulas (I.4) y (II.2), se encuentra que

$$W[\omega_2(kr) S_2(k, r_1, \dots, r_n)] = k d_2(k, r_1, \dots, r_n)$$

por lo tanto:

$$W[\omega_2(kr) g_2(kr)] = k \left[ 1 + \sum_{n=2}^{\infty} k^n \int_0^{\infty} dr_1 \dots \int_0^{r_{n-1}} dr_n V(r_1) \dots V(r_n) d_2(k, r_1, \dots, r_n) \right]$$

diferenciando respecto a  $r$ :

$$\omega_2'(kr) g_2''(kr) - g_2'(kr) \omega_2''(kr) = k \omega_2(kr) V(r) g_2(kr)$$

como:

$$\omega_2''(kr) - \frac{1(k+1)}{r^2} \omega_2(kr) + k^2 \omega_2(kr) = 0$$

resulta que  $g_2(kr)$  satisface la ecuación (1.15) y de (II.3)

$$\lim_{t \rightarrow 0} \varphi_2(t) = \varphi_1(t) \tag{II.4}$$

Como dos soluciones de (1.15) que tiene igual comportamiento en un punto deben diferir en una constante multiplicativa:

$$\varphi_2(t) = k \varphi_1(t)$$

comparando (II.4) con (2.1):

$$\varphi_2(t) = k^{0+} \varphi_1(t) \tag{II.5}$$

reemplazando en (II.1) y comparando con (2.15) resulta:

$$D_2(t) = \varphi_2(t)$$

APENDICE III

Hemos visto que la amplitud de dispersión para un momento angular definido, puede ponerse como:

$$f_{\ell}(s) = \frac{1}{16\pi W} \left\{ (S+N) [-A_{\ell} + (W-m) B_{\ell}] + (S-N) [A_{\ell+1} + (W+m) B_{\ell+1}] \right\} \quad (\text{III.1})$$

donde

$$A_{\ell}(s) = \int_{-1}^1 P_{\ell}(\cos \theta) A(s, \theta) d(\cos \theta) \quad B_{\ell}(s) = \int_{-1}^1 P_{\ell}(s, \theta) P_{\ell}(\cos \theta) d(\cos \theta)$$

A y B satisfacen la relación de Mandelstan. El análisis de las singularidades de  $f_{\ell}(s)$  ha sido efectuado por Frazer y Fulco, y aquí solo enunciaremos los resultados en el plano  $s$ . Consideremos primero las singularidades provenientes de  $A_{\ell}$  y  $B_{\ell}$ .

1.- Polo del nucleón en  $s=m^2$ , constituye toda la contribución del diagrama 6.a a las singularidades

2.- Nucleón en el canal cruzado, esto es el diagrama 6.b, esto es un polo en la variable  $\bar{s}$ , en  $s=m^2$ , en el plano  $s$  este se refleja en los cortes

$$-\infty < s \leq 0 \\ m^2 \left(1 - \frac{\mu^2}{m^2}\right) \leq s \leq m^2 + 2\mu^2$$

3.- Corte físico, este podría representarse por el gráfico III.a, produce un corte en

$$s \geq (m+\mu)^2$$

4.- Corte físico cruzado, proviene de diagramas del tipo III.b y evidentemente corresponden a  $\bar{s} \geq (m+\mu)^2$ , que en el plano  $s$  produce los cortes:

$$-\infty \leq s \leq 0 \\ 0 \leq s \leq (m-\mu)^2$$

5.- Corte proveniente del proceso  $\pi\pi \rightarrow \bar{N}N$ , esto corresponde a gráficos del tipo III.c es decir,  $t \geq 4\mu^2$ , que produce un corte a lo largo del círculo,



$$|s| = m^2 k^2$$

y sobre el eje real en:

$$-\infty \leq s \leq 0$$

Ademas de estas singularidades de  $f_{\ell}(s)$  que podríamos llamar dinámicas ocurren otras provenientes de los coeficientes de  $A_{\ell}^{(s)}$  y  $B_{\ell}^{(s)}$  en la fórmula (III.1)

6.- Un polo en  $s=0$  que proviene del factor  $1/s$  en (III.1)

7.- El corte,  $-\infty \leq s \leq 0$ , que proviene de los términos en  $\sqrt{s}$ .

Este tipo de singularidades se las acostumbra llamar cinemáticas, ya que no pueden considerarse como producidas por intercambio de partículas, y por lo tanto la parte imaginaria de la amplitud, sobre ellas no se halla acotada por la condición de unitariedad.

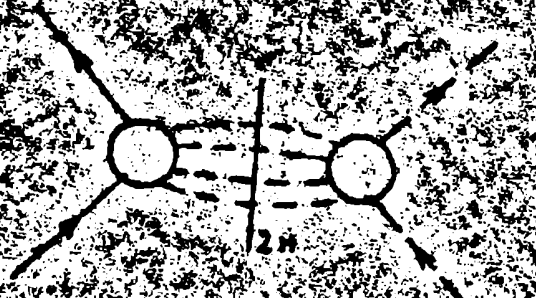
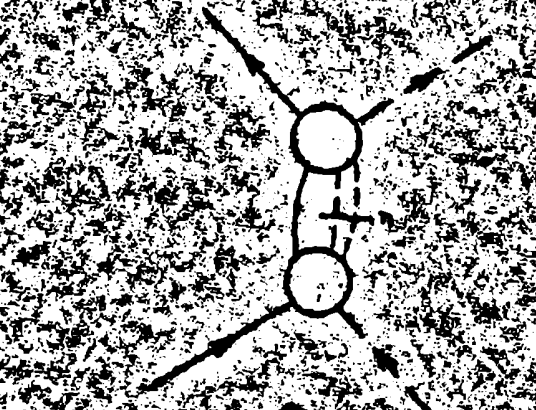


fig. III

EXPLICACION DE LAS FIGURAS

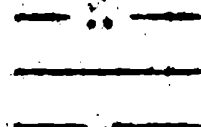
- fig 1. Cerrimiento de los niveles de la caja debido a la interacción.
- fig 2. Condiciones límites del potencial.
- fig 3. Comparación del cerrimiento de fase de la onda S para la dispersión por un peso de potencial.
- fig 4. Idem para un potencial exponencial atractivo.
- fig 5. Dispersión elástica de pión por nucleón.
- fig 6. Diagramas del nucleón en el canal directo (a) y en el cruzado (b),(c).
- fig 7. Singularidades en el plano s, de la amplitud de dispersión para una onda parcial dada.
- fig 8. Procesos de más baja energía en los canales cruzados.
- fig 9. Diagramas fenomenológicos con los que se trata de describir la influencia de los canales cruzados en el canal directo; intercambio del  $N^+$  en el canal  $\bar{s}$  y de un bipión en el canal t.
- fig 10. Singularidad de la contribución del bipión.
- fig 11. Vértices de interacción del bipión con el pión (a), con el nucleón (b) y con el fotón (c).
- fig 12. Gráficas físicas con el bipión como única estado intermedio (a,b,c) y contribución de alta energía al factor de forma del pión.
- fig 13. Vértice de interacción  $N N^+$  (a) e intercambio del N en el canal directo (b).

NOTA: En todos los gráficos siguientes la convención de los dibujos es la siguiente:

Experimental

Determinantal con la variable  $W^2$  y  $\gamma_1 = -17.827$

Idem con  $\gamma_1 = -8.12$



Ídem usando únicamente los polos del nucleón.

Determinantal con la variable  $W$ .

Resultados de Frautschi y Walecka.<sup>26</sup>

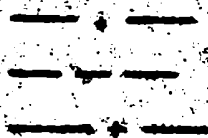


Fig 14. Comparación de las curvaturas de fase para la onda P con  $I=3/2$  y  $J=3/2$  obtenidas mediante distintos métodos con los experimentales.<sup>48</sup>

Fig 15. Ídem para la onda P con  $I=3/2$  y  $J=1$ .<sup>48</sup>

Fig 16. Ídem para la onda P con  $I=1/2$  y  $J=3/2$ .<sup>48</sup>

Fig 17. Ídem para la onda P con  $I=1/2$  y  $J=1$ .<sup>48</sup>

Fig 18 y 19. Ídem para las ondas S con  $I=1/2$  e  $I=3/2$ .<sup>39</sup>

Fig 20. Representación de rango efectivo y comparación con la fórmula de Chew y Low<sup>23</sup>, y con los resultados de Frautschi y Walecka.<sup>26</sup>

Fig XII. Estados intermedios con un nucleón y piones en los tres canales

## REFERENCIAS

1. La relación de cierre es en este caso:

$$\int_0^{\infty} dr S dr \Omega_k \Psi_k^*(R, r) \Psi_k(E, r) = S(r^2, r^2)$$

2. W. Magnus y F. Oberhettinger. Formulas and Theorems for the functions of mathematical physics. (Chelsea Publishing, Nueva York), pag 21.
3. En el apendice I, se resumen las propiedades de las funciones especiales usadas.
4. La notación usada es la de J. Blatt y V. Weisskopf, Theoretical Nuclear Physics (Wiley & Sons, Nueva York 1960)
5. R. Jest y A. Pais, Phys. Rev. 82, 840 (1951)
6. A. Barut y K. Rued, J. Math. Phys. 2, 181 (1961)
7. S. Bettine, A.M. Lengeni y T. Regge, Nueve Cimento, 23, 954 (1962)
8. L. Schiff, Quantum Mechanics (McGraw-Hill, Nueva York, 1955) pag 104
9. El comportamiento límite se muestra en el apendice I.
10. Ver referencia 8, pagina 163.
11. R. Newton J. Math, Phys. 1, 31. (1959)
12. Ver referencia 8, fórmula (9.5), la k restante se ha incluido en la ecuación (1.13)
13. J.J. Giambiagi y T. Kibble, Ann. of Phys. 7, 39 (1959)
14. Este método ha sido desarrollado por M. Baker, Ann. of Phys. 4, 271 (1958)
15. E. Whittaker y G. Watson, A course of modern analysis (Cambridge Press, 1920 página 323. R. Courant y D. Hilbert, Methods of Mathematical Physics (Interscience, Nueva York) Tomo I, página 142.
16. B. De Witt, Phys. Rev. 103, 1565 (1951)

17. Evidentemente debemos suponer que las separaciones de  $E$  son todas iguales en un entorno de  $E=0$ . Para hacer más intuitiva esta prueba sería necesario introducir "adiabaticamente" la interacción.

18. Las transformaciones de similitud evidentemente son diferentes en cada caso.

19. Definimos  $D_2^+(E)$  y  $D_2^-(E)$  según se tienda al eje real, desde el semiplano superior e desde el inferior

$$\begin{aligned} D_2^+ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} D_2(\sigma + i\epsilon) \\ D_2^- &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} D_2(\sigma - i\epsilon) \end{aligned} \quad \text{en } \sigma > 0$$

20. Dado que únicamente nos interesa, la región física de la energía no discutiremos aquí la posible existencia de polos redundantes, ni las propiedades analíticas de  $S_1(E)$  en el plano complejo.

21. L. Rosenfeld, Nuclear Forces (North Holland, Amsterdam, 1948)

22. J. Hamilton, The theory of elementary particles, (Oxford, 1959) página 220 y 200. Esta cantidad  $\Lambda$  puede ser infinito.

23. R. Blankenbecler, Phys. Rev. 122, 983 (1961)

L. F. Cook y B. Lee, Unitarity and production amplitudes (preimpresión del Palmer Physical Laboratory; Princeton)

24. Un nucleón y varios piones.

25. G. Chew y S. Mandelstam Theory of the low energy  $\pi$ - $\pi$  interaction UCRL-48728, (1959)

26. S. Frautschi y D. Walecka, Phys. Rev. 120, 1486 (1960)

27. Una discusión de las bases de esta suposición, como analogía al caso de potenciales puede verse en G. Chew, UCRL-9289 (1960) páginas 5 y 31.

28. D. Amati y S. Fubini, Ann. Rev. of nucl. science. 12, 359 (1962).

Ver el apéndice III.

29. Realmente para que esta interpretación tenga sentido es necesario admitir que todas las constantes de acoplamiento sean del mismo orden de magnitud.
30. Una prueba de las relaciones cinemáticas, como asimismo el cálculo detallado de los diagramas fenomenológicos se efectúa en la tesis de H. Bali (a presentarse, Universidad de Buenos Aires)
31. S. Schweber, Introduction to quantum field theory (Rev. & Petersen, 1961)
32. En un vértice virtual siempre se viola la ley de conservación de la energía, de forma que la incertidumbre en el tiempo en que se emite la partícula resultante es  $\Delta t \approx \hbar / \Delta E$ , si llamamos R el rango del potencial, este tiene como cota superior el valor  $R \approx \Delta t \frac{\hbar c}{\Delta E}$  y por lo tanto el rango de la fuerza que ocurre en un vértice, es inversamente proporcional a la violación de energía que ocurre en él.
33. W. Frazer y Fulco, Phys. Rev., 117, 1603, 1609 (1960); 119, 1420 (1960)
34. Este es una consecuencia de que su hipercarga es nula, para una discusión puede verse P. Roman, Theory of elementary particles. (North Holland, Amsterdam, (1960)
35. S. Bergia y A. Stanghellini, Nuovo Cimento, 19, 155 (1961)
36. M. Munozek, Nuovo Cimento (a ser publicado, 1963)
37. Los dos únicos vectores independientes en el vértice son:  $(p+q)_\mu$  y  $(p-q)_\mu$  ; el primero se elimina debido a la condición  $P_\mu \Psi_\mu = 0$  y el segundo lo reemplazamos por  $q_\mu$ .
38. W. Kummer, CERN 62-13 (1962). Chew y Mandelstam U.C.R.L 0025 (1962)
39. J. Hamilton y W.S. Woolcock (preimpresión del University College, Londres, (1962).
- 39'. H. Bali, C. Garibetti, J.J. Giambiagi y A. Pignetti Nuovo Cimento, 20, 1209 (1961)
40. Agradezco al Dr. J. Fulco por haberme comunicado esta idea.
41. La definición de estas cantidades en teoría formal de dispersión puede

verse en las referencias 16 y 22 e en A. Messiah, Mecanique quantique (Dunod, Paris, 1961).

42. Usamos la convención

$$\int |w\rangle \rho(w) dw \langle w| = 1 \quad \langle w|w'\rangle = \frac{\delta(w-w')}{\rho(w)}$$

43. J.D. Bjorken, Phys. Rev. Letters, 4, 473 (1960)

44. Ver referencia 22, pag. 360.

45. A. Martin, The symmetrized N/D Method, (preimpresión, Universidad de Standford)

46. J.D. Bjorken y M. Hauenberg, (preimpresion, Univ. de Standford)

47. Ver referencia 23.

48. W.D. Walker, J. Davis y W.D. Shephard, Phys. Rev. 118, 1612 (1960)

Juan Luis Fantuzzi

Septiembre 1963

Carlos Fantuzzi