Sobre la continuidad débil y magra en Lp (Lq) y su aplicación a operadores potenciales

Ballester Ubeda de Pereyra, Concepción

1963

Tesis presentada para obtener el grado de Doctor en Ciencias Físico-Matemáticas de la Universidad de Buenos Aires

RESUMEN DE LA TESIS PRESENTADA POR CONCEPCION BALLESTER DE PEREYRA PARA OPTAR AL TITULO DE DR. EN CIENCIAS FISICOMATEMATICAS.

Como se sabe Calderon y Zygmund probaron que las transformadas n-dimensionales de Hilbert H= Hf poseen las propiedades siguientes

1) H es continua $L^p \to L^p$ para todo $1 < p < \infty$

2) Para el extremo p = 1 no hay continuidad pero vale el llamado tipo debil (1,1).

Este resultado fundamental recibio los complementos siguientes:

a) E. Stein mostro que 1) vale todavia con medida ponderada $x^a dx$; mas aun, el probo que esto vale para las integrales singulares generalesc estudiadas por Calderon-Zygmund.

b) Benedek-Calderon-Panzone, en su trabajo de 1962, probaron que 1) vale con normas mixtas $\|f\|_{p_1,\ldots,p_n} = \|f\|_P$

c) Para integrales dobles o iteradas de Hilbert vale la propiedad 1) pero segun mostro E. Stein(en su trabajo del Annals of Math. ,1961) la propiedad 2) no vale para transformadas iteradas.

En a) E. Stein dejo de lado la cuestion de tipo debil en la punta p=1, y sus razonamientos no se aplican a este caso. Por otra parte en b) no se consideran medidas ponderadas, es decir falta la combinacion de a) con b).

Nos parecio pues que para la armonia de la teoria convendria completar las tres cuestiones siguientes: extender a) para p=1 y tipo debil; extender este teoremade Stein para normas mixtas; y finalmentedar algun sustituto de 2) en el caso de integrales iteradas.

Con una modificacion esencial en los razonamientos de Stein extendemos el teorema a) al extremo p=1. Ademas damos una nueva demostracion simplificada del teorema a) que permite extenderlo a normas mixtas, quedando asi completadas las dos primeras cuestiones.

En cuanto a la tercera, nos parecio natural introducir una nocion mas general de tipo debil, que llamamos tipo magro, de modo que las transformadas dobles presenten tipo magro en la punta p=1. Para que esta nocion sea de alguna utilidad hay que exigir que para la misma valga algun teorema del tipo de Marcinkiewicz. Para la definicion de tipo magro que damos vale un teorema de interpolacion pero que no es una generalizacion completa del de Marcinkiewicz pues la hipotesis debe verificarse en 4 puntas en vez de las 2 clasicas.

Estas cuestiones y otras similares para operadores potenciales nos llevaron a la necesidad de considerar la nocion de tipo debil con normas mixtas y la interpolacion correspondiente. Como se sabe el estudio sistematico de los espacios L^p con normas mixtas fue hecho en un trabajo de Benedek-Panzone en 1960(seguido por un trabajo con Calderon y la tesis de Benedek), donde ellos estudian las cuestiones relativas al tipo fuerte con normas mixtas.

Pero como estos autores no han considerado el caso de tipo debil, nos vimos en la necesidad de abordar el problema de interpolacion con tipos debiles y normas mixtas. Este problema parece presentar dificultades serias y solo hemos considerado algunos aspectos mas simples del mismo. en caso de normas mixtas se presentan por lo menos 5 definiciones naturales de tipo debil que llamamos semidebil, debil, debil , debil vectorial y magro. El tipo debil es el unico que se reduce al tipo debil ordinario si $P=(p_1,p_2)$ con $p_1=p_2$. Contrariamente a lo que ocurre en el caso del tipo fuerte, la definicion vectorial es la mas alejada de la definicion ordinaria. El tipo magro es el mas general de todos.

Logramos extender el teorema de Marcinkiewicz para el tipo semidebil; damos tambien una extension para el tipo debil o debil pero con condiciones adicionales restrictivas. Ademas reducimos el problema de la interpolacion con tipos debiles (sin las condiciones adicionales) al problema correspondiente con tipos vectoriales. Finalmente, como ya dijimos, damos tambien un teorema de interpolacion para tipos magros, pero no generaliza el teorema clasico porque exige la hipotesis en 4 puntas. Aplicando estos teoremas de interpolacion completamos las cuestiones arriba mencionadas y otras similares para operadores potenciales, de las cuales citaremos la siguiente. Como se sabe, el teorema de Sobolev Ilin afirma que la restriccion $H_{\gamma,\, n/m}$ del operador potencial $H_{\gamma, n}$ a $E^m \subset E^n$ es de tipo (p,s) con $1/p - m/n.1/s = \gamma/n$. El teorema de interpolacion con normas mixtas permite dar la siguiente generalizacion

$H_{\gamma, n/m}$ es de tipo $(q,p) \rightarrow s$, si $\dfrac{1}{p} - \dfrac{m}{n}\dfrac{1}{s} = \dfrac{\gamma}{n}$

$$\frac{1}{q} - \frac{m}{n-m}\,\frac{1}{s} = \frac{\gamma - m}{n-m} \quad ,$$

asi como otras propiedades de tipo debil o magro.

UNIVERSIDAD NACIONAL DE BUENOS AIRES
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales

Sobre la Continuidad Débil y Magra en L^p (L^q) y su Aplicación a Operadores Potenciales

Concepción Ballester Ubeda de Pereyra

Tesis Presentada para optar al Título de Doctor en Ciencias Físico - Matemáticas

BUENOS AIRES
1963

Agradezco:

Ante todo, al Dr. Mischa Cotlar que me propuso los problemas tratados en este trabajo, por la generosidad con que me ha brindado su tiempo y su consejo.

A los señores profesores del Departamento de Matemática por el interés y la solidaridad que me han demostrado, sobre todo durante mi larga convalecencia, y en particular a la Dra. Cora Ratto de Sadosky sin cuya insistencia y ayuda tal vez yo nunca hubiera terminado este trabajo.

A todos ellos, mi más profundo agradecimiento

Concepción Ballester de Pereyra

INDICE

INTRODUCCION

Como se sabe, los operadores clásicos del análisis armónico poseen propiedades de continuidad, o de tipo, en los espacios L^p, para todo un intervalo de valores de p , y este hecho está íntimamente vinculado al teorema de convexidad o interpolación de M. Riesz. Para ciertos valores límites de p estos operadores dejan de ser contínuos pero mantienen una propiedad de "continuidad débil" o tipo débil. La noción de continuidad débil adquirió mucha importancia en los trabajos de los últimos años especialmente debido al teorema de convexidad de Marcinkiewicz-Zygmund que permite establecer la continuidad fuerte a partir de la débil. Estos teoremas de convexidad han originado una teoría general de interpolación que constituye un nuevo y potente método del Análisis. (Para definiciones más precisas ver § 1.)

En este trabajo consideramos las siguientes cuestiones referentes al tipo debil de los operadores clásicos y al teorema de Marcinkiewicz, tratando de dar una respuesta a los problemas más fáciles que ellas presentan:

a) Como se sabe, tanto los operadores simples como dobles de Hilbert, y sus respectivos operadores "maximales", son de tipo (p,p) para $1 < p < \infty$. Para p = 1 los operadores simples pre -

---

Resúmenes de esta tesis fueron presentados en las reuniones de la UMA de 1962 y 1963. Los resultados de los párrafos 2 a 3 están tomados de un trabajo en colaboración con M. Cotlar, de próxima publicación.

sentan todavía tipo débil. En cambio, según resultados de E. Stein [14] esta última propiedad no vale para los operadores dobles de Hilbert. Resulta pues natural plantear la cuestión de definir un concepto generalizado de tipo débil, que llamaremos "tipo magro", de modo que se verifiquen las dos condiciones siguientes:

(i) que los operadores dóbles de Hilbert sean de tipo magro para $p = 1$;

(ii) que para el tipo magro valga algún teorema de convexidad del tipo Marcinkiewicz.

El tipo magro que aquí definimos verifica (i) y (ii), solo que en el teorema de convexidad que damos para el tipo magro la hipótesis se supone válida en 4 puntos, en vez de los 2 clásicos.

La noción de tipo magro se refiere a espacios $L^p (L^q)$, es decir espacios de Lebesgue con normas mixtas, y está íntimamente vinculada a la cuestión b) que sigue.

b) El estudio sistemático de los espacios $L^p (L^q)$ fué iniciado en el trabajo [1] de Agnes B. de Panzone y R. Panzone (continuado en [2], [3]), donde ellos extienden a estos espacios el teorema de convexidad de Riesz-Thorin y el tipo fuerte de los operadores de Fourier, Hilbert y potenciales. Sin embargo en este trabajo quedó sin tratar el teorema de Marcinkiewicz y las cuestiones referentes al tipo débil. Al tratar de definir la "norma" o tipo débil en $L^p (L^q)$ nos encontramos con el siguiente hecho que no se presenta en caso del tipo fuerte. En la definición de tipo fuerte los elementos de $L^p (L^q)$ pueden considerarse indistintamente como funciones de dos variables $f(x,y)$ con normas mixtas $|| \; || f ||_p \; ||_q$, o como vectores $\vec{f}(x) = f(x,y) = f_x(y) \in L^p$ con norma vectorial $||\vec{f}(x)||_q$. Si $p = q$ se obtiene la norma ordinaria de L^p (dx dy) . En cambio la definición vectorial de norma o tipo débil no se reduce a la definición ordinaria para $p = q$. Resulta así que para nuestro objeto la definición vectorial no es la apropiada, y que para funciones de dos variables $f(x,y)$ pueden darse, además de la definición ordinaria de L^p (dx,dy), tres definiciones más de tipo débil, que llamaremos tipo débil mixto, tipo débil$^{\#}$ mixto y tipo vectorial mixto. El tipo débil mixto es el único que se reduce al ordinario si $p = q$, el débil$^{\#}$ implica al débil, y el vectorial parece no implicar ni ser implicado por los otros. En los párrafos 2 a 3 damos diversas variantes del teorema de Marcinkiewicz para estos distintos tipos débiles; todas estas variantes "contienen" como caso particular al teorema ordinario de Marcinkiewicz, pero solo una de ellas se "reduce" a este teorema para $p = q$. En 3.4.3 particular damos una extensión del teorema de convexidad de Riesz-Benedek-Panzone para operadores sublineales y funciones reales (con hipótesis adicionales del tipo $p_i \leq q_i$, ya que se sabe que ni el teorema ordinario de Riesz puede valer sin estas hipótesis para funciones reales). Como ya se indicó en a), además de las 4 definiciones mencionadas de tipo débil para funciones $f(x,y)$ está además la definición de tipo magro, que es más débil que todas ellas, incluso la ordinaria, pero para este caso, como ya dijimos, solo hemos logrado un teorema de convexidad con 4 puntos y con las restricciones respectivas sobre los p_i . Dificultamos que en este último teorema se pueda reducir las 4 puntas a dos, en vista de la generalidad de la noción de tipo magro, si bién es muy probable de que la teoría general de interpolación de Calderón, aún no publicada, contenga resultados que permitan perfeccionar considerablemente este toerema.

c) Como Benedek y Panzone no consideran en su trabajo el tipo débil, dejan sin demostrar propiedades de continuidad débil en L^p (L^q) de los operadores clásicos, tales como el teorema de Hardy - Paley, el tipo débil de operadores potenciales, o el teorema de Sobolev para dimensiones diferentes. Las extensiones del teorema de Marcinkiewicz mencionadas en b) permiten completar, en ese sentido, los resultados del trabajo [1] de estos autores. En particular extendemos de este modo a los espacios L^p (L^q) las propiedades de los llamados potenciales generalizados de Cotlar-Panzone [5].

d) La propiedad del operador ordinario de Hilbert, de ser de tipo fuerte en $1 < p < \infty$, fué extendida por Babenko a medidas ponderadas $x^\alpha . dx$. Con un artificio ingenioso, E. Stein [15] obtuvo una extensión similar para las integrales singulares de Calderón-Zygmund. Sin embargo estos autores tampoco consideran el caso del tipo débil en $p = 1$. En el § 4 extendemos el teorema de Stein-Babenko al tipo débil. Combinando con los resultados anteriores, se obtienen diferentes generalizaciones y simplificaciones del teorema de Stein, así como aplicaciones a operadores potenciales que complementan algunos resultados de E. Ortiz ([5], [6]).

Cuando esta tesis ya estaba prácticamente terminada, llegó a Buenos Aires el profesor J. Peetre quien dió unas conferencias sobre la teoría de interpolación y nos informó de algunos resultados aún no publicados de la toería de "espacios de promedios" de Lions-Peetre. Estas informaciones nos permitieron simplificar considerablemente nuestras demostraciones primitivas que eran inutilmente complicadas. Por esta razón, y también porque la teoría general de interpolación es todavía poco difundida, nos pareció razonable dedicar el primer párrafo de esta tesis a una exposición sucinta y elemental de ideas y resultados básicos de la teoría general de interpolación, con énfasis en la teoría de Lions - Peetre por ser esta las más elemental y más cercana al teorema de Marcinkiewicz y sus variantes que aquí consideramos. En cambio nos limitamos a muy pocas indicaciones sobre la teoría más importante y dificil de Calderón, de la cual tan solo tenemos una idea somera por las clases introductorias que Calderón dictó en Buenos Aires en 1961.

Para evitar notaciones excesivamente cansadoras y para no obscurecer los conceptos, nos hemos limitado al caso de dos variables. Una buena parte de las definiciones y proposiciones que damos se extiénden fácilmente a n variables, pero es necesario advertir que algunas de las cuestiones aquí consideradas pueden presentar dificultades inesperadas al pasar a n variables que no hemos examinado aún en detalle.

Tampoco hemos intentado extender estas cuestiones en términos de la teoría general de interpolación, lo que dejamos para otra oportunidad cuando estemos mejor informados de los resultados obtenidos recientemente por Calderón y Lions.

§ 1. NOTACIONES Y EXPOSICION DE HECHOS BASICOS DE LA TEORIA DE INTERPOLACION(#)

1.A.- Las letras λ, t, ξ, η serán reservadas para números reales no-negativos.

Si $X = \{x\}$ es un espacio y μ una medida no-negativa en X (supuesto siempre σ-finito), $L^p = L^p(X) = L^p(X, \mu)$ indicará la clase de Lebesgue de las funciones $f(x)$ medibles con norma

$$||f||_p = ||f||_{L^p} = \left(\int_X |f(x)|^p \, d\mu \right)^{1/p} , \quad (1 \leq p < \infty) \qquad (1)$$

En el caso en que $X = E^n$, $d\mu = dx$ indicará la medida ordinaria de Lebesgue. En este caso tienen también especial interés las llamadas medidas ponderadas $d\mu = |x|^{\alpha} dx$. En particular si $X = E^1 = \{x\}$ = recta real, la sustitución $t = e^x$ transforma E^1 en la semirecta $E^1_+ = (0, \infty)$ y la medida dx pasa en dt/t. Indicaremos con L^p_+ al espacio $L^p(E^1_+, dt/t)$ de modo que

$$||f||_{L^p_+} = \left(\int_0^{\infty} |f(t)|^p \frac{dt}{t} \right)^{1/p} \qquad (1a)$$

(#) Esta sección está tomada de un trabajo de seminario. La demostración de los teoremas que citamos pueden verse en el libro de Zygmund [17], capítulos I, IV, XII, ó en [5] y [16]. La redacción está hecha en base a clases de M. Cotlar.

Como de costumbre, el sup.es.$|h|$ se indicará con $||h||_{\infty}$.

Para todo $\lambda > 0$ es $E_{\lambda} = E_{\lambda}[h] = \{x ; |h(x)| > \lambda\}$ y escribimos

$$D(\lambda) = D(h;\lambda) = \langle h; \lambda \rangle = \mu(E_{\lambda}) \qquad (2)$$

$D(\lambda)$ es la función de distribución de $|h|$, y es una función no-creciente, continua a derecha de la variable real $\lambda > 0$. Evidentemente si para todo x es $|h(x)| \leq |h_1(x)| + |h_2(x)|$ entonces

$$D(2\lambda) \leq D_1(\lambda) + D_2(\lambda) \qquad (\text{si } D_i(\lambda) = D(h_i;\lambda)) \quad (2a)$$

Para todo p , $0 < p < \infty$, se tiene la fórmula básica:

$$\int_X |h(x)|^p d\mu = p \int_0^{\infty} \lambda^{p-1} D(\lambda)\, d\lambda = p \int_0^{\infty} \lambda^p D(\lambda) \frac{d\lambda}{\lambda} ,(3)$$

que puede escribirse

$$(||h||_p)^p = p\,(||\ D(\ )^{1/p}||_{L^p_+})^p \qquad (3a)$$

Dos funciones (que pueden estar definidas en diferentes espacios con diferentes medidas) se llaman <u>equimedibles</u> si tienen la misma función de distribución $D(\lambda)$. En este caso tienen igual norma $||h||_p$ para todo p , $1 \leq p \leq \infty$.

<u>Designaremos con $\mathcal{E}$</u> a la familia de las funciones <u>simples</u>, es decir funciones de la forma $f(x) = \lambda_1 \varphi_1(x)+\ldots+\lambda_n \varphi_n(x)$, donde $\varphi_i = \varphi_{A_i}$ es la función característica del conjunto A_i , y las A_i son disjuntos y de medida finita. Para $1 \leq p < \infty$, designaremos con $\mathcal{E}_p$ el conjunto $\mathcal{E}$ con la norma $||f||_p$, de

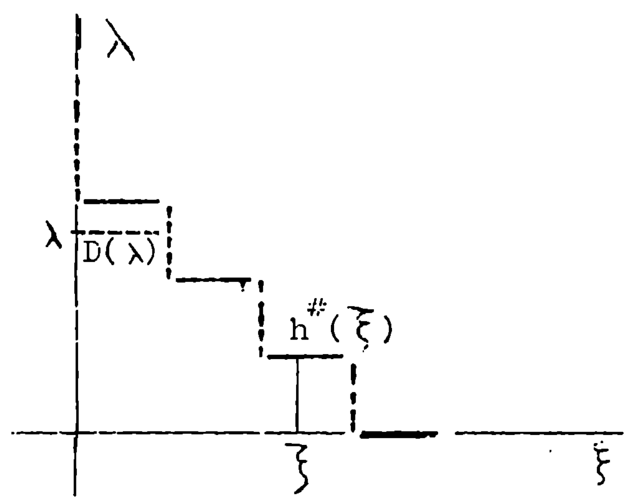
modo que $\mathcal{E}_p$ es subespacio denso de L^p para todo p. En cierto modo bastará en lo sucesivo trabajar con $\mathcal{E}_p$ en vez de L^p pues toda f de L^p es límite de f_n de $\mathcal{E}_p$ de modo que $||f||_p = \lim ||f_n||_p$ y $D(f, \lambda) = \lim D(f_n, \lambda)$ (con excepción de $p = \infty$). En caso en que X es el espacio euclídeo tomaremos como $\mathcal{E}$ la familia de las funciones escaleras (a veces conviene tomar por $\mathcal{E}$ las funciones infintamente derivables a soporte compacto).

La expresión de $D(\lambda)$ es especialmente clara si $h = h^{\#}(\xi)$ es una función definida en $[0,\infty)$ y no-creciente. En este caso se tiene evidentemente que:

$$D(\lambda) = D(h^{\#}(\xi), \lambda) = \sup \{\xi;\ h^{\#}(\xi) > \lambda\} = $$
$$= \inf \{\eta;\ h^{\#}(\eta) \leq \lambda\} \qquad (4)$$

(el sup se supone nulo si no hay puntos ξ con $h^{\#}(\xi) > \lambda$).

En la figura está ilustrado el caso de una $h^{\#}(\xi)$ escalera y no-creciente, y los trazos punteados corresponden a la gráfica de $D(\lambda) = D(h^{\#}, \lambda)$, y los gruesos a la de $h^{\#}(\xi)$. Si $h^{\#}$ es además continua a izquierda entonces ella se expresa mediante $D(\lambda) = D(h^{\#}, \lambda)$ por la fórmula



$$h^{\#}(\xi) = \inf \{ \lambda ; D(\lambda) < \xi \} \tag{4a}$$

Esto permite (en lo que a la norma y $D(\lambda)$ se refiere) sustituir la función $h(x)$, definida en el espacio X general, con una función $h^{\#}(\xi)$ definida en $[0,\infty)$ y no-decreciente. En efecto, en base a (4a), para toda tal $h(x)$ definimos

$$h^{\#}(\xi) = \inf \{ \lambda ; D(h;\lambda) < \xi \} \tag{4b}$$

Está claro que $h^{\#}(\xi)$ es no-decreciente y continua a izquierda, y de (4) resulta que $h^{\#}(\xi)$ es <u>equimedible con</u> $h(x)$. Si $h(x) = \lambda_1 \varphi_1(x)+\ldots+\lambda_n \varphi_n(x) \in \mathcal{E}$, $\varphi_i = \varphi_{A_i}$, tomando en $E^1_+ = [0,\infty)$ n intervalos $J_1,\ldots,J_n$ disjuntos tales que $|J_i| = \mu(A_i)$, y definiendo $\varphi(\xi) = \lambda_i$ en J_i, obtendremos una función escalera $\varphi(\xi)$ equimedible con $h(x)$. Si los J_i los elegimos además consecutivos a partir del origen y de modo que los λ_i vayan decreciendo, obtendremos la función $h^{\#}(\xi)$ de (4b). Por eso $h^{\#}(\xi)$ definida por (4b) se llama el <u>arreglo no creciente</u> de la función $h(x)$, pues si $h = \varphi$, $h^{\#}$ se obtiene "permutando" los valores de φ.

Si $D(\lambda)$ es continua y no tiene intervalos de constancia, entonces $h^{\#}(\xi)$ es la inversa de $D(\lambda)$, o sea $D(\lambda) = \xi$ implica $h^{\#}(\xi) = \lambda$ y viceversa. Esto no es cierto si por ejemplo $D(\lambda)$ ó $h^{\#}(\xi)$ son funciones escaleras. Pero siempre para todo λ existe un λ_1, tal que

$$D(\lambda) = D(\lambda_1) = \xi, \text{ y } |h^{\#}(\xi) - \lambda_1| < \varepsilon \quad (\varepsilon > 0 \text{ prefijado}) \tag{4c}$$

es decir $D(\lambda_1) = \xi$ prácticamente equivale a $h^{\#}(\xi) = \lambda_1$, salvo un $\mathcal{E}$, y $D(\lambda_1) = D(\lambda)$.

Se sabe que para sumas finitas vale $\sum a_n b_n \leq \sum a_n^{\#} b_n^{\#}$, si $\{a_n^{\#}\}$ es la sucesión $\{a_n\}$ ordenada en forma no-creciente. Luego para funciones escaleras de $\mathcal{E}$, y por paso al límite para todo par de funciones $f(x)$, $g(x)$ vale la desigualdad

$$\int_X |f(x)\ g(x)|\ d\mu \leq \int_0^{\infty} f^{\#}(\xi)\ g^{\#}(\xi)\ d\xi \quad . \tag{4d}$$

En otros términos, si $\varphi \sim f^{\#}$ indica que φ es equimedible con $f^{\#}$, se tiene que

$$\int_0^{\infty} h_1^{\#}(\xi)\ h_2^{\#}(\xi)\ d\xi = \sup_{f_1 \sim h_1^{\#}, f_2 \sim h_2^{\#}} \left\{ \int_X f(x)\ g(x)\ d\mu \right\} \tag{4e}$$

$(f_i \geq 0)$.

La correspondencia $h(x) \longrightarrow h^{\#}(\xi)$, que a funciones definidas en X le hace corresponder funciones equimedibles no crecientes en E_+^1, no es aditiva ni subaditiva: de $h = h_1 + h_2$ no se puede deducir que $h^{\#}(\xi) \leq h_1^{\#}(\xi) + h_2^{\#}(\xi)$. Tan solo podemos afirmar que si $h = h_1 + h_2$ entonces $h^{\#}(\xi) = f_1(\xi) + f_2(\xi)$ con $f_i(\xi) \sim h_i(x)$, pero f_i puede no ser no-creciente. Análogamente si $|h| \leq |h_1| + |h_2|$ es $h^{\#}(\xi)$ $f_1(\xi) + f_2(\xi)$ con $f_i(\xi) \sim |h_i(x)|$.

Sin embargo la fórmula (4e) permite dar el siguiente sustituto para esta propiedad de subaditividad:

si $|h| \leq |h_1(x)| + |h_2(x)|$ entonces para toda función no-creciente $\varphi(\xi)$ (de modo que $\varphi = \varphi^{\#}$) vale:

$$\int_0^\infty h^{\#}(\xi)\varphi(\xi)\,d\xi \leq \int_0^\infty h_1^{\#}(\xi)\varphi(\xi)\,d\xi + \int_0^\infty h_2^{\#}(\xi)\varphi(\xi)\,d\xi, \tag{4f}$$

puesto que $h^{\#}(\xi)\varphi(\xi) \leq f_1(\xi)\varphi(\xi) + f_2(\xi)\varphi(\xi)$ con $f_i(\xi) \sim |h_i| \sim h_i^{\ast}$, y basta aplicar (4e) .

En particular si $\varphi(\eta) = \varphi_{0,\xi}(\eta)$ es la función característa de $[0,\xi]$, se obtiene que

$$\int_0^\xi h^{\#}(\eta)\,d\eta \leq \int_0^\xi h_1^{\#}(\eta)\,d\eta + \int_0^\xi h_2^{\#}(\eta)\,d\eta \quad ,$$

$$\frac{1}{\xi}\int_0^\xi h^{\#}(\eta)\,d\eta \leq \frac{1}{\xi}\int_0^\xi h_1^{\#}(\eta)\,d\eta + \frac{1}{\xi}\int_0^\xi h_2^{\#}(\eta)\,d\eta \tag{4g}$$

Esto nos dice que si sustituimos la función $h^{\#}(\xi)$ por su promedio (en $(0,\xi)$) $h^{\#\#}(\xi) = \frac{1}{\xi}\int_0^\xi h^{\#}(\eta)\,d\eta$, entonces la correspondencia $h(x) \longrightarrow h^{\#\#}(\xi)$ ya posee la propiedad subaditiva : $|h| \leq |h_1| + |h_2|$ implica $|h^{\#\#}| \leq |h_1^{\#\#}| + |h_2^{\#\#}|$.

Este hecho, como veremos, permite reducir el estudio del tipo de operadores sublineales generales $h = Tf$ al de operadores sublineales que asignan a funciones f generales funciones particulares $h = Tf$ definidas en la semirrecta real y no-crecientes.

De (3), como $D(\lambda)$ es no creciente, resulta que para todo λ vale

$$(||h||_p)^p \geqslant p\int_0^\lambda s^{p-1}D(s)\,ds \geqslant D(\lambda)\int_0^\lambda p\,s^{p-1}\,ds = \lambda^p D(\lambda) \quad .$$

Luego se tiene la desigualdad de Chebichev

$$\sup|\lambda^p D(\lambda)| \leq (||h||_p)^p \quad , \quad \sup|\lambda D(\lambda)^{1/p}| \leq ||h||_p \, . \tag{5}$$

Si $h^{\#}(\xi)$ es el arreglo no-creciente de $h(x)$, se tiene de (4c) que $\sup|\lambda D(\lambda)^{1/p}| = \sup|\xi^{1/p}h^{\#}(\xi)|$, luego usaremos la notación

$$\{h\}_p = \{h\}_{M\,p} = \sup_{\lambda>0} \{\lambda D(\lambda)^{1/p}\} = \sup_{\xi>0} |\xi^{1/p}h^{\#}(\xi)| , \quad (6)$$

y llamaremos $\{h\}_p$ "norma débil o de Marcinkiewicz" de h, pues (5) dice que $\{h\}_p \leq ||h||_p$ (') . $\{h\}_p$ no es una norma, pero veamos, siguiendo a Calderón, que para $p>1$ es $\{h\}_p$ <u>equivalente a una norma</u>. En efecto, pongamos, como más arriba

$$h^{\#\#}(\xi) = \frac{1}{\xi}\int_0^{\xi} h^{\#}(\eta)\,d\eta \quad (6a)$$

Por ser $h^{\#}$ no-creciente es evidente $h^{\#\#}(\xi) \geq h^{\#}(\xi)$. Si $\{h\}_p$ es finita, tendremos $h^{\#}(\eta)\eta^{1/p} \leq \{h\}_p$, $h^{\#}(\ ) \leq \leq \{h\}_p \eta^{-1/p}$, luego de (6a) sigue que $h^{\#\#}(\xi) \leq \frac{c}{\xi}\{h\}_p\, \xi^{-\frac{1}{p}+1}$, $c = p/(p-1)$. Luego $\xi^{1/p}h^{\#}(\xi) \leq \xi^{1/p}h^{\#\#}(\xi) \leq \frac{p}{p-1}\{h\}_p$, siempre que $p \neq 1$ (para $p=1$, $\xi^{-1/p} = \xi^{-1}$ no es integrable y no vale el razonamiento). Por tanto, si definimos

$$||h||_{M\,p} = \sup_{\xi>0} |\xi^{1/p}\, h^{\#\#}(\xi)| \quad (6b)$$

tendremos que

$$\{h\}_p \leq ||h||_{M\,p} \leq \frac{p}{p-1}\{h\}_p \quad (6c)$$

De modo que $||h||_{M^p}$ es una " norma débil" equivalente a la $\{h\}_p$, si $p>1$. Pero, por lo dicho más arriba (ver (4g)) ,

(') Si $p=\infty$, se define $h_{\infty} = ||h||_{\infty} = ||h||_{M\,\infty}$

$h = h_1+h_2$ implica $h^{\#\#} \leq h_1^{\#\#}(\xi) + h_2^{\#\#}(\xi)$, de modo que $\|h\|_{M^p} = \sup \xi^{1/p} h^{\#\#}(\xi)$ es realmente <u>una norma</u>:
$\|h_1+h_2\|_{M^p} \leq \|h_1\|_{M^p} + \|h_2\|_{M^p}$, $\|ch\|_{M^p} = |c| \; \|h\|_{M^p}$, $\|h\|_{M^p} = 0$ implica $D(h,\lambda) = 0$ para todo λ luego $h = 0$ p.p .

Observemos todavía que, para $1<p<\infty$, la norma $\|h\|_{M^p}$ es <u>equivalente a la norma</u>

$$\|h\|'_{M^p} = \sup_{E\subset X} \left\{ \frac{1}{(E)^{1-(1/p)}} \int_E |h(x)| \, d\mu \right\} \tag{6d}$$

es decir a la mínima constante c para la cual se verifica

$$\int_E |h(x)| \, d\mu \leq c \, (\mu(E))^{1-\frac{1}{p}} \quad , \text{ para todo conjunto } E \tag{6e}$$

En efecto, si $\mu(E) = a$, y si $\varphi(x)$ es la función característica de E , entonces $\varphi^{\#}(\xi) = \varphi_{0,a}(\xi)$ y por (4d) y (6) tenemos

$$\int_E |h(x)| d\mu = \int |h(x)| \varphi(x) d\mu \leq \int_0^\infty h^{\#}(\xi) \, \varphi_{0,a}(\xi) d\xi =$$

$$= \int_0^a h^{\#}(\xi) d\xi \qquad \int_0^a \{h\}_p \, \xi^{-1/p} d\xi =$$

$$= \{h\}_p \frac{p}{p-1} a^{1-\frac{1}{p}} \leq \|h\|_{M^p} \frac{p}{p-1} \mu(E)^{1-(1/p)} \quad ,$$

de modo que $\|h\|'_{M^p} \leq \frac{p}{p-1} \|h\|_{M^p}$. Recíprocamente, poniendo $E = \{x \; ; \; |h(x)| > \lambda\}$, será $\mu(E) = D(h,\lambda)$ y $\lambda\mu(E) \leq$

$\leq \int_E |h(x)|d\mu \quad ||h||'_{M^p} \, (\mu(E))^{1-\frac{1}{p}}$, de donde $\lambda\,\mu(E)^{1/p} \leq ||h||'_{M^p}$, o sea $\lambda D(\lambda)^{1/p} \leq ||h||'_{M^p}$ para todo λ , lo que prueba que $\{h\}_p \leq ||h||'_{M^p}$.

Asi pues, al trabajar con norma débil-p podemos usar cualquiera de las tres definiciones (b) , (6b) o (6d).

<u>1.B</u>. Sean p, r, q tres números fijos tales que

$$1 \leq p < r < q \leq \infty \tag{\#}$$

y veamos ahora como las consideraciones precedentes permiten expresar la norma $||f||_r$ en términos de las normas $||f||_p$ y $||f||_q$, y análogamente para las normas débiles $||f||_{M^r}$.

Para simplificar la escritura supongamos que $f > 0$. Si $E_\lambda = \{x \,;\, f(x) > \lambda\}$ y $\varphi_\lambda = \varphi_{E_\lambda}$ entonces la función $f(x)\,\varphi_\lambda(x)$ es igual a $f(x)$ si $x \in E_\lambda$ y a cero en caso contrario.

Usaremos las notaciones

$f^\lambda = f\varphi_{E_\lambda} = f(x)$ si $|f(x)| > \lambda$ y a cero si $|f(x)| \leq \lambda$

$f_\lambda = f - f^\lambda = f(x)$ si $|f(x)| \leq \lambda$ y a cero si $|f(x)| > \lambda$

$$f = f^\lambda + f_\lambda \quad . \tag{7}$$

Observemos que si $f \in L^r(X,\mu)$ entonces

$$f^\lambda \in L^p(X,\mu) \quad y \quad f_\lambda \in L_q(X,\mu) \quad , \tag{7a}$$

pues $\lambda \leq f^\lambda$, $|f_\lambda| \leq \lambda$, y $p < r < q$, luego

$$|f^{\lambda}(x)|^{p} \leq \lambda^{p-r}|f(x)|^{r} \quad , \quad |f_{\lambda}(x)|^{q} \leq \lambda^{q-r}|f(x)|^{r} \quad .$$

Más generalmente, dada una $f \in L^r$ fija consideraremos pares de familias de funciones, dependientes del parámetro $\lambda > 0$, $f^1(x,\lambda)$ y $f_1(x,\lambda)$ tales que

$$f(x) = f^1(x,\lambda) + f_1(x,\lambda) \quad \text{para todo } \lambda > 0 \tag{7b}$$

$f^1(x,\lambda) \in L^r$ (como función de x) ,

$f_1(x,\lambda) \in L^q(X,\lambda)$, para todo $\lambda > 0$

Por lo recién dicho, poniendo $f^1(x,\lambda) = f^{\lambda}(x)$, $f_1(x,\lambda) = f_{\lambda}(x)$ obtendremos un par que verifica (7b). A veces escribiremos dx en vez de $d\mu_x = d\mu$.

Al tratar con funciones de dos variables $f(x,\lambda)$, $\lambda \in E^1_+$, $x \in X$, usaremos la notación

$$\|f(x,\lambda)\|_{L^s_+(L^u)} = \left\| \left(\int_X |f(x,\lambda)|^u d\mu_x \right)^{1/u} \right\|_{L^s_+} =$$

$$= \|(\|f(x,\lambda)\|_u)\|_{L^s_+} = \left[\left(\int_X |f(x,\lambda)|^u dx \right)^{s/u} \frac{d\lambda}{\lambda} \right]^{1/s} \tag{7c}$$

Es decir primero se toma la norma-u respecto de x , luego la norma-s respecto de λ .

Analogamente se define la norma mixta $\|f(x,\lambda)\|_{L^s_+(\mathcal{M}^u)}$ reemplazando la norma $\|\ \|_u$ por la $\|\ \|_{\mathcal{M}^{u}} = \{\ \}_u$, es decir tomando primero la norma $\mathcal{M}^u$ respecto de x luego la L^s_+ respecto de λ .

Sea un par de familias $f^1(x,\lambda)$, $f_1(x,\lambda)$ que verifican (7b) ; considerdas para cada λ como funciones de x , indicaremos con $\langle f^1(\cdot,\lambda) ;\xi\rangle = \mu(\{x ; f^1(x,\lambda) > \xi\})$, $\langle f_1(\cdot,\lambda);\xi\rangle = \mu(\{x ; f_1(x,\lambda) > \xi\})$ sus respectivas funciones de distribución. Usando (2a) , (3) y (7b) tendremos:

$$\int_X |f(x)|^r dx = r \int_0^\infty \lambda^r D(f;\lambda) \frac{d\lambda}{\lambda} = r\, 2^r \int_0^\infty \lambda^r \langle f;2\lambda\rangle \frac{d\lambda}{\lambda} \leq$$

$$r2^r \int_0^\infty \lambda^r \langle f^1(\cdot,\lambda);\lambda\rangle \frac{d\lambda}{\lambda} + r2^r \int_0^\infty \lambda^r \langle f_1(\cdot,\lambda);\lambda\rangle \frac{d\lambda}{\lambda} =$$

$$= r2^r \int_0^\infty \lambda^{r-p} | \lambda^p \langle f^1(\cdot,\lambda);\lambda\rangle | \frac{d\lambda}{\lambda} + r2^r \int_0^\infty \lambda^{r-q} | \lambda^q \langle f_1(\cdot,\lambda);\lambda\rangle | \frac{d\lambda}{\lambda}$$

$$\leq r2^r \int_0^\infty \left| \lambda^{\frac{r-p}{p}} \|f^1(\cdot,\lambda)\|_{m^p} \right|^p \frac{d\lambda}{\lambda} + r2^r \int_0^\infty \left| \lambda^{\frac{r-q}{q}} \|f_1(\cdot,\lambda)\|_{m^q} \right|^q \frac{d\lambda}{\lambda} ,$$

de donde resulta

$$(\|f\|_{L_r})^r \leq r2^r (\| \lambda^{\frac{r-p}{p}} f^1(x,\lambda)\|_{L^p_+(M^p)})^p + 2^r r (\| \lambda^{\frac{r-q}{q}} f_1(x,\lambda)\|_{L^q_+(M^q)})^q .$$

Si en el primer paso de esta deducción hubieramos hecho un cambio de variables $\lambda_1 = A\lambda$, obtendríamos de igual modo:

$$\|f\|_{L_r} \leq 2r^{\frac{1}{r}} \left\{ A^{\frac{r-p}{p}} (\| \lambda^{\frac{r-p}{p}} f^1(x,\lambda)\|_{L^p_+(M^p)})^{\frac{p}{r}} + A^{\frac{r-q}{q}} (\| \lambda^{\frac{r-q}{q}} f_1\|_{L^q_+(M^q)})^{\frac{q}{r}} \right. .$$

Eligiendo A para que ambos sumandos del miembro derecho sean iguales, se obtiene

$$||f||_r \leq C_r \max\left\{||\lambda^{\frac{r-p}{p}} f^1(x,\lambda)||_{L^p_+(M^p)} ; ||\lambda^{\frac{r-q}{q}} f_1||_{L^q_+(M^q)}\right\} \quad (7d)$$

Evidentemente (7d) vale con más razón si

$$|f(x)| \leq |f^1(x,\lambda)| + |f_1(x,\lambda)| \quad .$$

Hemos probado pues la siguiente propiedad:

1.B.1. Dada $f \in L^r$, considerando los posibles pares de familias $f^1(x,\lambda)$, $f_1(x,\lambda)$ que verifican (7b), se tiene

$$||f||_r \leq C_r \inf_{f^1(x,\lambda)+f_1(x,\lambda)=f(x)} \left\{||\lambda^{\frac{r-p}{p}} f^1||_{L^p_+(M^p)} + ||\lambda^{\frac{r-q}{q}} f_1||_{L^q_+(M^q)}\right\}$$

(7e)

con $C^r_r = 2^r r$.

Como $|| \ ||_{M^p} \leq C|| \ ||_p = C|| \ ||_{L^p}$, se tiene en particular que

$$||f||_r \leq C_r \inf_{f^1(x,\lambda)+f_1(x,\lambda)=f} \left\{||\lambda^{\frac{r-p}{p}} f^1||_{L^p_+(L^p)} + ||\lambda^{\frac{r-q}{q}} f_1||_{L^q_+(L^q)}\right\} . (7f)$$

Tomemos ahora $f^1(x,\lambda)=f^\lambda$, $f_1(x,\lambda)=f_\lambda$ (ver (7)), entonces tendremos que

$$||\lambda^{\frac{r-p}{p}} f^1||_{L^p_+(L^p)} = ||\lambda^{\frac{r-p}{p}} \left(\int_X |f^\lambda(x)|^p dx\right)^{1/p}||_{L^p_+} =$$

$$= \left(\int_A^\infty \lambda^{r-p} \int_X |f^\lambda(x)|^p dx \frac{d\lambda}{\lambda}\right)^{1/p} =$$

$$= \left(\int_X dx \int_0^\infty |f^\lambda(x)|^p \lambda^{r-p-1} d\lambda\right)^{1/p} = \left(\int_X |f(x)|^p \int_0^{|f(x)|} \lambda^{r-p-1} d\lambda\right)^{1/p} =$$

$$= C_{r_p} \left(\int |f(x)|^r dx \right)^{1/p} \quad , \quad C_{r,p} = (r-p)^{-1}$$

Si $\|f\|_r = 1$, obetenemos $\|f\|_r = C_{r_p} \| \lambda^{\frac{r-p}{p}} f^{\lambda} \|_{L^p_+(L^p)}$ y análogamente $\|f\|_r = C_{r_p} \| \lambda^{(r-q)/q} f_{\lambda}(x,y) \|_{L^q_+(L^q)}$.

O sea hemos probado la desigualdad opuesta a la (7f) (si $\|f\|_r = 1$, y por la homogeneidad de la norma para todo valor de $\|f\|$).

Así pues hemos probado que:

1.B.2. <u>Para toda $f \in L^r$, considerando los posibles pares $f^1(x,\lambda)$, $f_1(x,\lambda)$ que verifican (7b) , y llamando</u>

$$\|f\|'_r = \inf_{f^1+f_1=f} \left\{ \| \lambda^{\frac{r-p}{p}} f^1 \|_{L^p_+(L^p)} + \| \lambda^{\frac{r-q}{q}} f_1 \|_{L^q_+(L^p)} \right\}, \tag{7e}$$

<u>se tiene que las normas $\|f\|'_r$ y $\|f\|_r$ son equivalentes</u>:

$$\begin{gathered} \|f\|_r \leq 2\, r^{1/r} \|f\|'_r \leq C_{r,p,q} \|f\|_r \\ C_{r,p,q} \leq \max \left\{ \frac{1}{r-p} , \frac{1}{q-r} \right\} \end{gathered} \tag{7f}$$

Esta proposición nos dice que conociendo las normas de L^p y L^q , se puede hallar la norma de L^r , si $p<r<q$, es decir la norma de todo L^r "intermedio" , pero "salvo equivalencia" . De (7f) sigue $C_{r,p,q} \longrightarrow \infty$ cuando p ó q se acerca a r , es decir el "factor o constante de equivalencia" empeora. Sin embargo usando un artificio indicado por Cotlar en [5] , pag .

198, y que también usaremos más adelante en el § 3 , se puede ver que (7f) vale todavía con una constante $C_{r,p,q} \leq C$ = constante fija (≤ 3) . Podemos pues decir que el procedimiento de 1.B.2 permite determinar el espacio L^r a partir de los espacios L^p y L^q , salvo un factor fijo para la norma .

La proposición 1.B.2 tiene el siguiente complemento:

1.B.3. Dadas dos ternas $p<r<q$, $s<u<v$ tales que

$$\frac{1}{r} = \frac{1-\theta}{p} + \frac{\theta}{q} \quad , \quad \frac{1}{u} = \frac{1-\theta}{s} + \frac{\theta}{v} \tag{8}$$

$$0 < \theta < 1 \quad , \quad s \geq p \quad , \quad v \geq q \quad , \tag{8a}$$

entonces se tiene la desigualdad (donde $C(u,v,r) > 0$)):

$$\|f\|_r \geq C(u,v,r) \inf_{f^1+f_1=f} \left\{ \| \lambda^{\frac{u-s}{s}} f^1(x,\lambda)\|_{L_+^s(L^p)} + \| \lambda^{\frac{u-v}{v}} f_1\|_{L_+^v(L^q)} \right\} \tag{8b}$$

Demostración.

Pongamos $f^1(x,\lambda) = f^{\lambda^\alpha}(x)$, $f_1(x,\lambda) = f_{\lambda^\alpha}(x)$,

Por la homogeneidad podemos suponer que $||f||_r = 1$. Tenemos entonces que

$$|| \lambda^{\frac{u-s}{s}} f^1 ||_{L_+^s(L^p)} = \left[\int_0^\infty \lambda^{u-s-1} \left(\int |f^{\lambda^\alpha}(x)|^p dx \right)^{\frac{s}{p}} d\lambda \right]^{1/s}$$

$$|| \lambda^{\frac{u-v}{v}} f_1 ||_{L_+^v(L^q)} = \left[\int_0^\infty \lambda^{u-q-1} \left(\int |f_{\lambda^\alpha}(x)|^q dx \right)^{\frac{v}{q}} d\lambda \right]^{1/v}$$

Como por (8a) es $\frac{s}{p} \geq 1$, $\frac{v}{q} \geq 1$, podemos aplicar a las integrales precedentes la desigualdad integral de Minkowski, y tendremos por ejemplo que

$$\| \lambda^{\frac{u-s}{s}} f^1 \|_{L^s_+(L^p)} = \left(\| \int |f^{\lambda^\alpha}(x)|^p dx \|_{L^{s/p}(\lambda^{u-s-1} d\lambda)} \right)^{1/p} \leq$$

$$\leq \left[\int_X \left(\int_0^\infty |f^{\lambda^\alpha}(x)|^s \lambda^{u-s-1} d\lambda \right)^{p/s} dx \right]^{1/p} =$$

$$= \left[\int_X |f(x)|^p \left(\int_0^{|f(x)|^{1/\alpha}} \lambda^{u-s-1} d\lambda \right)^{p/s} d\lambda \right]^{1/p} =$$

$$= \left(\frac{1}{u-s}\right)^{1/s} \left[\int |f(x)|^{p+\frac{u-s}{\alpha}\frac{p}{s}} dx \right]^{1/p} . \tag{8c}$$

Analógamente

$$\| \lambda^{\frac{u-v}{v}} f_1 \|_{L^v_+(L^q)} \leq \left(\frac{1}{v-u}\right)^{\frac{1}{v}} \left[\int |f(x)|^{q+\frac{u-v}{\alpha}\frac{q}{v}} dx \right]^{1/q} \tag{8d}$$

De la condición (8) se deduce que

$$\frac{v-s}{q-p}\,\frac{p}{s}\,\frac{q}{t} = \frac{u-s}{r-p}\,\frac{p}{s}\,\frac{r}{u} = \frac{v-u}{q-r}\,\frac{q}{v}\,\frac{r}{u} = \gamma$$

y poniendo $\alpha = \gamma(r/u)$ se tiene que

$$r = p + \frac{u-s}{\alpha}\,\frac{p}{s} = q + \frac{u-v}{\alpha}\,\frac{q}{v} \tag{8e}$$

Luego de (8c) y (8d) resulta que

$$||\lambda^{\frac{u-s}{s}} f^1||_{L^s_+(L^p)} \leq C(||f||_r)^{\frac{r}{p}} \quad , \quad ||\lambda^{\frac{u-v}{v}} f_1||_{L^v_+(L^q)} \leq C(||f||_r)^{\frac{r}{q}}$$

las que, si $||f||_r = 1 = (||f||_r)^{r/p}$ dan

$$||f||_r \geq C_{u,v,r}\left\{||\lambda^{\frac{u-s}{s}} f^1||_{L^s_+(L^p)} + ||\lambda^{\frac{u-v}{v}} f_1||_{L^v_+(L^q)}\right\} \quad , \quad \text{c.d.d.}$$

NOTA:

Las proposiciones 1.B.1 , 1.B.2 y 1.B.3 se encuentran demos - tradas implícitamente, y con los mismos razonamientos, en la demostración de Zygmund del teorema de Marcinkiewicz (ver el Cap. XII del libro de Zygmund). Es decir, no hemos hecho más que disecar la demostración de Zygmund con notaciones diferentes, usando normas $L^s_+(L^p)$. Veremos en seguida que de 1.B.1 , 1.B.2 y 1.B.3 se obtendrá inmediatamente la demostración del teorema de Marcinkiewicz.

Vamos a caracterizar ahora en forma análoga la norma débil $||f||_{M^r}$ mediante las normas de L^p y L^q , supuesto $p<r<q$. Para simplificar la escritura vamos a hacerlo para el caso $L^p = L^1$, $L^q = L^\infty$, $1<r<\infty$. Vamos a probar en efecto que:

1.B.4. Sea $f(x)$ fija, consideremos los posibles pares $f^1(x,\lambda)$, $f_1(x,\lambda)$ que verifican (7b) y pongamos

$$||f||^{\#}_{M^r} = \inf_{f^1+f_1=f}\left\{||\lambda^{\frac{r-1}{r}} f^1(x,\lambda)||_{L^\infty_+(L^1)} + ||\lambda^{-\frac{1}{r}} f_1(x,\lambda)||_{L^\infty_+(L^\infty)}\right\} \quad (9)$$

Entonces las normas $\|f\|^{\#}_{M^r}$ y $\|f\|_{M^r}$ son equivalentes, o sea (9) expresa la norma débil $\|f\|_{M^r}$ mediante las normas de L^1 y L^∞. Resultado análogo vale si reemplazamos L^1 y L^∞ por L^p, L^q cualquiera, con p r q.

Demostración:

1) Si $\alpha = \|f\|_{M^r}$ y si $E = \{x \,;\, |f(x)| > \alpha\lambda^{1/r}\}$, entonces por definición de $\|f\|_{M^r} \sim \{f\}_r$ se tiene que $(\alpha\lambda^{1/r})^r \mu(E) \leq (\|f\|_{M^r})^r = \alpha^r$, y por tanto $\mu(E) \leq \lambda^{-1}$.
Pongamos ahora $f^1(x,\lambda) = f^{\alpha\lambda^{1/r}} = f\varphi_E$, $f_1(x,\lambda) = f_{\alpha\lambda^{1/r}}$.
Entonces, como $\mu(E) \leq \lambda^{-1}$, de (6e) tendremos que

$$\|f^1(x,\lambda)\|_{L^1} = \int |f^1(x,\lambda)|\,dx = \int_E |f(x)|\,dx \leq \|f\|_{M^r}\,\mu(E)^{1-\frac{1}{r}} \leq \|f\|_{M^r}\,\lambda^{-\frac{r-1}{r}},$$

de modo que $\|\lambda^{\frac{r-1}{r}} f^1(x,\lambda)\|_{L^1} \leq \|f\|_{M^r}$ para todo λ, o sea

$$\|\lambda^{\frac{r-1}{r}} f^1\|_{L^\infty_+(L^1)} \leq \|f\|_{M^r} \qquad (9a)$$

Como $|f_1| \leq \alpha\lambda^{1/r}$, tendremos para todo x y todo λ,
$\lambda^{-1/r}|f_1(x,\lambda)| \leq \alpha = \|f\|_{M^r}$, o sea

$$\|\lambda^{-1/r} f_1\|_{L^\infty_+(L^\infty)} \leq \|f\|_{M^r} \qquad (9b)$$

De (9a) y (9b) obtenemos

$$\|f\|_{M^r} \geq \frac{1}{2}\,\|f\|^{\#}_{M^r} \qquad (9c)$$

2) Probaremos ahora la desigualdad contraria. Sean dadas $f^1(x,\lambda)$, $f_1(x,\lambda)$ con $f = f^1+f_1$. Para todo conjunto E y para todo $\lambda > 0$ tendremos

$$\int_E |f(x)|\,d\mu \leq \int_E |f^1(x,\lambda)|\,dx + \int_E |f_1(x,\lambda)|\,dx =$$

$$= \lambda^{\frac{1-r}{r}} \int_E \lambda^{\frac{r-1}{r}} |f^1(x,\lambda)|\,dx + \lambda^{\frac{1}{r}} \int_E \lambda^{-\frac{1}{r}} |f_1(x,\lambda)|\,dx \leq$$

$$\leq \lambda^{\frac{1-r}{r}} \| \lambda^{\frac{r-1}{r}} f^1(x,\lambda) \|_{L_+^\infty(L^1)} + \lambda^{\frac{1}{r}} \mu(E) \| \lambda^{-\frac{1}{r}} f_1 \|_{L_+^\infty(L^\infty)} .$$

Como λ es arbitrario, eligiéndolo para hacer iguales los dos últimos sumandos se obtiene que

$$\int_E |f(x)|\,d\mu \leq C \left\{ \| \lambda^{\frac{r-1}{r}} f^1 \|_{L_+^\infty(L^1)} + \| \lambda^{-\frac{1}{r}} f_1 \|_{L_+^\infty(L^\infty)} \right\} \mu(E)^{1-\frac{1}{r}} .$$

Como esto vale para todo f^1, f_1 , pasando al inf , tendremos por la definición (9) , que

$$\int_E |f(x)|\,d\mu \leq C \, \|f\|^{\#}_{M^r} \, \mu(E)^{1-\frac{1}{r}} ,$$

para todo E . Por (6d) o (6e) esto da $\|f\|_{M^r} \leq C \, \|f\|^{\#}_{M^r}$, que junto con (9c) prueba la equivalencia de $\|f\|_{M^r}$ y $\|f\|^{\#}_{M^r}$, c.d.d.

1.C. Consideremos un espacio X con medida μ y otro Y con medida ν . Consideraremos operadores T que hacen corresponder a toda función $f(x)$, de cierta clase de funciones definidas en X, una función $h(y) = Tf = [Tf](y)$ definida en Y (todas las funciones se suponen medibles). T se dice <u>sublineal</u> si $|T(f_1+f_2)| \leq |Tf_1|+|Tf_2|$ y $|T(cf)| = |c|\ |Tf|$ p.p.

Si $r,u \geq 1$, se dice que T es de <u>tipo</u> (r,u) si T está definido en $L^r(X)$ y para toda $f \in L^p(X)$ se verifica

$$||Tf||_{L^u(Y,\nu)} \leq K\ ||f||_{L^r(X,\mu)} \tag{10}$$

donde K es independiente de f. El mínimo valor de K es la norma de T que se indicará con $||T||_{r,u}$. Como $\mathcal{E}_r$ es denso en $L^r(X)$ basta considerar que T está definido en $\mathcal{E}_r$ y verifica (10) para toda $f \in \mathcal{E}_r$; entonces se le podrá extender a todo $L^r(X)$ de modo que (10) valga en $L^r(X)$. Asi pues en adelante trabajaremos con operadores T en $\mathcal{E}$. Se dice que T es de <u>tipo débil</u> (r,u) si para toda $f \in \mathcal{E}$ se verifica

$$||Tf||_{M^u} = ||h(y)||_{M^u} \leq K\ ||f||_{L^r} \tag{10a}$$

La mínima constante K que verifica (10a) se llamará norma débil de T y se designará con $\{T\}_{r,u}$. Evidentemente tipo (r,u) implica tipo débil (r,u) y

$$\{T\}_{r,u} \leq ||T||_{r,u} \tag{10b}$$

Si T es de tipo (r,u) se dice también que es de tipo $(\frac{1}{r},\frac{1}{u}) =$ = tipo P, donde $P = (1/r\ ,\ 1/u)$ es un punto del cuadrado unitario, llamado cuadrado de los tipos, si $1 \leq r, u \leq \infty$.

Sean p,r,q y s,u,v dos ternas que verifican, para cierto $0 < \theta < 1$,

$$\frac{1}{r} = \frac{1-\theta}{p} + \frac{\theta}{q} \quad , \quad \frac{1}{u} = \frac{1-\theta}{s} + \frac{\theta}{v} \tag{8 bis}$$

es decir que el punto $(1/r , 1/u)$ es interior al segmento que une los puntos $(1/p , 1/s)$ y $(1/q , 1/v)$, dividiendo este segmento en partes proporcionales a θ y $1-\theta$. Se tiene entonces el siguiente teorema:

1.C.1. Teorema de convexidad de M. Riesz

Si T (considerado en $\mathcal{E}$) es de tipo (p,s) y de tipo (q,v), entonces T es de tipo (r,u) y vale la desigualdad de convexidad:

$$||T||_{r,u} \leq (||T||_{p,s})^{1-\theta} (||T||_{q,v})^{\theta} \tag{10c}$$

Este teorema fué probado por Riesz para operadores lineales que actúan sobre funciones reales bajo la condición adicional

$$p \leq s \quad , \quad q \leq v \qquad \text{(cfr. 8a)}$$

Thorin probó que si T actúa sobre funciones complejas entonces el teorema vale sin las últimas restricciones, pero la demostración usa entonces la teoría de variables complejas. Más aún, Thorin mostró que (10c) no puede ser cierto en el "triángulo superior" ($p > s$ ó $q > v$) si T actúa sobre funciones reales únicamente. Calderón y Zygmund extendieron el teorema a operadores sublineales.

Una forma un poco más débil del teorema de Riesz, pero que traduce lo esencial de su contenido, es la que en vez de (10c) afirma tan solo que

$$||T||_{r,u} \leq C.(||T||_{p,s})^{1-\theta}(||T||_{q,v})^{\theta} \tag{10d}$$

donde C es una constante fija independiente de T y de los núme - ros p,r,q,s,t .

Vamos a llamar <u>teorema de interpolacion</u> de Riez al que afirma tan solo (10d), y teorema de convexidad de Riesz al que afirma (10c) es decir que $C = 1$.

En el § 3 se dará la demostración de un teorema de interpolación general que contiene al de Riesz como caso particular, para el triángulo inferior $p \leq s$, $q \leq v$. En lo que se sigue se sigue se dará una rápida idea también de la demostración del teorema de Riesz-Thorin para el cuadrado entero (que se basa en método de variable compleja).

El teorema de Riesz fué complementado y esencialmente generalizado por Marcinkiewicz como sigue:

<u>1.6.2. Teorema de convexidad de Marcinkiewicz-Zygmund.</u>

<u>Si el operador sublineal T (definido en $\mathcal{E}$) es de tipo débil (p,s) y de tipo débil (q,v) , entonces T es de tipo fuerte (r,u) y vale la desigualdad</u>

$$\|T\|_{r,u} \leq C\left\{\frac{(\frac{p}{r})^{s/p}}{u-s}+\frac{(\frac{q}{r})^{v/q}}{v-u}\right\}\ (\{T\}_{p,s})^{1-\theta}(\{T\}_{q,v})^{\theta} \quad , \tag{10e}$$

<u>siempre que u-x >0 , v-u >0 y si se verifica</u>

$$p \leq s \quad , \quad q \leq v \tag{8a}$$

Observemos que 1.C.2. generaliza la parte esencial del teorema de Riesz pues la hipótesis solo pide tipo débil. La generalización no es completa en cuanto en la desigualdad (10e) hay un factor que tiende al ∞ si r se acerca a p ó a q , mientras que en el teorema de Riesz este factor es fijo y mismo igual a 1 . El teorema no es cierto si $u=s$ ó $u=v$.

Cotlar probó que 1.C.2. vale en todo el cuadrado de los tipos, sin las limitaciones $p\leq s$, $q\leq v$, pero su demostración no fué publicada (salvo indicaciones en la biografía de Marcinkiewicz por Zygmund y en [ ]). En el § usaremos la idea básica de esta demostración para una situación más general. El mismo hecho fué probado en forma mucho más general por Calderón, como corolario de su potente teoría de interpolación; en base a las ideas de Calderón, O'Neil dió otra demostración directa para el triángulo superior y operadores lineales. Así pues, aunque las demostraciones no están aún publicadas, supondremos que 1.C.2. <u>ya fué probado para todo el cuadrado</u>, es decir sin las limitaciones $p\leq s$, $q\leq v$ (pero siempre con $u-v\neq 0$).

A continuación vamos a dar una demostración de 1.C.2. (bajo las hipótesis $p\leq s$, $q\leq v$) mostrando que es una consecuencia inmediata de la expresión para las normas $||h||_u$ y $||h||_{M^u}$ que se dieron en 1.B.1. , 1.B.2. y 1.B.3. De esta demostración surgirá en seguida la idea básica de la teoría general de interpolación de Lions-Peetree, de sus llamados "espaces de moyennes".

<u>Demostración de 1.C.2.</u>:

Sea $h = Tf$, $f\in\mathcal{E}$. Por (8b) , para cada $\lambda>0$, existen las funciones $f^1(x;\lambda)$, $f_1(x,\lambda)$ tales que $f = f^1+f_1$ y tales que para ellas vale la desigualdad (8b) (sin el inf). Por la sublinealidad de T, de $f = f^1+f_1$ sigue $|Tf|\leq|Tf^1|+|Tf_1|$. Pongamos $h^1 = h^1(x,\lambda) = Tf^1$, $h_1 = h_1(x,\lambda) = Tf_1$. Entonces $|h(x)|\leq|h^1(x,\lambda)|+|h_1(x,\lambda)|$ para todo λ . Aplicando (7d) con h en vez de f, u en vez de r, s en vez de p y v en vez de q , tendremos (ver la observación que sigue a (7d) que

$$||h||_u \leq c_u\left\{||\lambda^{\frac{u-s}{s}}h^1||_{L^s_+(M^s)}+||\lambda^{\frac{u-v}{v}}h_1||_{L^v_+(M^v)}\right. .$$

Como por hipótesis, para todo $\lambda>0$, $h^1 = Tf^1$ verifica $||h^1||_{M^s}\leq\{T\}_{ps}||f^1||_p$, y como $||h_1||_{M^v}\leq\{T\}_{qv}||f_1||_q$, de la desigualdad precedente sigue que

$$||h||_u \leq c_u\ \ T_{ps}||\lambda^{\frac{u-s}{s}}f^1||_{L^s_+(L^p)}+c_u\{T\}_{qv}||\lambda^{\frac{u-v}{v}}f_1||_{L^v_+(L^q)} .$$

De la última desigualdad y de (8b), que por la elección de f' , f , vale para estas funciones, resulta

$$||h||_u \leq C_{u,v,r}\left[\{T\}_{p,s} + \{T\}_{qv}\right] ||f||_r \quad .$$

Es decir $||Tf||_u \leq C.||f||_r$ con $C \leq C_{uvr}\left[\{T\}_{p,s} + \{T\}_{qv}\right]$. Esto ya es la parte esencial de la tesis, salvo que en vez de $\{T\}_{p,s}^{1-\theta}\{T\}_{q,v}^{\theta}$ tenemos $\{T\}_{p,s} + \{T\}_{qv}$. Pero con el artificio ya usado, de sustituir λ por $A\lambda$, obtendremos análogamente la misma desigualdad con la constante $A^{r-s}\{T\}_{p,s} + A^{r-v}\{T\}_{q,v}$ y para una conveniente elección de A esta constante se reduce a $\{T\}_{p,s}^{1-\theta}\{T\}_{q,v}^{\theta}$, teniendo en cuenta el valor de θ en (8bis) , c.d.d.

La demostración que acabamos de dar en 1.C.2. solo se basa en la caracterización de la norma L^r en base de las normas L^p y L^q , y en la relación (8b) entre las normas L^r y las M^p , M^q . Esta última relación puede (8b) ser deducida facilmente de la caracterización 1.B.4 de las normas M^r , como veremos más adelante. Las consideraciones que preceden pueden pues resumirse así: Partimos de los dos espacios fijos $A_0 = L^1(X,\mu)$ y $A_1 = L^{\infty}(X,\mu)$,y suponemos por supuesto conocidos los espacios L_+^p de la variable real $d\lambda/\lambda$. A partir de estos dos espacios A_0 y A_1 , y mediante las normas L_+^p , la proposición 1.B.2. nos permitirá definir todos los restantes espacios $L^r(X,\mu) = A_r$, por decir así, los L^r intermediarios entre A_0 y A_1 . La proposición 1.B.4. nos permite definir análogamente los espacios intermediarios débiles $^r(X,\mu)$. De estas definiciones 1.B.2. y 1.B.4 se puede deducir la relación 1.B.1 entre la norma L^r y las

M^p, M^q. El teorema de interpolación de Marcinkiewicz, y también el de Riesz, para el triángulo inferior, son consecuencias inmediatas de estas caracterizaciones de L^r y M^r mediante $L^1 = A_0$ y $L^\infty = A_1$. Podemos olvidarnos ahora que A_0 es el espacio L^1 y A_1 el L^∞, y más generalmente tomar dos espacios de Banach cualesquiera A_0 y A_1, para cada $\lambda > 0$, dos elementos $f^1(x,\lambda) \in A_0$, $f_1(x,\lambda) \in A_1$ tales que f^1+f_1 sea constante $= f$, para todo λ. Luego aplicando las normas $L^p_+(A_0)$ y $L^q_+(A_1)$ a $f^1(x,\lambda)\,\lambda^{(r-p)/p}$ y $f_1(x,\lambda)\,\lambda^{(q-r)/q}$ podemos por la fórmula (7e) definir una nueva norma $||f||_{A_r}$ que dará origen a un nuevo espacio A_r. Se obtendrá así una escala de espacios A_r entre A_0 y A_1. Para poner en evidencia que A_r se obtuvo mediante (7e), o sea usando L^p_+ con el factor $\lambda^{(r-p)/p}$ y L^q_+ con el factor $\lambda^{(r-q)/q}$, se usa siguiendo a Lions-Peetre la notación $A_r = S(p, \frac{r-p}{p}, A_0 ; q, \frac{r-q}{q}, A_1)$. Llamando $\frac{r-p}{p} = \alpha_0$, $\frac{r-q}{q} = \alpha_1$ escribiremos $A_r = S(p, \alpha_0, A_0 ; q, \alpha_1, A_1)$. De este modo para toda cuaterna $p, \alpha_0 : q, \alpha_1$, tenemos un espacio entre A_0 y A_1. Así 1.B.4. nos dice que si $A_0 = L^1$, $A_1 = L^\infty$ entonces $M^r = S(\infty, \frac{r-1}{r}, A_0 ; \infty, -\frac{1}{r}, A_1)$. La proposición 1.B.. nos da una relación entre dos espacios $S(p,\alpha_0,A_0 ; q,\alpha_1,A_1)$ y $S(s,\beta_0,A_0 ; v,\beta_1,A_1)$ cuando los p,q y s,v están ligados por relaciones del tipo (8) y (8a).

Está pues claro que todo lo dicho precedentemente puede formularse en forma general y se obtiene así la teoría de interpolación de Lions-Peetre que detallaremos más abajo. Pero antes de pasar a la teoría general, recordemos rápidamente algunas aplicaciones clásicas de los teoremas 1.C.1. y 1.C.2.

1.D. Muchos operadores del análisis clásico suelen presentar tipo en todo un segmento del cuadrado de los tipos, salvo eventualmente en los extremos donde suelen tener tipo débil. Los teoremas de Riesz y Marcinkiewicz resultan por tanto métodos unificadores de la demostración de estas propiedades, pues ellos reducen la demostración tan solo a dos puntos del segmento.

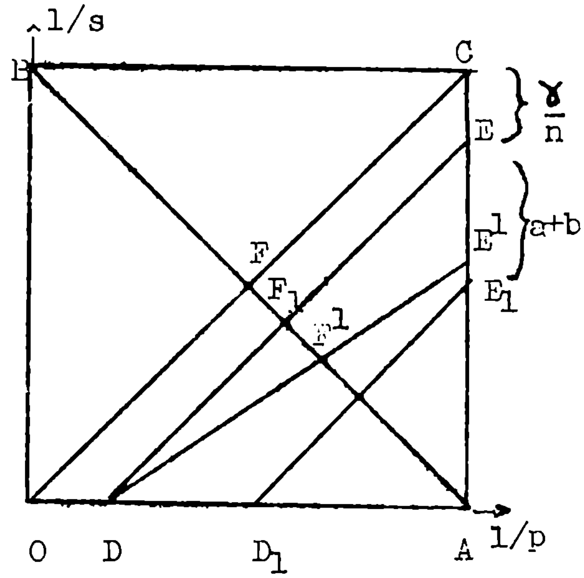
Recordemos rápidamente algunos de estos ejemplos clásicos.

a) Operador de convolución. Sea $k(x) \in L^r(E^n)$, $1 \leq r \leq \infty$, una función fija y definamos el operador $\left[Tf\right](x) = f\#k =$ (') $= \int_{E^n} f(x-t)\, k(t)\, dt = \int_{E^n} k(x-t)\, f(t)\, dt$. El teorema de Young dice que este operador de tipo (p,s) para todo par p,s que verifique

$$\frac{1}{p} - \frac{1}{s} = \gamma = 1 - \frac{1}{r},$$

$$\left(1 - \frac{1}{r} \leq \frac{1}{p} \leq 1\right), \quad y$$

$$\|T\|_{p,s} \leq \|k\|_r .$$



O sea es de tipo en todos los puntos del segmento DE paralelo a la diagonal OC, a distan-

(') por razones tipográficas, el operador de convolución lo escribiremos #, y no con una estrella, como se acostumbra.

cia $CE = \gamma$, inclusive los extremos. La verificación del tipo de este operador en los extremos D y E (es decir que T es de tipo $(r^{\#},\infty)$ y de tipo $(1,r)$) no presenta dificultades y es consecuencia fácil de la desigualdad de Hölder. El teorema de Riesz da entonces el resto de la demostración del teorema de Young.

b) Operador de Fourier. Sea $[Tf](x) = \hat{f}(x)$ la transformación de Fourier. Es inmediato que $|\hat{f}(x)| \leq ||f||_1$ para todo x , o sea T es de tipo $(1,\infty)$, o también presenta tipo en el punto A. El teorema de Plancherel dice que $||Tf||_2 \leq ||f||_2$, o sea T es de tipo (2,2) o en el punto F. El teorema de Riesz permite deducir entonces que $Tf = \hat{f}$ es de tipo en todos los puntos del segmento FA, es decir que es de tipo (p,s) para todo par p,s que verifica $1/p + 1/s = 1$, $1 \leq p \leq 2$, y $||T||_{p,s} \leq 1$. Hardy-Littlewood y Paley probaron que para $\hat{f}$ presenta también el siguiente tipo, con medidas ponderadas:

$$\left(\int_{E^n} |\hat{f}(x)|^p |x|^{n(p-2)} dx\right)^{1/p} \leq Ap \; ||f||_p$$

$$\left(\int_0^\infty |(\hat{f})^{\#}(\xi)|^p \xi^{p-2} d\xi\right)^{1/p} \leq Ap \; ||f||_p \quad (\text{si } 1 < p \leq 2) \tag{11}$$

y nuevamente el teorema de Marcinkiewicz permite establecer fácilmente estos teoremas.

c) Transformadas de Hilbert. La transformada ordinaria (ó 1-dimensional) de Hilbert, se define como $[Hf](x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x-t)}{t} dt = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|t|>\varepsilon} \frac{f(x-t)}{t} dt = f \# \frac{1}{t}$. Aquí Hf es una convolución con el núcleo singular $k(t) = \frac{1}{t}$, y k(t) tiene la propiedad homogénea $k(at) = a^{-1}k(t)$ si $a>0$, además $k(1) + k(-1) = 0$.

En caso de E^n , se toma un núcleo $k(x)$, $x \in E^n$, tal que $k(ax) = a^{-n}k(x)$ si $a>0$ y tal que $\int_{1<|x|<2} k(x)dx = 0$. El operador $Hf = f\#k$ se llama entonces operador de Hilbert n-dimensional. Estos operadores de Hilbert resultan ser de tipo (p,p) para todo $1<p<\infty$ y de tipo débil $(1,1)$ para $p = 1$; es decir son de tipo en todo el segmento abierto OC , y en la punta C presentan tipo débil. La demostración de este difícil teorema se hace en dos etapas, probando antes que T es de tipo $(2,2)$, o en el punto F (esto es más fácil por ser L^2 espacio de Hilbert), luego que T es de tipo débil $(1,1)$ en C. La aplicación del teorema de Marcinkiewicz permite entonces deducir que T es de tipo en todo el intervalo abierto FC, y el resto ya es consecuencia fácil de la "simetría" del operador convolución. En este caso la aplicación del teorema de Riesz no sería posible pues en C no hay tipo fuerte sino tan solo tipo débil.

d) <u>Operadores potenciales</u>. Si $f(x)$ está definnda en $x \in E^n$ y si $0<j<n$ se define el operador potencial, o integral fraccionaria por la fórmula $\left[H_\gamma f \right](x) = f\#|x|^{\gamma-n} = \int_{E^n} \frac{f(t)}{|x-t|^{n-\gamma}} dt$.
Este operador resulta ser de tipo (p,s) para todo par p,s tal que $1/p - 1/s = \gamma/n$, $\gamma/n < 1/p < 1$, o sea en todo el segmento abierto DE con $CE = \gamma/n$. En la punta E el operador no es de tipo sino de tipo débil es decir de tipo débil $(1,(1-\frac{\gamma}{n})^{-1})$.
Si en esta definición de $\left[H_\gamma f \right](x)$ se hace variar x no en todo E^n sino en un subespacio $E^m \subset E^n$, y se considera la norma de $T_\gamma f$

respecto de la medida m-dimensional, entonces $H_\gamma f$ resulta ser de tipo (p,s) si $1/p - (m/n)1/s = \gamma/n$, $\gamma/n < 1/p < 1$, o sea en el segmento abierto DE' que resulta girando DE en una pendiente m/n ; nuevamente en la punta E' el operador presenta tipo débil pero no tipo. También la demostración de estos teoremas (debidos a Hardy-Littlewood y Sobolev) se hace probando primero el tipo en el punto F_1 (ó F') , luego el tipo débil en la punta E (ó E'). La aplicación del teorema de Marcinkiewicz permite completar entonces la demostración para el resto del segmento.

Observemos todavía que Hardy-Littlewood (para n= 1) y Stein Weiss (para $n > 1$) probaron que $H_\gamma f$ presenta también tipo con medidas ponderadas; más exactamente vale que

$$\left\{ \int_{E^n} |T\, f(x)|^s |x|^{-nbs} dx \right\}^{1/s} \leq M \left\{ \int_{E^n} |f(t)|^p |t|^{nap} dt \right\}^{1/p}$$

si

$$\frac{1}{p} - \frac{1}{s} = \frac{\gamma}{n} - (a+b) \ , \ 1 < p \leq s \ , \quad a < 1 - \frac{1}{p} \ , \ b < \frac{1}{s} \ ,$$
$$0 \leq a+b < \frac{\gamma}{n} \qquad (11a)$$

O sea, respecto medidas ponderadas H_γ presenta tipo en el segmento abierto D_1E_1 paralelo a DE a distancia $a+b$. Según se probó en [6] en la punta E_1 hay todavía tipo débil, pero no fuerte, y resultados análogos valen si x varía en E^m con $m < n$.

Se entiende que estos resultados valen con más razón para el operador $H^{\#}_{\gamma} f$ definido, por ejemplo en caso $n = 1$, por

$$H^{\#} f(x) = \int_0^x \frac{f(x+t)}{|t|^{1-\gamma}}\, dt \tag{11b}$$

c) Operador maximal de Hardy-Littlewood. Este se define, por ejemplo en E^1 , como

$$(Mf)(x) = \sup_{\varepsilon>0} \frac{1}{\varepsilon} \int_{|t|<\varepsilon} |f(x+t)|\, dt \tag{11c}$$

Este operador resulta ser de tipo (p,p) para todo $1 < p \leq \infty$, es decir en toda la diagonal OC salvo el punto C. En el punto C el operador es de tipo débil, es decir tipo débil (1,1) , pero no tipo fuerte. Nuevamente, la aplicación del teorema de Marcinkiewicz permite establecer en seguida este teorema, una vez que se haya probado el tipo débil (1,1), pues el tipo (∞,∞) es inmediato aquí.

Un teorema análogo vale para los llamados operadores maximales de los teoremas ergódicos.

Una consecuencia simple de este teorema de tipo del operador (11c), es que el operador

$$M_1 f(x) = \frac{1}{x} \int_0^x |f(t)|\, dt \quad (\leq Mf(x)) \tag{11d}$$

es de tipo (p,p) para $1 < p \leq \infty$.

Hardy probó que $M_1 f$ presenta además tipo respecto de la medida ponderada $t^r dt$, en el sentido que:

$$\left\{ \int_0^{\infty} |M_1 f(x)|^p\, t^r dt \right\}^{1/p} \leq \frac{p}{p-r-1} \left\{ \int_0^{\infty} |f(t)|^p\, t^r dt \right\}^{1/p} \tag{11e}$$

si $$p - r - 1 > 0$$

Por supuesto resultados análogos valen para

$$\int_x^\infty |f(t)|\, dt \quad .$$

Estos ejemplos más simples ilustran la importancia de los teoremas de convexidad de Riesz y Marcindiewicz que permiten , o facilitan grandemente, la demostración de teoremas difíciles concernientes a la continuidad de operadores en los espacios L^p, cuando esta continuidad tiene lugar en todo un segmento del cuadrado de los tipos.

f) Espacios de Lorentz: La fórmula (11e) permite precisar lo que hemos mencionado a continuación de (4g) con respecto a la función $h^{\#\#}$. Para cada $h(x)$, definida en un espacio general, tenemos la $h^{\#}(\xi)$ correspondiente, definida en $[0,\infty)$, no-creciente y equimedible con $h(x)$, de modo que $||h||_p = ||h^{\#}||_p$. La correspondencia $h(x) \longrightarrow h^{\#}(\xi)$ no es en general, sublineal, y se ha definido otra función (no-creciente y de la variabl real) $h^{\#\#}(\xi)$ tal que la correspondencia $h(x) \longrightarrow h^{\#\#}(\xi)$ ya es sublineal. Pero para que esta otra función $h^{\#\#}$ pueda reemplazar a la $h^{\#}$ (en lo que al tipo se refiere) tendríamos que saber que $||h^{\#\#}||_p$ es igual, o equivalente, a $||h||_p = ||h^{\#}||_p$. Esto es efectivamente así, pues como $h^{\#\#}$ es un promedio de $h^{\#}$, $h^{\#\#} = M_1 h^{\#}$, y $h^{\#}$ es no creciente, tenemos que $h^{\#\#}(\xi)$ $h^{\#}(\xi)$, $||h^{\#\#}||_p \geq$

$||h^{\#}||_p$. Por otra parte (11e) nos da que $||h^{\#\#}||_p \leq c||h^{\#}||_p$, con medida ordinaria asi como ponderada (si $p > 1$) . Luego las normas $||h||_p = ||h^{\#}||_p$ y $||h^{\#\#}||_p$ son equivalentes. Si $h(x) = [Tf](x)$ es un operador sublineal, definiendo $T_1 f = = h^{\#\#}(\xi)$ obtendremos otro operador cuyos valores son funciones $h^{\#\#}$ no crecientes, en $[0,\infty)$, y Tf será de tipo (p, s) si y solo si lo es $T_1 f$ (si $s > 1$) . Este hecho permite simplificar en algunos casos las demostraciones, pues la función $h^{\#\#}$ es de tipo más particular que la $h(x)$.

Las propiedades (11e) y (11a) , referentes a tipos ponderados, están vinculadas a la teoría de los llamados <u>espacios de Lorentz</u> que generalizan a los espacios L^p y los M^p . En efecto la norma L^p de $h(x)$ puede escribirse en la forma $||h^{\#}(\xi)||_p = ||h^{\#}(\xi)\xi^{1/p - 1/p}||_p$ (o como $||h^{\#\#}(\xi)\xi^{1/p - 1/p}||_p$), y la norma M^r puede escribirse en la forma $||h^{\#}(\ )\ ^{1/p}||_{\infty} = ||h^{\#}(\xi)\xi^{1/p - 1/\infty}||_{\infty}$ (o como $||h^{\#\#}(\xi)\xi^{1/p - 1/\infty}||_{\infty}$). Esto sugiere llamar $L_{(p,p)}$ al espacio L^p , y $L_{(p,\infty)}$ al espacio M^p , y definir más generalmente el espacio $L_{(p,q)}$ mediante la norma

$$||h||^{\#}_{(p,q)} = ||h^{\#}(\xi)\xi^{1/p - 1/q}||_q = ||h^{\#}(\xi)\xi^{1/p - 1/q}||_{L^q(d\xi)} \tag{11f}$$

o mediante

$$||h||^{\cdot}_{(p,q)} = ||h^{\#\#}(\xi)\xi^{1/p - 1/q}||_q \ . \tag{11g}$$

Asi por ejemplo, si $1 < p \leq 2$, es $p^{\#} = p/p-1 \geq 2$, y el teo rema (11) de Hardy-Paley se escribe:

$$\|\hat{f}\|_{(p^{\#},p)} \lesssim A_p \|f\|_p \quad \text{si} \quad 1 < p \leq 2 \qquad \text{(11 bis)}$$

Lorentz introdujo estos espacios con la definición (11f) de norma. (11f) es realmente una norma si $1 \leq q \leq p$, pues entonces $\xi^{1/p - 1/q}$ es no-creciente y la fórmula (4d) muestra en seguida que en este caso vale la propiedad triangular (subaditiva) para (11f). En cambio como $h \longrightarrow h^{\#\#}$ es siempre subaditiva, (11g) es siempre una norma, y es equivalente a la norma (11f) por lo dicho más arriba. La introducción de la norma más ventajosa (11g) se debe a Calderón quién perfeccionó considerablemente la teoría de los espacios Lorentz, extendiendo a ellos los teoremas de interpolación de Riesz y Marcinkiewicz. En particular, vemos que el teorema de Marcinkiewicz 1.C.2. puede formularse diciendo que si T es de tipo $L_{(p,p)} \longrightarrow L_{(s,\infty)}$ y de tipo $L_{(q,q)} \longrightarrow L_{(v,\infty)}$ entonces T es de tipo $L_{(r,r)} \longrightarrow L_{(u,u)}$ si

$$\frac{1}{r} = \frac{1-\theta}{p} + \frac{\theta}{q} \quad , \quad \frac{1}{u} = \frac{1-\theta}{s} + \frac{\theta}{v} \; .$$

Calderón probó que estas hipótesis implican todavía que T es de tipo $L_{(r,t)} \longrightarrow L_{(u,t)}$ para todo t, y dió otras generalizaciones análogas para los otros espacios de Lorentz.

A los espacios de Lorentz se puede llegar también superponiendo la correspondencia $h \longrightarrow h^{\#}$ con el operador potencial $H^{\#}_{\gamma}$

de (11b) . En efecto, como $h^{\#}(\xi)$ es no creciente resulta claramente que

$$c\, h^{\#}(\xi)\,\xi^{\gamma} \leq \left[H^{\#}_{\gamma}(h^{\#}) \right](\xi) \geq c\, h^{\#}(2\xi)(2\xi)^{\gamma} \quad ..$$

Poniendo $\gamma = 1/p - 1/q$, se ve que la norma-q de $h^{\#}(\xi)\,\xi^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}$ es equivalente a la norma-q de $H^{\#}_{\gamma}(h^{\#})$. O sea la norma de Lorentz puede definirse como $\|H^{\#}_{\gamma}(h^{\#})\|_q$ con $1/p - 1/q = \gamma$. Los teoremas (11a) permiten entonces deducir varias propiedades de los espacios de Lorentz. Por ejemplo haciendo, en (11a), $a = 0$, $b = 1/s - \mathcal{E}$, $\mathcal{E} = (r-1)/(r+1)$, se obtiene que

$$\|h\|_{p^{\#}} = \|h\|_{(p^{\#},p^{\#})} \leq c\, \|h\|_{(p^{\#},p)} \quad \text{si} \quad 1 < p \leq 2 \qquad (11h)$$

y más generalmente se obtiene la desigualdad de Calderón:

$$\|h\|_{(p,r)} \leq C\, \|h\|_{(p,q)} \quad \text{si} \quad 1 \leq q < r \leq \infty \qquad (11i)$$

En particular se ve que la desigualdad $\|h\|_{M^p} \leq \|h\|_{L^p}$, es caso particular de la desigualdad $\|h\|_{M^p} \leq C\, \|h\|_{(p,q)}$ (que se reduce a la anterior si $q = p$).

Recíprocamente, la teoría de los espacios de Lorentz permite deducir y generalizar propiedades de tipo de los operadores $H_{\gamma}f$. En efecto, $H_{\gamma}f = f * |x|^{\gamma - n}$, $0 < \gamma < n$, donde la función $|x|^{\gamma - n}$ no pertenece a ningún L^r (sino el teorema de Hardy-Littlewood-Sobolev sería consecuencia trivial del teorema de Young de a) de los operadores de convolución ordinarios).

Pero es fácil comprobar que la función $|x|^{\gamma-n}$ pertenece al espacio de Lorentz $L(\frac{n}{n-\gamma}, \infty)$, o sea que el operador H_γ es un operador convolución en espacios de Lorentz. Lorentz [11] y O'Neil [12] extendieron el teorema de Young de a) a espacios Lorentz y con ello obtuvieron una nueva demostración (y extensión) del teorema de Hardy-Littlewood y Sobolev sobre el tipo de H_γ . Sin embargo, parece que estos teoremas de Lorentz y O'Neil no abarcan la desigualdad más precisa (11a) y sus extensiones en [6] , y posiblemente esto se conseguiría extendiendo a espacios de Lorentz el teorema ponderado de Young y sus generalizaciones (cfr. [5]).

1.E. Como ya dijimos, los teoremas de Riesz y Marcinkiewicz y las cuestiones relativas a continuidad en espacios L^p , M^p y de Lorentz, han originado una teoría general de interpolación desarrollada por Calderón, Gagliardo, S. Krein, Lions y Peetre.

Al final de 1.C. ya hemos indicado la idea básica de la teoría general de Lions-Peetre; vamos a detallar un poco más las bases de esta teoría.

Ante todo, si A y B son dos espacios de Banach diremos que A está continuamente contenido en B , y escribiremos $A \prec B$, si A está contenido en B como conjunto, y si para todo $a \in A$ se verifica $\|a\|_B \leq c \|a\|_A$ donde c no depende de a (es decir, la correspondencia $a \to a$ es continua, considerada de A en B).

Sean A_0 y A_1 dos espacios de Banach fijos continuamente contenidos en cierto espacio de Banach B: $A_0 \prec B$, $A_1 \prec B$. Entre todos los subespacios de B que contienen continuamente a A_0 y a A_1 hay uno mínimo que se designa A_0+A_1 , y que es el subespacio de B formado por todos los elementos $a \in B$ de la forma $a = a_0+a_1$, $a_0 \in A_0$, $a_1 \in A_1$, y con norma

$$||a||_{A_0+A_1} = \inf_{a=a_0+a_1} (||a_0||_{A_0}+||a_1||_{A_1}) \tag{12}$$

Analogamente entre todos los subespacios contenidos continuamente en A_0 y A_1 hay uno máximo que se designa $A_0 \quad A_1$, formado por los $a \in A_0 \cap A_1$ con norma

$$||a||_{A_0 \cap A_1} = \max \left\{ ||a||_{A_0} , ||a||_{A_1} \right\} . \tag{12a}$$

Si $A_0 \cap A_1 \prec A \prec A_0+A_1$ se dice que A es <u>intermediario</u> entre $A_0 \cap A_1$ y A_0+A_1 .

Consideraremos funciones vectoriales $a(\lambda)$, que a todo $\lambda > 0$ le hacen corresponder un elemento $a(\lambda) \in A_0+A_1$ que supondremos medibles en λ . La norma $||a(\lambda)||_{A_0}$ es una función numérica de λ , no-negativa, y podemos considerar su integral en λ , y escribiremos

$$||a(\lambda)||_{L_+^p(A_0)} = \left(\int_0^\infty (||a(\lambda)||_{A_0})^p \frac{d\lambda}{\lambda} \right)^{1/p} \tag{12b}$$

Si $||a(\lambda)||_{L^p_+(A_0)} < \infty$ escribiremos $a(\lambda) \in L^p_+(A_0)$.

Análogamente se define $||a||_{L^p_+(A_1)}$. De acuerdo a lo visto en I.C., dado $a \in A_0+A_1$, consideraremos los posibles pares de funciones $a^1(\lambda)$ y $a_1(\lambda)$, tales que:

$$a^1(\lambda) + a_1(\lambda) = a \text{ para todo } \lambda \text{ , o casi todo } \lambda \text{ ,} \tag{12c}$$

$$\lambda^{\alpha_0} a^1(\lambda) \subset L^{p_0}(A_0) \quad , \quad \lambda^{\alpha_1} a_1(\lambda) \in L^{p_1}(A_1) \tag{12d}$$

donde α_0 , α_1 , p_0 , p_1 son cuatro números fijos tales que

$$\alpha_0 \alpha_1 < 0 \quad , \quad 1 \leq p_i \leq \infty \tag{12e}$$

Si un tal par $a^1(\lambda)$, $a_1(\lambda)$ existe, y $a = a^1(\lambda)+a_1(\lambda)$, diremos que a pertenece <u>al espacio</u> $S(p_0,\alpha_0,A_0 ; p_1,\alpha_1,A_1)$ (de Lions-Peetre), y definimos la norma en este espacio por

$$||a||_{(p_0,\alpha_0,A_0 ; p_1,\alpha_1,A_1)} = \inf_{a=a^1(\lambda)+a_1(\lambda)} \left\{ ||\lambda^{\alpha_0} a^1(\ )||_{L^{p_0}(A_0)} + ||\lambda^{\alpha_1} a_1(\lambda)||_{L^{p_1}(A_1)} \right\} \tag{12f}$$

<u>Ejemplo</u>: si $A_0 = L^{p_0}$, $A_1 = L^{p_1}$, $p_0 < p < p_1$, entonces $S(p_0,\alpha_0,A_0;p_1,\alpha_1,A_1) = L^p$ si $\alpha_0 = (p-p_0)/p_0$, $\alpha_1 = (p-p_1)/p_1$ o si α_0 y α_1 verifican $1/p = (1-\theta)/p_0 + \theta/p_1$, $\theta = \alpha_0/(\alpha_0-\alpha_1)$, de acuerdo a lo visto en I.C. Análogamente, si $A_0 = L^1$, $A_1 = L^\infty$, será $S(\infty,1-\frac{1}{p},A_0 ; \infty,-\frac{1}{p},A_1) = M^p = L(p,\infty)$.

De este modo a todo par de espacios A_0, A_1 se les hace corresponder una escala de espacios dependientes de cuatro parámetros $p_0, \alpha_0, p_1, \alpha_1$. Pero en realidad estos espacios dependen sólo de 3 parámetros pues es fácil ver que vale la propiedad homogeneidad: si $\lambda \neq 0$ entonces $S(p_0, \alpha_0, A_0; p_1, \alpha_1, A_1) = S(p_0, \lambda\alpha_0, A_0 ; p_1, \lambda\alpha_1, A_1)$. Poniendo

$$\theta = \alpha_0/(\alpha_0 - \alpha_1) \quad , \quad 0 < \theta < 1 \quad , \tag{13}$$

resulta de esta propiedad que dichos espacios solo dependen de los 3 parámetros θ, p_0, p_1 y que

$$S(p_0, \alpha_0, A_0 ; p_1, \alpha_1, A_1) = S(p_0, \theta, A_0 ; p_1, \theta-1, A_1) \tag{14}$$

La propiedad 1.B.3. se formula ahora en términos generales así:

si

$$p \leq s \ , \ q \leq v \quad \text{y si} \quad \begin{array}{l} 1/r = (1-\theta)/p + \theta/q \ , \\ 1/u = (1-\theta)/s + \theta/v \end{array} \tag{8 bis}$$

entonces

$$S(p, \tfrac{r-p}{p}, A_0 ; q, \tfrac{r-q}{q}, A_1) \prec S(s, \tfrac{u-s}{s}, A_0 ; v, \tfrac{u-v}{v}, A_1) \tag{15}$$

Con los mismos razonamientos de 1.C., y de las definiciones (12f) se deduce facilmente que vale el siguiente teorema de interpolación (que contiene esencialmente el de M. Riesz para el caso particular $p = s$, $r = u$, $q = v$, $p < r < q$):

<u>1.E.1. Si T es un operador lineal de A_0+A_1 en B_0+B_1 tal que T lleva A_0 en B_0 y A_1 en B_1 en forma continua, es decir si</u>

$$||Ta||_{B_0} \leq ||T||_{A_0,B_0} \cdot ||a||_{A_0} \ , \ ||Ta||_{B_1} \leq ||T||_{A_1,B_1} \cdot ||a||_{A_1} \tag{16}$$

<u>entonces T lleva en forma continua $S(p_0,\alpha_0,A_0 ; p_1,\alpha_1,A_1)$ en $S(p_0,\alpha_0,B_0 ; p_1,\alpha_1,B_1)$ y vale</u>

$$||Ta||_{(p_0,\alpha_0,B_0;p_1,\alpha_1,B_1)} \leq ||T||^{1-\theta}_{A_0B_0} ||T||^{\theta}_{A_1B_1} ||a||_{(p_0,\alpha_0,A_0;p_1,\alpha_1,A_1)} \tag{16a}$$

<u>donde θ es dado por (13).</u>

Asi pues los espacios S definidos por (12f) son espacios intermediarios entre $A_0 \cap A_1$ y A_0+A_1 tales que para ellos vale el teorema de interpolación de Riesz. <u>Surge la pregunta qué otros espacios A_θ hay entre $A_0 \cap A_1$ y A_0+A_1 para los cuales valga el teorema de interpolación. Aquí hay que distinguir dos casos</u>: que el teorema de interpolación valga para operadores T de A_0+A_1 en otro B_0+B_1 , o que valga para operadores que van de otro B_0+B_1 al dado A_0+A_1 .

En el segundo caso, tomando $B_0 = B_1$ = recta real , de modo que $B_\theta = B_0 = B_1$, y definiendo para todo λ real, $\lambda \in B_0+B_1 = B_0$, $T\lambda = \lambda a$, donde a es un elemento fijo de $A_0 \cap A_1$, tendremos que $||T||_{B_0A_0} = ||a||_{A_0}$, $||T||_{B_1A_1} =$ $= ||a||_{A_1}$, y si queremos que el teorema de interpolación se verifique para A_θ , debe verificarse la <u>condición necesaria</u>

$$\|a\|_{A_\theta} \leq c_\theta \|a\|_{A_0}^{1-\theta} \|a\|_{A_1}^{\theta} \quad \text{para toda} \quad a \in A_0 \cap A_1 \qquad (17)$$

Pasando al primer caso, tomando nuevamente $B_0 = B_\theta = B_1 =$ = recta , fijando un funcional $\varphi \in A_0' \cap A_1'$ y definiendo el operador $Ta = \varphi(a)$ (= número real $\in B_0+B_1$, de modo que $T : A_0+A_1 \to B_0+B_1$) , se tendrá $\|T\|_{A_0 B_0} = \|\varphi\|_{A_0'}$, $\|T\|_{A_1 B_1} = \|\varphi\|_{A_1'}$ (A_1' = dual del A_1) . Luego si queremos que el teorema de interpolación valga para operadores T que van de A_0+A_1 a otro B_0+B_1 , debe verificarse el teorema para este T particular, lo que da la <u>condición necesaria</u>:

$$\|\varphi\|_{A_\theta'} \leq c_\theta \|\varphi\|_{A_0'}^{1-\theta} \|\varphi\|_{A_1'}^{\theta} \quad \text{para todo funcional } \varphi \in A_0' \; A_1' \qquad (17a)$$

Usando el teorema de Hahn-Banach, y las desigualdades aritméticas (aquí a,b son números)

$$a^{1-\theta} b^{\theta} \leq (1-\theta)a + \theta b = \inf_{\lambda > 0} (1-\theta) \lambda^{\theta} a + \theta \lambda^{\theta-1} b \;, (17b)$$

se llega a transformar la condición (17a) en la siguiente: para todo $\lambda > 0$ existen $a_i \in A_i$ con $a = a_0 + a_1$ tales que

$$\|a_0\|_{A_0} \leq c_\theta (1-\theta) \lambda^{\theta} \|a\|_{A_\theta} \;, \quad \|a_1\|_{A_1} \leq c_\theta \theta \lambda^{\theta-1} \|a\|_{A_\theta} \qquad (18)$$

Se prueba entonces fácilmente la siguiente proposición (debi da esencialmente a S. Krein):

1.E.2. Un espacio A_θ verifica (17) si y solo si $S(1,\theta,A_0\ ;\ 1,\theta-1,A_1) \succ A$. Un espacio A_θ verifica (18) si y solo si $A \prec S(\infty,\theta,A_0\ ;\ \infty,\theta-1,A_1)$. O sea, entre los espacios que verifican (17) hay uno mínimo o de norma más fuerte, y hay uno máximo o de norma más débil entre los espacios intermedia - rios que verifican (18).

Se tiene además que:

1.E.3. Si X_i verifican (18) (respect. (17)) entonces $S(p_0,\alpha_0,A_0\ ;\ p_1,\alpha_1,A_1) \succ S(q_0,\beta_0,X_0\ ;\ q_1,\beta_1,X_1)$ (respectivamente $\prec$) si $\theta_0 < 0 < \theta_1$, $1/q_i = (1-\theta_i)/p_0 + \theta_i/p_1$,

$$\beta_i = (1-\theta_i)\alpha_0+\theta_i\alpha_1 \quad (i=0,1) \tag{19}$$

En particular, si $A_0 = L^1$, $A_1 = L^\infty$, sabemos que $S(\infty,\theta,L^1\ ;\ \infty,\theta-1,L^\infty) = M^p = L_{(p,\infty)}$ con $\theta = 1-(1/p)$, luego $L_{(p,\infty)} = M^p$ es el espacio de norma más débil entre L^1 y L^∞, que cumple (18) para $\theta = 1-(1/p)$. Análogamente puede mostrarse que $L_{(p,1)}$ es el espacio más fuerte que verifica (17) con $\theta = 1 - 1/p$. La desigualdad (7d) resulta así ser un caso particular de 1.E.3.

De este modo las propiedades 1.E.1. , 1.E.3. y (15) proporcionan (repitiendo los razonamientos del final de 1.C.) una formulación abstracta del teorema de Marcinkiewicz (para espacios A_θ que cumplen (18).

No vamos a insistir en los detalles que creemos ya son claros de la analogía con 1.C.

Si se toma $A_0 = C$ = funciones continuas , $A_1 = C^1$ entonces resulta que el máximo espacio $S(\infty, \theta, C ; \infty, \theta-1, C^1)$ es el espacio de las funciones lipschizianas que verifican $\sup_x |f(x+h)-f(x)| \leq c\, h^{\theta}$, $h > 0$, y el mínimo espacio $S(1, \infty, C ; 1, \theta-1, C^1)$ resulta ser el de las funciones $f(x)$ que verifican

$$\int_0^{\infty} \frac{||f(x+h)-f(x)||_{\infty}}{h^{\theta}} \frac{dh}{h} \leq c \quad .$$

Si se toma $A_0 = L^p(0,\infty)$, $A_1 = L^p_1$ (con norma $||f||_{L^p_1} = ||f||_{L^p} + ||df/dx||_{L^p} < \infty$) entonces el máximo espacio es el de las $f(x)$ que verifican $||f(x+h)-f(x)||_{L^p} \leq c\, h^{\theta}$, $(h > 0)$, y el mínimo el de las $f(x)$ que verifican $\int_0^{\infty} ||f(x+h)-f(x)||_{L^p}\, h^{-\theta} \frac{dh}{h} \leq c$.

Análogamente se puede ver, según mostró Peetre, que los demás espacios de Lorentz se expresan (como L^p y M^p) como espacios intermedios de Lions-Peetre entre L^1 y L^{∞} .

Claro que 1.E.2. determina todos los espacios intermediarios que verifican (17) ó (18), pero de ningún modo determina a los espacios para los cuales vale el teorema de interpolación formulado más arriba, problema que parece presentar serias dificultades (si se pide que el teorema de interpolación valga tan solo para espacios <u>lineales</u>), ya que (17) y (18) son tan solo condi ciones necesarias para la solución pero nó suficientes.

En lo que sigue haremos uso del siguiente teorema de Lions - Peetre, cuya demostración es elemental y puede deducirse fácilmente de la analogía con el caso particular $L^{p_i} = A_i$:

<u>1.E.4. Se tiene que</u> $S(p_0,\alpha_0,L^{p_0}(A_0)\ ;\ p_1,\alpha_1,L^{p_1}(A_1)) =$
$= L^p\left[\,S(p_0,\alpha_0,A_0\ ;\ p_1,\alpha_1,A_1)\,\right]$ si (20)

$$\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}\ ,\qquad \theta = \alpha_0/(\alpha_0-\alpha_1)\ . \qquad (20a)$$

Si $A_0 = L^{p_0}$, $A_1 = L^{p_1}$, este teorema dice que $L^p(L^p)$ es un espacio intermediario de Lions-Peetre de los espacios $L^{p_0}(L^{p_0})$ y $L^{p_1}(L^{p_1})$. Sin embargo este teorema no permite obtener a $L^p(L^q)$ a partir de $L^{p_0}(L^{q_0})$ y $L^{p_1}(L^{q_1})$. Por tanto la combinación de este teorema con 1.E.1., 1,E.3. y (15) tan solo conduce a una extensión incompleta del teorema de Riesz para $L^p(L^q)$, debida a Benedek-Panzone, aún para el"triángulo inferior" de lo tipos (en cambio el teorema análogo de la Teoría de Calderón abarca completamente al de Benedek-Panzone).

<u>Mencionaremos todavía que (si</u> $A_0 \cap A_1$ <u>es denso en</u> A_0 <u>y</u> A_1) <u>el dual de</u> $S(p_0,\alpha_0,A_0\ ;\ p_1,\alpha_1,A_1)$ <u>resulta ser el</u> $S(p_1^{\#},-\alpha_0,A_0^{\#}\ ;\ p_1^{\#},-\alpha_1,A_1^{\#})$, <u>si</u> $1 \leq p_i < \infty$, $1/p_i + 1/p_i^{\#} = 1$ (20b)

Nos limitaremos a estas nociones de los "espaces de moyennes" de Lions-Peetre, que solo quieren ser una introducción al estudio de los trabajos de estos autores. Tan solo agregaremos, a título de información, que los espacios definidos por (12f) resultan ser idénticos a los llamados "espaces de trace" de Lions (cuya definición es más difícil y menos intuitiva que la de (12f). Además, uno de los resultados más importantes de la teoría de Lions-Peetre es que ellos determinan todos los espacios intermediarios (12f) en el caso en que $A_1 = D(\Lambda) =$ dominio de definición del generador infinitesimal Λ de un semigrupo $G(\lambda)$, $\lambda > 0$, de operadores en $A_0 = E$. En este caso $S(p,\theta,A_0\ ;\ p,\theta-1,A_1)$ resulta ser el espacio de las $a \in E$ tales que:

$$\left\{ \int_0^\infty \left(\frac{\|G(\lambda)a - a\|_E}{\lambda^\theta}\right)^p \frac{d\lambda}{\lambda} \right\}^{1/p} < \infty$$

y esta integral da la norma del espacio.

Un corolario de este teorema es que el espacio intermediario $S(p,\theta,L^p_m\ ;\ p,\theta-1,L^p)$ es el llamado espacio de Besov $B^{(1-\theta)n,p}$ que contiene como caso particular a los espacios de Sobolev, de Nikolski y de los potenciales de Bessel (de Aronzajn-Calderón). Este hecho, junto con 1.E.1., 1.E.3. y (15) permite sistematizar los trabajos de la escuela de Sobolev y Nikolski sobre la inmersión de espacios de funciones diferenciables.

<u>1.F.</u> Vamos a esbozar ahora rápidamente la idea básica de la teoría de Gagliardo. Mientras la determinación de todos los espa-

cios intermedios, entre $A_0 \cap A_1$ y A_0+A_1 , que verifiquen el teorema de interpolación para todo operador lineal parece no estar aún resuelto; en cambio Gagliardo determinó, al menos teóricamente, todos los espacios intermedios a cuales se les exija verificar el teorema de interpolación respecto de todos los operadores tanto lineales como sublineales (claro que estos últimos espacios son en número menor y más facilmente determinados). Sin embargo la excesiva generalidad de esta teoría la hizo menos aplicable que las teorías más contructivas de Calderón y Lions.

Ante todo es necesario aclarar qué significa "operador sublineal" en el caso de operadores Ta , donde a es un elemento de un espacio abstracto de Banach. En caso de operadores $h = Tf$, donde f,h son funciones por ejemplo de espacios L^p, la sublinealidad significa $|T(f_1+f_2)(y)| \leq c\{|Tf_1(y)|+Tf_2(y)\}$. Es fácil ver que entonces, para cada par f_1,f_2 , existen funciones , tales que $T(f_1+f_2) = \varphi Tf_1 + \psi Tf_2$, y φTf_1 , ψTf_2 son nuevos operadores que pueden llamarse T_{f_2} , T_{f_1} respectivamente. En esta forma la definición ya se aplica al caso en que f_1,f_2 no sean funciones sino elementos abstractos.

Gagliardo llama espacio de interpolación quasi lineal entre A_0 y A_1 a un espacio intermediario S que verifica la siguiente condición: Si T es un operador sublineal de A_0+A_1 en A_0+A_1 tal que $||Ta_0||_{A_0} \leq c_0 \; ||a_0||_{A_0}$ para todo $a_0 \in A_0$, y

$||Ta_1||_{A_1} \leq c_1 \, ||a_1||_{A_1}$ si $a_1 \in A_1$, entonces $||Ta||_S \leq c_S \, ||a||_S$ para todo $a \in S$.

Fijado $u \in A_0+A_1$, sea $M(u)$ el conjunto de todos los pares de números $\{\xi \geq 0 \, , \eta \geq 0\}$ tales que exista una descomposición $u = v+w$ con $||v||_{A_0} \leq \xi$, $||w||_{A_1} \leq \eta$. Sea LM la frontera de M de la cual se han removido los puntos que pertenecen a los ejes coordenados. $M(u)$ tiene estas propiedades: (i) es convexo y $(\xi, \eta) \in M$ implica $\{\xi+h \, , \eta+k\} \in M$ para todo $h,k \geq 0$; (ii) $M(cu) = |c| \, M(u)$, $M(u_1+u_2) \supseteq M(u_1) + M(u_2) = \{\xi_1+\xi_2 \, , \eta_1+\eta_2 \, , (\xi_i,\eta_i) \in M_i\}$; (iii) Si $A \cap B$ es denso en B (respectiv. en A) entonces $\inf_{(\xi,\eta)\in M} \eta = 0$ (respect. $\inf \xi = 0$).

Sea $F[M]$ un funcional (fuerte o no) que asocia a todo $M(u)$ un número $F[M]$ de modo que:

(a) $F[M(cu)] \leq K \, |c| \, F[M(u)]$, (K = constante fija)

(b) $F[M(\sum_i u_i)] \leq K \sum_i F[M(u_i)]$

(c) $K||u||_{A_0+A_1} \leq F[M(u)] \leq K(||u||_{A_0}+||u||_{A_1})$

(d) si $F[M(u_n-u_m)] \to 0$ entonces $F[M(u_0)] \leq K \sup_n F[M(u_n)]$ donde u_0 es el límite de $\{u_n\}$ en A_0+A_1 , que existe por (c)

(e) si $M(u_1) \supset M(u_0)$ entonces $F[M(u_1)] \leq K \, F[M(u_0)]$.

<u>El teorema básico de Gagliardo es que si</u> $F(A_0,A_1) = \{u \, ; \, F[M(u)] < \infty\}$ <u>entonces S es un espacio de interpolación sublineal con</u>

$$||u||_{F(A_0,A_1)} = \inf \sum_i F\left[M(u_i) \right] \quad , \quad \sum_i u_i = u \tag{21}$$

Recíprocamente, de esta manera se obtienen todos los espacios de interpolación sublineal entre A_0 y A_1.

Se prueba además que si A_0, A_1 y B_0, B_1 son dos pares de espacios entonces el teorema de interpolación vale entre $F(A_0,A_1)$ y $F(B_0,B_1)$, si se usa el mismo funcional F para ambos pares.

Gagliardo destaca en particular, para cada $0 \quad \theta \quad 1$, un funcional F^θ especial definido por

$$F^\theta\left[M \right] = \sup_{(\xi,\eta)\in LM} \xi^{1-\theta}\eta^\theta \tag{21a}$$

que satisface las condiciones precedentes impuestas a F. Este F^θ determina un espacio de interpolación sublineal que se designa con $(A_0,A_1)^\theta$, y para el mismo vale el siguiente teorema (si $0<\theta<1$) que acerca la teoría de Gagliardo a la de Lions-Peetre:

1.F.1.- Consideremos los posibles pares $\{u^1(\lambda), u_1(\lambda)\}$, con la condición adicional de que $u^1(\lambda), u_1(\lambda)$ sean funciones continuas para $\lambda' \leq \lambda \leq \lambda''$, con $u^1(\lambda') = u_1(\lambda'') = 0$, y $u^1(\lambda) + u_1(\lambda) = u$ para $\lambda' < \lambda < \lambda''$; entonces

$$||u||_{(A_0,A_1)^\theta} = \inf_{u=u^1(\lambda)+u_1(\lambda)} \sup_{\lambda} ||u^1(\lambda)||_{A_0}^{1-\theta} \, ||u_1(\lambda)||_{A_1}^{\theta} \tag{21b}$$

Gagliardo estudia más generalmente funcionales particulares F que dependen de 4 parámetros no-negativos. Si estos 4 parámetros se expresan mediante tres, entonces se obtiene un espacio de interpolación A_{ν,ρ_0,ρ_1}, que según probó Peetre verifica

$$S(p_0,\theta,A_0\ ;\ p_1,\theta-1,A_1) \prec A_{\nu;\rho_0,\rho_1} \tag{21c}$$

Si $A_0 = L^{p_0}$, $A_1 = L^{p_1}$, Gagliardo prueba que $A_{\nu;\rho_0,\rho_1} = L^p$, con $1/p = (1-\nu)/p_0 + \nu/p_1$, $p = \rho$.

Las demostraciones con estos espacios resultan muy laboriosas y es dificil de dar ejemplos concretos y de determinar las relaciones con los espacios de Lions-Peetre. Los métodos de Gagliardo influenciaron el desarrollo de la teoría de los ya mencionados espacios de Besov.

1.G. Diremos todavía unas palabras sobre la teoria de interpolación de Calderón-Lions que usa métodos de la teoria de funciones de variable compleja, y que fué extensamente desarrollada por Calderón.

Consideremos nuevamente los espacios L^p , L^q , L^r , $p<q<r$, y daremos otra forma de definir la norma de L^r mediante las normas de L^p y L^q , como antes $1/r = (1-\theta)/p + \theta/q$.

Sea $f(x) \in L^r$ y consideremos en el plano complejo $z = \xi + i\eta$ la faja $0 \leq Rz = \xi \leq 1$. Para cada z de la faja definimos la función (para simplificar sea $f \geq 0$) :

$$F_z(x) = f(x)^{a(z)} \quad , \quad a(z) = \left(\frac{r}{p} - \frac{r}{q}\right)z + \frac{r}{q} = r\left(\frac{z}{p} + \frac{1-z}{q}\right)$$

Si z varía en el borde izquierdo de la faja, es decir si $z = i\eta$, entonces la parte real de $a(z)$ es igual a r/p de modo que $|F_z(x)|^p = |f(x)|^r$, luego $||F_z(x)||_p = (||f(x)||_r)^{r/p}$. Análogamente si z varía en el otro borde, $z = 1+i\eta$ entonces $|F_z(x)|^q = |f(x)|^r$ y $||F_{1+i\eta}(x)||_q = (||f||_r)^{r/q}$. Poniendo $\Phi_1(z) = F_z(x)$, obtenemos así una función de z, que a cada z le asigna una función $F_z(x)$ en x de modo que se verifican las propiedades siguientes (como siempre $\frac{1}{r} = \frac{1-\theta}{p} + \frac{\theta}{q}$):

a) Para $z = i\eta$ es $\Phi_1(i\eta) \in L^p$, para $z = 1+i\eta$ es $\Phi_1(1+i\eta) \in L^q$; para $z = \theta$, es $\Phi_1(\theta) = f$

b) $\Phi(z)$ varía en forma analítica con z, si $0 < Rz < 1$, y en forma continua en $0 \leq Rz \leq 1$

c) Si $||f||_r = 1$, entonces $||f||_r = |||\Phi_1|||$ donde $|||\Phi_1||| = \max\left\{\sup_\eta ||\Phi_1(i\eta)||_p \, ; \, \sup_\eta ||\Phi_1(1+i\eta)||_q\right\} < \infty$ (22)

Del teorema de las tres rectas de Hadamard (ver cap. 12 del libro de Zygmund) se deduce facilmente que, si $\Phi(z) = \Phi_z(x)$ es una función que a todo z le hace corresponder una función $\Phi_z(x)$ de x, tal que se verifican a), b) y (22), entonces se tiene que $||f||_r \leq |||\Phi|||$. Por tanto se tiene que (si $||f||_r = 1$):

$$||f||_r = \inf_\Phi |||\Phi||| \quad , \quad \text{\underline{para las posibles $\Phi(z)$ que verifican a) y b) (y con $|||\Phi||| < \infty$)}} \qquad (23)$$

Esto da una expresión de $||f||_r$ mediante L^p y L^q , pues $|||\Phi|||$ está definida en términos de las normas de L^p y L^q .

Reemplazando L^p por un espacio de Banach A_0 , L^q por otro A_1 , la definición (23) se aplica a todo par de espacios de Banach A_0, A_1 (como los considerados en 1.E. y 1.F.); claro que ahora se definirá $|||\Phi||| = \max \{ \sup_\eta ||\Phi(i\eta)||_{A_0}$; $\sup_\eta ||\Phi(1+i\eta)||_{A_1} \}$. Queda así definido el <u>espacio intermediario</u> A_θ , <u>de Calderón-Lions</u>, para todo $0<\theta<1$, tal que $||a||_{A_\theta} = \inf_\Phi |||\Phi|||$, para las posibles Φ que verifican a) y b) con $|||\Phi||| < \infty$ (y ahora Φ debe verificar $\Phi(\theta) = a$). Con los mismos razonamientos que en caso de los L^p , se ve que el teorema de Riesz-Thorin vale para tales A_θ (y esta vez en todo el cuadrado de los tipos). Calderón determinó los duales de estos espacios y probó el siguiente teorema (más completo que el 1.E.4.) que abarca el de Riesz-Benedek-Panzone:

<u>1.G.1.</u> <u>Si</u> $B_0 = L^{p_0}(A_0)$, $B_1 = L^{p_1}(A_1)$ <u>entonces</u> $B_\theta = L^p(A_\theta)$, $1/p = (1-\theta)/p_0 + \theta/p_1$. En este teorema $L^p(L^q)$ <u>aparece como intermediaria</u> de $L^{p_0}(L^{q_0})$ y $L^{p_1}(L^{q_1})$ si $1/q = (1-\theta)/q_0 + \theta/q_1$, para todo par p,q . Entre otras cosas, Calderón con este método obtienen la interpolación entre espacios $L_{(p,q)}$ de Lorentz, ya mencionada.

Se prueba fácilmente que $S(1,\theta,A_0 ; 1,\theta-1,A_1) \prec A_\theta \prec S(\infty,\theta,A_0 ; \infty,\theta-1,A_1)$. (24)

§ 2. DEFINICIONES Y PRIMERAS PROPIEDADES DE TIPOS DEBILES MIXTOS

2.A. Como ya dijimos en la introducción, para evitar notaciones incómodas y para destacar lo esencial del trabajo haremos las simplificaciones siguientes: (i) consideraremos tan solo el caso de funciones medibles $f(x,y)$ de dos variables $(x,y) \in X \times Y$, donde X,Y son espacios con medidas μ, ν respectivamente; (ii) consideraremos operadores $h = Tf$ que hacen corresponder a f una función medible $h(x,y)$ definida en el mismo espacio $X \times Y$, y será evidente que todos los resultados valdrán automáticamente si h está definida en otro espacio $X_1 \times Y_1$; (iii) los resultados esenciales serán enunciados tan solo para los espacios $L^{p_2}(L^{p_1})$ con $1 \leq p_1 , p_2 < \infty$, de modo que la norma

$$||f(x,y)||_{L^{p_2}(L^{p_1})} = \left(\int_Y \left[\int_X |f(x,y)|^{p_1} dx \right]^{p_2/p_1} dy \right)^{1/p_2}$$

podrá considerarse indistintamente como una norma mixta $||f||_{p_1/x\ ,\ p_2/y}$; (iv) supondremos que $h = Tf$ actúa sobre funciones elementales, $f \in \mathcal{E} = \mathcal{E}(X \times Y)$; (v) escribimos $\int |f(x,y)|\, dx$ en lugar de $\int |f(x,y)|\, d\mu_x$, y análogamente usaremos dy en lugar de $d\nu = d\nu_y$; (vi) para fijar ideas en los teoremas de interpolación, supondremos $p < r < q$, $s < u < t$

y por la homogeneidad de las normas podemos también suponer $||f||_{\bar{r}} = 1$.

Las letras $\rho, \lambda, \theta, \xi, \eta$ serán reservadas para reales ≥ 0 ; p_i , r_i , q_i , s_i , u_i , t_i , $i = 1,2$, para números positivos, para denotar los espacios L^p de Lebesgue.

Con $\bar{p}$ indicaremos el par $\bar{p} = (p_1,p_2)$; $\bar{p} < \bar{r}$ significa $p_1 < r_1$, $p_2 < r_2$; $s > \bar{p}$ significa que $s > p_1$ y $s > p_2$, y si $p_1 = p_2 = p$ entonces $\bar{p}$ se indicará a veces con p . Análogamente $(1-\theta)/\bar{p} + \theta/\bar{q} = 1/\bar{r}$ significa que vale $(1-\theta)/p_i + \theta/q_i = 1/r_i$ para $i = 1,2$.

Sean $X = \{x\}$, $Y = \{y\}$ dos espacios fijos con sendas medidas μ, ν ; por lo dicho escribiremos $d\mu = d_x\mu = dx$, $d\nu = d_y\nu = dy$. L^p_+ indicará el espacio $L^p(0,\infty)$ con la medida $d\lambda/\lambda$, y análogamente usaremos otras notaciones del parágrafo 1. En particular usaremos la notación f^λ , f_λ , allí definida, que no se confundirá con la potencia $|f(x,y)|^\lambda$. Con c , K indicaremos constantes fijas.

Una función $f(x,y)$ definida en $X \times Y$ puede considerarse también como una función vectorial $\bar{f}(y)$ (respectiv. $\bar{f}(x)$) de la sola variable y (resp. x), que hace corresponder a cada y la función en x , $\bar{f}(y) = f_y(x) = f(x,y)$. Por tanto, además de la norma ordinaria

$$(||f(x,y)||_p)^p = \int_X\int_Y |f(x,y)|^p d\mu_x d\mu_y \quad ,$$

respecto de la medida producto $dxdy$, podemos considerar las normas vectoriales o mixtas

$$||f||_{L^p(L^q)} = ||f||_{q,p} = ||f||_{\frac{q}{x},\frac{p}{y}} = \left(\int_Y \left[\int_X |f(x,y)|^q dx\right]^{\frac{p}{q}} dy\right)^{1/p} \quad (1)$$

y el espacio correspondiente

$$L^p(L^p) = L^p_{\nu}(L^q_{\mu}) = L^p_{Y,\nu}(L^q_{X,\mu}) \quad (1a)$$

Si $p = q$ entonces la norma mixta $||f||_{q,p} = ||f||_{p,q}$ se reduce a la norma ordinaria $||f||_p$ respecto de la medida producto $dxdy$. En otros términos, $||f||_{q,p}$ es la norma-p de la función vectorial $\bar{f}(y) = f(x,y)$ considerando que $\bar{f}(y)$ es un elemento de $L^q(dx)$, $\bar{f}(y) = f_y(x) \in L^q(dx)$; si $p = q$ entonces la norma vectorial se reduce a la ordinaria de dos variables: $L^p_{dy}(L^p_{dx}) = L^p(dxdy)$.

Consideraremos operadores (lineales o sublineales) $h = Tf$, que hacen corresponder a toda función elemental $f(x,y) \in \mathcal{E}$ una función medible $h(x,y)$. Diremos que T es de <u>tipo mixto</u>$(\bar{p},\bar{s})$, o de tipo mixto $((p_1,p_2);(s_1,s_2))$, si existe una constante fija c independiente de f tal que

$$||Tf||_{L^{s_2}(L^{s_1})} = ||Tf||_{s_1,s_2} \leq c\,||f||_{p_1,p_2}, \quad (1b)$$

y la mínima tal constante se indicará con $||T||_{\bar{p},\bar{s}}$. También consideraremos operadores $h(y) = Tf$ que hacen corresponder a cada $f(x,y)$ elemental una función $h(y)$ medible de la sola variable $y \in Y$. En este caso, si $\|Tf\|_s \leq c\,\|f\|_{p_1,p_2}$, hablaremos del tipo $(\bar{p},s)$, o del tipo semimixto $((p_1,p_2);s)$. Análogamente se define el tipo $(p,\bar{s})$. Como ya mencionamos, Benedek y Panzone extendieron el teorema de Riesz-Thorin (y en la forma generalizada que le dió Stein) a los tipos mixtos: <u>Si T es de tipo mixto $(\bar{p},\bar{s})$ y de tipo mixto $(\bar{q},\bar{t})$ entonces T es de tipo $(\bar{r},\bar{u})$ para todo $\bar{r},\bar{u}$ que verifican</u>

$$1/\bar{r} = (1-\theta)/\bar{p} + \theta/\bar{q} \quad , \quad 1/\bar{u} = (1-\theta)/\bar{s} + \theta/\bar{t} \tag{1c}$$

con

$$\|T\|_{\bar{r},\bar{u}} \leq (\|T\|_{\bar{p},\bar{s}})^{1-\theta} (\|T\|_{\bar{q},\bar{t}})^{\theta} \quad , \quad (0 \leq \theta \leq 1) \tag{1d}$$

Pasamos ahora a considerar la definición de norma mixta débil y tipo débil mixto.

Considerada $h(x,y)$ respecto de la medida producto $d(\mu \times \nu) = dxdy = d\mu\, d\nu$, tenemos la <u>definición ordinaria</u> de "norma de Marcinkiewicz" o "norma débil" que se define como

$$(\{ h \}_u)^u = \sup_{\lambda > 0} \lambda^u \; (\mu \times \nu)\,(E_\lambda[h]) \quad , \tag{2}$$

donde

$$E_\lambda[h] = \{ (x,y) \subset X \times Y \quad , \quad |h(x,y)| > \lambda \} \quad ,$$

$$(\mu \times \nu)\,(E_\lambda[h]) = \int_{E_\lambda[h]} dx\, dy \tag{2a}$$

Esta norma débil es "débil" con respecto a la norma ordinaria $\|h\|_u = \|h\|_{u,u}$, pero no es adecuada como norma débil respecto de las normas mixtas $\|h\|_{u_1,u_2}$.

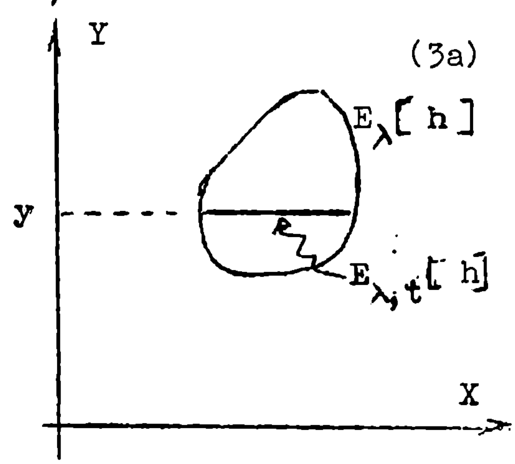
Se trata pues ahora de definir lo que se entiende por tipo débil mixto $(\bar{p},\bar{s})$, y queremos que para esta definición valga un teorema de interpolación del tipo de Marcinkiewicz. También es deseable que la definición de la norma débil mixta sea tal que para $u_1 = u_2 = u$ ella se reduzca a la definición clásica (2), o sea que el tipo débil $(\bar{p},\bar{s})$ se reduzca al tipo débil (p,s) clásico (con respecto a la medida $dxdy$), si $\bar{p} = (p,p)$, $\bar{s} = (s,s)$.

Para dar una definición de norma débil mixta que para $u_1 = u_2$ se reduce a (2) , observemos antes, que si para todo y , fijado, definimos:

$$E_{\lambda,y}[h] = \{ x \in X \,;\, |h(x,y)| > \lambda \} , \tag{3}$$

$$D(\lambda,y) = D(h(\cdot,y);\lambda) = \langle h(\cdot,y);\lambda\rangle = \mu(E_{\lambda,y}[h]) =$$

$$= \int_{E_{\lambda,y}[h]} dx , \tag{3a}$$



Entonces se tiene que

$$(\mu \times \nu)(E_\lambda[h]) = \int_Y D(\lambda,y)dy , \tag{3b}$$

De modo que podemos escribir

$$\{h\}_u = \sup_{\lambda > 0} \lambda \left(\int_Y D(\lambda,y)dy\right)^{1/u} \tag{3c}$$

Como para todo $x \in E_{\lambda,y}[h] = E_{\lambda,y}$ es $|h(x,y)| > \lambda$, tenemos que para todo $\lambda > 0$ se verifica

$$(\|h\|_{u_1,u_2})^{u_2} = \int_Y \left[|h(x,y)|^{u_1} d\mu \right]^{u_2/u_1} \geq \int_Y \left[\lambda^{u_1} (E_{\lambda,y}) \right]^{u_2/u_1} dy,$$

o sea

$$\left(\int_Y \left[\lambda^{u_1} D(\lambda,y) \right]^{u_2/u_1} dy\right)^{1/u_2} \leq \|h\|_{u_1,u_2} \qquad (3d)$$

Resulta pues natural dar la siguiente definición: llamaremos "norma" débil mixta $\bar{u}$ de $u(x,y)$ al número

$$\{h\}_{\bar{u}} = \{h\}_{u_1,u_2} = \sup_{\lambda>0} \left(\int_Y \left[\lambda^{u_1} D(\lambda,y)\right]^{u_2/u_1} dy\right)^{1/u_2} = \qquad (4)$$

$$= \|\lambda D(\lambda,y)^{1/u_1}\|_{u_2/y,\infty} = \sup_{\lambda>0} \|\lambda D(\lambda,y)^{1/u_1}\|_{u_2} = \| D(\lambda,y)^{1/u_1}\|_{L_+^{\infty}(L^{u_2})}$$

Si $u_1 = u_2 = u$ entonces la definición (4) se reduce a la definición clásica (3c).

De acuerdo a (4), diremos que el operador $h(x,y) = Tf$ es de tipo débil mixto $(\bar{r},\bar{u})$ si

$$\{Tf\}_{\bar{u}} \leq c\, \|f\|_{\bar{r}} = c\, \|f\|_{r_1,r_2}, \qquad (4a)$$

o sea si para todo $\lambda > 0$, y toda f se verifica

$$\|\lambda D(\lambda,y)^{1/u_1}\|_{u_2} = \left\{ \int_Y (\lambda D(\lambda,y)^{1/u_1})^{u_2} dy\right\}^{1/u_2} \leq c\, \|f\|_{r_1,r_2} \qquad (4b)$$

Nuevamente para $r_1 = r_2 = r$ y $u_1 = u_2 = u$ esto se reduce a la definición clásica de tipo (r,u) débil.

Estamos interesados en definir una norma mixta débil (menor que la fuerte) que tenga la propiedad de reducirse a la norma (2), en el caso $u_1 = u_2$, por las dos razones siguientes:
1º- las normas mixtas fuertes poseen tal propiedad de reducción;
2º- esta propiedad asegura que la norma débil mixta contendrá como caso particular el concepto de norma débil ordinaria, y si eventualmente valiera un teorema de interpolación para tal norma débil mixta, tendríamos una generalización del teorema clásico de Marcinkiewicz.

La primera razón es de poco peso, y lo que realmente interesa es una definición que contenga la clásica, y sobre todo que además valga un teorema de interpolación. Por eso, además de norma débil (4) que se reduce a la (2), vamos a buscar normas débiles mixtas que contengan a la definición clásica.

Con este fin observemos que si Y tiene medida total = 1 , y si $h(x,y)$ es una función tal que $h(x,y) = \varphi(x)$ para todo x, es decir constante en y , entonces las normas fuertes mixtas de $h(x,y)$ son lo mismo que las normas ordinarias de φ , y desde este punto de vista la teoría del tipo fuerte mixto contiene como caso particular a la de tipo ordinario. Por tanto , otra forma de encarar el problema, es definir normas mixtas débiles, que sean menores que las fuertes, y que tengan la pro -

piedad de reducirse a la norma débil clásica de φ en el caso particular mencionado en que $h(x,y) = \varphi(x)$ sea constante en y, $\nu(Y) = 1$. Tales definiciones "contienen" a la clásica, pero no se "reducen" formalmente a ella. Desde este otro punto de vista caben otras definiciones, distintas de la (4), pero igualmente naturales. Vamos a indicar algunas de estas otras posibles definiciones de norma débil mixta.

Llamaremos norma <u>semidébil mixta</u> $\bar{u}$ al número ($\cong$ indica equivalencia de normas):

$$\|h\|_{L^{u_2}(M^{u_1})} \cong \left\{ \int_Y \left| \sup_{\lambda>0} \lambda\, D(\lambda,y)^{1/u_1} \right|^{u_2} dy \right\}^{1/u_2} \qquad (5)$$

Más precisamente, si para cada y, $h^{\#}(\xi,y)$ es el arreglo no-creciente de $h_y(x) = h(x,y)$ (ver § 1.A) entonces

$$\|h\|_{L^{u_2}(M^{u_1})} = \left\{ \int_Y \left(\| h^{\#\#}(\xi,y)\,\xi^{1/u_1} \|_{\infty} \right)^{u_2} dy \right\}^{1/u_2} \qquad (5a)$$

Diremos que $h = Tf$ es de <u>tipo semidébil</u> $(\bar{r},\bar{u})$ mixto, si

$$\|h\|_{L^{u_2}(M^{u_1})} = \| h^{\#}(\xi, y)\,\xi^{1/u_1} \|_{\infty,u_2} \leq c\, \|f\|_{r_1,r_2} \qquad (6)$$

Como

$$\|h\|_{L^{u_2}(M^{u_1})} \cong \| \lambda D(\lambda,y)^{1/u_1} \|_{L^{u_2}(L_+^{\infty})} , \qquad (5b)$$

está claro que la definición (5) es más fuerte que la (4), o sea <u>el tipo semidébil implica al débil.</u>

Llamaremos norma <u>débil vectorial</u> $\bar{u}$ al número

$$\|h\|_{M^{u_2}(L^{u_1})} \cong \sup_{\lambda>0} \lambda \left\{ \nu \left[y \; ; \; \left(\int_X |h(x,y)|^{u_1} dx \right)^{1/u_1} > \lambda \right] \right\}^{1/u_2} \quad (6a)$$

y correspondientemente se define el <u>tipo débil vectorial</u> $(\bar{r},\bar{u})$. Mientras que (5) implica a (4), y a (2) si $u_1 = u_2$, la definición (6a) parece no implicar ni ser implicada por (4) o por (2).

Así pues, <u>para los tipos débiles mixtos se presenta un hecho contrario a lo que ocurre en caso de tipo fuerte mixto</u>: la definición vectorial (pensando a $h(x,y)$ como vector $\bar{h}(y)$ L^{u_1}) es la que menos tiene que ver con la definición ordinaria (2) de medidas productos. Nos parece que es este hecho el que pone en evidencia la falta de una teoría armónica de tipos débiles mixtos, y en este trabajo hacemos unas primeras tentativas para abordar este problema.

Si $\nu(Y) = 1$ y $h(x,y) = \varphi(x)$ entonces (5) se reduce a la definición clásica de $\|\varphi\|_{M^{u_1}}$. Si $\mu(X) = 1$ y $h(x,y) = \varphi(y)$ entonces (6a) se reduce a la norma clásica M^{u_2}. Luego ambas definiciones "contienen" a la clásica.

Pongamos ahora para cada $\lambda > 0$, $\rho > 0$:

$$D(\lambda,\rho) = \langle D(\lambda,\cdot) \; ; \rho \rangle = \nu(E \; [D(\quad ,y)]) =$$

$$= \nu(\{y; D(\lambda,y) > \rho\}) = \int_{E_\rho[D(\lambda,y)]} \cdot \; dy \qquad (7)$$

Entonces, para cada $\lambda > 0$ fijo tendremos, para todo $\rho > 0$,

$$\left(\int_Y \left[\lambda^{u_1} D(\lambda,y)\right]^{u_2/u_1} dy\right)^{1/u_2} \geq \lambda . \left(\rho^{u_2/u_1} D(\lambda,\rho)\right)^{1/u_2} = \lambda \rho^{1/u_1} D(\lambda,\rho)^{1/u_2};$$

Luego

$$\sup_{\lambda>0,\rho>0}\left\{\lambda\rho^{1/u} D(\lambda,\rho)^{1/u_2}\right\} \leq \{h\}_{\bar{u}}$$

(ver (4)). Vamos a llamar pues, <u>norma magra</u> $\bar{u}$ de h al número

$$\{\{h\}\}_{\bar{u}} = \sup_{\lambda>0,\rho>0}\left\{\lambda\rho^{1/u_1} D(\lambda,\rho)^{1/u_2}\right\} \leq \{h\}_{\bar{u}} , \qquad (7a)$$

y correspondientemente se define la noción de <u>tipo magro</u> $(\bar{r},\bar{u})$ si $\{\{Tf\}\}_{\bar{u}} \leq c \,||f||_{\bar{r}})$.

La noción de "norma" magra, o tipo magro, <u>es más débil que todas las precedentes</u>, aunque la definición ordinaria (2) En efecto, si $u_1 = u_2 = u$, la norma débil ordinaria $\{h\}_u$ es en virtud de (3c) igual a

$$\{h\}_u = \sup_{\lambda} \lambda \left(||D(\lambda,y)||_1\right)^{1/u} \qquad (3c)$$

en cambio

$$\{\{h\}\}_u = \{\{fh\}\}_{u,u} = \sup_{\lambda} \lambda\left(\{D(\lambda,y)\}_1\right)^{1/u} =$$

$$\cong \sup_{\lambda>0} \lambda\left(||D(\lambda,y)||_{M^1}\right)^{1/u} , \qquad (7b)$$

Es decir $\{\{h\}\}_u$ se obtiene de $\{h\}_u$ cambiando en (3c) la norma L^1 por la más débil M^1.

Así pues, aún para normas no mixtas, la noción de tipo magro es más general que la de tipo débil (para operadores $h = Tf$ tales que $h = h(x,y)$ es función de dos variables).

Vamos a indicar todavía otra definición natural de norma débil y magra, que llamaremos débil$^{\#}$ y magra$^{\#}$, y que tiene la ventaja de ser realmente normas (').

Si, como más arriba, $h^{\#}(\xi,y)$ es el arreglo no-creciente de $h_y(x) = h(x,y)$ entonces

$$(\|h\|_{u_1,u_2})^{u_2} = \int_Y \left[\int_0^{\infty} h^{\#}(\xi,y)^{u_1} d\xi \right]^{\frac{u_2}{u_1}} dy \cong \int_Y \left[\int_0^{\infty} h^{\#\#}(\xi,y)^{u_1} d\xi \right]^{\frac{u_2}{u_1}} dy.$$

Como $h^{\#\#}$ es no creciente tendremos que, para todo $\xi_0 > 0$,

$$(\|h\|_{u_1,u_2})^{u_2} \geq \int_Y \left[\int_0^{\xi_0} h^{\#}(\xi,y)^{u_1} d\xi \right]^{u_2/u_1} \geq$$

$$\geq \int_Y \xi_0^{u_2/u_1} h^{\#}(\xi_0,y)^{u_2} dy \sim \xi_0^{u_2/u_1} \int h^{\#\#}(\xi_0,y)^{u_2} dy.$$

Por tanto definimos, en base a esta desigualdad, la <u>norma débil$^{\#}$ $\bar{u}$ mixta</u>, que designaremos con $\{h\}^{\#}_{\bar{u}}$, mediante la fórmula:

(') Sería interesante determinar si la "norma" débil (4) y la magra (7a) son equivalentes a normas, es decir si son realmente normas.

$$\{h\}^{\#}_{\bar{u}} = \sup_{\xi>0} \xi^{1/u_1} \left(\int_Y h^{\#}(\xi,y)^{u_2} dy \right)^{\frac{1}{u_2}} = \| \xi^{1/u_1} h^{\#\#}(\xi,y) \|_{L^{\infty}_{+}(L^{u_2})} , \tag{7c}$$

cuya analogía con (4) es clara. Por lo dicho sobre $h^{\#\#}$,(7c) es una norma.

Análogamente definimos la <u>norma magra</u>$^{\#}$ $\bar{u}$ mixta como

$$\{\{h\}\}^{\#}_{\bar{u}} = \sup_{\xi>0,\eta>0} \xi^{1/u_1} \eta^{1/u_2} h^{\#\#}(\xi,\eta) \tag{7d}$$

donde $h^{\#}(\xi,\eta)$ es la ordenación no-creciente de la función $h^{\#}_{\xi}(y) = h^{\#}(\xi,y)$.

Escribiendo (7a) en la forma

$$\{\{h\}\}_{\bar{u}} = \sup_{\rho>0} \rho^{1/u_1} \{D^{-1}(\lambda,\rho)\}_{M^{u_2}} , \tag{7a}$$

donde, para cada $\rho>0$, $D^{-1}(\lambda,\rho)$ es la inversa de la función no creciente $D(\lambda,\rho)$,

y (7d) en la fo..na:

$$\{\{h\}\}^{\#}_{\bar{u}} = \sup_{\xi>0} \xi^{1/u_1} \| h^{\#\#}(\xi,y) \|_{M^{u_2}} \tag{7d}$$

queda ahora clara la analogía de las definiciones de tipo magro y tipo magro$^{\#}$, y que (7d) es norma.

Si $\nu(Y) = 1$ y $h(x,y)$ no depende de y , (7c) se reduce a la norma débil M^{u_1} , clásica. Luego todas las definicio nes dadas de tipo débil mixto "contienen" como caso particular la definición clásica, y todo teorema de interpolación para uno de estos tipos débiles constituirá una generalización del teorema de Marcinkiewicz. Vamos a indicar a continuación algunos tales teoremas de interpolación.

2.B. Comencemos con el caso más simple en que las diferentes definiciones dadas más arriba coinciden. Más precisamente, consideremos antes el caso particular de un operador

$$h(y) = Tf \quad , \quad f = f(x,y) \tag{\#}$$

que hace corresponder a toda función elemental $f(x,y)$, $(x,y) \in X \times Y$, de dos variables, una función $h(y)$ de una sola variable. f será considerada con norma mixta, pero h con norma o norma o norma débil no mixta, pues depende de una sola variable. En otros términos, comencemos con la interpolación de tipos semi-mixtos $(\bar{r},u)$.

2.B.1. LEMA. Si $h(y) = Tf$, $f = f(x,y)$, es un operador lineal de tipo débil $(\bar{p},s)$ así como de tipo débil $(\bar{q},t)$, es decir si

$$||h||_{M^s} \leq M_1 \, ||f||_{p_1,p_2} \quad \text{y} \quad ||h||_{M^t} \leq M_2 \, ||f||_{q_1,q_2} \tag{8}$$

entonces T es de tipo débil $(\bar{r},u)$, para todo par $\bar{r},u$ que verifica

$$1/\bar{r} = (1-\theta)/\bar{p} + \theta/\bar{q} \quad , \quad 1/u = (1-\theta)/s + \theta/t \quad , \qquad (8a)$$

y se tiene

$$\|h\|_{M^u} \leq c\, M_1^{1-\theta} M_2^{\theta} \|f\|_{\bar{r}} \qquad (8b)$$

Demostración. Indiquemos, para todo par de espacios de Banach A_0, A_1, con $[A_0, A_1]_\theta$ el espacio intermediario de Calderón (ver 1.G.). Por 1.G.1. tenemos que, tomando en cuenta (8a), $L^{r_2}(L^{r_1}) = [L^{p_2}(L^{p_1}) ; L^{q_2}(L^{q_1})]_\theta$. Por hipótesis T lleva en forma continua $L^{p_2}(L^{p_1})$ en M^s y $L^{q_2}(L^{q_1})$ en M^t, luego por el teorema de interpolación de la teoria de Calderón - Lions (ver 1.G.), tenemos que:

$$\|h\|_{[M^s, M^t]_\theta} \leq c.M_1^{1-\theta} M_2^{\theta} \|f\|_{L^{r_2}(L^{r_1})} = c.M_1^{1-\theta} M_2^{\theta}\|f\|_{\bar{r}} \; .$$

De (24) del § 1.G. y de 1.E.3. , 1.E.1. y de (8a) , recordando que M^s es el espacio de Lorentz $L_{(s,\infty)}$, resulta que $\|h\|_{M^u} \leq \|h\|_{[M^s,M^t]_\theta}$, que junto con la desigualdad precedente da la tesis (8b) , c.d.d.

2.B.2. TEOREMA. Sea $h = Tf$ un operador lineal tal que $h(y) = [Tf](y)$ es función de la sola variable y . Si T es de tipo débil $(\bar{p}, s)$ asi como de tipo débil $(\bar{q}, t)$, es decir si T verifica (8), entonces T es de tipo fuerte $(\bar{r}, u)$ y verifica

$$||Tf||_{L^u} \leq c_\theta M_1^{1-\theta} M_2^{\theta} ||f||_{\bar{r}} \quad , \ (c_\theta = c_\theta(u,p,s,\bar{r})) \ , \qquad (8c)$$

para todo par $\bar{r},u$ que verifica (8a) y la condición

$$u > \bar{r} \quad . \qquad (8d)$$

Si T es tan solo sublineal, la tesis persiste si en vez de (8d) se cumple

$$s \geq \bar{p} \quad , \qquad t \geq \bar{q} \qquad (8e)$$

Por lo ya dicho, siempre supondremos

$$s < u < t \quad , \qquad \bar{p} < \bar{r} < \bar{q} \qquad (8f)$$

Demostración: Aplicando el lema anterior con $\theta = \theta_1$, $\theta = \theta_2$, donde θ_1 y θ_2 son arbitrariamente próximos al θ dado de (8a), $\theta_1 < \theta < \theta_2$, resulta que T, si es lineal, será aún de tipo débil $(\bar{p}_1, s_1)$ y $(\bar{q}_1, t_1)$ donde $\bar{p}_1$ y $\bar{q}_1$ son arbitrariamente próximos a $\bar{r}$, y s_1, t_1 próximos a u . De (8d) resultará entonces que $\bar{p}_1 \leq s_1$, $\bar{q}_1 \leq t_1$; luego, si T es lineal, podemos suponer que (llamando $\bar{p}_1 = p$, $\bar{q}_1 = q$) se verificará la condición (8e). Así pues, basta probar que si T es sublineal y si se verifican (8e) entonces (8) y (8a) implican (8c); es decir basta demostrar el teorema para T sublineal y con las condiciones (8e) . Además podemos imponer

$$||f||_{\bar{r}} = 1 \qquad (8g)$$

Usando las primeras fórmulas ( ) , ( ) del § 1.A. tendremos

$$(\|(Tf)\|(y)\|_u)^u = u\int_0^\infty \lambda^{u-1} D(\lambda)d\lambda = 2^u u \int_0^\infty \lambda^{u-1} D(2\lambda)d\lambda, \quad (8h)$$

donde $\qquad D(\lambda) = D(Tf,\lambda) = \langle Tf,\lambda\rangle \quad .$

Observemos que de (8a) se obtiene para θ el valor:

$$\theta = \frac{\frac{1}{u}-\frac{1}{s}}{\frac{1}{t}-\frac{1}{s}} = \frac{u-s}{t-s}\,\frac{t}{u} = \frac{\frac{u-s}{s}}{\frac{u-s}{s}-\frac{u-t}{t}} = \frac{\frac{1}{r_i}-\frac{1}{p_i}}{\frac{1}{q_i}-\frac{1}{p_i}} = \frac{r_i-p_i}{q_i-p_i}\,\frac{q_i}{r_i}, \quad (i=1,2) \qquad (8i)$$

de donde se deducen en seguida la siguient identidad ya usada por Zygmund en la demostración del teorema de Marcinkiewicz para normas no-mixtas:

como

$$1-\theta = \frac{\frac{1}{t}-\frac{1}{u}}{\frac{1}{t}-\frac{1}{s}} = \frac{t-u}{t-s}\,\frac{s}{u} = \frac{q_i-r_i}{q_i-p_i}\,\frac{p_i}{r_i} = \frac{\frac{1}{q_i}-\frac{1}{r_i}}{\frac{1}{q_i}-\frac{1}{p_i}}, \qquad (8i)$$

$$\frac{\theta}{1-\theta} = \frac{r_i-p_i}{q_i-r_i}\,\frac{q_i}{p_i} = \frac{u-s}{t-u}\,\frac{t}{s}, \qquad (8i)$$

podemos poner

$$v = \frac{r_i-p_i}{u-s}\,\frac{s}{p_i} = \frac{q_i-r_i}{t-u}\,\frac{t}{q_i}, \qquad (9)$$

y tendremos

$$u = s + \frac{r_i-p_i}{v}\,\frac{s}{p_i} = t + \frac{r_i-q_i}{v}\,\frac{t}{q_i} \qquad (9a)$$

Además de la identidad (9a), ya usada por Zygmund, vamos a necesi tar para el caso de normas mixtas estas otras identidades:

$$\frac{s\left(\frac{r_2}{r_1}-\frac{p_2}{p_1}\right)}{p_2(u-s)} = \frac{t\left(\frac{r_2}{r_1}-\frac{q_2}{q_1}\right)}{q_2\,(u-t)} \quad \underline{\underline{(\text{definición})}} \quad \alpha \tag{9b}$$

$$\left(\frac{t}{q_2}-\frac{s}{p_2}\right)\frac{s-u}{s-t}+\frac{s}{p_2} = \frac{u}{r_2} \tag{9c}$$

La igualdad (9c) es inmediata si se la escribe en la forma

$$\frac{1}{p_2}\left(s-\frac{s(s-u)}{s-t}\right)+\frac{1}{q_2}\,\frac{t(s-u)}{s-t} = \frac{u}{r_2}$$

y se toma en cuenta los valores de θ y $1-\theta$, pues en esta forma ella se reduce a una de las condiciones (8a): $\frac{1}{r_2}=\frac{1-\theta}{p_2}+\frac{\theta}{q_2}$.

Para probar la identidad (9b), se observa que dividiendo por r_2p_2 y r_2q_2 ella se escribe

$$\frac{\frac{1}{p_2}\frac{1}{r_1}-\frac{1}{p_1}\frac{1}{r_2}}{\frac{1}{s}-\frac{1}{u}} = \frac{\frac{1}{q_2}\frac{1}{r_1}-\frac{1}{q_1}\frac{1}{r_2}}{\frac{1}{t}-\frac{1}{u}} ,$$

lo que, en virtud de $1/s - 1/u = 1/s - (1-\theta)/s - \theta/t = \theta(\frac{1}{s}-\frac{1}{t})$, $1/t - 1/u = (1-\theta)(1/t - 1/s)$, equivale a

$$(1-\theta)\,(1/p_2\;1/r_1 - 1/p_1\;1/r_2) = -\theta\,(1/q_2\;1/r_1 - 1/q_1\;1/r_2),$$

y la última relación equivale a

$$\frac{1}{r_1}\left(\frac{1-\theta}{p_2}+\frac{\theta}{q_2}\right) = \frac{1}{r_2}\left(\frac{1-\theta}{p_1}+\frac{\theta}{q_1}\right) ,$$

o sea $a \,.\, 1/r_1 \; 1/r_2 = 1/r_2 \; 1/r_1$, en virtud de (8a), lo que prueba (9c) .

Con α definido por (9b) , y con v definido por (9), ponemos ahora:

$$b(y) = \left(\int_X |f(x,y)|^{r_1} \, dx \right)^{\alpha} , \tag{9d}$$

$$(y) = \left(\frac{\lambda}{b(y)} \right)^{1/v} \tag{9e}$$

y de la definición de α tendremos

$$\frac{r_2}{r_1} = \frac{p_2}{p_1} + \alpha(u-s)\frac{p_2}{s} = \frac{q_2}{q_1} + \alpha(u-t)\frac{q_2}{t} \tag{9f}$$

De (9f) y (9) tendremos también

$$\frac{\alpha(r_1-p_1)}{v}\,\frac{p_2}{p_1} = \frac{r_2}{r_1} - \frac{p_2}{p_1} \quad , \quad \frac{\alpha(r_1-q_1)}{v}\,\frac{q_2}{q_1} = \frac{r_2}{r_1} - \frac{q_2}{q_1} . \tag{9g}$$

Con $\lambda(y)$ definido por (9e) y (9d) , tendremos para cada $\lambda > 0$, y para cada $y \in Y$,

$$f(x,y) = f^{\lambda(y)}(x,y) + f_{\lambda(y)}(x,y) ,$$

luego

$$|Tf| \leq |T(f^{\lambda(y)})| + |T(f_{\lambda(y)})| .$$

Poniendo

$$D(\lambda) = D(Tf,\lambda) = \langle Tf, \lambda \rangle ,$$

$$D^{\lambda(y)}(\lambda) = D(\, T(f^{\lambda(y)}),\, \lambda\,) = \langle\, T\left[f^{(\lambda(y))} \right]; \lambda \rangle \quad ,$$

$$D_{\lambda(y)}(\lambda) = D(T(f_{\lambda(y)}); \lambda\,) \quad , \tag{9h}$$

tendremos

$$D(2\quad) \leq D^{\lambda(y)}(\lambda) + D_{\lambda(y)}(\lambda) \quad ,$$

de modo que de (8h) obtenemos

$$(\|\left[Tf \right](y)\|_u)^u \leq 2^u u \left\{ \int_0^\infty \lambda^{u-1} D^{\lambda(y)}(\lambda)\, d\lambda + \right.$$

$$\left. + \int_0^\infty \lambda^{u-1} D_{\lambda(y)}(\lambda)\, d\lambda \right\} \quad .$$

Aplicando las hipótesis del teorema obtenemos

$$(\|Tf\|_u)^u \leq 2^u u \left\{ M_1^s \underbrace{\int_0^\infty \lambda^{u-1-s} (\|f^{\lambda(y)}\|_{\bar{p}})^s d\lambda}_{(I)} + \right.$$

$$\left. + M_2^t \underbrace{\int_0^\infty \lambda^{u-1-t} (\|f_{\lambda(y)}\|_{\bar{q}})^t d\lambda}_{(II)} \right\} =$$

$$= 2^u u \left\{ M_1^s . I + M_2^t . II \right\} \quad . \tag{9i}$$

Tenemos

$$I^{\frac{p_2}{s}} = \left\{ \int_0^\infty \lambda^{u-s-1} \left[\int_Y \left(\int_X |f^{\lambda(y)}(x,y)|^{p_1} dx \right)^{\frac{p_2}{p_1}} dy \right]^{s/p_2} d\lambda \right\}^{p_2/s} \quad .$$

Como $s/p_2 \geq 1$, aplicando la desigualdad integral de Minkowski, con la medida $\lambda^{u-s-1}d\lambda$, tendremos

$$I^{p_2/s} \leq \int_Y \left[\int_0^\infty \lambda^{u-s-1} \left(\int_X |f^{\lambda(y)}(x,y)|^{p_1} dx \right)^{s/p_1} d\lambda \right]^{p_2/s} dy \quad .$$

Como $s/p_1 \geq 1$, aplicando nuevamente la desigualdad integral de Minkowski en el corchete, tendremos

$$I^{p_2/s} \leq \int_Y \left[\int_X \left(\int_0^\infty \lambda^{u-s-1} |f^{\lambda(y)}(x,y)|^s d\lambda \right)^{p_1/s} dx \right]^{p_2/p_1} dy \quad .$$

Como $f^{\lambda(y)}(x,y) = 0$ si $|f(x,y)| < \lambda(y) = (\lambda/b(y))^{1/v}$, es decir si

$$\lambda > b(y)\ |f(x,y)|^v \quad ,$$

la última desigualdad se escribe

$$I^{\frac{p_2}{s}} \leq \int_Y \left[\int_X \left(\int_0^{b(y)|f(x,y)|^v} \lambda^{u-s-1} |f(x,y)|^s d\lambda \right)^{\frac{p_1}{s}} dx \right]^{p_2/p_1} dy =$$

$$= \int_Y \left[\int_X |f(x,y)|^{p_1} \left(\int_0^{b(y)|f|^v} \lambda^{u-s-1} d\lambda \right)^{p_1/s} dx \right]^{p_2/p_1} dy \quad .$$

El paréntesis en la última integral es integrable pues $u > s$, por tanto

$$I^{p_2/s} \leq \text{cst.} \int_Y \left[\int_X |f(x,y)|^{p_1} |f(x,y)|^{v(u-s)p_1/s} b(y)^{\frac{(u-s)p_1}{s}} dx \right]^{\frac{p_2}{p_1}} dy =$$

$$= c. \int_Y b(y)^{(u-s)p_2/s} \left[\int_X |f(x,y)|^{p_1 + v(u-s)\frac{p_1}{s}} dx \right]^{p_2/p_1} dy \quad .$$

Por (9a) es $p_1+v(u-s)(p_1/s) = r_1$, de modo que el último corchete es igual a $\left[\int_X |f(x,y)|^{r_1}dx\right]^{p_2/p_1}$, y por la definición (9d) de $b(y)$ y por (9f) es

$$b(y)^{(u-s)\frac{p_2}{s}}\left[\int_X |f(x,y)|^{r_1}dx\right]^{p_2/p_1} =$$

$$= \left[\int_X |f(x,y)|^{r_1}dx\right]^{\frac{p_2}{p_1}+\alpha(u-s)\frac{p_2}{s}} = \left[\int_X |f(x,y)|^{r_1}dx\right]^{r_2/r_1} ,$$

de modo que la última desigualdad viene

$$I^{p_2/s} \leq c\int_Y \left[\int_X |f(x,y)|^{r_1}dx\right]^{r_2/r_1}dy = c(||f||_{\bar{r}})^{r_2} .$$

Luego, si $||f||_{\bar{r}} = 1$, podemos escribir

$$I \leq \left(\frac{c}{u-s}\right)^{s/p_2} ||f||_{\bar{r}} \qquad (9k)$$

Análogamente para la integral II tenemos

$$II^{\frac{q_2}{t}} = \left\{\int_0^\infty \lambda^{u-t-1}\left[\int_Y \left(\int_X |f_{\lambda(y)}(x,y)|^{q_1}dx\right)^{\frac{q_2}{q_1}} dy\right]^{t/q_2} d\lambda\right\}^{\frac{q_2}{t}} ,$$

y como $t \geq q_1,q_2$, aplicando sucesivamente, dos veces, la desigualdad de Minkowski, primero en la llave con la medida $\lambda^{u-t-1}d\lambda$, luego en el corchete, obtendremos que

$$II^{q_2/t} \leq \int_Y \left[\int_X \left(\int_0^\infty \lambda^{u-t-1}|f_{\lambda(y)}(x,y)|^t d\lambda\right)^{\frac{q_1}{t}} dx\right]^{q_2/q_1} dy ,$$

y teniendo en cuenta que ahora $f_{(y)} = 0$ si $\lambda < b(y)|f(x,y)|^v$,

tendremos que

$$II^{q_2/t} \leq \int_Y \left[\int_X |f(x,y)|^{q_1} \left(\int_{b(y)|f(x,y)|^v}^{\infty} \lambda^{u-t-1} d\lambda \right)^{q_1/t} dx \right]^{q_2/q_1} dy \ .$$

Como $u - t > 0$, teniendo en cuenta que por (9) es

$$q_1 + v(u-t)\frac{q_1}{t} = r_1 \ ,$$

la última desigualdad se escribe

$$II^{q_2/t} \leq \frac{c}{t-u} \int_Y b(y)^{(u-t)\frac{q_1}{t}} \left(\int_X |f(x,y)|^{r_1} dx \right)^{q_2/q_1} dy \ .$$

Teniendo nuevamente en cuenta la definición de $b(y)$ y la segunda igualdad de (9f), resulta:

$$II^{\frac{q_2}{t} r_2} \leq \frac{c}{t-u} ||f||_{\bar{r}} \ ,$$

que para $||f||_{\bar{r}} = 1$ da

$$II \leq \left(\frac{c}{t-u} \right)^{t/q_2 r_2} ||f||_{\bar{r}}$$

donde c es una constante fija. De la última desigualdad y de (9k), (9i) resulta que

$$||Tf||_u \leq c_{u,t,s,\bar{r}} \left\{ M_1^{s/r} + M_2^{t/u} \right\} ||f||_{\bar{r}} \ , \qquad (9\ell)$$

si $||f||_{\bar{r}} = 1$. Por la homogeneidad de las normas (9ℓ) es cierta para toda $f \in L^{\bar{r}}$, lo que prueba la parte esencial del teorema.

Si en vez de $\lambda(y)$ tomamos $A\lambda(y)$, donde A es una constante arbitraria, por un artificio ya varias veces mencionado(ver también final de 2.B.3.), obtendríamos en la última desigualdad, el factor $A^{u-s}M_1^s + A^{u-t}M_2^s$, y eligiendo A para que ambos sumandos sean iguales, (9e) se reducirá a

$$||Tf||_u \leq c_{u,t,s,\bar{r}} \; M_1^{1-\theta} \; M_2^{\theta} \; ||f||_{\bar{r}} \quad ,$$

c.d.d.

Al comienzo de la demostración de 2.B.2. (tan solo en su primera parte) hemos usado el lema que precede el cual se probó usando la teoría general de interpolación. Sin embargo, también este lema puede demostrarse directamente, con el mismo procedimiento de 2.B.2., sin recurrir a la teoría general y en forma más precisa, como sigue (esta demostración será usada más adelante):

<u>2.B.3. Demostración directa de LEMA: Si el operador sublineal</u> $h(y) = Tf$ <u>es de tipo débil semi-mixto</u> $(\bar{p},s)$ <u>con constante</u> M_1 <u>y de tipo débil semi-mixto</u> $(\bar{q},t)$, <u>con constante</u> M_2, <u>entonces</u> T <u>es de tipo débil semi-mixto</u> $(\bar{r},u)$, <u>si se verifica</u>

$$\frac{1}{\bar{r}} = \frac{1-\theta}{\bar{p}} + \frac{\theta}{\bar{q}} \quad , \quad \frac{1}{u} = \frac{1-\theta}{p} + \frac{\theta}{s} \quad , \tag{8a}$$

<u>y con constante</u> $M \leq c.M_1^{1-\theta} M_2^{\theta}$.

<u>Demostración</u>. Supondremos por ejemplo $p_1 < r_1 < q_1$. Sea $\lambda > 0$ fijo, cuyo valor determinaremos luego, y $b(y)$, $\lambda(y)$ definidos por (9d) y (9e) . Entonces con las notaciones (9h) tendre

mos que, teniendo en cuenta (9d), (9c), (9f),

$$D(a) \leq D^{\lambda(y)}\left(\frac{a}{2}\right) + D_{\lambda(y)}\left(\frac{a}{2}\right) \leq \left(\frac{M_1 \| f^{\lambda(y)} \|_{\bar{p}}}{a/2}\right)^s + \left(\frac{M_2 \| f_{\lambda(y)} \|_{\bar{q}}}{a/2}\right)^t =$$

$$= \left(\frac{2M_1}{a}\right)^s \left(\int_Y \left[\int_X |f^{\lambda(y)}(x,y)|^{p_1} dx \right]^{\frac{p_2}{p_1}} dy \right)^{\frac{s}{p_2}} +$$

$$+ \left(\frac{2M_2}{a}\right)^t \left(\int_Y \left[\int_X |f_{\lambda(y)}(x,y)|^{q_1} dx \right]^{q_2/q_1} dy \right)^{t/q_2} \leq$$

$$\leq \left(\frac{2M_1}{a}\right)^s \left(\int_Y \left[\int_X \lambda(y)^{p_1 - r_1} |f(x,y)|^{r_1} dx \right]^{p_2/p_1} dy \right)^{s/p_2} +$$

$$+ \left(\frac{2M_2}{a}\right)^t \left(\int_Y \left[\int_X \lambda(y)^{q_1 - r_1} |f(x,y)|^{r_1} dx \right]^{q_2/q_1} dy \right)^{t/q_2} =$$

$$= \left(\frac{2M_1}{a}\right)^s \left\{ \int_Y \lambda^{(p_1 - r_1)p_2/vp_1} b(y)^{(r_1 - p_1)p_2/vp_1} \left[\int_X |f|^{r_1} dx \right]^{\frac{p_2}{p_1}} dy \right\}^{\frac{s}{p_2}} +$$

$$+ \left(\frac{2M_2}{a}\right)^t \left\{ \int_Y \lambda^{(q_1 - r_1)q_2/vq_1} b(y)^{(r_1 - q_1)q_2/vq_1} \left[\int_X |f|^{r_1} dx \right]^{\frac{q_2}{q_1}} dy \right\}^{t/q_2} =$$

$$= \left(\frac{2M_1}{a}\right)^s \lambda^{(p_1 - r_1)s/vp_1} \left\{ \int_Y \left[\int_X |f|^{r_1} dx \right]^{\frac{p_2}{p_1} + \alpha \frac{(r_1 - p_1)}{v} \frac{p_2}{p_1}} dy \right\}^{s/p_2} +$$

$$+ \left(\frac{2M_2}{a}\right)^t \lambda^{\frac{(q_1 - r_1)}{v} \frac{t}{q_1}} \left\{ \int_Y \left[\int_X |f|^{r_1} dx \right]^{\frac{q_2}{q_1} + \alpha \frac{(r_1 - q_1)}{v} \frac{q_2}{q_1}} dy \right\}^{t/q_2} .$$

Por (9) es

$$\frac{p_1 - r_1}{v}\,\frac{s}{p_1} = s - u \;, \qquad \frac{q_1 - r_1}{v}\,\frac{t}{q_1} = t - u \;,$$

y por (9) y (9b) es

$$\frac{p_2}{p_1} + \alpha\,\frac{(r_1 - p_1)}{v}\,\frac{p_2}{p_1} = \frac{p_2}{p_1} + \alpha\,\frac{p_2}{s}\,(u-s) = \frac{r_2}{r_1} \;,$$

$$\frac{q_2}{q_1} + \alpha\,\frac{(r_1 - q_1)}{v}\,\frac{q_2}{q_1} = \frac{r_2}{r_1} \;,$$

Luego, la desigualdad precedente se escribe:

$$D(a) \leq 2^s\,\frac{M_1^s}{a^s}\,\lambda^{s-u}\,(\|f\|_{\bar{r}})^{\frac{r_2}{p_2}s} + 2^t\,\frac{M_2^t}{a^t}\,\lambda^{t-u}\,(\|f\|_{\bar{r}})^{\frac{r_2}{q_2}t} \;.$$

Eligiendo ahora λ para que los dos últimos sumandos sean iguales, es decir

$$\lambda^{s-t} = \frac{M_2^t}{M_1^s}\,a^{t-s}\,(\|f\|_{\bar{r}})^{r_2\left(\frac{t}{q_2} - \frac{s}{p_2}\right)} \;,$$

y usando la identidas (9c), se obtiene

$$D(a) \leq \left(\frac{2\,M_1^{1-\theta}\,M_2^{\theta}\,\|f\|_{\bar{r}}}{a}\right)^u \;,$$

o sea T es de tipo débil semi-mixto $(\bar{r}, u)$ con constante

$$M \leq 2\,M_1^{1-\theta}\,M_2^{\theta} \;,$$

c.d.d.

2.B.4. NOTA. De 2.B.2. y 2.B.3. obtenemos pues una demostración directa (sin usar la teoría general de interpolación) del teorema de Marcinkiewicz para tipos débiles semi-mixtos en "el triángulo inferior" de los tipos $s \geq \bar{p}$, $t \geq \bar{q}$. En el caso particular $s_2 = r_2 = q_2$, el teorema 2.B.2. ya fué probado por Benedek-Calderón-Panzone [2] . Desde el punto de vista de la teoría general de Lions-Peetre, 2.B.2. tiene el sentido siguiente: Vimos que el teorema de "mayoración" (15) de 1.E. es una generalización de la última parte de la demostración de Zygmund, es decir una generalización de la siguiente propiedad de los espacios L^p : para toda f L^r existe un v tal que

$$(\|\lambda^{\frac{u-s}{s}} f^{\lambda v}\|_{L^s_+(L^p)})^s + (\|\lambda^{\frac{u-t}{t}} f_{\lambda v}\|_{L^t_+(L^q)})^t \leq c\,(\|f\|_r)^u \;, \qquad (\#)$$

si $p < s$, $q < t$, $\frac{1}{u} = \frac{1-\theta}{s} + \frac{\theta}{t}$, $\frac{1}{r} = \frac{1-\theta}{p} + \frac{\theta}{q}$.

Como el teorema 1.E.4. de Lions-Peetre no permite expresar $L^{r_2}(L^{r_1}) = L^{\bar{r}}$ como espacio intermedio de $L^{\bar{p}}$ y $L^{\bar{q}}$, si $r_1 \neq r_2$, el teorema de mayoración (15) tampoco proporciona una generalización de (#) para normas mixtas (bajo la hipótesis (8e)). La demostración directa dada de 2.B.2. constituye esencialmente una generalización de (#), es decir una mayoración de la forma (15), para normas mixtas, puesto que en 2.B.2. se probó la desigualdad (9k) para I y II, que puede escribirse así:

$$\left[\|\lambda^{\frac{u-s}{s}}f(\ /b(y))^{1/v}\|_{L_+^s(L^{\bar{p}})}\right]^s+\left[\|\lambda^{\frac{u-t}{t}}f(\lambda/b(y))^{1/v}\|_{L_+^t(L^{\bar{q}})}\right]^t \leq$$

$$\leq c(\|f\|_{\bar{r}})^u \qquad (\#\#)$$

que es (#) con normas mixtas. (##) puede escribirse también así:

$$S(s, \frac{u-s}{s}, L^{\bar{p}} ; t , \frac{u-t}{t} , L^{\bar{q}}) \succ L^{\bar{r}} , \qquad (\#\#\#)$$

si $s \geq \bar{p}$, $t \geq \bar{q}$ (') .

De (###), y usando 1.E.1., 1.E.2., 1.E.3., se obtiene en particular el siguiente corolario:

2.B.5. COROLARIO. Sean A_0, A_1 dos espacios de Banach, como en § 1.E. Si, para $i = 0,1$, es $B_i \prec S(\infty, \theta_i, A_0 ; \infty, \theta_i-1, A_1)$, y si T es un operador lineal que lleva continuamente $L^{\bar{p}}$ en B_0 y $L^{\bar{q}}$ en B_1 , entonces T es continuo de $L^{\bar{r}}$ en $B=S(w_0, \beta_0, A_0; w_1, \beta_1, A_1)$, si además de (8a) y (8e) se verifican:

(') El teorema 2.B.2. puede probarse sin las condiciones s $\bar{p}$, t $\bar{q}$, usando la idea de la demostración del teorema de Marcinkiewicz (para el triángulo superior) dada por M.Cotlar. Como esta demostración no fué publicada aún, no vamos a entrar aquí en los perfeccionamientos del teorema 2.B.2. de este tipo, que pueden encontrar aplicación en la teoría de los espacios H_p con normas mixtas.

$$(1-\theta_0)\,\beta_0+\theta_0\,\beta_1=\theta\ ,\quad (1-\theta_1)\,\beta_0+\theta_1\,\beta_1=\theta-1\ ,$$

$$\frac{1-\theta_0}{w_0}+\frac{\theta_0}{w_1}=\frac{1}{s}\ ,\quad \frac{1-\theta_1}{w_0}+\frac{\theta_1}{w_1}=\frac{1}{t}\ ,\quad \theta_0<\frac{o}{o-1}<\theta_1$$

En efecto, por el teorema de interpolación de Lions-Peetre T es continuo de $S(s,\frac{u-s}{s},L^{\bar p};\ t,\frac{u-t}{t},L^{\bar q})$ en $S(s,\frac{u-s}{s},B_0;t,\frac{u-t}{t},B_1)$. Por 1.E.1., 1.E.2. y 1.E.3., y por las condiciones que preceden sobre los θ_i y β_i, el último espacio es $\prec$ B y por tanto T es continuo de $S(s,\frac{u-s}{s},L^{\bar p};t,\frac{u-t}{t},L^{\bar q})$ en B. De (###) sigue entonces que T es continuo de $L^{\bar r}$ en B ,

c.d.d.

El último corolario puede extenderse, con hipótesis adicionales, sustituyendo $L^{\bar p}$ por un $L^{\bar p}(C_0)$ y $L^{\bar q}$ por un $L^{\bar q}(C_1)$, pero no vamos a detenernos aquí en estas generalizaciones (como ya se mencionó en la introducción, no hemos considerado la formulación del presente trabajo en términos de la teoría general de interpolación).

En el parágrafo que sigue vamos a abordar el teorema de Marcinkiewicz para tipos débiles (o semidébiles, o magros) mixtos, o sea el caso de un operador que es de tipo débil mixto $(\bar p,\bar s)$ y $(\bar q,\bar t)$ y trataremos de probar que es de tipo fuerte $(\bar r,\bar u)$ si $1/\bar u = 1-\theta/\bar s-\theta/\bar t$. Antes de pasar a estos teoremas haremos las siguientes observaciones preliminares:

2.B.6. Para probar el teorema de interpolación de Marcinkiewicz (para alguna de las nociones de tipo débil que se considere) es suficiente probar los dos hechos siguientes: a) que vale un lema del tipo 2.B.1. , es decir que si T es de tipo débil en los "extremos" $(\bar{p},\bar{s})$ y $(\bar{q},\bar{t})$ entonces es de tipo débil en todo punto "interior" $(\bar{r},\bar{u})$; b) para todo f $L^{\bar{r}}$ es $Tf \in L^{\bar{u}}$.

En efecto, por el teorema de Banach del gráfico cerrado, para probar que T es continuo de $L^{\bar{r}}$ en $L^{\bar{u}}$, basta probar que $f_n - f$ en $L^{\bar{r}}$ y $Tf_n - h$ en $L^{\bar{u}}$ implican $h = Tf$. Como convergencia fuerte implica la débil (para la noción de tipo débil que se considere), tenemos que la "norma débil" de $h - Tf_n$ tiende a cero. En virtud de a) , $f_n - f$ en $L^{\bar{r}}$ implica que Tf_n tiende débilmente a Tf . Como Tf_n tiende débilmente a h , resulta $h = Tf$, c.d.d.

2.B.7. Si las funciones $h = Tf$ están definidas en el espacio $X' \ Y'$ con medida $\mu_1 * \nu_1$, entonces al demostrar el teorema de Marcinkiewicz se puede suponer que $\mu_1(X') < \infty$, $\nu_1(Y') < \infty$ son de masa total finita. En efecto, sean $X_1 \subset \ldots \subset X_n \subset \ldots \nearrow X'$, X_n de medida finita y análogamente $Y_n \nearrow Y'$. Sea $T_n f = h_n$ la restricción de $h = Tf$ a $X_n \times Y_n$, Los puntos (x,y) de $X_n \times Y_n$ en los cuales $T_n f = Tf(x,y) < \lambda$ forman un conjunto menor que los correspondientes puntos de $X' \ Y'$, Luego $T_n f$ es con más razón de tipo débil $(\bar{p},\bar{s})$ y $(\bar{q},\bar{t})$ y con constantes (nor -

mas débiles) M_1 y M_2, respectivamente. Si el teorema es cierto para medidas finitas tendremos entonces que $||T_n f||_{\bar{u}} \leq c\, M_1^{1-\theta} M_2^{\theta} ||f||_{\bar{r}}$, o sea $\left\{ \int_{Y_n} \left[\int_{X_n} |Tf|^{u_1} dx \right]^{u_2/u_1} dy \right\}^{1/u_2} \leq c\, M_1^{1-\theta} M_2^{\theta} ||f||_{\bar{r}}$. Pasando al límite resulta la desigualdad correspondiente para X' Y' .

2.B.8. Se puede suponer que X', Y' tienen medidas totales iguales a uno.

En efecto, sea $\mu_c = \frac{1}{c}\mu$, $\nu_d = \frac{1}{d}\nu$. Para y fijo,
$\mu_c \{x\,;\, h(x,y) > \lambda\} = \frac{1}{c}\mu\{x, h > \lambda\}$, $D_c(\lambda,y) \leq \frac{1}{c} D(\lambda,y)$,
$|| D_c(\lambda,y)^{1/s_1} ||_{s_2} = \left\{ \int \lambda^{s_2} D_c(\lambda,y)^{s_2/s_1} d\nu_d \right\}^{1/s_2} \leq$
$(1/c)^{s_1} \cdot \left\{ \int \lambda^{s_2} D(\lambda,y)^{s_2/s_1} d\nu_d \right\}^{1/s_2} \leq (1/c)^{s_1} . (1/d^{s_2}) || D(\lambda,y)^{\frac{1}{s_1}} ||_{s_2} \leq$
$\leq M_1 ||f||_p$. Luego $|| \lambda D_c(\lambda,y)^{1/s_1} ||_{s_2} \leq (\frac{1}{c})^{\frac{1}{s_1}} (\frac{1}{d})^{\frac{1}{s_2}} M_1 ||f||_p$,
o sea en las nuevas medidas es T de tipo débil $(\bar{p},\bar{s})$ con constante $(1/c)^{1/s_1}(1/d)^{1/s_2} M_1$, análogamente con constante $(1/c)^{1/t_1}(1/d)^{1/t_2} M_2$ para el tipo $(\bar{q},\bar{t})$. Si $\frac{1}{c}\mu(X') = 1$, $\frac{1}{d}\nu(Y') = 1$, y el teorema es cierto para este caso, tendremos que $\left\{ \int_Y \left[\int_X |Tf|^{u_1} d\mu_c \right]^{u_2/u_1} d\nu_d \right\}^{1/u_2} = (\frac{1}{c})^{1/u_1} (\frac{1}{d})^{1/u_2} ||Tf||_{\bar{u}} \leq$
$\leq \text{cst.}((1/c)^{1/s_1}(1/d)^{1/s_2} M_1)^{1-\theta} ((1/c)^{1/t_1}(1/d)^{1/t_2} M_2)^{\theta} ||f|| =$
$= (1/c)^{1/u_1}(1/d)^{u_2} M_1^{1-\theta} M_2^{\theta} ||f||_{\bar{r}}$, puesto que $\frac{1-\theta}{s_i} + \frac{\theta}{t_i} = \frac{1}{u_i}$.

Luego resulta también $||Tf||_u \leq \text{cst.}\, M_1^{1-\theta} M_2^{\theta} ||f||_{\bar{r}}$, c.d.d.

Hemos hecho la demostración para el caso del tipo débil mixto, pero la misma se repite igual para tipo semidébil o magro.

Con razonamientos del todo análogos a 2.B.7. y 2.B.8. se prueba que:

<u>2.B.9. Podemos suponer que también el espacio</u> X Y (<u>donde están definidas las</u> f <u>de</u> $h = Tf$) <u>tiene medida total</u> $\mu(X) = \mu(Y) = 1$. <u>O sea se podrá suponer que los espacios tienen medida 1, al probar el teorema de Marcinkiewicz para normas mixtas</u> débiles, semidébiles o magras. Con el mismo razonamiento se ve que se puede suponer $M_1 \geq 1$, $M_2 \geq 1$ (o bien $M_1 \leq 1$, $M_2 \leq 1$) .

§ 3. INTERPOLACION CON TIPOS SEMIDEBILES, DEBILES Y MAGICOS

3.A. Comenzaremos con la consideración del tipo semidébil para el cual la extensión del teorema de Marcinkiewicz-Zygmund no presenta dificultades. Como ya señalamos en el parágrafo 2, si bien el tipo semidébil no se reduce al tipo débil ordinario para $p_1 = p_2$, el teorema de Marcinkiewicz que daremos para tipos semidébiles contendrá al teorema clásico de Marcinkiewicz como caso particular. Extenderemos también a tipos semidébiles el teorema de Cotlar-Bruschi que unifica a los dos teoremas de interpolación de Riesz y Marcinkiewicz.

3.A.1. TEOREMA. Sea $h(x,y) = Tf$, $f = f(x,y)$, $(x,y) \in X\ Y$, un operador sublineal que es de tipo semidébil mixto $(\bar{p},\bar{s})$ y de tipo semidébil $(\bar{q},\bar{t})$ en el "triángulo inferior"

$$p_2 \leq s_1\ ,\ q_2 \leq t_1\quad ,\quad \bar{s} < \bar{u}\quad \bar{u} = (u_1,u_2)\quad , \tag{1}$$

es decir que verifica

$$||Tf||_{L^{s_2}(M^{s_1})} \lesssim M_1\ ||f||_{\bar{p}}\quad ,\quad ||Tf||_{L^{t_2}(M^{t_1})} \lesssim M_2||f||_{\bar{q}} \tag{2}$$

Entonces T es de tipo fuerte mixto $(\bar{r},\bar{u})$, es decir verifica

$$||Tf||_{\bar{u}} \leq c(\bar{p},\bar{q},\bar{r},\bar{s},\bar{t})\ M_1^{1-\theta}\ M_2^{\theta}\ ||f||_{\bar{r}}\quad , \tag{2a}$$

para todo $(\bar{r},\bar{u})$ tales que

$$1/\bar{r} = (1-\theta)/\bar{p} + \theta/\bar{q} \quad , \quad 1/\bar{u} = (1-\theta)/\bar{s} + \theta/\bar{t} \quad , \quad u_1 \leq u_2 \quad (1a)$$

Demostración: a) Vamos a probar antes el teorema bajo la condición adicional:

$$s_2 \geq s_1 \geq p_2 \quad , \quad t_2 \geq t_1 \geq q_2 \qquad (1b)$$

Con el artificio mencionado repetidamente, basado en la homogeneidad de las normas y en el cambio de λ por $A\lambda$ donde A es una constante apropiada, podemos limitarnos al caso $||f||_{\bar{r}} = 1$ y a probar la tesis (2a) con $c\,(M_1^{s_1}+M_2^{t_1})\,||f||_{\bar{r}}$ en vez de $c\,M_1^{1-\theta}\,M_2^{\theta}\,||f||_{\bar{r}}$.

Definimos v y α como en (9) y (9b) del parágrafo 2, y para cada $y\in Y$ definimos $b(y)$ por la fórmula (9d) del § 2, y como allí ponemos, para cada λ , y para y :

$$\lambda(y) = \left(\frac{\lambda}{b(y)}\right)^{1/v} ,$$

$$f(x,y) = f^{\lambda(y)}(x,y) + f_{\lambda(y)}(x,y) \quad , \quad |Tf| \leq |T(f^{\lambda(y)})| + |T(f_{\lambda(y)})| ,$$

$$D(\lambda,y) = \mu(\{x\in X \; ; \; |Tf(x,y)| > \lambda\}) \quad ,$$

$$D^{\lambda(y)}(a,y) = \mu(\{x\in X \; ; \; \left|[Tf^{\lambda(y)}](x,y)\right| > a\}) \quad ,$$

$$D(2a,y) \leq D^{\lambda(y)}(a,y) + D_{\lambda(y)}(a,y) \quad . \qquad (3)$$

Indicando las constantes fijas con c , tendremos (!) :

(!) por falta de espacio, ver pie de la página siguiente.

$$(\|Tf\|_{\bar u})^{u_2} = \int_Y \Big[\int_0^\infty \lambda^{u_1} D(\lambda,y)\,\frac{d\lambda}{\lambda}\Big]^{u_2/u_1} dy =$$

$$= \int_Y \Big[\int_0^\infty (A_y\lambda)^{u_1} D(A_y\lambda,y)\,\frac{d\lambda}{\lambda}\Big]^{u_2/u_1} dy \leq$$

$$c\Big\{\int_Y \Big[\int_0^\infty (A_y\lambda)^{u_1} (D^{\lambda(y)}(A_y\lambda,y)+D_{\lambda(y)}(A_y\lambda,y))\,\frac{d\lambda}{\lambda}\Big]^{u_2/u_1} dy =$$

$$= c\int_Y \Big[A_y^{u_1-s_1} \int_0^\infty \lambda^{u_1-s_1} (A_y\lambda)^{s_1} D^{\lambda(y)}(A_y\lambda,y)\,\frac{d\lambda}{\lambda}\Big]^{u_2/u_1} dy +$$

$$+ c\int_Y \Big[A_y^{u_1-t_1} \int_0^\infty \lambda^{u_1-t_1} (A_y\lambda)^{t_1} D_{\lambda(y)}(A_y\lambda,y)\,\frac{d\lambda}{\lambda}\Big]^{u_2/u_1} dy \leq$$

$$c\int_Y A_y^{(u_1-s_1)\frac{u_2}{u_1}} \Big[\int_0^\infty \lambda^{u_1-s_1} (\|Tf^{\lambda(y)}(\cdot,y)\|_{M^{s_1}})^{s_1}\,\frac{d\lambda}{\lambda}\Big]^{u_2/u_1} dy +$$

$$+ c\int_Y A_y^{(u_1-t_1)\frac{u_2}{u_1}} \Big[\int_0^\infty \lambda^{u_1-t_1} (\|Tf_{\lambda(y)}(\cdot,y)\|_{M^{t_1}})^{t_1}\,\frac{d\lambda}{\lambda}\Big]^{u_2/u_1} dy =$$

$$= c\int_Y \Big\{ A_y^{\frac{u_1-s_1}{u_1}u_2} \Big[\| \lambda^{\frac{u_1-s_1}{s_1}} Tf^{\lambda(y)} \|_{L_+^{s_1}(M^{s_1})} \Big]^{s_1(u_2/u_1)} +$$

$$+ A_y^{\frac{u_1-t_1}{u_1}} \Big[\| \lambda^{\frac{u_1-t_1}{t_1}} Tf_{\lambda(y)} \|_{L_+^{t_1}(M^{t_1})} \Big]^{t_1(u_2/u_1)} \Big\} dy \quad .$$

(') La letra "y" en $\lambda(y)$ ó en $D^{\lambda(y)}$, nada tiene que ver con la "y" de la integra dy . Es decir la función f está descompuesta para cada λ en una suma $f = f_{\lambda,1}+f_{\lambda,2}$ donde $f_{\lambda,1} = f^{\lambda(y)}$, $f_{\lambda,2} = f_{\lambda(y)}$. $D^{\lambda(y)}(\lambda,y)$ indica $\langle Tf_{\lambda,1}(\cdot,y)>\lambda\rangle$ y por tanto $\lambda(y)$ es un símbolo que no tiene que ver con la $y\in Y$ de $D(\lambda,y)$ ó dy . Seria mejor escribir $D^{\lambda(\cdot)}(\lambda,y)$.

Eligiendo para cada $y \in Y$ la constante A_y de modo que ambos sumandos de la última expresión sean iguales, se obtiene, como ya se mencionó repetidamente, la desigualdad:

$$(\|Tf\|_{\bar{u}})^{u_2} \leq \int_Y \left[\| \lambda^{\frac{u_1-s_1}{s_1}} Tf^{\lambda(y)} \|_{L_+^{s_1}(M^{s_1})} \right]^{(1-\theta)u_2} \cdot$$

$$\cdot \left[\| \lambda^{\frac{u_1-t_1}{t_1}} Tf_{\lambda(y)} \|_{L_+^{t_1}(M^{t_1})} \right]^{\theta u_2} dy \quad . \tag{3a}$$

como

$$\frac{1-\theta}{s_2} u_2 + \frac{\theta u_2}{t_2} = \left(\frac{1-\theta}{s_2} + \frac{\theta}{t_2} \right) u_2 = 1 \quad ,$$

podemos aplicar a la última integral la desigualdad de Hölder con exponentes $\frac{1-\theta}{s_2} u_2$, $(\theta u_2)/t_2$, y obtendremos:

$$\|Tf\|_{\bar{u}} \leq \left[\int_Y (\| \lambda^{\frac{u_1-s_1}{s_1}} Tf^{\lambda(y)} \|_{L_+^{s_1}(M^{s_1})})^{s_2} dy \right]^{(1-\theta)/s_2} \cdot$$

$$\cdot \left[\int_Y (\| \lambda^{\frac{u_1-t_1}{t_1}} Tf_{\lambda(y)} \|_{L_+^{t_1}(M^{t_1})})^{t_2} dy \right]^{\theta/t_2} =$$

$$= \left\{ \int_Y \left[\int_0^\infty \lambda^{u_1-s_1} (\|Tf^{\lambda(y)}\|_{M^{s_1}})^{s_1} \frac{d\lambda}{\lambda} \right]^{s_2/s_1} dy \right\}^{(1-\theta)/s_2} \cdot$$

$$\cdot \left\{ \int_Y \left[\int_0^\infty \lambda^{u_1-t_1} (\|Tf_{\lambda(y)}\|_{M^{t_1}})^{t_1} \frac{d\lambda}{\lambda} \right]^{t_2/t_1} dy \right\}^{\theta/t_2} \tag{3b}$$

Como $s_2/s_1 \geq 1$, $t_2/t_1 \geq 1$, podemos aplicar, en cada una de las llaves de (3b), la desigualdad integral de Minkowski con las medidas $\lambda^{u_1-s_1-1}d\lambda$ y dy , de modo que de (3b) obtenemos la desigualdad:

$$||Tf||_{\bar{u}} \leq \left\{\int_0^\infty \lambda^{u_1-s_1}\left[\int_Y (||Tf^{\lambda(y)}||_{M^{s_1}})^{s_2}dy\right]^{s_1/s_2}\frac{d\lambda}{\lambda}\right\}^{\frac{1-\theta}{s_1}} \cdot$$

$$\cdot \left\{\int_0^\infty {}^{u_1-t_1}\left[\int_Y (||Tf_{\lambda(y)}||_{M^{t_1}})^{t_2}dy\right]^{t_1/t_2}\frac{d\lambda}{\lambda}\right\}^{\theta/t_1} \qquad (3c)$$

En virtud de las hipótesis (2), obtenemos de (3c) que (no confundir la y de $\lambda(y)$ con la de dy , ver la nota al pié de la página 90, después de (3)):

$$||Tf||_{\bar{u}} \leq \left\{\int_0^\infty \lambda^{u_1-s_1}(||f^{\lambda(y)}||_{\bar{p}})^{s_1}\frac{d\lambda}{\lambda}\right\}^{\frac{1-\theta}{s_1}}\left\{\int_0^\infty \lambda^{u_1-t_1}(||f_{\lambda(y)}||_{\bar{q}})^{t_1}\frac{d\lambda}{\lambda}\right\}^{\frac{\theta}{t_1}}$$

La última desigualdad se escribe también así:

$$||Tf||_{\bar{u}} \leq (||\lambda^{\frac{u_1-s_1}{s_1}}||f^{\lambda(y)}||_{L^{p_2}(L^{p_1})}||_{L_+^{s_1}})^{1-\theta}(||\lambda^{u_1-t_1}||f_{\lambda(y)}||_{\bar{q}}||_{L_+^{t_1}})^{\theta} =$$

$$=(||\lambda^{\frac{u_1-s_1}{s_1}} f^{\lambda(y)}||_{L_+^{s_1}(L^{\bar{p}})})^{1-\theta}(||\lambda^{\frac{u_1-t_1}{t_1}} f_{\lambda(y)}||_{L_+^{t_1}(L^{\bar{q}})})^{\theta} \qquad (3d)$$

De (3d) y de (##) de 2.B.4. resulta la tesis (2a).

b) Trataremos ahora de eliminar las condiciones adicionales impuestas $s_2 \geq s_1$, $t_2 \geq t_1$, dejando tan solo las hipòtesis $u_1 \leq u_2$, $p_2 \leq s_1$, $q_2 \leq t_1$.

Sea $h(x,y) = [Tf](x,y)$, y para cada $y \in Y$ fijo sea $h^{\#}(\xi,y)$ la ordenación no-creciente de $h(x,y) = h_y(x)$ (considerada función de x), de modo que $\xi \in [0,\infty)$ y $h^{\#}(\xi,y)$ es no creciente y equimedible con $h_y(x) = h(x,y)$, para cada $y \in Y$, y sea $h^{\#\#}(\xi,y)$ la función correspondiente (ver § 1). Pongamos

$$Sf = h_1(\xi,y) = \xi^c h^{\#\#}(\xi,y) , \tag{4}$$

de modo que Sf es todavía sublineal en virtud de lo visto en el § 1 sobre la correspondencia $h \to h^{\#\#}$. Al operador Sf lo consideramos no con respecto de la medida $d\xi \times d\nu$ donde ν es la medida de Y sino respecto de la medida $\mu_\xi \times \nu$ donde es dada por

$$d\mu_\xi = \xi^{-cu_1} d\xi \quad , \qquad dy = d\nu_y \tag{4a}$$

Se tendrá entonces que

$$||Sf||_{\bar{u}} = \left(\int_Y \left[\int_0^\infty |h_1(\xi,y)|^{u_1} d\mu_\xi \right]^{u_2/u_1} dy \right)^{1/u_2} =$$

$$= \left(\int_Y \left[\int_0^\infty \xi^{cu_1} |h^{\#\#}(\xi,y)|^{u_1} \xi^{-cu_1} d\xi \right]^{u_2/u_1} dy \right)^{1/u_2} ,$$

de modo que

$$||Sf||_{L^{\bar{u}}(\mu_\xi \times \nu)} = ||Tf||_{L^{\bar{u}}(\mu \times \nu)} \tag{4b}$$

Por ser $h^{\#\#}$ equimedible con $h(x,y)$, tenemos que (ver § 1) :

$$\xi^c h^{\#\#}(\xi,y) = \xi^{c-(1/s_1)} \xi^{1/s_1} h^{\#\#}(\xi,y) \leq \xi^{c-(1/s_1)} ||h(\cdot,y)||_{M^{s_1}}$$

Luego, si $c \geq 1/s_1$, $h_1(\xi,y) > \lambda$ implica $\xi^{c-(1/s_1)} >$ $> \lambda/||h||_{M^{s_1}}$, de modo que

$$\mu_\xi(\{\xi;\ h_1(\xi,y) > \lambda\}) \leq \int_{(\lambda/||h||_{M^{s_1}})^{1/(c-(1/s_1))}}^{\infty} d\mu_\xi =$$

$$= \int_{(\lambda/\{h\}_{s_1})^{1/(c-(1/s_1))}}^{\infty} \frac{d\xi}{\xi^{cu_1}} = \text{cst.}\left(\frac{||h(\cdot,y)||_{M^{s_1}}}{\lambda}\right)^{\frac{s_1}{cs_1-1}(cu_1-1)} =$$

$$= \text{cst}\left(\frac{||h(\cdot,y)||_{M^{s_1}}}{\lambda}\right)^{\alpha s_1} \tag{4c}$$

donde

$$\alpha = \frac{u_1 - \frac{1}{c}}{s_1 - \frac{1}{c}} \tag{4d}$$

De (4c) sigue que $\lambda D(h_1(\cdot,y),\lambda)^{1/\alpha s_1} \leq ||h(\cdot,y)||_{M^{s_1}}$,
o sea que

$$||h_1(\cdot,y)||_{M^{\alpha s_1}(d\mu_\xi)} \leq ||h||_{M^{s_1}} \qquad ,$$

y por tanto

$$||h_1||_{L^{s_2}(M^{s_1})} \leq ||h||_{L^{s_2}(M^{s_1})} \leq \text{cst.}||f||_{\bar{p}} \qquad ,$$

y definitivamente

$$||Sf||_{L^{s_2}(M^{\alpha s_1})} \leq \text{cst. } M_1 \, ||f||_{\bar{p}} \tag{4e}$$

donde la norma $M^{\alpha s_1}$ se toma respecto de la medida $d\mu_\xi$ y L^{s_2} respecto de $y \in Y$.

En forma completamente análoga obtenemos que

$$||Sf||_{L^{t_2}(M^{\beta t_1})} \leq \text{cst. } M_2 \, ||f||_{\bar{q}}$$

con

$$\beta = \frac{u_1 - \frac{1}{c}}{t_1 - \frac{1}{c}} \tag{4f}$$

y se tiene que

$$\frac{1}{u_1} = \frac{1-\theta}{\alpha s_1} + \frac{\theta}{\beta t_1} \tag{4g}$$

pues

$$\frac{1-\theta}{\alpha s_1} + \frac{\theta}{\beta t_1} = \frac{s_1 - 1/c}{u_1 - 1/c}\,\frac{1-\theta}{s_1} + \frac{t_1 - 1/c}{u_1 - 1/c}\,\frac{\theta}{t_1} =$$

$$= \frac{1}{u_1 - 1/c}\left(1-\theta - \frac{1}{c}\frac{1-\theta}{s_1} + \theta - \frac{1}{c}\frac{\theta}{t_1}\right) = \frac{1}{u_1 - 1/c}\left(1 - \frac{1}{c}\frac{1}{u_1}\right) = \frac{1}{u_1}$$

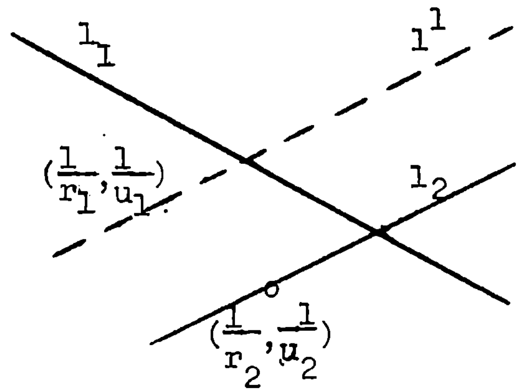
Eligiendo $1/c < s_1 < u_1$, se ve que β puede tomarse arbitrariamente con tal que sea $\beta < 1$, y análogamente $\alpha > 1$. Podemos pues hacer $\beta t_1 \leq t_2$, de modo que por (4f), Sf será de tipo semidébil $(\bar{q}, \bar{t}')$ donde

$$\bar{t}' = (t_1', t_2') \quad , \text{ y } \quad t_2' = t_2 \geq t_1' = \beta t_1 \quad . \tag{4h}$$

Análogamente Sf es de tipo semidébil $(\bar{p}, \bar{s}')$ donde $\bar{s}' =$
$= (\alpha s_1, s_2)$. Como $u_2 \geq u_1$, de (4g) y (4h) tendremos también $s_2' \geq s_1'$.

En virtud de (4b) la tesis $||Tf||_{\bar{\ }}$ equivale a $||Sf||_{\bar{u}} \leq M||f||_{\bar{r}}$, pero Sf cumple las mismas hipótesis de semitipo débil que Tf y verifica las hipótesis adicionales de a), y el θ es el mismo por (4g). Luego la demostración se reduce al caso a) ya probado, c.d.d.

NOTA. El significado "gráfico" de lo que se hizo en la parte b) de la demostración es el siguiente. Si l_1 es el segmento (en el cuadrado de los tipos) que pasa por los puntos $(\frac{1}{p_1}, \frac{1}{s_1})$, $(\frac{1}{q_1}, \frac{1}{t_1})$ y $(\frac{1}{r_1}, \frac{1}{u_1})$, y si l_2 se define análogamente con p_2, r_2, q_2, entonces en b) se mostró que l_1 puede girarse de modo que pase siempre por $(\frac{1}{r_1}, \frac{1}{u_1})$ (condición (4g)) y que en vez de $(\frac{1}{q_1}, \frac{1}{t_1})$ pase por cualquier otro punto $(\frac{1}{q_1}, \frac{1}{t'})$ con $t' \leq t_1$. Luego l' puede llevarse a una posición paralela a l_2 de modo que se verifiquen las condiciones adicionales de la parte a) de la demostración.



Observemos todavía que si $u_1 = u_2$ entonces este procedimiento de b) permite reducir el caso de tipo semidébil mixto a semidébil semi-mixto, pues entonces l' coincidirá con l_2 . Esto permite obtener <u>extensiones del teorema 3.A.1. al "triángulo superior"</u> de los tipos (ver la nota al pie, al final de 2.B.4.)

<u>3.A.2.</u> Vamos a extender ahora para tipos semidébiles el teorema mencionado de Cotlar-Bruschi.

Como la idea esencial de este teorema se basa en la demostración que se dió en [5 , pág. 197] del teorema de Riesz para operadores sublineales, bastará mostrar que esta demostración se extiende a normas mixtas. Veamos pues, que combinando la idea de [5] con el procedimiento usado en los teoremas precedentes se puede probar también el teorema de interpolación de Riesz, para operadores sublineales reales:

<u>3.A.3.</u> <u>TEOREMA (DE RIESZ para operadores sublineales reales).</u>
<u>Si</u> $h(x,y) \doteq Tf$, $f = f(x,y)$, <u>es un operador sublineal de tipo fuerte</u> $(\bar{p},\bar{s})$ <u>y de tipo fuerte</u> $(\bar{q},\bar{t})$, es <u>decir si</u>

$$||Tf||_{\bar{s}} \leq M_1 \; ||f||_{\bar{p}} \quad , \quad ||Tf||_{\bar{t}} \leq M_2 \; ||f||_{\bar{q}} \tag{5}$$

entonces Tf es de tipo fuerte $(\bar{r},\bar{u})$ para todo $\bar{r},\bar{u}$ que verifica (1) y (1a), y se tiene que

$$||Tf||_{\bar{u}} \leq c \; M_1^{1-\theta} \; M_2^{\theta} \; ||f||_{\bar{r}} \quad , \tag{5a}$$

donde esta vez c es una constante absoluta ($\leq 9e^2$) independiente de θ (')

Demostración. Pongamos, para cada $y \in Y$,

$$J_y = \int_0^{\infty} \lambda^{u_1} D(\lambda,y) \frac{d\lambda}{\lambda} \tag{5b}$$

Usando las notaciones de la demostración del teorema precedente , tendremos:

$$J_y = \int_0^{\infty} A_y^{u_1} \; \lambda^{u_1} \; D(\lambda A_y,y) \frac{d\lambda}{\lambda} = a^{u_1} b^{u_1} \int_0^{\infty} A_y^{u_1} \lambda^{u_1} D(\lambda A_y ab,y) \frac{d\lambda}{\lambda}$$

Multiplicando ambos miembros de la última igualdad por $a^{s_1-u_1-1} b^{t_1-u_1-1}$, integrando respecto de a y b de 1 a 2 , e indicando con c_i constantes fijas, tendremos:

(') En cambio, en el teorema de Marcinkiewicz, y en particular en 3.A.1., la constante $c = c(\theta)$ tiende al infinito si θ tiende a cero o a uno.

$$\frac{c_1}{(u_1-s_1)(t_1-u_1)}\, J_y = \int_1^2 a^{s_1-1}da \int_1^2 b^{t_1-1}db \int_1^{2} A_y^{u_1} \lambda^{u_1} D(\lambda A_y ab,y)\frac{d\lambda}{\lambda} \leq$$

$$c_2 \int_1^2 b^{t_1-1}db \int_1^2 a^{s_1-1}da \int_1^{\infty} A_y^{u_1} \lambda^{u_1}\left[D^{(y)} + D_{\lambda(y)}(\lambda A_y ab,y)\right] \frac{d\lambda}{\lambda} \leq$$

$$c_2 \int_1^2 b^{t_1-s_1-1}db\; A_y^{u_1-s_1} \int_0^{\infty} \lambda^{u_1-s_1}\frac{d\lambda}{\lambda} \int_0^{\infty} a^{s_1} D^{\lambda(y)}(a,y)\,\frac{da}{a} \;+$$

$$+\; c_3 \int_1^2 a^{s_1-t_1-1}da\; A_y^{u_1-t_1} \int_0^{\infty} \lambda^{u_1-t_1}\frac{d\lambda}{\lambda} \int_0^{\infty} b^{t_1} D_{\lambda(y)}(b,y)\,\frac{db}{b} \leq$$

$$\frac{c_2}{t_1-s_1}\, A_y^{u_1-s_1} \int_0^{\infty} \lambda^{u_1-s_1}\frac{d\lambda}{\lambda}\left(||Tf^{\lambda(y)}||_{L^{s_1}}\right)^{s_1} \;+$$

$$+\; \frac{c_3 A_y^{u_1-t_1}}{t_1-r_1} \int_0^{\infty} \lambda^{u_1-t_1}\left(||Tf_{\lambda(y)}||_{L^{t_1}}\right)^{t_1} \frac{d\lambda}{\lambda}$$

Elevando ambos miembros de esta desigualdad a la potencia u_2/u_1 e integrando en y , obtendremos

$$\left(\frac{1}{(u_1-s_1)(s_1-t_1)}\right)^{\frac{u_2}{u_1}} \int_Y \left[\int_X |Tf|^{u_1}dx\right]^{\frac{u_2}{u_1}} dy =$$

$$= \left(\frac{1}{(u_1-s_1)(t_1-u_1)}\right)^{\frac{u_2}{u_1}} \int_Y J_y^{u_2/u_1}\, dy \leq$$

$$c_4 \left(\frac{1}{t_1-s_1}\right)^{\frac{u_2}{u_1}} \int_Y \left\{ A_y^{\frac{u_1-s_1}{u_1}} \left| \left|\left| \lambda^{\frac{u_1-s_1}{s_1}} \| Tf^{\lambda(y)} \|_{L^{s_1}} \right|\right|_{L_+^{s_1}} \right|^{s_1 \frac{u_2}{u_1}} + \right.$$

$$\left. + A_y^{\frac{u_1-t_1}{u_1}u_2} \left[\left|\left| \lambda^{\frac{u_1-t_1}{t_1}} \| Tf_{\lambda(y)} \|_{L^{t_1}} \right|\right|_{L_+^{t_1}} \right]^{t_1 \frac{u_2}{u_1}} \right\} dy \qquad (5c)$$

Eligiendo ahora, para cada y, la constante A_y de modo que ambos sumandos del integrando sean iguales, podremos terminar la demostración exactamente del mismo modo como en 3.A.1. a partir de la (3a), con la diferencia que en vez de aplicar la hipó - tesis (2) a las normas $L^{s_2}(M^{s_1})$, $L^{t_2}(M^{t_1})$, ahora se aplicará la hipótesis (5) a $\| Tf^{\lambda(y)} \|_{L^{s_2}(L^{s_1})}$ y a $\| Tf_{\lambda(y)} \|_{L^{t_2}(L^{t_1})}$, y además con la diferencia esencial que en la desigualdad final tendremos una constante de la forma

$$c \left(\frac{1}{(t_1-s_1)(t_1-u_1)} + \frac{1}{(t_1-s_1)(u_1-s_1)} \right)^{u_2/u_1},$$

y que para $t_1 \to u_1$ o para $s_1 \to u_1$, esta constante es del mismo orden que la que acompaña a la integral del miembro izquierdo de (5c). Luego obtendremos la misma conclusión que en 3.A.1. pero con una constante c fija que no tiende al infinito si $\bar{s}$ o $\bar{t}$ tienden a $\bar{u}$, lo que prueba que vale (5a),

c.d.d.

Para cada $y \in Y$ fijo, por ser $D(\ ,y)$ no creciente en λ, se deduce de

$$s_1 \int_0^{\infty} \lambda^{s_1-1} D(\lambda, y)\, d\lambda = (||h(\cdot,y)||_{s_1})^{s_1}$$

que para todo n vale la desigualdad (ver [ ], pág. 200):

$$\left\{h(\cdot,y)\right\}_{s_1,n} = \sup_{\lambda} \lambda \left(\sum_{i=1}^{n} \left\{ i^{s_1} - (i-1)^{s_1} \right\} D(i\lambda, y) \right)^{1/s_1} \leq$$

$$\leq ||h(\cdot,y)||_{s_1}$$

Diremos pues que $h = Tf$ es de <u>tipo n-semidébil</u> $(\bar{p},\bar{s})$ si

$$\left\{ \int_Y \left(\left\{ Tf(\cdot,y) \right\}_{s_1,n} \right)^{s_2} dy \right\}^{1/s_2} \cong ||Tf||_{L^{s_2}(X^{s_1,n})} \leq M\, ||f||_{\bar{p}} \qquad (5d)$$

Para $n = 1$ obtenemos la definición de tipo semidébil dado más arriba, para $n = \infty$ obtenemos esencialmente la definición de tipo fuerte mixto. De la demostración de 3.A.3. y 3.A.1. ya está claro que esta demostración puede aplicarse a tipos n-semidébiles. Para evitar repeticiones con notaciones cansadoras enviamos para detalles a la nota de Cotlar-Bruschi, y nos limitamos a enunciar el resultado final, que es:

<u>3.A.4.</u> <u>TEOREMA.</u> <u>Si el operador sublineal</u> $h(x,y) = Tf$, $f = f(x,y)$, <u>es simultáneamente de tipo n-semidébil</u> $(\bar{p},\bar{s})$ y $(\bar{q},\bar{t})$, <u>con constantes</u> M_1, M_2, <u>entonces</u> T <u>es de tipo fuerte</u>

$(\bar{r},\bar{u})$ para todo $\bar{r},\bar{u}$ que verifica (1) y (1a) , y se tiene además

$$(1-(n+1)^{-\delta})^{1/u_1} \|Tf\|_{\bar{u}} \leq c(\bar{u})\, M_1^{1-\theta} M_2^{\theta} \|f\|_{\bar{r}} \tag{5e}$$

donde $\delta = \inf \{u_i - s_i \, ; \, t_i - u_i\}$ $(i=1,2)$, y $c(\bar{u})$ solo depende de $\bar{u}$ y $\bar{r}$.

Si $n = 1$, tendremos en (5e) una constante que tiende a infinito si $\bar{s}$ ó $\bar{t}$ tienden a $\bar{u}$, es decir para $n = 1$ el teorema 3.A.4. se reduce a 3.A.1.; para $n = \infty$, el primer factor de (5e) se hace uno y obtenemos una desigualdad con constante fija, o sea para $n = \infty$, 3.A.4. se reduce a 3.A.3. Asi pues para tipos mixtos semidébiles se puede aún unificar los teoremas de interpolación de Riesz y Marcinkiewicz (en el triángulo inferior).

3.B. La interpolación con tipos débiles mixtos o con débiles vectoriales parece presentar dificultades mucho más serias. Usando el procedimiento de 3.A. vamos a dar un teorema de interpolación para el caso de tipos débiles pero con condiciones adicionales bastante restrictivas, aún en el triángulo inferior de los tipos. No hemos podido establecer un teorema de interpolación para tipos débiles vectoriales, cuestión que no vamos a considerar aquí, y que más bien se relaciona con el problema de interpolación de productos tensoriales, tema que estudian Cotlar y Oklander. Como ya indicamos, por lo menos la definición formal de tipo débil vectorial parece estar desvinculada de la definición clásica (para el caso $r_1 = r_2$) . Usando una idea de E . Stein estableceremos una relación entre tipo débil y tipo vectorial bajo leves condiciones adicionales y que reduce la interpolación con tipos débiles a la con tipos vectoriales. Mantendremos todas las notaciones precedentes.

3.B.1. TEOREMA. *Si el operador sublineal* $h(x,y) = Tf$, $f = f(x,y)$, *es de tipo débil mixto* $(\bar{p},\bar{s})$ *con* $s_2/s_1 \geq u_2/u_1$, *es decir si para todo* $\lambda > 0$ *es*

$$\left\{\int_Y \left(\lambda D(\lambda ,y)^{1/s_1}\right)^{s_2} dy\right\}^{1/s_2} \leq M_1 \,||f||_{\bar{p}} \;,\; 1 \leq \frac{s_2}{s_1} \geq \frac{u_2}{u_1} \tag{6}$$

y si T es de tipo débil $(\bar{q},\bar{t})$ *con* $t_2/t_1 \geq u_2/u_1$:

$$||\lambda D(\lambda ,y)^{1/t_1}||_{t_2} \leq M_2 \,||f||_{\bar{q}} \;,\; 1 \leq t_2/t_1 \geq u_2/u_1 \;, \tag{6a}$$

entonces T es de tipo fuerte $(\bar{r},\bar{u})$, *suponiendo como siempre que*

$$\frac{1}{\bar{r}} = \frac{1-\theta}{\bar{p}} + \frac{\theta}{\bar{q}} \;,\; \frac{1}{\bar{u}} = \frac{1-\theta}{\bar{s}} + \frac{\theta}{\bar{t}} \;,\; 0 < \theta < 1 \;, \tag{1a}$$

$$p_1 \leq s_1 \;,\; q_1 \leq t_1 \tag{1}$$

Demostración. Como siempre supondremos $||f||_{\bar{r}} = 1$. Por lo dicho en 2.B.9 podemos suponer que los espacios X e Y tienen

medida total igual a uno, de modo que las funciones acotadas serán integrables y sólo interesarán los puntos donde el integrando es > 1 . Para evitar confusiones escribiremos $D^{\lambda(\cdot)}(\lambda,y)$ en lugar de $D^{\lambda(y)}(\lambda,y)$, es decir $D^{\lambda(\cdot)}(\lambda,y) = \langle Tf^{\lambda(\cdot)}(x,y) > \lambda \rangle$.
Tenemos:

$$||Tf||_{\bar{u}} \leq c \left\{ \int_Y \left[\int_0^\infty \lambda^{u_1} D^{\lambda(\cdot)}(\lambda,y) \frac{d\lambda}{\lambda} \right]^{u_2/u_1} dy \right\}^{1/u_2} +$$

$$+ c \left\{ \int_Y \left[\int_0^\infty \lambda^{u_1} D_{\lambda(\cdot)}(\lambda,y) \frac{d\lambda}{\lambda} \right]^{u_2/u_1} dy \right\}^{1/u_2} = cI + cII \quad .$$

Como suponemos medida de $Y = 1$, la integral extendida a los puntos y para los cuales el integrando es menor que 1, es $1 = ||f||_{\bar{r}}$, de modo que sin perder generalidad podemos suponer que los corchetes, en la igualdad anterior, son ≥ 1 para todo y . Como $u_2/u_1 \geq s_2/s_1 \geq 1$ podemos entonces escribir que

$$I^{u_2\frac{s_1}{s_2}} \leq \left\{ \int_Y \left[\int_0^\infty \lambda^{u_1} D^{\lambda(\cdot)}(\lambda,y) \frac{d\lambda}{\lambda} \right]^{s_2/s_1} dy \right\}^{s_1/s_2} \leq$$

$$\leq \int_0^\infty \lambda^{u_1-s_1} \left[\int_Y (\lambda D^{\lambda(\cdot)}(\lambda,y)^{1/s_1})^{s_2} dy \right]^{\frac{s_1}{s_2}} \frac{d\lambda}{\lambda}$$

Aplicando la hipótesis (6) ,

$$I^{u_2\frac{s_1}{s_2}} \leq \int_0^\infty \lambda^{u_1-s_1} \left[M_1 ||f^{(\cdot)}||_{\bar{p}} \right]^{s_1} \frac{d\lambda}{\lambda} =$$

$$= M_1^{s_1} \int_0^{\infty} (\lambda^{\frac{u_1-s_1}{s_1}} \| f^{\lambda(\cdot)} \|_{\bar{p}})^{s_1} \frac{d\lambda}{\lambda} ,$$

$$I^{u_2 s_2} \leq M_1 \| \lambda^{\frac{u_1-s_1}{s_1}} f^{(\cdot)} \|_{L_+^{s_1}(L^{\bar{p}})}$$

En virtud de (##) de 2.B.4. , y como hemos supuesto $\|f\|_{\bar{r}} = 1$, obtenemos $I \leq c_1 M_1 \|f\|_{\bar{r}}$, y análogamente en forma simétrica se prueba que $II \leq c_2 M_2 \|f\|_{\bar{r}}$, lo que prueba la tesis .

<u>3.B.2. Corolario.</u> <u>Si</u> $1 \leq s_2/s_1 = u_2/u_1$, <u>y si se verifican las condiciones del triángulo inferior (1) y (1a) , entonces si un operador sublineal</u> T <u>es de tipo débil</u> $(\bar{p},\bar{s})$ <u>y de tipo débil</u> $(\bar{q},\bar{t})$, T <u>resulta ser de tipo fuerte</u> $(\bar{r},\bar{u})$.

En efecto, basta observar que en virtud de

$$\frac{1}{u_2} = \frac{1-\theta}{s_2} + \frac{\theta}{t_2} , \quad \frac{1}{u_1} = \frac{1-\theta}{s_1} + \frac{\theta}{t_1} ,$$

la hipótesis $s_2/s_1 = u_2/u_1$ implica $s_2/s_1 = u_2/u_1 = t_2/t_1$, de modo que se verifican las hipótesis de 3.B.1.,

c.d.d.

Veamos ahora que el método que usó E. Stein para probar el teorema principal de su trabajo [14] , permite también reducir el problema de interpolación con tipos mixtos débiles (con condiciones menos restrictivas que las de 3.B.1.) al problema correspon -

diente para tipos débiles vectoriales. Vamos a probar pues el teorema siguiente:

3.B.3. TEOREMA. Supongamos satisfechas las condiciones

$$s_2 \geq s_1 \geq \bar{p} \quad , \quad t_2 \geq t_1 \geq \bar{q} \quad , \quad 1 \leq u_2 \leq 2 \quad , \quad \bar{s} \leq \bar{u} \leq \bar{t} \qquad (6b)$$

$$\frac{1}{\bar{r}} = \frac{1-\theta}{\bar{p}} + \frac{\theta}{\bar{q}} \quad , \quad \frac{1}{\bar{u}} = \frac{1-\theta}{\bar{s}} + \frac{\theta}{\bar{t}} \quad , \quad 0 < \theta < 1 \quad . \qquad (1)$$

Entonces todo operador sublineal $h(x,y) = Tf$, que es de tipo $(\bar{p},\bar{s})$, de tipo débil $(\bar{r},\bar{u})$ y de tipo débil $(\bar{q},\bar{t})$, es de tipo débil vectorial $(\bar{r},\bar{u})$ para todo $(\bar{r},\bar{u})$ que verifica (1); es decir Tf verifica:

$$\nu \left\{ y \in Y \; ; \; ||Tf(\cdot,y)||_{u_1} > a \right\} \leq \left(\frac{M \; ||f||_{\bar{r}}}{a} \right)^{u_2} \qquad (6c)$$

Demostración. Sea $f \in L^{\bar{r}}$ fija. Por hipótesis tenemos que

$$\left\{Tf\right\}_{\bar{s}} = \sup_{\lambda > 0} \left(\int_Y (\lambda D(\lambda,y)^{1/s_1})^{s_2} dy \right)^{1/s_2} \leq M_1 \; ||f||_{\bar{p}} \quad , \qquad (6d)$$

$$\left\{Tf\right\}_{\bar{t}} = \sup_{\lambda > 0} \left(\int_Y (\lambda D(\lambda,y)^{1/t_1})^{t_2} dy \right)^{1/t_2} \leq M_2 \; ||f||_{\bar{q}} \qquad (6e)$$

y análogamente

$$\left\{Tf\right\}_{\bar{u}} \leq M_3 \; ||f||_{\bar{r}} \qquad (6f)$$

Para cada m natural sea (si $h = Tf$) ,

$$h_m(y) = \left(\int_{1/m}^{m} \lambda^{u_1-1} D(\lambda, y)\, d\lambda\right)^{1/u_1} , \tag{7}$$

$$\lim_{m\to\infty} h_m(y) = \sup_m h_m(y) = \|h(\cdot,y)\|_{u_1} \tag{7a}$$

Tenemos, por (6f), y aplicando la desigualdad de Minkowski, que

$$\| h_m \| (y) \|_{u_2} \leq \left\{ \int_{1/m}^{m} \left[\int_Y (\lambda D(\lambda, y)^{1/u_1} dy \right]^{u_1/u_2} \frac{d\lambda}{\lambda} \right\}^{1/u_1} \leq$$

$$\{h\}_{\bar{u}} \left\{ \int_{1/m}^{m} \frac{d\lambda}{\lambda} \right\}^{1/u_1} = c_m M_3 \|f\|_{\bar{r}} \tag{7b}$$

Vamos a probar que para toda f fija existe una constante c_f tal que

$$\nu\{y \; ; \; \|Tf(\cdot,y)\|_{u_1} > a\} = \nu\{y \; ; \; \sup_m |h_m(y)| > a\} \leq \left(\frac{c_f\{h\}_{\bar{u}}}{a}\right) \tag{7c}$$

Para ello, en primer término (ver 2.B.9.) suponemos que $Y = \{y\}$ tiene medida uno. Más aún mediante la correspondencia $h \to h^{\#\#}$ podemos reducir el teorema al caso en que $Y = [0,1]$ y v es la medida de Lebesgue de $[0,1]$. Supongamos ahora que (7c) no es cierta, para la f dada.

Entonces para todo n natural existe un a_n tal que

$$1 \geq |\, y \, ; \, \sup_m |h_m(y)| > a_n | > \left(\frac{n\{h\}_{\bar{u}}}{a_n}\right)^{u_2} \tag{7d}$$

($|E|$ = medida de Lebesgue de E).

De (7d) sigue que $\{h\}_{\bar{u}} / c_n \leq 1/n$, y que por tanto se puede elegir una colección numerable de los a_n (que seguimos llamando a_n) y una sucesión R_n tal que, poniendo

$$E_n = \left\{ y \ ; \ \sup_m |h_m(y)| > a_n \right\} ,$$

se verifica

$$\sum_n |E_n| = \infty \quad , \quad \sum_n \left(\frac{R_n \{h\}_{\bar{u}}}{a_n} \right)^{u_2} < \infty \quad , \quad R_n \to \infty \tag{7e}$$

Sean $r_n(\xi)$ las funciones de Rademacher ($r_n(\xi) = r_o(2^n \xi)$, $r_o(\xi) = 1$ si $0 \leq \xi \leq \frac{1}{2}$, -1 si $\frac{1}{2} < \xi < 1$, $r_o(\xi + 1) = r_o(\xi)$) , $\tau_n \in [0,1]$ y pongamos (suponemos que $[0,1]$ está tomado mod 1 , o sea que es la circunferencia unitaria):

$$H_m(y, \xi) = \sum_{n=1}^{\infty} r_n(\xi) \, R_n \, \frac{h_m(y + \tau_n)}{a_n} \tag{7f}$$

De (7b) y (7e) tenemos, para todo ξ es

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left\| \frac{R_n \, r_n(\xi) \, h_m(y + \tau_n)}{a_n} \right\|_{u_2}^{u_2} \leq c_m \{h\}_{\bar{u}}^{u_2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{R_n}{a_n} \right)^{u_2} < c'_m \{h\}_{\bar{u}}^{u_2} \tag{7g}$$

Veamos que para casi todo y , y todo ξ , vale

$$\sup_m H_m(y, \xi) < \infty \tag{7h}$$

De lo contrario, para un ξ y un conjunto de medida positiva de y-es sería

$$\sup_m \sum_n \frac{R_n\, r_n(\xi)\, h_m(y+\tau_n)}{a_n} = \infty \quad ,$$

y con más razón sería

$$\sum_n \frac{R_n r_n(\zeta)}{a_n} \left(\int_0^{\infty} \lambda^{u_1-1} D(\lambda, y+\tau_n) \right)^{1/u_1} = \infty \quad ,$$

para un conjunto de puntos y de medida positiva. Luego sería

$$\sum_n \frac{R_n}{a_n} \left(\int_0^{\infty} \lambda^{u_1-1} D^{\lambda(\cdot)}(\lambda, y+\tau_n)\, d\lambda \right)^{1/r_1} = \infty \quad ,$$

o bien

$$\sum_n \frac{R_n}{a_n} \left(\int_0^{\infty} \lambda^{u_1-1} D_{\chi(\cdot)}(\lambda, y+\tau_n)\, d\lambda \right)^{1/u_1} = \infty$$

En el primer caso tendríamos

$$\sum_n \frac{R_n}{a_n} \left\| \left(\int_0^{\infty} \lambda^{u_1-1} D^{\lambda(\cdot)}(\lambda, y+\tau_n)\, d\lambda \right)^{1/u_1} \right\|_{\frac{u_1 s_2}{s_1}} = \infty \quad ,$$

luego

$$\left(\int_Y \left[\int_0^{\infty} \lambda^{u_1-1} D^{(\cdot)}(\lambda, y)\, d\lambda \right]^{s_2/s_1} dy \right) . \sum_n \frac{R_n}{a_n} = \infty \quad ,$$

que en virtud de (7e) daría

$$\int_Y \left[\int_0^{\infty} \lambda^{u_1-1} D^{\lambda(\cdot)}(\lambda, y)\, d\lambda \right]^{s_2/s_1} dy = \infty \quad .$$

Pero esto es imposible puesto que, como se vió en 3.B.1., la hipótesis (6d) implica que la última integral es $\leq c_1 M_1 ||f||_{\bar{r}}$.

Asi pues, para todo ξ y todo y vale (7h); además se tiene (7g).

Esta es exactamente la situación que trata E. Stein en el teorema 1 de su trabajo citado (lo que aquí indicamos con H_m corresponde a $T_m F$ de dicho trabajo. Según prueba Stein, si vale (7h), (7g), entonces (7e) implica la existencia de una sucesión τ_n y de un conjunto de y-es de medida positiva para los cuales se verifica lo contrario de (7h). De modo que (7e) lleva a una contradicción, y por tanto queda probada la desigualdad (7c).

Asi pues, para cada f , es finita la norma débil vectorial de Tf . Como el tipo débil implica el magro, y la "norma" magra es más débil que la norma débil vectorial, de 2.B.6. resulta que la norma vectorial $\bar{u}$ de Tf es $\leq M ||f||_{\bar{r}}$, o sea Tf es de tipo débil vectorial $(\bar{r},\bar{u})$,

c.d.d.

Nota. Se puede probar, usando resultados de la teoría general de interpolación, que si T es de tipo débil $(\bar{p},\bar{s})$ y $(\bar{q},\bar{t})$ entonces (bajo las condiciones (6b)) es T de tipo débil $(\bar{r},\bar{u})$, de modo que las hipótesis de 3.E.3. pueden simplificarse. Pero no vamos a entrar aquí en la demostración de estos hechos.

3.C. Consideremos ahora la interpolación con tipos magros. Como ya mencionamos repetidas veces, mientras en los casos anteriores se tenía una generalización del teorema clásico de Marcinkiewicz, en el caso presente hace falta suponer que la hipótesis se cumple en cuatro extremos, además de algunas restricciones adicionales sobre los $\bar{p},\bar{r},\bar{s},\bar{u}$, que supondremos aquí para no entrar en demostraciones demasiado cansadoras.

3.C.1. TEOREMA. Sea $h(x,y) = Tf$, $f = f(x,y)$ un operador sublineal que es simultaneamente de tipo magro $(p_1,p_2) \to (s_1,s_2)$, $(p_1,q_2) \to (s_1,t_2)$, $(q_1,p_2) \to (t_1,s_2)$ y $(q_1,q_2) \to (t_1,t_2)$. Es decir, T es de tipo magro $(\bar{p},\bar{s})$, de tipo magro $(\bar{q},\bar{s})$ así como de tipo magro $((p_1,q_2);(s_1,t_2))$ y $((q_1,p_2);(t_1,s_2))$. Entonces T es de tipo fuerte $(\bar{r},\bar{u})$, donde como siempre

$$\frac{1}{\bar{r}} = \frac{1-\theta}{\bar{p}} + \frac{\theta}{\bar{q}} \quad , \quad \frac{1}{\bar{u}} = \frac{1-\theta}{\bar{s}} + \frac{\theta}{\bar{t}} \quad ,$$

y además de las hipótesis de " triángulo inferior" de los teoremas precedentes, suponemos que

$$\frac{s_2}{s_1} < \frac{u_2}{u_1} < \frac{t_2}{t_1} \quad , \quad u_2 \geq u_1 \quad , \quad \bar{s} \geq \bar{p} \quad , \quad \bar{t} \geq \bar{q} \quad .$$

Demostración. Como en los teoremas precedentes se verá que $\bar{p}$ y $\bar{q}$ pueden elegirse suficientemente próximos a $\bar{r}$, de modo que se verificarán también las condiciones $s_1 \geq \ddot{r}_2$, $t_1 \geq r_2^{\#}$, donde $\ddot{r}_2$, $r_2^{\#}$ son los números que se definen más adelante . Con las notaciones de antes, tendremos pues que (con $D^{\lambda(y)}(\lambda,y) = D^{(\lambda/b(y))^{1/v}}(\lambda,y)$) :

$$||h(x,y)||_{\bar{u}} = ||Tf||_{\bar{u}} \leq c\left\{\int_Y\left[\int_0^\infty \lambda^{u_1-1} D^{\lambda(y)}(\lambda,y)d\lambda\right]^{u_2/u_1} dy\right\}^{1/u_2} +$$

$$+ c\left\{\int_Y\left[\int_0^\infty \lambda^{u_1-1} D_{\lambda(y)}(\lambda,y)d\lambda\right]^{u_2/u_1} dy\right\}^{1/u_2} = c\left\{I + II\right\} .$$

Aplicando la desigualdad de Minkowski $(u_2 \geq u_1)$ tenemos

$$I^{u_1} \leq c \int_0^\infty {}^{u_1-1}\left[\int_Y D^{\lambda(y)}(\lambda,y)\right]^{u_2/u_1} dy\Big]^{u_1/u_2} d\lambda \quad .$$

Pero $\lambda(D^{\lambda(y)}(\lambda,y))^{1/s_1}$ es por hipótesis y por definición de tipo magro, de tipo débil semimixto $(p_1,p_2) \to s_2$ así como de tipo débil $(p_1,q_2) \to t_2$. Luego, por 2.B.2., si $\ddot{u}_2 = \frac{u_2}{u_1} s_1$, $s_2 < \ddot{u}_2 < t_2$, $\lambda D^{\lambda(y)}(\lambda,y)^{1/s_1}$ es de tipo intermedio $(p_1,\ddot{r}_2) \to \ddot{u}_2$, donde $\ddot{r}_2$ es el punto correspondiente a $\ddot{u}_2$ (es decir si vale $1/\ddot{r}_2 = \beta/p_2 + 1-\beta/q_2$, $1/\ddot{u}_2 = \beta/s_2 + 1-\beta/t_2$). Es decir:

$$I^{u_1} \leq c \int_0^\infty \lambda^{u_1-1}\left[\int_Y(\lambda D^{\lambda(y)}(\lambda,y))^{u_2 s_1/u_1} \lambda^{-u_2 s_1/u_1} dy\right]^{u_1/u_2} d\lambda =$$

$$= c \int_0^\infty \lambda^{u_1-s_1-1}\left\{\int_Y\left[\lambda D^{\lambda(y)}(\lambda,y)^{1/s_1}\right]^{\frac{u_2}{u_1}s_1} dy\right\}^{u_1/u_2} d\lambda \quad ,$$

y por lo dicho ,

$$\left\{ \int_Y \left[\lambda (D^{\lambda(y)}(\lambda,y))^{1/s_1} \right]^{\ddot{u}_2} dy \right\}^{1/\ddot{u}_2} \leq \text{cst. } ||f||_{r_1,\ddot{r}_2} \quad ,$$

donde $\ddot{u}_2 = (u_2/u_1)s_1$, luego

$$I^{u_1} \leq \int_0^\infty {}^{u_1-s_1-1} \left[\int_Y \left(\int_X |f^{(\frac{\lambda}{b(y)})^{1/v}}(x,y)|^{p_1} dx \right)^{\frac{\ddot{r}_2}{p_1}} dy \right]^{\frac{1}{\ddot{r}_2} \cdot s_1} d\lambda$$

Aplicando la desigualdad de Minkowski ($s_1 \geq \ddot{r}_2$) :

$$I^{u_1 \frac{\ddot{r}_2}{s_1}} \leq \int_Y \left(\int_0^\infty \lambda^{u_1-s_1-1} \left(\int_X |f^{(\frac{\lambda}{b(y)})^{1/v}}(x,y)|^{p_1} dx \right)^{\frac{s_1}{p_1}} d \quad \right)^{\frac{\ddot{r}_2}{s_1}} dy \quad ,$$

volviendo a aplicar la desigualdad de Minkowski

$$\int_Y \left[\int_X \left(\int_0^\infty \lambda^{u_1-s_1-1} |f^{(\frac{\lambda}{b(y)})^{1/v}}(x,y)|^{s_1} d\lambda \right)^{\frac{p_1}{s_1}} dx \right]^{\frac{\ddot{r}_2}{p_1}} dy$$

$$\int_Y \left[\int_X |f(x,y)|^{p_1} \left(\int_0^{|f(x,y)|^v b(y)} \lambda^{u_1-s_1-1} d \quad \right)^{\frac{p_1}{s_1}} dx \right]^{\frac{\ddot{r}_2}{p_1}} dy$$

siendo la integral finita por ser $u_1 > s_1$.

$$I^{u_1 \frac{\ddot{r}_2}{s_1}} \leq \text{cte. } \int_Y \left[\int_X |f(x,y)|^{p_1+v(u_1-s_1)\frac{p_1}{s_1}} b(y)^{(u_1-s_1)\frac{p_1}{s_1}} dx \right]^{\frac{\ddot{r}_2}{p_1}} dy$$

si

$$p_1+v(u_1-s_1)\frac{p_1}{s_1} = r_1 \quad \therefore \quad \boxed{v = \frac{(r_1-p_1)s_1}{(u-s)p_1}} \qquad (1)$$

y

$$b(y) = \left(\int |f(x,y)|^{r_1} dx \right)^{\alpha}$$

$$\alpha (u_1 - s_1) \frac{\cancel{p_1}}{s} \cdot \frac{\ddot{r}_2}{\cancel{p_1}} + \frac{\ddot{r}_2}{p_1} = \frac{r_2}{r_1}$$

$$\boxed{\alpha = \frac{\left(\frac{r_2}{r_1} - \frac{\ddot{r}_2}{p_1} \right) s_1}{(u_1 - s_1)\, \ddot{r}_2}} \qquad (2)$$

Resulta

$$I^{\frac{u_1}{s_1} \ddot{r}_2} \qquad k\, \| f \|_{\bar{r}}^{r_2}$$

Análogamente, aplicando la desigualdad de Minkowski a II , tendremos

$$II^{u_1} = \text{cte} \left\{ \int_Y \left[\int_0^\infty \lambda^{u_1 - 1}\, D_{\left(\frac{\lambda}{b(y)}\right)^{1/v}} (\lambda, y)\, d\lambda \right]^{\frac{u_2}{u_1}} dy \right\}^{\frac{u_1}{u_2}}$$

$$\leq k \cdot \int_0^\infty \lambda^{u_1 - 1} \left[\int_Y \left(D_{\left(\frac{\lambda}{b(y)}\right)^{1/v}} (\lambda, y) \right)^{\frac{u_2}{u_1}} dy \right]^{\frac{u_1}{u_2}} d\lambda \quad .$$

Ahora $\lambda \left(D_{\left(\frac{\lambda}{b(y)}\right)^{1/v}} \right)^{1/t_1}$ es de tipos débiles $\begin{cases} q_1 p_2 \to s_2 \\ q_1 q_2 \to t_2 \end{cases}$

luego es de tipo intermediario $q_1 r_2^{\#} \to u_2^{\#} = u_2 \frac{t_1}{u_1}$:

$$II^{u_1} \leq \int_0^{\infty} \lambda^{u_1-t_1-1} \left[\int_Y \left(\lambda \left(D_{\left(\frac{\lambda}{b(y)}\right)^{1/v}}(\lambda,y)\right)^{1/t_1}\right)^{\frac{u_2}{u_1}t_1} dy\right]^{\frac{u_1}{u_2 t_1}t_1} d\lambda$$

$$II^{u_1 \frac{r_2^{\#}}{t_1}} \leq \left\{ \int_0^{\infty} \lambda^{u_1-t_1-1} \left[\int_Y \left(\int_X \left| f_{\left(\frac{\lambda}{b(y)}\right)^{1/v}}(x,y)\right|^{q_1} dx\right)^{\frac{r_2^{\#}}{q_1}} dy\right]^{\frac{t_1}{r_2^{\#}}} d\lambda \right\}^{\frac{r_2^{\#}}{t_1}}$$

Aplicando la desigualdad de Minkowski,

$$II^{\frac{u_1 r_2^{\#}}{t_1}} \leq \int_Y \left[\int_0^{\infty} \lambda^{u_1-t_1-1} \left(\int_X \left| f_{\left(\frac{\lambda}{b(y)}\right)^{1/v}}(x,y)\right|^{q_1} dx\right)^{\frac{t_1}{q_1}} d\lambda \right]^{\frac{r_2^{\#}}{t_1}} dy \leq$$

$$\int_Y \left[\int_X \left(\int_0^{\infty} \lambda^{u_1-t_1-1} \left| f_{\left(\frac{\lambda}{(b(y))}\right)^{1/v}}(x,y)\right|^{t_1} d\lambda \right)^{\frac{q_1}{t_1}} dx\right]^{\frac{r_2^{\#}}{q_1}} dy =$$

$$= \int_Y \left[\int_X |f(x,y)|^{q_1} \left(\int_{|f(x,y)|^{v}(b(y))}^{\infty} \lambda^{u_1-t_1-1} d\lambda \right)^{\frac{q_1}{t_1}} dx \right]^{\frac{r_2^{\#}}{q_1}} dy$$

y el paréntesis es integrable pues $s_1 \quad u_1 \quad t_1$. Luego

$$II^{\frac{u_1}{t_1} r_2^{\#}} \leq k \cdot \int_Y b(y)^{(u_1-t_1)\frac{r_2^{\#}}{t_1}} \left(\int_X |f(x,y)|^{q_1+v(u_1-t_1)\frac{q_1}{t_1}} dx\right)^{\frac{r_2^{\#}}{q_1}} dy \quad .$$

Si
$$q_1 + v\,(u_1 - t_1)\,\frac{q_1}{t_1} = r_1 \quad ,$$

$$\boxed{v = \frac{t_1\,(r_1 - q_1)}{q_1\,(u_1 - t_1)}} \qquad (1')$$

y si

$$b(y) = \left(\int |f|^{r_1} dx \right)^{\alpha}$$

con

$$\boxed{\alpha = \frac{\left(\frac{r_2}{r_1} - \frac{r_2^{\#}}{q_1} \right) q_1}{(u_1 - t_1)\, r_2^{\#}}} \qquad (2')$$

entonces obtenemos

$$\mathrm{II}^{\frac{u_1}{t_1} r_2^{\#}} \leq k \,.\, ||f||_{\bar{r}}^{r_2}$$

Deberá pues ser:

(1) = (1') , condición que ya vimos es consecuencia de la hipótesis

$$\frac{1}{u} = \frac{\alpha}{s} + \frac{1-\alpha}{t} \quad , \qquad \frac{1}{r_1} = \frac{\alpha}{p_1} + \frac{1-\alpha}{q_1} \quad ,$$

Además debe ser:

(2) = (2') , es decir:

$$\frac{\left(\frac{r_2}{r_1} - \frac{r_2^{\#}}{q_1} \right) t_1}{(u_1 - t_1)\, r_2^{\#}} = \frac{\left(\frac{r_2}{r_1} - \frac{\ddot{r}_2}{p_1} \right) s_1}{(u_1 - s_1)\, \ddot{r}_2}$$

donde

$$\ddot{r}_2 \quad \text{corresponde a} \quad \ddot{u}_2 = \frac{s_1}{u_1} u_2$$

$$r_2^{\#} \quad \text{corresponde a} \quad u_2^{\#} = \frac{t_1}{u_1} u_2 \quad .$$

(2) equivale a

$$\frac{\dfrac{1}{r_1 r_2^{\#}} - \dfrac{1}{q_1 r_2}}{\dfrac{1}{t_1} - \dfrac{1}{u_1}} = \frac{\dfrac{1}{r_1 \ddot{r}_2} - \dfrac{1}{p_1 r_2}}{\dfrac{1}{s_1} - \dfrac{1}{u_1}}$$

que equivale, por (1) a:

$$\frac{\dfrac{1}{r_1 r_2^{\#}} - \dfrac{1}{q_1 r_2}}{\dfrac{1}{q_1} - \dfrac{1}{r_1}} = \frac{\dfrac{1}{r_1 \ddot{r}_2} - \dfrac{1}{p_1 r_2}}{\dfrac{1}{p_1} - \dfrac{1}{r_1}} \quad ,$$

$$\left(\frac{1}{r_1 r_2^{\#}} - \frac{1}{q_1 r_2}\right)\left(\frac{1}{p_1} - \frac{1}{r_1}\right) = \left(\frac{1}{r_1 \ddot{r}_2} - \frac{1}{p_1 r_2}\right)\left(\frac{1}{q_1} - \frac{1}{r_1}\right) \quad ,$$

$$\frac{1}{\cancel{r_1} r_2^{\#}}\frac{1}{p_1} - \frac{1}{r_1 r_2^{\#} \cancel{r_1}} - \cancel{\frac{1}{p_1 r_2 p_1}} + \frac{1}{q_1 r_2 \cancel{r_1}} = \frac{1}{\cancel{r_1} \ddot{r}_2 q_1} - \frac{1}{r_1 \ddot{r}_2 \cancel{r_1}} - \cancel{\frac{1}{p_1 r_2 q_1}} + \frac{1}{p_1 \cancel{r_1} r_2}$$

$$\frac{1}{r_2^{\#}}\left(\frac{1}{p_1} - \frac{1}{r_1}\right) + \frac{1}{\ddot{r}_2}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{q_1}\right) + \frac{1}{r_2}\left(\frac{1}{q_1} - \frac{1}{p_1}\right) = 0 \quad .$$

Sea:

$$\frac{1}{r_2} = \frac{\alpha}{p_2} + \frac{1-\alpha}{q_2}, \quad \frac{1}{\ddot{r}_2} = \frac{\beta}{p_2} + \frac{1-\beta}{q_2}, \quad \frac{1}{r_2^{\#}} = \frac{\gamma}{p_2} + \frac{1-\gamma}{q_2}$$

Resulta

$$\left[\gamma(q_2-p_2)+p_2\right]\left(\frac{1}{p_1} - \frac{1}{r_1}\right)+\left[\beta(q_2-p_2)+p_2\right]\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{q_1}\right)$$

$$+\left[\alpha(q_2-p_2)+p_2\right]\left(\frac{1}{q_1} - \frac{1}{p_1}\right) = 0$$

$$(\cancel{q_2}-\cancel{p_2})\left[\gamma\left(\frac{1}{p_1} - \frac{1}{r_1}\right)+\beta\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{q_1}\right)+\alpha\left(\frac{1}{q_1} - \frac{1}{p_1}\right)\right] = 0, \text{ si } q_2 \neq p_2$$

pero

$$\gamma = \frac{s_2\left(t_2 - u_2\frac{t_1}{u_1}\right)}{u_2\frac{t_1}{u_1}(t_2 - s_2)}, \quad \beta = \frac{s_2\left(t_2 - u_2\frac{s_1}{u_1}\right)}{u_2\frac{s_1}{u_1}(t_2 - s_2)}, \quad \alpha = \frac{s_2(t_2 - u_2)}{u_2(r_2 - s_2)}$$

$\dfrac{s_2}{u_2(t_2-s_2)}$ figura en los tres

$$\frac{(t_2 u_1 - u_2 t_1)}{t_1}\left(\frac{1}{p_1} - \frac{1}{r_1}\right) + \frac{(t_2 u_1 - u_2 s_1)}{s_1}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{p_1}\right)+(t_2-u_2)\left(\frac{1}{q_1} - \frac{1}{p_1}\right)=0$$

$$\frac{1}{t_1}\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{r_1}\right) + \frac{1}{s_1}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{q_1}\right) + \frac{1}{u_1}\left(\frac{1}{q_1} - \frac{1}{p_1}\right) = 0$$

$$\frac{1}{u_1} = \frac{\alpha}{s_1} + \frac{1-\alpha}{t_1} \quad , \qquad \frac{1}{r_1} = \frac{\alpha}{p_1} + \frac{1-\alpha}{q_1}$$

$$\frac{1}{t_1}\left(\frac{1}{p_1} - \frac{\alpha}{p_1} - \frac{1-\alpha}{q_1}\right) + \frac{1}{s_1}\left(\frac{\alpha}{p_1} + \frac{1-\alpha}{q_1} - \frac{1}{q_1}\right) + \left(\frac{\alpha}{s_1} + \frac{1-\alpha}{t_1}\right)\left(\frac{1}{q_1} - \frac{1}{p_1}\right) = 0$$

$$\frac{1}{t_1}\left(\frac{1-\alpha}{p_1} - \frac{1-\alpha}{q_1}\right) + \frac{1}{s_1}\left(\frac{\alpha}{p_1} - \frac{\alpha}{q_1}\right) + \frac{1}{s_1}\left(\frac{\alpha}{q_1} - \frac{\alpha}{p_1}\right) + \frac{1}{t_1}\left(\frac{1-\alpha}{q_1} - \frac{1-\alpha}{p_1}\right) = 0 \; ,$$

que es una identidad, lo que prueba el teorema.

NOTA. Está claro que los teoremas precedentes establecidos para tipos débiles mixtos y magros valen también para tipos débiles$^{\#}$ y magros$^{\#}$, ya que las demostraciones se aplican a estos casos sin modificaciones esenciales, tomando en cuenta que la correspondencia $h \to h^{\#\#}$ es sublineal y que dichos teoremas valen para operadores sublineales.

El hecho que todos los teoremas precedentes valen para todo operador sublineal, indica que los espacios correspondientes a las normas mixtas, fuertes, débiles o semidébiles, deben ser espacios de Gagliardo, ya que estos espacios están caracterizados por la propiedad de que para ellos vale el teorema de interpolación con operadores quasi-lineales. Se presenta pues el problema de determinar los funcionales F de la teoría de Gagliardo que corresponden a las normas que hemos considerado aquí.

La solución de este problema permitiría posiblemente una organización satisfactoria de las cuestiones que aquí nos preocupan

§ 4. CONTINUIDAD DEBIL Y MAGRA DE ALGUNOS OPERADORES CLASICOS

En este parágrafo daremos algunos ejemplos sencillos de la noción de tipo semidébil o magro y aplicaremos los teoremas de interpolación precedentes para extender a normas mixtas el teorema de Hardy-Littlewood-Paley y algunas propiedades de operadores potenciales. El resultado básico de este parágrafo es el que damos en 4.E., probando que el teorema ya mencionado de Stein-Zabenko se extiende a tipos débiles y normas mixtas. En efecto, la demostración original de Stein no se aplica al caso de tipo débil y hace falta una modificación esencial en sus razonamientos; damos además otra demostración muy simple que permite generalizar el teorema a normas mixtas. Aquí nos limitaremos a esbozar las ideas y a los casos más simples, esperando dar más detalles en el trabajo que publicaremos en colaboración con M. Cotlar.

4.A. OPERADORES ITERADOS POSITIVOS. El ejemplo más sencillo de la noción de tipo semidébil, débil o magro, se presenta al iterar lo que podríamos llamar operadores a "caracter positivo". Sean como antes $X = \{x\}$, $Y = \{y\}$, $X_1 = \{z\}$, $Y_1 = \{w\}$ dos pares de espacios, T_1 un operador que hace corresponder a ciertas funciones $f(x)$ de la variable $x \in X$ una función $T_1 f = g(z) = [T_1 f](z)$ de la variable $z \in X_1$, T_2 un operador que hace corresponder a funciones $f(y)$ definidas en Y una función $T_2 f = g(w) = \left[Tf_2 \right](w)$ definida en Y_1. Si $f(x,y)$ es función de dos variables, $(x,y) \in X \times Y$, para cada x fijo ella define una función $f(x,y) = f_x(y) = f_x$ de la variable y, de modo que podemos aplicar a f_x el operador T_2. Usaremos entonces la notación:

$$T_2 f_x = \left[T_2 f_x \right](w) = \left[T_2 f(x;\cdot) \right](w) = \left[T_2 f \right](x,w) \quad (1)$$

pues $\left[T_2 f(x;\cdot) \right](w) = g(x,w) = \left[T_2 f \right](x,w)$ es función de $(x,w) \in X \times Y_1$. Para cada w fijo $g(x,w)$ define una función $g_w(x) = g(x,w)$ de la variable x, a la cual podemos aplicar el operador T_1, resultando una función $T_1 g_w = \left[T_1 g_w \right](z)$ $h(z,w)$ de las variables z,w. Escribiremos entonces

$$h(z,w) = T_1 T_2 f = \left[T_1 T_2 f \right](z,w) = \left[T_1 \left(\left[T_2 f(\cdot,\cdot) \right](w) \right] (z) \quad ,(1a)$$

y $T = T_1 T_2$ se llamará el operador iterado de T_1 y T_2.

Diremos que T_2 es a "carácter positivo", si existe una constante fija c, tal que para casi todo w se verifica:

$$\left\| \left[T_2 f(x,\cdot) \right](y) \right\|_{p/x} \leq c \left| \left[T_2 \left(\| f(x,\cdot) \|_{p/x} \right) \right](w) \right| \quad , \quad (1b)$$

es decir si

$$\left\{ \int_X \left| \left[T_2 f \right](x,w) \right|^p dx \right\}^{1/p} \leq c \left| \left[T_2 \left(\int_X |f(x,y)|^p dx \right)^{1/p} \right](w) \right| . \quad (1b)$$

Un ejemplo de un tal operador T_2 a carácter positivo lo preporcionan los operadores de convolución

$$T_2\varphi = \varphi \# k = \int_{E^n} \varphi(y)\ k(w-y)\ dy \quad ,$$

si $Y = E^n$ y si $\kappa \geqslant 0$, (X espacio cualquiera), (1c)

pues en este caso se tiene, en virtud de la desigualdad de Minkowski, que :

$$\left\{\int_X \left|\left[T_2 f\right](x,w)\right|^p d\mu_x\right\}^{1/p} = (\|\int_{E^n} f(x,y)k(w-y)dy\|_{p,\mu_x} \leq$$

$$\leq \int_{E^n} k(w-y)\ \|f(x,y)\|_{p,\mu_x} dy = \left[T_2(\|f(x,\cdot)\|_{p/x}\right](w) \quad .$$

En particular, el operador de convolución (1,c) es a caracter positivo si $X = E^n$ y si $d\mu_x = |x|^a dx$ es una medida ponderada.

Análogamente se ve que son a caracter positivo los operadores potenciales

$$\left[H_{\gamma,n}\varphi\right](w) = \int_{E^n} \frac{\varphi(y)\ dy}{|w-y|^{n-\gamma}} \quad , \quad 0 < \gamma < n \qquad (1d)$$

Por ejemplo para $n = 2$, si $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$, se tiene que (si $f = f(x,y) \geqslant 0$) :

$$|H_{\gamma,2} f| \leq |H_{\gamma_1,1} H_{\gamma_2,1} f| \quad , \qquad (1e)$$

pues

$$|H_{\gamma,2} f(z,w)| = \iint \frac{f(x,y)\ dx\ dy}{(|z-x|^2+|w-y|^2)^{(2-\ )/2}} \leq$$

$$\int \frac{dx}{|z-x|^{1-\sigma_1}} \left[\int \frac{f(x,y)\,dy}{|w-y|^{1-\sigma_2}} \right]$$

en virtud de la desigualdad evidente

$$a^{1-\sigma_1}\, b^{1-\sigma_2} \leq (a^2+b^2)^{\frac{2-(\sigma_1+\sigma_2)}{2}}$$

Por tanto se tiene la siguiente propiedad (observada por Du Plesis): el operador $H_{\sigma,2}$ está dominado por el operador iterado $H_{\sigma_1,1}\, H_{\sigma_2,1}$ a caracter positivo, y a los efectos de determinar propiedades de tipo de $H_{\sigma,2}$, podemos remplazar $H_{\sigma,2}$ por el operador iterado, es decir podemos considerar que los $H_{\sigma,2}$ (y más generalmente $H_{\sigma,n}$ con $n>1$) son iteraciones de operadores a carácter positivo.

El lema siguiente permite dar ejemplos sencillos de tipos débiles o magros.

4.A.1. LEMA. Sea $T = T_1T_2 = T_1T_2f$, $f = f(x,y)$, y sea T_2 a carácter positivo. a) Si T_1 es de tipo débil (ordinario) (p_1,s_1) y T_2 de tipo débil (p_2,s_2), entonces $T = T_1T_2$ es de tipo magro $(\bar{p},\bar{s})$, es decir de tipo magro $(p_1,p_2) \rightarrow (s_1,s_2)$. b) Si T_1 es de tipo débil (p_1,s_1) y T_2 de tipo fuerte (p_2,s_2) entonces $T = T_1T_2$ es de tipo semidébil $(\bar{p},\bar{s})$. c) Si T_1 es de tipo fuerte (p_1,s_1) y T_2 de tipo débil (p_2,s_2) entonces $T = T_1T_2$ es de tipo débil vectorial $(\bar{p},\bar{s})$.

Demostración. a) Si $h(z,w) = \left[T_1T_2f\right](z,w)$, $f = f(x,y)$, y si T_1 es de tipo débil (p_1,s_1) , entonces, en virtud del carácter positivo de T_2 ,

$$\lambda D(\lambda,w)^{1/s_1} \leq M_1 ||T_2f(x,w)||_{p_1} \leq c\, M_1 \left|\left[T_2(||f||_{p_1})\right](w)\right| \qquad (1f)$$

Si T_2 es de tipo débil (p_2,s_2) entonces

$$\text{medida de } \left\{w; \lambda D(\lambda,w)^{1/s_1} > a\right\} \leq \text{medida}\left\{w; |T_2(||f||_{p_1})(w)| > \frac{a}{cM_1}\right\} \leq$$

$$\left(c\, M_2 \frac{||(||f||_{p_1})||_{p_2}}{a} \right)^{s_2} .$$

Llamando $(a/\lambda)^{s_1} = b$, esta desigualdad se escribe

$$D(\lambda,b) \leq \left(c\, M_1 \frac{M_2\, ||f||_{\bar{p}}}{\lambda b^{1/s_1}} \right)^{s_2} ,$$

o sea

$$\lambda b^{1/s_1}\, D(\lambda,b)^{1/s_2} \leq cM_1M_2 ||f||_{\bar{p}}$$

que es la definición de tipo magro de $h = T_1T_2f$.

b) Si T_2 es de tipo fuerte (p_2,s_2) , entonces de (1f) se tiene

$$||h||_{L^{s_2}(M^{s_1})} \cong ||\sup_{\lambda} D(\lambda,w)^{1/s_1}||_{s_2} \leq cM_1 ||T_2(||f||_{p_1}||_{s_2} \leq$$

$$\leq c\ M_1\ M_2\ ||\ (||f||_{p_1})\ ||_{p_2} = c\ M_1\ M_2\ ||f||_{\bar{p}}$$

que es la definición de tipo semidébil de $h = T_1 T_2 f$.

c) Si T_1 es de tipo fuerte, y T_2 de tipo débil, entonces

$$||h||_{s_1} = ||T_1 T_2||_{s_1} \leq M_1 ||T_2 f||_{p_1} \leq c\ M_1 \left| \left[T_2(||f||_{p_1}) \right](w) \right| \quad ,$$

$$\text{medida}\left\{w; ||h||_{s_1} > \lambda \right\} \leq \text{medida}\left\{w; |T_2(||f||_{p_1})(w)| > \frac{\lambda}{cM_1} \right\} \leq$$

$$\leq \left(c\ M_1\ \frac{M_2\ ||(||f||_{p_1})||_{p_2}}{} \right)^{s_2} \quad ,$$

luego

$$||h||_{M^{s_2}(L^{s_1})} \leq c\ M_1\ M_2\ ||f||_{\bar{p}} \quad ,$$

que es la definición de tipo débil vectorial,

c.d.d.

<u>4.A.2. Corolario.</u> <u>Si</u> $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$ <u>entonces el operador</u> $H_{\gamma,2}$ <u>(o más generalmente</u> $H_{\gamma,n}f$, <u>considerado que</u> $f = f(x,y)$, $x \in E_{n_1}$, $y \in E_{n_2}$, $E_{n_1} \times E_{n_2} = E_n$) <u>es de tipo magro</u> $(1,1) \to (1/(1-\gamma_1)\ ,\ 1/(1-\gamma_2))$, <u>de tipo semidébil</u> $(1,p_2) \to (1/(1-\gamma_1), s_2)$ <u>si</u> $1/p_2 - 1/s_2 = \gamma_2 < 1/p_2 < 1$, <u>y de tipo débil vectorial</u> $(p_1,1) \to (s_1, 1/(1-\ _2)$ <u>si</u> $1/p_1 - 1/s_1 = \gamma_1 < 1/p_1 < 1$. <u>En</u>

particular el operador $H_{\sigma,2}$ proporciona un ejemplo en que se verifican las hipótesis de 3.C.1., pues es de tipo magro en las 4 puntas

$$(1,1) \rightarrow (1/(1-\sigma_1)\ ,\ 1/(1-\sigma_2))\ ,\quad (p_1,p_2) \rightarrow (s_1,s_2)\ ,$$

$$(1,p_2) \rightarrow (1/(1-\sigma_1)\ ,\ s_2)\ ,\quad (p_1,1) \rightarrow (s_1,1/(1-\sigma_2))$$

En efecto, esto es consecuencia inmediata del lema anterior, del hecho de que $|H_{\sigma,2}f| \leq |H_{\sigma_1} H_{\sigma_2} f|$ y de las propiedades de tipo débil de los operadores potenciales.

Más generalmente, usando el teorema de Cotlar-Ortiz [6] sobre la continuidad débil ponderada (es decir con medidas $|x|^a\, dx$) de los operadores potenciales, se extiende el corolario precedente a tipos débiles o magros respecto de medidas ponderadas, así como a los operadores

$$H_{\sigma,\ n/m} = \text{restricción de } H_{\sigma,n}f \text{ a un subespacio } E_m \subset E_n\ .$$

No vamos a entrar a detallar estas variantes y tan solo enunciaremos explicitamente el siguiente caso particular (cuando las medidas son $x^a dx$, dx) que nos será especialmente útil más adelante.

4.A.3. COROLARIO. Si el operador $T_{n,\sigma}f$ está definido por la fórmula

$$\left[T_{n,\sigma} f \right](w) = \frac{1}{|w|^{\sigma}}\ H_{\sigma,n}f(w) = \frac{1}{|w|^{\sigma}} \int_{E^n} \frac{f(y)dy}{|w-y|^{n-\sigma}}\ , \qquad (2)$$

entonces:

a) $T_{1,\gamma}$ es de tipo (p,p) para todo $1<p<\infty$, y de tipo débil $(1,1)$, $(\ < 1/p < 1)$.

b) $T_{n,\gamma}$ es de tipo $(\bar{p},\bar{p})$ para todo $1<\bar{p}<\infty$ bajo la condición $1/p_i > \gamma_i$, $\sum \gamma_i = \gamma$, $\bar{p} = (p_1,\dots,p_n)$.

c) Por ejemplo $T_{2,\gamma}$ (o más generalmente $T_{n_1+n_2,\gamma}$ es de tipo magro $(1,1) \to (1,1)$, de tipo semidébil $(1,p) \to (1,p)$ y de tipo débil vectorial $(p,1) \to (p,1)$ si $1<p<\infty$.

Como vamos a usar este corolario, y como en este caso particular se puede dar una demostración muy sencilla daremos una demostración directa sin recurrir a [6] :

Demostración directa de 4.A.3. Las partes b y c son consecuencias inmediatas de la parte a), del hecho que $H_{\gamma,n}$ es un operador iterado a carácter positivo (luego también $T_{n,\gamma}$) y del lema precedente. Por tanto nos limitaremos a indicar brevemente la demostración de a), usando el hecho clásico de que $H_{\beta,1}$ es de tipo (p,s) con $1/p - 1/s = \beta < 1/p < 1$. Como se sabe [5] , para probar que $T_{1,\gamma}$ es de tipo débil (p,p) basta probar que para un $q<p$ y para todo conjunto A de medida finita se verifica

$$\left\{\int_A |T_{1,\gamma} f(w)|^q dw\right\}^{1/q} = \left\{\int_A |H_{\gamma,1} f(w)|^q \frac{1}{|w|^{\gamma q}} dw\right\}^{1/q} \leq$$

$$\leq c_\gamma \, ||f||_p \, |A|^{1/q - 1/p} \quad . \qquad (2a)$$

Esta desigualdad es inmediata si el conjunto A es una esfera , es decir si A es un segmento $(-a,a)$, $|A|$ = medida de Lebesgue de $A = 2a$, porque aplicando Hölder con s/q , $s/(s-q)$ tendremos

$$\left\{\int_A |H_{\gamma,1}f(w)|^q \frac{1}{|w|^{\gamma q}}\,dw\right\}^{1/q} \leq$$

$$\leq \left\{\int_A |H_{\gamma,1}f(w)|^s dw\right\}^{1/s} \left\{\int_A \left(\frac{1}{|w|^{\gamma q}}\right)^{\frac{s}{s-q}} dw\right\}^{\frac{s-q}{sq}} \leq$$

$$\leq c\, \|H_{\gamma,1}f\|_s \left\{\left[x^{-\frac{\gamma qs}{s-q}+1}\right]_0^a\right\}^{\frac{s-q}{sq}} .$$

De $q<p$ y de $1/p - 1/s = \gamma < 1/p < 1$ se deduce que $\frac{sq}{p} < s$ y que $-\frac{\gamma qs}{s-q} + 1 > 0$.

Por tanto la desigualdad precedente prueba (2a) para el caso en que $A = (-a,a)$.

El caso general se reduce fácilmente a este observando que $1/|x|^{\beta q}$ es no-creciente y que por tanto su integral extendida a un conjunto A de medida $2a$ es menor o igual que la integral extendida al intervalo $(-a,a)$,

c.d.d.

4.B. OPERADORES ITERADOS DE HILBERT. Consideremos ahora el operador iterado $Hf = H_1 H_2 f$, $f = f(x,y)$, donde $H_1 = H_2$ = operador de Hilbert, ordinario o n- dimensional. Para no tener que entrar en detalles engorrosos consideremos el caso en que f está definida en un dominio acotado, es decir cuando $H_1 f$ es esencialmente la función conjugada de f . Así pues, si $\varphi(x)$ está definida en E^n pondremos

$$H_1 \varphi = H_2 \varphi = \int_{|x| \subset A} k(z-x) \, \varphi(x) \, dx \quad , \tag{3}$$

donde $k(x)$ es un núcleo de Calderón-Zygmund ($k(cx) = c^{-n} k(x)$, $\int_{|x|=1} k(x)dx = 0$) , y la integral (3) se entiende como valor principal. Si $n = 1$, tendremos que

$$H_1 \varphi = \int_0^A \frac{\varphi(x)}{z-x} \, dx \tag{3a}$$

Supondremos pues que $f(x,y)$ está definida en $|x| < 1$, $|y| < 1$, de modo que la norma $||f||_{\bar{p}}$ se entiende extendida a este conjunto acotado. Ahora el operador iterado $Hf = H_1 H_2 f$ (es decir la integral doble de Hilbert) no es más a carácter positivo, pues el núcleo k en (3) es esencialmente no positivo, de modo que aquí no es aplicable el lema 4.A.1. Pero usando un teorema de Benedek-Calderón-Panzone es fácil establecer la siguiente propiedad del operador doble $Hf = H_1 H_2 f$.

4.B.1. PROPOSICION. Si H_1 , H_2 son definidos por (3) o (3a) y $Hf(z,w) = \left[H_1H_2f \right](z,w)$, entonces: a) $Hf = H_1H_2f$ es de tipo fuerte $(p,p) \to (s,p)$ si $1<s\leq p<\infty$; b) Hf es de tipo magro $(p,1) \to (1,1)$, es decir H es continuo de $L^1(L^p) \to M^1(M^1)$, $1<p<\infty$; c) Hf es de tipo débil vectorial $(p,1) \to (p,1)$, es decir continuo de $L^1(L^p) \to M^1(L^p)$; d) Hf es de tipo semidébil $(p,p) \to (1,p)$, es decir $L^p(L^p) \to L^p(M^1)$, $1<p<\infty$.

Demostración. Para simplificar supondremos $n = 1$; como es suficiente considerar el caso de funciones $f(x,y)$ elementales ($f = \sum c_{ij}\, \varphi_{A_i}(x)\, \varphi_{B_j}(y)$, donde A_i, B_j son intervalos acotados), podemos considerar a $f(x,y) = f_y(x)$ como una función elemental vectorial $\bar{f}(y)$ que a cada y le hace corresponder el elemento $f_y = f_y(x) \in L^p$.

Sea $T\bar{f}$ el operador que le hace corresponder, a cada tal $f(x,y) = \bar{f}(y)$, la función vectorial $\bar{g}(w)$ con valores en L^1 definida por

$$T\bar{f} = \bar{g}(w) = g_w(x) = \left[H_2 f(x,\cdot) \right](w) \tag{3b}$$

($= \sum c_{ij}\, \varphi_{A_i}(x)\, H_2\, \varphi_{B_j}(w)$) . Para cada y , sea $k(y)$ el operador que actúa de $L^p\ (0,1)$ en $L^1\ (0,1)$ y tal que si $\varphi(x) = \bar{\varphi} \in L^p(0,1)$ entonces $k(y)\,\bar{\varphi} = \frac{1}{y}\, \varphi(x)$. Evidentemente la norma de este operador es $||k(y)|| \leq 1/y$. Entonces (3b) se escribe (en caso $n = 1$)

$$T\bar{f} = \bar{g}(w) = \int_0^1 k(w-y)\ \bar{f}(y)\ dy \quad ; \tag{3c}$$

y por lo dicho sobre la norma del operador k , se verifica evidentemente la condición

$$\int_{|w|>4|y|} ||k(w-y)-k(w)||\ dw \leq c_2 \tag{3d}$$

Si $1<p<\infty$, tenemos que

$$||T\bar{f}||_p = ||\bar{g}||_{L^p} = ||g(x,w)||_{L^p(L^1)} = ||\int |H_2 f(x,w)|dx||_{p/w} \leq$$

$$\int_0^A ||H_2 f(y,w)||_{p/w}\ dx \leq c \int_0^A ||f(x,y)||_{p/y}\ dx \leq$$

$$\leq c\ ||f||_{p,p} = c\ ||f||_{L^p(L^p)} = c\ ||\bar{f}(y)||_p \tag{3e}$$

De (3c) , (3d) y (3e) , sigue que se verifican las hipótesis del Teorema 2 de Benedek-Calderón-Panzone [2] , y de dicho teorema resulta que T es de tipo débil (1,1) , o sea que

$$|\{w; ||\bar{g}(w)||_{L^1} > a\}| \leq \frac{c\ ||\bar{f}||_1}{a} = c\ ||f||_{p,1} = c\ ||f||_{L^1(L^p)} \tag{3f}$$

Por ser H_1 de tipo débil, tenemos que, si $h(z,w) = [\ H_1(H_2 f)\ ](z,w)$, que

$$\lambda D(\lambda,w) \leq M_1\ ||H_2 f(y,w)||_{1/x} = M_1 ||\bar{g}(w)||_{L^1} \tag{3g}$$

De (3g) y (3f) sigue que

$$\left|\left\{ w \ ; \ \lambda D(\lambda ,w) > a \right\}\right| \leq c_1 M_1 \frac{||f||_{p,1}}{a} ,$$

o sea, llamando $a/\lambda = b$,

$$D(\lambda ,b) \leq c_1 M_1 \frac{||f||_{p,1}}{\lambda b} ,$$

que es la definición de tipo magro $(p,1) \rightarrow (1,1)$.

Hemos pues probado la parte b) de la tesis.

Del hecho que H_1 es de tipo (p,p) , y de (3e) sigue análogamente la parte c) de la tesis.

De (3g) y (3b) sigue, teniendo en cuenta que H_2 es de tipo (p,p) , que

$$||\sup_{\lambda} \lambda D(\lambda ,w)||_p \leq M_1 ||H_2 f||_{L^p(L^1)} \leq M_1 || H_2 f(x,w)||_{p/w \ , \ 1/x} \leq$$

$$\leq M_1 \ c \ ||f(x,y)||_{p/y \ , \ 1/x} \leq M_1 \ c \ ||f||_{p,p} ,$$

lo que prueba la parte d) .

Como el operador doble es de tipo $(p_1,p_1) \rightarrow (p_1,p_1)$ (es decir de tipo (p_1,p_1) común) para todo $1 < p_1 < \infty$, y como por d) es de tipo semidébil $(p_2,p_2) \rightarrow (1,p_2)$, usando el teorema de interpolación 3.A.1. resulta la parte a) de la tesis (')

c.d.d.

(') por falta de espacio, ver pié de la próxima página.

Usando los teoremas de Benedek-Calderón-Panzone se puede dar diversas variantes de 4.B.1., combinándolas con los teoremas de interpolación del § 3 . Pero como estos últimos han de ser perfeccionados aún, no insistiremos más en estas cuestiones, limitándonos a indicar la posibilidad de obtener tipos magros para los operadores dobles de Hilbert, para los cuales, como ya se mencionó, no vale el tipo débil ordinario.

4.C. OPERADOR DE FOURIER. (extensión del teorema de Hardy-Littlewood-Paley a $L^p(L^q)$).

Sean $T_1\varphi = \hat{\varphi}$ y $T_2\psi = \hat{\psi}$ las transformadas de Fourier en las variables x,y respectivamente, es decir que actúan en los espacios euclídeos $E_1 = \{x\}$ y $E_2 = \{y\}$ respectivamente. Si $f(x,y)$ está definida en $E_1 \times E_2 = \{(x,y)\}$, el operador de Fourier $Tf = \hat{f}$ es igual al operador iterado $Tf = T_1T_2f$. Tampoco aquí es T_2 a carácter positivo, y no podemos aplicar el lema 4.A.1. Pero usando el teorema de interpolación 2.B.1. se puede dar extensiones de los teoremas del tipo de Hardy-Littlewood-Paley y Pitt a normas mixtas. Indicaremos aquí el teorema más simple

---

(') En el caso particular considerado, la parte a) puede probarse directamente sin recurrir a interpolación. Como mencionamos en el § 3 , la demostración de Cotlar para el triángulo superior, del teorema de Marcinkiewicz, permite extender el teorema 3.A.1. suprimiento la hipótesis $\bar{s} \geq \bar{p}$, y de este modo extender la parte a) de 4.B.1. al caso general.

de este tipo:

4.C.1. PROPOSICION. Sea $f(x,y)$ definida en $E_1 \; E_2 = (x,y)$, ($E_1 = E^{n_1}$, $E_2 = E^{n_2}$), y sea $TF = \hat{f} = T_1T_2f$ la transformada de Fourier de f. Entonces se tienen las dos desigualdades siguientes que para $p = q$ se reducen a las desigualdades clásicas de Hardy- Littlewood.

a) $$\left[\int_{E^{n_2}} \left(\int_{E^{n_1}} |T_1T_2f(x,y)|^p \, |x|^{n_1(p-2)} dx \right)^{q/p} |y|^{n_2(q-2)} dy \right\}^{1/q} \leq$$

$$\leq k \, ||f||_{p,q} \quad ,$$

si $1 < q \leq p \leq 2$.

b)
$$||Tf||_{p,q} \leq k \left\{ \int_{E^{n_2}} \left[\int_{E^{n_1}} |f(x,y)|^p x^{n_1(p-2)} dx \right]^{q/p} |y|^{n_2(q-2)} dy \right\}^{1/q}$$

si $2 \leq p \leq q < \infty$.

Demostración. Para fijar ideas pongamos $E_1 = E^{n_1} = E_2 = E^{n_2} = E^n$.

a) Aplicando el teorema clásico de Hardy-Littlewood en la variable x tendremos

$$\int_{E_2} \left[\int_{E_1} |T_1T_2f(x,y)|^p |x|^{n(p-2)} dx \right]^{q/p} |y|^{n(q-2)} dy \right\}^{1/q} \leq$$

$$\left[\int_{E_2} (||T_2f(x,y)||_{p/x})^q |y|^{n(q-2)} dy \right]^{1/q}$$

Consideremos ahora el operador M :

$$f(x,y) \to |y|^n \, ||T_2 f(x,\, y)||_{p/x} \qquad ,$$

y la medida

$$d\mu = d\mu_y = dy\,/\,|y|^{2n} \qquad .$$

Vamos a probar que H es de tipo débil semi-mixto $(p,1) \to 1$ con medida $d\mu = dy/|y|^{2n}$ y que H es de tipo ordinario $(p,p) \to p$ con medida $d\mu = dy/|y|^{2n}$.

En efecto, si $y \in E_\lambda = \left\{ y \; ; \; |y|^n ||T_2 f||_{p/x}(y) > \lambda \right\}$,

entonces, como T_2 es de tipo $(1,\infty)$, y aplicando la desigualdad de Minkowski, se tendrá

$$\lambda < |y|^n || \; ||T_2 f||_{p/x}(y) \; ||_{\infty/y} \leq |y|^n || \; ||T_2 f||_{\infty/y} ||_{p/x} \leq$$

$$\leq |y|^n || \; ||f||_{1/y} ||_{p/x} \leq |y|^n || \; ||f||_{p/x} ||_{1/y} = |y|^n ||f||_{p,1}$$

Por tanto

$$\mu(E_\lambda) \quad k \int_{(\lambda/||f||_{p,1})^{1/r}}^{\infty} \frac{dy}{|y|^{2n}} \, |y|^{n-1} = \frac{k}{n} \, \frac{||f||_{p,1}}{\lambda} \qquad ,$$

lo que muestra que H es de tipo débil $(p,1) \to 1$ (respecto de $d\mu$) .

Además como

$$\left(\int_{E_2} (||T_2 f(x,y)||_{p/x} |y|^n)^p \, |y|^{-2n} dy \right)^{1/p} =$$

$$= \left[\int_{E_2} \left(\int_{E_1} |(T_2 f)(x, y)|^p dx \right)^{p/p} |y|^{n(p-2)} dy \right]^{1/p} =$$

$$= \left[\int_{E_1} \int_{E_2} |T_2 f|^p |y|^{n(p-2)} dy dx \right]^{1/p} \leq$$

$$\leq \left(\int_{E_1} \int_{E_2} |f(x,y)|^p dy dx \right]^{1/p} = ||f||_{p,p} \quad ,$$

es H de tipo $(p,p) \rightarrow p$. Aplicando el teorema 2.B.1. al operador H , que es de tipo $(p,p) \rightarrow p$ y de tipo débil $(p,1) \rightarrow 1$, resulta que H es de tipo $(p,q) \rightarrow q$ para $1 < q \leq p$ (') , es decir

$$\left[\int_{E_2} \left(||T_2 f(x,y)||_{p/x} \right)^q |y|^{n(q-2)} dy \right]^{1/q} \leq c \; ||f||_{p,q} \qquad (3h)$$

De la primera desigualdad escrita resulta entonces la tesis a).

b) Usando el hecho probado por Benedek-Panzone de que el dual de $L^p(L^q)$ es el $L^{p^\#}(L^{q^\#})$, la parte b) se deduce de la a) por un conocido procedimiento de dualidad (ver por ejemplo [5]).

(') Como $1 < p$., no se realizan aquí estrictamente todas las hipótesis de 2.B.1., pero examinando la demostración se ve que en el caso presente donde los tipos son $(p,p) \rightarrow p$ y $(p,1) \rightarrow 1$. También aquí bastaría con el lema 1 de Benedek-Calderón-Panzone , que como ya hemos visto es un caso particular de 2.B.1. Estas precauciones son innecesarias en caso de series de Fourier, cuando el intervalo $(0,2\pi)$ tiene medida finita.

4.D . OPERADORES POTENCIALES. Sea $E^n = E^{n-m} \times E^m$, $f(x,y)$ y $k(x,y)$ funciones definidas en E^n , $x \in E^{n-m}$, $y \in E^m$, y consideremos el operador de convolución

$$h(x,y) = h\#k = \int_{E^m}\int_{E^{n-m}} k(x-s\ ,\ y-t)\ f(s,t)\ dsdt \qquad (4)$$

$h(x,y)$ está definida en E^n y podemos considerar las normas mixtas $||h(x,y)||_{p/x\ ,\ q/x}$. Para $x = 0$, $h_1(y) = h(x,y)$ es función de $y \in E^m$, y usaremos la notación $||h_1(y)||_q$ para indicar la norma de $h_1(y)$ respecto de la medida m-dimensional de E^m. Sea $T_1 g = \hat{g}$ la transformación de Fourier en E^{n-m} , T_2 la transformación de Fourier en E^m , de modo que $T = T_1 T_2$ es la transformación de Fourier en E^n .

Supongamos que el núcleo $k(x,y)$ verifica la condición siguiente

$$\left|\left[\ Tk\ \right](u,v)\right| = |\hat{k}(u,v)| \leq \frac{c}{(|u|^2+|v|^2)^{\sigma/2}} , \qquad (4a)$$

donde $u \in E^{n-m}$, $v \in E^m$, $Tk = T_1 T_2 k$, $\left[\ T_2 k\ \right](x,v) =$
$= \left[\ T_2 k(x,\cdot)\ \right](v)$.

Probaremos ahora el lema siguiente, que para $p = q$ fué probado por Cotlar y Panzone [ ] .

4.D.1. LEMA. a) Si $0 \leq \sigma < n$, $p = 2n/(\sigma_1+n)$, $q =$
$= 2n/(\sigma_2+n)$, $\sigma_1 + \sigma_2 = \sigma$, y si $1 \leq p\ ,\ q \leq 2$, entonces (si $1/p^{\#} + 1/p = 1$)

$$||h(x,y)||_{p^{\#},q^{\#}} = ||f\#k||_{p^{\#},q^{\#}} \leq c \quad ||f||_{p,q} \quad .$$

<u>b) Si</u> $0 \leq \gamma < n$, $m < n < m+2$, $\frac{n-m}{p} + \frac{2m}{q} = m+\gamma$, <u>y si</u> $1 \leq q \leq p \leq 2$, <u>entonces</u>

$$||h_1(y)||_{q^{\#}} = ||f\#k(0,y)||_{q^{\#}} \leq c_{\gamma} \, ||f||_{p,q} \quad .$$

<u>Demostración</u>. Siendo la demostración de la parte a) del todo análoga, y más simple, a la de b), nos limitaremos a la demostración de b) y omitiremos otros detalles que se tratan del mismo modo que en el caso $p = q$ y que pueden verse en [5] .

Tenemos (ver [ ]) que

$$|\left[T_2 h_1 \right](v)| = |\int_{E^{n-m}} T_2 f(x,v) T_2 k(-x,v)\,dx| \leq$$

$$\leq ||T_2 f(x,v)||_{p/x} \, ||T_2 k(-x,v)||_{p^{\#}/x} \tag{4b}$$

Por el teorema de Haussdorff-Young, y usando la hipótesis, tendremos

$$||T_2 k(-x,0)||_{p^{\#}/x} \leq ||T_1 T_2 k(-u,v)||_{p/u} \leq$$

$$\leq c \left[\int_{E^{n-m}} \left(\frac{1}{(|u|^2+|v|^2)^{\gamma/2}}\right)^{p} du \right]^{1/p} =$$

$$= c \left[\int_{E^{n-m}} |v|^{n-m-\gamma p} \frac{dw}{(1+|w|^2)^{\gamma p/2}} \right]^{1/p} \leq c_1 |v|^{\frac{n-m-\gamma p}{p}} \quad , \quad (4c)$$

ya que de las hipótesis se deduce

$$m+\gamma < \frac{2\gamma}{p} + \frac{2m}{q} \leq \frac{2(m+\gamma)}{q} \quad \therefore \quad q < 2 \quad ,$$

luego

$$\frac{n-m}{p} = m+\gamma - \frac{2}{q} m < \gamma \quad , \quad n-m-\gamma p > 0 \quad ,$$

y la integral es finita. Luego de (4b) resulta

$$|T_2 h_1(v)| \leq c_1 \, ||T_2(x,v)||_{p/x} \, |v|^{\frac{n-m-\gamma p}{p}}$$

Como $((n-m)-\gamma p)q = mp(q-2)$, tendremos

$$||h_1(y)||_{q^\#} \leq ||T_2 h_1||_q \leq \left[c_1 \int_{E^m} (||T_2(x,v)||_{p/x})^q |v|^{\frac{(n-m-\gamma p)}{p}} dv \right]^{\frac{1}{q}} =$$

$$= c_1 \left[\int_{E^m} (||T_2(x,v)||_{p/x})^q |v|^{m(q-2)} dv \right]^{1/q} \qquad (4e)$$

Cono $q<2$ (por lo ya visto), de la desigualdad (3h) de 4.C.1. (que equivale al teorema generalizado de Hardy-Littlewood) resulta que, la última integral es $\leq c_\gamma ||f||_{p,q}$,

c.d.d.

4.D.2. TEOREMA. Sea $H_{\gamma,n/m}f$, $f = f(x,y)$, el operador $H_{\gamma,n}f = h(x,y)$ restringido a $E^m \subset E^n$, es decir $H_{\gamma,n/m}f = h(0,y)$. Entonces $H_{\gamma,n/m}$ es de tipo semi-mixto $(p_1,p_2) \to s$ si se verifica

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{1}{p_1} - \dfrac{m}{n-m}\dfrac{1}{s} = \dfrac{\gamma-m}{n-m} \\[2ex] \dfrac{1}{p_2} - \dfrac{m}{n}\dfrac{1}{s} = \dfrac{\gamma}{n} \end{array}\right. \tag{4f}$$

con

$$\frac{1}{p_2} > \frac{\gamma}{m} \ , \quad \frac{1}{p_1} > \frac{\gamma-m}{n-m} \ , \quad 1 < p_2 \leq p_1 < \frac{n-m}{\gamma-m}$$

Demostración. Como $H_{\gamma,n}$ tiene la forma $h(x,y) = f*k$ con un núcleo k que verifica (4a), resulta de b) del lema 4.D.1. , que $h_1(y) = h(0,y) = H_{\gamma,n/m}f$ es del tipo $(p,q) \to q^{\#}$ donde $q \leq p$ y

$$\frac{n-m}{p} + \frac{2m}{q} = m+\gamma \qquad \therefore \qquad \frac{n-m}{p} - \frac{2m}{q^{\#}} = \gamma - m \tag{4g}$$

Por un teorema de Cotlar-Panzone [5] este operador es de tipo débil $(1,1) \to m/(n-\gamma)$. (4h)

Como los puntos $(\frac{1}{q}, \frac{1}{q^{\#}})$ y $(\frac{1}{1}, \frac{n-\gamma}{m})$ están ambos en el segmento de los tipos dado por la segunda ecuación (4f), y como por (4g) los puntos $(1/p , 1/q^{\#})$ y $(1/1 , (n-\gamma)/m)$ están situados en el segmento dado por la primera ecuación (4f), aplicando el teorema de interpolación 2.B.1., resulta que $H_{\gamma,n/m}$ es de tipo

$(p_1,p_2) \to s$ donde los puntos $(1/p_2\ ,\ 1/s)$ y $(1/p_1\ ,\ 1/s)$ están situados respectivamente sobre los mismos segmentos,

c.d.d.

NOTA. Nos hemos limitado con dar el teorema más simple sobre tipos mixtos de operadores potenciales que se deducen de los resultados anteriores. Presentando E^m a su vez como un producto $E^{m_1}\ E^{m_2} = E^m$ y usando el Corolario 4.A.2. y los teoremas de interpolación más fuertes del parágrafo 3, se obtienen una serie de teoremas referentes a tipos fuertes y débiles mixtos de los operadores potenciales $H_{\gamma,n}$, $H_{\gamma,n/m}$ y sus iteraciones, que no entraremos a detallar aquí.

Solo observaremos que para $p_1 = p_2$ el teorema precedente se reduce al teorema de Sobolev-Ilin, y que usando a) de 4.D.1. en vez de b) , se obtiene la generalización que Benedek y Panzone dieron al teorema de Hardy-Littlewood-Sobolev (caso $n = m$). Del mismo modo se puede extender a tipos mixtos ponderados la generalización del teorema de Sobolev-Ilin dada por Cotlar y Ortiz. Finalmente 4.D.2. puede aplicarse a los llamados potenciales generalizados de Cotlar-Panzone.

4.E. EXTENSION DEL TEOREMA DE STEIN-BABENKO

Los operadores n-dimensionales de Hilbert son caso particular de las integrales singulares de la forma

$$| \, Tf \, |(x) = v.p. \int_{E^n} \frac{H(x,x-y)}{|x-y|^n} \, f(y) \, dy \tag{5}$$

donde $H(x,y)$ es homogénea de grado cero en la variable y. Calderón y Zygmund han probado que (bajo ciertas condiciones mínimas sobre $H(x,y)$ que no vamos a especificar) el operador singular (5) es de tipo (p,p) para todo $1<p<\infty$, es decir $||Tf||_p \leq A_p||f||_p$, donde las normas se toman respecto de la medida dx de Lebesgue. Babenko mostró que en el caso de la transformación de Hilbert ordinaria, 1-dimensional, esta desigualdad valía aún con medidas ponderadas $|x|^\beta dx$. Con un artificio ingenioso, E. Stein muestra (en su artículo "Note on Singular Integrals", Proc. A.M. Soc. 1957) que el teorema de Babenko vale para el caso general (5). Más precisamente, se tiene el siguiente teorema :

TEOREMA A (de Stein). Si el operador Tf definido por (5) verifica la desigualdad $||Tf||_p \leq A_p||f||_p$, $1<p<\infty$, y si $|H(x,y)| \leq B$, entonces T es también de tipo ponderado (p,p), es decir

$$||(Tf)(x) \; |x|^\beta||_p \leq A_{p,\beta}||f(x) \; |x|^\beta||_p \tag{5a}$$

para

$$1<p<\infty \quad \text{y para} \quad -\frac{n}{p} < \beta < \frac{n}{p^\#} \quad \left(\frac{1}{p^\#} + \frac{1}{p} = 1\right) \tag{5b}$$

Más aún, Stein muestra que el teorema A es una consecuencia fácil de este otro teorema B:

TEOREMA B (de Stein). Sea $K(x,y)$ el núcleo

$$K(x,y) = \frac{\left| 1 - \left(\frac{|x|}{|y|} \right)^{\beta} \right|}{|x-y|^{n}} \tag{5c}$$

y sea Uf el operador

$$Uf(x) = \int_{E^n} K(x,y)\, f(y)\, dy \tag{5d}$$

Entonces, bajo las condiciones (5b), Uf es de tipo (p,p) : $\|Uf\|_p \leq A_{p,\beta} \|f\|_p$.

Los razonamientos de Stein no se aplican al caso $p = 1$ (con el tipo débil (1,1)) ni a normas mixtas. Vamos a dar a continuación una extensión de los teoremas A y B para el tipo débil (1,1); luego daremos una demostración simplificada de los teoremas A y B basada en una nueva idea y que permite extenderlos al caso de normas ponderadas y obtener otras variantes de los mismos.

4.E.1. TEOREMA. El teorema B vale para $p = 1$ y tipo débil; es decir, si

$$-n < \beta < 0 \quad , \tag{5e}$$

entonces existe un $s < 1$ tal que para todo conjunto $X \subset E^n$ de medida finita se verifica la desigualdad "de Kolmogorov" :

$$\left(\int_X |Uf(x)|^s dx\right)^{1/s} \leq M\, |X|^{1/s - 1}\, ||f||_1 \quad , \qquad (6)$$

donde Uf es el operador (5d) y $|X|$ la medida de Lebesgue de X.

Demostración. Vamos a probar que la desigualdad (6) se verifica para todo β que verifica (5e) y para todo s que verifica

$$\frac{n-1}{n} < s < 1 \quad , \qquad (6a)$$

de modo que

$$-1 < \frac{n-1-ns}{s} < 0 \qquad (6a')$$

Haciendo $|y|/|x| = \lambda$ se ve que el núcleo K presenta singularidades para los tres valores $\lambda = 0$, $\lambda = 1$, $\lambda = \infty$. Se lo divide pues en tres núcleos

$$K(x,y) = K_1(x,y) + K_2(x,y) + K_3(x,y) \quad ,$$

$$K_1(x,y) = \begin{cases} K(x,y) & \text{para } 0 \leq \lambda \leq \frac{1}{2} \\ 0 & \text{si } \lambda > \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$K_2(x,y) = \begin{cases} K(x,y) & \text{para } \lambda \geq 2 \\ 0 & \text{para } \lambda < 2 \end{cases}$$

$$K_3(x,y) \begin{cases} K(x,y) & \text{para } \frac{1}{2} < \lambda < 2 \\ 0 & \text{para } 0 < \lambda \leq \frac{1}{2} \text{ y para } \lambda \geq 2 \ . \end{cases} \qquad (6b)$$

Pongamos

$$U_i f(x) = \int_{E^n} K_i(x,y)\, f(y)\, dy \qquad (i=1,2,3) \qquad (6c)$$

Pasando a coordenadas polares, $x = r\xi$, $y = R\eta$,

$$U_i f(x) = \int_{\Sigma} \int_0^{\infty} K_i(r\xi, R\eta)\, f(R\eta)\, R^{n-1}\, dR\, dw_\eta$$

donde Σ_η es la esfera unitaria. Como K es homogéneo de grado $(-n)$, poniendo

$$R = \lambda r \tag{6e}$$

tendremos que

$$U_i f(x) = \int_{\Sigma_\eta} \int_0^{\infty} K_i(\xi, \lambda\eta)\, f(\lambda r\eta)\, \lambda^{n-1}\, d\lambda\, dw_\eta \tag{6f}$$

Para $i = 1$ es $0 \leq \lambda \leq \frac{1}{2}$,

$$K_1(\xi, \lambda\eta) = \frac{|1-\lambda^{-\beta}|}{|1-2\lambda\cos(\xi,\eta)+\lambda^2|^{n/2}} \leq A\,|1-\lambda^{-\beta}| \quad ,$$

pues

$$|1-2\lambda\cos(\xi,\eta)+\lambda^2|^{n/2} \geq \text{cste} > 0 \quad ,$$

luego

$$|U_1 f(r\xi)| \leq A \int_{\Sigma_\eta} \int_0^{\frac{1}{2}} |1-\lambda^{-\beta}|\, \lambda^{n-1}\, f(\lambda r\eta)\, d\lambda\, dw_\eta \tag{6g}$$

Vamos a acotar la integral

$$\left(\int_{|X|} |(U_1 f)(x)|^s dx \right)^{1/s} = \left[\int_{\Sigma_\xi} \int_{X_\xi} |U_1 f(r\xi)|^s\, r^{n-1}\, dr\, d\xi \right]^{1/s} \quad ,$$

donde, para cada ξ de la esfera unitaria Σ, X_ξ es el conjunto de los r con $r\xi \in X$.

Usando (6g) y la desigualdad de Hölder tendremos (puesto que $s<1$):

$$\left(\int_{|X|} |U_1 f|^s dx \right)^{1/s} \leq$$

$$c\left\{\int_{\Sigma_\xi} \left[\int_{X_\xi} \left(\int_{\Sigma_\eta} \int_0^{\frac{1}{2}} |1-\lambda|^{-\beta} \lambda^{n-1} f(\lambda r \eta) d\lambda dw_\eta \right)^s r^{n-1} dr \right] dw_\xi \right\}^{1/s}$$

$$= c \left\{\int_{\Sigma_\xi} \left[\int_{X_\xi} \left(\int_{\Sigma_\eta} \int_0^{\frac{1}{2}} |1-\lambda|^{-\beta} \lambda^{n-1} f(\lambda r \eta) r^{\frac{n-1}{s}} d\lambda dw_\eta \right)^s dr \right] dw_\xi \right\}^{1/s} \leq$$

$$c\left\{\int_{\Sigma_\xi} \left[\int_{X_\xi} \int_{\Sigma_\eta} \int_0^{\frac{1}{2}} |1-\lambda|^{-\beta} \lambda^{n-1} f(\lambda r \eta) r^{\frac{n-1}{s}} d\lambda dw_\eta dr \right]^s \left[\int_{X_\xi} dr \right]^{1-s} dw_\xi \right\}^{\frac{1}{s}},$$

con

$\left[\int_{X_\xi} dr \right]^{1-s} = |X_\xi|^{1-s}$. Como $0 \leq \lambda \leq \frac{1}{2}$, $\beta < 0$, es $|1-\lambda|^{-\beta} \leq 1$,

y haciendo $l = \lambda r$, tendremos que la expresión precedente es

$$\leq \left\{\int_{\Sigma_\xi} \left[\int_{X_\xi} \int_{\Sigma_\eta} \int_0^{\infty} l^{n-1} f(l\eta) \frac{r^{\frac{n-1}{s}}}{r^{n-1}} \frac{dl}{r} dw_\eta dr \right]^s |X_\xi|^{1-s} dw_\xi \right\}^{1/s}.$$

En el corchete resultan las variables separadas, luego la expresión precedente es

$$= \left\{ \int_{\Sigma_\xi} \left[\int_{X_\xi} r^{\frac{n-1}{s}} dr \right]^s \left[\int_{\Sigma_\eta} \int_0^\infty l^{n-1} f(l\eta)\, dl\, dw_\eta \right]^s |X_\xi|^{1-s} dw_\xi \right\}^{1/s}$$

donde

$$\int_{\Sigma_\eta} \int_0^\infty l^{n-1} f(l\eta)\, dl\, dw_\eta = ||f||_1 \quad ,$$

quedando pues

$$||f||_1 \left\{ \int_\Sigma |X_\xi|^{1-s} \left[\int_{X_\xi} r^{\frac{n-1-ns}{s}} dr \right]^s dw_\xi \right\}^{1/s} .$$

Como $|X|$ tiene medida finita $|X_\xi|$ solo puede ser infinito en un conjunto de medida nula de ξ-es . Por (6g!) , la integral del último corchete es convergente, y la potencia de r es negativa, luego dicho corchete es menor igual que

$$\int_0^{|X_\xi|} r^{\frac{n-1-ns}{s}} dr \qquad .$$

Por tanto

$$\left(\int_X |U_1 f|^s dx\right)^{1/s} \leq c_1 ||f||_1 \left\{ \int_{\Sigma_\xi} |X_\xi|^{1-s} \left[|X_\xi|^{\frac{n-1-ns}{s}+1} \right]^s dw \right\}^{\frac{1}{s}}$$

$$= c_1 ||f||_1 \left\{ \int_{\Sigma_\xi} |X_\xi|^{n(1-s)} dw_\xi \right\}^{1/s} \leq$$

$$\leq c_1 ||f||_1 \left\{ \int_{\Sigma_\xi} |X_\xi|^n dw_\xi \right\}^{\frac{1-s}{s}} \left\{ \int_{\Sigma_\xi} dw_\xi \right\} \leq M_1 ||f||_1 |X|^{\frac{1-s}{s}} . \qquad (6h)$$

Vamos a acotar ahora a U_2f , en que $2 \leq \lambda < \infty$. Tenemos

$$U_2f(r\xi) = \int_{\Sigma_\eta}\int_2^\infty \frac{|1-\lambda^{-\beta}|\ \lambda^{n-1}}{|1-2\lambda\cos(\xi,\eta)+\lambda^2|^{n/2}} f(\lambda r\eta)d\lambda\, dw_\eta \quad ,$$

y en este caso

$$|1-\lambda^{-\beta}| \,/\, |1-2\lambda\cos(\xi,\eta)+\lambda^2|^{n/2} \leq B\frac{|1-\lambda^{-\beta}|}{\lambda^n}$$

Poniendo

$$\varepsilon = (n-1)(1-s) \qquad \therefore \quad \frac{n-1-\varepsilon}{s} = n-1$$

tendremos, aplicando la desigualdad de Hölder y el cambio de variable $r\lambda = \rho$, que

$$\left\{\int_{\Sigma_\xi}\int_{X_\xi}|U_2f(r\xi)|^s\ r^{n-1}dr\,dw_\xi\right\}^{1/s} \leq$$

$$\leq\left\{\int_{\Sigma_\xi}\left[\int_{X_\xi}\left(\int_{\Sigma_\eta}\int_2^\infty\frac{|1-\lambda^{-\beta}|}{\lambda}f(\lambda r\eta)d\lambda\, dw_\eta\right)^s r^{n-1}dr\right]dw_\xi\right\}^{1/s} =$$

$$=\left\{\int_{\Sigma_\xi}\left[\int_{X_\xi}\left(\int_{\Sigma_\eta}\int_2^\infty\frac{|1-\lambda^{-\beta}|}{\lambda}f(\lambda r\eta)r^{\frac{n-1-\varepsilon}{s}}d\lambda\, dw_\eta\right)^s r^{\varepsilon}dr\right]dw_\xi\right\}^{1/s}\leq$$

$$\leq\left\{\int_{\Sigma}\left[\int_{X_\xi}\int_{\Sigma_\eta}\int_2^\infty\frac{|1-\lambda^{-\beta}|}{\lambda}f(\lambda r\eta)\ r^{\frac{n-1-\varepsilon}{s}}d\lambda\, dw_\eta\, dr\right]^s\left[\int_{X_\xi} r^{\frac{s}{1-s}}dr\right]^{1-s}dw_\xi\right\}^{\frac{1}{s}}$$

$$\leq \left\{ \int_{\Sigma_\xi} \left[\int_0^\infty \int_{\Sigma_\eta} \int_2^\infty \frac{|1-\lambda^{-\beta}|}{\lambda} f(\rho\eta) \frac{\rho^{\frac{n-1-}{s}}}{\frac{n-1-\varepsilon}{s}} d\lambda dw_\eta \frac{d\rho}{\lambda} \right]^s \left[\int_{X_\xi} r^{\frac{\varepsilon}{1-s}} dr \right]^{1-s} dw_\xi \right\}^{\frac{1}{s}}.$$

En el corchete las variables están separadas y la última ex - presión es

$$= \left\{ \int_{\Sigma_\xi} \left[\int_{X_\xi} r^{\overline{1-s}} dr \right]^{1-s} \left[\int_\theta^\infty \int_{\Sigma_\eta} f(\rho\eta) \rho^{\frac{n+\varepsilon}{s}} dw_\eta d\rho \int_2^\infty \frac{|1-\lambda^{-\beta}|}{\lambda^{2+\frac{n-1-}{s}}} d\lambda \right]^s dw_\xi \right\}^{\frac{1}{s}}$$

$$= \left\{ \int_{\Sigma_\xi} \left(\int_{X_\xi} r^{\frac{(n-1)(1-s)}{1-s}} dr \right)^{1-s} ||f||_1^s \left[\int_2^\infty \frac{|1-\lambda^{-\beta}|}{\lambda^{2+\frac{n-1+(n-1)(1-s)}{s}}} d\lambda \right]^s dw_\xi \right\}^{\frac{1}{s}}$$

$$= \text{cst.}\ ||f||_1 \left\{ \int_{\Sigma_\xi} \left(\int_{X_\xi} r^{n-1} dr \right)^{1-s} \left(\int_2^\infty \frac{|1-\lambda^{-\beta}|}{\lambda^{n+1}} d\lambda \right)^s dw_\xi \right)^{1/s} .$$

Como $\beta > -n$, la última integral en λ converge, y la expre - sión precedente es

$$\leq \text{cst.}\ ||f||_1 \left[\int_{\Sigma_\xi} \left(\int_{X_\xi} r^{n-1} dr \right)^{1-s} dw_\xi \right]^{1/s} \leq$$

$$\leq \text{cst.}\ ||f||_1 \left\{ \left[\int_{\Sigma_\xi} \int_{X_\xi} r^{n-1} dr dw_\xi \right]^{1-s} \left[\int_{\Sigma_\xi} dw \right]^s \right\}^{1/s} \leq$$

$$\leq M_2\ ||f||_1\ |X|^{(1-s)/s} ,$$

o sea

$$\left(\int_X |U_2 f|^s dx \right)^{1/s} \leq M_2 \, ||f||_1 \, |X|^{\frac{1-s}{s}} \tag{6i}$$

La acotación para $U_3 f$ es la misma que la de Stein y se basa en la acotación por la convolución con el núcleo de Poisson, que es de tipo (p,p) para $1 \quad p \quad \infty$, y a fortiori de tipo débil $(1,1)$, lo que prueba la desigualdad (b) ,

c.d.d.

<u>4.E.2. TEOREMA. El teorema A es válido para</u> $p = 1$ <u>y tipo débil: si el operador</u> Tf <u>definido por (5) es de tipo débil</u> $(1,1)$ <u>(respecto de la medida de Lebesgue</u> dx) , <u>esto es si</u>

$$\left(\int_X |Tf(x)|^s dx \right)^{1/s} \leq M \, |X|^{\frac{1-s}{s}} \, ||f||_1 \quad , \tag{7}$$

<u>para</u> $s<1$, <u>y para todo</u> $X \subset E_n$ <u>de medida finita, y si</u> $|H(x,y)| \leq B$, <u>entonces</u> Tf <u>es de tipo débil ponderado respecto de la medida</u> $|x|^{\beta} dx$, <u>es decir se verifica</u>

$$\left(\int_X |Tf(x)|^s |x|^{\beta s} dx \right)^{1/s} \leq M \, |X|^{\frac{1-s}{s}} \, || f(x) |x|^{\beta} ||_1 \tag{7a}$$

<u>para todo</u> β <u>tal que</u> $-n < \beta < 0$ <u>y todo</u> s <u>tal que</u> $\frac{n-1}{n} < s < 1$

(7b)

Demostración. Por la hipótesis se tiene

$$\left(\int_X \left| T\left[f(y)|y|^{\beta} \right] \right|^s dx \right)^{1/s} \leq M\, |X|^{\frac{1}{s}-1} \, \| f(y)|y|^{\beta} \|_1 \quad ,$$

luego basta mostrar que

$$\left(\int_X \left| T\left[f(y)|y|^{\beta} \right] - |x|^{\beta} T\left[f(y) \right] \right|^s dx \right)^{\frac{1}{s}} \leq M_1 |X|^{\frac{1-s}{s}} \, \| f(y)|y|^{\beta} \|_1 \qquad (7c)$$

Pero como

$$\left| T\left[f(y)|y|^{\beta} \right] - |x|^{\beta} T\left[f(y) \right] \right| =$$

$$= \left| \int_{E^n} \frac{H(x,x-y)}{|x-y|^n} f(y)|y|^{\beta} dy - \int_{E^n} \frac{H(x,x-y)}{|x-y|^n} f(y)|x|^{\beta} dy \right| =$$

$$= \left| \int_{E^n} H(x,x-y) \left(\frac{|y|^{\beta} - |x|^{\beta}}{|x-y|^n} \right) f(y) dy \right| \leq B \int_{E^n} \frac{\left| 1 - \frac{|x|^{\beta}}{|y|^{\beta}} \right|}{|x-y|^n} |y|^{\beta} f(y) dy$$

$$= B \int_{E^n} K(x,y) \, |y|^{\beta} |f(y)| \, dy \quad ,$$

la desigualdad (7c) es consecuencia del teorema anterior,

c.d.d.

El teorema siguiente extiende el teorema de Stein a tipos mixtos y la demostración se basa en una idea diferente y más simple, a saber, en la acotación de K por los núcleos $T_{n,\sigma}$ de 4.A.3.

4.E.3. TEOREMA. El operador Uf definido por (5d) es de tipo mixto $(\bar{p},\bar{p})$ bajo la condición $-(n/\bar{p}) < \beta < n/(\bar{p}^{\#})$ (7d)

Demostración. En virtud de 4.A.3. basta mostrar que el operador U f está dominado por una suma de operadores de la forma T_n, (ver (2) de 4.A.3.), o sea que el núcleo K de Uf es dominado por núcleos de estos operadores.

Consideremos antes el caso en que

$$-\beta = \gamma > 0 \quad . \tag{7e}$$

Tenemos que

$$k(x,y) = \frac{\left|\, |x|^{\gamma} - |y|^{\gamma} \right|}{|x|^{\gamma}\ |x-y|^{n}} \qquad \text{5c bis)}$$

a) Sea $|y| \leq 2\,|x-y|$,

Haciendo $z = x-y$, $x = y+z$, tenemos $|t+z|^{\gamma} \leq |2y|^{\gamma}+|2z|^{\gamma} = 2^{\gamma}|y|^{\gamma}+2^{\gamma}|z|^{\gamma}$, $|y+z|^{\gamma}-|y|^{\gamma} \leq (2^{\gamma}-1)|y|^{\gamma}+2^{\gamma}|x-y|^{\gamma} \leq (2^{\gamma}-1)\,2|x-y|^{\gamma}+2^{\gamma}|x-y|^{\gamma}$.

Luego

$$|x|^{\gamma}-|y|^{\gamma} \leq c_{\gamma}\,|x-y|^{\gamma} \quad .$$

Análogamente, haciendo $z = y-x$, $y = x+z$,

$|x+z|^{\gamma} - 2^{\gamma}|x|^{\gamma} \leq 2^{\gamma}|x|^{\gamma}$,

$$2^{\gamma}|y|^{\gamma} - 2^{\gamma}|x|^{\gamma} \leq (2^{\gamma}-1)|y|^{\gamma}+2^{\gamma}|y-x|^{\gamma}$$

$$2^{\gamma}(|y|^{\gamma}-|x|^{\gamma}) \leq (2^{\gamma}-1)\,2\,|x-y|^{\gamma}+2\,|y-x|^{\gamma} \quad ;$$

encontraremos que

$$|y|^{\gamma} - |x|^{\gamma} \leq c_{\gamma} |x-y|^{\gamma} ,$$

luego

$$\left| \, |x|^{\gamma} - |y|^{\gamma} \, \right| \leq c_{\gamma} |x-y|^{\gamma}$$

y por tanto

$$K(x,y) \leq c \frac{|x-y|^{\gamma}}{|x|^{\gamma}|x-y|^{n}} = c_{\gamma} \frac{1}{|x|^{\gamma}} \frac{1}{|x-y|^{n-\gamma}}$$

Por tanto en este caso Uf está dominado por $T_{n,\gamma}$.

b) Sea $|y| > 2\,|x-y|$.

Entonces

$$\left.\begin{array}{l} |y| > 2|x| - 2|y| \\ |y| > 2|y| - 2|x| \end{array}\right\} \quad 3|y| > 2|x| > |y|$$

$\therefore$

$$\frac{3}{2} > \frac{|x|}{|y|} > \frac{1}{2}$$

Pero $|x|^{\gamma} - |y|^{\gamma} = (|x|-|y|)\gamma|\eta|^{\gamma-1}$, donde η es un valor intermedio; luego de la desigualdad precedente resulta

$$|x|^{\gamma} - |y|^{\gamma} \leq c_{\gamma} |x-y| \; |x|^{\gamma-1}$$

Análogamente $|y|^{\gamma} - |x|^{\gamma} \leq c_{\gamma} |x-y| \; |x|^{\gamma-1}$, y tenemos ahora que

$$K(x,y) \leq c_{\gamma} \frac{|x-y| \; |x|^{\gamma-1}}{|x|^{\gamma} |x-y|^{n}} = \frac{1}{|x|^{1}} \frac{1}{|x-y|^{n-1}}$$

O sea en este caso Uf está dominado por $T_{n,1}$. Observemos que si $\gamma < 1$ el operador Uf se acota por $T_{n,\gamma}$, pues como $|x-y| \leq |x|+2|x| = 3|x|$,

$$K(x,y) \leq c_\gamma \frac{|x-y|\,|x|^{\gamma-1}}{|x|^\gamma\,|x-y|^n} \leq c_\gamma \frac{|x-y|^{1-\gamma}}{|x|^\gamma |x-y|^{n-\gamma} |x|^{1-\gamma}} \leq$$

$$c_\gamma \frac{|x|^{1-\gamma}}{|x|^\gamma |x-y|^{n-\gamma} |x|^{1-\gamma}} .$$

Por hipótesis se verifica $\gamma/n \leq 1/\bar{p}$ que es la condición exigida en 4.A.3. Si $\bar{p} \nless n$ será $\gamma \leq n/p_i < 1$ para algún i, y en este caso U es dominado por T_n. Si $\bar{p} < n$, Uf es dominado por $T_{n,1} + T_{n,\gamma}$, y se verifican las condiciones de 4.A.3.

Consideremos ahora el caso

$$\beta > 0 \tag{7f}$$

Tenemos

$$\left\|\int K(x,y)\, f(y)\, dy\right\|_{\bar{p}} = \sup_{\|g\|_{\bar{p}^\#}=1} \int_X \left[\int_Y K(x,y) f(y) dy\right] g(x)\, dx =$$

$$= \sup_g \int_X\int_Y \frac{|y|^\beta - |x|^\beta}{|y|^\beta\,|x-y|^n} f(y)\, g(x)\, dx =$$

$$= \sup_{g} \int_{Y} f(y) \left(\int_{X} \frac{|y|^{\beta} - |x|^{\beta}}{|y|^{\beta} |x-y|^{n}} g(x)\, dx \right) dy \quad ,$$

y el último paréntesis está en la condición del caso precedente (por (7d) tenemos que también $0 < \beta < n/\bar{p}^{\#}$ y $g \in L^{\bar{p}^{\#}}$).

Así pues el caso $\beta > 0$ se reduce al $\beta < 0$, y en todo caso aplicando 4.A.3. resulta la tesis,

c.d.d.

Hemos usado tan solo una parte de 4.A.3. Usando las demás propiedades de 4.A.3. podemos dar análogamente otras variantes del teorema de Stein con tipos magros o semidébiles.

—o—

Mischa Cotlar

C. Balanzat

REFERENCIAS

[1] A. Benedek - R. Panzone. The spaces L^p, with mixed norms. Duke Math.J. Vol. 28,3 , págs. 301-324 (1961).

[2] Benedek-Calderón-Panzone. Convolution operators on Banach space valued functions. Proceedings N.Ac.Sc. Vol. 48,3, págs. 356-365 (1962).

[3] A. Benedek. Tesis. Universidad de Buenos Aires (1962).

[4] A.P. Calderón. Espacios intermedios e interpolación. Conferencia sobre Análisis Funcional, Varsovia , (1960).

[5] M. Cotlar. Continuidad de operadores potenciales. Cursos y seminarios 2. Universidad de Buenos Aires , (1959).

[6] M. Cotlar y E. Ortiz. Some inequalities of potential operators. Revista Universidad de La Plata , (1961).

[7] E. Gagliardo. Interpolación de espacios de Banach. Ricerche di Mat. IX (1960), págs. 58-81, Ibid X , (1961) págs. 245-281.

[8] S.G. Krein. Sobre un teorema de interpolación. Doklady Akad . N. 130 (1960) p. 491-494 .

[8a] S. Krein - E. Semercov. Una escala de espacios. Ibid , 138 (1961), 763-766 .

[9] J. Lions. Sur les espaces d'interpolation. Math.Scand. IX (1961), 147-177 .

[10] Lions-Peetre. Propiétés d'espaces d'interpolation. C.R. Ac.Sc. 253 (1961) p. 1747-49 .

[11] G. Lorentz. Some New Functional Spaces. Ann. Math. 51 (1950), 37-55 .

[12] R. O'Neil. Convolution Operators and $L_{(p,q)}$ spaces. Duke Math. J. (1963).

[13] J. Peetre. C.R. Acad. Sci. 256 (1963) .

[14] E. Stein. On limits of sequences of operators, Ann. Math. Vol. 74, 1 (1961).

[15] E. Stein. Note on Singular Integrals. Proc.Am.Math.Soc. Abril 1957.

[16] G. Weiss. Funciones armónicas de n variables. Cursos y seminarios 7 . Universidad de Buenos Aires (1960).

[17] A. Zygmund. Trigonometric Series, I.II, Cambridge, 1959 .

---0---