

Tesis de Posgrado

Desarrollo del formalismo de Bargmann-Wigner para mesones vectoriales

Kálnay, Andrés José

1963

Tesis presentada para obtener el grado de Doctor en Ciencias Físico-Matemáticas de la Universidad de Buenos Aires

Este documento forma parte de la colección de tesis doctorales y de maestría de la Biblioteca Central Dr. Luis Federico Leloir, disponible en digital.bl.fcen.uba.ar. Su utilización debe ser acompañada por la cita bibliográfica con reconocimiento de la fuente.

This document is part of the doctoral theses collection of the Central Library Dr. Luis Federico Leloir, available in digital.bl.fcen.uba.ar. It should be used accompanied by the corresponding citation acknowledging the source.

Cita tipo APA:

Kálnay, Andrés José. (1963). Desarrollo del formalismo de Bargmann-Wigner para mesones vectoriales. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad de Buenos Aires. http://digital.bl.fcen.uba.ar/Download/Tesis/Tesis_1160_Kalnay.pdf

Cita tipo Chicago:

Kálnay, Andrés José. "Desarrollo del formalismo de Bargmann-Wigner para mesones vectoriales". Tesis de Doctor. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad de Buenos Aires. 1963. http://digital.bl.fcen.uba.ar/Download/Tesis/Tesis_1160_Kalnay.pdf

EXACTAS UBA

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales



UBA

Universidad de Buenos Aires

UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES

FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

DESARROLLO DEL FORMALISMO DE

BARGMANN - WIGNER

PARA MESONES VECTORIALES

Padrino: Dr. José Leite Lopes

Centro Brasileiro de

Pesquisas Físicas

Responsable en Bs. As.:

Dr. C. Bollini

Autor: Andrés José Kálnay

Tesis presentada para optar al título de:

Doctor en Ciencias Fisicomatemáticas

Año: 1963

7450-115

UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES

UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES

FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

DESARROLLO DEL FORMALISMO DE

BARGMANN - WIGNER

PARA MESONES VECTORIALES

Padrines: Dr. José Leite Lopes

Centro Brasileiro de

Pesquisas Físicas.

Responsable en Bs. As.:

Dr. C. Bollini

Autor: Andrés José Kálnay

Resumen de la tesis presentada para optar al

título de: Doctor en Ciencias Fisicomatemáticas

Año: 1963

En este trabajo se desarrollan las primeras etapas del formalismo de Bargmann-Wigner para los mesones vectoriales.

En el primer capítulo hacemos una rápida revisión de otros formalismos utilizados, comparando al de BW con otros que -como él- necesitan introducir un campo con más componentes que las físicamente necesarias (= redundantes), a fin de mantener el carácter manifiesto de la covariancia relativista.

En el segundo capítulo desarrollamos aquella parte de la estructura matemática que se aparta sustancialmente de la usualmente empleada en mecánica cuántica.

En el tercer capítulo nos ocupamos de la aproximación de una "partícula". Nuestro objetivo es obtener observables consecuentes con los postulados interpretativos, y poder calcular sus valores medibles. Demostramos que justamente por no haber utilizado una estructura matemática consecuente con lo que se pretende describir, se han obtenido anteriormente conclusiones erróneas acerca de los observables en formalismos de este tipo. Demostramos que -contra lo que ocurre habitualmente- los autovalores de observables propuestos antes pueden no tener ninguna relación con los valores medibles; resolvemos de esta manera la conocida paradoja del autovalor nulo del hamiltoniano de Kemmer. Es más: demostramos también que los autovectores pueden no representar autoestados, y hallamos entonces que el operador que habitualmente se tiene como representante del spin en formalismos similares, no lo representa en absoluto, a menos que se fueren artificialmente las reglas interpretativas. Estudiamos este tipo de dificultades tanto en general, como en particular para ciertos observables importantes, y pretendemos haberlas resuelto. Sustituimos, pues, al conjunto de operadores que representan observables (en la aproximación de una "partícula") por otro conjunto que esperamos sea más correcto y completo. En la parte final del capítulo consideramos en general la incidencia de la estructura matemática no usual, sobre los cambios de representación; como particularización, encontramos una transformación tipo Foldy-Wouthuysen-Tani que satisface todos los requisitos exigidos para recibir tal nombre.

En los capítulos cuarto y quinto buscamos representaciones de los entes utilizados en spin 1 (formalismo de BW) en términos de los entes correspondientes utilizados en spin $\frac{1}{2}$ (ecuación de Dirac). El objeto es simplificar cálculos en spin 1 reduciéndolos a cálculos ya efectuados en spin $\frac{1}{2}$. Además desarrollamos el álgebra de los "spinores" de spin 1 (matrices 4×4 , pero de

sólo 6 componentes independientes) de manera de disponer, para efectuar aplicaciones, de un conjunto de propiedades similar al constantemente utilizado para cálculos en spin $\frac{1}{2}$.

En la primera parte del capítulo sexto nos ocupamos de diversas operaciones de simetría (conjugación de carga, inversión temporal, etc.). En la segunda, buscamos un conjunto de formas bilineales (en Ψ y $\bar{\Psi}$) independientes que se puedan agrupar en representaciones tensoriales del grupo de Lorentz, y que subtiendan al espacio de todas las formas bilineales. Por qué? 1) Porque los entes con significado físico deben ser representaciones tensoriales del grupo de Lorentz, y además, casi siempre son bilineales (en el campo y en el campo adjunto). 2) Porque la experiencia muestra que para spin $\frac{1}{2}$ el conjunto en cuestión (allí reducido a 16 formas, un escalar, un 4-vector, etc.) es un instrumento utilísimo para las aplicaciones. Mostramos las dificultades que encontramos en nuestro caso, originadas en la existencia de componentes redundantes, y ofrecemos la forma de eludirlos.

Como la mayor parte del estudio de mesones vectoriales se ha efectuado en el formalismo de Proca, es importante poder conectarlo con el de BW. Para los campos el problema estaba resuelto con anterioridad, de manera que nos hemos ocupado de hallar el diccionario de traducción de los observables contruidos con los campos, o, lo que es lo mismo, de las formas bilineales recién mencionadas. De ello nos ocupamos en el capítulo séptimo.

En el octavo hemos desarrollado la teoría clásica de campos en el formalismo de BW a partir de un principio variacional, de manera que esperamos autoconsecuente respecto del grado de libertad del sistema (lo cual no siempre se tiene en cuenta en spin 1). Mostramos las dificultades y la forma de resolverlas sin perjudicar la covariancia. Finalmente, obtenemos los "observables" del campo. En realidad, obtenemos no una sino dos formulaciones lagrangeanas que—si bien coinciden en cuanto a la mayoría de los "observables", no son físicamente equivalentes según esperamos haber demostrado. Finalmente, buscamos alguna consecuencia física de este último hecho.

En el noveno capítulo nos ocupamos de las reglas de conmutación de la versión cuantificada de la teoría.

Dedicamos el décimo y último capítulo a mostrar que en un artículo de Belinfante (anterior al de Bargmann y Wigner) está la respuesta a una crítica injustamente efectuada al formalismo de BW acerca de la posibilidad de introducir interacciones sin caer en contradicción.

Andrés José Kálnay

A G R A D E C I M I E N T O S

Deseo dejar constancia de mi reconocimiento a las siguientes personas y entidades:

- Al Dr. José Leite Lopes, que sugirió el tema y apadrinó la tesis, por sus enseñanzas, su dirección, y por el trato hondamente humano que otorgó a quien fué en busca de su guía.
- Al Dr. C. G. Bollini, que tuvo a su cargo la dirección local (en Bs. As.) de la tesis desde mi retorno a la Argentina, por sus apreciadas observaciones y por el tiempo que cordialmente dedicó a esa tarea.
- A los Dres. J. J. Giambiagi, C. G. Bollini y S. Schiminovich por su participación y discusión en un seminario interno de la F.C.E.N. en el cual expuse una parte de este trabajo.
- Al Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas por una beca gracias a la cual fué enviado al C. B. P. F. , donde inicié esta tesis.
- Al Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas, a la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales de la Universidad Nacional de Buenos Aires y al Instituto de Matemática, Astronomía y Física de la Universidad Nacional de Córdoba por la hospitalidad sucesivamente otorgada.

Andrés José Kálnay

I N D I C E

Agradecimientos	II
Indice general	III
<u>CA PITULO PRIMERO: INTRODUCCION.</u>	pág 1
1.a - NOCIONES PRELIMINARES	" 1
1.b - LAS ECUACIONES DE BARGMANN-WIGNER	" 1
1.c - MAS SOBRE NOTACION	" 2
1.d - OTROS FORMALISMOS	" 3
1.e - LA FUNCION DE ONDA ADJUNTA $\bar{\Psi}$	" 5

CAPITULO SEGUNDO: INSTRUMENTOS MATEMATICOS UTILES PARA EL DESARROLLO DEL FORMALISMO.

2.a - EL PRODUCTO ESCALAR	" 6
2.b - LA CONDICION INICIAL	" 6
2.c - LOS ESPACIOS \mathcal{E} , \mathcal{E}^{sim} y \mathcal{W} ; OTROS ESPACIOS ASOCIADOS. LAS Ψ^I Y Ψ^{II} DE BELINFANTE	" 7
2.c-1) Los espacios \mathcal{E} , \mathcal{E}^{sim} y \mathcal{W} .	" 7
2.c-2) Notación.	" 8
2.c-3) Espacios spinoriales	" 8
2.c-4) Los espacios \mathcal{E}^{ant} y \mathcal{E}_{sp}^{ant}	" 9
2.c-5) Las Ψ^I y Ψ^{II} de Belinfante.	" 9
2.c-6) Una representación.	" 10
2.d - IGUALDADES Y EQUIVALENCIAS	" 11
2.d-1) Igualdades.	" 11
2.d-2) Equivalencia escalar.	" 12
2.d-3) Equivalencia tensorial.	" 13
2.d-4) Fórmulas sobre equivalencias	" 14
2.e - CONJUGACION PSEUDOHERMITIANA	" 15
2.e-1) El procedimiento conocido para un espacio con métrica indefinida cuando no hay componentes redundantes.	" 15

2.e-2)	Adaptamos el procedimiento anterior a nuestro caso.	Pág 15
2.f -	PROYECCIONES.	" 17
2.f-1)	Repaso de nociones conocidas.	" 17
2.f-2)	Un operador proyección simple (pero no ortogonal) de \mathcal{E}^{sim} sobre \mathcal{W} .	" 18
2.f-3)	El operador $\Lambda_{\perp}^{\mathcal{W}\mathcal{E}^{\text{sim}}}$ que proyecta ortogonalmente \mathcal{E}^{sim} sobre \mathcal{W} .	" 18
2.f-4)	Productos de operadores proyección tipos 2.f-2 y 2.f-3.	" 20
2.f-5)	Proyecciones (no ortogonales) de \mathcal{E} sobre \mathcal{E}^{sim} y \mathcal{E}^{ant} .	" 22
2.f-6)	Proyección ortogonal de \mathcal{C} sobre \mathcal{W} .	" 22
<u>CAPITULO TERCERO: LA APROXIMACION DE UNA PARTICULA.</u>		" 24
3.a -	RESUMEN DE NOCIONES GENERALES CONOCIDAS.	" 24
3.b -	LA DENSIDAD DE CARGA. EL TETRAVECTOR CORRIENTE.	" 25
3.c -	EL HAMILTONIANO.	" 26
3.c-1)	Su obtención y comparación con el hamiltoniano de Kemmer.	" 26
3.c-2)	Comparación con el hamiltoniano de de Broglie.	" 27
3.c-3)	El operador $m \beta_{(1)} I_{(2)}$.	" 27
3.c-4)	Sobre el autovalor cero del hamiltoniano de Kemmer."	28
3.c-5)	Estados de energía positiva $\Psi^{(+)}$ y negativa $\Psi^{(-)}$; operadores proyección. Valores medibles de la energía.	" 28
3.d -	OBSERVABLES. GENERALIDADES.	" 29
3.e -	OBSERVABLES. EL PROBLEMA DE LOS OPERADORES QUE TRANSFORMAN \mathcal{W} en \mathcal{E} .	" 30
3.e-1)	Los operadores de segunda clase pueden representar observables.	" 30
3.e-2)	Autovectores que no corresponden a autoestados. Falsos valores medibles. Falsas degeneraciones.	" 31
3.e-3)	Obtención de los valores medibles de un operador tipo \mathcal{W} .	" 31
3.e-4)	Obtención de los valores medibles y de los auto-	"

estados con un operador \mathcal{B} de 2a. clase.	pág 32
A) Dificultades. Demostraremos intuitivamente que puede ocurrir que ninguno de los autovectores ϕ de \mathcal{B} (multiplicado por ϵ) sea autoestado.	" 32
B) Dificultades. Demostraremos rigurosamente que ningún operador \mathcal{B} de segunda clase es tal que se puedan obtener todos sus autoestados mediante la regla habitual de igualar "autoestado" = "autovector perteneciente al espacio de los vectores de estado".	" 33
C) Solución.	
3.e-5) Los operadores de 2a. clase son correctos pero inconvenientes. Su sustitución por operadores equivalentes tipo $\sqrt{\quad}$.	" 34
3.e-6) Teorema sobre la pseudohermiticidad.	" 34
3.e-7) Qué ocurre cuando calculamos el operador de tipo $\sqrt{\quad}$ asociado a un operador \mathcal{A} de 1a. clase?	" 34
3.e-8) Dos condiciones necesarias y suficientes para que un operador sea de 1a. clase.	" 35
3.e-9) Ejemplos.	" 35
3.e-10) Representan al mismo observable los operadores de 2a. clase \mathcal{B} y \mathcal{C} si son equivalentes escalar en \mathcal{h}^{-1} ?	" 36
3.f - OBSERVABLES. LOS OPERADORES QUE TRANSFORMAN \mathcal{W} EN \mathcal{E}^{sim} .	" 38
3.f-1) Simplificación del caso general 3.e.	" 38
3.f-2) Teorema sobre la pseudohermiticidad.	" 39
3.g - DERIVACION RESPECTO DEL TIEMPO.	" 39
3.h - EL MOMENTO LINEAL.	" 40
3.i - EL MOMENTO ANGULAR.	" 40
3.i-1) El momento angular total.	" 40
3.i-2) El spin.	" 41
A) El operador tradicional.	" 41
B) $\frac{1}{2}(\vec{\sigma}_a + \vec{\sigma}_b)$ es de 2a. clase.	" 41
C) Al menos para ciertos valores de \vec{p} , ninguna de las autofunciones de $\frac{1}{2}(\sigma_a^1 + \sigma_b^1)$ correspondientes al autovalor +1 (ó -1) pertenece a \mathcal{W} .	" 42
D) Un operador de 1a. clase que representa al spin.	" 43
3.i-3) El momento angular orbital.	" 45
3.j - LA HELICIDAD.	" 45
3.k - EL OPERADOR POSICION HABITUAL.	" 46
3.l - EL OPERADOR PARIDAD.	" 46

3.m - TRANSFORMACIONES PSEUDOUNITARIAS.	pág 47
3.m - 1) Definición.	" 47
3.m-2) Condición necesaria y suficiente para que una transformación sea pseudounitaria.	" 48
3.m-3) Transformaciones pseudounitarias restrictas.	" 48
3.m-4) Transformaciones pseudounitarias restrictas unitarias.	48
3.n - UNA TRANSFORMACION TIPO FOLDY-WOUTHUYSEN-TANI.	" 49
3.n-1) Introducción.	" 49
3.n-2) Proponemos una transformación pseudounitaria restricta unitaria.	" 50
3.n-3) La transformación propuesta es de tipo Foldy-Wouthuysen-Tani.	" 51
3.n-4) Representación explícita de $\Psi^{(t)}$.	" 52
3.n-5) La representación de FWT origina trivialmente una formulación sin componentes redundantes.	" 53
3.n-6) Operadores proyección en la nueva representación.	" 53
3.n-7) Transformación de algunos observables ya conocidos.	" 54
3.n-8) Los operadores posición y velocidad media.	" 55
3.n-9) Conexión con los trabajos de Bollini y Giambiagi.	" 56
<u>CAPITULO CUARTO: EL DESARROLLO EN ONDAS PLANAS. CUESTIONES CONEXAS.</u>	" 59
4.a - INTRODUCCION.	" 59
4.b - LAS BASES u_+ , u_- , ... QUE SUBTIENDEN LOS ESPACIOS SPINORIALES $u_{\pm}^{(r)}$, $u_{\pm}^{(f)}$, $\xi_{\pm}^{(r)}$, $\xi_{\pm}^{(f)}$ y $\zeta_{\pm}^{(r)}$. EL CORRESPONDIENTE DESARROLLO EN ONDAS PLANAS DE UNA Ψ SOLUCION DE LAS ECUACIONES DE BARGMANN-WIGNER.	" 60
4.b-1) Bases para los espacios spinoriales.	" 60
4.b-2) Desarrollo de $\Psi(x)$ de Bargmann-Wigner en ondas planas.	" 62
4.b-3) Las propiedades algebraicas de $u_{\pm}(r, \bar{p})$.	" 62
4.c - SUSTITUCION DE LAS u_{\pm} POR u Y v .	" 63
4.d - SPINORES EN LOS ESPACIOS \mathcal{S}_r^+ Y \mathcal{S}_r^- .	" 65
4.d-1) Introducción.	" 65
4.d-2) Algunas propiedades algebraicas de los spinores u_{\pm} .	" 65
4.d-3) Los spinores u_{\pm} , base de \mathcal{S}_r^{\pm} .	" 65
4.d-4) Algunas propiedades algebraicas de los spinores u_{\pm} .	" 66

4.e - APLICACION: NORMALIZACION Y ORTOGONALIDAD.	pág. 66
4.f - APLICACION : UNA INTERPRETACION ESTADISTICA RESTRICTA. (TEORIA DE UNA "PARTICULA").	" 67
<u>CAPITULO QUINTO: REPRESENTACION DE LAS $\Psi(x)$ DE BARGMANN-WIGNER MEDIANTE DOS CAMPOS SPINORIALES $\Psi'(x)$ Y $\Psi''(x)$ DE SPIN $\frac{1}{2}$ (TEORIA NUMERO c).</u>	
5.a - UNA REPRESENTACION	" 69
5.a-1) Teorema.	" 69
5.a-2) Teorema inverso.	" 69
5.b - OTRAS FORMAS DE LA REPRESENTACION. FORMA MANIFIESTAMENTE COVARIANTE.	" 71
5.c - COMPARACION CON LA REPRESENTACION DE DE BROGLIE.	" 71
<u>CAPITULO SEXTO: LAS OPERACIONES DE SIMETRIA. LAS FORMAS BILINEALES $\Psi M \Psi$.</u>	
6.a - TRANSFORMACIONES INDUCIDAS POR EL GRUPO DE LAS TRANSFORMACIONES CONTINUAS DE LORENTZ.	" 73
6.a-1) Transformaciones homogéneas.	" 73
6.a-2) Traslaciones.	" 73
6.b - TRANSFORMACIONES INDUCIDAS POR REFLEXIONES ESPACIALES.	" 74
6.b-1) La transformación. Caso vectorial y caso pseudovec- torial.	" 74
6.b-2) Sobre la representación dada en el Cap. 5.	" 74
6.b-3) Segunda cuantificación - Transformación de los operadores creación y destrucción.	" 74
6.c - CONJUGACION PARTICULA-ANTIPARTICULA.	" 76
6.d - TRANSFORMACION INDUCIDA POR LA INVERSION TEMPORAL.	" 76
6.e - LAS FORMAS BILINEALES $\Psi M \Psi$ Y LAS OPERACIONES DE SIMETRIA. REPRESENTACIONES TENSORIALES DEL GRUPO DE LORENTZ"	77
6.e-1) Introducción.	" 77
6.e-2) Lema.	" 78
6.e-3) Tabla de 16^2 formas bilineales que se agrupan en representaciones tensoriales del grupo de Lorentz.	" 79
6.e-4) Transformación de las formas bilineales ante la conjugación partícula-antipartícula.	" 81

6.f - EL PROBLEMA DE HALLAR UNA BASE MANIFIESTAMENTE COVARIANTE PARA EL ESPACIO DE LAS FORMAS BILINEALES.	pág 81
6.f-1) Introducción.	" 81
6.f-2) Base para $\overline{\xi}_{s,p} \xi_{s,p}$.	" 83
6.f-3) Base (superabundante) para $\overline{\xi}_{s,p}^{\text{sim}} \xi_{s,p}^{\text{sim}}$.	" 83
A) 135 formas bilineales suficientes para subtender $\overline{\xi}_{s,p}^{\text{sim}} \xi_{s,p}^{\text{sim}}$.	" 83
B) Demostraremos que $F^{\mu\nu}$ es un pseudotensor de traza nula.	" 85
C) Por qué no eliminamos en tabla 6-2 las 35 formas que sobran para subtender $\overline{\xi}_{s,p}^{\text{sim}} \xi_{s,p}^{\text{sim}}$?	" 85
6.f-4) Definición de los operadores proyección Λ^V y Λ^{KI} . Los espacios $\xi_{s,p}^{\text{sim}V}$ y $\xi_{s,p}^{\text{sim}K}$. Propiedades.	" 87
6.f-5) Base (propia mente dicha) para $\overline{\xi}_{s,p}^{\text{sim}V} \xi_{s,p}^{\text{sim}V}$.	" 87
A) Relaciones que vinculan entre sí a diferentes representaciones tensoriales del grupo de Lorentz!	" 87
B) Relaciones que vinculan entre sí a elementos de una misma representación tensorial.	" 87
C) Nuevas relaciones que vinculan entre sí a diferentes representaciones tensoriales del grupo de Lorentz.	" 89
D) Obtención de una base para $\overline{\xi}_{s,p}^{\text{sim}V} \xi_{s,p}^{\text{sim}V}$	" 89
6.f-6) Desarrollo de los elementos $(V_{s,p}^{\mu\nu})$ como combinación lineal de representaciones tensoriales del grupo de Lorentz.	" 91
6.f-7) Ejemplos.	" 93
6.g - APLICACION: LA CORRIENTE.	" 94

CAPITULO SEPTIMO: CONEXION CON OTROS FORMALISMOS. " 96

7.a - INTRODUCCION.	" 96
7.b - DICCIONARIO DE TRADUCCION ENTRE EL FORMALISMO DE BARGMANN-WIGNER Y EL DE PROCA.	" 96
7.b-1) Introducción.	" 96
7.b-2) Dicc ionario de traduccion de las formas bilineales $\Psi M \Psi$. Procedimiento general.	" 96
7.b-3) Un procedimiento particular para recalcul ar algunas formas bilineales.	" 99
7.b-4) Aplicaciones.	" 100
A) Traducción de la densidad de carga.	" 100
B) Traducción de la densidad de corriente.	" 100
C) Traducción de la densidad de energía $(\Psi, H \Psi)_{s,p}$	" 100
D) Redemostración de la equivalencia (A2-6.12).	" 101

7.b-5) Una representación de Ψ , de Ψ^{∇} y de Ψ^{∇} . pag 101

<u>CAPITULO OCTAVO: TEORIA CLASICA DE CAMPOS.</u>	"	103
8.a - INTRODUCCION.	"	103
8.a-1) El problema de las variables independientes. Antecedentes.	"	103
8.a-2) Objetivos.	"	104
8.a-3) Notación y nomenclatura.	"	104
8.b - ELECCION DE LAS VARIABLES. OBTENCION DE LAS ECUACIONES DE BARGMANN-WIGNER.	"	105
8.b-1) Descomposición invariante del campo en parte independiente y parte dependiente.	"	105
8.b-2) Primer lema.	"	105
8.b-3) Por qué usar Ψ^{∇} como parte independiente del campo? Papel que desempeñará el primer lema.	"	106
8.b-4) Los espacios auxiliares ξ^{β} , ξ^{μ} , ξ^{μ} y ξ^{μ} .	"	106
A) Los espacios ξ^{β} y ξ^{μ} .	"	106
B) Los espacios ξ^{μ} y ξ^{μ} .	"	107
C) Los espacios ξ^{μ} y ξ^{μ} .	"	107
D) Propiedades de $\Lambda^{\mu}(\bar{p})$ y $\Lambda^{\mu}(\bar{p})$.	"	108
E) Conmutación de operadores proyección.	"	108
8.b-5) Notas sobre la condición inicial.	"	108
A) Notación.		
B) La condición en términos de Ψ^{∇} .	"	108
C) Generalización covariante.	"	109
8.b-6) Las dos densidades lagrangeanas que se usarán.	"	109
8.b-7) Más sobre notación.	"	109
8.b-8) El procedimiento variacional (formulación $\frac{1}{2}$).	"	110
A) Definiciones e hipótesis.	"	110
B) Ecuaciones de Euler generalizadas.	"	110
C) Primera forma de las ecuaciones de evolución.	"	111
D) Demostraremos que no solo Ψ y $\partial_0 \Psi$ cumplen la condición inicial sobre $\sigma_{1\perp}$ sino que también $\partial^2 \Psi(\sigma_{1\perp})$ y $\partial^3 \Psi(\sigma_{1\perp})$ la cumplen sobre $\sigma_{1\perp}$.	"	111
E) Demostraremos que Ψ cumple la condición inicial no sólo sobre $\sigma_{1\perp}$ sino también para todo x^{μ} . Consecuencias.	"	113
F) Demostraremos que si Ψ es solución del problema variacional, sus partes Ψ^{β} y Ψ^{μ} también lo son.	"	113
G) Demostraremos que si Ψ^{μ} es solución del problema variacional, su parte Ψ^{μ} es nula.	"	114
H) Demostraremos que si Ψ^{μ} es solución del problema variacional, su parte Ψ^{μ} es nula.	"	114

I)	Mostraremos que la parte Ψ^M de toda solución del problema variacional es idénticamente nula.	pág.115
J)	Mostraremos que toda Ψ solución del problema variacional cumple la ecuación (1.7) de Belinfante.	" 115
K)	Afirmamos que toda Ψ solución del problema variacional cumple las ecuaciones (1.1) de Bargmann-Wigner.	" 116
L)	Mostramos que toda solución de las ecuaciones de Bargmann-Wigner es solución del problema variacional.	" 116
8.b-9)	El procedimiento variacional (formulación 0).	" 116
A)	Definiciones e hipótesis.	" 116
B)	Ecuaciones de Euler generalizadas.	" 116
C)	Primera forma de las ecuaciones de evolución.	" 117
D)	Descomposición en ondas planas.	" 117
E)	Consecuencias de la condición sobre σ_1 .	" 117
G)	Descomposición de Ψ en $\Psi^b + \Psi^m$.	" 118
H)	Ecuaciones que ligan a las partes V I, V II, VI I y VI II de Ψ^m .	" 118
I)	Mostración de que para toda solución Ψ^m del problema variacional es $\Psi^{m \nabla J} = 0$.	" 119
J)	Mostración de que toda solución Ψ^m del problema variacional es idénticamente nula.	" 119
K)	Mostración de que toda solución del problema variacional cumple las ecuaciones de Bargmann-Wigner.	" 120
L)	Mostración de que toda solución de las ecuaciones de Bargmann-Wigner lo es del problema variacional.	" 120
8.b-10)	Nota sobre la falta de contradicción en cuanto al número de variables independientes.	" 120
8.b-11)	Corolario sobre la relación entre $\Psi^{\nabla I}$ y Ψ^{∇} .	" 120
8.c -	SEGUNDO LEMA.	" 120
8.c-1)	Elección de componentes independientes en Ψ^{∇} .	" 120
8.c-2)	Enunciado del segundo lema.	" 121
8.c-3)	Rol del segundo lema.	" 121
8.d -	LA CORRIENTE.	" 121
8.d-1)	Formulación $\frac{1}{2}$.	" 121
8.d-2)	Formulación 0.	" 122
8.d-3)	Comparación entre las dos formulaciones.	" 123
8.d-4)	Comparación con la aproximación de una carga.	" 123
8.d-5)	Comparación con otros formalismos.	" 123
8.d-6)	Representación momento.	" 124
8.d-7)	Nota sobre la diversidad de corrientes.	" 124

8.e-	EL TENSOR ENERGIA-MOMENTO. EL 4-VECTOR MOMENTO TOTAL.	pág.124
8.e-1)	Formulación $\frac{1}{2}$.	" 124
8.e-2)	Formulación 0.	" 125
8.e-3)	Comparación entre las dos formulaciones.	" 126
8.e-4)	Comparación con la aproximación de una carga.	" 126
8.e-5)	Comparación con otros formalismos.	" 126
8.e-6)	Representación momento.	" 127
8.f -	EL TENSOR DENSIDAD DE MOMENTO ANGULAR. EL TENSOR MOMENTO ANGULAR.	" 127
8.f-1)	Formulación $\frac{1}{2}$.	" 127
	A) El procedimiento habitual.	" 127
	B) Dificultad.	" 127
	C) Solución.	" 128
8.f-2)	Formulación 0.	" 130
8.f-3)	Comparación entre las dos formulaciones.	" 131
8.f-4)	Comparación con la aproximación de una carga.	" 132
8.f-5)	Comparación con otros formalismos.	" 132
8.g -	SOBRE OTRAS FORMULACIONES POSIBLES.	" 133
<u>CAPITULO NOVENO: INTRODUCCION A LA TEORIA CUANTICA DE CAMPOS.</u>		" 135
9.a -	DEFINICIONES Y NOTACIONES.	
9.a-1)	La matriz δ^{ν} .	" 135
9.a-2)	La matriz $\delta^{\nu 1}$.	" 135
9.b -	LAS REGLAS DE CONMUTACION EN LA FORMULACION $\frac{1}{2}$.	" 136
9.b-1)	Las reglas de conmutación para tiempos iguales.	" 136
9.b-2)	Comparación con el formalismo de Proca.	" 141
	A) Las reglas de conmutación usuales.	" 141
	B) Traducción de nuestras reglas de conmutación al formalismo de Proca.	" 142
	C) Demostramos que teniendo en cuenta las ecuaciones de Proca, de las reglas reobtenidas en (B) se deducen todas las (9.28).	" 142
	D) (B) y (C) implican que las reglas de conmutación (9.26-b) (formalismo de Bargmann-Wigner, formulación $\frac{1}{2}$) se trasladan en las reglas de conmutación usuales (9.27) o (9.28) del formalismo de Proca.	" 143
9.b-3)	Sobre la compatibilidad de nuestras reglas de conmutación.	" 143

CAPITULO DECIMO. SOBRE LA INTERACCION CON EL CAMPO ELECTROMAGNETICO. pág. 144

10.a - OBJETO DE ESTE CAPITULO	" 144
10.b - LAS ECUACIONES DE BARGMANN-WIGNER EN PRESENCIA DE CAMPO ELECTROMAGNETICO	" 144
10.c - COMPARACION CON EL FORMALISMO DE PROCA.	" 145
10.d - NOTA SOBRE LA COMPATIBILIDAD DE LAS ECUACIONES DE BARGMANN-WIGNER EN PRESENCIA DE CAMPO ELECTROMAGNETICO.	" 147

APENDICES

A2-1 y A2-2	" 148
A2-3 y A2-4	" 149
A2-5 y A2-6	" 150
A2-7, A2-8 y A2-9	" 153
A2-10	" 154
A2-11 y A2-12	" 155
A2-13 y A2-14	" 157
A2-15 y A2-16	" 158
A3-1 y A3-2	" 162
A3-3	" 163
A3-4 y A3-5	" 164
A3-6	" 165
A3-7 y A3-8	" 167
A3-9 y A3-10	" 169
A3-11	" 170
A3-12 y A3-13	" 174
A3-14	" 175
A3-15 y A3-16	" 176
A4-1	" 177
A4-2 y A4-3	" 178
A5-1	" 179
A6-1	" 180
A6-2	" 183
A6-3	" 184
A6-4	" 185

A8-1	186
A8-2	187
A8-3	189
A8-4 y A8-5	190
A8-6	192
A8-7	193
A10-1	194
REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS	196

FOYBA.

CAPITULO PRIMERO

INTRODUCCION

El objetivo central de este trabajo es desarrollar el formalismo de Bargmann-Wigner (BW) para los mesones vectoriales, tratando de seguir -cuando es posible- una via paralela a la seguida por Dirac para spin $\frac{1}{2}$. Se tratara que resalten las diferencias, cuando existan.

1.a - NOCIONES PRELIMINARES

Para mesones vectoriales (spin 1) la función de onda $\Psi_{i_1 i_2}(\mathbf{x})$ tiene en el formalismo de BW dos índices spinoriales $i_1, i_2 = 1, 2, 3, 4$.

Los operadores matriciales M tales que $M\Psi = \Psi$ tienen 4 índices y $M\Psi = \Psi$ significa $M_{i_1 i_2, j_1 j_2} \Psi_{j_1 j_2} = \Psi_{i_1 i_2}$. Sean P y Q matrices 4×4 de dos índices; en el caso frecuente en que M es el producto tensorial de una matriz $P_{(1)}$ que opera sobre los índices spinoriales de la izquierda de Ψ por otra matriz $Q_{(2)}$ que opera sobre los de la derecha,

$M = P_{(1)} Q_{(2)}$ significa $M_{i_1 i_2, j_1 j_2} = P_{i_1 j_1} Q_{i_2 j_2}$; en particular $P_{(1)} I_{(2)}$ opera así sobre Ψ : $(P_{(1)} I_{(2)} \Psi)_{i_1 i_2} = P_{i_1 j_1} \delta_{i_2 j_2} \Psi_{j_1 j_2} = P_{i_1 j_1} \Psi_{j_1 i_2}$; $I_{(1)} Q_{(2)}$ opera así: $(I_{(1)} Q_{(2)} \Psi)_{i_1 i_2} = \delta_{i_1 j_1} Q_{i_2 j_2} \Psi_{j_1 j_2} = Q_{i_2 j_2} \Psi_{i_1 j_2}$.

Frecuentemente abreviaremos $P_{(1)} I_{(2)} \Psi$ escribiendo $P_{(1)} \Psi$ y $I_{(1)} Q_{(2)} \Psi$ escribiendo $Q_{(2)} \Psi$. Del mismo modo la abreviación $M = R_{(1)} + S_{(2)}$ significa $M = R_{(1)} I_{(2)} + I_{(1)} S_{(2)}$.

Nota: Un asterisco * puesto a continuación del número de orden de una fórmula indica que no es original nuestra si bien ofrecemos una demostración nueva. Un doble asterisco ** indica que ni la fórmula ni la demostración son originales nuestras.

1.b LAS ECUACIONES DE BARGMANN - WIGNER.

Para spin 1 son

$$\begin{aligned} p_{\mu} \gamma_{(1)}^{\mu} \Psi &= m \Psi & (1.1-a) ** \\ p_{\mu} \gamma_{(2)}^{\mu} \Psi &= m \Psi & (1.1-b) ** \\ \Psi_{ij} &= \Psi_{ji} & (1.1-c) ** \end{aligned}$$

y su significado en subíndices es claro con la notación precedente; las γ^{μ} son las utilizadas para spin $\frac{1}{2}$.

Fueron obtenidas por Bargmann y Wigner en 1948¹ basados en consideraciones sobre representaciones de grupos. En realidad Bargmann y Wigner obtuvieron ecuaciones para spin arbitrario. Se puede consultar una exposición detallada en un artículo de Leite Lopes¹⁷. Bargmann y Wigner llegaron hasta las ecuaciones de los campos libres, dejando casi sin desarrollar el formalismo correspondiente.

Es fácil ver que (1.1-a) y (c) implican (b), por lo que basta imponer

$$P_{\mu} \gamma^{\mu} \Psi = m \Psi$$

$$\Psi_{ij} = \Psi_j^i$$

(1.2-a) **

(1.2-b) **

1.3 - MAS SOBRE NOTACION

+ significa el conjugadohermitiano habitual: para funciones de onda,

$$\Psi_{i_1 i_2}^{\dagger} = \Psi_{i_1 i_2}^*$$

es $M = P_{(1)}^{\dagger} Q_{(2)}^{\dagger}$; T indica transpuesto. Ψ indica abreviadamente $\text{Tr } \Psi^{\dagger} \Psi = \Psi_{i_1 i_2}^{\dagger} \Psi_{i_2 i_1}$

Si $M \Psi$ se interpreta como el producto habitual de las matrices M y Ψ , ambas de dos índices y ambas 4×4 , a veces resultan útiles las fórmulas $M_{(1)} \Psi = i \Psi$; $\Psi = \Psi^{\dagger} M$; $\Psi^{\dagger} M = M \Psi^{\dagger}$ (1.3) que se demuestran aplicando en los los. miembros las definiciones precedentes y en los 2os. las reglas habituales del álgebra matricial elemental. Por lo tanto, si Ψ es simétrica en los índices spinoriales, y si además $(M_{(1)} \Psi)_{ij} = (M_{(1)} \Psi)_{ji}$ entonces $M_{(1)} \Psi = M \Psi = M_{(2)} \Psi$ (1.4) (Es esencial la hipótesis subrayada); aplicación: (1.1) implica (1.2).

Sistemáticamente usaremos letras gruesas (e.g. Ψ) para indicar entes análogos a los descriptos habitualmente con letras delgadas (e.g. Ψ) en spin $\frac{1}{2}$ e cero, predominando spin $\frac{1}{2}$ (únicamente paralelizaremos spin 0 en algunas secciones del capítulo 8). Las pocas excepciones (p^{μ} , x^{μ}) se hacen evidentes por si mismas.

En la representación p, $p^{\mu} = +\sqrt{p^2 + m^2}$, salvo que indiquemos explícitamente lo contrario. Usamos $\epsilon = \hbar = 1$. La métrica es

$$(g_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$$

$\mu, \nu, \dots = 0, 1, 2, 3$ y $a, b, \dots = 1, 2, 3$ indican índices tensoriales; i, j, \dots índices spinoriales.

La identidad es $I = I_{(1)} I_{(2)}$ o sea $I_{i_1 i_2, j_1 j_2} = \delta_{i_1 j_1} \delta_{i_2 j_2}$; además definimos $I_{i_1 i_2, j_1 j_2} = \delta_{i_1 j_2} \delta_{i_2 j_1}$. Como en spin $\frac{1}{2}$, $\beta = \gamma^0$ (no confundir con las β^{μ} de Duffin-Kemmer que son 10×10); β es 4×4 , como $\vec{\alpha} = \beta \vec{\gamma}$, $H = \vec{\alpha} \cdot \vec{p} + \beta m$. En los pocos casos en que usamos una representación de las matrices de Dirac, será la (2.6).

Usamos la convención de suma para índices spinoriales o tensoriales mu- dos, pero una raya bajo un índice indica no sumar si sólo está repetido dos veces; 2 rayas, no sumar si sólo está repetido 3 veces, etc. P. ej., si $i, j = 1, 2$, $a_i b_i = a_1 b_1 + a_2 b_2$; $a_i b_i = a_1 b_1$ ó $a_2 b_2$; $a_i b_i c_i = a_1 b_1 c_1 + a_2 b_2 c_2$; $a_i b_i c_i = a_1 b_1 c_1$ ó $a_2 b_2 c_2$.

La mayor parte de las demostraciones están en apéndices; A3-2 significa apéndice 2 de la sección 3. La fórmula número 1 de tal apéndice se indica (A3-2.1), mientras que (3.1) es la 1a. fórmula del tercer capítulo del texto. En los apéndices no usamos la convención del asterisco (enunciada en Seco. 1.a).

Hemos escrito en entrelineado simple temas de aplicación poco frecuente

o detalles dedicados al rigor.

1.d - OTROS FORMALISMOS

Los formalismos de Kemmer¹⁵ y Belinfante^{2,3,4} tratan de describir a los mesones vectoriales paralelizando a la ecuación de Dirac para el electrón, y ambos pueden servir para describir simultáneamente partículas de spin 1 y 0. Corresponde mencionar también los trabajos de de Broglie⁹.

Las ecuaciones de Kemmer para la partícula libre son

$$\int \beta^\mu \Psi = m \Psi \tag{1.5-a} **$$

donde, si el spin es igual a uno (puro) es

$$\Psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \vdots \\ \psi_n \end{pmatrix} \tag{1.5-b} **$$

El álgebra de las matrices β^μ es más complicada que la de las γ^μ de Dirac debido principalmente a que las β^μ son singulares, lo cual dificulta el cálculo, y, a veces, la interpretación física. En particular el hamiltoniano no sólo tiene autovalores $\pm \sqrt{p^2 + m^2}$ sino también 0.

Las ecuaciones de Belinfante pueden pensarse como obtenidas eligiendo una representación de las matrices β^μ ,

$$\beta^\mu = \frac{1}{2} (\gamma_{(\mu}^\nu + \gamma_{(\nu)}^\mu) \tag{1.6} **$$

y son (para spin 1 puro)

$$\frac{1}{2} (\gamma_{(\mu}^\nu + \gamma_{(\nu)}^\mu) \int \Psi = m \Psi \tag{1.7-a} **$$

$$\Psi_{;j} = \Psi_{;i} \tag{1.7-b} **$$

donde $\Psi_{Belinfante} = \Psi_{BW}$; también aparecen operadores singulares; en el caso de Belinfante, aparecen esencialmente porque su objetivo básico es describir complejivamente spin 0 y 1 (no utilizando, salvo excepciones la (1.7-b)); las ecuaciones (1.7) de Belinfante y las (1.1) de BW son equivalentes^{3,4}, y este trabajo tanto podría titularse "Desarrollo del formalismo de BW" como "Ampliación modificada del formalismo de Belinfante".

Hay que aclarar que no puede esperarse eliminar todos los operadores singulares para spin 1, ya que e. g. la componente z del spin admite el autovalor 0; pero si se trabaja con spin 1 puro, y si entre las ecuaciones equivalente (1.1) y (1.7) se toman las (1.1) como punto de partida, se puede obtener de manera natural la eliminación de operadores singulares innecesarios.

El método de la fusión de de Broglie ha sido discutido en el pasado, pero las ecuaciones a que llega para $m \neq 0$ (de Broglie, op. cit.⁹, Cap. VII ec. 23) son idénticas a las de BW si se añade $\Psi_{;j} = \Psi_{;i}$. El método de la

³ Belinfante parte en gral. de (1.7-a) con $(\gamma_{(\mu}^\nu + \gamma_{(\nu)}^\mu)$ singular; pero menciona como forma equivalente unas ecuaciones idénticas a las (1.1); el interés del trabajo de BW está más en la forma de establecerlas, que en las ecuaciones mismas.

fusión lo lleva de manera natural a utilizar operadores singulares.

En todos los formalismos anteriores la función de onda tiene componentes redundantes ; (hay 10 componentes entotal, si se especifica spin 1 puro, pero el número de componentes spinoriales que físicamente se ha de esperar si la carga es $\frac{1}{2}e$, es $2 \times 3 = 6$ (el 3 corresponde a la componente del spin); la existencia de componentes redundantes obliga a tomar ciertas precauciones al calcular, y facilita la introducción de operadores singulares, pero permite (si se desea) dar forma manifiesta a la covariancia relativista.

Existen formalismos^{12,14,25,26} "tipo spin $\frac{1}{2}$ " en los cuales se eliminan las cuatro componentes redundantes, y que carecen de operadores singulares innecesarios, pero a costa de abandonar el carácter manifiesto de la covariancia relativista (por ejemplo las ecuaciones resultan de 1er. orden en $\partial/\partial t$ y de 2º orden en las derivadas espaciales).

Dejamos constancia que no hemos agregado la lista de formalismos empleados para spin 1; agregaremos únicamente el original, de Proca^{23,24} en que las ecuaciones no imitan la forma de la ecuación de Dirac para spin $\frac{1}{2}$ sino a las ecuaciones del electromagnetismo:

$$\partial_\nu U^\nu = 0 \quad (1.7'-a) **$$

$$m G_{\mu\nu} = \partial_\mu U_\nu - \partial_\nu U_\mu \quad (1.7'-b) **$$

$$\partial_\nu G^{\mu\nu} = m U^\mu \quad (1.7'-c) **$$

En notación tridimensional podemos[†]

$$U^\mu = V; (U^1, U^2, U^3) = \vec{U}; (G^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & -E^1 & -E^2 & -E^3 \\ E^1 & 0 & -H^3 & H^2 \\ E^2 & H^3 & 0 & -H^1 \\ E^3 & -H^2 & H^1 & 0 \end{pmatrix} \quad (1.7'') **$$

entonces las ecuaciones de Proca se agrupan, como es bien sabido, en un sistema de ecuaciones fundamentales,

$$-\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} = m \vec{E} + \text{grad } V \quad (1.7''a) **$$

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = m \vec{U} + \text{rot } \vec{H}$$

$$m \vec{H} = \text{rot } \vec{U}$$

$$m V = -\text{div } \vec{E} \quad (1.7''b) **$$

y otro de consecuencias,

$$\frac{\partial V}{\partial t} = -\text{div } \vec{U}$$

$$\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = -\text{rot } \vec{E} \quad (1.7''c) **$$

$$\text{div } \vec{H} = 0$$

[†] \vec{E}, \vec{H} para el mesón vectorial; \vec{E}, \vec{H} para el electromagnético, y E para la energía.

1.e - LA FUNCIÓN DE ONDA ADJUNTA $\bar{\Psi}$

Se define Ψ en forma tal que $\bar{\Psi}\Psi$ sea invariante ante transformaciones propias de Lorentz. Consecuentemente con Belinfante² ponemos

$$\bar{\Psi} = \Psi^\dagger \gamma_{(1)}^0 \gamma_{(2)}^0 \quad (1.8) \quad \tau^*$$

De (1.2) se obtiene

$$i \partial_\mu \Psi^\dagger = -i \vec{\partial} \cdot \Psi^\dagger \vec{\alpha}_{(1)} - m \Psi^\dagger \beta_{(1)} \quad (1.9)$$

o sea

$$\left. \begin{aligned} \Psi_{i,j}^\dagger &= \Psi_{j,i}^\dagger \\ i \partial_\mu \bar{\Psi} \gamma_{(1)}^\mu + m \bar{\Psi} &= 0 \\ \bar{\Psi}_{i,j} &= \bar{\Psi}_{j,i} \end{aligned} \right\} \quad (1.10)$$

formalmente análogas a las del electrón.

Hemos hablado de invariancia Lorentz; ella está discutida en gral. en el Cap. 6, pero aseveraciones como la citada se comprenden rápidamente si se tiene en cuenta que ante una transformación propia de Lorentz Ψ se transforma como $\Psi_{(1)} \Psi_{(2)}$ ($\Psi_{(1)}, \Psi_{(2)}$, fermiones de spin $\frac{1}{2}$).

CAPITULO SEGUNDO

INSTRUMENTOS MATEMATICOS UTILES PARA EL DESARROLLO DEL FORMALISMO

La mayor parte de este capítulo de matemáticas ~~está dedicada~~ a crear un instrumento que nos permita trabajar con precisión en un espacio de componentes redundantes, ~~sólo~~ en la delicada teoría de una "partícula". Intercalar aquí este capítulo, puede dar lugar a la impresión de que el formalismo de BW es más complicado que los similares; sin embargo no es así, pues si prolongamos y profundizamos los demás formalismos de componentes redundantes hasta una etapa similar a la que esperamos conseguir con este trabajo, necesitaríamos crear también allí instrumentos matemáticos semejantes.

2.a - EL PRODUCTO ESCALAR

En el formalismo de BW puede definirse un producto escalar invariante¹

$$\int_{\mathbb{R}^3} |\Psi^\dagger \gamma_{(0)}^\alpha \gamma_{(0)}^\beta \Psi| d^3p = \int_{\mathbb{R}^3} |\bar{\Psi} \Psi| d^3p \quad (2.1) **$$

que es definido positivo. Sin embargo, tratándose de spin entero nos convendrá introducir en la la. cuantificación una "aproximación de una partícula" (cf. Cap. 3) donde la densidad ρ no es la densidad de probabilidad sino una densidad de carga, y (para esa finalidad) no podemos usar (2.1).

En cambio nos resultará adecuado el producto escalar

$$(\Psi, \Psi) = \int (\Psi, \Psi)_{sp} d^3x ; (\Psi, \Psi)_{sp} = \Psi^\dagger \gamma_{(0)}^\alpha \Psi \quad (2.2)$$

(métrica indefinida en el espacio de las Ψ) en el que hemos aislado la parte puramente spinorial $(\Psi, \Psi)_{sp}$. El producto escalar (2.2) es tal que conduce de manera natural a la densidad ρ correcta (cf. Cap. 3).

En una formulación sin componentes redundantes, todos los productos escalares

$$(\Psi, \Psi) = \int \Psi^\dagger \eta \Psi d^3x$$

con igual distribución de signos en el espectro de η son físicamente equivalentes²²; por lo tanto, nuestro (2.2) es físicamente indistinguible de todo otro producto escalar tal que llevado a una representación Ψ' sin componentes redundantes, el nuevo η tenga la misma distribución de signos que $\eta = I_{(0)} \gamma_{(0)}^\alpha$. Nuestra distribución de signos es simétrica.

Por otro lado, la simetría de Ψ y Ψ respecto de los índices spinoriales implica que

$$(\Psi, \Psi)_{sp} = \Psi^\dagger \gamma_{(0)}^\alpha \Psi \equiv \Psi^\dagger [a \gamma_{(0)}^\alpha + (1-a) \gamma_{(0)}^\alpha] \Psi$$

donde a es un número arbitrario; siendo equivalente trabajar con cualquier a , hemos elegido $a=1$ por simplicidad. Si fuese $a=\frac{1}{2}$, el papel de η estaría desempeñado por $\frac{1}{2}(\gamma_{(0)}^\alpha + \gamma_{(0)}^\alpha)$, que es singular.

2.b- LA CONDICION INICIAL

Es sabido que³ las ecuaciones de BW implican la condición inicial
 $(\mathbf{I} - \gamma_{(0)}^0 \gamma_{(0)}^0) (\gamma_{(0)}^0 H_{(0)} + \gamma_{(0)}^i H_{(0)i}) \Psi = 0$, $H = \vec{\alpha} \cdot \vec{p} + \beta m$, $(\Psi_{ij} = \Psi_{ji})$ (2.3-a)

o sea
 $[(\mathbf{I} - \gamma_{(0)}^0 \gamma_{(0)}^0) + \frac{1}{2m} (\vec{\gamma}_{(0)} + \vec{\gamma}_{(0)}) \cdot \vec{p} (\mathbf{I} + \gamma_{(0)}^0 \gamma_{(0)}^0)] \Psi = 0$, $(\Psi_{ij} = \Psi_{ji})$ (2.3-b) **
 que sólo contiene derivadas espaciales y no es, por lo tanto, parte de la ecuación de evolución propiamente dicha de las ondas; como la cumple $\Psi(t, x)$ para todo t, o sea, en particular, $\Psi(0, x)$, se la llama "condición inicial". Tiene equivalente en las formulaciones de Kemmer y Proca.

Hemos podido dar una forma más simple a la condición inicial, esto es,

$$H_{(0)} \Psi = H_{(0)} \Psi \quad (\Psi_{ij} = \Psi_{ji}) \quad (2.3-c)$$

donde $H = \vec{\alpha} \cdot \vec{p} + \beta m$. Es trivial demostrar que las ecuaciones de BW implican (2.3-c): para ello basta multiplicar (1.1-a) por $\gamma_{(0)}^0$, (1.1-b) por $\gamma_{(0)}^i$ y recordando $\partial \Psi_{ij} / \partial t = \partial \Psi_{ji} / \partial t$, usar (1.4). Pero, por supuesto, ello no basta para demostrar la equivalencia entre (2.3-c) y p. ej. (2.3-b), pues una de las dos ecuaciones podría ser más restrictiva que la otra; la demostración de la equivalencia entre nuestra forma (2.3-c) de la condición inicial y la (2.3-b) de Belinfante se da en el apéndice A2-1.

Corolario: Como (demostración trivial) la (2.3-c) es condición necesaria y suficiente para que $\Psi_{ij} = \Psi_{ji}$ sea el valor inicial de una posible función de onda, lo propio ocurre con (2.3-a) y (b).

En el formalismo de Kemmer no es fácil encontrar una simplificación tipo (2.3-c) de la condición inicial.

2.c - LOS ESPACIOS \mathcal{E} , \mathcal{E}^{sim} y W , OTROS ESPACIOS ASOCIADOS. LAS Ψ^I Y Ψ^{II} DE BELINFANTE.

Objetivos de esta sección: 1º: Introducir el espacio \mathcal{E} , que en la teoría de una carga será el espacio de los vectores de estado, y en la teoría de campos será el espacio de los operadores de campo (tomados a tiempo fijo).
 2º: Introducir espacios auxiliares que serán útiles en lo que sigue.

2.c-1) Los espacios \mathcal{E} , \mathcal{E}^{sim} y W .

Definición: Llamaremos \mathcal{E} al espacio vectorial de las $\Psi_{ij}(\vec{x})$ (con $i, j = -1, 2, 3, 4$) tales que $\int |\Psi_{ij}(\vec{x})|^2 d^3x$ exista.

El grado de libertad espinorial es $4 \times 4 = 16$.

Definición: Llamaremos \mathcal{E}^{sim} al espacio vectorial de los elementos de \mathcal{E} que cumplen
 $\Psi_{ij}(\vec{x}) = \Psi_{ji}(\vec{x})$

El grado de libertad spinorial es igual al número de elementos independientes de una matriz simétrica 4×4 , o sea 10. \mathcal{E}^{sim} es un subespacio de \mathcal{E} .

Definición: Llamaremos W al espacio vectorial de los elementos de \mathcal{E}^{sim} que cumplen la condición inicial (2.3).

Demostremos más adelante que el grado de libertad spinorial es 6. W es un subespacio de \mathcal{E}^{sim} . Esto cae fuera de lo común, pues p. ej. en spin $\frac{1}{2}$ cualquier

$$\begin{pmatrix} f_1(\vec{x}) \\ f_2(\vec{x}) \\ f_3(\vec{x}) \\ f_4(\vec{x}) \end{pmatrix}$$

tal que $\int_{V_1} |\psi|^2 d^3x$ exista puede ser el valor inicial $\Psi(0, \vec{x})$ de una posible función de onda $\Psi(t, \vec{x})$; o sea, allí los análogos de \mathcal{E}^{sim} y W coinciden, cosa que aquí no ocurre pues (2.3) no es una identidad en \mathcal{E}^{sim} .

El que el verdadero grado de libertad baje a 6 se visualizará en (2.63) observando la forma explícita de los elementos de W en una representación; se observará lo mismo de manera más sencilla en la representación de Foldy-Wouthuysen-Tani, en la que la condición inicial toma una forma muy simple (cf. (3.92) y (3.100)).

También se visualizará dicho grado de libertad observando la base que introduciremos en el Cap. 4 para subtender la parte spinorial de W ; o bien calculando las autofunciones del spin (Secc. 3.1-2). Por otra parte, 6 es el número que físicamente es de esperar (cf. Secc. 1.d).

En todos los otros formalismos que trabajan con componentes redundantes (Secc. 1.d) se pueden introducir espacios análogos a \mathcal{E}^{sim} y W ; los mismos están implícitos en la condición inicial que todos los autores mencionan, aunque no explicitan dichos espacios. Sin embargo, el trabajar explícitamente con \mathcal{E}^{sim} y W (o sus equivalentes) nos permitirá discutir en forma clara ciertos aspectos oscuros de la teoría (p. ej. el autovalor 0 del hamiltoniano de Kemmer, Secc. 3.6).

Es conveniente recalcar que en la teoría de una "partícula" (Cap. 3) W (y no \mathcal{E}^{sim}) será el espacio de los vectores de estado, y que en la teoría de campos (Cap. 8) W (y no \mathcal{E}^{sim}) se transformará en el espacio de los operadores de campo (tomados en $t=\text{const}$).

2.3-2) Notación.

Si queremos explicitar que trabajamos en la representación κ , o en la ρ pondremos W^κ , o W^ρ , etc. Si queremos explicitar que trabajamos en una representación diferente de la original (p. ej. en la de Foldy-Wouthuysen-Tani) pondremos W' , etc.

2.3-3) Espacios spinoriales.

Introduciremos nociones cómodas para trabajar p. ej. en el Cap. 4. Si en los elementos de los espacios de dimensión infinita \mathcal{E}^ρ , $\mathcal{E}^{\text{sim},\rho}$ o W^ρ

fijamos p , obtenemos espacios vectoriales de dimensión 16, 10 o 6 a los que llamamos respectivamente E_{sp} , E_{sp}^{sim} y W_{sp}^p . El índice sp está para recordar que p. ej. los elementos de E_{sp} sólo tienen variables spinoriales (i, j) .

E_{sp} es el espacio de las matrices M_{ij} ($i, j=1, 2, 3, 4$); E_{sp}^{sim} es el espacio de las matrices m_{ij} simétricas, y W_{sp}^p es el espacio de las matrices M_{ij} simétricas que para un valor fijo prefijado de un parámetro p cumplen

$$(\vec{\alpha}_\omega \cdot \vec{p} + \rho_\omega m) M = (\vec{\alpha}_\omega \cdot \vec{p} + \rho_\omega m) M \quad (2.4-a)$$

(ver (2.3-c)). Simbólicamente, si

$$H(\vec{p}) = \vec{\alpha} \cdot \vec{p} + \rho m \quad (2.4-b) **$$

$$H_\omega(\vec{p}) = H_\omega(\vec{p}) M \quad (2.4-c)$$

El producto escalar (Ψ^I, Ψ^J) (2.2) puede definirse en E , en E^{sim} o en W . El producto escalar $(\Psi^I, \Psi^J)_{sp}$ puede definirse en E_{sp} , en E_{sp}^{sim} o en W_{sp}^p .

2.3-4) Los espacios E^{ant} y E_{sp}^{ant} .

Para obtener el operador proyección que proyecta E en W (Secc. 2.f-6) nos será útil definir:

E^{ant} es el espacio vectorial de las $\Psi_{ij}(\vec{x}) \in E$ antisimétricas:
 $\Psi_{ij}(\vec{x}) = -\Psi_{ji}(\vec{x})$.

Como antes se puede definir el espacio E_{sp}^{ant} de las matrices antisimétricas, que tiene dimensión 6.

2.3-5) Las Ψ^I y Ψ^{II} de Belinfante³.

Sea Ψ un elemento de cualquiera de los espacios anteriores, por ejemplo de E . Se puede poner

$$\Psi = \Psi^I + \Psi^{II} \quad (2.5-a) **$$

$$\Psi^I = \Lambda^I \Psi; \quad \Psi^{II} = \Lambda^{II} \Psi \quad (2.5-b) **$$

$$\Lambda^I = \frac{1}{2} (\delta_{ij} + \gamma_\omega^i \gamma_\omega^j)_{ij}; \quad \Lambda^{II} = \frac{1}{2} (\delta_{ij} - \gamma_\omega^i \gamma_\omega^j)_{ij} \quad (2.5-c) **$$

Como es sabido, Λ^I y Λ^{II} tienen todas las propiedades de un operador proyección, es decir

$$(\Lambda^I)^2 = \Lambda^I; \quad (\Lambda^{II})^2 = \Lambda^{II}; \quad \Lambda^I \Lambda^{II} = \Lambda^{II} \Lambda^I = 0 \quad (2.5-d) **$$

y proyectan a E respectivamente en los subespacios E^I y E^{II} ($\Psi^I \in E^I$, $\Psi^{II} \in E^{II}$ si $\Psi \in E$); análogamente proyectan E^{sim} en $E^{sim I}$ y $E^{sim II}$,

W en W^I y W^{II} , etc. Si \oplus indica suma directa, es $E = E^I \oplus E^{II}$; $E^{sim} = E^{sim I} \oplus E^{sim II}$; $W = W^I \oplus W^{II}$ (2.5-e)

(es decir para toda $\Psi \in E$ es $\Psi = \Psi^I + \Psi^{II}$, $\Psi^I \in E^I$, $\Psi^{II} \in E^{II}$, etc.).

Estas descomposiciones son ortogonales respecto a (2.2); es decir, para toda $\Psi^I \in E^I$ (o $E^{sim I}$, etc.) y para toda $\Psi^{II} \in E^{II}$ (o $E^{sim II}$, etc.) es

$$(\Psi^I, \Psi^{II}) = 0, \quad (2.5-f)$$

como se demostrará en Secc. 2.f.

Como $\Psi \in \mathcal{E}_{sp}^{sim I}$ tiene 6 componentes independientes (ver (2.9-b) más abajo), y también 6 es la dimensión de W_{sp}^P , Λ^I es uno de los medios que fueron utilizados para eliminar las 4 componentes redundantes de $\Psi \in \mathcal{E}_{sp}^{sim}$ (ver p.ej. Heitler¹⁴ que usa la versión formalismo de Kemmer de Λ^I). Quedarse con $\Psi \in \mathcal{E}^{sim I}$ tiene por equivalente en el formalismo original de Proca (1. a desear (usando una representación adecuada) a U^0 y G^{kl} ($k, l=1, 2, 3$) es decir desear los análogos mesónico vectoriales del potencial escalar A^0 y del campo magnético F^{kl} del electromagnetismo (que es lo que hacen Tommo y Giambagi¹⁵). Esto está ya hecho, y lo mencionamos simplemente por completitud.

Es conveniente aclarar que si bien $\Lambda^I \Psi = \Psi^I$ ($\Psi \in \mathcal{E}^{sim}$) puede conducir a un formalismo correcto sin componentes redundantes, $\mathcal{E}^{sim I}$ no es el espacio W de los vectores de estado, ni en el formalismo de BW ni en los restantes similares (comparar (2.9) con (2.63), más adelante). Es decir, no toda $\Psi \in W$ es tal que $\Psi^I = \Lambda^I \Psi$; pasando a la representación de Foldy-Wouthoff-Tani (Secc. 3.n) deberá por supuesto mantenerse que no toda $\Psi \in W'$ es tal que $\Lambda^{I'} \Psi' = \Psi'^I$, pero allí ocurrirá que toda $\Psi' \in W'$ será tal que $\Psi'^I = \Lambda^{I'} \Psi'$ (comparar (2.9) con (3.100), más adelante). Nótese: Ψ^I , no Ψ'^I .

2.5-6) Una representación.

A veces utilizaremos la representación usual de las γ ,

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{\gamma} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ -\vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix}; \quad \sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad (2.6-a) **$$

en la cual[†] $\gamma_{ij} = \epsilon_{ij} \delta_{ij}$ (2.6-b) **

con $\epsilon_1 = \epsilon_2 = 1, \quad \epsilon_3 = \epsilon_4 = -1.$ (2.7)

En esta representación, si $\Psi \in \mathcal{E}^{sim}, \Psi \in \mathcal{E}^{sim}$ es $(\Psi, \Psi)_{sp} = \Psi_{11}^* \Psi_{11} + \Psi_{22}^* \Psi_{22} + 2\Psi_{12}^* \Psi_{12} - 2\Psi_{33}^* \Psi_{33} - 2\Psi_{44}^* \Psi_{44} - 2\Psi_{34}^* \Psi_{34}$ (2.6-c) *

De (2.5-a) y (2.6-b), $\Lambda_{i_1 i_2, j_1 j_2}^I = \frac{1}{2} (\delta_{i_1 j_1} \delta_{i_2 j_2} + \gamma_{i_1 j_1}^0 \gamma_{i_2 j_2}^0) = \frac{1}{2} (1 + \epsilon_{i_1} \epsilon_{i_2}) \delta_{i_1 j_1} \delta_{i_2 j_2}$ (2.8-a)

análogamente $\Lambda_{i_1 i_2, j_1 j_2}^H = \frac{1}{2} (1 - \epsilon_{i_1} \epsilon_{i_2}) \delta_{i_1 j_1} \delta_{i_2 j_2}$ (2.8-b)

Por lo tanto, así sea $\Psi \in \mathcal{E} \circ \Psi \in \mathcal{E}^{sim} \circ \Psi \in W$, es $\Psi_{i_1 i_2}^I = \frac{1}{2} (1 + \epsilon_{i_1} \epsilon_{i_2}) \Psi_{i_1 i_2}, \quad \Psi_{i_1 i_2}^H = \frac{1}{2} (1 - \epsilon_{i_1} \epsilon_{i_2}) \Psi_{i_1 i_2}$ (2.9-a)

o sea $\Psi^I = \begin{pmatrix} \Psi_{11} & \Psi_{12} & 0 & 0 \\ \Psi_{21} & \Psi_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Psi_{33} & \Psi_{34} \\ 0 & 0 & \Psi_{41} & \Psi_{42} \end{pmatrix}, \quad \Psi^H = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \Psi_{13} & \Psi_{14} \\ 0 & 0 & \Psi_{23} & \Psi_{24} \\ \Psi_{31} & \Psi_{32} & 0 & 0 \\ \Psi_{41} & \Psi_{42} & 0 & 0 \end{pmatrix}$ (2.9-b) *

Se ve que si $\Psi \in \mathcal{E}^{sim}$, Ψ^I tiene 6 componentes spinoriales independientes, como anticipamos más arriba.

[†]No sumar! (cf. Secc. 1.c).

2.2 - IGUALDADES Y EQUIVALENCIAS

2.2.1) Igualdades.

Es bien conocida la definición de igualdad $M \stackrel{B/A}{=} N$ de dos operadores M y N que transforman un espacio A en elementos de un espacio B . $M \stackrel{B/A}{=} N$ si para todo $\psi \in A$ es $M\psi = N\psi \in B$. (2.10-a)**

Como los espacios E , E^{sim} y W no son iguales, escribir p. ej. $M \stackrel{E/E}{=} N$ no sera necesariamente lo mismo que escribir $M \stackrel{E/W}{=} N$. Como deberemos trabajar con varios espacios⁺, evitaremos errores y confusiones si explicitamos los espacios A y B en nuestras igualdades.

Abreviaremos.

$M \stackrel{A}{=} N$ significa $M \stackrel{E}{=} N$ } (2.10-b)
 $M \stackrel{B}{=} N$ significa $M \stackrel{E}{=} N$ }
 (La 2a. abreviacion se debe a que E es el espacio en el que habitualmente operarían las matrices de 4 índices M_{i_1, i_2} por lo que la noción de igualdad en E coincide con la usual).

Nótese que nuestros operadores que transforman A en B no siempre son del tipo que los matemáticos llaman "sobre" B . (Es decir, no siempre todo punto de B es imagen de uno A).

Será de aplicación reiterada este evidente teorema: "Sea A_1 un subespacio de A ; sea B_1 un subespacio de B tal que para todo $\psi \in A_1$ es $M\psi \in B_1$ (de donde $N\psi \in B_1$); entonces**

$$M \stackrel{B_1/A_1}{=} N \Rightarrow M \stackrel{B/A}{=} N \quad (2.11-a)$$

Corolario (recordar (2.10-b)):

$$M \stackrel{A}{=} N \Rightarrow M \stackrel{E^{sim}}{=} N \Rightarrow M \stackrel{W}{=} N \quad (2.11-b)^\ddagger$$

En el apéndice A2-2 se dan las demostraciones de las fórmulas que siguen:

$$\text{Si } A_{ij,rs} = B_{ij,rs} \text{ es } S_1 \stackrel{E^{sim}}{=} S_2 \quad (2.12)^\ddagger$$

$$\text{Si } H = \vec{r} \cdot \vec{p} + \rho m \text{ es } H_{(1)} \stackrel{W}{=} I_{(1)} H_{(2)} \quad (2.13)^\ddagger$$

Por supuesto, p. ej. la (2.12) debe entenderse así: "Si S_1 y S_2 transforman E^{sim} en puntos de E y si $A_{ij,rs} = B_{ij,rs}$, entonces A y B son iguales en el espacio de los operadores que transforman E^{sim} en puntos de E ".

Es de señalar que dos operadores pueden tener "elementos de matriz diferentes" (en el sentido usual) y ser iguales en el espacio de los operadores que transforman cierto espacio en otro espacio; por ejemplo, en la representación (2.6) es

⁺No podemos restringirnos a W : Con ayuda de (2.33) podrá demostrarse que ej. si $\psi \in W$ es $H_{(1)}\psi \in W$ pero que puede ser $H_{(2)}\psi \notin W$.

**El símbolo " \Rightarrow " significa "implica"

[‡] Esta fórmula vale también si $E \rightarrow E_{sp}$, $E^{sim} \rightarrow E_{sp}^{sim}$ y $W \rightarrow W_{sp}$.

$$\beta_{11} = 1; \vec{\alpha}_{11} = \vec{\alpha}_{33} = 0; \beta_{33} = -1.$$

$$\therefore (H_{(1)} I_{(1)})_{13,13} = H_{11} \delta_{33} = (m\beta + \vec{\alpha} \cdot \vec{p})_{11} \times 1 = m$$

$$\begin{matrix} \uparrow \uparrow \\ i, j, k \end{matrix} \tag{2.14}$$

$$(I_{(1)} H_{(1)})_{13,13} = \delta_{11} H_{33} = 1 \times (m\beta + \vec{\alpha} \cdot \vec{p})_{33} = -m \neq (H_{(1)} I_{(1)})_{13,13}$$

Sin embargo es $H_{(1)} I_{(1)} = I_{(1)} H_{(1)}$ en el sentido de que ambos operadores aplicados al mismo vector de W dan igual resultado. En cambio, como vimos, es

$$I_{(1)} H_{(1)} \neq H_{(1)} I_{(1)} \tag{2.15}$$

2.1.4) Equivalencia escalar

Esta noción es importante porque en la teoría de una "partícula" (Cap. 3) veremos que dos operadores "equivalentes escalar" dan los mismos valores medios.

Por definición, M y N son operadores equivalentes[†] escalar en un espacio vectorial \mathcal{A} si para todo $\Psi \in \mathcal{A}$ es

$$(\Psi, M\Psi) = (\Psi, N\Psi) \tag{2.16-a}$$

o sea (cf. (2.2))

$$\int \Psi_{(1)}^\dagger M \Psi_{(1)} d^3x = \int \Psi_{(1)}^\dagger N \Psi_{(1)} d^3x \tag{2.16-b}$$

indicaremos,

$$M \underset{\mathcal{A}}{\sim} N. \tag{2.16-c}$$

Es^{††}

$$M \underset{\mathcal{A}}{\sim} N \iff (\Psi, M\Psi) = (\Psi, N\Psi). \tag{2.17}$$

para todo $\Psi, \Psi' \in \mathcal{A}$. La demostración se basa en una conocida identidad algebraica (ver A2-3).

Observamos además que en la definición no se exige que M y N transformen \mathcal{A} en \mathcal{A} ; basta que transformen \mathcal{A} en elementos de un espacio \mathcal{B} tal que $(\Psi, M\Psi)$ tenga sentido para $\Psi \in \mathcal{A}$, $M\Psi \in \mathcal{B}$; para esto último es suficiente que el producto escalar (2.2) esté definido en el espacio \mathcal{E} (Ψ y $\Psi' \in \mathcal{E}$) y que \mathcal{A} y \mathcal{B} estén contenidos en \mathcal{E} .

Análogamente definiremos: M y N son equivalentes escalar spinorial en un espacio vectorial \mathcal{A} si para todo $\Psi \in \mathcal{A}$ es

$$(\Psi, M\Psi)_{\mathcal{A}} = (\Psi, N\Psi)_{\mathcal{A}} \tag{2.18-a}$$

o sea,

$$\int \Psi_{(1)}^\dagger M \Psi_{(1)} = \int \Psi_{(1)}^\dagger N \Psi_{(1)} \tag{2.18-b}$$

indicaremos

$$M \underset{\mathcal{A}}{\sim} N. \tag{2.19}$$

Como para el caso anterior se demuestra que

$$M \underset{\mathcal{A}}{\sim} N \iff (\Psi, M\Psi)_{\mathcal{A}} = (\Psi, N\Psi)_{\mathcal{A}} \tag{2.20}$$

para todo $\Psi, \Psi' \in \mathcal{A}$.

Además es evidente que

$$M \underset{\mathcal{A}}{\sim} N \implies M \underset{\mathcal{A}}{\sim} N \tag{2.21}$$

aunque la recíproca puede ser falsa.

Se impone una pregunta: La noción de equivalencia escalar, no es siempre la misma que la de igualdad? La respuesta es: En nuestro caso, no, como demostraremos a continuación

[†] Esta equivalencia es también una equivalencia en el sentido de los matemáticos: además, M y N son "congruentes módulo \mathcal{O} " donde \mathcal{O} es el espacio de los operadores \mathcal{O} tales que $(\Psi, \mathcal{O}\Psi) = 0$.

Antes (y para dar motivo a la duda) recordemos el conocido teorema:
 "Sea $\{\Psi, \varphi\}$ un producto escalar de elementos $\Psi, \varphi \in \mathcal{A}$, tal que $\{\Psi, \varphi\} = 0$
 salvo $\Psi = 0$; sean M y N dos operadores que transforman \mathcal{A} "sobre" \mathcal{A} .

Entonces, $\{\Psi, M\varphi\} = \{\Psi, N\varphi\}$ para todo $\varphi \in \mathcal{A} \Rightarrow M \approx N$ (2.22) **
 (El teorema se muestra así: Si $M \approx N$, evidentemente $\{\Psi, M\varphi\} = \{\Psi, N\varphi\}$.
 Si $\{\Psi, M\varphi\} = \{\Psi, N\varphi\}$ es $\{\Psi, (M - N)\varphi\} = 0$; como Ψ es arbitraria, pongo
 $\Psi = (M - N)\varphi$ es $\{(M - N)\varphi, (M - N)\varphi\} = 0$ de donde, por la hipótesis
 es $(M - N)\varphi = 0$.

Pero en nuestro caso el teorema no es aplicable pues (problemas aparte
 con el "sobre") puede ser $(\Psi, \Psi) = 0$ con $\Psi \neq 0$. Claro que aún se puede
 pensar que con otras hipótesis (válidas para nuestro caso) pueda redemon-
 strarse (2.22); pero ello es imposible pues en A2-5 damos un contraejemplo
 de operadores equivalentes pero diferentes.

2.d-3) Equivalencia tensorial

Esta equivalencia es importante al estudiar las representaciones tenso-
 riales del grupo de Lorentz (Cap. 6) del tipo $\bar{\Psi} M \Psi$ (de allí viene el
 nombre).

Definimos: M y N son equivalentes tensorial en \mathcal{A} si para todo

$$\Psi \in \mathcal{A} \text{ es (recordar (1.8)) } \bar{\Psi} M \Psi = \bar{\Psi} N \Psi \quad (2.23-a)$$

indicamos

$$M \underset{\mathcal{A}}{\approx} N$$

Como en A2-3 se demuestra que

$$M \underset{\mathcal{A}}{\approx} N \Leftrightarrow \bar{\Psi} M \Psi = \bar{\Psi} N \Psi \quad (2.24)$$

para todo $\Psi, \varphi \in \mathcal{A}$

Además, si $\mathcal{A} = \mathcal{E} \text{ o } \mathcal{E}^{\text{sim}}$ es $M \underset{\mathcal{A}}{\approx} N \Leftrightarrow \Psi^+ M \Psi = \Psi^+ N \Psi$

para todo $\Psi \in \mathcal{A} \Leftrightarrow \Psi^+ M \Psi = \Psi^+ N \Psi$ para todo $\Psi, \varphi \in \mathcal{A}$ (2.25)

Por ejemplo, para demostrar que $M \underset{\mathcal{A}}{\approx} N \Rightarrow \Psi^+ M \Psi = \Psi^+ N \Psi$ cámbiese
 $\Psi \rightarrow \delta_{(1)} \delta_{(2)} \Psi$ en (2.24).

La demostración de (2.25) exige que si $\Psi \in \mathcal{A}$ sea $\delta_{(1)} \delta_{(2)} \Psi \in \mathcal{A}$ lo que
 ocurre para $\mathcal{A} = \mathcal{E} \text{ o } \mathcal{E}^{\text{sim}}$, pero no ocurre en \mathcal{W}^+ . El caso $\mathcal{A} = \mathcal{W}$
 queda excluido en la (2.25):

Si $\mathcal{A} = \mathcal{E} \text{ o } \mathcal{E}^{\text{sim}} \text{ o } \mathcal{W}$ es

$$\delta_{(1)} \delta_{(2)} M \underset{\mathcal{A}}{\approx} \delta_{(1)} \delta_{(2)} N \Leftrightarrow \Psi^+ M \Psi = \Psi^+ N \Psi \text{ para todo } \Psi \in \mathcal{A} \Leftrightarrow \Psi^+ M \Psi = \Psi^+ N \Psi \text{ para todo } \Psi, \varphi \in \mathcal{A} \quad (2.26)$$

Es decir, que todo elemento φ de \mathcal{A} puede pensarse como imagen de otro
 elemento Ψ de \mathcal{A} (p. ej. $\varphi = M\Psi$).

Observando (2.2) y usando la representación (2.6) para δ^+ es intuitivo que
 $\Psi \neq 0$ son $(\Psi, \Psi) = 0$; la prueba rigurosa la damos en A2-4.

Cabe nota similar a la nota + hecha al introducir la equivalencia escalar.

Se puede demostrar verificando que si Ψ cumple (2.3), no la cumple $\varphi = \delta_{(1)} \delta_{(2)} \Psi$,
 o bien empleando la (3.33) a demostrarse más adelante.

2.1-4) Fórmulas sobre equivalencias.

Sea \mathcal{A}_1 un subespacio de \mathcal{A} ; es evidente que

$$M \underset{\mathcal{A}}{\sim} N \Rightarrow M \underset{\mathcal{A}_1}{\sim} N \tag{2.27-a}$$

$$M \underset{\mathcal{A}_1}{\overset{osc}{\sim}} N \Rightarrow M \underset{\mathcal{A}_1}{\overset{osc}{\sim}} N \Rightarrow M \underset{\mathcal{A}}{\overset{osc}{\sim}} N \tag{2.27-b}$$

$$M \underset{\mathcal{A}}{\overset{osc}{\sim}} N \Rightarrow M \underset{\mathcal{A}_1}{\overset{osc}{\sim}} N. \tag{2.27-c}$$

También es trivial que

$$M \underset{BA}{=} N \Rightarrow \begin{cases} M \underset{\mathcal{A}}{\sim} N \\ M \underset{\mathcal{A}_1}{\overset{osc}{\sim}} N \end{cases} \Rightarrow M \underset{\mathcal{A}}{\overset{osc}{\sim}} N \tag{2.28-a}$$

$$\tag{2.28-b}$$

Pasaje de equivalencias a igualdades:

Definición

a) Si $Y_{(1)}^* Y_{(2)}^* M = Y_{(1)}^* Y_{(2)}^* N$ transforman \mathcal{A} sobre \mathcal{A} entonces $M \underset{\mathcal{A}}{\sim} N$ $\Rightarrow Y_{(1)}^* Y_{(2)}^* M \underset{\mathcal{A}\mathcal{A}}{=} Y_{(1)}^* Y_{(2)}^* N$; $\tag{2.29-a}$

b) Si $Y_{(1)}^* M = Y_{(1)}^* N$ transforman \mathcal{A} sobre \mathcal{A} entonces $M \underset{\mathcal{A}}{\sim} N \Rightarrow Y_{(1)}^* M \underset{\mathcal{A}\mathcal{A}}{=} Y_{(1)}^* N.$ $\tag{2.29-b}$

No siempre se cumplen las hipótesis en las que (2.29) es válida.[†]

Demostremos e.g. la (b): Definimos el producto escalar $\langle \Psi, \Phi \rangle = (\Psi, Y_{(1)}^* \Phi) = \Psi \Psi^+$ que es tal que $\langle \Psi, \Psi \rangle > 0$ salvo $\Psi = 0$; $M \underset{\mathcal{A}}{\sim} N$ implica $\langle Y_{(1)}^* M \Phi, Y_{(1)}^* N \Phi \rangle = \langle Y_{(1)}^* M \Phi, Y_{(1)}^* N \Phi \rangle$; como $Y_{(1)}^* M$ y $Y_{(1)}^* N$ son "sobres" podemos aplicar (2.22) y escribir $Y_{(1)}^* M \underset{\mathcal{A}\mathcal{A}}{=} Y_{(1)}^* N.$

En $\mathcal{A}^{(1)}$ se demuestran las fórmulas (2.30) - (2.33):

$$Y_{(1)}^* M \underset{\mathcal{A}}{\sim} Y_{(1)}^* N \Leftrightarrow M \underset{\mathcal{A}_1}{\overset{osc}{\sim}} N \Rightarrow M \underset{\mathcal{A}}{\overset{osc}{\sim}} N \tag{2.30}$$

$$A_{(1)} B_{(2)} \underset{\mathcal{E}^{sim}}{\sim} B_{(1)} A_{(2)} \tag{2.31}^{++}$$

$$M_{i,j,k} = N_{j,k,l} = P_{i,j,k} \Rightarrow M \underset{\mathcal{E}^{sim}}{\sim} N \underset{\mathcal{E}^{sp}}{\sim} P \tag{2.31'}$$

$$A_{(1)} B_{(2)} \underset{\mathcal{E}^{sim}}{\sim} (Y^* B)_{(1)} (Y^* A)_{(2)} \tag{2.32a}$$

$$\bigwedge^I \underset{\mathcal{E}^{sim}}{\sim} 0 \tag{2.32-b}$$

$$\text{pero a saber: } \bigwedge^I \underset{\mathcal{E}^{sim}}{\neq} 0 \tag{2.32-c}$$

$$A_{(1)} B_{(2)} \underset{\mathcal{E}^{sim}}{\sim} (Y^* B)_{(1)} (Y^* A)_{(2)} \tag{2.33-a}$$

$$\bigwedge^I \underset{\mathcal{E}^{sim}}{\sim} 0 \quad \text{ó} \quad \mathbf{I} \underset{\mathcal{E}^{sim}}{\sim} Y_{(1)}^* Y_{(2)}^* \tag{2.33b}$$

para a saber:

$$\bigwedge^I \underset{\mathcal{E}^{sim}}{\neq} 0 \tag{2.33-c}$$

[†] Ejemplo en que no se dan las hipótesis: De (2.33-b) (ver más abajo) es $\mathbf{I} \underset{\mathcal{E}^{sim}}{\sim} \frac{1}{2}(Y_{(1)}^* Y_{(2)}^* + \mathbf{I})$ pero como $\frac{1}{2}(Y_{(1)}^* + Y_{(2)}^*)$ es singular, no tiene inversa; entonces $Y_{(1)}^* [\frac{1}{2}(Y_{(1)}^* Y_{(2)}^* + \mathbf{I})]$ no tiene inversa. Por lo tanto no puede hallarse $\Psi^{(1)}$ tal que $\Phi = Y_{(1)}^* [\frac{1}{2}(Y_{(1)}^* Y_{(2)}^* + \mathbf{I})] \Psi$ con lo que fallan las hipótesis necesarias para (2.29-b).

⁺⁺ A_{ij} y B_{ij} son matrices 4×4 de dos índices.

Es sorprendente la

$$\vec{\alpha}_m \cdot \vec{p} \underset{W}{\approx} 0 \quad ; \quad \vec{\alpha}_m \cdot \vec{p} \underset{W}{\approx} 0 \quad ; \quad (2.33-d)$$

sin embargo

$$\vec{\alpha}_m \cdot \vec{p} \underset{W}{\neq} 0 \quad ; \quad \vec{\alpha}_m \cdot \vec{p} \underset{W}{\neq} 0 \quad (2.33-e)$$

$$\vec{\gamma}_m \cdot \vec{p} \underset{W}{\approx} 0 \quad ; \quad \vec{\gamma}_m \cdot \vec{p} \underset{W}{\approx} 0 \quad (2.33-f)$$

$$\vec{\gamma}_m \underset{W}{\approx} \vec{\gamma}_m \quad (2.33-g)$$

2.4 - CONJUGACION PSEUDOHERMITIANA.

2.4-1) El procedimiento conocido para un espacio con métrica indefinida

SUEDE NO HAY COMPONENTES REDUNDANTES.

Sea \mathcal{H} un espacio vectorial de elementos $\Psi(\vec{x})$ sin componentes redundantes; sea η un operador hermitiano (en el sentido habitual) de autovalores ± 1 , es decir tal que

$$\eta = \eta^\dagger, \quad (2.34-a)**$$

$$\eta^2 = I. \quad (2.34-b)**$$

Salvo a veces la nomenclatura, obtenemos de las referencias ^{22,19,10} las siguientes nociones:

Se define un producto escalar

$$(\Psi, \Phi) = \int \Psi^\dagger \eta \Phi d^3x, \quad \Psi, \Phi \in \mathcal{H}; \quad (2.35)**$$

entonces la métrica en el espacio \mathcal{H} es indefinida:

$$(\Psi, \Psi) \geq 0. \quad (2.36)**$$

Definiciones

A) El conjugado pseudohermitiano \bar{A} de un operador A es tal que ¹⁰

$$(A\Psi, \Phi) = (\Psi, \bar{A}\Phi), \quad (\text{para todo } \Psi, \Phi \in \mathcal{H}); \quad (2.37-a)**$$

^{22,19,10}

$$\bar{A} = \eta A^\dagger \eta. \quad (2.37-b)**$$

B) Un operador es pseudohermitiano si ^{22,19,10}

$$A = \bar{A}. \quad (2.38)**$$

2.4-2) Adaptemos el procedimiento anterior a nuestro caso.

El producto escalar (2.35) es del tipo (2.35) con

$$\eta = I_{(0)} \gamma_{(0)}^0; \quad (2.39)$$

η simple (2.34).

Sea \mathcal{A} una cualquiera de los espacios W , E^{sim} o E ; definimos:

A) El conjugado pseudohermitiano \bar{M} de un operador M , es todo operador tal que

Necesitamos la noción de pseudohermiticidad para poder definir observables en la teoría de una carga (Cap. 3).

$$(M\psi, \varphi) = (\psi, \overset{\star}{M}\varphi) \quad (2.40-a)$$

para todo $\psi, \varphi \in \mathcal{A}$.

Queremos hallar la incógnita $\overset{\star}{M}$; si indicamos entonces una solución \bar{M} de (2.40-a) es $\overset{\star}{M} = \bar{M}$ puesto que

$$(M\psi, \varphi) = \int d^3x (M\psi)^\dagger \gamma_{(2)}^0 \varphi = \int \psi^\dagger M^\dagger \gamma_{(2)}^0 \varphi d^3x = (\psi, \bar{M}\varphi),$$

pero también es solución (cf. Secc. 1.1-2) todo otro operador $\overset{\star}{M}$ tal que

$$\overset{\star}{M} \underset{\mathcal{A}}{\sim} \bar{M}, \quad (2.40-c)$$

de manera que la solución puede no ser única (recordar los ejemplos de operadores diferentes pero que son equivalentes escalar). Vemos que tenemos más soluciones que en (2.37)

Nota: Al igual que en la definición (2.16), en la (2.40) no se exige que M y $\overset{\star}{M}$ transformen \mathcal{A} en \mathcal{A} ; basta que transformen \mathcal{A} en un espacio \mathcal{B} tal que $(M\psi, \varphi)$ y $(\psi, \overset{\star}{M}\varphi)$ tengan sentido para todo $\psi, \varphi \in \mathcal{A}$, para lo cual (si $\mathcal{A} = W, \mathcal{E}^{sim}$ o \mathcal{E}) basta definir (ψ, φ) en \mathcal{E} e imponer que si $\varphi \in \mathcal{E}$ sea $M\varphi \in \mathcal{E}, \overset{\star}{M}\varphi \in \mathcal{E}$.

Llamaremos a \bar{M} el conjugado pseudohermitiano principal de M ; es trivial que

$$\overline{M+N} = \bar{M} + \bar{N} \quad (2.41-a)$$

$$\overline{MN} = \bar{N}\bar{M} \quad (2.41-b)$$

$$(\psi, M\varphi)^\dagger = (\psi, \overset{\star}{M}\varphi) = (\psi, \bar{M}\varphi). \quad (2.42)$$

También es fácil demostrar que si \mathcal{A}' es un subespacio de \mathcal{A} ;

$$\overset{\star}{M} \underset{\mathcal{A}'}{\sim} \bar{M} \quad (2.43)$$

La (2.43) nos permite pasar p. ej. de la conjugación pseudohermitiana en \mathcal{E}^{sim} a la conjugación pseudohermitiana en W .

La conjugación en la cual estamos físicamente interesados es la conjugación en W , pero a veces necesitaremos las efectuadas en \mathcal{E}^{sim} y en \mathcal{E} (p. ej. al estudiar operadores que proyectan ortogonalmente sobre W).

Como en \mathcal{E} se puede ser útil poder definir la conjugación pseudohermitiana en el espacio spinorial único; sea \mathcal{A}_π uno cualquiera de los espacios $\mathcal{E}_\pi, \mathcal{E}_\pi^{sim}$ o W_π (recordar Secc. 2.c); definimos el conjugado hermitiano $\overset{\star}{M}''$ de un operador M en el espacio \mathcal{A}_π , mediante

$$(M\psi, \varphi)_{\mathcal{A}_\pi} = (\psi, \overset{\star}{M}''\varphi)_{\mathcal{A}_\pi} \quad (2.44-a)$$

para todo $\psi, \varphi \in \mathcal{A}_{\pi}$

$$\overset{\star}{M}'' = \gamma_{(2)}^0 M^\dagger \gamma_{(2)}^0. \quad (2.44-b)$$

(aquí $\gamma_{(2)}^0$ = conjugado hermitiano en el espacio spinorial únicamente), entonces

$$\overset{\star}{M}'' \underset{\mathcal{A}_\pi}{\sim} \bar{M}'' \quad (2.44-c)$$

B^o) Adaptamos B) (Secc. 2.a-1) a nuestro caso:

Def.: Un operador M es pseudohermitiano en un espacio \mathcal{A} si

$$M \stackrel{\sim}{\approx} \bar{M} \quad (2.45-a)$$

o sea si

$$M \stackrel{\sim}{\approx} \bar{M}. \quad (2.45-b)$$

Entonces,

$$(M\Psi, \Psi) = (\Psi, M\Psi) \quad (2.45-c)$$

para todo $\Psi, \Psi \in \mathcal{A}$.

Por qué en (2.43) no ponemos el signo $\bar{\sim}$? Porque el símbolo $\stackrel{\sim}{\approx}$ es suficiente para que se cumpla la (2.45-c) que es todo lo que necesitaremos para la física.

Para que (2.45-b) se cumpla es condición suficiente (pero no necesaria) que sea

$$M \stackrel{\sim}{\approx} \bar{M}. \quad (2.45-d)$$

2.f- PROYECCIONES.

Los operadores proyección que más necesitaremos serán⁺ los que proyecten ortogonalmente (respecto de (2.2)) $\hat{\pi}$ o $\hat{\epsilon}^{sim}$ sobre \mathcal{A} ; por ejemplo, los necesitaremos para tener operadores prácticos que representen observables en la teoría de una "partícula" (Cap. 3).

2.f-1) Repaso de nociones conocidas.

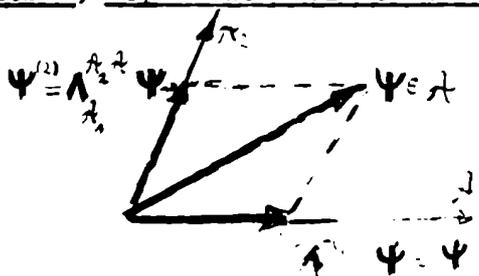


Fig. 2-1

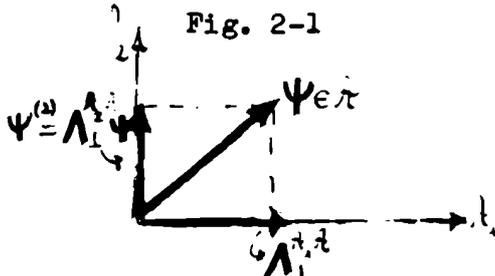


Fig. 2-2

En general $\hat{\Lambda}_{\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2}$ indicará el operador que proyecta un espacio \mathcal{A} sobre un subespacio \mathcal{A}_1 en la dirección de un subespacio complementario \mathcal{A}_2 (fig. 2-1).

Si la proyección es ortogonal (respecto de (2.2)), lo indicaremos con un subíndice "o". Además, cuando no hay riesgo de error, podremos suprimir algunas de las especificaciones indicadas.

Sean \mathcal{A}_1 y \mathcal{A}_2 dos subespacios de (fig. 2-1 o 2-2) tales que se tiene la suma

directa

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 \oplus \mathcal{A}_2 \quad (2.46-a) * +$$

es decir tales que toda $\Psi \in \mathcal{A}$ es del tipo

$$\Psi = \Psi^{(1)} + \Psi^{(2)} \quad (2.46-b) * +$$

con

$$\Psi^{(1)} = \hat{\Lambda}_{\mathcal{A}_2, \mathcal{A}} \Psi \in \mathcal{A}_1, \quad \Psi^{(2)} = \hat{\Lambda}_{\mathcal{A}_1, \mathcal{A}} \Psi \in \mathcal{A}_2. \quad (2.46-c) * +$$

Es,

$$\hat{\Lambda}_{\mathcal{A}_2, \mathcal{A}} + \hat{\Lambda}_{\mathcal{A}_1, \mathcal{A}} = \mathbf{I}; \quad (\hat{\Lambda}_{\mathcal{A}_2, \mathcal{A}})^2 = \hat{\Lambda}_{\mathcal{A}_2, \mathcal{A}}; \quad (\hat{\Lambda}_{\mathcal{A}_1, \mathcal{A}})^2 = \hat{\Lambda}_{\mathcal{A}_1, \mathcal{A}}; \quad (2.46-d) * +$$

$$\hat{\Lambda}_{\mathcal{A}_2, \mathcal{A}} \hat{\Lambda}_{\mathcal{A}_1, \mathcal{A}} = \hat{\Lambda}_{\mathcal{A}_1, \mathcal{A}} \hat{\Lambda}_{\mathcal{A}_2, \mathcal{A}} = 0$$

Si queremos que la descomposición sea ortogonal respecto de (2.2) (fig. 2-2)

es decir que sea

$$\langle \Psi^{(1)}, \Psi^{(2)} \rangle = 0 \quad (2.46-e) * +$$

Al menos en la aproximación de una "partícula!"

para todo $\Psi \in \mathcal{H}_1, \Phi \in \mathcal{H}_2$, entonces es suficiente (cf. A2-8) que

$$\Lambda_{\perp}^{\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_1} \quad (\text{o } \Lambda_{\perp}^{\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_2}) \text{ sean pseudohermitianas en } \frac{\mathcal{H}}{\mathcal{H}} ;$$

$$\Lambda_{\perp}^{\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_1} \quad \Lambda_{\perp}^{\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_2} \quad (\text{de donde } \Lambda_{\perp}^{\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_1} \approx \Lambda_{\perp}^{\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_2}) \quad (2.46-f) * *$$

Ejemplos: Las descomposiciones $\mathcal{E} = \mathcal{E}^I \oplus \mathcal{E}^{II}$, $\mathcal{E}^{sim} = \mathcal{E}^{sim I} \oplus \mathcal{E}^{sim II}$, etc. de Seco. 2.0-5 son ortogonales porque (cf. A2-8)

$$\Lambda^I = \Lambda^I \quad (\text{o sea } \Lambda^{II} = \Lambda^{II}); \quad (2.47)$$

la (2.47), con ayuda de (2.28-b) implica que se cumple (2.46-f).

(Para ser consecuentes con la notación deberíamos haber puesto $\Lambda_{\perp}^{\mathcal{E}^I}$, etc., pero ello no es práctico en este caso).

2.f-2) Un operador proyección simple (pero no ortogonal) de \mathcal{E}^{sim} sobre W .

Definimos los operadores

$$\Lambda_F^{W \mathcal{E}^{sim}} = \frac{1}{2} (I + \frac{H_{(1)} H_{(2)}}{p_0^2}) \quad (2.48-a)$$

$$\Lambda_W^{F \mathcal{E}^{sim}} = I - \Lambda_F^{W \mathcal{E}^{sim}} = \frac{1}{2} (I - \frac{H_{(1)} H_{(2)}}{p_0^2}). \quad (2.48-b)$$

Se trata de operadores proyección puesto que (como es trivial demostrar)

$$(\Lambda_F^{W \mathcal{E}^{sim}})^2 = \Lambda_F^{W \mathcal{E}^{sim}}; (\Lambda_W^{F \mathcal{E}^{sim}})^2 = \Lambda_W^{F \mathcal{E}^{sim}}; \Lambda_F^{W \mathcal{E}^{sim}} \Lambda_W^{F \mathcal{E}^{sim}} = \Lambda_W^{F \mathcal{E}^{sim}} \Lambda_F^{W \mathcal{E}^{sim}} = 0. \quad (2.49)$$

Sea $\Psi \in \mathcal{E}^{sim}$; es evidente que $\Lambda_F^{W \mathcal{E}^{sim}}$ cumple la condición inicial (2.3-c) de donde $\Lambda_F^{W \mathcal{E}^{sim}} \Psi \in W$; $\Lambda_F^{W \mathcal{E}^{sim}}$ proyecta \mathcal{E}^{sim} sobre W ; también de (2.3-c) se deduce que $\Lambda_W^{F \mathcal{E}^{sim}} \Psi \in F$; llamaremos F al subespacio de las $\Lambda_W^{F \mathcal{E}^{sim}} \Psi$. Tenemos pues la suma directa

$$\mathcal{E}^{sim} = W \oplus F \quad (2.50)$$

que podemos simbolizar como sigue: representaremos \mathcal{E}^{sim} con el plano del papel y los subespacios W y F de \mathcal{E}^{sim} con las dos rectas de la figura 2-3.

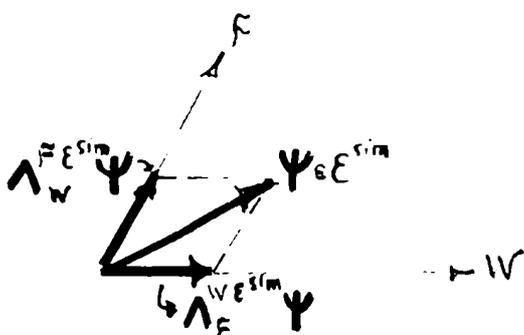


Fig 2-3

Evidentemente,

$$\Lambda_F^{W \mathcal{E}^{sim}} = I; \Lambda_W^{F \mathcal{E}^{sim}} = 0 \quad (2.51)$$

Pese a que el operador $\Lambda_F^{W \mathcal{E}^{sim}}$ es muy

simple, tiene inconvenientes para las aplicaciones que siguen pues la descomposición (2.50) no es ortogonal respecto del

producto escalar (2.2) (ver prueba en A2-9);

es decir, existen ciertos pares de vectores $\Psi^{(W)} \in W$, $\Phi^{(F)} \in F$ tales que

$$(\Psi^{(W)}, \Phi^{(F)}) \neq 0; \quad (2.52)$$

esto lo hemos simbolizado en Fig 2-3 dibujando ejes oblicuos.

2.f-3) El operador $\Lambda_{\perp}^{W \mathcal{E}^{sim}}$ que proyecta ortogonalmente \mathcal{E}^{sim} sobre W :

Buscamos un operador $\Lambda_{\perp}^{W \mathcal{E}^{sim}}$ que proyecte \mathcal{E}^{sim} sobre W y otro

$$\Lambda_{\perp}^{F \mathcal{E}^{sim}} = I - \Lambda_{\perp}^{W \mathcal{E}^{sim}} \quad (2.53)$$

que proyecte \mathcal{E}^{sim} en F , tales que la descomposición

$$\mathcal{E}^{sim} = W \oplus F \quad (2.54)$$

sea ortogonal respecto a (2.2). Es decir, que si $\Psi \in W$, $\Phi \in F$ sea

$$(\Psi, \Psi) = 0 \quad (2.55)$$

lo que simbolizamos dibujando ejes perpendiculares:

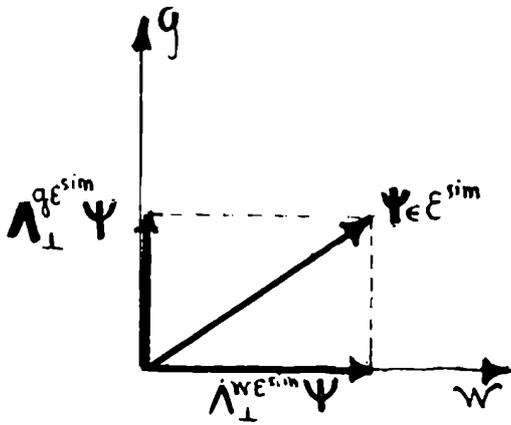


Fig 2-4

Vamos a construir $\Lambda_{\perp}^{W E^{sim}}$ en base a que

cumple (2.55) y que sea

$$\Lambda_{\perp}^{W E^{sim}} \Psi \in W \quad (2.56)$$

para toda $\Psi \in E^{sim}$

La (2.33-b) nos dice que podemos satisfacer (2.55) si todo elemento de g pertenece a $E^{sim II}$; el próximo paso debe ser evidentemente escribir (2.56) usando Λ^I y Λ^{II} ; para ello usamos la Seco. 2.b y las (2.5) para que una $\Psi \in E^{sim}$ pertenezca

también a W , es condición necesaria y suficiente que se cumpla

$$\Lambda^{II} \Psi = - \frac{(\vec{y}_{(1)} + \vec{y}_{(2)}) \cdot \vec{p}}{2m} \Lambda^I \Psi \quad (2.57-a)$$

Como $\vec{y} \cdot \vec{y} = -\vec{y} \cdot \vec{y}^o$ y como $\Psi = (\Lambda^I + \Lambda^{II}) \Psi$, es lo mismo poner

$$\Psi = \Lambda^I \Psi - \Lambda^{II} \frac{(\vec{y}_{(1)} + \vec{y}_{(2)}) \cdot \vec{p}}{2m} \Psi \quad (2.57-b)$$

Entonces es razonable ensayar

$$\Lambda_{\perp}^{W E^{sim}} = a \left[\Lambda^I - \Lambda^{II} \frac{(\vec{y}_{(1)} + \vec{y}_{(2)}) \cdot \vec{p}}{2m} \right]$$

donde a es un número a determinar, diferente de 1 puesto que si $a=1$ toda $\Psi \in E^{sim}$ se proyecta en una $\Psi = \Lambda_{\perp}^{W E^{sim}} \Psi$ que cumple (2.57) y que por lo tanto pertenece a W .

Hallamos a imponiendo (como ya dijimos) que g esté incluido en $E^{sim II}$, $\Lambda_{\perp}^{g E^{sim}} \Psi = (I - \Lambda_{\perp}^{W E^{sim}}) \Psi \in E^{sim II}$ para lo que basta

$$\Lambda^I (I - \Lambda_{\perp}^{W E^{sim}}) \Psi = 0$$

(recordar: $\Lambda^I \Lambda^{II} = 0$); de aquí obtenemos

$$a = 0$$

o sea

$$\Lambda_{\perp}^{W E^{sim}} = \Lambda^I - \Lambda^{II} \frac{(\vec{y}_{(1)} + \vec{y}_{(2)}) \cdot \vec{p}}{2m} \quad (2.58-a)$$

Aún falta probar que $(\Lambda_{\perp}^{W E^{sim}})^2 = \Lambda_{\perp}^{W E^{sim}}$ o sea que se trata de un

operador proyección propiamente dicho, pero antes indiquemos que el $\Lambda_{\perp}^{W E^{sim}}$

definido por (2.58-a) cumple también (cf. A2-10)

$$\Lambda_{\perp}^{W E^{sim}} = \left[I - \frac{1}{2m} (\vec{y}_{(1)} + \vec{y}_{(2)}) \cdot \vec{p} \right] \Lambda^I \quad (2.58-b)$$

$$= \frac{1}{4m} \left(I + \frac{H_{(1)} H_{(2)}}{p^2} \right) (H_{(1)} \gamma_{(1)}^o + H_{(2)} \gamma_{(2)}^o) \quad (2.58-c)$$

$$= \frac{1}{4m} (H_{(1)} \gamma_{(1)}^o + H_{(2)} \gamma_{(2)}^o + H_{(2)} \gamma_{(1)}^o + H_{(1)} \gamma_{(2)}^o) \quad (2.58-d)$$

$$= \frac{1}{4m} (H_{(1)} + H_{(2)}) (\gamma_{(1)}^o + \gamma_{(2)}^o) \quad (2.58-e)$$

$$= \frac{1}{4m} [2m + 2m \gamma_{(1)}^o \gamma_{(2)}^o - (\vec{y}_{(1)} + \vec{y}_{(2)}) \cdot \vec{p} + (\gamma_{(1)}^o \vec{\alpha}_{(2)} + \gamma_{(2)}^o \vec{\alpha}_{(1)}) \cdot \vec{p}] \quad (2.58-f)$$

$$= I - \frac{1}{4m} (\gamma_{(1)}^o - \gamma_{(2)}^o) (H_{(1)} - H_{(2)}) \quad (2.58-g)$$

En cuanto a $\Lambda_{\perp}^{g E^{sim}}$ ponemos

$$\Lambda_{\perp}^{g E^{sim}} = I - \Lambda_{\perp}^{W E^{sim}} \quad (2.59)$$

y tenemos p. ej. (cf. 2.58-g),

$$\Lambda_{\perp}^{g E^{sim}} = \frac{1}{4m} (\gamma_{(1)}^o - \gamma_{(2)}^o) (H_{(1)} - H_{(2)}) \quad (2.60)$$

Se trata de un operador proyección propiamente dicho pues (cf. A2-11)

de donde

$$\left. \begin{aligned} \Lambda_{\perp}^{W \mathcal{E}^{sim}} & \approx \Lambda_{\perp}^{W \mathcal{E}^{sim}} \\ \Lambda_{\perp}^{g \mathcal{E}^{sim}} & \approx \Lambda_{\perp}^{g \mathcal{E}^{sim}} \end{aligned} \right\} \quad (2.61-b)$$

(no es lícito reemplazar " \approx " por " \equiv " ni por " $=$ " ni por " \sim ").

Con (2.61) hemos verificado (2.55) (cf. (2.46-f)); además evidentemente

$$\Lambda_{\perp}^{W \mathcal{E}^{sim}} \equiv I \quad ; \quad \Lambda_{\perp}^{g \mathcal{E}^{sim}} \equiv 0 \quad (2.62)$$

Una representación:

En la representación (2.6) de las γ^{μ} toda $\Lambda_{\perp}^{W \mathcal{E}^{sim}} \Psi \in W$ obtenida por proyección ortogonal a partir de una $\Psi \in \mathcal{E}^{sim}$ es de la forma (cf. A2-12),

$$\Lambda_{\perp}^{W \mathcal{E}^{sim}} \Psi = \begin{pmatrix} \Psi_{41} & \Psi_{42} & \frac{p^1 \Psi_{41} + p^2 \Psi_{42} - p^3 \Psi_{33} - p^4 \Psi_{34}}{2m} & \frac{p^+ \Psi_{11} - p^- \Psi_{12} - p^+ \Psi_{34} - p^- \Psi_{44}}{2m} \\ \Psi_{21} & \Psi_{22} & \frac{p^1 \Psi_{12} + p^2 \Psi_{22} - p^3 \Psi_{33} + p^4 \Psi_{34}}{2m} & \frac{p^+ \Psi_{12} - p^- \Psi_{22} - p^+ \Psi_{34} + p^- \Psi_{44}}{2m} \\ \frac{p^1 \Psi_{11} + p^2 \Psi_{12} - p^3 \Psi_{33} - p^4 \Psi_{34}}{2m} & \frac{p^1 \Psi_{12} + p^2 \Psi_{22} - p^3 \Psi_{33} + p^4 \Psi_{34}}{2m} & \Psi_{33} & \Psi_{34} \\ \frac{p^1 \Psi_{41} - p^2 \Psi_{12} - p^3 \Psi_{34} - p^4 \Psi_{44}}{2m} & \frac{p^1 \Psi_{42} - p^2 \Psi_{22} - p^3 \Psi_{34} + p^4 \Psi_{44}}{2m} & \Psi_{43} & \Psi_{44} \end{pmatrix} \quad (2.63)$$

donde $\Psi_{21} = \Psi_{12}$; $\Psi_{43} = \Psi_{34}$; $p_{\pm} = p^1 \pm i p^2$.

Corolarios:

Comparando con (2.9) se ve que para construir por proyección ortogonal un elemento $\Lambda_{\perp}^{W \mathcal{E}^{sim}} \Psi \in W$ a partir de una $\Psi \in \mathcal{E}^{sim}$, sólo se necesita la parte Ψ^I de Ψ . A la misma conclusión se llega observando (2.58-b). Es decir, si $\Psi \in \mathcal{E}^{sim}$,

$$\Lambda_{\perp}^{W \mathcal{E}^{sim}} \Psi = \Lambda_{\perp}^{W \mathcal{E}^{sim}} \Psi^I = \Lambda_{\perp}^{W \mathcal{E}^{sim}} (\Lambda^I \Psi) \quad (2.64)$$

2.f-4) Productos de operadores proyección tipos 2.f-2 y 2.f-3

En A2-13 se demuestran las fórmulas que siguen; si se recuerdan las fig. 2-3 y 2-4 los resultados obtenidos se hacen intuitivos con las figuras asociadas a las ecuaciones que siguen:

$$\Lambda_{\perp}^{W \mathcal{E}^{sim}} \Lambda_{\perp}^{F \mathcal{E}^{sim}} = \Lambda_{\perp}^{W \mathcal{E}^{sim}} \quad (2.65-a)$$

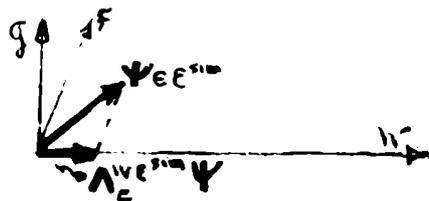


Fig 2-5-a

$$\Lambda_{\perp}^{W \mathcal{E}^{sim}} \Lambda_{\perp}^{F \mathcal{E}^{sim}} = \Lambda_{\perp}^{F \mathcal{E}^{sim}} \Lambda_{\perp}^{g \mathcal{E}^{sim}} \quad (2.65-b)$$

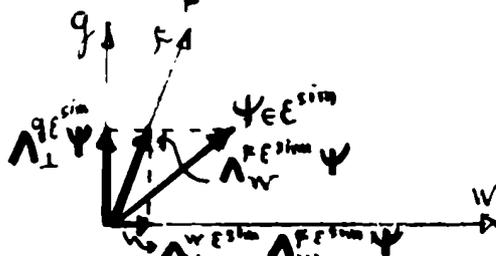
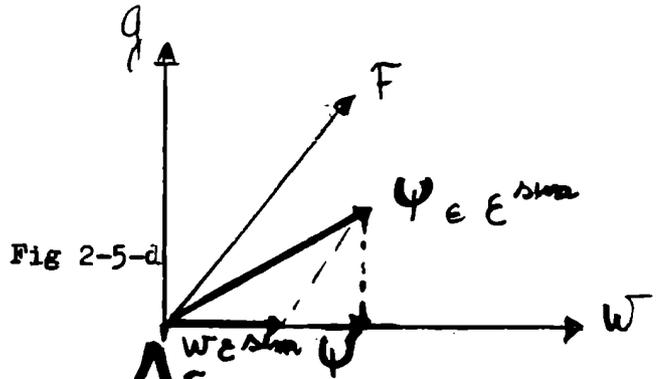


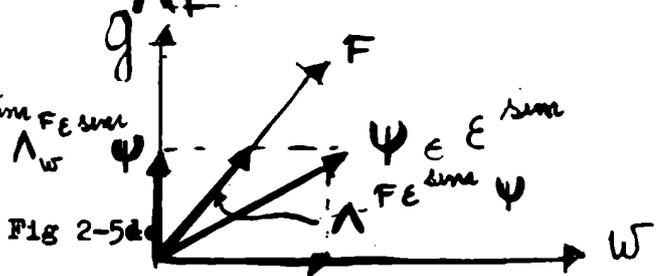
Fig 2-5-b

* Salvo lo de "proyección ortogonal" este corolario no es nuevo (Ver Belinfante³).

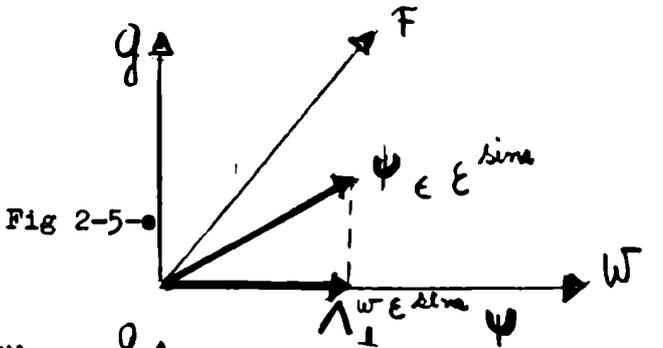
$$\angle_{\perp}^{g \in \text{line}} \angle_{F}^{w \in \text{line}} = 0 \quad (2.65-c)$$



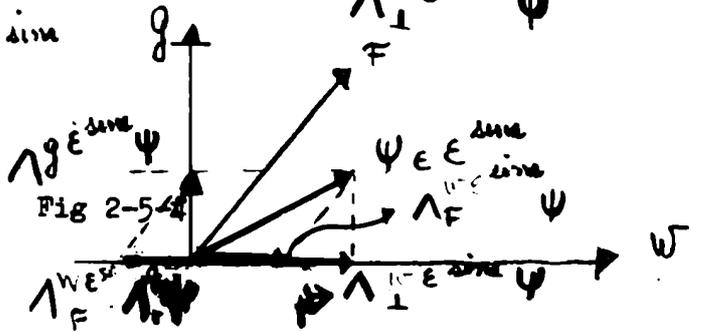
$$\angle_{\perp}^{g \in \text{line}} \angle_{w}^{F \in \text{line}} = \angle_{\perp}^{g \in \text{line}} \parallel \angle_{\perp}^{g \in \text{line}} \angle_{w}^{F \in \text{line}} \quad (2.65-d)$$



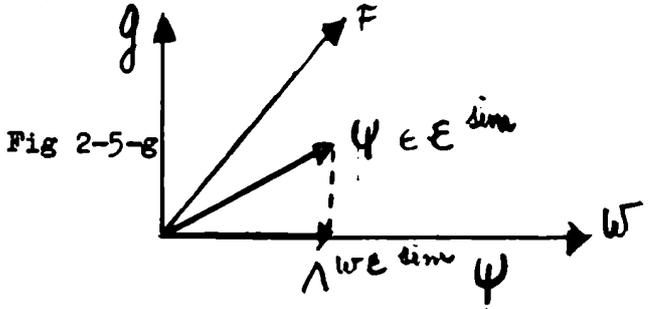
$$\angle_{F}^{w \in \text{line}} \angle_{\perp}^{w \in \text{line}} = \angle_{\perp}^{w \in \text{line}} \quad (2.65-e)$$



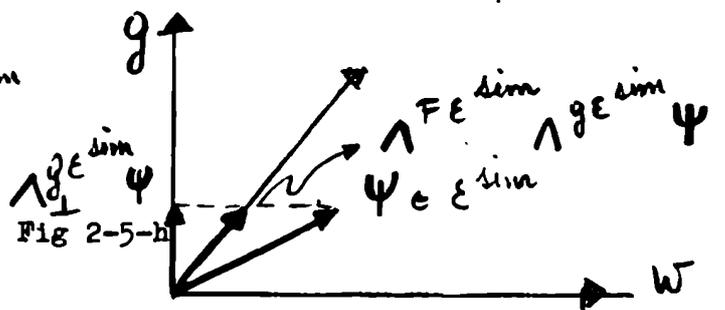
$$\angle_{F}^{w \in \text{line}} \angle_{\perp}^{g \in \text{line}} = \angle_{F}^{w \in \text{line}} - \angle_{\perp}^{w \in \text{line}} \quad (2.65-f)$$



$$\angle_{w}^{F \in \text{line}} \angle_{\perp}^{w \in \text{line}} = 0 \quad (2.65-g)$$



$$\angle_{w}^{F \in \text{line}} \angle_{\perp}^{g \in \text{line}} = \angle_{w}^{F \in \text{line}} \quad (2.65-h)$$



2f-5) Proyecciones (no ortogonales) de \mathcal{E} sobre \mathcal{E}^{sim} y \mathcal{E}^{ant} :

Las necesitaremos para 2f-6. Definimos⁺ los operadores

$$\Lambda_{\mathcal{E}^{ant}}^{\mathcal{E}^{sim}} = \frac{1}{2}(\mathbf{I} + \tilde{\mathbf{I}}) ; \left(\Lambda_{\mathcal{E}^{ant}}^{\mathcal{E}^{sim}} \right)_{i_1, i_2, j_1, j_2} = \frac{1}{2}(\delta_{i_1 j_1} \delta_{i_2 j_2} + \delta_{i_1 j_2} \delta_{i_2 j_1}) \quad (2.66-a)$$

$$\Lambda_{\mathcal{E}^{sim}}^{\mathcal{E}^{ant}} = \mathbf{I} - \Lambda_{\mathcal{E}^{ant}}^{\mathcal{E}^{sim}} = \frac{1}{2}(\mathbf{I} - \tilde{\mathbf{I}})$$

$$\left(\Lambda_{\mathcal{E}^{sim}}^{\mathcal{E}^{ant}} \right)_{i_1, i_2, j_1, j_2} = \frac{1}{2}(\delta_{i_1 j_1} \delta_{i_2 j_2} - \delta_{i_1 j_2} \delta_{i_2 j_1}) \quad (2.66-b)$$

Sea Ψ un elemento de \mathcal{E} ; es trivial que, (cf. A2-14)

$$\Psi^{(sim)} = \Lambda_{\mathcal{E}^{ant}}^{\mathcal{E}^{sim}} \Psi \in \mathcal{E}^{sim} ; \Psi^{(ant)} = \Lambda_{\mathcal{E}^{sim}}^{\mathcal{E}^{ant}} \Psi \in \mathcal{E}^{ant} \quad (2.67)$$

y que se trata de operadores proyección pues

$$\left. \begin{aligned} \left(\Lambda_{\mathcal{E}^{ant}}^{\mathcal{E}^{sim}} \right)^2 &= \Lambda_{\mathcal{E}^{ant}}^{\mathcal{E}^{sim}} ; \left(\Lambda_{\mathcal{E}^{sim}}^{\mathcal{E}^{ant}} \right)^2 = \Lambda_{\mathcal{E}^{sim}}^{\mathcal{E}^{ant}} \\ \Lambda_{\mathcal{E}^{ant}}^{\mathcal{E}^{sim}} \Lambda_{\mathcal{E}^{sim}}^{\mathcal{E}^{ant}} &= \Lambda_{\mathcal{E}^{sim}}^{\mathcal{E}^{ant}} \Lambda_{\mathcal{E}^{ant}}^{\mathcal{E}^{sim}} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.68)$$

con lo que

$$\left. \begin{aligned} \Lambda_{\mathcal{E}^{ant}}^{\mathcal{E}^{sim}} \Big|_{\mathcal{E}^{sim}} &= \mathbf{I} ; \Lambda_{\mathcal{E}^{sim}}^{\mathcal{E}^{ant}} \Big|_{\mathcal{E}^{sim}} = 0 \\ \Lambda_{\mathcal{E}^{ant}}^{\mathcal{E}^{sim}} \Big|_{\mathcal{E}^{ant}} &= 0 ; \Lambda_{\mathcal{E}^{sim}}^{\mathcal{E}^{ant}} \Big|_{\mathcal{E}^{ant}} = \mathbf{I} \end{aligned} \right\} \quad (2.69)$$

Las proyecciones no son ortogonales y (cf. A2-14)

$$\Lambda_{\mathcal{E}^{ant}}^{\mathcal{E}^{sim}} \underset{\mathcal{E}}{\sim} \Lambda_{\mathcal{E}^{ant}}^{\mathcal{E}^{sim}} \quad (2.70)^{++}$$

sin embargo en el punto siguiente estos operadores nos permitirán proyectar ortogonalmente \mathcal{E} sobre \mathcal{W} .

Finalmente, si A_{ij} es una matriz 4 x 4, es (cf. A2-15)

$$\left. \begin{aligned} \Lambda_{\mathcal{E}^{ant}}^{\mathcal{E}^{sim}} A_{(1)} \Big|_{\mathcal{E}^{sim}} &= \Lambda_{\mathcal{E}^{ant}}^{\mathcal{E}^{sim}} A_{(2)} \Big|_{\mathcal{E}^{sim}} = \frac{1}{2} \Lambda_{\mathcal{E}^{ant}}^{\mathcal{E}^{sim}} (A_{(1)} + A_{(2)}) \\ \Lambda_{\mathcal{E}^{sim}}^{\mathcal{E}^{ant}} A_{(1)} \Big|_{\mathcal{E}^{sim}} &= - \Lambda_{\mathcal{E}^{sim}}^{\mathcal{E}^{ant}} A_{(2)} \Big|_{\mathcal{E}^{sim}} = \frac{1}{2} \Lambda_{\mathcal{E}^{sim}}^{\mathcal{E}^{ant}} (A_{(1)} - A_{(2)}) \end{aligned} \right\} \quad (2.71)$$

2f-6) Proyección ortogonal de \mathcal{E} sobre \mathcal{W} :

Así como para $\Lambda_{\perp}^{\mathcal{W}^{\mathcal{E}^{sim}}}$, aquí también se puede construir el operador $\Lambda_{\perp}^{\mathcal{W}^{\mathcal{E}}}$ a partir de propiedades prefijadas, pero su obtención es mucho más engorrosa. El resultado final es (cf. A2-16)

$$\Lambda_{\perp}^{\mathcal{W}^{\mathcal{E}}} = \Lambda_{\perp}^{\mathcal{W}^{\mathcal{E}^{sim}}} \Lambda_{\mathcal{E}^{ant}}^{\mathcal{E}^{sim}} + \frac{1}{2m} (\vec{y}_{(1)} - \vec{y}_{(2)}) \cdot \vec{P} \Lambda^{\Pi} \Lambda_{\mathcal{E}^{sim}}^{\mathcal{E}^{ant}} \quad (2.72-a)$$

⁺ $\tilde{\mathbf{I}}_{i_1, i_2, j_1, j_2} = \delta_{i_1 j_2} \delta_{i_2 j_1}$ (cf. Secc. 1-o)
⁺⁺ El símbolo $\underset{\mathcal{E}}{\sim}$ es la negación del \sim .

$$= \Lambda_{\perp}^{W \in \text{sim}} \Lambda_{\perp}^{E \in \text{sim} E} + \frac{1}{2} m \Lambda^{\text{I}} (\vec{\gamma}_{(1)} - \vec{\gamma}_{(2)}) \cdot \vec{p} \Lambda_{\perp}^{E \in \text{ant} E} \quad (2.72\text{-b})$$

$$= \Lambda_{\perp}^{W \in \text{sim}} \Lambda_{\perp}^{E \in \text{sim} E} - \frac{1}{2} m (H_{(1)} \gamma_{(1)}^0 - H_{(2)} \gamma_{(2)}^0) \Lambda_{\perp} \Lambda_{\perp}^{E \in \text{ant} E} \quad (2.72\text{-c})$$

$$= \Lambda_{\perp}^{W \in \text{sim}} \Lambda_{\perp}^{E \in \text{sim} E} + \frac{1}{2} m (\gamma_{(1)}^0 H_{(1)} - \gamma_{(2)}^0 H_{(2)}) \Lambda_{\perp} \Lambda_{\perp}^{E \in \text{ant} E} \quad (2.72\text{-d})$$

$$\Lambda_{\perp}^{WE} = \frac{1}{4m} (H_{(1)} + H_{(2)}) (\gamma_{(1)}^0 \hat{\mathbf{I}} + \vec{\gamma}_{(1)} \cdot \hat{\mathbf{I}}) \quad (2.72\text{-e})$$

$$\Lambda_{\perp}^{VE} = \mathbf{I} - \Lambda_{\perp}^{WE}; \quad (2.72\text{-f})$$

V es un espacio tal que sus elementos son $\Psi = \Lambda_{\perp}^{VE} \Psi$, es

$$W \oplus V = E; \quad (2.73)$$

$$(\Lambda_{\perp}^{WE} \text{ y } \Lambda_{\perp}^{VE} \Lambda_{\perp}^{WE} \Psi \in W; \quad \Lambda_{\perp}^{VE} \Psi \in V) \quad (2.74)$$

$(\Lambda_{\perp}^{WE} \text{ y } \Lambda_{\perp}^{VE})$ son operadores proyección propiamente dichos pues (cf. A2-16)

$$(\Lambda_{\perp}^{WE})^2 = \Lambda_{\perp}^{WE}; \quad (\Lambda_{\perp}^{VE})^2 = \Lambda_{\perp}^{VE}; \quad \Lambda_{\perp}^{WE} \Lambda_{\perp}^{VE} = \Lambda_{\perp}^{VE} \Lambda_{\perp}^{WE} = 0 \quad (2.75)$$

Evidentemente,

$$\Lambda_{\perp}^{WE} = \mathbf{I}_W; \quad \Lambda_{\perp}^{VE} = \mathbf{I}_V \quad (2.76\text{-a})$$

$$\Lambda_{\perp}^{WE} = \Lambda_{\perp}^{W \in \text{sim}} \Lambda_{\perp}^{E \in \text{sim}} \quad (2.76\text{-b})$$

La descomposición (2.73) es ortogonal pues (cf. A2-16)

$$\Lambda_{\perp}^{WE} = \Lambda_{\perp}^{WE}; \quad \Lambda_{\perp}^{VE} = \Lambda_{\perp}^{VE} \quad (2.77)$$

Debe observarse en (2.72-a) que aunque aparece $\Lambda_{\perp}^{E \in \text{ant} E}$

$\Psi = \frac{1}{2m} (\vec{p}_{(1)} - \vec{p}_{(2)}) \cdot \vec{p} \Lambda_{\perp}^{\text{II}} \Lambda_{\perp}^{E \in \text{ant} E}$ es tal que $\Psi_{ij} = \Psi_{ji}$. La contribución de $\Lambda_{\perp}^{E \in \text{ant} E}$ a la formación de W se debe a que los espacios E^{sim} y E^{ant} no son ortogonales (cf. A2-14). El que la no ortogonalidad de W y E^{ant} obliga a la contribución de E^{ant} cuando se proyecta ortogonalmente E sobre W se visualiza en la fig.(2.7) cuyo plano simboliza al subespacio subtendido por W y E^{ant} .

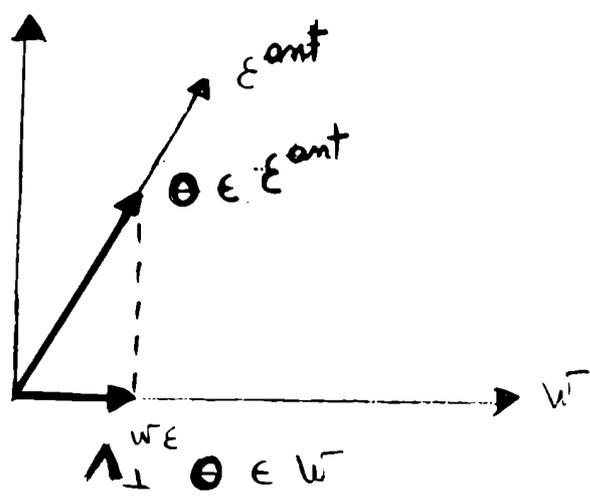


Fig. 2-7

CAPITULO TERCERO

LA APROXIMACION DE UNA PARTICULA

3.a - RESUMEN DE NOCIONES GENERALES CONOCIDAS.

Es sabido que ^{18,10} para spin entero no se puede construir la aproximación de una partícula con ρ = densidad de probabilidad, $\int \rho d^3x = +1$, sino la aproximación de una "partícula" o carga, con $e\rho$ = densidad de carga, $e \int \rho d^3x = \pm e$ = carga del sistema ($e > 0$).

Elle está conectado con el hecho de que puede definirse un producto escalar indefinido adecuado en el espacio de los vectores de estado.

Varios autores han trabajado sobre spin entero y sobre métricas indefinidas; no todos trabajan con la misma generalidad, ni emplean la misma nomenclatura, ni proceden de la misma manera. Hemos tomado ideas de varios de ellos formando así el esquema que sigue; dicho esquema es adecuado para nuestro trabajo (salvo problemas conectados con $\mathcal{W} \neq \mathcal{E}^{s_{1R}} \neq \mathcal{E}$) y lo menos libre de contradicciones internas⁺. No estudiaremos partículas neutras pues Feshbach y Villars mostraron que al menos para spin 0 es preferible atacarlas aparte, vía teoría de campos

I) Con una métrica (Ψ, Ψ) indefinida en el espacio de los vectores de estado

$[(\Psi, \Psi) \geq 0]$ se pueden describir estados en que la carga total es $\pm e$ ($e > 0$). Si $(\Psi, \Psi) \neq 0$ normalizaremos Ψ en forma que sea $(\Psi, \Psi) = \pm 1$. La carga total es $e(\Psi, \Psi)^{18}$.

II) La métrica en el espacio de los vectores de estado se define así: $(\Psi, \Psi) = \int \Psi^+ \eta \Psi d^3x$ donde η (que es único para una representación dada) es un operador tal que $\eta^+ = \eta$ (+ = conjugación hermitiana habitual, es decir respecto al producto escalar $\Psi^+ \Psi$); $\eta^+ = \eta$ implica que la carga total es real. No hay restricción física si uno se limita a η tal que $\eta^2 = I$, cosa que hacemos.²²

III) $\rho = \Psi^+ \eta \Psi$ ⁵; la densidad de carga es $e\rho = e j^0$ ^{18,10}; el cuadrivector corriente es $e j^\mu$ ^{18,10}; a menudo abreviaremos llamando densidad de carga a ρ y travector corriente a j^μ (es decir, $e=1$).

IV) la conjugación pseudohermitiana se define como en A, Secc. 2.e-1^{22,19,10}

V) Los operadores pseudohermitianos se definen como en B, Secc. 2.e-1^{22,19,10}

VI) Los observables se representan por operadores pseudohermitianos para que sus valores medibles sean reales.^{22,19,10}

VII) Los valores medios se definen por $\langle A \rangle = (\Psi, A \Psi)$, Ψ = función de onda.^{22,19,10}

VIII) Sea $A \varphi_a = a \varphi_a$ la ecuación de autovalores de un operador pseudohermitiano A, con φ_a perteneciente al espacio de los vectores de estados como en mecánica cuántica ordinaria φ_a es un autoestado de A. Pero el valor medible [que in

⁺El esquema que sigue es el más frecuentemente usado (salvo detalles) ~~el~~ el único; de Broglie⁹ usa uno esencialmente diferente.

dicaremos con $(a)_m$] no necesariamente coincide con el autovector a . En efecto
Se definen¹⁴ los valores medibles $(a)_m$ del observable A como los valores medios
 $\langle A \rangle$ de desviación nula. Por lo tanto si $\xi = (\psi_a, \varphi_a)$ es la carga del es-
tado representado por ψ_a , el valor medible es

$$(a)_m = (\varphi_a, A \varphi_a) = a \xi \text{ que (cf.I) no necesariamente es igual a } \underline{a}.$$

IX) Si $i \frac{\partial \psi}{\partial t} = H \psi$ con $H = \bar{H}$ la normalización (ψ, ψ) se conserva en el tiempo²².

X) Si $\frac{dA}{dt} = \frac{\partial A}{\partial t} + i [H, A]$ es $\langle \frac{dA}{dt} \rangle = \frac{d}{dt} \langle A \rangle$ ²²

XI) Llamaremos pseudounitarias a las transformaciones $\psi \rightarrow \psi' = U \psi$ de los vec-
tores de estado, y $\eta \rightarrow \eta'$ del operador que da al producto escalar, tales
que $(\psi', \varphi') = (\psi, \varphi)$. El producto escalar transformado es $(\psi', \varphi') =$
 $\int \psi'^{\dagger} \eta' \varphi' d^3x$ y debe ser $\eta' = U^{\dagger} \eta U$.²²

XII) Los operadores se transforman según $A' = U A U^{-1}$ con lo cual $\langle A \rangle = \langle A' \rangle$.²²

Nota

Admitamos (cosa que ocurrirá en nuestro caso) que existen soluciones $\psi^{(+)}$ con
 $(\psi^{(+)}, \psi^{(+)}) = +1$ y $\psi^{(-)}$ con $(\psi^{(-)}, \psi^{(-)}) = -1$ que sean ortogonales:
 $(\psi^{(+)}, \psi^{(-)}) = 0$. Entonces es inmediato que

$$\psi^{(0)} = \psi^{(+)} + \psi^{(-)} \quad (3.1-a)$$

es tal que

$$(\psi^{(0)}, \psi^{(0)}) = 0 \quad (3.1-b)$$

Es evidente que estas soluciones caen fuera de la normalización indicada en I.
Caben dos posibilidades: incluir o excluir estos $\psi^{(0)}$ como funciones de onda
de una partícula. Ni Heitler¹⁴, ni Peshbach y Villars¹⁰ discuten los estados
 $\psi^{(0)}$. Tampoco lo haremos nosotros, pues no afectan nuestros resultados; sólo
señalaremos que todos los valores medibles con precisión son nulos para un es-
tado $\psi^{(0)}$ (cf.A3-1):

$$(a)_m = (b)_m = \dots = (q)_m = 0 \quad (3.1-c)$$

3.b - LA DENSIDAD DE CARGA; EL TETRAVECTOR CORRIENTE

De III con sólo usar (2.2) es

$$\rho = (\psi, \psi)_{\bar{y}} = \psi^{\dagger} \gamma_{(2)}^0 \psi \quad (3.2-a)*$$

En la sección 6.g se demostrará que el único 4- vector no nulo que se puede
formar combinando bilinealmente ψ y $\bar{\psi}$ es

$$\left. \begin{aligned} j^{\mu} &= \bar{\psi} \gamma_{(1)}^{\mu} \psi, \quad j^0 = \rho = \psi^{\dagger} \gamma_{(1)}^0 \psi = \psi^{\dagger} \gamma_{(2)}^0 \psi; \\ j &= (\psi, \vec{\alpha}_{(1)} \psi) \end{aligned} \right\} \quad (3.2-b)*$$

consecuente con (3.2-a)

Por otro lado, y como era de esperar, la teoría de campos (cap.8) confirma
(3.2-b).

Utilizando (2.31) ó (2.33-a) se pueden poner las (3.2-a) y (b) en diversas for

* Sin usar γ^{μ} .

mas que dan igual resultado numérico; en particular se obtiene que

$$p = \Psi^* \frac{(\gamma_{(1)}^0 + \gamma_{(2)}^0)}{2} \Psi, \quad \vec{j} = \Psi^* \frac{(\gamma_{(1)}^0 \vec{\gamma}_{(2)} + \gamma_{(2)}^0 \vec{\gamma}_{(1)})}{2} \Psi$$

que es el \vec{j}^k de Belinfante³ y el de de Broglie,⁹ de manera que no hay novedad esencial en nuestro (3.2-b)

Usando la representación (1.6) se ve que \vec{j}^k se traslada en el \vec{j}^k de Kemmer. Además trasladando \vec{j}^k a la formulación original (Proca) se obtiene el \vec{j}^k habitual en ésta (cf. cap.6) lo cual también es conocido.

Es sabido³ que

$$\partial_\mu \vec{j}^k = 0 \quad (3.3) \quad * \quad *$$

lo cual se demuestra de la misma manera que para spin $\frac{1}{2}$.

3.0 - EL HAMILTONIANO

3.0-1) Su obtención y comparación con los hamiltonianos de Kemmer;

Si $H = \vec{\alpha} \cdot \vec{p} + \beta m$ es el hamiltoniano de Dirac para spin $\frac{1}{2}$, las ecuaciones de BW se pueden poner en forma hamiltoniana,

$$\left. \begin{aligned} i \frac{\partial \Psi}{\partial t} - H \Psi &= 0, & H &= H_{(1)} I_{(2)} \\ \Psi_{1j} &= \Psi_{j1} \end{aligned} \right\} \quad (3.4)$$

para lo cual basta multiplicar (1.2-a) por $\gamma_{(1)}^0$. Compárese esta trivial demostración con la necesaria para escribir las ecuaciones de Kemmer¹⁵ en forma hamiltoniana.

En el caso de Kemmer la forma hamiltoniana $(i \frac{\partial \Psi}{\partial t} - H \Psi)$ no es equivalente con sus ecuaciones (1.5) $(\beta^\mu p_\mu \Psi = m \Psi)$ porque en la demostración se debió multiplicar ambos miembros de una ecuación por un operador singular⁺, tal como le explicita el propio Kemmer en su trabajo. Tal dificultad no aparece en nuestro caso porque hemos multiplicado (1.2-a) por $\gamma_{(1)}^0$ que no es singular (por lo tanto $(\gamma_{(1)}^0)^{-1}$ existe y la demostración (1.2) \Rightarrow (3.4) es invertible: (3.4) \Rightarrow (1.2)).

Tanto en el formalismo de BW como en el de Kemmer la correspondiente condición inicial es consecuencia de la ecuación escrita en forma manifiestamente covariante [(1.2) ó (1.5)] y no es necesario postularla aparte. Lo propio ocurre en el formalismo BW cuando las ecuaciones se escriben en forma hamiltoniana.

En cambio, en el de Kemmer es necesario postular por separado su condición inicial si se escribe la ecuación en la forma hamiltoniana⁺⁺. La pseudohermiticidad de H se verifica fácilmente: $\bar{H} = \gamma_{(1)}^0 H_{(1)} \gamma_{(1)}^0 = \gamma_{(1)}^0 H_{(1)} \gamma_{(1)}^0 = H_{(1)} = H$
 $\bar{H} = \gamma_{(2)}^0 H_{(1)} \gamma_{(2)}^0 = \gamma_{(2)}^0 H_{(1)} \gamma_{(2)}^0 = H_{(1)} = H$ (3.5)

+ Recordar que $0_a = 0_b$ dice menos que $a=b$

++ En los dos formalismos se necesita la condición inicial para plantear un problema de valores iniciales (dar una $\Psi(0, \vec{x}) \in W$).

$(\Psi, H \Psi)_{sp}$ es igual a la densidad de energía que obtendremos en teoría de campos (cap. 8) la cual a su vez es consecuente con las densidades de energía obtenidas en otros formalismos

3.c-2) Comparación con el hamiltoniano de de Broglie.

Por (2.13), en la ecuación $i \frac{\partial \Psi}{\partial t} = H_{(1)} \Psi$ puede reemplazarse $H_{(1)}$ por otros operadores que den igual resultado (en Ψ); en particular puede ponerse $i \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \frac{1}{2} (H_{(1)} + H_{(2)}) \Psi$, y se tiene el hamiltoniano de de Broglie⁹.

Preferimos $H = H_{(1)} I_{(2)}$ en lugar de $\frac{H_{(1)} + H_{(2)}}{2}$ porque, además de ser más

breve,

1) las $\left\{ \begin{array}{l} i \frac{\partial \Psi}{\partial t} = H_{(1)} \Psi \\ \Psi_{ij} = \Psi_{ji} \end{array} \right\}$ implican la condición inicial (2.3). En cambio, de las

$\left\{ \begin{array}{l} i \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \frac{H_{(1)} + H_{(2)}}{2} \Psi \\ \Psi_{ij} = \Psi_{ji} \end{array} \right\}$ no podemos deducir la condición inicial,

y es necesario postular ésta por separado como una 3ª ecuación.

2) $\frac{1}{2} (H_{(1)} + H_{(2)})$ es singular, lo cual hace más delicado y engorroso su manejo.

Pero la elección se hace por motivos de conveniencia; no hay argumentos físicos pues $H_{(1)} I_{(2)} = \frac{H_{(1)} + H_{(1)}}{2}$

Usando la representación (1.6) es fácil ver que el hamiltoniano de de Broglie es análogo al de Kemmer.

3.c-3) El operador $m \beta_{(1)} I_{(2)}$

En lo que hace a encontrar un operador tal que mediante VIII (Secc. 3.a) obtengamos los valores medibles $(E)_m$ de la energía, tenemos una libertad aún mayor que la de elegir entre varios operadores iguales en \mathcal{W} a $H_{(1)} I_{(2)}$. En efecto, si $H = H_{(1)} I_{(2)}$ da los valores correctos de $(E)_m$, todo operador M tal que ${}^+ M \underset{\mathcal{W}}{\approx} H$ da los mismos valores correctos de $(E)_m$, aún cuando sea $M \neq H$

En particular, por (2.33-d),

$$H \underset{\mathcal{W}}{\approx} m \beta_{(1)} \text{ o sea } (\Psi, H \Psi) = (\Psi, m \beta_{(1)} \Psi), \quad (3.6)$$

o sea "valor medible de H " = "valor medible de $m \beta_{(1)} I_{(2)}$ ".

Por ser $m \beta_{(1)} I_{(2)}$ aún más simple que $H_{(1)} I_{(2)}$, uno estaría tentado de trabajar con $m \beta_{(1)} I_{(2)}$ como operador energía; no lo hacemos para mantener (dentro de lo posible) la similitud con la mecánica cuántica ordinaria:

1) Los autovalores ${}^+ m$ de $m \beta_{(1)} I_{(2)}$ no tienen nada que ver (aunque los multiplique por $\epsilon = {}^+ 1$) con los valores medibles ${}^+ \sqrt{m^2 + \mu^2}$ de la energía. Ver.

⁹Recordar (2.16).

más adelante (Secc. 3.e).

2) $\alpha_{(1)}$ no da la evolución temporal $\frac{\partial \Psi}{\partial t}$.

3) La obtención de los autoestados de $m \alpha_{(1)} I_{(2)}$ es artificiosa si este operador representa a la energía (se demostrará en Secc. 3.e-9).

3.3-4) Sobre el autovalor cero del hamiltoniano de Kemmer.

Kemmer¹⁵ hace notar que su hamiltoniano tiene los autovalores $\pm p^0 = \pm \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$ y 0, pero que para una onda plana monocromática no se obtiene 0 como valor medio, sino p_0 .

Creemos que la introducción de los espacios \mathcal{W} y \mathcal{E}^{sim} y la forma (2.3-c) de nuestra condición inicial en el formalismo de BW permiten clarificar la cuestión.

En primer lugar, queremos demostrar que los autovectores de H con autovalor 0 no pertenecen a \mathcal{W} , es decir, no son posibles funciones de onda. Para ello trasladamos el hamiltoniano de Kemmer al formalismo de BW; obtenemos el hamiltoniano de de Broglie (usar (1.6)):

$$H_{\text{Kemmer}} = H_{\text{de Broglie}} = \frac{H_{(1)} + I_{(1)} H_{(2)}}{2} \quad (3.7) **$$

Ahora, si $\Psi^{(0)}$ es una autofunción del hamiltoniano de Kemmer con autovalor nulo, debe ser

$$H_{\text{Kemmer}} \Psi^{(0)} = 0 \quad (3.8-a)$$

$$H_{(1)} \Psi^{(0)} = -H_{(2)} \Psi^{(0)} \quad (3.8-b)$$

Con (2.48-b)

$$\bigwedge F \mathcal{E}^{\text{sim}} \Psi^{(0)} = \Psi^{(0)} \quad \therefore \Psi^{(0)} \in F \quad (3.8-c)$$

siendo F un subespacio de \mathcal{E}^{sim} que sólo tiene en común con \mathcal{W} el origen (ver fig. 2-3).

$$\Psi^{(0)} \notin \mathcal{W} \quad (3.8-d)$$

Puede darse una segunda demostración utilizando la descomposición en ondas planas de Cap. 4 (cf. A3-2).

Habiendo demostrado que $\Psi^{(0)}$ no es una posible función de onda, basta releer VIII (Secc. 3.a) para comprender que " $\vec{\epsilon} \cdot \vec{x}$ (autovalor 0)" del hamiltoniano de Kemmer, no tiene conexión con ningún valor medible de la energía. Por supuesto ello no significa que el hamiltoniano de Kemmer sea incorrecto, sino que muestra que hay que tomar precauciones antes de conectar con valores medibles los autovalores de un operador (aunque los multipliquemos por ϵ).

2.3-5) Estados de energía⁺ positiva $\Psi^{(+)}$ y negativa $\Psi^{(-)}$, operadores proyección. Valores medibles de la energía.

Por definición,

⁺ La existencia del autovalor cero la deduce de $H_{\text{Kemmer}}^3 = p_0^2 H_{\text{Kemmer}}$

⁺⁺ Decimos formalmente que las soluciones son de energía positiva o negativa; por (3.17) ambas son de energía positiva; hablando con propiedad, hay que decir que son soluciones de carga positiva y negativa (cf. 3.14-a)

valores medios correspondientes a autoestados

$$(a)_m = \langle A \rangle \tag{3.19}$$

Como en VI, los observables se representan por operadores pseudohermitianos en W (ver B^o, Secc. 2.e-2),

$$A \stackrel{\text{esc}}{\sim} A \tag{3.20}$$

ya que ello garantiza la realidad de los valores medios, y como consecuencia, de los valores medibles.

Sea

$$\psi_a \in W \tag{3.21-a}$$

un autovector del observable A :

$$A \psi_a = a \psi_a \tag{3.21-b}$$

como en VIII, el estado representado por ψ_a es un autoestado,

$$\psi_a = \text{autoestado} \tag{3.21-c}$$

y el valor medible asociado a a es

$$(a)_m = (\psi_a, A \psi_a) = \epsilon a \tag{3.21-d}$$

donde

$$\epsilon = (\psi_a, \psi_a) = \pm 1 \tag{3.21-e}$$

es el signo de la carga del estado.

3.e - OBSERVABLES. EL PROBLEMA DE LOS OPERADORES QUE TRANSFORMAN W EN E .

La importancia práctica de la cuestión que discutiremos aquí se verá más adelante, al estudiar el spin.

3.e-1) Los operadores de segunda clase pueden representar observables.

Agruparemos los operadores pseudohermitianos (en W) en dos clases:

Operadores de 1a. clase: Son los operadores A pseudohermitianos en W tales que para todo $\psi \in W$ se $A \psi \in W$.

Operadores de 2a. clase: Son los operadores B pseudohermitianos en W tales que existe al menos un $\psi \in W$ tal que $B \psi \in E$ pero $B \psi \notin W$.

Como en mecánica cuántica ordinaria se trabaja únicamente con operadores de 1a. clase, y como otros autores han utilizado en formalismos de este tipo operadores de 2a. clase (sin discutirlo, dentro de lo que sabemos), es razonable plantearse esta pregunta:

Cuál de los dos puntos de vista que siguen es el correcto?

1er punto de vista: Los observables se pueden representar únicamente por operadores de 1a. clase.

2º punto de vista: Operadores de las dos clases pueden representar observables.

Solución:

Se a B un operador de 2a. clase; llamaremos operador tipo W asociado a B al operador

$$B^{(W)} = A_{\perp}^{W \in} B A_{\perp}^{W \in} ; \tag{3.22}$$

evidentemente (cf. (2.74)), $B^{(w)}$ es de la. clase.

Una descomposición tipo Peirce

$$B = \Lambda_{\perp}^{w\epsilon} B \Lambda_{\perp}^{w\epsilon} + \Lambda_{\perp}^{w\epsilon} B \Lambda_{\perp}^{w\epsilon} + \Lambda_{\perp}^{w\epsilon} B \Lambda_{\perp}^{w\epsilon} + \Lambda_{\perp}^{w\epsilon} B \Lambda_{\perp}^{w\epsilon} \quad (3.23-a)^+$$

conecta B con $B^{(w)}$

Todo Ψ de (3.18) pertenece a W ; entonces por (3.22), (2.77) y (2.76-a)

$$\langle B \rangle = (\Psi, B \Psi) = (\Psi, B^{(w)} \Psi) = \langle B^{(w)} \rangle \quad (3.23-b)^{++}$$

$$B \stackrel{w}{\sim} B^{(w)} \quad (3.23-c)$$

Si $B^{(w)}$ (operador de la. clase) representa un observable, lo propio hace B (operador de 2a. clase) pues B y $B^{(w)}$ tienen los mismos valores medibles. Por lo tanto, el pertenecer a la 2a. clase no impide que un operador represente a un observable.

3.e-2) Autovalores que no corresponden a autoestados. Falsos valores medibles. Falsas degeneraciones.

Sea

$$B f_b = b f_b \quad (3.24)$$

la. ecuación de autovalores de un operador (de la. o 2a. clase); si es $f_b \notin W$, no existe ningún estado físico cuyo vector de estado sea f_b , y por lo tanto, f_b no es un autoestado, y el número $(b)_m = (f_b, B f_b) = \epsilon b$ no es realizable experimentalmente.

Excepción: para $(b)_m$ que además de $f_b \in W$ exista otra $f'_b \in W$ (con igual b), o sea degeneración; pero entonces el número $(b)_m$ corresponde al estado f'_b y no al f_b , de manera que en este caso lo que origina la $f_b \notin W$ es una degeneración aparente, no realizable experimentalmente.

Toda $f_b \notin W$ es un autovector que no corresponde a un autoestado.

Notación: Si B representa a un observable, indicaremos con $f_{(\epsilon b)}^{(\epsilon)}$ el autoestado de carga ϵ correspondiente al valor medible $(b)_m = \epsilon b$.

3.e-3) Obtención de los valores medibles y de los autoestados de un operador tipo W .

Sea $B^{(w)}$ un operador de la. clase (3.22).

Teorema: Sea $B^{(w)}$ un operador tipo W . Todos sus autovectores (en \mathcal{E}) correspondientes a autovalores no nulos pertenecen a W (y son, por lo tanto, subs-

⁺ Usando (2.72-e) la igualdad es trivial.

⁺⁺ Esta discusión sería más difícil si nuestros operadores proyección no fuesen ortogonales respecto a (2.2).

⁺⁺⁺ Por lo tanto, tienen los mismos valores medibles; pero, como veremos más abajo, el método de cálculo de éstos es diferente: B tiene autoestados que no son autovectores, cosa que no ocurre con $B^{(w)}$.

⁺⁺⁺⁺ Más adelante se comprenderá que esta f'_b debe ser además autovector de $B^{(w)}$ (cf. Secc. 3.e-4).

Demostración: Sea

$$B^{(W)} \varphi_b = b \varphi_b \quad ; \quad \varphi_b \in E \quad (3.25-a)$$

su ecuación de autovalores. Premultiplicando por Λ_1^{WE} deducimos (usar (2.76))

$$0 = b \Lambda_1^{WE} \varphi_b \quad (3.25-b)$$

de manera que si $b \neq 0$ es $\Lambda_1^{WE} \varphi_b = \varphi_b$, o sea

$$\varphi_b \in W \quad (3.25-c)$$

Por VIII^b (Secc. 3.a)

$$\varphi_{(\epsilon)} = \varphi_b \quad \text{donde } \epsilon = (\varphi, \varphi) \quad (3.25-d)$$

Q.E.D.

Corolario: Todos los números

$$(b)_m = \epsilon b \quad \text{con } b \neq 0 \quad (3.25-e)$$

son valores medibles.

Para un operador cualquiera, es necesario verificar cuales de los números ϵb son valores medibles (es condición necesaria $\varphi_b \in W$). Para los operadores de tipo W , sólo es necesaria dicha verificación para los autovalores $b=0$.

El conjunto $\varphi_b^{(W)}$ de los autoestados $\varphi_{(\epsilon)}$ de un operador de tipo W es el conjunto de sus autovectores φ_b con $b \neq 0$ más el de aquellos φ_0 tales que $\Lambda_1^{WE} \varphi_0 = \varphi_0$. Simbólicamente,

$$\{ \varphi_{(\epsilon b)}^{(\epsilon)} \} = \{ \varphi_b ; b \neq 0 \} \quad \text{más} \quad \{ \varphi_0 ; \Lambda_1^{WE} \varphi_0 = \varphi_0 \} \quad (3.25-f)$$

Existen realmente autovectores $\varphi_0 \notin W$? Pueden existir como le prueba el ejemplo: Sea $B = I$; es $B^{(W)} = I^{(W)} = \Lambda^{WE}$

y evidentemente todos los vectores de V son autovectores de Λ_1^{WE} (3.26) con autovalor nulo.

3.e-4) Obtención de los valores medibles y de los autoestados de un operador B de 2a. clase.

A) DIFICULTADES. DEMOSTRAREMOS INTUITIVAMENTE QUE PUEDE OCURRIR QUE NINGUNO DE LOS AUTOVECTORES φ DE B (MULTIPLICADO POR ϵ) SEA AUTOESTADO.

Es intuitivo que si B es un operador arbitrario de 2a. clase, el espacio W no es privilegiado para el mismo de manera que existen operadores de 2a. clase (probablemente son la mayoría) cuyos autovectores φ_b tienen cualquier orientación respecto de W .

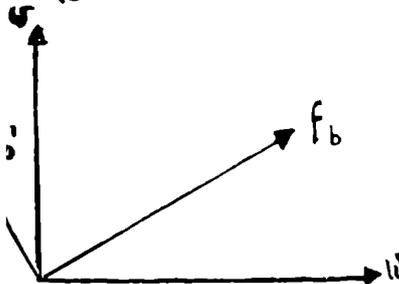


Fig 3-1

El plano del dibujo simboliza a ϵ . Simbólicamente se redujeron a 1 las dimensiones de los espacios W y ϵ (las dimensiones spinoriales reales son 6 y $16-6=10$).

Es entonces intuitivo que existen operadores de 2a. clase (y probablemente son los más) tales que no tienen ningún autovector = autoestado y por lo tanto para ninguno de los números $(b)_m = \epsilon b$ hay garantía de que sea verdadero valor medible.

Como la demostración de la existencia de tales operadores patológicos no es rigurosa, conviene rigorizar, lo que haremos en B. Pero antes, reforzaremos la demostración aportando un ejemplo: Sea el candidato a energía

no es autoestado, por lo que menos puede ser autoestado.

$\beta_{(1)}^I(2)$ de Secc. 3.e-3; en A3-3 demostraremos que este operador pseudohermitiano es de 2a. clase, y que si $p^1 = p^2 = 0$, $p^3 \neq 0$, ninguno de sus autovectores pertenecen a \mathcal{W}^\dagger .

Cabe además la cuestión: Admitamos que para muchos operadores de 2a. clase ocurra la situación antedicha. Pero, no existirán ciertos operadores de 2a. clase tales que tengan un número suficiente de autovectores en \mathcal{W} ? La respuesta es negativa, y se da en B.

B) DIFICULTADES. DEMOSTRAREMOS RIGUROSAMENTE QUE NINGUN OPERADOR B DE SEGUNDA CLASE ES TAL QUE SE PUEDAN OBTENER TODOS SUS AUTOESTADOS MEDIANTE LA REGLA HABITUAL DE IGUALAR "AUTOESTADO" = "AUTOVECTOR PERTENECIENTE AL ESPACIO DE LOS VECTORES DE ESTADO".

Admitiremos como hipótesis que los autoestados $\varphi_{(\epsilon b)}^{(\epsilon)}$ de un operador forman sistema completo en \mathcal{W} . Demostración por el absurdo: Supongamos que (B) es falsa; entonces para cada estado $\varphi_{(\epsilon b)}^{(\epsilon)}$ existe un autovector f_b que le es proporcional⁺⁺. Sea \mathcal{C} el conjunto de esos f_b .

Si $f_b \in \mathcal{C}$ es $f_b \in \mathcal{W}$ (pues $\varphi_{(\epsilon b)}^{(\epsilon)} \in \mathcal{W}$) y para toda $\psi \in \mathcal{W}$ es

$$\psi = \sum_{\mathcal{C}} a_b f_b \quad (3.28-a)$$

(por la completitud de las $\varphi_{(\epsilon b)}^{(\epsilon)}$). Entonces,

$$B\psi = \sum_{\mathcal{C}} a_b B f_b = \sum_{\mathcal{C}} a_b b f_b \in \mathcal{W} \quad (3.28-b)$$

lo cual es imposible porque B es de 2a. clase.

Por lo tanto, existe al menos un estado $\varphi_{(\epsilon b)}^{(\epsilon)}$ tal que ningún autovector f_b tiene su dirección (que es lo que queríamos demostrar).

C) SOLUCION.

Sabemos que: 1) El operador $B^{(w)}$ de (3.22) da los mismos valores medibles que B (sólo que para $B^{(w)}$ conocemos por 3.e-3 los autoestados (=autovectores) mientras que para B conocemos sus autovectores pero existen autoestados que no son autovectores, y cuya determinación es, por lo tanto, engorrosa). 2) Los valores medibles $(b)_m$ de $B^{(w)}$ se obtienen a partir de su ecuación de autovalores según (3.25).

Per lo tanto, para hallar los autoestados y los valores medibles de un operador B de 2a. clase, lo que corresponde es calcular $B^{(w)} = \Lambda_1^{w\epsilon} B \Lambda_1^{w\epsilon}$ resolver la ecuación de autovalores de $B^{(w)}$ y no la de B y usar (3.25).

Para completar demostraremos que aquellos eventuales (e insuficientes) autovectores f_b de B que pertenecen a \mathcal{W} son también autovectores de $B^{(w)}$ con iguales autovalores.

En efecto, si $B f_b = b f_b$, es $\Lambda_1^{w\epsilon} B f_b = \Lambda_1^{w\epsilon} b f_b$ y si es $f_b \in \mathcal{W}$ es $(\Lambda_1^{w\epsilon} B \Lambda_1^{w\epsilon}) f_b = b f_b$

La dificultad no se debe a que la autofunción no sea de cuadrado integrable (por ser autoestado de \vec{p}) puesto que esto es subsanable vía autodiferenciales.

+++ En cuántica usual la constante de proporcionalidad es de módulo 1; no la especificamos para que la demostración continúe válida si se admiten autoestados de pseudonorma nula (Secc. 3.a) los que no son normalizables.

+++ Si el conjunto de los autovectores de $B^{(w)}$ es completo en \mathcal{W} , es falso el teorema inverso (pues las $f_b \in \mathcal{C}$ no forman sistema completo en \mathcal{W} y son por lo tanto menos numerosas).

de donde f_b es también autovector de \mathbb{B} .

$$\mathbb{B}^{(w)} \mathbb{B} f_b = b f_b \Rightarrow \mathbb{B}^{(w)} f_b = b f_b \quad (\text{si } f_b \in W). \quad (3.29)$$

3.e-5) Los operadores de 2a. clase son correctos pero inconvenientes. Su sustitución por operadores equivalentes tipo W .

El que sean correctos está demostrado en (3.e-1); por lo tanto los autores que representaron observables con operadores \mathbb{B} de 2a. clase no cometieron ningún error; pero por 3.e-4 \mathbb{B} , en ningún caso el conjunto de números ϵ b donde b es un autovalor de \mathbb{B} proporciona (por ese sólo hecho)⁺ el total de valores medibles, y disentió de quienes los utilizaron como tales. El procedimiento correcto es (a nuestro juicio) el indicado en C, Secc. 3.e-4, o sea usar el operador $\mathbb{B}^{(w)}$ asociado a \mathbb{B} .

Però entonces es claro que es mucho más simple olvidarse de \mathbb{B} y sustituirlo por $\mathbb{B}^{(w)}$ desde el comienzo, haciendo todos los cálculos con este.⁺⁺

Es lo que haremos cada vez que aparezca un operador de 2a. clase.

3.e-6) Teorema sobre la pseudohermiticidad (ver A3-4).

"Sea \mathbb{B} un operador (de la 1.ª ó 2a. clase); siendo \mathbb{B} pseudohermitiano en W $\mathbb{B}^{(w)}$ es pseudohermitiano en $\bar{\epsilon}$ y en \bar{W} ".

$$\mathbb{B} \underset{exc}{\sim} \mathbb{B} \Rightarrow \mathbb{B}^{(w)} \underset{exc}{\sim} \overline{\mathbb{B}^{(w)}} \Rightarrow \mathbb{B}^{(w)} \underset{exc}{\sim} \overline{\mathbb{B}^{(w)}} \quad (3.30-a)$$

Además, demostraremos que

$$\mathbb{B} \underset{w}{=} \mathbb{B} \Rightarrow \mathbb{B}^{(w)} \underset{w}{=} \overline{\mathbb{B}^{(w)}} \quad (3.30-b)$$

3.e-7) Qué ocurre cuando calculamos el operador de tipo W asociado a un operador \mathbb{A} de la. clase?

Por hipótesis,

$$\mathbb{A} \psi \in \bar{W} \quad \text{para toda } \psi \in W \quad (3.31)$$

Usando (2.76) y (3.31),

$$\mathbb{A}^{(w)} \psi = \bigwedge_{\perp}^{w \in \epsilon} \mathbb{A} \bigwedge_{\perp}^{w \in \epsilon} \psi = \bigwedge_{\perp}^{w \in \epsilon} (\mathbb{A} \psi) = \mathbb{A} \psi$$

$$\therefore \mathbb{A}^{(w)} \underset{w}{=} \mathbb{A} \quad (3.32-a)$$

Puede reemplazarse " $\underset{w}{=}$ " por " $\underset{w}{\sim}$ " o sea por " $\underset{w}{\approx}$ "? Salvo casos particulares, no. En efecto: Sea $\mathbb{A} = \mathbb{I}^{(w)}$ (que cumple (3.31)); usando (3.26), $\mathbb{I}^{(w)} = \bigwedge_{\perp}^{w \in \epsilon}$. Es $\mathbb{I}^{(w)} \underset{w}{\approx} \mathbb{I}$ (recordar (2.76)) pero $\mathbb{I}^{(w)} \underset{w}{=} 0 \neq \mathbb{I}$.

La demostración de (3.29) es aplicable al caso de un operador de la. clase:

$$\mathbb{A} \psi_a = a \psi_a \Rightarrow \mathbb{A}^{(w)} \psi_a = a \psi_a \quad (3.32-b)$$

para todo $\psi_a \in W$. Si las ψ_a forman sistema completo en W , es

$$\mathbb{A} \psi_a = a \psi_a \iff \mathbb{A}^{(w)} \psi_a = a \psi_a \quad (3.32-c)$$

Lo que las (3.32-a) y (3.32-c) demuestran es que cambiar \mathbb{A} por $\mathbb{A}^{(w)}$ no introduce

+Lo que es seguro es que los autovectores no dan todos los autoestados; en cuanto a los valores medibles podría ocurrir que casualmente todos coincidan con los ϵ b, b = autovalor, pero la demostración de ϵ b = valor medible no puede basarse en b = autovalor. Ver también (A3-4-d)

++Aún puede sustituirse $\mathbb{B}^{(w)}$ por un operador \mathbb{A} tal que $\mathbb{A} \underset{w}{=} \mathbb{B}^{(w)}$ (cf. Secc. e-7).

resultados físicos diferentes, o sea representan al mismo observable, y que no perdemos ni autoestados, ni valores medibles si ponemos $\varphi_{(\epsilon a)}^{(\epsilon)} = \varphi_{\epsilon a}$

(a) ϵa obtenidos de $A\varphi_a = a\varphi_a, \varphi_a \in \bar{W}$

$$(3.32-d)$$

Pero como en general es $A' \neq A$, no será necesariamente cierto para un operador de la. clase (que no sea de tipo \bar{W}), que si se resuelve en ϵ su ecuación de autovalores los autovectores de autovalor distinto de cero pertenecan a \bar{W} .

Como no perdemos autoestados ni valores medibles usando la ecuación de autovalores de A' en lugar de la de $A^{(w)}$, no es importante sustituir $A \rightarrow A^{(w)}$; es más, hay casos (e. g. H) en los que puede ser más simple y cómodo usar A en lugar de $A^{(w)}$.

3.e-8) Dos condiciones necesarias y suficientes para que un operador sea de la. clase (ver A3-5)

A) "La ecuación (3.32-a) es condición necesaria y suficiente para que un operador A sea de la. clase".

B) "La ecuación

$$[H_{(1)}, A]_{\bar{W}} = [H_{(2)}, A] \quad (3.33)$$

es condición necesaria y suficiente para que A sea de la. clase".

Daría lo mismo usar

$$H_{(1)}A = H_{(2)}A \quad (3.34)$$

en lugar de (3.33) (cf. (3.3-2)) pero la (3.33) es más cómoda de usar: En muchos casos se ve a simple vista que se cumple $[A, H_{(1)}] = 0, [A, H_{(2)}] = 0$ de donde se cumple (3.33).

3.e-9) Ejemplos.

A) $A = H = H_{(1)}I_{(2)}$

Es $[H, H_{(1)}] = 0, [H, H_{(2)}] = 0$, por lo tanto H es de la. clase por (3.33) (como era de prever). Verifiquemos: Si $\psi \in \bar{W}$, $H_{(1)}\psi = H_{(2)}\psi$.
 $H_{(1)}(H_{(1)}\psi) = H_{(1)}^2\psi = H_{(2)}^2\psi = H_{(2)}(H_{(1)}\psi) \therefore H\psi = \psi$ cumple (2.3-o) y por ende pertenece a \bar{W} .

Como consecuencia de la fórmula gral. (3.32-a) es

$$H = \Lambda_{\perp}^{(w)} H \Lambda_{\perp}^{(w)\epsilon} H \quad (3.35-a)$$

Verifiquemos: Si $\psi \in \bar{W}$ es $H \Lambda_{\perp}^{(w)\epsilon} \psi = H \psi$ (pues $\Lambda_{\perp}^{(w)\epsilon} = I$); además si cumple (2.3-c) también la cumple $\psi = H \psi$, de donde $\Lambda_{\perp}^{(w)\epsilon} \psi = \psi$; entonces,

$$H^{(w)} \psi = H \psi, \text{ o sea la (3.35-a).}$$

B) $B = m \beta_{(1)} I_{(2)}$

Fue discutido en Secc. 3.c-3 y en Secc. 3.e-4A como posible (e inconveniente) representante de la energía; en particular se demostró que es de 2a. clase.

B₁) Redemostremos que es de 2a. clase con ayuda de (3.33): Las

$$\left\{ \begin{aligned} H_{(1)} &= \beta_{(1)} I_{(2)} \\ H_{(2)} &= \beta_{(1)} I_{(2)} \end{aligned} \right\} = -2m \delta_{(1)}^{(2)} I_{(2)} \cdot \vec{p} \neq 0 \quad (3.35-b)$$

muestran que

$$\left[H_{(1)}, \beta_{(1)} I_{(2)} \right] = \left[H_{(2)}, \beta_{(1)} I_{(2)} \right] \quad (3.35-c)$$

por lo que $\beta_{(1)} I_{(2)}$ es de 2a. clase.

B₂) Por otra parte, por la fórmula general (3.23-c) es

$$(m \chi_{(1)}^{(w)})^{(w)} \approx m \chi_{(1)} \quad (3.35-d)$$

Verifiquemos (3.35-d). En A3-6 calculamos explícitamente

$$(m \chi_{(1)}^{(w)})^{(w)} = m \frac{1}{2} (\chi_{(1)} + \chi_{(2)}) - \frac{1}{2} \vec{p} (\chi_{(2)} \vec{\chi}_{(1)} + \chi_{(1)} \vec{\chi}_{(2)}) \quad (3.35-e)$$

entonces, con (2.33-f) y (2.33-g) queda demostrada nuevamente la (3.35-d).

Nota: En 3.e-9 completaremos la discusión de $\beta_{(1)} I_{(2)}$ como energía.

3.e-10) Representan el mismo observable los operadores de segunda clase B y C si son escalar en U?

Parecería plausible que la respuesta fuese afirmativa, pues

$$\rightarrow \langle B \rangle \approx \langle C \rangle \quad (3.36-a)$$

$$\rightarrow \langle B \rangle = \langle C \rangle \quad (3.36-b)$$

por lo que B y C tienen - al menos aparentemente - los mismos valores medibles.

Pero la cuestión merece un análisis más cuidadoso. Veamos primero que el observable representado por un operador no está unívocamente determinado por el operador, aunque trabajemos en una representación fija:

Si hacemos caso omiso de su impracticidad, los operadores de 2a. clase B, C, ... representan legítimamente observables, pero para salvar⁺⁺ a los operadores de 2a. clase hemos tenido que asociar a cada B una regla para construir sus autoestados: Para tener los autoestados de B, hallar B^(w) y calcular los autovectores de éste. Es una regla razonable, pero que no deja de tener cierto grado de arbitrariedad⁺⁺⁺. En efecto, supongámonos por un momento que podemos construir un operador D de la. clase tal que

$$B \approx B^{(w)} \quad (3.36-c)$$

pero que cumpla

$$B^{(w)} \neq B^{(s)} \quad (3.36-d)$$

Con el mismo derecho con que hemos ordenado: "...hallar B^(w) ..." podríamos haber impuesto "Para tener los autoestados de B, hallar B^(s) y calcular los autovectores de éste". Posiblemente la regla "... hallar B^(w) ..." sea la más natural de todas, pero no por ello deja de ser arbitraria. Ahora, si se.

+Si fuera $\delta_{(1)}^{(2)} I_{(2)} \cdot \vec{p} = 0$ sería $\delta_{(1)}^{(2)} \vec{p} = 0$ contra (2.33-e)

++Imperta salvarlos pues hay operadores bien conocidos, como el spin de Kemmer (cf. Secc. 3.1-2) que son de 2a. clase.

+++En la cuántica usual, el observable determina unívocamente al operador para una representación dada, porque la regla es única: "Para B, hallar los autovectores de B"; pero en nuestro caso esta regla es inadecuada si B es de 2a. clase, y la arbitrariedad reside en que pueden haber varias nuevas reglas.

cumple (3.36-d), entonces los autovectores y , e , los autovalores de $B^{(w)}$ serán diferentes de los de $B^{(s)}$ y las dos reglas tendrán consecuencias físicas diferentes.

Este muestra que el observable descrito por el operador B usando la regla "... hallar $B^{(w)}$..." es diferente del observable descrito por el mismo operador pero usando la regla "... hallar $B^{(s)}$..."

Cómo construir $B^{(w)}$? Elle es fácil si existen B y C de 2a. clase tales que cumplan (3.36-a) y sea

$$B^{(w)} \neq C^{(w)} \quad (3.36-e)$$

basta elegir

$$B^{(s)} = C^{(w)} \quad (3.36-f)$$

ya que entonces se cumplen (c) y (d).

Existe al menos un par B y C que cumpla (3.36-a) y (3.36-e)? Sí, porque en A3-6 damos un ejemplo.

Resulta claro que salve que se elijan adecuadamente las reglas, los operadores B y C de (a) y (e) no representan al mismo observable.

Caben dos procedimientos:

1er. procedimiento. Sólo usar la regla 3.e-4C, esto es: Para el operador B sólo usar la regla "... hallar $B^{(w)}$..." (llamemos B al observable así descrito). Para el operador C sólo usar la regla "... hallar $C^{(w)}$..." (llamemos C al observable así descrito). Es claro que si se cumple (a) los observables B y C son diferentes, pese a (a).

2do. procedimiento. Describir al observable B tanto con los operadores B como C , de la siguiente manera: Para la descripción con B , usar la regla "... hallar $B^{(w)}$..."; para la descripción con C usar la regla "... hallar $C^{(w)}$..." donde $C^{(w)} = B^{(w)}$. Por otro lado, describir al observable C también con C ó B : Para la descripción con C usar la regla "... hallar $C^{(w)}$...", para la descripción con B , usar la regla "... hallar $B^{(s)}$..." donde $B^{(s)} = C^{(w)}$.

Con el 1er. procedimiento, los observables representados por los 2 operadores B y C son forzosamente diferentes, pese a $B \neq C$. Con el 2do. procedimiento, los dos operadores B y C tales que $B \neq C$ pueden representar al mismo observable, o no, según el par de reglas empleado. Resulta claro que los dos procedimientos son físicamente equivalentes, pero que el 2do. es muy complicado, y no lo emplearemos.

Aplicación: El operador $m \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} I_{(2)}$

En Secc. 3.c.-3, 3.e-4A y 3.e-9B₂ hemos discutido a $B = m \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} I_{(2)}$ como posible componente de $H = H_0 I_{(2)}$ como operador de energía. Es,

$$H_{(1)} I_{(2)} \approx m \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} I_{(2)}$$

y

$$(H_{(1)} I_{(2)})^{(w)} \neq (m \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} I_{(2)})^{(w)}$$

(3.36-g)

(para la 2a., ver A3-6. Por lo tanto, si nos atenemos al 1er. criterio

$H = H_{(1)I(2)}$ y $m_{(1)I(2)}^{\beta}$ representan a observables diferentes; como H representa a la energía, resulta que con la regla de Secc. 3.e-4C ("...hallar $(m_{(1)I(2)}^{\beta})^{(w)}$..."), $m_{(1)I(2)}^{\beta}$ no representa a la energía.

Para que $m_{(1)I(2)}^{\beta}$ representase a la energía, habría que recurrir a una de las pares de reglas del complicado procedimiento número 2. Este es factible pero artificial.

Como verificación, demostraremos en A3-6 que si se usa el primer procedimiento los valores medibles de $(m_{(1)I(2)}^{\beta})^{(w)}$ difieren del valor medible + p. de $H = H_{(1)I(2)}$.

3.f - OBSERVABLES. LOS OPERADORES QUE TRANSFORMAN \mathcal{W} EN \mathcal{E}^{sim} .

3.f-1) Simplificación del caso general 3.e:

Definiciones:

Operadores simétricos de 2a. clase: Son los operadores B de 2a. clase tales que para toda $\psi \in \mathcal{W}$ es $B\psi \in \mathcal{E}^{sim}$.

Sea B un operador simétrico de 2a. clase; llamaremos operador tipo \mathcal{W} simétrico al operador

$$B_{sim}^{(w)} = \Lambda_{\perp}^{w \in \mathcal{E}^{sim}} B \Lambda_{\perp}^{w \in \mathcal{E}^{sim}} \quad (3.37)$$

Es fácil demostrar que (cf. A3-7)

$$B_{sim}^{(w)} = \mathcal{E}^{sim} B^{(w)} \quad (3.38-a)$$

entonces, por (2.11)

$$B_{sim}^{(w)} = B^{(w)} \quad (3.38-b)$$

De (3.38-b) deducimos como en (3.e-7) que cambiar $B^{(w)}$ por $B_{sim}^{(w)}$ no introduce resultados físicos diferentes y no perdemos valores medibles.

Cómo se modifica la (3.25)?

de (3.25) y (3.38-a) deducimos que si en

$$B_{sim}^{(w)} \psi_b = b \psi_b \quad (3.39)$$

es

$$\psi_b \in \mathcal{E}^{sim}, \quad b \neq 0 \quad (3.40-a)$$

entonces

$$\psi_b \in \mathcal{W} \quad (3.40-b)$$

o sea

$$\{\psi_b^{(w)}\} = \{\psi_b \in \mathcal{E}^{sim}; b \neq 0\} \quad \text{más} \quad \{\psi_b \in \mathcal{E}^{sim}; \Lambda_{\perp}^{w \in \mathcal{E}^{sim}} \psi_b = \psi_b\} \quad (3.40-c)$$

La única desventaja de $B_{sim}^{(w)}$ respecto de $B^{(w)}$ es que puede existir

$\psi_b \notin \mathcal{W}$ con $b \neq 0$ (si $\psi_b \notin \mathcal{E}^{sim}$), de manera que aparentemente cuesta

más trabajo.

+ En la discusión precedente hemos supuesto B y C de 2a. clase; la discusión es similar si uno de los dos es de 1a. clase.

seleccionar las Ψ_b correspondientes a autoestados; pero en la práctica ese exceso de trabajo es muy pequeño ya que por simple inspección saltan a la vista las Ψ_b tales que $(\Psi_b)_{ij} = (\Psi_b)_{ji}$.

Como $\bigwedge_{i=1}^{w-\epsilon} z_{im}$ es más breve que $\bigwedge_{i=1}^{w\epsilon}$, resulta más simple usar $B_{sim}^{(w)}$ en lugar de $B^{(w)}$ cuando el operador de 2a. clase B es simétrico: Cuando B , operador de 2a. clase sea simétrica, lo reemplazaremos por $B_{sim}^{(w)}$ y no por $B^{(w)}$.

Además, como en (3.e-7), si A es de la. clase no se introducen resultados físicos diferentes si se usa $A_{sim}^{(w)}$. Es,

$$A_{sim}^{(w)} = A \quad (3.41)$$

3.f-2) Teorema sobre la pseudohermiticidad:

"Como en A3-4 se verifica que si B es simétrico de 2a. clase, siendo B pseudohermitiano en w es $B_{sim}^{(w)}$ pseudohermitiano en w ":

$$B \underset{w}{\sim} \bar{B} \implies B_{sim}^{(w)} \underset{w}{\sim} \bar{B}_{sim}^{(w)} \quad (3.42)$$

En cambio si $B_{sim}^{(w)} \underset{w}{\sim} \bar{B}_{sim}^{(w)}$ puede ser $B_{sim}^{(w)}$ $\bar{B}_{sim}^{(w)}$, lo cual no afecta la pseudohermiticidad.

3.g - DERIVACION RESPECTO DEL TIEMPO.

Como es usual definimos $\frac{dA}{dt}$ por

$$\left\langle \frac{dA}{dt} \right\rangle = \left\langle \frac{d}{dt} A \right\rangle \quad (3.43)$$

El resultado es* (cf. A3-8)

$$\frac{dA}{dt} \underset{w}{\sim} i[H, A] \quad (3.44)$$

y sólo puede reemplazarse la equivalencia escalar en w por una igualdad en w si se usan argumentos prácticos y de conveniencia; no con argumentos físicos (ob-
sérvese que todas las $\frac{dA}{dt}$ definidas por (3.44) dan los mismos valores medios).

Pero (como hemos hecho con el hamiltoniano) privilegiaremos arbitrariamente una de las soluciones de (3.44) para trabajar con mayor comodidad: Llamaremos derivada principal respecto del tiempo al operador⁺⁺

$$\frac{dA}{dt} = i[H, A] \quad (3.45)$$

La derivada principal está relacionada con las demás por

$$\frac{dA}{dt} \underset{w}{\sim} \frac{dA}{dt} \quad (3.46-a)$$

Motivo de la elección: Hemos visto la ventaja práctica de los operadores de la. clase sobre los de 2a.; en (A3-8) demostramos que si A es de la. clase, $\frac{dA}{dt}$ también lo es (y no puede asegurarse lo mismo para las restantes $\frac{dA}{dt}$).

Por otra parte, aunque B sea de 2a. clase, es (cf. A3-8): $\frac{dB}{dt} \underset{w}{\sim} \frac{dB}{dt}$ (3.46-b)

*Si $\partial A / \partial t = 0$

++Si la derivada es principal ponemos d/dt y no d/dt .

3.h - EL MOMENTO LINEAL:

Es el conocido operador

$$\begin{aligned} \vec{p} &\sim -i \frac{\partial}{\partial \vec{x}} && (\text{representación } \vec{x}^{\rightarrow}) && (3.47-a)^{**} \\ \vec{p} &= \vec{p}^{\circ} && (\quad " \quad \vec{p}^{\rightarrow}) && (3.47-b)^{**} \end{aligned}$$

que coincide con el usado por todos los autores.

Es trivial demostrar que:

A) \vec{p}^{\rightarrow} es un operador de la. clase.

B) $\overline{\vec{p}^{\rightarrow} \vec{p}^{\rightarrow}}$ (pseudohermitiano) (3.48-a)

C) \vec{p}^{\rightarrow} es una constante del movimiento:

$$-\frac{d\vec{p}}{dt} = 0 \quad (3.48-b)^{**}$$

Casi todo lo anterior es bien sabido.

Finalmente, (3.47) es consecuente con los resultados de teoría de campos (Cap.8).

3.i - EL MOMENTO ANGULAR.

3.i-1) El momento angular total.

Como es sabido^{1,17} el estudio de las rotaciones infinitesimales 4-dimensionales de Lorentz prevee el momento angular total

$$\vec{J} = \vec{x} \times \vec{p} + \frac{(\vec{\sigma}^{(1)} + \vec{\sigma}^{(2)})}{2} \quad (3.49)^{**}$$

Para aprovechar cálculos de spin $\frac{1}{2}$ es conveniente poner

$$\vec{J} = \vec{J}_{(1)} + \frac{1}{2} \vec{\sigma}^{(1)} = \vec{J}_{(2)} + \frac{1}{2} \vec{\sigma}^{(2)} \quad (3.50)$$

donde

$$\vec{J}_{(1)} = \vec{x} \times \vec{p} + \frac{1}{2} \vec{\sigma} \quad (3.51-a)^{**}$$

es el momento angular para spin $\frac{1}{2}$.

Es bien sabido que

$$[H, \vec{J}_{(1)}] = 0 \quad (3.51-b)^{**}$$

Además es evidente que

$$[H_{(1)}, \vec{\sigma}^{(2)}] = [H_{(2)}, \vec{\sigma}^{(1)}] = 0 \quad (3.51-c)$$

la. consecuencia de (3.51)[†]

$$[H_{(1)}, \vec{J}_{(1)}] = [H_{(2)}, \vec{J}_{(2)}] = 0 \quad (3.52-a)$$

con lo cual \vec{J} es de la. clase (cf.(3.33)); este resultado no es nuevo: está contenido en el bien conocido hecho de que \vec{J} genera las rotaciones infinitesimales.

$$\psi \in \mathcal{W} \rightarrow \vec{J}^k \psi \in \mathcal{W} \quad (3.52-b)$$

por (3.32),

$$\vec{J} = \vec{J}(\omega) \quad (3.52-c)$$

† El formalismo de EW presenta en la teoría de l"partícula" las complicaciones que son notorias por las páginas anteriores (y que no son peculiares de él sino inherentes a cualquier formalismo de componentes redundantes), pero frente a formalismos similares tiene la ventaja de poder utilizar resultados de spin $\frac{1}{2}$.

2a. consecuencia.

Es también trivial que \vec{J} es una constante del movimiento:

$$\frac{d\vec{J}}{dt} = 0 \quad (3.52-d)$$

Por otra parte \vec{J} conmuta con \vec{J} ; entonces como \vec{J} es hermitiano, es también pseudohermitiano (cf. Secc. 2.e):

$$\vec{J}^\dagger = \vec{J} \quad (3.53)$$

\vec{J} coincide con el momento angular de de Broglie⁹ y si se usa la representación (1.6) el momento angular de Kemmer¹⁵ se traduce en (3.49). Finalmente (3.49) es consecuencia con los resultados de la teoría de campos (Cap. 8).

3.1-2) EL spin.

A) EL OPERADOR TRADICIONAL.

La consecuencia natural de (3.49) es llamar spin a $\frac{1}{2}(\vec{\sigma}_1 + \vec{\sigma}_2)$; $\frac{1}{2}(\vec{\sigma}_1 + \vec{\sigma}_2)$ es el operador de spin de Belinfante⁴ y el de de Broglie⁹; con la representación (1.6) el operador de spin de Kemmer se traduce también en dicho operador; finalmente, el uso de $\frac{1}{2}(\vec{\sigma}_1 + \vec{\sigma}_2)$ como spin se ve aparentemente respaldado por el hecho bien conocido de que

$$\left(\frac{\sigma_{(1)}^3 + \sigma_{(2)}^3}{2} \right)^2 = \left(\frac{\sigma_{(1)}^3 + \sigma_{(2)}^3}{2} \right) \quad (3.54-a)^{**}$$

implica que $\frac{1}{2}(\vec{\sigma}_1 + \vec{\sigma}_2)$ tiene autovalores +1, 0, -1.

Desgraciadamente, más abajo veremos que $\frac{1}{2}(\vec{\sigma}_1 + \vec{\sigma}_2)$ es un operador de 2a. clase; por lo tanto: 1) El que sus autovalores sean +1, 0, -1 no garantiza que los valores medibles sean +1, 0, (-1) (cf. Secc. 3.e-4). 2) Al menos uno de los autoestados de la 3a. componente del spin no está dado por ningún autovector de $\frac{1}{2}(\vec{J}_1 + \vec{J}_2)$

B) $\frac{1}{2}(\vec{\sigma}_1 + \vec{\sigma}_2)$ ES DE 2a. CLASE.

B₁) 1a. demostración:

Verificar que viola (3.33).

B₂) 2a. demostración (por el absurdo):

Supongamos que para toda $\psi \in W$ sea $\psi = \frac{1}{2}(\vec{\sigma}_1 + \vec{\sigma}_2)\psi \in W \quad (3.54-b)$

Usando la representación (2.6) es fácil ver (A3-10) que $\psi \in W \Rightarrow$

$$\psi = \frac{1}{2}(\sigma_{(1)}^3 + \sigma_{(2)}^3)\psi =$$

$$= \begin{pmatrix} \psi_{11} & 0 & \frac{p(\psi_{11} - \psi_{33}) + p(\psi_{12} - \psi_{34})}{2m} & 0 \\ 0 & -\psi_{22} & 0 & \frac{p(\psi_{21} - \psi_{43}) + p(\psi_{24} - \psi_{31})}{2m} \\ \frac{p(\psi_{11} - \psi_{33}) + p(\psi_{12} - \psi_{34})}{2m} & 0 & \psi_{33} & 0 \\ 0 & \frac{p(\psi_{21} - \psi_{43}) + p(\psi_{24} - \psi_{31})}{2m} & 0 & -\psi_{44} \end{pmatrix} \psi \quad (3.54-c)^{**}$$

+Pero debe recordarse que los principios de la teoría de de Broglie difieren del esquema de Secc. 3.a por lo que la discusión que sigue no es aplicable al spin de de Broglie.

** $P_{\pm} = P \pm i P'$.

Por la hipótesis (3.54-b), Ψ satisface $\Psi = \bigwedge_{\perp}^{W \in \mathcal{L}} \Psi$; basta entonces comparar el elemento 14 de (2.63) con el de (3.54-c) para demostrar que

$$p_+ \Psi_{11} + p_- \Psi_{44} = 0 ; \quad (3.54-d)$$

con (2.9-b) se ve que (3.54-d) es una restricción sobre Ψ^I con lo cual hemos contradicho (3.54-b); en efecto: por la Secc. 2.f sabemos que si Ψ es arbitraria (con tal de pertenecer a \mathcal{W}), su parte Ψ^I es arbitraria, contra (3.54-d)

Por lo tanto, existe al menos una $\Psi \in \mathcal{W}$ tal que

$$v^2 + \frac{\sigma_{(1)}^3 + \sigma_{(2)}^3}{2} \Psi \notin \mathcal{W} \quad (3.55-a)$$

Siendo $\frac{1}{2}(\sigma_{(1)}^3 + \sigma_{(2)}^3)$ de 2a. clase sabemos que (cf. Secc. 3.e-4B) hay autoestados que no están representados por autovectores. Sin embargo, para mayor seguridad demostramos independientemente lo que sigue:

c) Al menos para ciertos valores de \vec{p} , ninguna de las autofunciones de $\frac{1}{2}(\sigma_{(1)}^3 + \sigma_{(2)}^3)$ correspondientes al autovalor +1 (ó -1) pertenece a \mathcal{W} .

En efecto: Sea

$$\frac{\sigma_{(1)}^3 + \sigma_{(2)}^3}{2} \mathbf{f}_s = s \mathbf{f}_s \quad (s = +1, 0, -1) \quad (3.55-b)$$

la ecuación de autovalores. Supongamos

$$p^2 = 0, \quad p^1 \neq 0, \quad p^3 \neq 0 \quad (3.55-c)$$

(lo cual es compatible con una medición de $\frac{1}{2}(\sigma_{(1)}^3 + \sigma_{(2)}^3)$). En A3=10 demostramos que para toda \mathbf{f}_{+1} (en \mathcal{E}) es

$$\mathbf{f}_{+1} \begin{pmatrix} f_{11} & 0 & f_{13} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ f_{31} & 0 & f_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.55-d)$$

Supongamos

$$\mathbf{f}_{+1} \in \mathcal{W} \quad (\mathbf{f}_{+1} \neq 0) \quad (3.55-e)$$

entonces $\mathbf{f}_{+1} = \bigwedge_{\perp}^{W \in \mathcal{L}} \mathbf{f}_{+1}$; igualando los elementos 14 y 32 de (2.63) (con $\Psi \rightarrow \mathbf{f}_{+1}$) y (3.55-d) es (teniendo en cuenta (3.55-c))

$$p^1 f_{+1,11} = 0 ; \quad p^1 f_{+1,33} = 0.$$

Pero como $p^1 \neq 0$ es

$$f_{+1,11} = f_{+1,33} = 0. \quad (3.55-f)$$

Volviendo a (2.63) resulta entonces

$$f_{+1,31} = f_{+1,13} = 0. \quad (3.55-g)$$

Entonces $\mathbf{f}_{+1} = 0$ contra (3.55-e); por lo tanto, si vale (3.55-c) (lo cual es lícito: la no convergencia de las autofunciones de p es solucionable vía autodiferenciales) es

$$\mathbf{f}_{+1} \notin \mathcal{W} \quad (\text{para toda } \mathbf{f}_{+1} \neq 0). \quad (3.56)$$

Análogamente para \mathbf{f}_{-1} ; en cambio, pueden existir $\mathbf{f}_0 \in \mathcal{W}$.

Como no pertenecen a \mathcal{W} , esas \mathbf{f}_{+1} no son estados, y menos, autoestados.

Por lo tanto, probar que existe un autovalor $S_z = +1$, no significa probar que existe un valor medible $\epsilon S_z = \pm 1$.

Por supuesto, cabe aún la esperanza (que se confirmará en D) que al usar $\left(\frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_z)\right)^{dim}$ se obtengan autofalores $S_z = \pm 1$ (los cuales sí correspondan a vectores que pertenecen a \mathcal{W}); entonces sí que $\epsilon \times 1 = \pm 1$ será valor medible.

La coincidencia casual del conjunto de los autovalores $+1, 0, -1$ de $\frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_z)$ con el conjunto de los autovalores $+1, 0, -1$ de $\frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_z)$ (y que son los físicamente esperados) es lo que ha ocultado hasta el presente el hecho de que los autovectores \dagger de $\frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_z)$ no son estados posibles del sistema. Si uno dice que el estado correspondiente a $S_z = +1$ es \int_{+1} y efectúa algún cálculo con ese falso estado, está errado (a nuestro parecer).

Cabe la pregunta: ¿Será realmente casual la coincidencia? No habrá un teorema por el cual siempre el espectro de un operador de 2a. clase B coincide con el de $B^{(dim)}$? La respuesta es: no hay tal teorema, pues existe el contraejemplo del operador $B = \Lambda^{II}$ discutido en A3-4c.

D) UN OPERADOR DE 1a. CLASE QUE REPRESENTA AL SPIN.

Es evidente que $\frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_z)$ es un operador simétrico de 2a. clase (cf. Secc. 3.f-1). Por la discusión anterior el operador $\frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_z)$ representa al spin tan correctamente como $\frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_z)$, pero con la ventaja de que:

- 1) (ventaja principal) por ser de 1a. clase, no se pierden autoestados si se buscan sus autovectores,
- 2) (secundaria) por ser de tipo \mathcal{W}^{sim} , todos sus autovectores pertenecientes a \mathcal{W}^{sim} con autovalor $\neq 0$ pertenecen a \mathcal{W} y son, por lo tanto, autoestados.

Ponemos, pues, $\vec{J}_{spin} = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_z)^{dim} = \Lambda^{I} \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_z) \Lambda^{I} \quad \mathcal{W} \in dim \quad (3.57)$

Para la 3a. componente sus autovectores $\Psi_S^{(\epsilon)}$ son tales que

$$\frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_z) \Psi_S = S \Psi_S \quad (3.58-a)$$

Como en Secc. 3.e-2 indicamos con

$$\Psi_{(\epsilon S)}$$

a los autoestados correspondientes al valor medible ϵS .

Por Secc. 3.e y 3.f los autoestados $\Psi_{(\epsilon S)}^{(\epsilon)}$ están formados por aquellas $\Psi_S^{(\epsilon)}$ que pertenecen a \mathcal{W}_S .

En (A3-11) demostramos que si $\Psi_S^{(\epsilon)} \in \mathcal{E}^{sim}$, es

$$S = +1, 0, -1; \quad (3.58-b)$$

* correspondientes p. ej. a $S = +1, p^2 = 0, p^1 \neq 0, p^3 \neq 0$.
 ++ indica el signo de la carga: $\epsilon = (\Psi_S^{(\epsilon)}, \Psi_S^{(\epsilon)})$.

Los autovectores son (en W_{sp}^p)⁺

$$\Psi_{+1}^{(+)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & p^3/2m & p_+/2m \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ p^3/2m & 0 & 0 & 0 \\ p_+/2m & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \Psi_{+1}^{(-)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -p^3/2m & 0 \\ 0 & 0 & -p_+/2m & 0 \\ -p^3/2m & -p_+/2m & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Psi_{0}^{(+)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & p_-/2m & -p^3/2m \\ 1 & 0 & p^3/2m & p_+/2m \\ p_-/2m & p^3/2m & 0 & 0 \\ -p^3/2m & p_+/2m & 0 & 0 \end{pmatrix}; \Psi_{0}^{(-)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -p_-/2m & -p^3/2m \\ 0 & 0 & p^3/2m & -p_+/2m \\ -p_-/2m & p^3/2m & 0 & 1 \\ -p^3/2m & -p_+/2m & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Psi_{-1}^{(+)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & p_-/2m & -p^3/2m \\ 0 & p_-/2m & 0 & 0 \\ 0 & -p^3/2m & 0 & 0 \end{pmatrix}; \Psi_{-1}^{(-)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -p_-/2m \\ 0 & 0 & 0 & p^3/2m \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -p_-/2m & p^3/2m & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(3.58-c)

En el mismo apéndice se demuestra que para S fijo, no hay otros autovectores independientes del par $\Psi_{S}^{(+)}$ y $\Psi_{S}^{(-)}$ donde $+1$ y -1 corresponden a los dos estados de la carga. Las $\Psi_{S}^{(\epsilon)}$ forman sistema completo en W_{sp}^p y son linealmente independientes; además son ortonormales respecto de (2.2):

$$(\Psi_{S}^{(\epsilon)}, \Psi_{S'}^{(\epsilon')}) = \epsilon \delta_{\epsilon\epsilon'} \delta_{SS'} \quad (3.58-d)$$

Recordando que si el autovalor es S y la carga ϵ el valor medible es ϵS , es evidente que los autoestados $\Psi_{S}^{(\epsilon)}$ de valor medible $T = \epsilon S$ y carga ϵ son

$$\left. \begin{aligned} \Psi_{(1)}^{(1)} &= \Psi_{1}^{(1)} & ; & & \Psi_{(1)}^{(-1)} &= \Psi_{-1}^{(-1)} \\ \Psi_{(0)}^{(1)} &= \Psi_{0}^{(1)} & ; & & \Psi_{(0)}^{(-1)} &= \Psi_{0}^{(-1)} \\ \Psi_{(-1)}^{(1)} &= \Psi_{-1}^{(1)} & ; & & \Psi_{(-1)}^{(-1)} &= \Psi_{1}^{(-1)} \end{aligned} \right\} \quad (3.58-e)$$

Queda por discutir una importante cuestión: El spin está conectado con las rotaciones para $\vec{p} = 0$, y es sabido que el estudio de las mismas conduce al operador $\frac{1}{2}(\vec{\sigma}_{(1)} + \vec{\sigma}_{(2)})$; parecería, pues, que nuestro operador de spin $\frac{1}{2}(\vec{\sigma}_{(1)} + \vec{\sigma}_{(2)})^{(w)}$ fuese inapropiado; pero no es así pues de (A3-11.1) y (A3-11.2) vemos que si $\vec{p} = 0$,

$$\frac{1}{2}(\vec{\sigma}_{(1)} + \vec{\sigma}_{(2)}) \Psi = \frac{1}{2}(\vec{\sigma}_{(1)} + \vec{\sigma}_{(2)})^{(w)} \Psi = \begin{pmatrix} \Psi_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\Psi_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Psi_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\Psi_{44} \end{pmatrix} \quad (3.59-a)$$

ver definición de W_{sp}^p en Seco. 2.0-3:

de manera que tanto $\frac{1}{2}(\vec{\sigma}_{(1)} + \vec{\sigma}_{(2)})$ como $\frac{1}{2}(\vec{\sigma}_{(1)} + \vec{\sigma}_{(2)})^{(W)}$ generan las rotaciones para $\vec{p} = 0$. Otra manera de expresar lo mismo es decir que esas rotaciones definen al operador \vec{J}_{spin} a menos de un $\Delta \vec{J}_{spin}$ que es tal que

$$\lim_{\vec{p} \rightarrow 0} \Delta \vec{J}_{spin} = 0. \quad (3.59-b)$$

Finalmente, a) tanto $\frac{1}{2}(\vec{\sigma}_{(1)} + \vec{\sigma}_{(2)})$ como $\frac{1}{2}(\vec{\sigma}_{(1)} + \vec{\sigma}_{(2)})^{(W)}$ son consecuentes con la teoría de campos, "fórmula 1" (Secc. 8.f-4); b) es trivial que $\frac{1}{2}(\vec{\sigma}_{(1)} + \vec{\sigma}_{(2)})$ es pseudohermitiano (es hermitiano y conmuta con $\begin{pmatrix} 0 & \\ & 2 \end{pmatrix}$); por lo tanto, también es pseudohermitiano $\frac{1}{2}(\vec{\sigma}_{(1)} + \vec{\sigma}_{(2)})^{(W)}$ (cf. (3.42)):

$$\frac{1}{2}(\vec{\sigma}_{(1)} + \vec{\sigma}_{(2)})^{(W)} \underset{W}{\sim} \frac{1}{2}(\vec{\sigma}_{(1)} + \vec{\sigma}_{(2)}) \quad (3.59-c)$$

3.1-3) El momento angular orbital.

De (3.49) se deduce:

a) Si se adopta como spin al operador de 2a. clase $\frac{1}{2}(\vec{\sigma}_{(1)} + \vec{\sigma}_{(2)})$ entonces el momento angular orbital es $\vec{x} \times \vec{p}$; como \vec{J} es de la. clase, $\vec{x} \times \vec{p}$ es de 2a. clase.

b) Si se adopta al operador de la. clase $\frac{1}{2}(\vec{\sigma}_{(1)} + \vec{\sigma}_{(2)})^{(W)}$ entonces el momento angular orbital es

$$\vec{J}_{orb} = (\vec{x} \times \vec{p})^{(W)}. \quad (3.60-a)$$

Si llamamos $\Delta \vec{J}$ al operador de 2a. clase

$$\Delta \vec{J} = \frac{1}{2}(\vec{\sigma}_{(1)} + \vec{\sigma}_{(2)})^{(W)} - \frac{1}{2}(\vec{\sigma}_{(1)} + \vec{\sigma}_{(2)}) \quad (3.60-b)$$

se deduce con ayuda de (3.52) que

$$\Delta \vec{J} = -(\vec{x} \times \vec{p})^{(W)} + (\vec{x} \times \vec{p}). \quad (3.60-c)$$

Es trivial que $\vec{x} \times \vec{p}$ es pseudohermitiano; por lo tanto, también lo es $(\vec{x} \times \vec{p})^{(W)}$ (cf. (3.42)):

$$(\vec{x} \times \vec{p})^{(W)} \underset{W}{\sim} (\vec{x} \times \vec{p}) \quad (3.60-d)$$

3.1) LA HELICIDAD.

Es

$$\vec{V} = \frac{(\vec{J}_{spin}) \cdot \vec{p}}{|\vec{p}|} = \frac{\frac{1}{2}(\vec{\sigma}_{(1)} + \vec{\sigma}_{(2)}) \cdot \vec{p}}{|\vec{p}|} = \left[\frac{\frac{1}{2}(\vec{\sigma}_{(1)} + \vec{\sigma}_{(2)}) \cdot \vec{p}}{|\vec{p}|} \right]^{(W)} \quad (3.61-a)$$

pero es bien sabido de la teoría de spin $\frac{1}{2}$ que

$$\left[H, \frac{1}{2}(\vec{\sigma}_{(1)} + \vec{\sigma}_{(2)}) \cdot \vec{p} \right] = 0 \quad (3.62) **$$

por lo tanto $\frac{1}{2}(\vec{\sigma}_{(1)} + \vec{\sigma}_{(2)}) \cdot \vec{p}$ conmuta con $H_{(1)}$ y $H_{(2)}$, por lo que es de la. clase (cf. (3.33)); entonces,

$\vec{V} = \bigwedge_{W \in W} \frac{1}{2}(\vec{\sigma}_{(1)} + \vec{\sigma}_{(2)}) \cdot \vec{p}$ $\bigwedge_{W \in W} \vec{V}$
 $\frac{1}{2}(\vec{\sigma}_{(1)} + \vec{\sigma}_{(2)}) \cdot \vec{p}$ son iguales en W (cf. (3.32)); por lo tanto, puede reemplazarse (3.61-a) por la expresión más simple

$$\vec{V} = \frac{1}{2}(\vec{\sigma}_{(1)} + \vec{\sigma}_{(2)}) \cdot \frac{\vec{p}}{|\vec{p}|} \quad (3.61-b)$$

Es trivial deducir que \vec{V} es pseudohermitiano;

(3.63-a)

finalmente, de (3.62) se deduce que el 2º m. de (3.61-b) es una constante del movimiento; por lo tanto también lo es el 1º:

$$\frac{dI}{dt} \approx \frac{\hbar c}{\omega} = 0$$

3.6) EL OPERADOR POSICIÓN HABITUAL.

En mecánica cuántica relativista es $\vec{x} = i \partial / \partial \vec{p}$ (representación p); en spin $\frac{1}{2}$ relativista (aproximación de una partícula) se usa a veces formalmente el mismo operador, aunque puede ser cuestionado, como es sabido.

Si procedemos análogamente y ponemos $\vec{x} = i \partial / \partial \vec{p}$ reocentramos (como era de esperar) el operador posición usado para spin 1 en formalismos similares a éste; pero es un operador simétrico de 2a. clase, por lo que podemos reemplazarlo por el operador de 1a. clase

$$\vec{x} = (i \frac{\partial}{\partial \vec{p}})^{(w)} = \bigwedge_{\perp} i \frac{\partial}{\partial p^i} \bigwedge_{\perp} \omega^{\epsilon^{iim}} \quad (3.64-a)$$

Como tanto $i \partial / \partial \vec{p}$ como $(i \partial / \partial \vec{p})^{(w)}$ tienen el mismo espectro (continuo), la importancia de reemplazar el primero por el segundo no está en obtener el espectro correcto de valores medibles sino en obtener el autoestado correcto asociado a cada valor medible. Además, para ambos, tratándose de espectro continuo las autofunciones debieran reemplazarse por las autodefinitivas.

Es trivial probar que \vec{x} es pseudohermitiano:

$$\overline{\vec{x}} \approx \frac{\hbar c}{\omega} \vec{x}. \quad (3.64-b)$$

Finalmente, como era de esperar,

$$[x^i, p^j] = \left[\bigwedge_{\perp} \omega^{\epsilon^{iim}} i \frac{\partial}{\partial p^i} \bigwedge_{\perp} \omega^{\epsilon^{iim}}, p^j \right] = \bigwedge_{\perp} \omega^{\epsilon^{iim}} \left[i \frac{\partial}{\partial p^i} p^j \right] \bigwedge_{\perp} \omega^{\epsilon^{iim}} \\ = \bigwedge_{\perp} \delta_{ij} = I \delta_{ij} \quad (3.64-c)$$

3.7) EL OPERADOR PARIDAD.

Sea $P^{(a)}$ el operador tal que

$$P^{(a)} \Psi_{1j}(x^0, \vec{x}) = \Psi_{1j}(x^0, -\vec{x}). \quad (3.65-a)^{**}$$

En la Secc. 6.b se considerará la transformación ante reflexión del campo Ψ ; comparando la ecuación (6.9) con (3.65), deducimos que el operador paridad para spin 1 en la teoría de una "partícula" es:

$$P^{(1)} = \eta_1 \gamma_0^{(1)} \gamma_0^{(2)} P^{(a)} \quad (3.65-b)$$

donde $\eta_1 = \pm 1$ está determinado por (6.10).

Como $[P^{(a)}]^2 = I \neq P^{(a)}$, $P^{(1)}$ no puede expresarse en la forma $P_H^{(1)} P_A^{(1)}$

donde $P^{(1)}$ sea el conocido operador paridad para spin $\frac{1}{2}$:

$$P^{(1/2)} = \eta \gamma_0 P^{(a)} \quad (3.65-c)^{**}$$

Este es una excepción a un comportamiento bastante general de los mesones de spin 1 descritos en el formalismo de BW: La de permitir expresar un ente asociado a spin 1 mediante una combinación simétrica que sólo incluya los correspondientes entes de spin $\frac{1}{2}$.

3.m - TRANSFORMACIONES PSEUDOUNITARIAS.

3.m-1) Definición

Sea U una transformación de los vectores de estado:

$$\Psi \rightarrow \Psi' = U\Psi \text{ (lineal)} \quad (3.66-a)$$

y de la forma del producto escalar,

$$(\Psi, \Psi) = \int \Psi^\dagger \gamma_0 \Psi d^3x \rightarrow (\Psi', \Psi') = \int \Psi'^\dagger (I_0 \gamma_0)' \Psi' d^3x ; \quad (3.66-b)$$

diremos que U es pseudounitaria si

$$(\Psi, \Psi) = (\Psi', \Psi') \text{ para todo } \Psi \in W. \quad (3.66-c)$$

(Ver XI, Secc. 3.a). Como en A2-3, se demuestra que U es pseudounitaria si y solo si

$$(\Psi, \Psi) = (\Psi', \Psi') \text{ para todo } \Psi, \Psi' \in W. \quad (3.66-d)$$

No detallaremos la más general de las transformaciones pseudounitarias posibles; impondremos algunas restricciones; éstas serán lo suficientemente fuertes como para que la complicación matemática no sea demasiado grande, pero lo suficientemente suaves como para que,

- 1) dejen traslucir la inusual libertad que las equivalencias permiten en este formalismo y,
- 2) incluyan una transformación tipo Foldy-Wouthuysen-Tani.

Por otra parte, como se verá en 3.m-4, gran parte de las transformaciones de los vectores de estado puede ser pseudounitaria: La restricción no se encuentra sobre la transformación de los vectores de estado sino sobre la forma del producto escalar en la nueva representación (ver más adelante); ello permitirá crear transformaciones que simultáneamente serán unitarias y pseudo-unitarias, como la de Foldy-Wouthuysen-Tani.

Nos restringiremos a las transformaciones tales que

$$\Psi'_{ij} = \Psi'_{ji} \quad (3.67-a)$$

o sea

$$\Psi' \in \mathcal{E}^{sim} \quad (3.67-b)$$

llamaremos representación de BW (=Bargmann-Wigner) a toda representación que cumple (3.67); por supuesto, con (3.67) omitiremos otras transformaciones de interés: Por ejemplo, la que nos permitiría pasar de la representación original de BW al formalismo de Sakata y Taketani (Secc. 1.d).

La condición inicial (2.3) se transforma en

$$\left. \begin{aligned} (H_0 I_0)' \Psi' &= (I_0 H_0)' \Psi' \text{ , con} \\ (H_0 I_0)' &= U H_0 I_0 U^{-1} ; \quad (I_0 H_0)' = U I_0 H_0 U^{-1} \end{aligned} \right\} \quad (3.68)$$

que define el espacio \mathcal{W} en la nueva representación (e, por brevedad, en \mathcal{W}') (Consideramos U como una transformación que "rota" la base dejando fijos los vectores: \mathcal{W}' es el mismo espacio que \mathcal{W} ; sólo varía la representación).

3.m-2) Condición necesaria y suficiente para que una transformación sea pseudo-unitaria.

Por (3.66)

$$(\Psi, \Phi) = (\Psi', \Phi') = \int (\Psi')^\dagger (I_{(1)} \gamma_{(2)}^\circ)' (U \Phi) dx = \int \Psi^\dagger U^\dagger (I_{(1)} \gamma_{(2)}^\circ)' U \Phi dx =$$

$$= \int \Psi^\dagger \left[\gamma_{(2)}^\circ U^\dagger (I_{(1)} \gamma_{(2)}^\circ)' U \right] \Phi$$

Como Ψ y Φ pertenecen a \mathcal{W} se cumple (3.66) si y sólo si

$$I \stackrel{\circ}{=} \gamma_{(2)}^\circ U^\dagger (I_{(1)} \gamma_{(2)}^\circ)' U \tag{3.69}$$

que es la condición pedida.

3.m-3) Transformaciones pseudo-unitarias restringidas.

Evidentemente (recordar (2.28)) la (3.69) se cumple si

$$I \stackrel{\circ}{=} \gamma_{(2)}^\circ U^\dagger (I_{(1)} \gamma_{(2)}^\circ)' U \tag{3.70}$$

Por la (3.70) ~~no necesariamente cumple la (3.69)~~; en efecto, si $\Psi \in \mathcal{W}$, $\gamma_{(2)}^\circ I \Psi$ no necesariamente pertenece a \mathcal{W} por lo que no se cumplen las hipótesis bajo las que (2.29-b) es válida. También son suficientes las igualdades más restrictivas.

$$I \stackrel{\circ}{=} \gamma_{(2)}^\circ U^\dagger (I_{(1)} \gamma_{(2)}^\circ)' U ; \tag{3.71}$$

$$I = \gamma_{(2)}^\circ U^\dagger (I_{(1)} \gamma_{(2)}^\circ)' U \tag{3.72}$$

Llamaremos transformaciones pseudo-unitarias restringidas a las que cumplen (3.67) y (3.72).

3.m-4) Transformaciones pseudo-unitarias restringidas unitarias.

Por (3.72) las transformaciones pseudo-unitarias son restringidas si

$$(I_{(1)} \gamma_{(2)}^\circ)' = U^{+1} \gamma_{(2)}^\circ U^{-1} \tag{3.73}$$

(consecuente con (XI, Secc. 3.a).

Obsérvese que más que una imposición sobre U , la (3.73) es una definición de $(I_{(1)} \gamma_{(2)}^\circ)'$; elle permite considerar el caso en que U es además unitaria:

$$U^{+1} = U ; \tag{3.74-a}$$

entonces,

$$(I_{(1)} \gamma_{(2)}^\circ)' = U \gamma_{(2)}^\circ U^\dagger ; \tag{3.74-b}$$

Reemplazando en (3.66-b) se tiene la forma del producto escalar en la nueva representación

$$(\Psi', \Phi') = \int \Psi'^{\dagger} (I_{(1)} \gamma_{(2)}^\circ)' \Phi' dx =$$

$$= \int \Psi'^{\dagger} (U \gamma_{(2)}^\circ U^\dagger)' \Phi' dx \tag{3.75}$$

Como es de esperar, es

$$\left[(I_{(1)} \gamma_{(2)}^\circ)' \right]^2 = I \tag{3.76}$$

Las propiedades algebraicas de las igualdades y equivalencias (Secc. 2.d) se trasladan a la nueva representación reemplazando donde el buen sentido lo indique,

$$\chi_{(2)}^0 \longrightarrow (I_{(2)} \chi_{(2)}^0)' \quad (3.77-a)$$

$$\tilde{W} \longrightarrow \tilde{W}' \quad (3.77-b)$$

$$\begin{matrix} \tilde{W} \\ \vdots \\ \tilde{W}' \end{matrix} \longrightarrow \begin{matrix} \tilde{W}' \\ \vdots \\ \tilde{W}'' \end{matrix} \quad \left. \vphantom{\begin{matrix} \tilde{W} \\ \vdots \\ \tilde{W}' \end{matrix}} \right\}$$

La invariancia de los valores medios (y por ende de los medibles) ante U implica que el transformado A' de A debe ser tal que

$$(\Psi, A\Psi) = (\Psi', A'\Psi')$$

o sea

$$U A U^+ \underset{\Psi'}{\overset{\Psi}{\sim}} A'$$

Pero además queremos que si Ψ es un autoestado de A , Ψ' sea autoestado de A' ; entonces la discusión de Secc. 3.e-10 muestra que es preferible reemplazar la equivalencia escalar por

$$U A U^+ = A' ; \quad (3.78-a)$$

la (3.78-a) se satisface si tenemos

$$A' = U A U^+ \quad (3.78-b)$$

pero sería lícito sustituir A' por cualquier operador C tal que

$$C \underset{W'}{\overset{W}{\sim}} A' ; \quad (3.78-c)$$

Al transformado A' dado por (3.78-b) lo llamaremos transformado principal de A ; salvo mención en contrario, sólo usaremos transformados principales.

Así como en (3.33), la condición inicial (3.68) implica que la condición necesaria y suficiente para que un operador A' sea de la clase es

$$\left[(H_{(2)} I_{(2)})', A' \right]_{\tilde{W}} = \left[(H_{(2)} I_{(2)})', A' \right] ; \quad (3.79)$$

Además, (cf. A3-12) el transformado de un operador de la clase es de la clase.

De manera similar a (2.40), el conjugado pseudohermitiano $\overline{A'}$ de A' , calculado en la nueva representación es

$$\overline{A'} = (I_{(2)} \chi_{(2)}^0)' A'^+ (I_{(2)} \chi_{(2)}^0)' ; \quad (3.80-a)$$

resulta entonces (cf. A3-12)

$$\overline{A'} = (\overline{A})' \quad (3.80-b)$$

como es de desear.

3.2 - UNA TRANSFORMACION TIPO FOLDY-WOUTHUYSEN-TANI.

3.2-1) Introducción.

La transformación de Foldy-Wouthuysen-Tani (FWT) para spin $\frac{1}{2}$ fue propuesta independientemente por Foldy y Wouthuysen¹¹ y por Tani^{27,28}; para la partícula

Libre es

$$U = \frac{m + \vec{\gamma} \cdot \vec{p} + \rho_0}{[2 \rho_0 (\rho_0 + m)]^{1/2}} \quad (3.81-a)^{**}$$

U es unitaria:

$$U^\dagger U = U U^\dagger = I. \quad (3.81-b)^{**}$$

Tiene por propiedad relevante la de desacepliar manifiestamente la ecuación de evolución de las soluciones de energía positiva y negativa¹¹, y la de mantener invariante una forma definida positiva, diferenciándose en este de las transformaciones de Lorentz⁶; puede ser generalizada al caso de la partícula interactuando con un campo electromagnético permitiendo obtener el límite no relativista de manera más correcta que con el viejo método de las componentes grandes y pequeñas¹¹. Además, la nueva representación es tal que sugiere nuevas observables¹¹ de interesantes propiedades.

Por ejemplo, se puede definir un operador posición media¹¹ \vec{X} , tal que en la nueva representación sea

$$\vec{X}' = \vec{X} \quad (3.82-a)^{**}$$

donde $\vec{X}' = i \partial / \partial \vec{p}$ (representación \vec{p}); entonces, en la representación original se obtiene (comparar con referencia 11),

$$\vec{X} = \vec{X} + \frac{i \vec{\gamma}}{2 \rho_0} - \frac{i (\vec{\gamma} \cdot \vec{p}) \vec{p}}{2 \rho_0^2 (\rho_0 + m)} + \frac{(\vec{p} \times \vec{\sigma})}{2 \rho_0 (\rho_0 + m)}. \quad (3.82-b)^{**}$$

El correspondiente operador posición media es

$$\vec{V} = \frac{d \vec{X}}{dt} = \frac{\vec{p}}{p_0} \left(\frac{\vec{H}}{p_0} \right); \quad (3.83)^{**}$$

\vec{V} es más satisfactorio que el operador velocidad $\vec{v} = d\vec{x}/dt = \vec{\alpha}$ de Dirac; mientras que los autovalores de v^k son ± 1 , los de V^k son $\pm p^k/p_0$ (según el signo de la energía) como es de desear.

Tiomme y Giambiagi¹² y Case⁸ obtuvieron independientemente transformaciones tipo FWT para spin 1 usando formalismos sin componentes redundantes; haremos lo propio en el formalismo de BW.

3.8-2) Preponemos una transformación pseudounitaria restringida unitaria.

Ensayemos

$$U = U_{(1)} U_{(2)} \quad (3.84)$$

donde U está dada por (3.81-a); evidentemente U cumple (3.67), y por (3.81-b),

U es unitaria:

$$U^\dagger = U_{(1)}^\dagger U_{(2)}^\dagger = U_{(1)}^{-1} U_{(2)}^{-1} = U^{-1}. \quad (3.85)$$

Para que esta transformación unitaria sea pseudounitaria restringida debe ser (cf. (3.74-b)) [definición de $(I \delta_{(1)}^0)$],

$$I_{(1)} \delta_{(1)}^0 = U_{(1)}^\dagger U_{(1)} = U_{(1)}^{-1} U_{(1)} = I_{(1)} \delta_{(1)}^0 \quad (3.86-a)$$

$$\text{donde } \delta_{(1)}^0 = U_{(1)}^\dagger \delta_{(1)}^0 U_{(1)} = \frac{m \delta_{(1)}^0 - \vec{\alpha} \cdot \vec{p}}{p_0} \quad (3.86-b)^{**}$$

es¹¹ el transformado de $\delta_{(1)}^0$ en la transformación de FWT para spin $\frac{1}{2}$.

En la nueva representación el producto escalar es (cf. (3.75))

$$(\Psi', \Psi') = \int \Psi'^{\dagger} \gamma_{(2)}^0 \Psi d^3x \quad ; \quad (3.87-a)$$

es (cf. Secc. 3.m)

$$(\Psi', \Psi') = (\Psi, \Psi) \quad (3.87-b)$$

3.m-3) La transformación propuesta es de tipo Foldy-Weuthuysen-Tani.

Debemos demostrar que U desdoble manifiestamente las soluciones de energía positiva y negativa⁺; procedemos como en el trabajo de Foldy y Weuthuysen para spin $\frac{1}{2}$ ¹¹. Sea

$$\Psi' = U \Psi \quad (3.88)$$

Descomponemos

$$\Psi = \Phi' + \chi' \quad (3.89)$$

donde

$$\left. \begin{aligned} \Phi' &= \frac{1}{2} (\mathbb{I} + \gamma_{(4)}^0) \Psi \\ \chi' &= \frac{1}{2} (\mathbb{I} - \gamma_{(4)}^0) \Psi \end{aligned} \right\} ; \quad (3.90)$$

entonces se puede demostrar que (cf. A3-13))

$$\Phi' = \Psi^{(+)} \quad (3.91-a)$$

es una solución de energía positiva en la nueva representación, y que

$$\chi' = \Psi^{(-)} \quad (3.91-b)$$

lo es de energía negativa.

Nota: Aparentemente (3.90) es tal que $\Phi'_{ij} \neq \Phi'_{ji}$; sin embargo, es $\Phi'_{ij} = \Phi'_{ji}$ ya que en la nueva representación la condición inicial es (cf. A3-14),

$$\gamma_{(4)}^0 = \gamma_{(2)}^0 \quad (3.92)$$

Entonces (3.90) implica $\Phi' = \frac{1}{2} \Psi' + \frac{1}{2} (\gamma_{(4)}^0 + \gamma_{(2)}^0) \Psi'$ que es claramente simétrica en los índices spinoriales, o sea

$$\Psi^{(+)} \in \mathcal{E}^{\Delta i m} \quad ; \quad (3.93a)$$

análogamente,

$$\Psi^{(-)} \in \mathcal{E}^{\Delta i m} \quad (3.93-b).$$

En spin $\frac{1}{2}$ es¹¹

$$H' = U H U^{\dagger} = \gamma_{(4)}^0 p_0 \quad (3.94) **$$

Entonces el transformado (principal) de nuestro hamiltoniano es (cf. (3.84) y (3.81 b)),

$$H^{\circ} = U_{(4)} U_{(2)} H_{(4)} U_{(4)}^{\dagger} U_{(2)}^{\dagger} = \gamma_{(4)}^0 I_{(2)} p_0 \quad (3.95-a)$$

Con ayuda de (3.10) obtenemos los operadores que proyectan \mathcal{W} sobre los estados de energía⁺ positiva y negativa:

$$\left[\wedge_{\pm}^{\omega^{(+)} \omega} \right] = \frac{1}{2} (\mathbb{I} + \gamma_{(4)}^0 I_{(2)}) ; \quad \left[\wedge_{\pm}^{\omega^{(-)} \omega} \right] = \frac{1}{2} (\mathbb{I} - \gamma_{(4)}^0 I_{(2)}) \quad (3.95-b)$$

⁺e, más propiamente, las de carga positiva y negativa.

Es trivial que la ecuación de evolución se transforma en

$$i \frac{\partial \Psi'}{\partial t} = H' \Psi' = \gamma_{(4)}^0 p_0 \Psi' \quad (3.96)$$

Combinando con (3.95-b) obtenemos que (3.96) se desdobra en

$$i \frac{\partial \Psi^{(+)'}}{\partial t} = + p_0 \Psi^{(+)'}$$

(3.97-a)

$$i \frac{\partial \Psi^{(-)'}}{\partial t} = - p_0 \Psi^{(-)'}$$

(3.97-b)

Por lo tanto, las soluciones de energía positiva y negativa están manifiestamente desacepladas, y la transformación propuesta es del tipo FWT si adoplamos como caracterización de la transformación FWT el que efectúe dicho desaceplamiento.

Pero también podemos caracterizar a una transformación de FWT por el hecho de que (al menos en spin $\frac{1}{2}$) anula para todo \vec{p} aquellas componentes de $\Psi_{ij}^{(+)'}$ que en la vieja representación son las "pequeñas componentes" del límite no relativista. (3.98)

Nuestra transformación para spin 1 cumple también esta 2a. caracterización, como se demostrará en Secc. 3.n-4.

Finalmente, en 3.n-9 demostraremos que también cumple la caracterización propuesta por Bellini y Giambiagi.

3.n-4) Representación explícita de $\Psi_{ij}^{(+)'}$

Usando la representación (2.6-a) de las γ^μ y procediendo como en Secc. 2.3-6 ($\delta_{ij}^0 = \epsilon_i \delta_{ij}$) se obtiene fácilmente que (3.95-b) implica

$$\Psi^{(+)'} = \begin{pmatrix} \Psi_{11}^{(+)'}, & \Psi_{12}^{(+)'}, & 0, & 0 \\ \Psi_{12}^{(+)'}, & \Psi_{22}^{(+)'}, & 0, & 0 \\ \hline 0, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & 0 \end{pmatrix} \quad (3.99-a)$$

$$\Psi^{(-)' } = \begin{pmatrix} 0, & 0, & 0, & 0 \\ \hline 0, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & \Psi_{33}^{(-)'}, & \Psi_{34}^{(-)'}, \\ 0, & 0, & \Psi_{34}^{(-)'}, & \Psi_{44}^{(-)'}, \end{pmatrix} \quad (3.99-b)$$

Cada una tiene explícitamente sólo 3 componentes independientes, (explicitando, pues, que se trata de partículas de spin 1). Las componentes que se anulan para todo \vec{p} en la representación de FWT son aquellas que en la antigua representación eran pequeñas en el límite no relativista, como ocurre en spin $\frac{1}{2}$.

Observamos además que para spin 1 esta transformación de FWT no sólo anula p. ej. para $\Psi^{(+)'}$ las componentes 33, 34, 43 y 44 asociadas predominantemente a $\Psi^{(-)'}$, sino que per añadidura anula las componentes redundantes 13, 14, 23, 24, 31, 41, 32 y 42.

Definamos

$$\Psi'^I = \bigwedge^I \Psi' \quad ; \quad \Psi'^{II} = \bigwedge^{II} \Psi' \quad (3.100)$$

(no confundir con $\Psi^{I'} = (\bigwedge^I \Psi)'$, $\Psi^{II'} = (\bigwedge^{II} \Psi)'$; entonces $\Psi^{(H)}$ es del tipo Ψ^{II} (comparar con Secc. 2.0-5).

3.0-5) La representación de FWT origina trivialmente una formulación sin componentes redundantes.

La condición inicial (3.92) implica

$$\Psi^{(H)'} \rightarrow \Psi^{II'} = 0 \quad (3.100-a)$$

Se ve en la representación anterior,

$$\Psi' = \begin{pmatrix} \Psi'_{11} & \Psi'_{12} & 0 & 0 \\ \Psi'_{12} & \Psi'_{22} & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \Psi'_{33} & \Psi'_{34} \\ 0 & 0 & \Psi'_{34} & \Psi'_{44} \end{pmatrix} \quad (3.100-b)$$

Se obtiene, pues, una formulación sin componentes redundantes si se define

$$\Psi' = \begin{pmatrix} \Psi'_1 \\ \vdots \\ \Psi'_6 \end{pmatrix} \quad (3.101-a)$$

con $\Psi'_1 = \Psi'_{11}$, $\Psi'_2 = \Psi'_{12}$, $\Psi'_3 = \Psi'_{22}$, $\Psi'_4 = \Psi'_{33}$, $\Psi'_5 = \Psi'_{34}$, $\Psi'_6 = \Psi'_{44}$;

La formulación propuesta viene dada desde el comienzo en una representación FWT, con

$$\Psi^{(+)} = \begin{pmatrix} \Psi'_1 \\ \Psi'_2 \\ \Psi'_3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \Psi^{(-)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \Psi'_4 \\ \Psi'_5 \\ \Psi'_6 \end{pmatrix} \quad (3.101-b)$$

$$\frac{\partial \Psi^{(\pm)'}}{\partial t} = \pm P_0 \Psi^{(\pm)'} \quad (3.101-c)$$

En la formulación propuesta la situación es pues idéntica a la de spin $\frac{1}{2}$; representación de FWT, salvo el número de componentes.†

3.0-6) Operadores prevección en la nueva representación.

De (2.58), (3.86) y (3.95),

†En este trabajo no emplearemos la formulación aquí propuesta. Queda, pues sobreentendido que cuando digamos representación de FWT nos referiremos en lo que sigue a la representación de FWT en la formulación BW (=Secc. 3.0-1, ..., 4.

$$\left(\bigwedge_{\perp}^{w \epsilon} \right)' = \frac{p_0}{4m} (\gamma_{(1)}^0 + \gamma_{(2)}^0) \left[\frac{i m (\gamma_{(1)}^0 + \gamma_{(2)}^0) - (\vec{L}_{(1)} + \vec{L}_{(2)}) \cdot \vec{p}}{p_0} \right]$$

$$\left(\bigwedge_{\perp}^{w \epsilon} \right)' = \bigwedge^I \left[\mathbb{I} - \frac{1}{2m} (\vec{\gamma}_{(1)} + \vec{\gamma}_{(2)}) \cdot \vec{p} \right]. \quad (3.102)$$

Es fácil demostrar que

$$\left(\tilde{\mathbb{I}} \right)' = \tilde{\mathbb{I}} \quad ; \quad (3.103)^+$$

entonces, de (2.65) se sigue que

$$\left(\bigwedge_{\epsilon}^{\epsilon_{sim}} \right)' = \bigwedge_{\epsilon}^{\epsilon_{sim}} \quad ; \quad \left(\bigwedge_{\epsilon}^{\epsilon_{ant}} \right)' = \bigwedge_{\epsilon}^{\epsilon_{ant}}. \quad (3.104)$$

Reemplazando en (2.72) se muestra que (cf. A3-15)

$$\left(\bigwedge^{w \epsilon} \right)' = \bigwedge^I \left\{ \left[\mathbb{I} - \frac{1}{2m} (\vec{\gamma}_{(1)} + \vec{\gamma}_{(2)}) \cdot \vec{p} \right] \bigwedge_{\epsilon}^{\epsilon_{ant}} + \frac{1}{2m} (\vec{\gamma}_{(1)} - \vec{\gamma}_{(2)}) \cdot \vec{p} \bigwedge_{\epsilon}^{\epsilon_{sim}} \right\}. \quad (3.105)$$

Los operadores que proyectan w sobre $w^{(\pm)}$ se transformaran a la nueva representación en (3.95-b).

3.n-7) Transformación de algunos observables ya conocidos.

En primer lugar, es trivial que

$$\left(\vec{p} \right)' = \vec{p} \quad (3.106)$$

Por otro lado, es evidente que si $B^{(w)}$ es el operador de tipo w asociado a B ,

$$B^{(w)} = \bigwedge_{\perp}^{w \epsilon} B \bigwedge_{\perp}^{w \epsilon}$$

su transformada (principal) es

$$B^{(w)'} = \left(\bigwedge_{\perp}^{w \epsilon} \right)' B \left(\bigwedge_{\perp}^{w \epsilon} \right)' \quad (3.107)$$

por lo que basta calcular B' .

Es sabido¹² que en spin $\frac{1}{2}$,

$$\vec{\sigma}' = U \vec{\sigma} U^{\dagger} = \vec{\sigma} + i \frac{\vec{\sigma} \times \vec{p}}{p_0} - \vec{p} \times \frac{[\vec{\sigma} \times \vec{p}]}{p_0(p_0+m)}; \quad (3.108)^{**}$$

además,

$$\frac{1}{2}(\vec{\sigma}'_{(1)} + \vec{\sigma}'_{(2)}) = \vec{\sigma}'_{(1)} + \vec{\sigma}'_{(2)} \quad (3.109)$$

Entonces el spin (3.57) se transforma en

$$\vec{J}_{spin}' = \left(\bigwedge_{\perp}^{w \epsilon} \right)' \left(\frac{\vec{\sigma}'_{(1)} + \vec{\sigma}'_{(2)}}{2} \right) \left(\bigwedge_{\perp}^{w \epsilon} \right)' \quad , \quad (3.110)$$

que debe combinarse con (3.105) y (3.109).

Análogamente la helicidad (3.61-b) se transforma en

$$\chi' = \frac{1}{w} \frac{1}{2} (\vec{\sigma}'_{(1)} + \vec{\sigma}'_{(2)}) \cdot \vec{p} / |\vec{p}| \quad (3.111)$$

Algo más complicada es la transformación del operador \vec{x}' de (3.64-a); esquemáticamente, sabemos que para spin $\frac{1}{2}$ es

$$\vec{x}' = U \left(\frac{\partial}{\partial \vec{p}} \right) U^{\dagger} = i \frac{\partial}{\partial \vec{p}} + M(\vec{p}) \quad ; \quad (3.112)^{**}$$

donde $M(\vec{p})$ es una matriz 4 x 4 que depende de \vec{p} pero no de $\partial / \partial \vec{p}$.

+ \mathbb{I} se define en Secc. 1.c.

Entonces,

$$\text{pero como } \left[U, \vec{p} \right] = 0 \text{ es}$$

$$\left[M_{(2)}(\vec{p}), U_{(1)} \right] = 0,$$

de donde

$$\begin{aligned} (i \frac{\partial}{\partial \vec{p}})' &= U_{(1)} U_{(2)} i \frac{\partial}{\partial \vec{p}} U_{(1)}^+ U_{(2)}^+ = U_{(1)} i \frac{\partial}{\partial \vec{p}} U_{(2)}^+ + M_{(2)}(\vec{p})' \\ &= i \frac{\partial}{\partial \vec{p}} + M_{(1)}(\vec{p}) + M_{(2)}(\vec{p}) \end{aligned} \quad (3.113-a)$$

Si indicamos con $(\vec{x}')_{(i)}$ al operador (3.112) perteneciente al espacio de los operadores que operan sobre $\Psi_{(i)}(\text{spin } \frac{1}{2})$, es

$$(i \frac{\partial}{\partial \vec{p}})' = (\vec{x}')_{(1)} + (\vec{x}')_{(2)} - i \frac{\partial}{\partial \vec{p}}; \quad (3.113-b)$$

con (3.107),

$$\vec{x}' = (\Lambda_{\perp}^{w\epsilon \text{ sim}})' \left[(\vec{x}')_{(1)} + (\vec{x}')_{(2)} - i \frac{\partial}{\partial \vec{p}} \right] (\Lambda_{\perp}^{w\epsilon \text{ sim}}) \quad (3.114)$$

Finalmente, de (3.60) obtenemos

$$\vec{J}'_{\text{orb}} = (\Lambda_{\perp}^{w\epsilon \text{ sim}})' \left[(\vec{x}')_{(1)} + (\vec{x}')_{(2)} - i \frac{\partial}{\partial \vec{p}} \right] (\Lambda_{\perp}^{w\epsilon \text{ sim}})' \times \vec{p}; \quad (3.115)$$

de (3.50),

$$\vec{J}' = \left[(\vec{x}')_{(1)} + (\vec{x}')_{(2)} - i \frac{\partial}{\partial \vec{p}} \right] \times \vec{p} + \frac{1}{2} (\vec{\sigma}'_{(1)} + \vec{\sigma}'_{(2)}) \quad (3.116)$$

y de (3.65), el operador paridad,

$$[P^{(i)}]' = \eta \left(\frac{m \gamma^0 - \vec{\alpha} \cdot \vec{p}}{\rho_0} \right)'_{(1)} \gamma^0_{(2)} P^{(i)} = \eta \gamma^0_{(1)} \left(\frac{m \gamma^0 - \vec{\alpha} \cdot \vec{p}}{\rho_0} \right)'_{(2)} P^{(i)} \quad (3.117)$$

3.2-8) Los operadores posición y velocidad media.

Recordando (3.82), lo más razonable parecería ser definir al operador posición media \vec{X} como aquel tal que $\vec{X}' = \vec{x} = i \frac{\partial}{\partial \vec{p}}$; pero entonces se tiene la desagradable sorpresa de que tal \vec{X} no sería pseudohermitiano; en efecto, usando (3.80-a) se obtiene que su conjugado pseudohermitiano es (cf. A3-16) se obtiene que su conjugado pseudohermitiano es

$$i \frac{\partial}{\partial \vec{p}} - i \frac{\vec{p}}{\rho_0} - i \left(\frac{m \gamma^0 - \vec{\alpha} \cdot \vec{p}}{2 \rho_0} \right)'_{(1)} \left(\frac{\vec{\alpha}}{\rho_0} \right)'_{(2)} \quad (3.118)$$

Entonces uno piensa corregir la dificultad redefiniendo

$$\vec{X}' = \left(i \frac{\partial}{\partial \vec{p}} + i \frac{\vec{p}}{\rho_0} \right) / 2$$

que es evidentemente pseudohermitiano; pero entonces nuestro operador posición sería (en la representación de FWI),

$$i \frac{\partial}{\partial \vec{p}} - \frac{i}{2} \frac{\vec{p}}{\rho_0} - i \left(\frac{m \gamma^0 - \vec{\alpha} \cdot \vec{p}}{2 \rho_0} \right)'_{(1)} \left(\frac{\vec{\alpha}}{\rho_0} \right)'_{(2)} \quad (3.119)$$

que siendo asimétrico en los índices spinoriales transforma $\Psi' \in W^i$ ($\dots \in \mathcal{E}^{\text{sim}^i}$) en $\Psi' = \chi' \Psi' \notin \mathcal{E}^{\text{sim}^i}$ ($\dots \notin W^i$); es decir, se trataría de un operador de 2a. clase, con todos sus inconvenientes (Secc. 3.e).

Por lo tanto, la última modificación que debemos hacer es reemplazar (3.119) por su operador asociado tipo W^i :

$$\vec{X}' = (\Lambda_{\perp}^{w\epsilon})' \left[i \frac{\partial}{\partial \vec{p}} - \frac{i}{2} \frac{\vec{p}}{\rho_0} - i \left(\frac{m \gamma^0 - \vec{\alpha} \cdot \vec{p}}{2 \rho_0} \right)'_{(1)} \left(\frac{\vec{\alpha}}{\rho_0} \right)'_{(2)} \right] (\Lambda_{\perp}^{w\epsilon})' \quad (3.120-a)$$

que es, en definitiva, nuestro operador posición media (en la nueva representación.)

Para pasar a la representación original, es mejor escribir previamente

$$\vec{X} = \frac{1}{2} (\Lambda_{\perp}^{w\epsilon})' \left[i \frac{\partial}{\partial \vec{p}} + i \frac{\vec{p}}{\rho_0} \right] (\Lambda_{\perp}^{w\epsilon})' \quad (3.120-b)$$

Entonces, con (3.80-b) es

$$\vec{X} = \frac{1}{2} \wedge_{\perp}^{w\epsilon} \left[\vec{q} + \vec{q} \right] \wedge_{\perp}^{w\epsilon} \quad (3.121-a)$$

donde \vec{q} es tal que

$$\vec{q} = \frac{\partial}{\partial \vec{p}} \quad (3.121-b)$$

Se obtiene (cf. A3-16),

$$\vec{q} = \vec{x}_{(1)} + \vec{x}_{(2)} = \vec{x} \quad (3.122-a)$$

$$= \vec{x} + i \left(\frac{\vec{x}_{(1)} + \vec{x}_{(2)}}{2p_0} \right) - i \frac{[(\vec{x}_{(1)} + \vec{x}_{(2)}) \cdot \vec{p}]}{2p_0^2 (p_0 + m)} \vec{p} + \frac{[\vec{p} \times (\vec{\sigma}_{(1)} + \vec{\sigma}_{(2)})]}{2p_0 (p_0 + m)} \quad (3.122-b)$$

Para (3.121-b), \vec{q} debe calcularse en la vieja representación:

$$\vec{q} = \delta_{(1)}^0 \vec{q} + \delta_{(2)}^0 = \delta_{(2)}^0 \vec{q} \delta_{(1)}^0 ;$$

entonces,

$$\vec{X} = \wedge_{\perp}^{w\epsilon} \left\{ \vec{x} + \frac{i \delta_{(1)}^0}{2p_0} - \frac{i (\vec{x}_{(1)} \cdot \vec{p}) \vec{p}}{2p_0^2 (p_0 + m)} + \frac{[\vec{p} \times (\vec{\sigma}_{(1)} + \vec{\sigma}_{(2)})]}{2p_0 (p_0 + m)} \right\} \wedge_{\perp}^{w\epsilon} \quad (3.123)$$

(De paso, queda redemostrado -ahora en la vieja representación- que $\frac{1}{2}(\vec{q} + \vec{q})$ es asimétrico en los índices spinoriales, y que por lo tanto, transforma W en un espacio W^{-}).

Puede observarse que (3.120-b) es una generalización posible del operador posición media para spin $\frac{1}{2}$ (3.82-a) pues en spin $\frac{1}{2}$, $i \partial / \partial \vec{p}$ es hermitiano respecto al producto escalar allí usado, de manera que $\frac{1}{2}(i \frac{\partial}{\partial \vec{p}} + i \frac{\partial}{\partial \vec{p}}) \rightarrow i \frac{\partial}{\partial \vec{p}}$ y no habiendo componentes redundantes, $\wedge_{\perp}^{w\epsilon} \rightarrow I$, de manera que (3.120-b) \rightarrow (3.82-a).

Nuestro operador posición media origina una velocidad media \vec{V} razonable (ver (3.83) para spin $\frac{1}{2}$): en A3-16 se demuestra que para spin 1,

$$\vec{V} = \frac{d\vec{X}}{dt} \sim \frac{\vec{p}}{p_0} \left(\frac{H}{p_0} \right) \quad (3.124-a)$$

de manera que los valores medios de \vec{V} son

$$\langle \vec{V} \rangle = \pm \left\langle \frac{\vec{p}}{p_0} \right\rangle \quad (3.124-b)$$

según el signo de la energía (o mejor, de la carga).

Caso ⁸ obtuvo anteriormente un operador posición media y otro velocidad media para spin 1, pero trabajando en el formalismo de Sakata y Taketani.

3.2-9) Conexión con los trabajos de Bollini y Giambiagi.

Bollini y Giambiagi ^{13,6} demostraron que hay una conexión entre las transformaciones de Lorentz L_p^S que reducen \vec{p} a cero ⁺, y las transformaciones U_p^S de FWT; la correspondencia es, para spin $\frac{1}{2}$,

⁺ s = spin; p = momento

Lorentz		FWT	
$\xi_\mu = (\xi_0, -\vec{\xi})$	↔	$\beta_\mu = (\xi_0 = \beta, \vec{\xi})^+$	
$p^\mu = (p^0, \vec{p})$	↔	$q_\mu = (m, \vec{p})$	
métrica indefinida	↔	métrica definida positiva	
$\delta^\mu \rho_\mu \Psi = m \Psi$	↔	$\beta_\mu q_\mu \Psi = E \Psi$	(3.125-a) **

Se demuestra entonces la correspondencia,

$$I_p^{\frac{1}{2}} \longleftrightarrow U_p^{\frac{1}{2}} ; \quad (3.125-b) **$$

para spin mayor que un medio, en lugar de demostrar

$$I_p^s \longleftrightarrow U_p^s \quad (3.126) **$$

se usa (3.126) como definición de U_p^s ; al efecto, se procede así: Partiendo del I_p^s conocido, se lo representa con ayuda de los elementos de la columna "Lorentz" de (3.125); a continuación, se reemplaza cada uno de esos elementos por su correspondiente en la columna FWT, y al operador así construido se lo llama Transformación de FWT para spin s. En el trabajo de Bollini y Giambiagi se aplicó dicho procedimiento en el formalismo de Dirac-Schwinger.

Es fácil ver que en el formalismo de BW el procedimiento citado conduce precisamente a nuestra transformación de FWT (3.84). Para ello basta tener presente que (Cap. 6) en el formalismo de BW la transformación de Lorentz L^1 para spin 1 se puede poner,

$$L^1 = L_{(1)} \frac{1}{2} U_{(2)} \frac{1}{2} ; \quad (3.127)$$

entonces el procedimiento de Bollini y Giambiagi conduciría a definir

$$U^1 = U_{(1)} \frac{1}{2} U_{(2)} \frac{1}{2} \quad (3.128)$$

que coincide con nuestra (3.84).

En el trabajo de Bollini y Giambiagi se demuestra que para spin 1 su transformación de FWT mantiene invariante al producto escalar positivo definido

$$U_\mu^* U_\mu = U_\mu^* U_\mu \quad (3.129) **$$

donde U^μ es el 4-vector de Proca (ecuación (1.7')). Como verificación de (3.84) podemos demostrar que nuestra transformación de FWT también cumple (3.129).

En efecto: La conexión¹⁷

$$\Psi = \frac{1}{2m} U_\mu \gamma^\mu \gamma^5 B^{-1} + \frac{i}{4m} G_{\mu\nu} \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^5 B^{-1} \quad (3.130) **$$

entre la Ψ de BW y las $U_\mu, G_{\mu\nu}$ de Proca es invariante en forma ante un cambio de representación. Por lo tanto las ecuaciones (7.9-a) y (7.10-a) que demostraremos más adelante usando (3.130) valen tanto en la representación original como en la de FWT; pero de esas ecuaciones se deduce fácilmente que,

$$U_\mu^* U_\mu = \Psi (\delta_{(0)}^0 \delta_{(0)}^0 + \delta_{(1)}^5 \delta_{(1)}^0 \delta_{(2)}^5 \delta_{(2)}^0) \Psi = \Psi^+ (I + \delta_{(1)}^5 \delta_{(2)}^5) \Psi \quad (3.131)$$

¹⁷Por supuesto, estas β_μ no son las de ecuación (1.5).

De la invariancia en forma de las (3.130) se deduce que en la representación de FWT será

$$U_{\mu}^{\dagger} U_{\mu} = U^{\dagger} \left[\mathbb{I} + (\delta_{(0)}^5 \delta_{(2)}^5)' \right] U \quad (3.132)$$

Pero nuestra transformación (3.84) no sólo es pseudounitaria, sino también unitaria; por lo tanto, los segundos miembros de (3.131) y (3.132) son iguales; por lo tanto, nuestra transformación cumple (3.129).

Complemento.

Podemos trasladar directamente al formalismo de BW la definición⁶ de transformación de FWT que transforma \vec{p}_1 en \vec{p}_2 :

$$U(\vec{p}_1/\vec{p}_2) = U(\vec{p}_2)^{-1} U(\vec{p}_1) \quad (3.133)^{**}$$

(que, en el trabajo de Bollini y Giambiagi es sugerida directamente por la correspondencia con la transformación de Lorentz).

Es Trivial que,

$$U(\vec{p}_1/\vec{p}_2) = U_{(1)}(\vec{p}_1/\vec{p}_2) U_2(\vec{p}_1/\vec{p}_2). \quad (3.134)$$

De la misma manera, se puede trasladar la definición de transformación de Cini-Toushek dada por Bollini y Giambiagi,

$$C(\vec{p}) = U^{-1}(\infty) U(\vec{p}) \quad (3.135a)^{**}$$

y el resultado es,

$$C(\vec{p}) = C_0(\vec{p}) C_{(2)}(\vec{p}). \quad (3.135-b)$$

+Aquí $U(\vec{p})$ es la U de FWT escrita en la representación \vec{p} , con la variable \vec{p} .

CAPITULO CUARTO

EL DESARROLLO EN ONDAS PLANAS.

CUESTIONES CONEXAS.

4.a - INTRODUCCION.

Nuestro objetivo es efectuar el desarrollo en ondas planas para spin 1 y $m \neq 0$ procurando:

- 1) paralelizar el desarrollo usual en spin $\frac{1}{2}$;
- 2) representar los spinores $u_{\pm}(\mathbf{r}, \vec{p})$ de spin 1 mediante una combinación de los de spin $\frac{1}{2}$, ya que entonces cálculos para spin 1 podrán ser hechos mediante simple utilización de cálculos ya hechos en spin $\frac{1}{2}$.

A efectos de notación y de posterior utilización, damos el siguiente,

RESUMEN DEL DESARROLLO EN ONDAS PLANAS PARA SPIN $\frac{1}{2}$:

Es bien conocido que

$$\begin{aligned} \psi(\mathbf{x}) &= \psi^{(+)}(\mathbf{x}) + \psi^{(-)}(\mathbf{x}) \\ \psi^{(+)}(\mathbf{x}) &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sum_{\epsilon} \int \frac{d^3 p}{V_{2p_0}} a(\mathbf{x}, \vec{p}) u_{+}(\mathbf{x}, \vec{p}) e^{-i p_0 x^0 + i \vec{p} \cdot \vec{x}} \\ \psi^{(-)}(\mathbf{x}) &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sum_{\epsilon} \int \frac{d^3 p}{V_{2p_0}} b(\mathbf{x}, -\vec{p}) u_{-}(\mathbf{x}, +\vec{p}) e^{i p_0 x^0 + i \vec{p} \cdot \vec{x}} \end{aligned} \quad (4.1) **$$

donde $\epsilon = \pm 1$ describe la polarización⁺, $p_0 = + \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$ y las cuatro $u_{\pm}(\mathbf{x}, \vec{p})$ posibles para un dado \vec{p} , son linealmente independientes.

Si

$$H(\vec{p}) = \vec{p} \cdot \vec{\alpha} + \beta m ; \quad \not{p} = p_{\mu} \gamma^{\mu} \quad (4.2) **$$

y

$$\epsilon = \pm 1 \quad (4.3) **$$

es

$$H(\vec{p}) u_{\epsilon}(\mathbf{x}, \vec{p}) = \epsilon m u_{\epsilon}(\mathbf{x}, \vec{p}) \quad (4.4-a) **$$

o lo que es lo mismo,

$$\not{p} u_{\epsilon}(\mathbf{x}, \vec{p}) = \epsilon m u_{\epsilon}(\mathbf{x}, \vec{p}). \quad (4.4-b) **$$

Además, (4.1) equivale a

$$\psi^{(\epsilon)}(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sum_{\epsilon'} \int \frac{d^3 p}{V_{2p_0}} a_{\epsilon'}(\mathbf{x}, \vec{p}) u_{\epsilon'}(\mathbf{x}, \vec{p}) e^{-i \epsilon' p_0 x^0 + i \vec{p} \cdot \vec{x}} \quad (4.1'-a) **$$

si

$$a_{+}(\mathbf{x}, \vec{p}) = a(\mathbf{x}, \vec{p}) ; \quad a_{-}(\mathbf{x}, \vec{p}) = b^{*}(\mathbf{x}, \vec{p}). \quad (4.1'-b) **$$

Es

$$u_{\epsilon}^{+}(\mathbf{x}, \vec{p}) u_{\epsilon'}(\mathbf{x}', \vec{p}) = 2p_0 \delta_{\epsilon\epsilon'} \delta_{\mathbf{r}\mathbf{r}'} ; \quad (4.5) **$$

$$\bar{u}_{\epsilon}(\mathbf{x}, \vec{p}) u_{\epsilon'}(\mathbf{x}', \vec{p}) = \epsilon 2m \delta_{\epsilon\epsilon'} \delta_{\mathbf{r}\mathbf{r}'} \quad (4.6-a) **$$

$$\bar{u}_{+}(\mathbf{x}, \vec{p}) u_{-}(\mathbf{x}', -\vec{p}) = \bar{u}_{-}(\mathbf{x}', \vec{p}) u_{+}(\mathbf{x}, -\vec{p}) = 0. \quad (4.6-b) **$$

Puede ponerse

⁺Por ejemplo: las $u_{\pm}(\mathbf{x}, \vec{p})$ pueden ser autofunciones de la helicidad $\frac{1}{2} \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{|\vec{p}|}$ con autovalor $\pm 1/2$ (definición "B" dada en A.4-1).

$$u_{\xi}(x, \vec{p}) = \frac{1}{\sqrt{2m(m+p)}} (m + p_0 + \vec{\xi} \cdot \vec{\alpha} \cdot \vec{p}) u_{\xi}(x, 0) \quad (4.7)**$$

donde las $u_{\xi}(x, 0)$ cumplen las (4.2), ..., (4.6) con $\vec{p} = 0$; $\left[\begin{array}{l} p. \text{ ej.} \\ H(0) u_{\xi}(x, 0) = m \beta u_{\xi}(x, 0) = \xi u_{\xi}(x, 0) \end{array} \right]. \quad (4.8)**$

En A.4-1 explicitamos las dos definiciones (A y B) de r que usaremos en lo que sigue.

Es usual definir,

$$u(x, \vec{p}) = u_+(x, \vec{p}) \quad ; \quad v(x, \vec{p}) = u_-(x, -\vec{p}) \quad (4.9)**$$

que también son linealmente independientes entre sí. Entonces $(px = p^0 x^0 - \vec{p} \cdot \vec{x})$,

$$\begin{aligned} \psi(x) &= \psi^{(+)}(x) + \psi^{(-)}(x) \\ \psi^{(+)}(x) &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sum_{(\vec{r})} \int \frac{d^3x}{\sqrt{2p_0}} a(r, \vec{p}) u(r, \vec{p}) e^{i p x} \\ \psi^{(-)}(x) &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sum_{(\vec{r})} \int \frac{d^3x}{\sqrt{2p_0}} b^*(r, \vec{p}) v(r, \vec{p}) e^{-i p x} \end{aligned} \quad (4.10)**$$

Es,

$$\not{p} u(x, \vec{p}) = m u(x, \vec{p}) \quad ; \quad \not{p} v(x, \vec{p}) = -m v(x, \vec{p}) \quad ; \quad (4.11-a)**$$

$$\bar{u}(x, \vec{p}) \not{p} = m \bar{u}(x, \vec{p}) \quad ; \quad \bar{v}(x, \vec{p}) \not{p} = -m \bar{v}(x, \vec{p}) \quad ; \quad (4.11-b)**$$

$$u^+(x, \vec{p}) u(x', \vec{p}') = 2 \delta_{\vec{p}, \vec{p}'} \quad ; \quad v^+(x, \vec{p}) v(x', \vec{p}') = 2 p_0 \delta_{\vec{p}, \vec{p}'} \quad ; \quad (4.12-a)**$$

$$v^+(x, \vec{p}) u(x', -\vec{p}') = u^+(x, \vec{p}) v(x', -\vec{p}') = 0 \quad ; \quad (4.12-b)**$$

$$\bar{u}(x, \vec{p}) u(x', \vec{p}') = 2m \delta_{\vec{p}, \vec{p}'} \quad ; \quad \bar{v}(x, \vec{p}) v(x', \vec{p}') = -2m \delta_{\vec{p}, \vec{p}'} \quad ; \quad (4.13-a)**$$

$$\bar{v}(x, \vec{p}) v(x', \vec{p}') = \bar{v}(x, \vec{p}) u(x', \vec{p}') = 0 \quad ; \quad (4.13-b)**$$

$$\sum_{\vec{r}} \left[u_{\xi}(x, \vec{p}) \bar{u}_{\eta}(x, \vec{p}') - v_{\xi}(x, \vec{p}) \bar{v}_{\eta}(x, \vec{p}') \right] = 2m \delta_{\xi\eta} \quad ; \quad (4.14)**$$

$$\sum_{\vec{r}} \left[\bar{u}(x, \vec{p}) u(x, \vec{p}) - \bar{v}(x, \vec{p}) v(x, \vec{p}) \right] = 8m. \quad (4.15)**$$

Los operadores proyección Λ_{\pm} tales que

$$\begin{aligned} \Lambda_{+} u &= u & ; & \quad \Lambda_{+} v = 0 \\ \Lambda_{-} v &= v & ; & \quad \Lambda_{-} u = 0 \end{aligned} \quad (4.16)**$$

cumplen

$$\Lambda_{+} = \frac{p + m}{2m} = \frac{1}{2m} \sum_{\vec{r}} u(x, \vec{p}) \bar{u}(x, \vec{p}) \quad (4.16-b)**$$

$$\Lambda_{-} = \frac{m - p}{2m} = \frac{1}{2m} \sum_{\vec{r}} v(x, \vec{p}) \bar{v}(x, \vec{p})$$

4. b - LAS BASES U_{\pm}, U_{F}, \dots QUE SUSTIENDEN LOS ESPACIOS SPINORIALES

EL CORRESPONDIENTE DESARROLLO EN ONDAS PLANAS DE UNA SOLUCION DE LAS ECUACIONES DE EW.

4. b-1) Bases para los espacios spinoriales.

Para la definición de dichos espacios, consultar Secc. 2.c-3, 2.c-4, 2.f-2 y 2.f-3.

Sea Γ un parámetro

$$\Gamma = -2, 0, 2 \quad (4.17)$$

que posteriormente estará conectado con la polarización de los mesones vectoriales⁺ la cual se discute en A.4-2. Recordar $r, s = \pm 1, \epsilon = \pm$.

Defino los 6 spinores

$$U_{\epsilon}(\Gamma = r + s, \vec{p}) = \frac{1}{2\sqrt{|\Gamma|!} m} \left[u_{\epsilon^{(1)}}(r, \vec{p}) u_{\epsilon^{(2)}}(s, \vec{p}) + u_{\epsilon^{(1)}}(s, \vec{p}) u_{\epsilon^{(2)}}(r, \vec{p}) \right] \quad (4.18-a)$$

o sea,

$$\left. \begin{aligned} U_{+}(2, \vec{p}) &= \frac{1}{\sqrt{2} m} u_{+(1)}(1, \vec{p}) u_{+(2)}(1, \vec{p}) \\ U_{+}(0, \vec{p}) &= \frac{1}{2\sqrt{m}} \left[u_{+(1)}(1, \vec{p}) u_{+(2)}(-1, \vec{p}) + u_{+(1)}(-1, \vec{p}) u_{+(2)}(1, \vec{p}) \right] \\ U_{+}(-2, \vec{p}) &= \frac{1}{\sqrt{2} m} u_{+(1)}(-1, \vec{p}) u_{+(2)}(-1, \vec{p}) \\ U_{-}(2, \vec{p}) &= \frac{1}{\sqrt{2} m} u_{-(1)}(1, \vec{p}) u_{-(2)}(1, \vec{p}) \\ U_{-}(0, \vec{p}) &= \frac{1}{2\sqrt{m}} \left[u_{-(1)}(1, \vec{p}) u_{-(2)}(-1, \vec{p}) + u_{-(1)}(-1, \vec{p}) u_{-(2)}(1, \vec{p}) \right] \\ U_{-}(-2, \vec{p}) &= \frac{1}{\sqrt{2} m} u_{-(1)}(-1, \vec{p}) u_{-(2)}(-1, \vec{p}) \end{aligned} \right\} \quad (4.18-b)$$

Defino además los otros 4 spinores⁺⁺

$$U_{\mathcal{F}}(r, s, \vec{p}) = \frac{1}{2\sqrt{|\Gamma|!} m'} \left[u_{\mathcal{F}^{(1)}}(r, \vec{p}) u_{\mathcal{F}^{(2)}}(s, \vec{p}) + u_{\mathcal{F}^{(1)}}(s, \vec{p}) u_{\mathcal{F}^{(2)}}(r, \vec{p}) \right]. \quad (4.19)$$

Utilizando el hecho de que las $u_{\epsilon}(r, \vec{p})$ de spin $\frac{1}{2}$ son linealmente independientes entre sí, es fácil demostrar que los 10 spinores (4.18) y (4.19) son linealmente independientes; como la dimensión de $\mathcal{C}_{s,p}^{sim}$ es 10, se deduce que el conjunto de los 10 spinores $U_{\epsilon}(\Gamma, \vec{p}), U_{\mathcal{F}}(r, s, \vec{p})$ subtienden $\mathcal{C}_{s,p}^{sim}$ (forman base).

Usando (2.48) y (4.4) es inmediato que

$$\bigwedge_{\mathcal{F}}^{w\epsilon} (\vec{p}) U_{\epsilon}(\Gamma, \vec{p}) = U_{\epsilon}(\Gamma, \vec{p}) \quad ; \quad \bigwedge_{w}^{\mathcal{F}\epsilon} (\vec{p}) U_{\epsilon}(\Gamma, \vec{p}) = 0; \quad (4.20-a)$$

$$\bigwedge_{w}^{\mathcal{F}\epsilon} (\vec{p}) U_{\mathcal{F}}(r, s, \vec{p}) = U_{\mathcal{F}}(r, s, \vec{p}) \quad ; \quad \bigwedge_{\mathcal{F}}^{w\epsilon} (\vec{p}) U_{\mathcal{F}}(r, s, \vec{p}) = 0; \quad (4.20-b)$$

por lo tanto, los 6 spinores $U_{\epsilon}(\Gamma, \vec{p})$ subtienden $\mathcal{W}_{s,p}^{+++}$, mientras que

+P.ej. las $U_{\pm}(\Gamma, p)$ pueden ser autofunciones de la helicidad (Secc. 3.j) con autovalores $\Gamma/2$ (definición B de A.4-2).

++A diferencia de ϵ , el subíndice \mathcal{F} no toma valores numéricos; meramente expresa que (como se verá más adelante) las $U_{\mathcal{F}}$ subtienden el subespacio $\mathcal{F}_{s,p}$.

+++Expresar la parte spinorial U de Ψ mediante productos de spinores u de spin $\frac{1}{2}$ no es nuevo; una vez desarrollada esta sección hemos hallado que de Broglie⁹ (cap VII, §5) expresa la onda monocromática Ψ de spin máximo=1 así:

$$\Psi_{ij}(x) = \frac{\Psi_i(x) \Psi_j'(x)}{e^{i \vec{p} \cdot \vec{x}}}$$
 donde Ψ y Ψ' son ondas monocromáticas de spin $\frac{1}{2}$. Esta relación de de Broglie es esencialmente igual a nuestra (4.18) salvo la simetrización (con lo que elimina (sigue al pie de la pág. sig.)

los 4 spinores $u_{\pm}(\mathbf{r}, \mathbf{s}, \vec{p})$ subtienden el subespacio complementario (en $\mathcal{E}_{sp}^{sim} \Gamma_{sp}^P$) (recordar fig. 2-3).

Como el espacio spinorial de interés físico es W_{sp}^P , resulta que los 6 spinores de interés físico son los (4.18). Usando los operadores proyección $\Lambda_{\pm}^{W^{(2)W}}$ definidos en (3.10), es trivial demostrar que las $u_{+}(\mathbf{r}, \vec{p})$ subtienden $W_{sp}^{(+P)}$ y las $u_{-}(\mathbf{r}, \vec{p})$ subtienden $W_{sp}^{(-P)}$. Obsérvese una vez más que la dimensión spinorial de W , $W^{(+)}$ y $W^{(-)}$ es la que físicamente habría que esperar (respectivamente 6, 3 y 3).

Por completitud mencionemos que \mathcal{E}_{sp}^{ant} es subtendido por los 6 spinores que se obtienen reemplazando en las definiciones (4.18) y (4.19) de $u_{\pm}(\mathbf{r}, \vec{p})$ y $u_{\pm}(\mathbf{r}, \mathbf{s}, \vec{p})$ las sumas por restas. Con esto queda completa una base para \mathcal{E}_{sp}° .

4.b-2) Desarrollo de $\Psi(\mathbf{x})$ de Bargmann-Wigner en ondas planas.

Usando la base $u_{\pm}(\mathbf{r}, \vec{p})$ para los espacios spinoriales, es trivial obtener que toda Ψ que cumple las ecuaciones de BW es tal que (cr. A4-3)

$$\begin{aligned} \Psi(\mathbf{x}) &= \Psi^{(+)}(\mathbf{x}) + \Psi^{(-)}(\mathbf{x}) \\ \Psi^{(+)}(\mathbf{x}) &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sum_{\mathbf{r}} \int \frac{d^3 p}{\sqrt{2p_0}} a(\mathbf{r}, \vec{p}) u_{+}(\mathbf{r}, \vec{p}) e^{-i p^{\circ} x^{\circ} + i \vec{p} \cdot \vec{x}} \\ \Psi^{(-)}(\mathbf{x}) &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sum_{\mathbf{r}} \int \frac{d^3 p}{\sqrt{2p_0}} b^*(\mathbf{r}, \vec{p}) u_{-}(\mathbf{r}, \vec{p}) e^{i p^{\circ} x^{\circ} + i \vec{p} \cdot \vec{x}} \end{aligned} \quad (4.21)$$

(\mathbf{r} sólo toma los valores (4.17)). Es lo mismo poner

$$\Psi^{(\epsilon)}(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sum_{\mathbf{r}} \int \frac{d^3 p}{\sqrt{2p_0}} a_{\epsilon}(\mathbf{r}, \vec{p}) u_{\epsilon}(\mathbf{r}, \vec{p}) e^{-\epsilon i p^{\circ} x^{\circ} + i \vec{p} \cdot \vec{x}} \quad (4.21'-a)$$

donde

$$a_{+}(\mathbf{r}, \vec{p}) = a(\mathbf{r}, \vec{p}) ; a_{-}(\mathbf{r}, \vec{p}) = b^*(\mathbf{r}, -\vec{p}) . \quad (4.21'-b)$$

4.b-3) Las propiedades algebraicas de las $u_{\epsilon}(\mathbf{r}, \vec{p})$.

Salvo la normalización (que es arbitraria), las propiedades algebraicas de las u_{ϵ} de spin 1 pueden deducirse de la misma manera que se obtienen las propiedades algebraicas de las u_{ϵ} de spin $\frac{1}{2}$. Un segundo camino (que seguiremos aquí) es deducir las propiedades de las u_{ϵ} usando la representación (4.18). El resultado es que la única diferencia entre las propiedades

(Viene de la nota +++ de la pág. anterior):

namos spin 0) y el factor $1/\sqrt{|\mathbf{r}|!}$ en la normalización (con lo cual conseguimos que las propiedades algebraicas de las u_{ϵ} paralelicen las de las u de spin $\frac{1}{2}$). En cambio, dentro de lo que conocemos casi todas las ecuaciones posteriores a las (4.18) no se han escrito para spin 1 en un formalismo tipo BW=Belinfante-de Broglie (excepción: Belinfante, op. cit.⁴, ecuación 36). En cuanto al formalismo de Kemmer, hemos encontrado posteriormente un estudio de Booth and Wilson sobre "spinors"; Booth and Wilson no usan una representación tipo (4.18).

de las u_ϵ y de las $u_{\epsilon'}$ está en algún signo; se puede afirmar que esa diferencia de signo está conectada con la diferencia de estadística.

Usando (4.4) y nuestro $H = H_0 I_0$, es inmediato que (4.18) implica

$$H(\vec{p}) u_\epsilon(\vec{r}, \vec{p}) = \epsilon p_0 u_\epsilon(\vec{r}, \vec{p}) \quad (4.22-a)$$

o, lo que es lo mismo, ⁺

$$\not{p}_{(0)} u_\epsilon(\vec{r}, \epsilon \vec{p}) = \not{p}_{(0)} u_\epsilon(\vec{r}, \epsilon \vec{p}) = \epsilon m u_\epsilon(\vec{r}, \epsilon \vec{p}), \quad (4.22-b)$$

análoga a (4.4).

En lo que sigue será útil el siguiente lema:

Si $T = r + s, \quad T' = r' + s'$

es

$$\frac{\delta_{rr'} \delta_{ss'} + \delta_{rs'} \delta_{sr'}}{\sqrt{|T|! |T'|!}} = \delta_{TT'} \quad (4.23)$$

Agregando (4.5), (4.6) y (4.18) se deduce que ⁺⁺

$$(u_\epsilon(\vec{r}, \vec{p}), u_{\epsilon'}(\vec{r}', \vec{p}'))_{s,p} = \epsilon 2p_0 \delta_{TT'} \delta_{\epsilon\epsilon'} \quad (4.24)$$

que sólo difiere de (4.4) en $\epsilon = \pm$; la (4.24) es la (corres-

pondiente de (4.4) porque en spin $\frac{1}{2}$ el producto escalar en el espacio

spinorial es $(u_\epsilon, u_{\epsilon'})_{s,p} = u_\epsilon^\dagger u_{\epsilon'}$

De la misma manera, con (4.5), (4.6), (1,8) en (4.18) se demuestra que

$$\left. \begin{aligned} \bar{u}_\epsilon(\vec{r}, \vec{p}) u_\epsilon(\vec{r}', \vec{p}) &= + 2m \delta_{TT'} \\ \bar{u}_+(\vec{r}, \vec{p}) u_-(\vec{r}', -\vec{p}) &= \bar{u}_-(\vec{r}, \vec{p}) u_+(\vec{r}', -\vec{p}) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (4.25)$$

que corresponde a (4.6); nuevamente sólo hay una diferencia de signo.

También,

$$u_\epsilon^\dagger(\vec{r}, \vec{p}) u_{\epsilon'}(\vec{r}', \vec{p}') = \frac{2 p_0^2}{m} \delta_{\epsilon\epsilon'} \delta_{TT'} \quad (4.26)$$

De (4.7) y (4.18) se deduce

$$u_\epsilon(\vec{r}, \vec{p}) = \frac{1}{2m(m+p_0)} \left[(m+p_0 + \epsilon \vec{\alpha} \cdot \vec{p}) \not{p}_{(0)} \right]_{\epsilon} \quad (4.27)$$

4.c - SUSTITUCION DE LAS u_\pm POR u Y v .

Como en spin $\frac{1}{2}$, resulta conveniente definir $u(\vec{r}, \vec{p}) = u_+(\vec{r}, \vec{p})$;

$$v(\vec{r}, \vec{p}) = u_-(\vec{r}, -\vec{p}) \quad (4.28)$$

con lo cual el desarrollo (4.21) en ondas planas de toda ψ de BW pasa

a la forma ⁺⁺⁺

$$\left. \begin{aligned} \psi(x) &= \psi^{(+)}(x) + \psi^{(-)}(x) \\ \psi^{(+)}(x) &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sum_{\vec{p}} \int \frac{d^3p}{V 2p_0} a(\vec{r}, \vec{p}) u(\vec{r}, \vec{p}) e^{-i p x} \\ \psi^{(-)}(x) &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sum_{\vec{p}} \int \frac{d^3p}{V 2p_0} b^\dagger(\vec{r}, \vec{p}) v(\vec{r}, \vec{p}) e^{i p x} \end{aligned} \right\} \quad (4.29)$$

+ $\not{p}_{(0)} = p_\mu \not{e}_\mu^k$, etc.

++ Ver en (2.2) la definición del producto escalar en el espacio spinorial.

+++ $p x = p^0 x^0 - \vec{p} \cdot \vec{x}$.

De (4.9), (4.18) y (4.27) se deduce que

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{u}(\mathbf{r} = \mathbf{s} + \mathbf{p}, \vec{p}) &= \frac{1}{2\sqrt{|\mathbf{r}|! m!}} \left[u_{(1)}(\mathbf{r}, \vec{p}) u_{(2)}(\mathbf{s}, \vec{p}) + u_{(1)}(\mathbf{s}, \vec{p}) u_{(2)}(\mathbf{r}, \vec{p}) \right] \\ \mathbf{u}(\mathbf{r} = \mathbf{s} + \mathbf{p}, \vec{p}) &= \frac{1}{2\sqrt{|\mathbf{r}|! m!}} \left[v_{(1)}(\mathbf{r}, \vec{p}) v_{(2)}(\mathbf{s}, \vec{p}) + v_{(1)}(\mathbf{s}, \vec{p}) v_{(2)}(\mathbf{r}, \vec{p}) \right] \end{aligned} \right\} \quad (4.30)$$

Así para las \mathbf{u}_\pm , las propiedades algebraicas de las \mathbf{u} y \mathbf{v} pueden reducirse: 1) de la misma manera que las propiedades de las u y v de spin $\frac{1}{2}$; también, 2) a partir de su representación (4.30). El resultado es:

$$\left. \begin{aligned} \hat{p}_{(1)} \mathbf{u} &= \hat{p}_{(2)} \mathbf{u} = m \mathbf{u} \\ \hat{p}_{(1)} \mathbf{v} &= \hat{p}_{(2)} \mathbf{v} = -m \mathbf{v} \end{aligned} \right\} \quad (4.31-a)$$

análoga a (4.11); entonces,

$$\left. \begin{aligned} \overline{\mathbf{u}} \hat{p}_{(1)} &= \overline{\mathbf{u}} \hat{p}_{(2)} = m \overline{\mathbf{u}} \\ \overline{\mathbf{v}} \hat{p}_{(1)} &= \overline{\mathbf{v}} \hat{p}_{(2)} = -m \overline{\mathbf{v}} \end{aligned} \right\} \quad (4.31-b)$$

$$\left. \begin{aligned} (\mathbf{u}(\mathbf{r}, \vec{p}), \mathbf{u}(\mathbf{r}', \vec{p}))_{sp} &= 2 p_0 \delta_{\mathbf{r}\mathbf{r}'} \\ (\mathbf{v}(\mathbf{r}, \vec{p}), \mathbf{v}(\mathbf{r}', \vec{p}))_{sp} &= -2 p_0 \delta_{\mathbf{r}\mathbf{r}'} \\ (\mathbf{u}(\mathbf{r}, \vec{p}), \mathbf{v}(\mathbf{r}', \vec{p}))_{sp} &= (\mathbf{v}(\mathbf{r}, \vec{p}), \mathbf{u}(\mathbf{r}', \vec{p}))_{sp} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (4.32)$$

que corresponde a (4.12) (varía un signo).

$$\left. \begin{aligned} \overline{\mathbf{u}}(\mathbf{r}, \vec{p}) \mathbf{u}(\mathbf{r}', \vec{p}) - \overline{\mathbf{v}}(\mathbf{r}, \vec{p}) \mathbf{v}(\mathbf{r}', \vec{p}) &= 2m \delta_{\mathbf{r}\mathbf{r}'} \\ \overline{\mathbf{u}}(\mathbf{r}, \vec{p}) \mathbf{v}(\mathbf{r}', \vec{p}) - \overline{\mathbf{v}}(\mathbf{r}, \vec{p}) \mathbf{u}(\mathbf{r}', \vec{p}) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (4.33)$$

que sólo difieren de (4.13) en un signo.

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{u}^\dagger(\mathbf{r}, \vec{p}) \mathbf{u}(\mathbf{r}', \vec{p}) &= \mathbf{v}^\dagger(\mathbf{r}, \vec{p}) \mathbf{v}(\mathbf{r}', \vec{p}) = \frac{2 p_0 \delta_{\mathbf{r}\mathbf{r}'}}{m} \\ \mathbf{u}^\dagger(\mathbf{r}, \vec{p}) \mathbf{v}(\mathbf{r}', \vec{p}) &= \mathbf{v}^\dagger(\mathbf{r}, \vec{p}) \mathbf{u}(\mathbf{r}', \vec{p}) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (4.33')$$

La (4.14) no se traslada directamente; en cambio, vale

$$\sum_{\vec{p}} \left[\mathbf{u}_{i_1 i_2}(\mathbf{r}, \vec{p}) \overline{\mathbf{u}}_{j_2 j_1}(\mathbf{r}, \vec{p}) + \mathbf{v}_{i_1 i_2}(\mathbf{r}, \vec{p}) \overline{\mathbf{v}}_{j_2 j_1}(\mathbf{r}, \vec{p}) \right] \Psi_{i_1 i_2} \Psi_{j_1 j_2} \quad (4.34-a)^\dagger$$

para toda $\Psi \in \mathcal{W}$; la (4.34) implicaría una relación tipo (4.14) si no fuera por las componentes redundantes. La (4.34) se demuestra usando (4.29) y (4.30).

$$\sum_{\vec{p}} \left[\overline{\mathbf{u}}(\mathbf{r}, \vec{p}) \mathbf{u}(\mathbf{r}, \vec{p}) + \overline{\mathbf{v}}(\mathbf{r}, \vec{p}) \mathbf{v}(\mathbf{r}, \vec{p}) \right] = 12 m, \quad (4.35)$$

corresponde a la (4.15).

Los operadores proyección $\Lambda_\pm(\vec{p})$ tales que

$$\left. \begin{aligned} \Lambda_+(\vec{p}) \mathbf{u}(\mathbf{r}, \vec{p}) &= \mathbf{u}(\mathbf{r}, \vec{p}) & \Lambda_+(\vec{p}) \mathbf{v}(\mathbf{r}, \vec{p}) &= 0 \\ \Lambda_-(\vec{p}) \mathbf{v}(\mathbf{r}, \vec{p}) &= \mathbf{v}(\mathbf{r}, \vec{p}) & \Lambda_-(\vec{p}) \mathbf{u}(\mathbf{r}, \vec{p}) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (4.36)$$

cumpl

Con la costumbre, sumamos sobre los índices spinoriales repetidos j_1 y j_2 .

$$\Lambda_+(\vec{p}) = \frac{\not{p} + m}{2m} = \frac{\not{p} + m}{2m} = \frac{1}{2m} \sum_{\vec{r}} \left[\mathcal{U}(\vec{r}, \vec{p}) \overline{\mathcal{U}}(\vec{r}, \vec{p}) + \mathcal{V}(\vec{r}, \vec{p}) \overline{\mathcal{V}}(\vec{r}, \vec{p}) \right];$$

$$\Lambda_-(\vec{p}) = \frac{m - \not{p}}{2m} = \frac{m - \not{p}}{2m} = \frac{-1}{2m} \sum_{\vec{r}} \left[\mathcal{U}(\vec{r}, \vec{p}) \overline{\mathcal{U}}(\vec{r}, \vec{p}) + \mathcal{V}(\vec{r}, \vec{p}) \overline{\mathcal{V}}(\vec{r}, \vec{p}) \right];$$

(4.37 - a)

que corresponden a (4.16). Si se desea pasar de "+" a "-" se puede poner, $\vec{r} \rightarrow -\vec{r}$

$$\sum_{\vec{r}} \mathcal{U}_{i_1 i_2}(\vec{r}, \vec{p}) \overline{\mathcal{U}}_{j_1 j_2}(\vec{r}, \vec{p}) = \frac{1}{4m} \left[(\not{p} + m)_{i_1 j_1} (\not{p} + m)_{i_2 j_2} + (\not{p} + m)_{i_1 j_2} (\not{p} + m)_{i_2 j_1} \right]$$

$$\sum_{\vec{r}} \mathcal{V}_{i_1 i_2}(\vec{r}, \vec{p}) \overline{\mathcal{V}}_{j_1 j_2}(\vec{r}, \vec{p}) = \frac{1}{4m} \left[(\not{p} + m)_{i_1 j_1} (\not{p} + m)_{i_2 j_2} + (\not{p} + m)_{i_1 j_2} (\not{p} + m)_{i_2 j_1} \right]$$

(4.37-b)

entonces la (4.34-a) puede completarse con

$$\sum_{\vec{r}} \mathcal{U}_{i_1 i_2}(\vec{r}, \vec{p}) \overline{\mathcal{U}}_{j_1 j_2}(\vec{r}, \vec{p}) + \mathcal{V}_{i_1 i_2}(\vec{r}, \vec{p}) \overline{\mathcal{V}}_{j_1 j_2}(\vec{r}, \vec{p}) =$$

$$= \frac{1}{2m} \left[(\not{p} + m)_{i_1 j_1} (\not{p} + m)_{i_2 j_2} + (\not{p} + m)_{i_1 j_2} (\not{p} + m)_{i_2 j_1} + m^2 \delta_{i_1 j_1} \delta_{i_2 j_2} + m^2 \delta_{i_1 j_2} \delta_{i_2 j_1} \right].$$

(4.34-b)

4.d - SPINORES EN LOS ESPACIOS \mathcal{F}_{sp}^p Y \mathcal{Q}_{sp}^p

4.d - 1) Introducción

Los espacios \mathcal{F}_{sp}^p y \mathcal{Q}_{sp}^p se definen a partir de los espacios \mathcal{F} y \mathcal{Q} de la misma manera que se define el espacio spinorial \mathcal{W}_{sp}^p a partir de \mathcal{W} sea como Sec. 2.c

Es inmediato que una matriz simétrica m_{ij}^{sp} pertenece a \mathcal{F}_{sp}^p ,

$$m \in \mathcal{F}_{sp}^p, \quad \text{si } \Lambda_{\vec{p}}^{\mathcal{F}_{sp}^p} m = m \quad (4.38)$$

$$n_{ij} \text{ simétrica pertenece a } \mathcal{Q}_{sp}^p, \quad \text{si } \Lambda_{\vec{p}}^{\mathcal{Q}_{sp}^p} n = n \quad (4.39)$$

Por (Secc. 4.b-1) los 4 spinores $u_{\vec{r}}^{sp}(r, s, \vec{p})$ (4.19) forman base en \mathcal{F}_{sp}^p ; no disponemos aún de base para \mathcal{Q}_{sp}^p

4.d - 2) - Algunas propiedades algebraicas de los spinores $u_{\vec{r}}$.

Respecto del producto escalar (2.2) son ortogonales entre sí y de pseudonorma nula,

$$(u_{\vec{r}}(r, s, \vec{p}), u_{\vec{r}'}(r', s', \vec{p}))_{sp} = 0 \quad (4.40)$$

pero no son ortogonales al espacio \mathcal{W}_{sp}^p ; estas propiedades son consecuencia de (4.19), (4.18) y de las propiedades de los spinores de $spin_{\frac{1}{2}}$; la no ortogonalidad con \mathcal{W}_{sp}^p es consecuente con Secc. 2.f - 2.

Además,

$$u_{\vec{r}}^+(r, s, \vec{p}) u_{\vec{r}'}(r', s', \vec{p}) = \frac{2p_0^2}{m} \delta_{rr'} \delta_{ss'} \quad (4.41-a)$$

$$u_{\vec{r}}^+(r, s, \vec{p}) u_{\vec{r}'}(r', \vec{p}) = 0 \quad (4.41-b)$$

4.d-3) - Los spinores $u_{\vec{r}}$, base de \mathcal{Q}_{sp}^p .

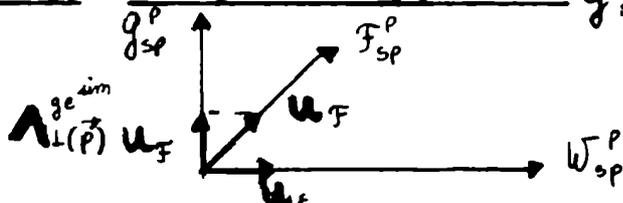


Fig 4-1

La figura 4-1 (simbólica, como las 2 - 2 y 2 - 3) sugiere que podemos obtener un sistema de vectores (no necesariamente normalizados) que sea ortogonal + para demostrarlo, usar (4.18) y (4.16-b); partir en dos ciertos sumandos, para agruparlos con otros (esto se comprenderá al efectuar los cálculos).

a W_{sp}^p respecto de (2.2) si proyectamos los $U_{\mathcal{F}}$ ortogonalmente sobre Q_{sp} , definimos pues,

$$U_g(r, s, \vec{p}) = \int_{\vec{p}} e^{i\vec{m}\cdot\vec{r}} (\vec{p}) U_{\mathcal{F}}(r, s, \vec{p}). \quad (4.42)$$

La misma figura sugiere que pueden obtenerse los U_g como combinación lineal de los $U_{\mathcal{E}}$ y de los $U_{\mathcal{F}}$; Usando (4.42), (4.18), (4.19), (2.60) y la fórmula de spin $\frac{1}{2}$

$$\delta^o u_{\mathcal{E}}(r, \vec{p}) = \frac{\xi_m}{p_o} u_{\mathcal{E}}(r, \vec{p}) + \sum_{r', 2p_o} \frac{1}{r'} \left[\bar{u}_{\mathcal{E}}(r', \vec{p}) u_{\mathcal{E}}(r, \vec{p}) \right] u_{-\mathcal{E}}(r', \vec{p}) \quad (4.43)$$

se obtiene

$$U_g(r, s, \vec{p}) = U_{\mathcal{F}}(r, s, \vec{p}) - \frac{1}{4m} \sum_{r'} \sqrt{\frac{|r+r'|}{|r+s|}} \left[\bar{u}_{+}(r', \vec{p}) u_{+}(s, \vec{p}) \right] U_{+}(r+r', \vec{p}) + \frac{1}{4m} \sum_{r'} \sqrt{\frac{|r'+s|}{|r+s|}} \left[\bar{u}_{-}(r', \vec{p}) u_{+}(s, \vec{p}) \right] U_{-}(s+r', \vec{p}) \quad (4.44-a)$$

Usando la definición A de r (cf, A4-1) se obtiene

$$\begin{aligned} U_g(1, 1, \vec{p}) &= U_{\mathcal{F}}(1, 1, \vec{p}) + \frac{1}{2m} \left\{ p^3 U_{+}(2, \vec{p}) + \frac{1}{\sqrt{2}} p_+ U_{+}(0, \vec{p}) - \right. \\ &\quad \left. - p^3 U_{-}(2, \vec{p}) - \frac{1}{\sqrt{2}} p_+ U_{-}(0, \vec{p}) \right\}; \\ U_g(\frac{1}{2}, -1, \vec{p}) &= U_{\mathcal{F}}(\frac{1}{2}, -1, \vec{p}) + \frac{1}{2m} \left\{ \sqrt{2} p_+ U_{+}(2, \vec{p}) - p^3 U_{+}(0, \vec{p}) - \right. \\ &\quad \left. - p^3 U_{-}(0, \vec{p}) - \sqrt{2} p_+ U_{-}(2, \vec{p}) \right\}; \\ U_g(-1, 1, \vec{p}) &= U_{\mathcal{F}}(-1, 1, \vec{p}) + \frac{1}{2m} \left\{ p^3 U_{+}(0, \vec{p}) + \sqrt{2} p_+ U_{+}(-2, \vec{p}) - \right. \\ &\quad \left. - \sqrt{2} p_+ U_{-}(2, \vec{p}) + p^3 U_{-}(0, \vec{p}) \right\}; \\ U_g(-1, -1, \vec{p}) &= U_{\mathcal{F}}(-1, -1, \vec{p}) + \frac{1}{2m} \left\{ \frac{p_+}{\sqrt{2}} U_{+}(0, \vec{p}) - p^3 U_{+}(-2, \vec{p}) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{p_+}{\sqrt{2}} U_{-}(0, \vec{p}) + p^3 U_{-}(-2, \vec{p}) \right\}; \end{aligned} \quad (4.44-b)$$

en cambio, usando en (4.44-a) la definición B se obtiene un resultado más compacto:

$$U_g(r, s, \vec{p}) = U_{\mathcal{F}}(r, s, \vec{p}) + \frac{s|\vec{p}|}{2m} U_{+}(r+s, \vec{p}) - \frac{r|\vec{p}|}{2m} U_{-}(r+s, \vec{p}). \quad (4.44-c)$$

La fórmula (4.44-b) (def. A) fué reobtenida ortogonalizando respecto de (2.2) al sistema de 10 spinores $U_{\mathcal{E}}$, $U_{\mathcal{F}}$; para la (4.44-c) no se usó este 2º procedimiento.

4.d-4) Algunas propiedades algebraicas de los spinores $U_{\mathcal{F}}$.

Para (4.44-b) (def. A) se verificó

$$(U_g(r, s, \vec{p}), U_g(r', s', \vec{p}))_{s, p} = 0 \quad (4.45-a)$$

Además, por construcción,

$$(U_{\mathcal{E}}(\vec{r}, \vec{p}), U_g(r', s', \vec{p}))_{s, p} = 0. \quad (4.45-b)$$

4.e - APLICACION: NORMALIZACION Y ORTOGONALIDAD.

Usando (4.21) y (4.24) es fácil demostrar que

$$(\Psi^{(+)}, \Psi^{(+)}) = \sum_{\vec{r}} \int d^3 p |a(\vec{r}, \vec{p})|^2 \quad (4.46-a)$$

$$(\Psi^{(-)}, \Psi^{(-)}) = \sum_{\vec{r}} \int d^3 p |b(\vec{r}, \vec{p})|^2 \quad (4.46-b)$$

$$(\Psi^{(+)}, \Psi^{(-)}) = 0 \quad (4.46-c)$$

Las (a) y (b) demuestran las (3.14-a); la (c) redemuestra (3.13). Agregando las (4.45) podemos formar la

Tabla de correlación entre subespacios ortogonales⁺ y norma⁺ (pseudonormas)

para $\Psi \in \mathcal{E}^{\text{sim}}$.

$\Psi \in W^{(+)}$	\Rightarrow	$(\Psi, \Psi) = +1$
$\Psi \in W^{(-)}$	\Rightarrow	$(\Psi, \Psi) = -1$
$\Psi \in Q^{\pm}$	\Rightarrow	$(\Psi, \Psi) = 0$

Tabla 4-1

Nótese sin embargo que estas implicaciones no necesariamente pueden ser invertidas. En consecuencia, sea $\Psi \in W$, $\Psi \in \mathcal{E}^{\text{sim}}$ pero $\notin W$, es

$$(\Psi, \Psi) = \int_{\mathcal{R}} d^3p \left\{ |a(\mathbf{r}, \vec{p})|^2 - |b(\mathbf{r}, \vec{p})|^2 \right\} \quad (4.46-d)$$

La (4.46-b) no se repite en spin $\frac{1}{2}$, pero sí en spin 0^{10} .

4.f - APLICACION: UNA INTERPRETACION ESTADISTICA RESTRICTA (TEORIA DE UNA "PARTICULA").

No es nuestro objeto en este trabajo discutir y o ampliar las bases de la teoría general de una "partícula" para spin entero. Por lo tanto, en lo referente a interpretación estadística nos limitaremos a seguir las líneas expuestas en el artículo de Feshbach y Villars.¹⁰

De I, Secc. 3.a y de (4.46-d), es:

$$\text{"carga total"} = e \int_{\mathcal{R}} d^3p \left\{ |a(\mathbf{r}, \vec{p})|^2 - |b(\mathbf{r}, -\vec{p})|^2 \right\} \quad (4.47)^{++}$$

Esta ecuación se puede interpretar diciendo que $|a(\mathbf{r}, \vec{p})|^2 d^3p$ da la proporción relativa de carga positiva aportada por un estado componente, de momento comprendido entre \vec{p} y $\vec{p} + d\vec{p}$, energía comprendida entre $p_0 = +\sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$ y $p_0 + dp_0$, y helicidad $^{+++} \frac{\vec{J}_{\text{spin}} \cdot \vec{p}}{|\vec{p}|}$ igual a $\tau/2$; análogamente

$|b(\mathbf{r}, -\vec{p})|^2$ para la carga negativa.

De (3.4), (4.21), (4.18) y (4.4-a) se deduce

$$\langle H \rangle = \int_{\mathcal{R}} d^3p p^0 \left\{ |a(\mathbf{r}, \vec{p})|^2 + |b(\mathbf{r}, -\vec{p})|^2 \right\} \quad (4.48)$$

de (3.47), (4.21) y (4.18),

$$\langle p^k \rangle = \int_{\mathcal{R}} d^3p p^k \left\{ |a(\mathbf{r}, \vec{p})|^2 + |b(\mathbf{r}, -\vec{p})|^2 \right\} \quad (4.49)$$

de (2.61), (4.21), (4.18) y (A4-1.4),

$$\left\langle \frac{\vec{J}_{\text{spin}} \cdot \vec{p}}{|\vec{p}|} \right\rangle = \int_{\mathcal{R}} d^3p \left(\frac{\tau}{2} \right) \left\{ |a(\mathbf{r}, \vec{p})|^2 + |b(\mathbf{r}, -\vec{p})|^2 \right\}, \quad \tau = 1, 0, -1. \quad (4.50)$$

~~Aspecto de (2.2)~~

⁺⁺Mediante un cambio de variable de integración, da lo mismo poner aquí $b(\mathbf{r}, \vec{p})$ o $b(\mathbf{r}, -\vec{p})$; sin embargo, ahora colocamos $b(\mathbf{r}, -\vec{p})$ para que $|b(\mathbf{r}, -\vec{p})|^2$ sea la proporción de carga $-e$, helicidad $\tau/2$ y momento $+p$ (ver (4.49) más adelante).
⁺⁺⁺Aquí adoptamos la definición B de τ (cf. A4-2).

Utilizando la interpretación mencionada de $|\mathbf{a}(\mathbf{r}, \vec{p})|^2 d^3 p$ y $|\mathbf{b}(\mathbf{r}, -\vec{p})|^2 d^3 p$, se obtiene que la energía media $\langle H \rangle$ es el promedio de las energías $+p_0$ de los estados especificados por su momento, el signo de la carga y la helicidad, ponderando el promedio con la cantidad de carga de cada estado. Análogamente para los valores medios del momento y de la helicidad.

+Recordar que el valor medible de la energía es $+p_0$ (cf. (3.17)).

CAPITULO QUINTO

REPRESENTACION DE LAS $\Psi(x)$ DE BARGMANN - WIGNER MEDIANTE DOS CAMPOS SPINORIALES $\Psi'(x)$ Y $\Psi''(x)$ DE SPIN $\frac{1}{2}$ (TEORIA NUMERO c).

5.a - UNA REPRESENTACION.

5.a-1) Teorema.

Tesis: Sean $\Psi'(x)$ y $\Psi''(x)$ dos soluciones arbitrarias⁺ de la ecuación de Dirac para spin $\frac{1}{2}$ correspondientes a un mismo signo ϵ de la energía, sin mezcla con componentes de signo $-\epsilon$; sea la función⁺

$$\Phi^{(\epsilon)}(z; x^0) = \frac{\lambda}{\sqrt{z^m}} \int d^3x \left\{ \Psi_{(1)}^{(\epsilon)}(z-x) i \frac{\partial}{\partial x^0} \Psi_{(2)}^{(\epsilon)}(x) + (1) \leftrightarrow (2) \right\} \quad (5.1)$$

donde $(1) \leftrightarrow (2)$ indica un sumando idéntico al primero salvo el intercambio de subíndices spinoriales $i_1 \leftrightarrow i_2$. Entonces,

a) Como función de z , Φ satisface las ecuaciones de BW (1.2):

$$i \frac{\partial}{\partial z^\mu} \gamma_{(1)}^\mu \Phi^{(\epsilon)}(z; x^0) = m \Phi^{(\epsilon)}(z; x^0) \quad (5.2-a)$$

$$\gamma_{(1)}^0 \Phi^{(\epsilon)}(z; x^0) = \gamma_{(2)}^0 \Phi^{(\epsilon)}(z; x^0) \quad (5.2-b)$$

b) pase a la apariencia del 2º miembro de (5.1), Φ es independiente de x^0 :

$$\frac{\partial}{\partial x^0} \Phi^{(\epsilon)}(z; x^0) = 0 \quad (5.3)$$

Demostración:

Para demostrar (5.2-a) basta observar que por hipótesis

$$i \frac{\partial}{\partial z^\mu} \Psi^{(\epsilon)}(z) = m \Psi^{(\epsilon)}(z) \quad (5.4)^{**}$$

La (5.2-b) es consecuencia del sumando $(1) \leftrightarrow (2)$ de (5.1). Para demostrar la (5.3) usaremos (4.1'): Como $\Psi^{(\epsilon)}$ está formada por componentes de energía ϵp_0 es

$$\Psi^{(\epsilon)}(z) = \frac{1}{(z^0)^{3/2}} \sum_{r=1}^1 \int \frac{d^3p}{\sqrt{2p_0}} a_\epsilon^r(r, \vec{p}) u_\epsilon(r, \vec{p}) e^{-\epsilon t p^0 z^0 + i \vec{p} \cdot \vec{z}} \quad (5.5-a)^{**}$$

$$\Psi''^{(\epsilon)}(x) = \frac{1}{(z^0)^{3/2}} \sum_{s=1}^1 \int \frac{d^3p''}{\sqrt{2p''_0}} a_\epsilon''(s, \vec{p}'') u_\epsilon(s, \vec{p}'') e^{-\epsilon t p''^0 x^0 + i \vec{p}'' \cdot \vec{x}} \quad (5.5-b)^{**}$$

Sustituyendo en (5.1) se demuestra

$$\Phi^{(\epsilon)}(z; x^0) = \frac{\epsilon \lambda}{2\sqrt{z^m}} \sum_{r,s=1}^1 \int d^3p a_\epsilon^r(r, \vec{p}) a_\epsilon''(s, \vec{p}'') \left[u_{\epsilon(1)}(r, \vec{p}) u_{\epsilon(1)}(s, \vec{p}'') + (1) \leftrightarrow (2) \right] e^{-\epsilon t p^0 z^0 + i \vec{p} \cdot \vec{z}} \quad (5.6)$$

Las exponenciales $e^{\epsilon t p^0 x^0}$ y $e^{-\epsilon t p''^0 x^0}$ que contenían la dependencia aparente de Φ en x^0 se han cancelado debido a una $\delta(\vec{p} - \vec{p}'')$. De (5.6) se obtiene inmediatamente (5.3).

Q.E.D.

5.a-2) Teorema inverso.

Tesis: Toda solución $\Psi^{(\epsilon)}(z)$ de las ecuaciones (1.2) de BW formada sólo por com-

+ $x = (x^0, \vec{x})$; $z = (z^0, \vec{z})$.

ponentes de un signo definido ϵ de la carga puede ponerse en la forma (5.1), es decir,

$$\Psi^{(\epsilon)}(z) = \frac{\lambda}{\sqrt{2m}} \int d^3x \left\{ \Psi_{(1)}^{(\epsilon)}(z-x) + \frac{\partial}{\partial x^0} \Psi_{(2)}^{(\epsilon)}(x) + (1) \leftrightarrow (2) \right\}. \quad (5.7)^\dagger$$

Una regla para determinar explícitamente las $\Psi_{(1)}^{(\epsilon)}$ y $\Psi_{(2)}^{(\epsilon)}$ que deben usarse es:

a) desarróllese $\Psi^{(\epsilon)}(z)$ según (4.21'), o sea

$$\Psi^{(\epsilon)}(z) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sum_{\tau} \int \frac{d^3p}{\sqrt{2p_0}} a_{\epsilon}(\tau, \vec{p}) u_{\epsilon}(\tau, \vec{p}) e^{-\epsilon i p^0 z^0 + i \vec{p} \cdot \vec{z}}; \quad (5.8)$$

b) $\Psi_{(1)}^{(\epsilon)}$ y $\Psi_{(2)}^{(\epsilon)}$ se determinan hallando las a'_{ϵ} y a''_{ϵ} de (5.5), las que deben cumplir

$$a_{\epsilon}(\tau = r + s, \vec{p}) = \frac{\epsilon \lambda}{\sqrt{|\tau|}} (2\pi)^{3/2} 2\sqrt{p^0} a'_{\epsilon}(r, \vec{p}) a''_{\epsilon}(s, \vec{p}). \quad (5.9)$$

Pese a que (5.9) no determina unívocamente $\Psi_{(1)}^{(\epsilon)}$ y $\Psi_{(2)}^{(\epsilon)}$, es condición suficiente para que se cumpla la (5.7).

Demostración:

Por Secc. (4.b-2) sabemos que para demostrar que toda solución $\Psi^{(\epsilon)}(z)$ de las ecuaciones de BW (con carga pura ϵe) admite la representación (5.7) basta demostrar que $\Phi^{(\epsilon)}(z; x^0)$ admite un desarrollo idéntico al (5.8).

Sustituyendo (5.9) en (5.6) se demuestra que

$$\Phi^{(\epsilon)}(z; x^0) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{2} \sum_{\tau, s=-1}^1 \int \frac{d^3p}{\sqrt{2p_0}} |\tau| a_{\epsilon}(\tau, \vec{p}) u_{\epsilon}(\tau, \vec{p}) e^{-\epsilon i p^0 z^0 + i \vec{p} \cdot \vec{z}} \quad (5.10)$$

con $\tau = r + s$. Por otra parte, siendo $\tau = r + s = -2, 0, 2$ se cumple que

$$\sum_{\tau, s=-1}^1 |\tau| f(\tau) = 2 \sum_{\tau} f(\tau). \quad (5.11)$$

Entonces, comparando con (5.8) es

$$\Phi^{(\epsilon)}(z; x^0) \equiv \Psi^{(\epsilon)}(z). \quad (5.12)$$

(La aparente contradicción originada en que $\Psi^{(\epsilon)}(z)$ es independiente de x^0 no es tal debido a (5.3).

(Q.E.D.)

Observaciones:

A) Pudiendo representarse mediante (5.7) las soluciones de carga pura ϵ , toda otra solución de carga impura admite representación, combinando (5.7) con

$$\Psi(z) = \Psi^{(+)}(z) + \Psi^{(-)}(z). \quad (5.13)$$

B) El parámetro adimensional λ se introduce en (5.7) para una eventual normalización; para soluciones no normalizadas, λ es arbitrario y puede hacerse $\lambda = 1$.

C) Fijada la $\Psi^{(\epsilon)}(z)$ que se va a representar, puede elegirse una $\Psi_{(1)}^{(\epsilon)}$ casi

+Modificando adecuadamente la (5.9) puede conseguirse una fórmula análoga sin el "1/2" $\sqrt{|\tau|}$, o sea como el 2º miembro de la ecuación (a) del apéndice A5-1. Sin embargo, preferimos mantener el "1/2" $\sqrt{|\tau|}$ pues puede demostrarse que entonces la representación es invariante ante una transformación de Lorentz.

arbitraria, determinando $\psi^{(e)}$ mediante (5.9); el único requisito sobre $\psi^{(e)}$ es que contenga todos los momentos \vec{p} que contiene Ψ (el peso de cada onda monocromática no importa en $\psi^{(e)}$) y, para un \vec{p} dado, que contenga todas las polarizaciones r que contribuyen a las τ contenidas en $\Psi^{(e)}$. O sea, si

$$a'_e(\tau = r + s, \vec{p}) \neq 0 \quad (5.14-a)$$

debe ser

$$a'_e(r, \vec{p}) \neq 0. \quad (5.14-b)$$

5.b - OTRAS FORMAS DE LA REPRESENTACION. FORMA MANIFIESTAMENTE COVARIANTE.

De (5.7) se deducen las representaciones

$$\Psi^{(e)}(z) = -\frac{\lambda}{\sqrt{2m}} \int d^3x \left\{ \psi_{(1)}^{(e)}(x) + \frac{\partial}{\partial x^0} \psi_{(2)}^{(e)}(z-x) + (1) \leftrightarrow (2) \right\} \quad (5.15)$$

$$y \quad \Psi^{(e)}(z) = \frac{\lambda}{\sqrt{2m}} H_{(2)}(z) \int d^3x \left\{ \psi_{(1)}^{(e)}(x) + \psi_{(2)}^{(e)}(z-x) + (1) \leftrightarrow (2) \right\} \quad (5.16)$$

donde

$$H(z) = \alpha \cdot (-i\hbar \frac{\partial}{\partial \vec{z}}) + m\beta \quad ; \quad (5.17)^{**}$$

(ver las demostraciones en A5-1).

Si designamos

$$d\sigma_\mu = (dx^1 dx^2 dx^3, dx^0 dx^2 dx^3, dx^0 dx^1 dx^3, dx^0 dx^1 dx^2) \quad (5.18)$$

entonces la forma manifiestamente covariante de la representación (5.7) es

$$\Psi^{(e)}(z) = \frac{\lambda}{\sqrt{2m}} \int d\sigma^\mu \left\{ \psi_{(1)}^{(e)}(z-x) \epsilon_{\mu\alpha} \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \psi_{(2)}^{(e)}(z-x) + (1) \leftrightarrow (2) \right\} \quad (5.19)$$

5.c - COMPARACION CON LA REPRESENTACION DE DE BROGLIE.

De Broglie⁺ utiliza la "fusión" de dos partículas $\Psi_{(1)}$ y $\Psi_{(2)}$ de spin $\frac{1}{2}$ como instrumento para obtener las partículas Ψ de spin 1 y sus ecuaciones (idénticas a (1.1) salvo que no se pone $\Psi_{ij} = \Psi_{ji}$ con lo que el spin 1 no es puro).

Su ecuación de la "fusión",

$$\left[-i\hbar \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \psi_{(1)}^{(e)}(x) \right] \psi_{(2)}^{(e)}(x) = \psi_{(2)}^{(e)}(x) \left[-i\hbar \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \psi_{(1)}^{(e)}(x) \right] = \frac{1}{2} \left[-i\hbar \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \Psi(x) \right] \quad (5.20-a)^{**}$$

$$\left[i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi_{(1)}^{(e)}(x) \right] \psi_{(2)}^{(e)}(x) = \psi_{(1)}^{(e)}(x) \left[i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi_{(2)}^{(e)}(x) \right] = \frac{1}{2} \left[i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(x) \right] \quad (5.20-b)^{**}$$

le conduce a escribir

$$\Psi(x) = \psi_{(1)}^{(e)}(x) \psi_{(2)}^{(e)}(x). \quad (5.21)^{**}$$

A partir de las ecuaciones (de Dirac) que satisfacen $\psi_{(1)}^{(e)}$ y $\psi_{(2)}^{(e)}$, y de la restricción (5.20) obtiene las ecuaciones (1.1-a) y b) para Ψ . Pero, independientemente de la idea de la fusión la (5.21) es una representación de Ψ , y como tal la compararemos con nuestra (5.7):

Es sabido que una objeción que se ha hecho a (5.21) es que sólo proporciona

De Broglie, op. cit. Cap VII, § 2.

las Ψ que cumplen (5.20), o sea esencialmente se trabaja con dos partículas no ligadas cuyos momentos⁺ son $\vec{p}/2$. Es claro que el sistema resultante debe ser de spin 1 (o cero) y momento \vec{p} , pero también que ^{no} cualquier Ψ de spin 1 puede representarse así (en caso contrario Ψ no representaría a una partícula elemental, por ser sólo superposición de partículas no ligadas).

Nuestra representación (5.7) no adolece de la objeción anterior.

⁺Si se trata de autoestados de \vec{p} .

CAPITULO SEITO

LAS OPERACIONES DE SIMETRIA. LAS FORMAS BILINEALES $\bar{\Psi} M \Psi$

Una parte del materia ofrecido en esta sección es conocido; sin embargo, lo incluimos por completitud; indicamos explícitamente cuando los resultados son conocidos, usando por ejemplo la convención de los asteriscos (Secc. 1.a).

6.a - TRANSFORMACIONES INDUCIDAS POR EL GRUPO DE LAS TRANSFORMACIONES CONTINUAS DE LORENTZ.

6.a-1) Transformaciones homogéneas.

Es bien sabido^{2,1,17} que la transformación infinitésima propia y ortocrona

de Lorentz,

$$x'^{\mu} = l^{\mu}_{\nu} x^{\nu}, \quad \det l^{\mu}_{\nu} = +1, \quad l^{00} > 0, \quad (6.1-a)**$$

$$l_{\mu\nu} = l^{*\mu\nu}, \quad l_{\mu\alpha} l^{\alpha\lambda} l^{\lambda\mu} = l^{\lambda\mu} l^{\mu\lambda} = \delta^{\lambda\lambda} \quad (6.1-b)**$$

$$l^{\mu\nu} = \delta^{\mu\nu} + \epsilon^{\mu\nu}, \quad |\epsilon_{\mu\nu}| \ll 1 \quad (6.1-c)**$$

induce en Ψ la transformación

$$\Psi'(x') = D \Psi(x) = D \Psi(l^{-1} x'), \quad D = D_1 D_2 \dots \quad (6.2-a)**$$

donde

$$D = I - \frac{1}{4} \epsilon_{\mu\nu} \sigma^{\mu\nu}, \quad \sigma^{\mu\nu} = \frac{1}{2} (\gamma^{\mu} \gamma^{\nu} - \gamma^{\nu} \gamma^{\mu}) \quad (6.3-a)**$$

es la matriz de la transformación

$$\Psi'(x') = D \Psi(x) = D \Psi(l^{-1} x) \quad (6.3-b)**$$

inducida sobre los spinores Ψ de spin $\frac{1}{2}$.

La (6.2-a) puede ponerse en las formas equivalentes,

$$\Psi'(x') = D \Psi(x) D^T \quad (6.2-b)$$

$$y \quad \Psi'(x') = \left[\prod -\frac{1}{4} \epsilon_{\mu\nu} (\sigma^{\mu\nu}_{(1)} + \sigma^{\mu\nu}_{(2)}) \right] \Psi(x). \quad (6.2-c)**$$

De (6.2) se deduce²

$$\overline{\Psi}'(x') = \overline{\Psi}(x) D^{-1} = \overline{\Psi}(x) D_{(1)}^{-1} D_{(2)}^{-1} \dots = D^{-1T} \overline{\Psi}(x) D^{-1}, \quad (6.4)**$$

Sea $\epsilon^{\lambda\nu}$ una rotación 3-dimensional de ángulo ϵ alrededor del eje z:

$$\epsilon_{12} = -\epsilon; \quad \epsilon_{ij} = 0 \text{ si } (i,j) \neq (1,2) \text{ o } (2,1). \text{ De (6.2) se deduce, como es}$$

sabido,

$$\Psi'(x) = (I + i\epsilon J_z) \Psi(x). \quad (6.5)**$$

donde J_z está dado en (3.49).

6.a-2 - Traslaciones.

Es bien sabido^{1,2} que ante

$$x'^{\mu} = a^{\mu} + x^{\mu} \quad (6.6-a)**$$

es

$$\Psi'(x) = (I - i a_{\mu} p^{\mu}) \Psi(x) \quad (6.6-b)**$$

6.b - TRANSFORMACIONES INDUCIDAS POR REFLEXIONES ESPACIALES.

6.b-1) La transformación. Caso vectorial y caso pseudovectorial.

Sea la reflexión espacial.

$$x = (x^0, \vec{x}) \longrightarrow x' = (x^0, -\vec{x}); \quad (6.7)^{**}$$

es sabido que mientras los spinores relativistas de spin $\frac{1}{2}$ se transforman según

$$\psi'(x') = \eta \gamma^0 \psi(x) \quad (6.8-a)^{**}$$

con

$$\eta = +1 \quad (\text{fermiones reales}) \quad (6.8-b)^{**}$$

$$\eta = -1 \quad (\text{fermiones imaginarios}), \quad (6.8-c)^{**}$$

los spinores relativistas de spin 1 se transforman según²

$$\psi'(x') = \eta \gamma_{(1)}^0 \gamma_{(2)}^0 \psi(x) \equiv \eta \gamma^0 \psi(x) \gamma^{0T} \quad (6.9-a)^{**}$$

donde

$$\eta = \pm 1. \quad (6.9-b)^{**}$$

Es fácil verificar que las ecuaciones (1.2) de BW quedan invariantes en forma ante (6.7) y (6.9).

También es sabido² que

$$\eta = -1 \implies \text{campo vectorial}, \quad (6.10-a)^*$$

$$\eta = +1 \implies \text{campo pseudovectorial}. \quad (6.10-b)^*$$

Es frecuente demostrar (6.10) con ayuda de una determinada representación de las γ^μ ; puede demostrarse (6.10) independientemente de toda representación de las γ^μ si se usa la ecuación (7.2) (ver más adelante) que conecta la ψ de BW con las U_μ y $G_{\mu\nu}$ de Proca (recordar (1.7')).

6.b-2) Sobre la representación dada en el Cap. 5.

De (5.7), (6.8) y (6.9) se deduce fácilmente que los campos spinoriales ψ' y ψ'' con los cuales obtenemos nuestra representación (5.7) de ψ cumplen lo que sigue:

- A) ψ' y ψ'' pertenecen a la misma familia; es decir, son ambas reales o ambas imaginarias. Matemáticamente no hay razones para excluir este último caso.
- B) Si ψ representa a un campo vectorial deben elegirse ψ' y ψ'' de paridades opuestas.
- C) Si ψ representa a un campo pseudovectorial deben elegirse ψ' y ψ'' de igual paridad.

6.b-3) Segunda cuantificación - Transformación de los operadores creación y destrucción.

Cuando se efectúa la segunda cuantificación los coeficientes a y b^* del

desarrollo en ondas planas (4.29) se transforman en los operadores destrucción y creación a y b^+ . $\Psi(x)$ pasa a ser un operador que actúa sobre el espacio de Hilbert de los vectores de estado:

$$\Psi(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sum_{\vec{r}} \int \frac{d^3 p}{\sqrt{2\rho_0}} \left[a(\vec{r}, \vec{p}) u(\vec{r}, \vec{p}) e^{-i\vec{p}x} + b^+(\vec{r}, \vec{p}) v(\vec{r}, \vec{p}) e^{i\vec{p}x} \right]. \quad (6.11)$$

La reflexión espacial induce una transformación unitaria P ,

$$\Psi(x) \rightarrow \Psi'(x) = P \Psi(x) P^{-1} = \eta \delta_{(1)}^0 \delta_{(2)}^0 \Psi(x') \quad (6.12-a)$$

donde P actúa sobre a y b^+ pero no sobre u y v :

$$\begin{aligned} a'(\vec{r}, \vec{p}) &= P a(\vec{r}, \vec{p}) P^{-1} ; \\ b^+(\vec{r}, \vec{p}) &= P b^+(\vec{r}, \vec{p}) P^{-1} \end{aligned} \quad (6.12-b)$$

De (6.11) y (6.12) se deduce (cf. A6-1):

$$\sum_{\vec{r}} a'(\vec{r}, \vec{p}) u(\vec{r}, \vec{p}) = \eta \sum_{\vec{r}} a(\vec{r}, \vec{p}) \delta_{(1)}^0 \delta_{(2)}^0 u(\vec{r}, \vec{p}) \quad (6.13-a)$$

$$\sum_{\vec{r}} b^+(\vec{r}, \vec{p}) v(\vec{r}, \vec{p}) = \eta \sum_{\vec{r}} b^+(\vec{r}, \vec{p}) \delta_{(1)}^0 \delta_{(2)}^0 v(\vec{r}, \vec{p}) \quad (6.13-b)$$

En A6-1 demostramos que $\delta_{(1)}^0 \delta_{(2)}^0 u(\vec{r}, -\vec{p})$ pertenece al subespacio subtendido por $u(\vec{r}, \vec{p})$ (\vec{p} fijo, $\vec{r} = -2, 0, 2$), o sea:

$$\delta_{(1)}^0 \delta_{(2)}^0 u(\vec{r}, -\vec{p}) = \sum_{\vec{r}'} \lambda(\vec{r}, \vec{r}', \vec{p}) u(\vec{r}', \vec{p}) \quad (6.14-a)$$

con λ = número; análogamente,

$$\delta_{(1)}^0 \delta_{(2)}^0 v(\vec{r}, \vec{p}) = \sum_{\vec{r}'} \mu(\vec{r}, \vec{r}', \vec{p}) v(\vec{r}', \vec{p}) \quad (6.14-b)$$

De (6.13) y (6.14),

$$a'(\vec{r}, \vec{p}) = \eta \sum_{\vec{r}'} \lambda(\vec{r}, \vec{r}', \vec{p}) a(\vec{r}', -\vec{p}) \quad (6.15-a)$$

$$b^+(\vec{r}, \vec{p}) = \eta^* \sum_{\vec{r}'} \mu^*(\vec{r}, \vec{r}', \vec{p}) b^+(\vec{r}', -\vec{p}) \quad (6.15-b)$$

λ y μ sólo pueden determinarse si se especifica la definición de \vec{r} [ver las definiciones A y B en A4-1 (spin $\frac{1}{2}$) y A4-2 (spin 1)].

En A6-1 se demuestra que:

A) Con la definición A es

$$\lambda(\vec{r}, \vec{r}', \vec{p}) = +\delta_{\vec{r}, \vec{r}'} \quad ; \quad \mu(\vec{r}, \vec{r}', \vec{p}) = +\delta_{\vec{r}, \vec{r}'} \quad (6.16-a)$$

por lo que

$$a'(\vec{r}, \vec{p}) = +\eta a(\vec{r}, -\vec{p}) \quad ; \quad b^+(\vec{r}, \vec{p}) = +\eta^* b^+(\vec{r}, -\vec{p}); \quad (6.16-b)$$

[para spin $\frac{1}{2}$ es

$$a'(\vec{r}, \vec{p}) = \eta a(\vec{r}, -\vec{p}) \quad ; \quad b^+(\vec{r}, \vec{p}) = -\eta^* b^+(\vec{r}, -\vec{p})] \quad (6.16)''''$$

B) Con la definición B es

$$\lambda(\vec{r}, \vec{r}', \vec{p}) = +\delta_{\vec{r}, -\vec{r}'} \quad ; \quad \mu(\vec{r}, \vec{r}', \vec{p}) = +\delta_{\vec{r}, -\vec{r}'} \quad (6.17-a)$$

por lo que

$$a'(\vec{r}, \vec{p}) = +\eta a(-\vec{r}, -\vec{p}); \quad b^+(\vec{r}, \vec{p}) = +\eta^* b^+(-\vec{r}, -\vec{p}) \quad (6.17-b)$$

[para spin $\frac{1}{2}$ es

$$a'(\vec{r}, \vec{p}) = \eta a(-\vec{r}, -\vec{p}) \quad ; \quad b^+(\vec{r}, \vec{p}) = -\eta^* b^+(-\vec{r}, -\vec{p})] \quad (6.17)''''$$

6.c - CONJUGACION PARTICULA-ANTIPARTICULA.

En las definiciones y desarrollos seguimos el ordenamiento dado en el libro de Leite Lopes¹⁶, Cap. 4. Abreviación: "Conjugación partícula-antipartícula" = "Conjugación-C". La conjugación-C para partículas de spin 1 en formalismos de este tipo fué estudiada por primera vez por Belinfante². Belinfante usa la ecuación (6.21) como definición; no conecta la misma con la 2a. cuantificación. Nosotros procederemos así:

Sea Ψ_0 el vector de estado del vacío; en base a los operadores creación y destrucción se define el operador conjugación-C mediante

$$C a^\dagger(\mathbf{r}, \vec{p}) \Psi_0 = \xi^* b^\dagger(\mathbf{r}, \vec{p}) \Psi_0 \quad (6.18-a)**$$

$$C b^\dagger(\mathbf{r}, \vec{p}) \Psi_0 = \xi a^\dagger(\mathbf{r}, \vec{p}) \Psi_0 \quad (6.18-b)**$$

$$C \Psi_0 = \Psi_0 \quad (6.18-c)**$$

donde ξ es un factor de fase:

$$\xi \xi^* = 1 \quad (6.18-d)**$$

Definimos una matriz $C_{i_1 i_2, j_1 j_2}$ que opera en el espacio spinorial mediante⁺

$$u(\mathbf{r}, \vec{p}) = C \bar{v}(\mathbf{r}, \vec{p}) \quad (6.19-a)$$

$$v(\mathbf{r}, \vec{p}) = C \bar{u}(\mathbf{r}, \vec{p}) \quad (6.19-b)$$

Usando el desarrollo en ondas planas (4.29) es fácil demostrar que

$$\begin{aligned} C \Psi C^{-1} &= \xi C \Psi \\ C \bar{\Psi} C^{-1} &= \xi^* \bar{\Psi} C^{-1} \end{aligned} \quad (6.20)$$

Entonces, usando la representación (4.30) de las u y v en términos de spinores de spin $\frac{1}{2}$ (Cap. 4) se deduce

$$C = C_{(1)} C_{(2)} \quad (6.21)**$$

donde C es la matriz usada en la conjugación partícula-antipartícula para spin $\frac{1}{2}$:

$$u(\mathbf{r}, \vec{p}) = C \bar{v}(\mathbf{r}, \vec{p}) \quad ; \quad v(\mathbf{r}, \vec{p}) = C \bar{u}(\mathbf{r}, \vec{p}) \quad (6.22-a)**$$

$$C^{-1} \gamma^\mu C = -\gamma^{\mu T} \quad (6.22-b)**$$

$$C^T = -C \quad (6.22-c)**$$

6.d - TRANSFORMACIONES INDUCIDAS POR LA INVERSION TEMPORAL.

Sólo nos ocuparemos de la teoría número 0. Sea la inversión temporal

$$x = (x^0, \vec{x}) \rightarrow x' = (-x^0, \vec{x}). \quad (6.23)**$$

Toda transformación antilineal inducida sobre Ψ será de la forma

$$\Psi(x) \rightarrow \Psi'(x') = \zeta B \Psi(x), \quad \zeta \zeta^* = 1 \quad (6.24-a)$$

donde hemos separado el factor de fase ζ por conveniencia posterior;

⁺ En spin $\frac{1}{2}$ se definió C tal que $u = C \bar{v}^T$ pero aquí $\bar{r}^T = \bar{v}$.

B_{i_1, i_2, j_1, j_2} es una matriz que opera sobre el espacio spinorial. En spin $\frac{1}{2}$ se suele poner $\psi'(x') = \mathcal{B} \overline{\psi}^\dagger(x)$ pero aquí $\psi^\dagger = \psi$.

Exigimos invariancia de forma de las ecuaciones de B-W ante la inversión (6.23); hemos encontrado (la verificación es directa) que se mantiene la invariancia si ponemos

$$\mathcal{B} = B_{(1)} B_{(2)} \tag{6.24-b}$$

donde B es la matriz usada para la inversión temporal del electrón, es decir tal que

$$\left. \begin{aligned} B^{-1} \gamma^0 B &= \gamma^{0T}, & B^{-1} \vec{\gamma} B &= -\vec{\gamma}^T \\ B^\dagger &= B^{-1}, & B^T &= -B. \end{aligned} \right\} \tag{6.25-a)**$$

$$\tag{6.25-b)**$$

Usualmente se pone $B = \gamma^0 \gamma^3 e$, $\tag{6.25-b)**$
con e definida por (6.22).

La invariancia de forma de las ecuaciones de B-W se mantiene cualquiera sea al factor de fase ζ .

$\overline{\psi}$ se transforma según,

$$\overline{\psi}(x) \rightarrow \overline{\psi}'(x') = \zeta^* \overline{\psi}(x) \mathcal{B}^{-1} \tag{6.24-c}$$

Pero por qué exigimos una transformación antilineal? Es fácil demostrarlo imitando un argumento usado para otros spines: Por el Cap. 10 la ecuación de B-W en presencia de un campo electromagnético A_μ , $F_{\mu\nu}$, es (ec. 10.3)

$$\begin{aligned} (i\partial_\mu - e A_\mu) \gamma_{(1)}^\mu \psi &= m \psi - \frac{i e F_{\mu\nu}}{\partial^m} (\gamma_{(1)}^\mu - \gamma_{(2)}^\mu) (\gamma_{(1)}^\nu + \gamma_{(2)}^\nu) \psi \\ \psi &= \psi^\dagger; \end{aligned} \tag{6.25}$$

imponemos invariancia de forma de (6.25) ante la inversión (6.23); usamos la transformación conocida del campo electromagnético:

$$\begin{aligned} A'_0(x') &= A_0(\vec{x}), & \vec{A}'(x') &= -\vec{A}(\vec{x}) \\ F'_{0\kappa}(x') &= F_{0\kappa}(x), & F'_{\kappa\ell}(x') &= -F_{\kappa\ell}(x); \end{aligned} \tag{6.25)**$$

si ensayamos satisfacer la invariancia de (6.25) mediante una transformación lineal

$$\psi(x) \rightarrow \psi'(x') = \mathcal{B}' \psi(x)$$

obtenemos fácilmente contradicción. Este problema no se presenta usando la transformación antilineal (6.24). Finalmente, admitiendo continuidad respecto de A_μ , no podemos usar una transformación lineal ni siquiera para los campos libres que consideramos en los Cap. 1 a 9.

6.e - LAS FORMAS BILINEALES $\overline{\psi} M \psi$ Y LAS OPERACIONES DE SIMETRÍA.

REPRESENTACIONES TENSORIALES DEL GRUPO DE LORENTZ.

6.e-1) Introducción.

Como en spin $\frac{1}{2}$ estamos interesados en formas bilineales en la función de

onda; la forma bilineal algebraica más general es

$$\bar{\Psi} M \Psi$$

donde M_{i_1, i_2, j_1, j_2} es una matriz arbitraria. En spin $\frac{1}{2}$ se plantearon dos cuestiones:

- 1) Hallar una base en el espacio de las formas $\bar{\Psi} M \Psi$;
- 2) Seleccionar la base de manera que sus elementos sean representaciones tensoriales del grupo de Lorentz.

Es bien conocida la solución:

$$\bar{\Psi} I \Psi ; \bar{\Psi} \gamma^\mu \Psi ; \bar{\Psi} \sigma^{\mu\nu} \Psi ; \bar{\Psi} \gamma^5 \gamma^\mu \Psi ; i \bar{\Psi} \gamma^5 \Psi \quad (6.27)^{**}$$

La solución (6.27) de las cuestiones 1 y 2 para spin $\frac{1}{2}$ es uno de los instrumentos más importantes con que cuenta la teoría.

Intentaremos plantear y resolver (dentro de lo posible) las cuestiones 1 y 2 para spin 1. En esta sección consideraremos la cuestión 2: Proponemos 16^2 formas,

$$\bar{\Psi} I_{(1) I_{(2)}} \Psi, \bar{\Psi} \gamma_{(1)}^\mu I_{(2)} \Psi, \dots, -\bar{\Psi} \gamma_{(1)}^5 \gamma_{(2)}^5 \Psi. \quad (6.28)$$

y desprecupándonos de si forman base o no, demostraremos que son representaciones tensoriales del grupo de Lorentz; también estudiaremos su comportamiento ante la conjugación-C. En la sección 6.f analizaremos el problema más difícil: Como restringir o modificar (6.28) de manera que forme base (cuestión 1) sin perder la covariancia relativista.

6.e-2) Lema.

"Si $\Psi, \Psi \in W$, las cantidades

$$Q^{\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_m; \lambda'_1 \lambda'_2 \dots \lambda'_m} =_{df} \bar{\Psi}(x) \gamma_{(\lambda_1)}^{\lambda'_1} \gamma_{(\lambda_2)}^{\lambda'_2} \dots \gamma_{(\lambda_m)}^{\lambda'_m} \Psi(y) \quad (6.29)^+$$

se comportan ante el grupo ortocrono de Lorentz como tensores de orden $m'+m$."

Nota: Tomamos Ψ y Ψ de la misma paridad: en (6.9),

$$\Psi = \Psi \quad (6.30)$$

Demostración: Basta hallar por separado las leyes de transformación ante:

A) Subgrupo de las transformaciones infinitésimas (propias):

Por Secc. 6.a-1 ante la rotación (6.1) $Q^{\lambda_1 \dots \lambda'_m; \lambda''_1 \dots \lambda''_m}(x, y)$

se transforma en

$$[Q'(x', y')]^{\lambda_1 \dots \lambda'_m; \lambda''_1 \dots \lambda''_m} = \bar{\Psi}(x) D^{-1} \gamma_{(\lambda_1)}^{\lambda'_1} \gamma_{(\lambda_2)}^{\lambda'_2} \dots \gamma_{(\lambda_m)}^{\lambda'_m} D \Psi(y) = \bar{\Psi}(x) [D^{-1} \gamma_{(\lambda_1)}^{\lambda'_1} D]_{(\lambda_1)} \dots [D^{-1} \gamma_{(\lambda_m)}^{\lambda'_m} D]_{(\lambda_m)} \Psi(y)$$

Por la teoría de spin $\frac{1}{2}$ es bien sabido que

$$D^{-1} \gamma^\lambda D = \ell^\lambda{}_\nu \gamma^\nu, \quad (6.31)^{**}$$

+ "df" significa "por definición".

de donde,

$$\left[Q'(x', y') \right]^{\lambda'_1 \dots \lambda'_m; \lambda''_1 \dots \lambda''_m} = l^{\lambda'_1}_{\lambda_1} \dots l^{\lambda'_m}_{\lambda_m} l^{\lambda''_1}_{\lambda_1} \dots l^{\lambda''_m}_{\lambda_m} \times$$

$$\times \left[Q(x, y) \right]^{\nu'_1 \dots \nu'_m; \nu''_1 \dots \nu''_m} \quad (6.32)$$

B) Reflexiones espaciales:

Usar análogamente Secc. 6.b; las fases φ_ψ y φ_ψ desaparecen debido a (6.30).

6.e-3) Tabla de 16^2 formas bilineales que se agrupan en representaciones tensoriales del grupo de Lorentz.

En la tabla 6-1 se dan las propiedades de transformación de todas las 16^2 formas del tipo (6.28) (la demostración se esbozará más abajo), y una abreviatura que usaremos para las mismas.

Los signos menos y los factores i provienen de haber conservado los factores i al efectuar los productos tensoriales $\Gamma^A_{(1)} \Gamma^B_{(2)}$ donde $\Gamma^A = I, \gamma^A, \sigma^{\mu\nu}, \gamma^5 \gamma^\mu, i \gamma^5, \quad A = 1, 2, \dots, 16; \quad (6.33)^{**}$ a su vez los factores i en (6.33) son los frecuentemente elegidos para obtener $\bar{\psi} \Gamma^A \psi = \text{real en spin } \frac{1}{2}$; el resultado, es por supuesto, $\bar{\psi} \Gamma^A_{(1)} \Gamma^B_{(2)} \psi = \text{real}.$

TABLA 6-1

FORMAS BILINEALES QUE SE AGRUPAN EN REPRESENTACIONES TENSORIALES DEL GRUPO DE LORENTZ.

Forma bilineal	Abreviatura	Carácter tensorial si $\Psi, \psi \in W$
$\bar{\Psi}(x) I_{(0)} I_{(2)} \Psi(y)$	F^5	escalar
$\bar{\Psi}(x) I_{(0)} \delta_{(2)}^\mu \Psi(y)$	$F^5; \mu$	vector
$\bar{\Psi}(x) I_{(0)} \sigma_{(2)}^{\mu\nu} \Psi(y)$	$F^5; \mu\nu$	tensor antisimétrico de 2° orden
$\bar{\Psi}(x) I_{(0)} \delta_{(2)}^5 \delta_{(2)}^\mu \Psi(y)$	$F^5; 5\mu$	pseudovector
1 $\bar{\Psi}(x) I_{(1)} \delta_{(2)}^5 \Psi(y)$	$F^5; 5$	pseudoescalar
$\bar{\Psi}(x) \delta_{(1)}^\mu I_{(2)} \Psi(y)$	$F^{\mu; 5}$	vector
$\bar{\Psi}(x) \delta_{(1)}^\mu \delta_{(2)}^\nu \Psi(y)$	$F^{\mu; 5\nu}$	tensor de 2° orden
$\bar{\Psi}(x) \delta_{(1)}^\lambda \sigma_{(2)}^{\mu\nu} \Psi(y)$	$F^{\lambda; 5\mu\nu}$	tensor de 3er. orden, antisimétrico en $\mu\nu$.
$\bar{\Psi}(x) \delta_{(1)}^\mu \delta_{(2)}^5 \delta_{(2)}^\nu \Psi(y)$	$F^{\mu; 55\nu}$	pseudotensor de 2° orden
1 $\bar{\Psi}(x) \delta_{(1)}^\mu \delta_{(2)}^5 \Psi(y)$	$F^{\mu; 55}$	pseudovector
$\bar{\Psi}(x) \sigma_{(1)}^{\mu\nu} I_{(2)} \Psi(y)$	$F^{\mu\nu; 5}$	tensor antisimétrico de 2° orden
$\bar{\Psi}(x) \sigma_{(1)}^{\mu\nu} \delta_{(2)}^\lambda \Psi(y)$	$F^{\mu\nu; 5\lambda}$	tensor de 3er. orden, antisimétrico en $\mu\nu$.
$\bar{\Psi}(x) \sigma_{(1)}^{\mu\nu} \sigma_{(2)}^{\lambda\rho} \Psi(y)$	$F^{\mu\nu; 5\lambda\rho}$	tensor de 4° orden, antisimétrico en $\mu\nu$ y en $\lambda\rho$.
$\bar{\Psi}(x) \sigma_{(1)}^{\mu\nu} \delta_{(2)}^5 \delta_{(2)}^\lambda \Psi(y)$	$F^{\mu\nu; 55\lambda}$	pseudotensor de 3er. orden, antisimétrico en $\mu\nu$.
1 $\bar{\Psi}(x) \sigma_{(1)}^{\mu\nu} \delta_{(2)}^5 \Psi(y)$	$F^{\mu\nu; 55}$	pseudotensor de 2° orden, antisimétrico en $\mu\nu$.
$\bar{\Psi}(x) \delta_{(1)}^5 \delta_{(1)}^\mu I_{(2)} \Psi(y)$	$F^{5\mu; 5}$	pseudovector
$\bar{\Psi}(x) \delta_{(1)}^5 \delta_{(1)}^\mu \delta_{(2)}^\nu \Psi(y)$	$F^{5\mu; 5\nu}$	pseudotensor de 2° orden.
$\bar{\Psi}(x) \delta_{(1)}^5 \delta_{(1)}^\lambda \sigma_{(2)}^{\mu\nu} \Psi(y)$	$F^{5\lambda; 5\mu\nu}$	pseudotensor de 3er. orden, antisimétrico en $\mu\nu$.
$\bar{\Psi}(x) \delta_{(1)}^5 \delta_{(1)}^\mu \delta_{(2)}^5 \delta_{(2)}^\nu \Psi(y)$	$F^{5\mu; 55\nu}$	tensor de 2° orden
1 $\bar{\Psi}(x) \delta_{(1)}^5 \delta_{(1)}^\mu \delta_{(2)}^5 \Psi(y)$	$F^{5\mu; 55}$	vector
1 $\bar{\Psi}(x) \delta_{(1)}^5 I_{(2)} \Psi(y)$	$F^{5; 5}$	pseudoescalar
1 $\bar{\Psi}(x) \delta_{(1)}^5 \delta_{(2)}^\mu \Psi(y)$	$F^{5; 5\mu}$	pseudovector
1 $\bar{\Psi}(x) \delta_{(2)}^5 \sigma_{(2)}^{\mu\nu} \Psi(y)$	$F^{5; 5\mu\nu}$	pseudotensor de 2° orden, antisimétrico en $\mu\nu$.
1 $\bar{\Psi}(x) \delta_{(2)}^5 \delta_{(2)}^5 \delta_{(2)}^\mu \Psi(y)$	$F^{55; 5\mu}$	vector
- $\bar{\Psi}(x) \delta_{(2)}^5 \delta_{(2)}^5 \Psi(y)$	$F^{55; 55}$	escalar

La regla usada para la abreviatura es autoevidente, y permite por un lado reconstruir sin esfuerzo la forma bilineal, y por el otro, tener presente el carácter tensorial de la misma.

Para demostrar el carácter tensorial debe usarse el lema 6.e-2 y recordar

$$\gamma^5 = \frac{1}{4!} \epsilon_{\mu\nu\lambda\rho} \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\lambda \gamma^\rho \quad (6.34-a)**$$

$\epsilon_{\mu\nu\lambda\rho}$ es el pseudotensor de Levi-Civita, totalmente antisimétrico y tal que

$$\epsilon_{0123} = +1. \quad (6.34-b)**$$

(Nosotros usamos el γ^5 hermitiano:

$$(\gamma^5)^2 = +I. \quad (6.34-c)**$$

Usando 6.e-2 y (6.34-a) y (b) los cálculos son directos.

Para utilización posterior recordamos que

$$\gamma^5 \sigma^{\mu\nu} = -\frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \sigma^{\alpha\beta} \quad (6.34-d)**$$

6.e-4) Transformación de las formas bilineales ante la conjugación particula-antipartícula.

Usando las ecuaciones (6.20), (6.21) y (6.22) se calcula fácilmente la transformación ante conjugación-C de los elementos de la tabla 6-1. El resultado es⁺:

$$\begin{aligned} \bar{\Psi} \Gamma_{(a)}^A \Gamma_{(b)}^B \Psi \rightarrow + \bar{\Psi} \Xi_{(a)}^A \Xi_{(b)}^B \Psi \\ \text{para } F^i, F^i{}^{5\mu}, F^i{}^5, F^{\mu\nu}, F^{\lambda\mu\nu}, F^{\mu\nu\lambda}, F^{\mu\nu\lambda\rho}, F^{5\mu}, F^{5\mu;5\nu}, \\ F^{5\lambda;5}, F^{5\lambda}, F^{5;5\mu} \text{ y } F^{5;5}. \end{aligned} \quad (6.35-a)$$

$$\begin{aligned} \bar{\Psi} \Gamma_{(a)}^A \Gamma_{(b)}^B \Psi \rightarrow - \bar{\Psi} \Xi_{(a)}^A \Xi_{(b)}^B \Psi \\ \text{para } F^{i\mu}, F^{i\mu\nu}, F^{\mu;}, F^{\mu;5\nu}, F^{\mu;5}, F^{\mu\nu;}, F^{\mu\nu;5\lambda}, F^{\mu\nu;5}, F^{5\mu;}, F^{5\lambda;}, \\ F^{5\mu;5\nu} \text{ y } F^{5\mu;5}. \end{aligned} \quad (6.35-b)$$

6.f - EL PROBLEMA DE HALLAR UNA BASE MANIFIESTAMENTE COVARIANTE PARA EL ESPACIO DE LAS FORMAS BILINEALES.

6.f-1) Introducción.

El objeto de esta sección 6.f es seleccionar o modificar los elementos de la tabla 6-1 de manera que dentro de lo posible:

A) formen base en el espacio de $\Psi M \Psi$ con $\Psi, \bar{\Psi} \in W_{sp}^p$ (+ problema 2, Secc. 6.1, y que)

B) no se pierda la covariancia relativista conseguida en Secc. 6.e; en otras palabras, los elementos de la base deben continuar siendo agrupables en representaciones tensoriales del grupo de Lorentz.

+ Γ^A está definida en (6.33).

++ Los espacios spinoriales W_{sp}^p , ... se definieron en Secc. 2.c-3.

Primero debemos resolver varios problemas previos, que consisten en resolver la misma cuestión en espacios más amplios (e.g. ϵ_{sp} , ϵ_{sp}^{sim} , ...) que W_{sp}^p . Para unificar la notación, indicaremos con $K'K$ al espacio de las formas bilineales $\bar{\Psi} M \Psi$ con $\Psi \in K'$, $\Psi \in K$

Los 16^2 elementos de la tabla 6-1 no forman base en $\bar{W}_{sp}^{p'}$ W_{sp}^p porque siendo 6 la dimensión de W_{sp}^p la dimensión de $\bar{W}_{sp}^{p'}$ W_{sp}^p es 6^2 ($\neq 16^2$); para tener elementos linealmente independientes en $\bar{W}_{sp}^{p'}$ W_{sp}^p deberíamos, pues, eliminar $16^2 - 6^2$ elementos de la tabla 6-1. Lo primero que uno ensaya es ver que relaciones de dependencia originan las condiciones

$$\Psi_{ij} = \Psi_{ji} \quad (1.2-b)$$

$$y \quad H_{(1)} \Psi = H_{(2)} \Psi \quad ; \quad (2.3-c)$$

usando estas relaciones, uno puede suprimir elementos linealmente independientes en la tabla 6-1; pero entonces los elementos remanentes ya no se pueden agrupar en representaciones tensoriales del grupo de Lorentz. Por qué? Porque la utilización de 2.3) rompa el carácter manifiesto de la covariancia relativista.

En cambio, podremos acercarnos (pero no totalmente) a los objetivos A y B si permitimos que los coeficientes del desarrollo de $\bar{\Psi} M \Psi$ en elementos de la base dependen de los momentos (con lo cual el problema deja de ser puramente matricial).

Sea p el momento del cual depende $\Psi_{(p)} \in W_{sp}^p$; p' el de $\Psi_{(p')} \in W_{sp}^{p'}$; entonces en Secc. 6.f-6 hallaremos para toda matriz M (es decir para toda $\bar{\Psi}_{(p')} M \Psi_{(p)} \in \bar{W}_{sp}^{p'} W_{sp}^p$) un desarrollo del tipo

$$\bar{\Psi}_{(p')} M \Psi_{(p)} = \sum_{\Lambda} C^{\Lambda}(p, p') \bar{\Psi}_{(p')} M^{\Lambda} \Psi_{(p)}. \quad (6.36)$$

En este desarrollo los $C^{\Lambda}(p, p')$ serán funciones no matriciales de p^{μ} y p'^{μ} (con $p^0 = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$); los C^{Λ} serán tensores si el 1er. miembro es un tensor (pero no necesariamente del mismo orden), y las $\bar{\Psi}_{(p')} M^{\Lambda} \Psi_{(p)}$ serán agrupables en representaciones tensoriales del grupo de Lorentz, de manera que el 2º miembro de (6.36) sea manifiestamente covariante.

En spin $\frac{1}{2}$ los coeficientes del desarrollo de $\bar{\Psi} M \Psi$ en combinación lineal de las (6.27) no son funciones de \vec{p} y \vec{p}' si M no depende de \vec{p} y \vec{p}' . Por qué aquí deberemos trabajar con coeficientes $C^{\Lambda}(p, p')$? Porque mientras en spin $\frac{1}{2}$ no hay condición inicial, aquí el momento \vec{p} aparece en la definición del espacio spinorial W_{sp}^p (cf. (2.4)). Esto nos traerá inconvenientes (cf. Secc. 6.f-6).

Pero, como hemos anticipado, antes de poder obtener la solución (6.36)

+Con más precisión: nosotros no hemos conseguido agruparlos.

debemos resolver problemas previos, que son:

- Base para $\overline{E}_{sp} \ E_{sp}$;
- " " $\overline{E}_{sp}^{sim} \ E_{sp}^{sim}$;

-obtención de un operador Λ^V puramente matricial e "invariante" relativista que proyecta \overline{E}_{sp}^{sim} (dimensión = 10) en un subespacio \overline{E}_{sp}^V tal que si bien $\overline{E}_{sp}^V \neq W_{sp}^P$, sea

$$\dim \overline{E}_{sp}^V = \dim W_{sp}^P = 6 \quad (6.37);$$

[Λ^I cumple (6.37) (cf. Secc. 2.c-5) pero no nos sirve porque no es "invariante" relativista] ;

- base para $\overline{E}_{sp}^V \ E_{sp}^V$.

6.f-2) Base para $\overline{E}_{sp}^V \ E_{sp}^V$.

En primer lugar, es trivial demostrar que $\overline{E}_{sp} \ E_{sp}$ es un espacio vectorial.

En segundo lugar, la dimensión de \overline{E}_{sp} es $4^2 = 16$; por lo tanto, dimensión de $\overline{E}_{sp} \ E_{sp} = 16^2$; (6.38)

una demostración de (6.38) (con método usual) se da en A6-2.

En tercer lugar, los elementos de $\overline{E}_{sp} \ E_{sp}$ dados en tabla 6-1 (con Ψ ,

$\Psi \in E_{sp}$) son linealmente independientes según demostramos en A6-2.

Pero hay 16^2 elementos $F^{A;B}$ en la tabla 6-1. Por lo tanto, (ver (6.38)) las 16^2 formas bilineales $F^{A;B}$ dadas en tabla 6-1, con $\Psi, \Psi \in E_{sp}$, forman base en $\overline{E}_{sp} \ E_{sp}$.

6.f-3) Base (superabundante) para $\overline{E}_{sp}^{sim} \ E_{sp}^{sim}$.

A) 135 FORMAS BILINEALES SUFICIENTES PARA SUBTENDER $\overline{E}_{sp}^{sim} \ E_{sp}^{sim}$.
 Para abreviar la escritura eliminando las reiteradas Ψ, Ψ , conviene usar la notación de equivalencia tensorial (Secc. 2.d-3), hallar formas bilineales linealmente independientes en \overline{E}_{sp}^{sim} ,

$$\overline{\Psi} \Gamma^A \Psi \quad A=1,2,\dots,\Psi, \Psi \in \overline{E}_{sp}^{sim}$$

es hallar matrices Γ^A tales que

$$\sum_A c_A \Gamma^A \sim_{\overline{E}_{sp}^{sim}} 0 \Rightarrow c_A = 0. \quad (6.39)$$

Hallar una base

$$\overline{\Psi} \Gamma^A \Psi, \quad A=1,2,\dots, \Psi, \Psi \in \overline{E}_{sp}^{sim}$$

en $\overline{E}_{sp}^{sim} \ E_{sp}^{sim}$ es hallar un número suficiente de matrices Γ^A tales que

- 1) cumplan (6.39)

2) para toda M exista el desarrollo

$$M \sim_{\overline{E}_{sp}^{sim}} \sum_A c_A \Gamma^A \quad (6.40)$$

Por ser las $F^{A;B}$ de tabla 6-1 base para $\overline{E}_{sp} \ E_{sp}$, podemos afirmar que

para toda M existe el desarrollo

$$M \sim_{\overline{E}_{sp}^{sim}} \sum_{A,B} d_{A,B} \Gamma_{(1)}^A \Gamma_{(2)}^B \quad (6.41)$$

(las $d_{A,B}$ son números; las Γ^A se definieron en (6.33)). Por (2.31) deducimos

que para toda M existe el desarrollo

$$M \sim_{\overline{E}_{sp}^{sim}} \sum_{B=1}^4 \sum_{A \in B} c_{A,B} \Gamma_{(1)}^A \Gamma_{(2)}^B \quad (6.42)$$

Con la notación de tabla 6-1 podemos escribir, pues, la tabla siguientes:

TABLA 6-2

135 FORMAS BILINEALES SUFICIENTES PARA SUBTENDER ϵ_{sp}^{sim} ϵ_{sp}^{sim}

Forma	Restricción sobre los índices	Número máximo de componentes independientes
F^i	-	1
$F^{i\mu}$	-	4
$F^{i\mu\nu}$	$\mu < \nu$	6
$F^{i5\mu}$	-	4
F^{i5}	-	1
$F^{\lambda i \nu}$	$\mu \leq \nu$	10
$F^{\lambda i \mu \nu}$	$\mu < \nu$	24
$F^{\mu i 5 \nu}$	-	15
$F^{\mu i 5}$	-	4
$F^{\mu \nu i \lambda \rho}$	$\mu < \nu; \lambda < \rho; \mu \leq \lambda; \nu \leq \rho$	21
$F^{\mu \nu i 5 \lambda}$	$\mu < \nu$	24
$F^{\mu \nu i 5}$	$\mu < \nu$	6
$F^{5\mu i 5 \nu}$	$\mu < \nu$	10
$F^{5\mu i 5}$	-	4
$F^{5 i 5}$	-	1

Las componentes que violan la restricción sobre los índices se obtienen recordando que

$$1) (2.31) \rightarrow F^{A;B} = F^{B;A} \quad (6.43-a)$$

$$2) \sigma^{\mu\nu} = -\sigma^{\nu\mu} \quad (6.43-b)$$

y usando la

$$F^{\mu i 5}_{\mu} = 0 \quad (6.43-c)$$

que se demuestra en (B).

El número máximo de componentes independientes de cada representación tensorial del grupo de Lorentz se obtiene con las relaciones de simetría (6.43); por qué lo de "máximo"? porque pueden (y deben) haber más relaciones entre las $F^{A;B} \in \epsilon_{sp}^{sim} \epsilon_{sp}^{sim}$; esas relaciones deben existir ya que siendo

dimensión $\mathcal{E}_{sp}^{\text{sim}} = 10$, es

$$\text{dimensión } \mathcal{E}_{6p}^{\text{sim}} \mathcal{E}_{sp}^{\text{sim}} = 10^2 \quad (6.44)$$

mientras que en la tabla 6-2 hay 135 elementos: sobran 35.

B) DEMOSTRAREMOS QUE $F^{\mu; 5\nu}$ ES UN PSEUDOTENSOR DE TRAZA NULA:

En A6-3 demostramos que en la representación (2.6) de las γ^μ es

$$\gamma_{(1)}^\mu \gamma_{\mu(2)}^\nu = \begin{pmatrix} \Psi_{11} - \Psi_{33} & \Psi_{21} - \Psi_{34} & 0 & \Psi_{14} - \Psi_{23} \\ \Psi_{21} - \Psi_{34} & \Psi_{22} - \Psi_{44} & \Psi_{23} - \Psi_{14} & 0 \\ 0 & \Psi_{23} - \Psi_{14} & \Psi_{33} - \Psi_{11} & \Psi_{43} - \Psi_{12} \\ \Psi_{14} - \Psi_{23} & 0 & \Psi_{43} - \Psi_{12} & \Psi_{44} - \Psi_{22} \end{pmatrix}, \Psi \in \mathcal{E}^{\text{sim}}$$

En dicha representación la γ^5 de (6.34) es

$$\gamma^5 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (6.46)**$$

Por lo tanto, si $\Psi \in \mathcal{E}_{sp}^{\text{sim}}$ es

$$\gamma_{(2)}^5 \gamma_{(1)}^\mu \gamma_{\mu(2)}^\nu = \begin{pmatrix} 0 & \Psi_{14} - \Psi_{23} & \Psi_{11} - \Psi_{33} & \Psi_{21} - \Psi_{34} \\ \Psi_{23} - \Psi_{14} & 0 & \Psi_{12} - \Psi_{34} & \Psi_{22} - \Psi_{44} \\ \Psi_{33} - \Psi_{11} & \Psi_{34} - \Psi_{12} & 0 & \Psi_{23} - \Psi_{14} \\ \Psi_{34} - \Psi_{12} & \Psi_{44} - \Psi_{22} & \Psi_{14} - \Psi_{23} & 0 \end{pmatrix} \quad (6.47)$$

pero entonces

$$\Psi \in \mathcal{E}_{sp}^{\text{sim}} \rightarrow \gamma_{(2)}^5 \gamma_{(1)}^\mu \gamma_{\mu(2)}^\nu \Psi \in \mathcal{E}_{sp}^{\text{ant}} \quad (6.48)$$

por lo que

$$\gamma_{(1)}^\mu \gamma_{(2)}^5 \gamma_{\mu(2)}^\nu \sim \mathcal{E}_{6p}^{\text{sim}} \quad 0 \quad (6.49)$$

Q.E.D.

C) POR QUE NO ELIMINAMOS EN TABLA 6-2 LAS 35 FORMAS QUE SOBRAN PARA SUBTENDER $\mathcal{E}_{sp}^{\text{sim}} \mathcal{E}_{sp}^{\text{sim}}$?

Nuestro objetivo es en realidad intentar hallar una base para $\mathcal{W}_{sp}^p \mathcal{W}_{sp}^p$; nos hemos detenido en $\mathcal{E}_{6p}^{\text{sim}} \mathcal{E}_{sp}^{\text{sim}}$ sólo para sistematizar algo los pasos que permiten pasar de $\mathcal{E}_{sp} \mathcal{E}_{sp}$ (dimensión = $16^2 = 256$) a \mathcal{W}_{sp}^p (dimensión = $6^2 = 36$). Más breve que eliminar ahora las 35 formas que sobran en $\mathcal{E}_{sp}^{\text{sim}} \mathcal{E}_{sp}^{\text{sim}}$ será eliminarlas con el mismo procedimiento (uso de Λ^p) que nos permitirá obtener una base (sin elementos sobrantes) para $\mathcal{E}_{sp}^{\text{sim}} \mathcal{E}_{sp}^{\text{sim}}$, y de allí pasar a $\mathcal{W}_{sp}^p \mathcal{W}_{sp}^p$ (Seco. 6.f-4, -5 y -6).

Sin embargo, por completitud indicaremos un procedimiento que permite obtener una base no superabundante para \mathcal{E}_{sp}^{sim} . La identidad de Pauli²⁰ puede escribirse,

$$4 \delta_{i,j} \delta_{i',j'} = \left[I_{(1)} I_{(2)} + \gamma_{(1)}^{\mu} \gamma_{(2)}^{\mu} + \sigma_{(1)}^{\mu\nu} \sigma_{(2)}^{\mu\nu} + (\pm \gamma^5 \gamma^{\mu})_{(1)} (\pm \gamma^5 \gamma^{\mu})_{(2)} + \gamma_{(1)}^5 \gamma_{(2)}^5 \right] \quad (6.50)$$

Por otra parte, por (2.31) $4 \delta_{i,j} \delta_{i',j'} = \tilde{\mathcal{E}}_{sp}^{sim} 4 \delta_{i,i'} \delta_{j,j'}$ (6.51)

De (6.50) y (6.51) deducimos

$$\gamma_{(1)}^5 \delta_{(2)}^5 \tilde{\mathcal{E}}_{sp}^{sim} 3 I_{(1)} I_{(2)} - \gamma_{(1)}^{\mu} \gamma_{(2)}^{\mu} = \sigma_{(1)}^{\mu\nu} \sigma_{(2)}^{\mu\nu} (\pm \gamma^5 \gamma^{\mu})_{(1)} (\pm \gamma^5 \gamma^{\mu})_{(2)} \quad (6.52)$$

por lo que \mathcal{F}^{56} puede eliminarse de la tabla 6-2.

A continuación, pueden obtenerse un cierto número de relaciones "tipo identidad de Pauli" que permiten expresar $\gamma_{i,j}^{\mu} \delta_{i',j'}$, ... como combinación lineal de las $\gamma_{i,i'}^{\mu} \gamma_{j,j'}$. Iterando el procedimiento empleado para pasar de (6.50) a (6.52), se encuentran más relaciones "tipo (6.52)", con lo cual los elementos no independientes de tabla 6-2 pueden ser puestos explícitamente como combinación lineal de los 100 restantes.

6.f-4) Definición de los operadores proyección Λ^V y Λ^{VI} . Los espacios

$\mathcal{E}_{sp}^{sim V}$ y $\mathcal{E}_{sp}^{sim VI}$. Propiedades.

Definimos

$$\Lambda^V = \frac{1}{2} (I + \gamma_{(1)}^5 \gamma_{(2)}^5) \quad ; \quad \Lambda^{VI} = I - \Lambda^V = \frac{1}{2} (I - \gamma_{(1)}^5 \gamma_{(2)}^5); \quad (6.53)$$

son operadores proyección:

$$(\Lambda^V)^2 = \Lambda^V; \quad (\Lambda^{VI})^2 = \Lambda^{VI}; \quad \Lambda^V \Lambda^{VI} = \Lambda^{VI} \Lambda^V = 0. \quad (6.54)$$

Efectuamos la descomposición:

$$\mathcal{E}_{sp}^{sim} = \mathcal{E}_{sp}^{sim V} \oplus \mathcal{E}_{sp}^{sim VI}$$

mediante

$$\left. \begin{aligned} \Psi &= \Psi^V + \Psi^{VI} \in \mathcal{E}_{sp}^{sim} \\ \Psi^V &= \Lambda^V \Psi \in \mathcal{E}_{sp}^{sim V} \\ \Psi^{VI} &= \Lambda^{VI} \Psi \in \mathcal{E}_{sp}^{sim VI} \end{aligned} \right\} \quad (6.55)$$

Se demuestra trivialmente:

$$\Lambda^V \gamma_{(1)}^5 \gamma_{(2)}^5 = \gamma_{(1)}^5 \gamma_{(2)}^5 \Lambda^V = \Lambda^V; \quad (6.56)$$

$$\gamma_{(1)}^5 \Lambda^V = \delta_{(2)}^5 \Lambda^V; \quad \Lambda^V \gamma_{(1)}^5 = \Lambda^V \gamma_{(2)}^5 \quad (6.57)$$

$$\gamma_{(i)}^{\mu} \Lambda^V = \Lambda^{VI} \gamma_{(i)}^{\mu}; \quad \delta_{(i)}^{\mu} \Lambda^V = \Lambda^V \gamma_{(i)}^{\mu} \quad \text{if } 1, 2; \quad (6.58)$$

con esta última se obtiene

$$\gamma_{(i_1)}^{\mu_1} \gamma_{(i_2)}^{\mu_2} \dots \gamma_{(i_{2n})}^{\mu_{2n}} \Lambda^V = \Lambda^V \gamma_{(i_1)}^{\mu_1} \gamma_{(i_2)}^{\mu_2} \dots \gamma_{(i_{2n})}^{\mu_{2n}} \quad (6.59-a)$$

$$\gamma_{(i_1)}^{\mu_1} \gamma_{(i_2)}^{\mu_2} \dots \gamma_{(i_{2n+1})}^{\mu_{2n+1}} \Lambda^V = \Lambda^{VI} \gamma_{(i_1)}^{\mu_1} \gamma_{(i_2)}^{\mu_2} \dots \gamma_{(i_{2n+1})}^{\mu_{2n+1}} \quad (6.59-b)$$

donde $(i_j) = (1)$ ó (2) indistintamente; la (6.59) permanece válida con

$$\Lambda^V \longleftrightarrow \Lambda^{VI}$$

De (6.46) deducimos que en la representación usual (2.6) de las γ^{μ} es

$$\Psi^{\nu} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \Psi_{11} + \Psi_{33} & \Psi_{12} + \Psi_{34} & 2\Psi_{13} & \Psi_{14} + \Psi_{23} \\ \Psi_{12} + \Psi_{34} & \Psi_{22} + \Psi_{44} & \Psi_{23} + \Psi_{14} & 2\Psi_{24} \\ 2\Psi_{13} & \Psi_{23} + \Psi_{14} & \Psi_{33} + \Psi_{11} & \Psi_{34} + \Psi_{12} \\ \Psi_{14} + \Psi_{23} & 2\Psi_{24} & \Psi_{34} + \Psi_{12} & \Psi_{44} + \Psi_{22} \end{pmatrix} \quad (6.60)$$

Como sólo intervienen 6 combinaciones de las Ψ_{ij} es:

$$\text{dimensión } \mathcal{E}_{sp}^{\Delta \text{im} \nu} = 6 ; \quad (6.61-a)$$

por lo tanto,

$$\text{dimensión } \mathcal{E}_{sp}^{\Delta \text{im} \nu} \mathcal{E}_{op}^{\Delta \text{im} \nu} = 6^2 = 36 . \quad (6.61-b)$$

6.f-5) Base (propiamente dicha para $\mathcal{E}_{op}^{\Delta \text{im} \nu} \mathcal{E}_{op}^{\Delta \text{im} \nu}$).

Como $\mathcal{E}_{op}^{\Delta \text{im} \nu} \mathcal{E}_{sp}^{\Delta \text{im} \nu}$ es un subespacio de $\mathcal{E}_{op}^{\Delta \text{im} \nu} \mathcal{E}_{op}^{\Delta \text{im} \nu}$, $\mathcal{E}_{op}^{\Delta \text{im} \nu} \mathcal{E}_{sp}^{\Delta \text{im} \nu}$ puede ser subtendido por los 135 elementos de tabla 6-2; buscaremos relaciones entre los mismos (pensados como elementos de $\mathcal{E}_{op}^{\Delta \text{im} \nu} \mathcal{E}_{sp}^{\Delta \text{im} \nu}$) para satisfacer (6.61-b).

A) RELACIONES QUE VINCULAN ENTRE SI A DIFERENTES REPRESENTACIONES TENSORIALES DEL GRUPO DE LORENTZ.

Por (6.56),

$$\left. \begin{aligned} & \gamma_{(1)}^5 \gamma_{(2)}^5 \mathbf{I} \\ & (\gamma^5 \gamma^\mu)_{(1)} (\gamma^5 \gamma^\nu)_{(2)} \mathcal{E}_{sp}^{\Delta \text{im} \nu} \gamma_{(1)}^\mu \gamma_{(2)}^\nu \end{aligned} \right\} \quad (6.62)^+$$

Por (6.58),

$$\left. \begin{aligned} & \gamma_{(1)}^\mu \mathcal{E}_{sp}^{\Delta \text{im} \nu} 0 \\ & (\gamma^5 \gamma^\mu)_{(1)} \mathcal{E}_{sp}^{\Delta \text{im} \nu} 0 \\ & \gamma_{(1)}^\lambda \sigma_{(2)}^{\mu\nu} \mathcal{E}_{sp}^{\Delta \text{im} \nu} 0 \\ & \gamma_{(1)}^\mu \gamma_{(2)}^5 \mathcal{E}_{sp}^{\Delta \text{im} \nu} 0 \\ & \sigma_{(1)}^{\mu\nu} (\gamma^5 \gamma^\lambda)_{(2)} \mathcal{E}_{sp}^{\Delta \text{im} \nu} 0 \\ & (\gamma^5 \gamma^\mu)_{(1)} \gamma_{(2)}^5 \mathcal{E}_{sp}^{\Delta \text{im} \nu} 0 \end{aligned} \right\} \quad (6.63)$$

Usando (6.57) y (6.34-d) se obtiene

$$\sigma_{(1)}^{\mu\nu} \gamma_{(2)}^5 \mathcal{E}_{sp}^{\Delta \text{im} \nu} (\sigma^{\mu\nu} \gamma^5)_{(1)} = -\frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \sigma_{(1)}^{\alpha\beta} \quad (6.64)$$

Por lo tanto, para subtender $\mathcal{E}_{op}^{\Delta \text{im} \nu} \mathcal{E}_{op}^{\Delta \text{im} \nu}$ se pueden suprimir en tabla 6-2 las formas $F^{\lambda\mu}$, $F^{5\lambda}$, $F^{\lambda;\mu\nu}$, $F^{\lambda;5}$, $F^{\mu\nu;5\lambda}$, $F^{5\lambda;5\nu}$, $F^{5\lambda;5}$.

B) RELACIONES QUE VINCULAN ENTRE SI A ELEMENTOS DE UNA MISMA REPRESENTACION

+La notación para igualdades se dió en Secc. 2.d-1.

TENSORIAL.

B₁) F^{μ;ν}

Reemplazando (6.60) en (6.45) se obtiene

$$\gamma_{(4)}^\mu \gamma_{\mu(2)} = 0 \quad ; \quad (6.64'-a)$$

por lo tanto en $\epsilon_{sp}^{\text{sim}\sigma} \epsilon_{sp}^{\text{sim}\tau}$, F^{μ;ν} es de traza nula:

$$F_{\mu}^{\mu} = 0 \quad (6.64'-b)$$

Por lo tanto las componentes independientes de F^{μ;ν} bajan del número máximo 10 al número máximo 10 - 1 = 9.

B₂) F^{μ;5ν}

De (6.64'-a) se deduce inmediatamente que

$$\gamma_{(4)}^\mu (\gamma^5 \gamma_\mu)_{(2)} = 0 \quad ; \quad (6.65'-a)$$

por lo tanto en $\epsilon_{sp}^{\text{sim}\sigma} \epsilon_{sp}^{\text{sim}\tau}$ también F^{μ;5ν} es de traza nula:

$$F_{\mu}^{\mu;5} = 0, \quad (6.65'-b)$$

lo cual es consecuente con (6.49).

Demostremos ahora que F^{μ;5ν} es un tensor simétrico: Por (6.57)

$$\gamma_{(4)}^\mu (\gamma^5 \gamma^\nu)_{(2)} = - \gamma_{(4)}^\mu (\gamma^\nu \gamma^5)_{(2)} = - (\gamma^\mu \gamma^5)_{(2)} \gamma_{(2)}^\nu = (\gamma^5 \gamma^\mu)_{(2)} \gamma_{(2)}^\nu \quad (6.66-a)$$

usando ahora (2.31),

$$\gamma_{(4)}^\mu (\gamma^5 \gamma^\nu)_{(2)} \sim \epsilon_{sp}^{\text{sim}\sigma} \gamma_{(4)}^\nu (\gamma^5 \gamma^\mu)_{(2)}. \quad (6.66-b)$$

Llamando

$$a^{\mu\nu} =_{df} F^{\mu;5\nu} \quad (6.66-c)$$

resulta

$$a^{\mu\nu} = a^{\nu\mu}. \quad (6.66-d)$$

Las (6.65'-b) y (6.66-d) bajan el número máximo de componentes independientes de F^{μ;5ν} de 16 a 16 - 1 - 6 = 9.

B₃) F^{μν;λρ}

Las propiedades de simetría de F^{μν;λρ} son

$$F^{\mu\nu;\lambda\rho} = F^{\lambda\rho;\mu\nu} \quad (6.67-a)$$

$$F^{\mu\nu;\lambda\rho} = -F^{\nu\mu;\lambda\rho}; \quad F^{\mu\nu;\lambda\rho} = -F^{\mu\nu;\rho\lambda} \quad (6.67-b)$$

$$F^{\mu\nu;\lambda\rho} = -\frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu;\alpha\beta} \epsilon^{\lambda\rho;\gamma\delta} F^{\alpha\beta;\gamma\delta} \quad (6.67-c)$$

Las dos primeras son consecuencias triviales de (6.43); la 3a. se puede demostrar usando (6.57) y (6.34-d):

$$\sigma_{(1)}^{\mu\nu} \sigma_{(2)}^{\lambda\rho} = (\sigma^{\mu\nu} \gamma^5)_{(1)} (\sigma^{\lambda\rho} \gamma^5)_{(2)} = (-\frac{1}{2})^2 \epsilon^{\mu\nu;\alpha\beta} \epsilon^{\lambda\rho;\gamma\delta} \sigma_{(1)}^{\alpha\beta} \sigma_{(2)}^{\gamma\delta} \quad (6.67-d)$$

Escribiendo todos los elementos de F^{μν;λρ} y usando (6.67) puede verse que F^{μν;λρ} tiene a lo sumo 12 componentes independientes;

Pueden p. ej. elegirse

$$\begin{matrix}
 F^{01;01} & F^{01;02} & F^{01;03} & F^{01;12} & F^{01;13} & F^{01;23} & F^{02;03} & F^{02;12} & F^{02;13} \\
 F^{03;03} & F^{03;12} & & & & & & &
 \end{matrix}$$

Una consecuencia de (6.67-a') es

$$\sigma_{(1)}^{\mu\nu} \sigma_{\mu\nu(2)} = 4 \frac{\vec{\sigma}_{(1)} \cdot \vec{\sigma}_{(2)}}{\epsilon_{sp}^{\lambda\mu\nu\sigma}} = 4 \vec{\alpha}_{(1)} \cdot \vec{\alpha}_{(2)} \quad (6.67-c'')$$

donde como es habitual indicamos

$$\vec{\alpha} = \gamma^0 \vec{\gamma}; \quad \sigma^i = \sigma^{jk}, \quad ijk = 123 \text{ y permutaciones cíclicas} \quad (6.67-d)$$

C) NUEVAS RELACIONES QUE VINCULAN ENTRE SI A DIFERENTES REPRESENTACIONES TENSORIALES DEL GRUPO DE LORENTZ.

En A6-4 demostramos

$$\vec{\sigma}_{(1)} \cdot \vec{\sigma}_{(2)} = \frac{\epsilon_{sp}^{\lambda\mu\nu\sigma}}{\epsilon_{sp}^{\lambda\mu\nu\sigma}} \mathbf{I}; \quad (6.67-e-a)$$

por (6.67-c'') es lo mismo poner

$$\vec{\alpha}_{(1)} \cdot \vec{\alpha}_{(2)} = \mathbf{I} \quad (6.67-e-b)$$

$$\frac{1}{4} \sigma_{(1)}^{\mu\nu} \sigma_{\mu\nu(2)} = \mathbf{I} \quad (6.67-e-c)$$

También demostramos en A6-4 que

$$\sigma_{(1)}^{\mu\nu} \sigma_{(2)}^{\lambda\rho} \epsilon_{\mu\nu\lambda\rho} = 8 \mathbf{1} \delta_{(2)}^5 \quad (6.67-f)$$

D) OBTENCION DE UNA BASE PARA $\epsilon_{sp}^{\lambda\mu\nu\sigma}$ $\epsilon_{sp}^{\lambda\mu\nu\sigma}$

Hay 36 elementos independientes de tabla 6-2 que sobreviven como independientes frente a las relaciones halladas en A, B y C los cuales subtienden a $\epsilon_{sp}^{\lambda\mu\nu\sigma}$ $\epsilon_{sp}^{\lambda\mu\nu\sigma}$ (pues los elementos de tabla 6-2 subtienden a $\epsilon_{sp}^{\lambda\mu\nu\sigma}$ $\epsilon_{sp}^{\lambda\mu\nu\sigma}$). Pero por (6.61-b) la dimensión de $\epsilon_{sp}^{\lambda\mu\nu\sigma}$ $\epsilon_{sp}^{\lambda\mu\nu\sigma}$ es justamente 36; por lo tanto, no pueden existir nuevas relaciones que disminuyan aún más dicho número: esos 36 elementos forman base en $\epsilon_{sp}^{\lambda\mu\nu\sigma}$ $\epsilon_{sp}^{\lambda\mu\nu\sigma}$. De tablas 6-1 y 6-2 y de A, B y C obtenemos una selección posible:

TABLA 6-3

BASE (PROPIAMENTE DICHA) PARA $\epsilon_{sp}^{\text{sim } V}$ $\epsilon_{sp}^{\text{sim } V}$.

Forma bilineal	Abreviatura	Número de componentes independientes.	Relaciones entre elementos de una misma representación tensorial
$\bar{\Psi} \gamma_{(2)}^{\mu\nu} \Psi$	$F^{i\mu\nu}$	6	$F^{i\mu\nu} = -F^{i\nu\mu}$
$\bar{\Psi} \gamma_{(2)}^{\mu} \gamma_{(2)}^{\nu} \Psi$	$F^{\mu;\nu}$	9	$F^{\mu;\nu} = F^{\nu;\mu}$; $F^{\mu;\mu} = 0$
$\bar{\Psi} \gamma_{(1)}^{\mu} \gamma_{(1)}^{\nu} \gamma_{(2)}^{\rho} \Psi$	$F^{\mu,5\nu}$	9	$F^{\mu,5\nu} = F^{\nu,5\mu}$; $F^{\mu,5\mu} = 0$
$\bar{\Psi} \gamma_{(2)}^{\mu\nu} \gamma_{(2)}^{\lambda\rho} \Psi$	$F^{\mu\nu;\lambda\rho}$	12	$F^{\mu\nu;\lambda\rho} = F^{\lambda\rho;\mu\nu}$ $F^{\mu\nu;\lambda\rho} = -F^{\nu\mu;\lambda\rho}$ $F^{\mu\nu;\lambda\rho} = -F^{\mu\nu;\rho\lambda}$ $F^{\mu\nu;\lambda\rho} = -\frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu}{}_{\alpha\beta} \epsilon^{\lambda\rho}{}_{\delta\sigma} F^{\alpha\beta;\delta\sigma}$

Completamos resumiendo las relaciones que permiten expresar a los restantes elementos de tabla 6-2 en términos de la base hallada para

$\epsilon_{sp}^{\text{sim } V}$ $\epsilon_{sp}^{\text{sim } V}$:

TABLA 6-4

LAS FORMAS BILINEALES QUE SUBTIENDEN ϵ_{sp}^{sim} ϵ_{sp}^{sim} PERO QUE NO PERTENECEN A LA BASE HALLADA PARA ϵ_{sp}^{sim} ϵ_{sp}^{sim} SE DESARROLLAN EN TERMINOS DE ESTA.

Forma bilineal	Abreviatura	Su desarrollo según la base dada en tabla 6-3
$\bar{\psi} \psi$	$F;$	$-\frac{1}{2} F^{\mu\nu};_{\mu\nu}$
$\bar{\psi} \gamma_{(2)}^{\mu} \psi$	$F;_{\mu}$	$=0$
$\bar{\psi} \gamma_{(2)}^5 \gamma_{(2)}^{\mu} \psi$	$F;_{\mu}^5$	$=0$
$\bar{\psi} \gamma_{(2)}^5 \psi$	$F;^5$	$+\frac{1}{8} F^{\mu\nu, \lambda\rho} \epsilon_{\mu\nu\lambda\rho}$
$\bar{\psi} \gamma_{(1)}^{\lambda} \sigma_{(2)}^{\mu\nu} \psi$	$F^{\lambda};_{\mu\nu}$	$=0$
$\bar{\psi} \gamma_{(1)}^{\mu} \gamma_{(2)}^5 \psi$	$F^{\mu};_5$	$=0$
$\bar{\psi} \gamma_{(1)}^5 \gamma_{(2)}^{\lambda} \psi$	$F^{\mu\nu};_5 \lambda$	$=0$
$\bar{\psi} \sigma_{(1)}^{\mu\nu} \gamma_{(2)}^5 \psi$	$F^{\mu\nu};_5$	$-\frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu, \alpha\beta} F;_{\alpha\beta}$
$\bar{\psi} (\gamma_{(1)}^5 \gamma_{(1)}^{\mu})_{(1)} (\gamma_{(2)}^5 \gamma_{(2)}^{\nu})_{(2)} \psi$	$F^{5\mu};_5 \nu$	$= F^{\mu};_{\nu}$
$\bar{\psi} (\gamma_{(1)}^5 \gamma_{(1)}^{\mu})_{(1)} \gamma_{(2)}^5 \psi$	$F^{5\mu};_5$	$=0$
$\bar{\psi} \gamma_{(1)}^5 \gamma_{(1)}^5 \psi$	$F^{5};_5$	$-\frac{1}{4} F^{\mu\nu};_{\mu\nu}$

6.f-6) Desarrollo de los elementos de $W_{sp}^{p'}$ W_{sp}^p como combinación lineal de representaciones tensoriales del grupo de Lorentz.

Trabajaremos con ondas de p^{μ} bien definido; en esta Secc. $p^0 = +\sqrt{-p^2 + m^2}$;

sean $\psi(p) \in W_{sp}^{-p}$, $\psi(p') \in W_{sp}^{p'}$ y M - matriz arbitraria. Es,

$$\psi(p') M \psi(p) = [\psi_{(p')}^{\nu} + \psi_{(p')}^{\nu\prime}] M [\psi_{(p)}^{\nu} + \psi_{(p)}^{\nu\prime}]. \quad (6.68)$$

Pero

$$P_{\beta} \delta_{(i)}^{\alpha} \psi(p) = m \psi(p), \quad i = (1, 2); \quad (6.69)^{**}$$

multiplicando por Λ^{ν} o $\Lambda^{\nu\prime}$ y usando (6.58) se obtiene

$$P_{\beta} \delta_{(i)}^{\alpha} \psi_{(p)}^{\nu} = m \psi_{(p)}^{\nu}; \quad P_{\beta} \delta_{(i)}^{\alpha} \psi_{(p)}^{\nu\prime} = m \psi_{(p)}^{\nu\prime}; \quad i=1,2 \quad (6.70-a)$$

Cambiamos $\psi(p) \rightarrow \psi(p')$ y tomamos adjuntos:
 $p'_\alpha \bar{\psi}^\alpha(p') \delta_{(i)}^\alpha = m \bar{\psi}^\alpha(p')$; $p'_\alpha \bar{\psi}^\alpha(p') \gamma_{(i)}^\alpha = m \bar{\psi}^\alpha(p')$; $i = 1, 2$
 (6.70-b)

En (6.68)

$$\bar{\psi}_{(p')} M \psi_{(p)} = \bar{\psi}_{(p')} \hat{M}_{(p,p')} \psi_{(p)} \quad (6.71-a)$$

donde abreviamos

$$\hat{M}_{(p,p')} \text{ -df } \left[I + \frac{1}{m} p'_\alpha \gamma_{(i)}^\alpha \right] M \left[I + \frac{1}{m} p_\alpha \gamma_{(j)}^\alpha \right], \quad i, j = 1, 2. \quad (6.71-b)$$

Por Secc. 6.f-5 $\bar{\psi}^\alpha \hat{M} \psi^\alpha$ puede desarrollarse unívocamente en la base de tabla 6-3:

$$\begin{aligned} \bar{\psi}_{(p')} \hat{M}_{(p,p')} \psi_{(p)} = & a_{\mu\nu}(p,p') \bar{\psi}_{(p')} \sigma_{(2)}^{\mu\nu} \psi_{(p)} + \\ & b_{\mu\nu}(p,p') \bar{\psi}_{(p')} \gamma_{(1)}^\mu \gamma_{(2)}^\nu \psi_{(p)} + \\ & + c_{\mu\nu}(p,p') \bar{\psi}_{(p')} \gamma_{(1)}^\mu \gamma_{(2)}^\nu \psi_{(p)} + \\ & + d_{\mu\nu\lambda\rho}(p,p') \bar{\psi}_{(p')} \sigma_{(1)}^{\mu\nu} \sigma_{(2)}^{\lambda\rho} \psi_{(p)} \quad (6.72) \end{aligned}$$

donde $a_{\mu\nu}, b_{\mu\nu}, c_{\mu\nu}$ y $d_{\mu\nu\lambda\rho}$ son los coeficientes, y carecen de índices spinoriales.

Reemplazando en (6.71) queda finalmente

$$\begin{aligned} \bar{\psi}_{(p')} M \psi_{(p)} = & \bar{\psi}_{(p')} \Lambda^\alpha \left[a_{\mu\nu}(p,p') \psi_{(p)} \sigma_{(2)}^{\mu\nu} + \right. \\ & + b_{\mu\nu}(p,p') \psi_{(p)} \gamma_{(1)}^\mu \gamma_{(2)}^\nu + \\ & + c_{\mu\nu}(p,p') \psi_{(p)} \gamma_{(1)}^\mu \gamma_{(2)}^\nu + \\ & \left. + d_{\mu\nu\lambda\rho}(p,p') \psi_{(p)} \sigma_{(1)}^{\mu\nu} \sigma_{(2)}^{\lambda\rho} \right] \Lambda^\beta \quad (6.74)^+ \end{aligned}$$

$$\Lambda^\alpha = \frac{1}{2} (I + \gamma_{(1)}^5 \gamma_{(2)}^5).$$

Con (6.74) nos hemos acercado a los objetivos enunciados en Secc. 6lf-1.

Obsérvese, de paso, que no se ha roto el carácter manifiesto de la covariancia relativista.

Pero (6.74) no es el desarrollo del 1er. miembro en elementos de una base, porque falla la unicidad. El desarrollo de $\bar{\psi} \Lambda^\alpha \hat{M} \Lambda^\beta \psi$ según la base de tabla 6-3 es único, pero para \hat{M} fijo, M no es única. En efecto en (6.71-b) podemos poner o bien $i = 1, j = 1$, o bien $i = 1, j = 2$, etc.

+ A primera vista parecería haber error, ya que $\bar{\psi} M \psi$ pueden ser p. ej. un vector, mientras que en las ~~... desaparecen~~ en el 2º miembro de (6.74) no hay ningún vector (cf. tabla 6-1). Pero no hay tal, porque las $a_{\mu\nu}, \dots$ pueden ser e.g. vectores. Ver ejemplos en Secc. 6.f-7.

Por qué perdimos la unicidad? Por haber especificado p^μ . Aclaremos pasando a spin $\frac{1}{2}$: Allí, si Ψ y Φ son arbitrarios, $\bar{\Psi}\Phi$ no es combinación de las $\Psi \gamma^\alpha \Phi$; pero si Φ tiene momento \vec{p} y signo de la energía p^0 bien definidos, es $p_\alpha \bar{\Psi}(p^0) \gamma^\alpha \Phi(p) = m \bar{\Psi}(p^0) \Phi(p)$, o sea se pierde la unicidad del desarrollo de una forma bilineal en término de las (6.27).

La utilidad de (6.74) no está en la unicidad (que no tiene), sino en asegurar a $\bar{\Psi} M \Psi$ un desarrollo covariante en 36 sumandos en lugar de los 135 de tabla 6-2.

6.f-7) Ejemplos.

A) $M = I$

A₁) En (6.71-a) pongo $i = j = 1$:

$$\hat{I} = \left[I + \frac{1}{m} p_\alpha \delta_{(1)}^\alpha \right] \left[I + \frac{1}{m} p_\beta \delta_{(1)}^\beta \right]$$

Desarrollando y usando

$$\gamma^\alpha \gamma^\beta = g^{\alpha\beta} - i \sigma^{\alpha\beta}, \quad (6.75)^{**}$$

se obtiene

$$\hat{I} = I + \frac{1}{m} (p_\alpha + p'_\alpha) \delta_{(1)}^\alpha + \frac{1}{m^2} p'_\alpha p_\alpha I - \frac{1}{m^2} \sigma_{(1)}^{\alpha\beta} p'_\alpha p_\beta \quad (6.76)$$

Reemplazamos en (6.71-a) y usamos tablas 6-3 y 6-4:

$$\bar{\Psi}(p^0) \Phi(p) = \bar{\Psi}(p^0) \Lambda^T \left[\frac{1}{2} \sigma_{(1)}^{\alpha\beta} \delta_{(1)}^{\alpha\beta} (1 + \frac{p'_\alpha p_\alpha}{m^2}) - \frac{1}{m^2} \sigma_{(1)}^{\alpha\beta} p'_\alpha p_\beta \right] \Lambda^T \Psi(p) \quad (6.77)$$

A₂) En (6.71) pongo $i = 1, j = 2$.

$$\begin{aligned} \hat{I} &= \left[I + \frac{1}{m} p'_\alpha \delta_{(1)}^\alpha \right] \left[I + \frac{1}{m} p_\beta \delta_{(2)}^\beta \right] \\ &= I + \frac{1}{m} (p'_\alpha \delta_{(1)}^\alpha + p_\beta \delta_{(2)}^\beta) + \frac{1}{m^2} p'_\alpha p_\beta \delta_{(1)}^\alpha \delta_{(2)}^\beta \end{aligned}$$

En (6.71-a) y usando las tablas 6-3 y 6-4,

$$\bar{\Psi}(p^0) \Phi(p) = \bar{\Psi}(p^0) \Lambda^T \left[\frac{1}{2} \sigma_{(1)}^{\alpha\beta} \delta_{(1)}^{\alpha\beta} + \frac{1}{m^2} p'_\alpha p_\beta \delta_{(1)}^\alpha \delta_{(2)}^\beta \right] \Lambda^T \Psi(p). \quad (6.78)$$

Sobre la unicidad:

Tanto (6.77) como (6.78) son del tipo (6.74), pero con coeficientes diferentes. Claroque son iguales: Usando

$$p_\beta \delta_{(1)}^\beta \Psi^T = p_\beta \delta_{(2)}^\beta \Psi^T$$

ambas se reducen a

$$\bar{\Psi}(p^0) \Phi(p) = \bar{\Psi}(p^0) \Lambda^T \left[\frac{1}{2} \sigma_{(1)}^{\alpha\beta} \delta_{(1)}^{\alpha\beta} (1 + \frac{p'_\alpha p_\alpha}{m^2}) \right] \Lambda^T \Psi(p) \quad (6.79)$$

B) $M = \gamma_{(1)}^\mu$

B₁) En (6.71) pongo $i = j = 1$.

$$\begin{aligned} \hat{\gamma}^\mu &= \left[I + \frac{1}{m} p'_\alpha \delta_{(1)}^\alpha \right] \gamma_{(1)}^\mu \left[I + \frac{1}{m} p_\beta \delta_{(1)}^\beta \right] \\ &= \frac{1}{m} p'_\alpha \delta_{(1)}^\alpha \gamma_{(1)}^\mu + \frac{1}{m} p_\beta \delta_{(1)}^\beta \gamma_{(1)}^\mu + \dots \end{aligned}$$

donde los puntos suspensivos indican sumandos que por tabla 6-4 no contribuirán

a (6.72). Reemplazando en (6.71-a) y usando (6.75),

$$\bar{\Psi}(p) \gamma_{(1)}^\mu \Phi(p) = \frac{1}{m} \bar{\Psi}(p^0) \left[p'^\mu + p^\mu - i (p'_\alpha - p_\alpha) \sigma_{(1)}^{\alpha\mu} \right] \Psi(p) \quad (6.80)$$

B₂). En (6.71) pongo i = 1, j = 2.

$$\begin{aligned} \gamma^\mu &= \left[I + \frac{1}{m} p_\alpha \gamma_{(1)}^\alpha \right] \gamma_{(1)}^\mu \left[I + \frac{1}{m} p_\beta \gamma_{(2)}^\beta \right] \\ &= \frac{1}{m} p_\alpha \gamma_{(1)}^\alpha \gamma_{(1)}^\mu + \frac{1}{m} p_\beta \gamma_{(2)}^\beta \gamma_{(1)}^\mu \\ &= \frac{1}{m} p_\mu - \frac{1}{m} p_\alpha \sigma_{(1)}^{\alpha\mu} + \frac{1}{m} p_\beta \gamma_{(1)}^\mu \gamma_{(2)}^\beta \\ \bar{\Psi}(p^0) \gamma^\mu \Psi(p) &= \frac{1}{m} \bar{\Psi}(p^0) \left[p^\mu - i p_\alpha \sigma_{(2)}^{\alpha\mu} + p_\beta \gamma_{(1)}^\mu \gamma_{(2)}^\beta \right] \Psi(p) \end{aligned} \quad (6.81)$$

Cabe discusión similar sobre la unicidad.

6.g - APLICACION : LA CORRIENTE.

En Secc. 3.b hemos recordado que la corriente es (3.2)

$$j^\mu = \bar{\Psi} \gamma_{(1)}^\mu \Psi$$

Como en spin 1 tenemos más covariantes matriciales (36) que en spin $\frac{1}{2}$ (16)

puede uno indagar, si no existe otro vector j'^μ tal que

$$\partial_\mu j'^\mu = 0 \quad (6.82)$$

La respuesta es: El único 4-vector que puede escribirse sin usar derivadas y que satisface (6.82) es $j'^\mu = a j^\mu$. a = número.

Escribimos "... puede escribirse sin usar derivadas..." porque debido a la existencia de componentes redundantes una forma bilineal $\bar{\Psi} M \Psi$ con M = matriz pura puede reescribirse en una forma equivalente que incluya los p_μ (ver (6.80) y (6.81)).

En efecto: El 4-vector más general que puede escribirse sin usar p^μ lo obtenemos de tabla 6-2.

$$\begin{aligned} j'^\mu &= a F^\mu + b F^\lambda{}_{\lambda}{}^\mu + c F^{5\mu}{}_{5} \\ &= \bar{\Psi}(x) \left[a \gamma_{(1)}^\mu + b \gamma_{(1)}^\lambda \sigma_{(2)}^{\lambda\mu} + i c \gamma_{(1)}^5 \gamma_{(1)}^\mu \gamma_{(2)}^5 \right] \Psi(x) \end{aligned} \quad (6.83)$$

donde $\Psi \in W$ y a, b, y c son números.

Por qué escribimos el vector más general perteneciente a $E^{dim} \oplus E^{dim}$ si nuestra Ψ pertenecen al subespacio W de E^{dim} ? Pregunta si explicitamos que $\Psi \in W$, las componentes redundantes hacen que una misma forma puede escribirse con o sin p^μ . En cambio, si $\Psi \in W$ es $\Psi \in E^{dim}$, y en este espacio no se plantean esas ambigüedades (recordar que trabajamos con el vector más general que puede escribirse sin p^μ).

Calculamos $\partial_\mu j'^\mu$ usando las (1.1) de BW y la ecuación adjunta (1.10)⁺.

El resultado es

$$\partial_\mu j'^\mu = 2m \bar{\Psi} \left[b (I + \gamma_{(1)}^\lambda \gamma_{(2)}^\lambda) + c \gamma_{(1)}^5 \gamma_{(2)}^5 \right] \Psi$$

Una $\Psi \in W$ es la $\Psi_1^{(1)}$ de (3.58-o) para la cual podemos elegir $p_{2,3}^k = 0$; entonces la única componente "grande" en el límite no relativista es $(\Psi_1^{(1)}) = 1$.

Para esa Ψ ,

$$\partial_\mu j'^\mu = 2m \left[b (I + \gamma_{(1)}^\lambda \gamma_{(2)}^\lambda) + c \gamma_{(1)}^5 \gamma_{(2)}^5 \right]_{33,11} = 4mb.$$

⁺Por (1.4) puede usarse $\gamma_{(2)}^\mu$ en lugar de $\gamma_{(1)}^\mu$ en (1.10).

$$\text{La (6.82)} \implies b = 0 \quad (6.84-a)$$

(basta una Ψ que viole (6.82) para obligar $b = 0$).

Otra Ψ posible es la $\Psi_1^{(-1)}$ de (3.58-c) cuya única componente "grande" en el límite no relativista es $(\Psi_1^{(-1)})_{33} = 1$. Para esa Ψ ,

$$\partial_\mu j^{\mu\nu} = 2m(c - b).$$

Usando $b = 0$ queda

$$c = 0 \quad (6.84-b)$$

Reemplazando en (6.83) queda probado que el 4-vector más general que cumple las propiedades requeridas es⁺

$$j^{\mu\nu} = a \delta^{\mu\nu} = a \Psi \delta_{(4)}^{\mu\nu} \Psi \quad (6.85)$$

⁺Hemos usado (2.31) para reemplazar $\delta_{(4)}^{\mu\nu}$ por $\delta^{(1)}$.

C A P I T U L O S E P T I M O

C O N E X I O N C O N O T R O S F O R M A L I S M O S

7.a - INTRODUCCION.

La traducción de resultados desde el formalismo de BW a otros formalismos es tediosa. En particular, el pasaje al formalismo de Proca (1.7') de ciertas formas bilineales $\bar{\Psi} M \Psi$ es bastante engorrosa. Por ello efectuamos de una vez por todas ciertas traducciones. Necesitaremos algunas para confrontar nuestra teoría de campos (Cap. 8) con la usual. Incluímos otras por completitud.

7.b - DICCIONARIO DE TRADUCCION ENTRE EL FORMALISMO DE BW Y EL DE PROCA.

7.b - 1) Introducción.

Las ecuaciones de Proca son las (1.7'), (1.7''). Se puede pasar de las ecuaciones de Proca a las de BW de la siguiente manera¹⁷: Se definen U_μ y

$$G_{\mu\nu} = - G_{\nu\mu} \quad (7.1)^{**}$$

tales que

$$\Psi = \frac{1}{2m} (U_\mu \gamma^\mu + \frac{1}{2} G_{\mu\nu} \gamma^\mu \gamma^\nu) \delta^5 B^{-1} \quad (7.2)^{**}$$

donde B_{ij} es una matriz que cumple (T = transpuesto)

$$\gamma^{\mu T} = B \gamma^\mu B^{-1} \quad (7.3-a)^{**}$$

resulta

$$B^T = - B \quad (7.3-b)^{**}$$

Basta luego multiplicar (7.2) por operadores adecuados y tomar trazas para demostrar que si Ψ cumple las ecuaciones de BW, U_μ y $G_{\mu\nu}$ cumplen las de Proca.

Hemos encontrado que una representación es

$$B = \sigma^2 \quad (7.3-c)$$

que cumple la relación lícita, pero no forzosa,

$$B^T = B \quad (7.4)$$

7.b-2) Traducción de las formas bilineales $\bar{\Psi} M \Psi$. Procedimiento general.

Queremos traducir las formas de la tabla 6-2. Usamos (1.3):

$$\begin{aligned} \bar{\Psi}_{(A)B} M_{(C)D} \Psi &= \Psi^\dagger \gamma^0 \gamma^0 M_{(C)D} \Psi - \\ &= (\delta^{0T} \Psi^\dagger \gamma^0) (M \Psi_{(C)D}) ; \end{aligned}$$

reemplazamos Ψ y Ψ^\dagger por sus desarrollos (7.2):

$$\begin{aligned} \bar{\Psi}_{(A)B} M_{(C)D} \Psi &= \frac{1}{4m^2} \text{Tr} \delta^{0T} B \delta^5 (U_\mu^* \gamma^{\mu T} - \frac{1}{2} G_{\mu\nu}^* \gamma^{\nu T} \gamma^{\mu T}) \delta^0 M_{(C)D} \\ &\quad \times (U_\alpha \gamma^\alpha + \frac{1}{2} G_{\alpha\beta} \gamma^\alpha \gamma^\beta) \delta^5 B^T \Psi_{(C)D} \quad (7.5)^+ \end{aligned}$$

+La traza del 2º miembro está implícita en el 1º (cf. Secc. 1.c).

Sea N una de las matrices $I, \delta^\mu, \sigma^{\mu\nu}, \delta^5 \delta^\mu, \delta^5$; obtenemos

$$N^T = \omega \beta \quad N \beta^T \quad (7.6-a)$$

con

$$\omega_I = \omega_{\delta^5} = \omega_{\delta^5} = +1, \quad \omega_{\sigma^{\mu\nu}} = \omega_{\delta^5 \delta^\mu} = -1. \quad (7.6-b)$$

De (7.3) y de $\delta^{\alpha\beta} = \beta^{\alpha\beta}$ en (7.5),

$$\begin{aligned} \bar{\Psi}_{M(N)} \Psi &= \frac{\omega_N}{4m^2} \text{Tr} \beta \delta^0 \delta^5 \left(U_\mu^* \delta^{\mu\alpha} - \frac{1}{2} G_{\mu\nu} \delta^{\nu\alpha} \delta^{\mu\beta} \right) \delta^0 M \times \\ &\quad \times \left(U_\alpha \delta^\alpha + \frac{1}{2} G_{\alpha\beta} \delta^\alpha \delta^\beta \right) \delta^5 N \beta^T \end{aligned} \quad (7.7)$$

Usando (7.3-a) y (7.4) obtenemos finalmente

$$\bar{\Psi}_{M(N)} \Psi = - \frac{\omega_N}{4m^2} \text{Tr} \left(U_\mu^* \delta^\mu - \frac{1}{2} G_{\mu\nu}^* \delta^{\nu\mu} \right) M \left(U_\alpha \delta^\alpha + \frac{1}{2} G_{\alpha\beta} \delta^\alpha \delta^\beta \right) \delta^5 N \delta^5 \quad (7.8)$$

En lo que resta de la Secc. 7.b-2 aplicamos (7.8) a los diversos casos $M = I, N = I$; $M = I, N = \delta^\mu$; ...; $M = \delta^5, N = \delta^5$. Los cálculos son directos; no los incluimos porque seguimos los bien conocidos métodos para el cálculo de trazas, y, en total, resultan bastante largos.

Damos los resultados. Para los tensores de menor rango incluimos la escritura tridimensional.

A) ESCALAR F^i

$$F^i = \bar{\Psi}^i \Psi = - \frac{1}{m^2} U_\mu^* U^\mu - \frac{1}{2m^2} G_{\alpha\beta}^* G^{\alpha\beta}; \quad (7.9-a)$$

escritura 3-dimensional:

$$F^i = \frac{1}{m^2} (-V^i \cdot V + \vec{U}^i \cdot \vec{U} + \vec{E}^i \cdot \vec{E} - \vec{H}^i \cdot \vec{H}). \quad (7.9-b)$$

B) ESCALAR $F^{5;5}$

$$F^{5;5} = \bar{\Psi}^5 \delta_{(2)}^5 \Psi = - \frac{1}{m^2} U_\mu^* U^\mu + \frac{1}{2m^2} G_{\alpha\beta}^* G^{\alpha\beta}; \quad (7.10-a)$$

escritura 3-dimensional:

$$F^{5;5} = \frac{1}{m^2} (-V^i \cdot V + \vec{U}^i \cdot \vec{U} - \vec{E}^i \cdot \vec{E} + \vec{H}^i \cdot \vec{H}). \quad (7.10-b)$$

C) PSEUDOESCALAR $F^{i;5}$

$$F^{i;5} = \bar{\Psi}^i \delta_{(2)}^5 \Psi = - \frac{1}{4m^2} G_{\mu\nu}^* G^{\mu\nu} \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}; \quad (7.11-a)$$

escritura 3-dimensional:

$$F^{i;5} = \frac{1}{m^2} (\vec{E}^i \cdot \vec{H} + \vec{E} \cdot \vec{H}^i) \quad (7.11-b)$$

D) VECTOR $F^{i;\mu}$

$$F^{i;\mu} = \bar{\Psi}^i \delta_{(2)}^\mu \Psi = \frac{1}{m^2} (G^{i\mu\nu} U_\nu - G^{\mu\nu} U_{,\nu}^i); \quad (7.12-a)$$

escritura 3-dimensional:

$$\left. \begin{aligned} F^{i;0} &= \bar{\Psi}^i \delta_{(2)}^0 \Psi = \frac{1}{m^2} (\vec{E}^i \cdot \vec{U} - \vec{E} \cdot \vec{U}^i); \\ \bar{\Psi}^i \delta_{(2)}^\mu \Psi &= \frac{1}{m^2} (\vec{E}^i \cdot V - \vec{E} \cdot V^i) + \frac{1}{m^2} (\vec{U} \times \vec{H}^i - \vec{U}^i \times \vec{H}) \end{aligned} \right\} \quad (7.12-b)$$

E) VECTOR $F^{5\mu;5}$

$$F^{5\mu;5} = \frac{1}{m^2} \bar{\Psi}^i \gamma_{(i)}^5 \delta_{(j)}^\mu \delta_{(k)}^5 \Psi = \frac{1}{m^2} (\vec{U}^\mu) \quad (7.13-a)$$

escritura 3-dimensional:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{m^2} \bar{\Psi}^i \gamma_{(i)}^5 \delta_{(j)}^0 \delta_{(k)}^5 \Psi &= -\frac{1}{m^2} (\vec{U}^{0\mu} \vec{E}^\mu + \vec{E}^{i\mu} \vec{U}^\mu) \\ \frac{1}{m^2} \bar{\Psi}^i \gamma_{(i)}^5 \vec{\gamma}_{(j)} \delta_{(k)}^5 \Psi &= \frac{1}{m^2} (-\vec{E}^{i\mu} \vec{v}^\mu - \vec{E}^\mu \vec{v}^{0\mu} + \vec{H}^{i\mu} \vec{U}^\mu + \vec{H}^\mu \vec{U}^{0\mu}) \end{aligned} \right\}$$

F) PSEUDO VECTOR $F^{5\mu}$

$$F^{5\mu} = \frac{1}{2m^2} \bar{\Psi}^i \gamma_{(i)}^5 \delta_{(j)}^\mu \Psi = -\frac{1}{2m^2} (\epsilon_{\lambda\alpha\beta}^{i0} \delta_{(j)}^\mu + \epsilon_{\alpha\beta\lambda}^{0i} \delta_{(j)}^\mu) \epsilon^{\lambda\mu\alpha\beta} \quad (7.14-a)$$

escritura 3-dimensional:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{m^2} \bar{\Psi}^i \gamma_{(i)}^5 \delta_{(j)}^0 \delta_{(k)}^\mu \Psi &= \frac{1}{m^2} (\vec{U}^{0\mu} \vec{H}^\mu + \vec{H}^{i\mu} \vec{U}^\mu) \\ \frac{1}{m^2} \bar{\Psi}^i \gamma_{(i)}^5 \vec{\gamma}_{(j)} \delta_{(k)}^\mu \Psi &= \frac{1}{m^2} [-(\vec{v}^{0\mu} \vec{H}^\mu + \vec{v}^\mu \vec{H}^{0\mu}) - (\vec{E}^\mu \times \vec{U}^{0\mu} + \vec{E}^{i\mu} \times \vec{U}^\mu)] \end{aligned} \right\} \quad (7.14-b)$$

G) PSEUDOVECTOR $F^{\mu;5}$

$$F^{\mu;5} = \frac{1}{2m^2} \bar{\Psi}^i \gamma_{(i)}^\mu \delta_{(j)}^5 \Psi = \frac{1}{2m^2} (\delta_{\lambda\alpha\beta}^{i0} \delta_{(j)}^\mu - \delta_{\alpha\beta\lambda}^{0i} \delta_{(j)}^\mu) \epsilon^{\lambda\mu\alpha\beta} \quad (7.15-a)$$

$$\frac{1}{m^2} \bar{\Psi}^i \gamma_{(i)}^0 \delta_{(j)}^5 \Psi = \frac{1}{m^2} (-\vec{U}^{0\mu} \vec{H}^\mu + \vec{H}^{i\mu} \vec{U}^\mu) \quad (7.15-b)$$

$$\frac{1}{m^2} \bar{\Psi}^i \vec{\gamma}_{(j)} \delta_{(k)}^5 \Psi = \frac{1}{m^2} (\vec{v}^{0\mu} \vec{H}^\mu - \vec{v}^\mu \vec{H}^{0\mu}) + (\vec{E}^\mu \times \vec{U}^{0\mu} - \vec{E}^{i\mu} \times \vec{U}^\mu)$$

H) TENSOR ANTISIMETRICO DE 2º ORDEN $F^{i\mu;\nu}$

$$F^{i\mu;\nu} = \frac{1}{m^2} \bar{\Psi}^i \sigma_{(j)}^{\mu\nu} \Psi = \frac{1}{m^2} [(-\vec{U}^{0\mu} \vec{U}^\nu + \vec{U}^{0\nu} \vec{U}^\mu) + (\delta_{\alpha\beta}^{i0} \delta_{(j)}^\mu \delta_{(k)}^\nu - \delta_{\alpha\beta}^{0i} \delta_{(j)}^\mu \delta_{(k)}^\nu)] \quad (7.16-a)$$

escritura 3-dimensional:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{m^2} \bar{\Psi}^i \sigma_{(j)}^{\mu\nu} \Psi &= \frac{1}{m^2} (-\vec{U}^{i\mu} \times \vec{U}^\nu + \vec{H}^{i\mu} \times \vec{H}^\nu) \\ \frac{1}{m^2} \bar{\Psi}^i \sigma_{(j)}^{\mu\nu} \Psi &= \frac{1}{m^2} [(\vec{U}^{0\mu} \vec{v}^\nu - \vec{v}^{0\mu} \vec{U}^\nu) + (\vec{E}^{i\mu} \times \vec{H}^\nu - \vec{E}^\mu \times \vec{H}^{i\nu})] \end{aligned} \right\} \quad (7.16-b)$$

I) TENSOR SIMETRICO DE 2º ORDEN $F^{\mu;\nu}$

$$F^{\mu;\nu} = \frac{1}{m^2} \bar{\Psi}^i \delta_{(j)}^{(\mu} \delta_{(k)}^{\nu)} \Psi = \frac{1}{m^2} [(\vec{U}^{0\mu} \vec{U}^\nu + \vec{U}^{0\nu} \vec{U}^\mu - \vec{U}^{i\mu} \delta_{\alpha\beta}^{\nu)} \delta_{(j)}^{\mu)} + (\delta_{\alpha\beta}^{i0} \delta_{(j)}^\mu \delta_{(k)}^\nu + \delta_{\alpha\beta}^{0i} \delta_{(j)}^\mu \delta_{(k)}^\nu + \frac{1}{2} \delta_{\alpha\beta}^{00} \delta_{(j)}^\mu \delta_{(k)}^\nu \delta_{\alpha\beta}^{\mu\nu})] \quad (7.17-a)$$

escritura 3-dimensional:

$$F^{4;2} = \frac{1}{m^2} [(\vec{U}^{01} \vec{U}^2 + \vec{U}^{02} \vec{U}^1) + (\vec{E}^{1\nu} \vec{E}^2 + \vec{E}^1 \vec{E}^{2\nu}) - (\vec{H}^{11} \vec{H}^2 + \vec{H}^{12} \vec{H}^1)] \quad \left. \begin{array}{l} \text{permutaciones} \\ \text{sobre } 1,2,3; \end{array} \right\}$$

$$F^{0;b} = \frac{1}{m^2} (\vec{v}^{0\mu} \vec{U}^\mu + \vec{U}^{0\nu} \vec{v}^\mu + \vec{E}^{i\mu} \vec{H}^\mu + \vec{E}^\mu \times \vec{H}^{i\mu})^b$$

$$F^{0;0} = \frac{1}{m^2} (\vec{v}^{0\mu} \vec{v}^\mu + \vec{U}^{0\mu} \vec{U}^\mu) + (\vec{E}^{i\mu} \vec{E}^\mu + \vec{H}^{i\mu} \vec{H}^\mu)$$

$$F^{b;b} = \frac{1}{m^2} (\vec{v}^{0\mu} \vec{v}^\mu + 2\vec{U}^{0\mu} \vec{v}^\mu \vec{U}^\mu - \vec{U}^{0\mu} \vec{U}^\mu - 2\vec{E}^{i\mu} \vec{E}^\mu + \vec{E}^{i\mu} \vec{E}^\mu - 2\vec{H}^{i\mu} \vec{H}^\mu + \vec{H}^{i\mu} \vec{H}^\mu) \quad (7.17-b)^+$$

J) TENSOR SIMETRICO DE 2º ORDEN $F^{5\mu;5\nu}$

$$F^{5\mu;5\nu} = \frac{1}{m^2} \bar{\Psi}^i \gamma_{(i)}^5 \delta_{(j)}^\mu \delta_{(k)}^\nu \Psi = \frac{1}{m^2} [-(\vec{U}^{0\mu} \vec{U}^\nu + \vec{U}^{0\nu} \vec{U}^\mu - \vec{U}^{i\mu} \delta_{\alpha\beta}^{\nu)} \delta_{(j)}^{\mu)} + (\delta_{\alpha\beta}^{i0} \delta_{(j)}^\mu \delta_{(k)}^\nu + \delta_{\alpha\beta}^{0i} \delta_{(j)}^\mu \delta_{(k)}^\nu + \frac{1}{2} \delta_{\alpha\beta}^{00} \delta_{(j)}^\mu \delta_{(k)}^\nu \delta_{\alpha\beta}^{\mu\nu})] \quad (7.18-a)$$

+No sumar sobre b (cf. Seco. 1.c).

escritura 3-dimensional:

$$\begin{aligned}
 F^{51;52} &= -\frac{1}{m^2} \left[(U^{12}U^2 + U^{21}U^1) + (E^{12}E^2 + E^{21}E^1) + (H^{12}H^2) \right. \\
 &\quad \left. \text{y permutaciones sobre 1,2,3.} \right] \\
 F^{50;5b} &= \frac{1}{m^2} \left[-(V^{12}U + U^{12}V) + (E^{12}H + H^{12}E) \right] \\
 F^{50;50} &= \frac{1}{m^2} \left[-(V^{12}V + U^{12}U) + (E^{12}E + H^{12}H) \right] \\
 F^{5b;5b} &= \frac{1}{m^2} \left[-V^{12}V - 2U^{12}bU^b + U^{12}U - 2E^{12}bE^b + E^{12}E - 2H^{12}bH^b + H^{12}H \right]
 \end{aligned}
 \tag{7.18-b}^*$$

K) PSEUDOTENSOR DE 2º ORDEN, DE TRAZA NULA, $F^{\mu;5\nu}$

$$\begin{aligned}
 F^{\mu;5\nu} &= \Psi^i \gamma_{(2)}^{\mu} \gamma_{(2)}^5 \gamma_{(2)}^{\nu} \Psi = \\
 &= \frac{1}{m^2} \left[-U_{\alpha}^{\mu} U_{\beta}^{\nu} \epsilon^{\alpha\nu\beta\mu} + \frac{1}{2} \epsilon^{\sigma\mu\alpha\nu} g_{\sigma\tau}^{\alpha} g_{\sigma\tau}^{\nu} + \frac{1}{2} \epsilon^{\sigma\nu\alpha\mu} g_{\sigma\tau}^{\alpha} g_{\sigma\tau}^{\mu} - \frac{1}{2} \epsilon^{\sigma\mu\alpha\nu} g_{\sigma\tau}^{\alpha} g_{\sigma\tau}^{\nu} \epsilon^{\sigma\tau\alpha\beta} \right]
 \end{aligned}
 \tag{7.19}$$

L) PSEUDOTENSOR ANTISIMETRICO DE 2º ORDEN, $F^{\mu\nu;5}$

$$\begin{aligned}
 F^{\mu\nu;5} &= \frac{1}{m^2} \Psi^i \sigma_{(1)}^{\mu\nu} \gamma_{(2)}^5 \Psi = \\
 &= \frac{1}{m^2} \left[U_{\sigma}^{\mu} U_{\alpha}^{\nu} \epsilon^{\sigma\mu\nu\alpha} - \frac{1}{2} g_{\sigma\tau}^{\mu} g_{\sigma\tau}^{\nu} \epsilon^{\sigma\mu\nu\alpha} + \frac{1}{2} g_{\sigma\tau}^{\mu} g_{\sigma\tau}^{\nu} \epsilon^{\sigma\mu\nu\alpha} \right]
 \end{aligned}
 \tag{7.20}$$

M) TENSOR DE 3er. ORDEN $F^{\rho; \mu\nu}$

$$\begin{aligned}
 F^{\rho; \mu\nu} &= \Psi^i \gamma_{(2)}^{\rho} \sigma_{(2)}^{\mu\nu} \Psi = \\
 &= \frac{1}{m^2} \left[U^{\sigma\mu} g^{\sigma\nu\rho} + (U^{\sigma\nu} g^{\sigma\mu\rho} + U^{\sigma\mu} g^{\sigma\nu\rho}) + (U^{\sigma\mu} g^{\sigma\nu\rho} + U^{\sigma\nu} g^{\sigma\mu\rho}) + \right. \\
 &\quad \left. + \epsilon^{\rho\mu\alpha} (U^{\sigma\mu} g_{\sigma\alpha}^{\nu} + U^{\sigma\nu} g_{\sigma\alpha}^{\mu}) + \epsilon^{\rho\nu\alpha} (U^{\sigma\mu} g_{\sigma\alpha}^{\mu} + U^{\sigma\nu} g_{\sigma\alpha}^{\mu}) \right]
 \end{aligned}
 \tag{7.21}$$

N) PSEUDOTENSOR DE 3er. orden $F^{\mu\nu;5\rho}$

$$\begin{aligned}
 F^{\mu\nu;5\rho} &= \Psi^i \sigma_{(2)}^{\mu\nu} \gamma_{(2)}^5 \gamma_{(2)}^{\rho} \Psi = \\
 &= \frac{1}{m^2} \left[-2(U_{\sigma}^{\mu} g_{\sigma\alpha}^{\nu} + U_{\sigma}^{\nu} g_{\sigma\alpha}^{\mu}) \epsilon^{\sigma\mu\nu\alpha} (U_{\sigma}^{\rho} g_{\sigma\alpha}^{\mu} - U_{\sigma}^{\mu} g_{\sigma\alpha}^{\rho}) \epsilon^{\mu\sigma\alpha\rho} \epsilon^{\nu\rho} - \epsilon^{\nu\sigma\alpha\rho} g_{\sigma\alpha}^{\mu} \right] + \\
 &\quad + \epsilon^{\mu\nu\rho\beta} (U_{\sigma}^{\mu} g_{\sigma\alpha}^{\nu} - U_{\sigma}^{\nu} g_{\sigma\alpha}^{\mu})
 \end{aligned}
 \tag{7.22}$$

O) TENSOR DE 4º ORDEN $F^{\mu\nu; \rho\omega}$

$$\begin{aligned}
 F^{\mu\nu; \rho\omega} &= \Psi^i \sigma_{(2)}^{\mu\nu} \sigma_{(2)}^{\rho\omega} \Psi = \\
 &= \frac{1}{m^2} \left\{ U^{\mu\alpha} U_{\alpha}^{\nu} (\epsilon^{\omega\mu} \epsilon^{\nu\rho} - \epsilon^{\nu\omega} \epsilon^{\mu\rho}) + \right. \\
 &\quad + [-\epsilon^{\rho\mu} (U^{\sigma\omega} U^{\mu} + U^{\sigma\omega} U^{\omega}) + \epsilon^{\rho\omega} (U^{\sigma\mu} U^{\rho} + U^{\sigma\mu} U^{\omega}) + \\
 &\quad + \epsilon^{\nu\rho} (U^{\sigma\omega} U^{\mu} + U^{\sigma\omega} U^{\omega}) - \epsilon^{\nu\omega} (U^{\sigma\mu} U^{\rho} + U^{\sigma\mu} U^{\omega})] + \\
 &\quad + \frac{1}{2} g_{\sigma\tau}^{\mu} g_{\sigma\tau}^{\nu} (\epsilon^{\rho\mu} \epsilon^{\nu\omega} - \epsilon^{\nu\omega} \epsilon^{\rho\mu}) - \frac{1}{2} g_{\sigma\tau}^{\mu} g_{\sigma\tau}^{\nu} \epsilon^{\sigma\tau\alpha\beta} \epsilon^{\mu\nu\rho\omega} + \\
 &\quad + 2[(U^{\sigma\omega} U^{\nu\rho} + U^{\sigma\nu} U^{\rho\omega}) + (U^{\sigma\omega} U^{\rho\mu} + U^{\sigma\rho} U^{\omega\mu})] + \\
 &\quad + [\epsilon^{\mu\rho} (U^{\sigma\omega} U_{\alpha}^{\nu} + U^{\sigma\omega} U_{\alpha}^{\omega}) - \epsilon^{\mu\omega} (U^{\sigma\rho} U_{\alpha}^{\rho} + U^{\sigma\rho} U_{\alpha}^{\omega}) - \\
 &\quad \left. - \epsilon^{\nu\rho} (U^{\sigma\omega} U_{\alpha}^{\omega} + U^{\sigma\omega} U_{\alpha}^{\mu}) + \epsilon^{\nu\omega} (U^{\sigma\rho} U_{\alpha}^{\mu} + U^{\sigma\rho} U_{\alpha}^{\rho}) \right] \}
 \end{aligned}
 \tag{7.23}$$

7.b-3) Un procedimiento particular para recalcular algunas formas bilineales.

Llamo,

no sumar sobre μ

$$\begin{aligned}
 \Phi_0 &= \frac{1}{2} \gamma^0 \gamma^5 \beta^{-1}; \\
 \Phi_k &= \frac{1}{2} \gamma^k \gamma^5 \beta^{-1}, \quad k = 1, 2, 3; \\
 \Phi_k &= (1/2) \alpha^k \gamma^5 \beta^{-1}, \quad k = 4, 5, 6; \\
 \Phi_k &= -\frac{1}{2} \sigma^k \gamma^5 \beta^{-1}, \quad k = 7, 8, 9.
 \end{aligned}
 \tag{7.24}$$

Entonces la (7.2) se puede poner

$$\Psi = \Psi \Phi_0 + \sum_1^3 U^k \Phi_k + \sum_1^3 E^k \Phi_{k+3} + \sum_1^3 H^k \Phi_{k+6}
 \tag{7.25}$$

Con los procedimientos habituales para el cálculo de trazas obtenemos

$$\Phi_i^+ \Phi_j = \delta_{ij}
 \tag{7.26}$$

Si llamamos

$$b_{ij} = \Phi_i^+ \gamma_{(1)}^0 \Phi = \Phi_i^+ \gamma_{(2)}^0 \Phi_j
 \tag{7.27-a}$$

obtenemos

$$\left. \begin{aligned}
 b_{ij} &= 0 \quad \text{salvo} \\
 b_{41} = b_{52} = b_{63} &= +1 \\
 b_{14} = b_{25} = b_{36} &= -1
 \end{aligned} \right\}
 \tag{7.27-b}$$

Las (7.25), (7.26) y (7.27) permiten recalcular algunas formas bilineales. En todos los casos recalculados hemos obtenido el mismo resultado que con el procedimiento general 7.b-2.

7.b-4) Aplicaciones:

A) TRADUCCION DE LA DENSIDAD DE CARGA.

Por (3.2-a) y (2.31)

$$\rho = \Psi^+ \gamma_{(2)}^0 \Psi = \bar{\Psi} \gamma_{(2)}^0 \Psi = \bar{\Psi} \gamma_{(2)}^0 \Psi = F^{i0};
 \tag{7.28-a}$$

el resultado con el procedimiento general lo obtenemos con (7.12-b):

$$\rho = \frac{1}{m^2} (\vec{E}^{ik} \vec{U} - \vec{E} \cdot \vec{U}^k)
 \tag{7.28-b}$$

que es idéntico al ρ empleado por quienes usan el formalismo de Proca. El resultado con el procedimiento particular lo obtenemos con (7.25) y (7.27) y es nuevamente (7.28-b).

B) TRADUCCION DE LA DENSIDAD DE CORRIENTE.

Por (3.2-b) y (2.31)

$$\vec{j}^k = \Psi \gamma_{(2)}^k \Psi = \bar{\Psi} \gamma_{(2)}^k \Psi = F^{ik};
 \tag{7.29-a}$$

el resultado del procedimiento general lo obtenemos con (7.12-b):

$$\vec{j} = \frac{1}{m^2} \left[(\vec{E}^k \cdot \vec{V} - \vec{E} \cdot \vec{V}^k) + (\vec{U} \times \vec{H}^k - \vec{U}^k \times \vec{H}) \right]
 \tag{7.29-b}$$

también idéntica a la corriente empleada por quienes usan el formalismo de Proca.

C) TRADUCCION DE LA DENSIDAD DE ENERGIA $(\Psi, H \Psi)_{SP}$

Por (3.4), (2.2) y (2.31^o)

$$\begin{aligned}
 (\Psi, H \Psi)_{SP} &= \Psi^+ \gamma_{(2)}^0 (m \delta_{(1)}^0 + \alpha_{(1)}^0 \vec{P}) \Psi = m \bar{\Psi} \Psi + \bar{\Psi} \delta_{(1)}^0 \vec{P} \Psi \\
 &= m \bar{\Psi} \Psi + \Psi \delta_{(2)}^0 \vec{P} \Psi;
 \end{aligned}
 \tag{7.30}$$

si en (7.12-b) sustituimos

$$\bar{\Psi}' \rightarrow \bar{\Psi}, \quad \Psi \rightarrow \mathcal{P}^t \Psi = -1 \partial_a \Psi$$

obtenemos

$\bar{\Psi} \gamma_{(2)}^{\mu\nu} \mathcal{P}^t \Psi = \frac{1}{m^2} \left[\vec{E}^* \cdot \text{grad } V - V^t \text{div } \vec{E} + \vec{H}^* \cdot \text{rot } \vec{U} + \vec{U}^* \cdot \text{rot } \vec{H} \right] ;$
 integrando por partes el 2º y 3er. sumando del 2º miembro y usando las

(1.7^{no}) resulta

$$\bar{\Psi} \gamma_{(2)}^{\mu\nu} \mathcal{P}^t \Psi = \frac{1}{m} \left[+ 2V^t V + 2 \vec{H}^* \cdot \vec{H} + \frac{1}{m} \text{div} (\vec{U}^* \cdot \vec{H} - \vec{E}^* \cdot \vec{V}) \right] \quad (7.31)$$

Combinando con (7.9-b),

$$(\Psi, H \Psi)_{sp} = \frac{1}{m} (V^t V + \vec{U}^* \cdot \vec{U} + \vec{E}^* \cdot \vec{E} + \vec{H}^* \cdot \vec{H}) + \frac{1}{m^2} \text{div} (\vec{E}^* \cdot \vec{V} + \vec{U}^* \cdot \vec{H}) \quad (7.32)$$

que sólo difiere en una divergencia de la densidad de energía usada por quienes emplean el formalismo de Proca; esa divergencia es irrelevante en cuanto a la energía total.

Verificación: Por (3.4),

$$(\Psi, H \Psi)_{sp} = (\Psi, \frac{\partial \Psi}{\partial t})_{sp} = \bar{\Psi} \delta_{(1)}^0 \frac{\partial \Psi}{\partial t} ;$$

usando (7.12-b) y (1.7^{no}) se reobtiene la (7.32).

D) REDEMOSTRACION DE LA EQUIVALENCIA (A2-4.12).

Cumplimos fácilmente con el compromiso enunciado en el apéndice A2-6:

debemos probar que

$$\int d^3x (\Psi, H \Psi)_{sp} = m \int \bar{\Psi}^t \Psi d^3x$$

o sea

$$\int d^3x (\Psi, H \Psi)_{sp} = m \int \bar{\Psi} \gamma_{(1)}^0 \gamma_{(2)}^0 \Psi d^3x \quad (7.33)$$

Para demostrar la (7.33) basta comparar (7.32) con la 3a. (7.17-b).

7.b - 5) Una representación de Ψ , de Ψ^T y de $\Psi^{\overline{T}}$

Por completitud recordamos que (como es bien sabido),

$$\Psi = \frac{1}{2m} \begin{pmatrix} \vec{U}_- + E_- & -\vec{U}^3 - E^3 & -H_- & -\vec{V} + H^3 \\ -\vec{U}^3 - E^3 & -\vec{U}_+ - E_+ & \vec{V} + H^3 & H_+ \\ -H_- & -\vec{V} + H^3 & -\vec{U}_- + E_- & -\vec{U}^3 - E^3 \\ -\vec{V} + H^3 & H_+ & -\vec{U}^3 - E^3 & \vec{U}_+ - E_+ \end{pmatrix} \quad (7.34)^{**}$$

donde abreviamos

$$\vec{k}_\pm = \vec{k}^1 \pm i \vec{k}^2 \quad (7.35)^{**}$$

para todo 3-vector \vec{k} .

La (7.34) se puede obtener usando (7.2), (7.3) y la representación (2.6) de las γ^k .

Usando (6.46) y (7.34) la Ψ^ν definida en Seco. 6.f-4 resulta ser

$$\Psi^\nu = \frac{i}{2m} \begin{pmatrix} E_- & -E^3 & -H_- & H^3 \\ -E^3 & -E_+ & H^3 & H_+ \\ -H_- & H^3 & E_- & -E_+^3 \\ H^3 & H_+ & -E^3 & -E_+ \end{pmatrix} \quad (7.36)$$

Correspondientemente,

$$\Psi^\pi = \frac{i}{2m} \begin{pmatrix} U_- & -U^3 & 0 & -V \\ -U^3 & -U_+ & V & 0 \\ 0 & V & -U_- & U^3 \\ \vdots & & & \\ -V & 0 & U^3 & U_+ \end{pmatrix} \quad (7.37)$$

Se comprende entonces que a la descomposición

$$\Psi = \Psi^\nu + \Psi^\pi$$

hecha en el formalismo de BW le corresponde, en el de Proca al agrupar por un lado a los 6 $G_{\mu\nu}$ y por el otro a los 4 U^μ .

CAPITULO OCTAVO
TEORIA CLASICA DE CAMPOS

8.a - INTRODUCCION.

8.a-1) El problema de las variables independientes. Antecedentes.

Queremos obtener una formulación lagrangeana en el formalismo de BW. Un punto delicado es el número de variables independientes a usar en el método variacional. Sea la densidad lagrangeana⁺

$$\mathcal{L} = -m \bar{\Psi} \Psi + \frac{1}{2} \bar{\Psi} i \partial_{\mu} \gamma_{(\mu}^{\mu} \Psi - \frac{1}{2} (i \partial_{\mu} \bar{\Psi}) \gamma_{\nu)}^{\mu} \Psi \quad (8.1)^{**}$$

Si usamos como variables independientes a las diez Ψ_{ij} con $i, j = 1, 2$ y a las correspondientes $\bar{\Psi}_{ij}$ obtenemos vía ecuaciones de Euler las ecuaciones (1.7-a) que (como es sabido³) son equivalentes a las (1.1) de BW. Es más: Un cierto número de resultados (corriente, tensor energía-momento, etc.) coinciden con los correctos. Sin embargo, este procedimiento (usar diez Ψ_{ij} independientes) para obtener las ecuaciones de BW es incorrecto, pues las ecuaciones de BW se encargan de reducir el grado de libertad spinorial de 10 a 6: Hay contradicción. Entre las consecuencias del delito aparecen dificultades para establecer las relaciones de conmutación de la versión cuantizada (o, lo que es equivalente, los paréntesis de Poisson de la clásica).

La necesidad de usar sólo 6 componentes independientes de Ψ fué planteada ya por Belinfante³ quien propuso Ψ^I como parte independiente y Ψ^{II} como parte dependiente de Ψ (cf. Secc. 2.c-5). Pero, obviamente

$$\Psi^I = \frac{1}{2} (\mathbb{I} + \delta_{(1)}^0 \delta_{(2)}^0) \Psi$$

no es una variable covariante. Nuestro objetivo será usar una parte manifiestamente covariante de Ψ como parte independiente del campo.

Kemmer¹⁵ obtuvo la corriente y el tensor energía momento sin partir de un lagrangeano. Booth y Wilson dan el lagrangeano para el formalismo de Kemmer⁺⁺ (cuya traducción al de BW coincide con (8.1)). Al menos parcialmente, usan 6 componentes independientes de Ψ , pero en forma no covariante.

Más conocida es la formulación lagrangeana en el formalismo de Proca. Como texto para una de las maneras de desarrollarlo puede usarse el artículo de Pauli²¹ sobre teorías de campos relativistas; usa como independientes en el procedimiento variacional las 10 variables $U_{\mu}, G_{\mu\nu}$ (con $\mu < \nu$) y las correspondientes complejas conjugadas. Otra manera de desarrollarlo es la descrita en el texto de Bogoliubov y Shirkov⁵; ellos imponen la condición subsidiaria antes de variar la acción, con lo cual el número de variables

⁺Empleando la equivalencia (2.31) la densidad lagrangeana (8.1) se transforma en la de Belinfante⁴.

⁺⁺For (1.1-o)

⁺⁺⁺Ver también el artículo de Pauli²¹.

independientes en el procedimiento variacional es el correcto.

Abreviación: "Proca", o "Proca, usual" = "formalismo de Proca tal como está descrito en el artículo de Pauli²¹ o en el texto de Wentzel.³⁰

Las variables que emplearemos en el formalismo de BW no se traducen (dentro de lo que sabemos) en ningún juego de variables independientes empleados en otros formalismos.

8.a-2) Objetivos.

Nos proponemos:

- 1) Desarrollar rigurosamente la teoría de campos en el formalismo de BW usando 6 componentes independientes de ψ (y otras tantas para $\bar{\psi}$).
- 2) Usar una parte manifiestamente covariante del juego de variables, y hacer manifiestamente covariante el procedimiento donde nos sea posible.
- 3) Obtener analogía formal con los resultados de la teoría de campos para otros valores del spin.

Anticipamos que (como ha ocurrido con buena parte de lo que antecede) podremos obtener bastante analogía con lo que ocurre en spin $\frac{1}{2}$. La analogía no será total (spin).

Pero, sorprendentemente, también podemos obtener bastante analogía con lo que ocurre en spin cero (cargado)[†].

Usaremos dos densidades lagrangeanas, $\mathcal{L}^{(1/2)}$ y $\mathcal{L}^{(0)}$; con la primera conseguiremos la analogía con spin $\frac{1}{2}$. Con la segunda, analogía con lo que ocurre en spin cero (cargado)^{††} a menos de un factor uniforme $1/m$.

Compararemos los resultados obtenidos con ambos lagrangeanos, así como con resultados anteriores de otros formalismos.

8.a-1) Notación y nomenclatura.

Indicaremos con un superíndice ($\frac{1}{2}$) a los entes obtenidos a partir de $\mathcal{L}^{(1/2)}$ y, por brevedad, llamaremos formulación $\frac{1}{2}$ a la formulación correspondiente. Compararemos los resultados con los correspondientes de spin $\frac{1}{2}$, para establecer cuando existe (o no existe) tal analogía.

Análogamente el superíndice (0) corresponde a los entes deducidos de $\mathcal{L}^{(0)}$ y la formulación correspondiente será la formulación 0. En la comparación con los resultados para spin 0, sobreentenderemos el factor $1/m$ arriba mencionado.

En todo el Cap. 8 usaremos únicamente campos simétricos:

$$\psi \in \mathcal{E}_t^{sim} \quad (8.2)$$

\mathcal{E}_t^{sim} difiere del \mathcal{E}^{sim} definido en Secc. 2.c-1 en que \mathcal{E}^{sim} se fabrica con funciones de \vec{x} y \mathcal{E}_t^{sim} con funciones de $x = (t, \vec{x})$. Análogamente $\mathcal{E}_t^{\vec{z}}$, etc.

[†]No total.

^{††}Nos referimos a la formulación usual para el caso Klein-Gordon, con una componente para ψ ; no a la de 5 componentes (Kerner¹⁵) ni de dos componentes (Sakata y Taketani^{25, 26}, Feshbach y Villars¹⁰).

8.b - ELECCION DE LAS VARIABLES. OBTENCION DE LAS ECUACIONES DE BARGMANN-WIGNER.

8.b - 3) Descomposición invariante del campo en parte independiente y parte dependiente.

Como en Secc. 6.f-4 descomponemos

$$\Psi(x) = \Psi^{\nu}(x) + \Psi^{\sigma\nu}(x); \quad (8.3-a)$$

$$\Psi^{\nu}(x) = \Lambda^{\nu} \Psi(x) = \frac{1}{2}(I + \gamma_{(1)}^5 \gamma_{(2)}^5) \Psi(x) \quad (8.4-a)$$

$$\Psi^{\sigma\nu}(x) = \Lambda^{\sigma\nu} \Psi(x) = \frac{1}{2}(I - \gamma_{(1)}^5 \gamma_{(2)}^5) \Psi(x). \quad (8.5-a)$$

(La diferencia con (6.55) es que ahora trabajamos con $\Psi \in \mathcal{E}_c^{\text{sim}}$ en lugar de \mathcal{E}^{sim}).

Por (6.61-a) sabemos que $\Psi^{\nu}(x)$ tiene 6 componentes independientes. Por lo tanto, elegiremos $\Psi^{\nu}(x)$ como parte independiente de $\Psi(x)$ (es decir, como la parte de $\Psi(x)$ cuyas 6 componentes independientes variaremos arbitrariamente). Como no necesitamos (ni podemos usar) más de 6 variables independientes, podemos (y debemos) establecer una dependencia arbitraria de $\Psi^{\sigma\nu}$ en función de Ψ^{ν} .

Elegimos

$$\Psi^{\sigma\nu}(x) = \frac{1}{2m} \partial_{\beta} (\gamma_{(1)}^{\beta} + \gamma_{(2)}^{\beta}) \Psi^{\nu}(x). \quad (8.6-a)$$

Análogamente, descomponemos

$$\bar{\Psi}(x) = \bar{\Psi}^{\nu}(x) + \bar{\Psi}^{\sigma\nu}(x); \quad (8.3-b)$$

$$\bar{\Psi}^{\nu}(x) = \bar{\Psi}(x) \Lambda^{\nu} = \frac{1}{2}(I + \gamma_{(1)}^5 \gamma_{(2)}^5) \bar{\Psi}(x); \quad (8.4-b)$$

$$\bar{\Psi}^{\sigma\nu}(x) = \bar{\Psi}(x) \Lambda^{\sigma\nu} = \frac{1}{2}(I - \gamma_{(1)}^5 \gamma_{(2)}^5) \bar{\Psi}(x); \quad (8.5-b)$$

Elegimos $\bar{\Psi}^{\nu}(x)$ como parte independiente de $\bar{\Psi}$, e imponemos

$$\bar{\Psi}^{\sigma\nu}(x) = \frac{1}{2m} \partial_{\alpha} \bar{\Psi}^{\nu}(x) (\gamma_{(1)}^{\alpha} + \gamma_{(2)}^{\alpha}). \quad (8.6-b)$$

En esta etapa no sabemos cuanto vale $i \partial_{\beta} \gamma_{(1)}^{\beta} \Psi^{\sigma\nu} + i \partial_{\beta} \gamma_{(2)}^{\beta} \Psi^{\sigma\nu}$; pero

podemos asegurar que

$$i \partial_{\beta} \gamma_{(1)}^{\beta} \Psi^{\sigma\nu} = i \partial_{\beta} \gamma_{(2)}^{\beta} \Psi^{\sigma\nu} \quad (8.6^{\circ}-a)$$

En efecto, (8.6-a) implica

$$i \partial_{\mu} (\gamma_{(1)}^{\mu} - \gamma_{(2)}^{\mu}) \Psi^{\sigma\nu} = - \frac{1}{2m} (\gamma_{(1)}^{\mu} \gamma_{(1)}^{\beta} - \gamma_{(2)}^{\mu} \gamma_{(2)}^{\beta}) \Psi^{\sigma\nu} = - \frac{1}{2m} (\partial_{\mu} \partial^{\mu} - \partial_{\mu} \partial^{\mu}) \Psi^{\sigma\nu} = 0.$$

Análogamente,

$$(i \partial_{\alpha} \bar{\Psi}^{\sigma\nu}) \gamma_{(1)}^{\alpha} = (i \partial_{\alpha} \bar{\Psi}^{\sigma\nu}) \gamma_{(2)}^{\alpha}. \quad (8.6^{\circ}-b)$$

8.b-2) 1er. lema.

Afirmo que si para $\bar{\Theta}(x)$ fijo y $[\delta \Psi(x)]^{\nu} \in \mathcal{E}^{\text{sim}, \nu}$ arbitraria es

$$\bar{\Theta}(x) [\delta \Psi(x)]^{\nu} = 0, \text{ entonces } [\bar{\Theta}(x)]^{\nu \text{ sim}} = 0. \quad (8.7-a)^{\dagger}$$

Sobre $\bar{\Theta}^{\nu}$ nada puedo decir porque siendo

$[\bar{\Theta}]^{\nu \text{ sim}}$ significa la parte simétrica de $\bar{\Theta}^{\nu}$:

$$[\bar{\Theta}]^{\nu \text{ sim}}]_{ij} = \frac{(\bar{\Theta}^{\nu})_{ij} + (\bar{\Theta}^{\nu})_{ji}}{2}$$

$$\Lambda^{\sigma\tau} \Lambda^{\tau} = 0$$

$$\text{es } \Theta^{\sigma\tau} (\delta \Psi)^{\tau} = (\Theta^{\sigma\tau}) [\Lambda^{\tau} (\delta \Psi^{\tau})^{\sigma}] = 0,$$

para todo $\Theta^{\sigma\tau}$. Análogamente, nada puedo decir sobre $(\Theta)^{\tau \text{ ant } \sigma}$.

La prueba de (8.7-a) se efectúa fácilmente usando la representación (6.60).

Asimismo, si para $\Theta(x)$ fijo y $[\delta \Psi(x)]^{\tau} \in \mathcal{E}^{\text{sim}\tau}$ arbitrario es $[\delta \Psi(x)]^{\tau} \Theta(x) = 0$, entonces $[\Theta(x)]^{\tau \text{ sim}} = 0$. (8.7-b)

8.b-3) Por qué usar Ψ^{τ} como parte independiente del campo? Papel que desempeñará el primer lema.

El procedimiento variacional nos conducirá a expresiones del tipo

$$\Theta \delta \Psi = 0 \quad \text{o sea} \quad \Theta_{ji} \Psi_{ij} = 0. \quad (8.8)$$

Como sólo 6 de las $\delta \Psi_{ij}$ son independientes, no podemos anular el coeficiente de cada $\delta \Psi_{ij}$. Debemos elegir seis $\delta \Psi_{ij}$ como independientes, expresar las restantes en función de estas, y anular el coeficiente de las seis $\delta \Psi_{ij}$ independientes.

Lo primero que uno ensayaría sería imponer

$$\delta \Psi \in \mathcal{W}_t \quad (8.9)$$

y usar una representación, por ejemplo la (2.6) de las δ^{μ} ; entonces toda $\delta \Psi \in \mathcal{W}_t$ sería de la forma del 2º miembro de (2.63). Observándolo se comprende que lo más directo sería elegir como componentes independientes

$$\delta \Psi_{11}, \delta \Psi_{12} = \delta \Psi_{21}, \delta \Psi_{22}, \delta \Psi_{33}, \delta \Psi_{34}, \delta \Psi_{43}, \delta \Psi_{44} \quad (8.10)$$

o sea las componentes pertenecientes a Ψ^{τ} (cf. (2.9)). Por lo tanto la parte independiente de Ψ sería Ψ^{τ} , o sea la propuesta por Belinfante. Como se dijo en la Secc. 8.a-1, esta elección no es deseable por falta de covariancia manifiesta.

Justamente, nosotros elegimos Ψ^{τ} como parte independiente de Ψ para efectuar una elección invariante Lorentz. En (8.8) ponemos

$$\delta \Psi \in \mathcal{E}_t^{\text{sim}\tau} \quad \text{o sea} \quad \delta \Psi = \delta \Psi^{\text{sim}\tau} \quad (8.11)$$

$$\therefore \Theta_{ji} \delta \Psi_{ij}^{\text{sim}\tau} = 0 \quad (8.12)$$

Subsiste la dificultad de que no todas las componentes (ahora de $\delta \Psi^{\text{sim}\tau}$) son independientes. Pero ello no es problema: lo resuelve el 1er. lema.

8.b-4) Los espacios auxiliares $\mathcal{E}_t^B, \mathcal{E}_t^M, \mathcal{E}_t^{III}, \mathcal{E}_t^{IV}$.

A) LOS ESPACIOS \mathcal{E}_t^B y \mathcal{E}_t^M .

Mediante los conocidos operadores proyección

$$\Lambda^B = \frac{m^2 - \square}{2m^2} \quad \text{y} \quad \Lambda^M = \frac{m^2 + \square}{2m^2} \quad (8.13-a)^{**}$$

*Como sólo usamos Ψ simétrica (cf. (8.2)) sorprenderá que nos preocupemos por $\Theta^{\tau \text{ ant } \sigma}$ (antisimétrica); ocurre que puede presentarse por ejemplo $\Theta_a = \gamma^{\mu}_{(1)} \Psi$ que no es simétrica aunque lo sea Ψ .

$(\square = \partial_\mu \partial^\mu)$, se puede descomponer de manera unívoca toda $\Psi(x) = \Psi(t, \vec{x})$ en

$$\Psi = \Psi^B + \Psi^M \quad (8.13-b)^{**}$$

$$\Psi^B = \Lambda^B \Psi \quad ; \quad \Psi^M = \Lambda^M \Psi \quad (8.13-c)^{**}$$

tales que

$$\square \Psi^B = -m^2 \Psi^B \quad ; \quad \square \Psi^M = +m^2 \Psi^M \quad (8.13-d)^{**}$$

Es

$$\mathcal{E}_t^{dim} = \mathcal{E}_t^{dim B} \oplus \mathcal{E}_t^{dim M} \quad (8.13-e)$$

B) LOS ESPACIOS \mathcal{E}_{SP}^{III} Y \mathcal{E}_{SP}^{IV}

Definimos

$$\Lambda^III(\vec{p}) = \frac{1}{2} \left[I + \frac{(\vec{\alpha}(\vec{p}) \cdot \vec{p})(\vec{\alpha}(\vec{p}) \cdot \vec{p})}{p^2} \right] ; \dots$$

$$\Lambda^IV(\vec{p}) = I - \Lambda^III(\vec{p}) = \frac{1}{2} \left[I - \frac{(\vec{\alpha}(\vec{p}) \cdot \vec{p})(\vec{\alpha}(\vec{p}) \cdot \vec{p})}{p^2} \right]. \quad (8.14-a)$$

Es fácil demostrar que son operadores proyección:

$$[\Lambda^III(\vec{p})]^2 = [\Lambda^IV(\vec{p})]^2 = I ; \Lambda^III(\vec{p}) \Lambda^IV(\vec{p}) = \Lambda^IV(\vec{p}) \Lambda^III(\vec{p}) = 0. \quad (8.14-b)$$

Operan sobre los espacios spinoriales (ver definición en Secc. 2.0-3);

Por ejemplos:

$$\mathcal{E}_{SP}^{dim} = \mathcal{E}_{SP}^{dim III P} \oplus \mathcal{E}_{SP}^{dim IV P} \quad (8.15-a)$$

Para toda matriz simétrica,

$$W \in \mathcal{E}_{SP}^{dim} \quad (8.15-b)$$

es $W = W^III(\vec{p}) + W^IV(\vec{p}) \quad (8.15-c)$

con $W^III(\vec{p}) = \Lambda^III(\vec{p}) W \in \mathcal{E}^{dim III P}$
 $W^IV(\vec{p}) = \Lambda^IV(\vec{p}) W \in \mathcal{E}^{dim IV P} \quad (8.15-d)$

C) LOS ESPACIOS \mathcal{E}_t^{III} Y \mathcal{E}_t^{IV}

Para efectuar una descomposición en partes III y IV de toda

$$\Psi(x) = \Psi(t, \vec{x}) \in \mathcal{E}_t^{dim} \quad (8.16-a)$$

la desarrollamos en integral de Fourier respecto de las variables espaciales:

$$\Psi(x) = \int d^3 p W(t, \vec{p}) e^{i \vec{p} \cdot \vec{x}} ; \quad (8.16-b)$$

descomponemos $W(t, \vec{p})$ según (8.15-c) y llamamos

$$\left. \begin{aligned} \Psi^III(x) &= \int d^3 p W^III(t, \vec{p}) e^{i \vec{p} \cdot \vec{x}} \\ \Psi^IV(x) &= \int d^3 p W^IV(t, \vec{p}) e^{i \vec{p} \cdot \vec{x}} \end{aligned} \right\} \quad (8.16-c)$$

con lo cual

$$\Psi(x) = \Psi^III(x) + \Psi^IV(x). \quad (8.16-d)$$

Llamaremos Λ^III (resp. Λ^IV) al operador que proyecta $\Psi(x)$ sobre $\Psi^III(x)$ (resp. $\Psi^IV(x)$).

D) PROPIEDADES DE $\Lambda^{\text{III}}(\vec{p})$ Y $\Lambda^{\text{IV}}(\vec{p})$.

Siendo

$$\vec{\alpha}_{(i)} \cdot \vec{p} \Lambda^{\text{III}}(\vec{p}) = \Lambda^{\text{III}}(\vec{p}) \vec{\alpha}_{(i)} \cdot \vec{p} = \frac{1}{2}(\vec{\alpha}_{(i)} + \vec{\alpha}_{(i)}) \cdot \vec{p}, \quad i = 1, 2, \quad (8.17-a)$$

$$(\vec{\alpha}_{(1)} + \vec{\alpha}_{(2)}) \cdot \vec{p} \Lambda^{\text{IV}}(\vec{p}) = \Lambda^{\text{IV}}(\vec{p}) (\vec{\alpha}_{(1)} + \vec{\alpha}_{(2)}) \cdot \vec{p} = 0 \quad (8.17-b)$$

es

$$(\vec{\alpha}_{(i)} \cdot \vec{\nabla}) \Lambda^{\text{III}} = \Lambda^{\text{III}} (\vec{\alpha}_{(i)} \cdot \vec{\nabla}) = (\vec{\alpha}_{(1)} + \vec{\alpha}_{(2)}) \cdot \vec{\nabla}, \quad i=1, 2, \quad (8.18-a)$$

$$(\vec{\alpha}_{(1)} + \vec{\alpha}_{(2)}) \cdot \vec{\nabla} \Lambda^{\text{IV}} = \Lambda^{\text{IV}} (\vec{\alpha}_{(1)} + \vec{\alpha}_{(2)}) \cdot \vec{\nabla} = 0. \quad (8.18-b)$$

Siendo

$$(\vec{\alpha}_{(1)} \cdot \vec{p})(\vec{\alpha}_{(2)} \cdot \vec{p}) \Lambda^{\text{III}}(\vec{p}) = \Lambda^{\text{III}}(\vec{p})(\vec{\alpha}_{(1)} \cdot \vec{p})(\vec{\alpha}_{(2)} \cdot \vec{p}) = \vec{p}^2 \Lambda^{\text{III}}(\vec{p}), \quad (8.19-a)$$

$$(\vec{\alpha}_{(1)} \cdot \vec{p})(\vec{\alpha}_{(2)} \cdot \vec{p}) \Lambda^{\text{IV}}(\vec{p}) = \Lambda^{\text{IV}}(\vec{p})(\vec{\alpha}_{(1)} \cdot \vec{p})(\vec{\alpha}_{(2)} \cdot \vec{p}) = -\vec{p}^2 \Lambda^{\text{IV}}(\vec{p}) \quad (8.19-b)$$

es

$$(\vec{\alpha}_{(1)} \cdot \vec{\nabla})(\vec{\alpha}_{(2)} \cdot \vec{\nabla}) \Lambda^{\text{III}} = \Lambda^{\text{III}} (\vec{\alpha}_{(1)} \cdot \vec{\nabla})(\vec{\alpha}_{(2)} \cdot \vec{\nabla}) = \Delta \Lambda^{\text{III}}, \quad (8.20-a)$$

$$(\vec{\alpha}_{(1)} \cdot \vec{\nabla})(\vec{\alpha}_{(2)} \cdot \vec{\nabla}) \Lambda^{\text{IV}} = \Lambda^{\text{IV}} (\vec{\alpha}_{(1)} \cdot \vec{\nabla})(\vec{\alpha}_{(2)} \cdot \vec{\nabla}) = -\Delta \Lambda^{\text{IV}}. \quad (8.20-b)$$

E) CONMUTACION DE OPERADORES PROYECCION.

Los operadores proyección Λ^{I} y Λ^{II} se definieren en Secc. 2.e-5, los Λ^{I} Λ^{IV} en Secc. 6.f-4. Comparando las definiciones se observa que

los operadores proyección $\Lambda^{\text{I}}, \Lambda^{\text{II}}, \Lambda^{\text{III}}, \Lambda^{\text{IV}}, \Lambda^{\text{V}}, \Lambda^{\text{VI}}, \Lambda^{\text{B}}$ y Λ^{M} conmutan entre sí. (8.21)

Por lo tanto, si e.g. llamamos

$$\Psi^{\text{I III}} = \Lambda^{\text{III}} \Lambda^{\text{I}} \Psi \quad \text{y} \quad \Psi^{\text{III I}} = \Lambda^{\text{I}} \Lambda^{\text{III}} \Psi$$

es $\Psi^{\text{III I}} = \Psi^{\text{I III}}$ etc.

8.b-5) Notas sobre la condición inicial.

A) NOTACION.

Sea σ un hiperplano de tipo espacial (fig. 8-1). Indicaremos con $\Psi(\sigma)$ la función de 3 variables que queda cuando en $\Psi(x) = \Psi(x^0, \vec{x})$ imponemos

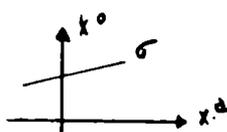


Fig 8-1

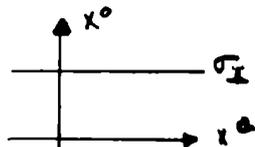


Fig 8-2

$x \in \sigma$. Análogamente, $\Psi(\sigma)$ es la función que queda cuando en la función $\Psi(x)$ restringimos $x^\mu \in \sigma$.

Si σ es el hiperplano

$x^0 = \text{const.}$ reemplazaremos σ por σ_{\perp} (fig. 8-2).

B) LA CONDICION EN TERMINOS DE Ψ^{V} .

En (2.3) la condición inicial restringe las funciones de x^a ($a=1, 2, 3$); por eso (2.3) no contiene derivadas temporales. Pero la definición (8.6-a) de la parte VI de una Ψ se aplica únicamente a funciones de x^a y x^0 : $\Psi = \Psi(x^0, \vec{x})$.

Por lo tanto si expresamos la preposición

$$\Psi(\sigma) \in \mathcal{W} \quad \text{sobre un cierto } \sigma_{\perp} \quad (8.22-a)$$

en términos de Ψ^{V} , puede aparecer $\partial_0 \Psi(\sigma_{\perp})$.

Esto justifica la aparición de derivadas temporales en el resultado que sigue, y que se demuestra en A8-2:

$$\Psi(\sigma_{\perp}) \in \mathcal{W} \iff \begin{cases} \Lambda^{\text{II}} \Lambda^{\text{IV}} \Psi^{\text{V}}(\sigma_{\perp}) = 0 & (a) \\ \Lambda^{\text{II}} \Lambda^{\text{III}} (m^2 - \Delta - \alpha_{\mu\nu} \cdot \nabla \cdot \nabla) \Psi^{\text{V}}(\sigma_{\perp}) & (b) \end{cases} \quad (8.23)$$

La (8.23) es una nueva forma de la condición inicial.

C) GENERALIZACION COVARIANTE

Queremos dar sentido a la proposición

" $\Psi(\sigma) \in \mathcal{W}_{\sigma}$ sobre un cierto σ " (8.22-b)

si σ es un hiperplano arbitrario de tipo espacial.

Definición: " $\Psi(x)$ pertenece a \mathcal{W} sobre un hiperplano σ de tipo espacial si la transformación de Lorentz que transforma σ en un σ_{\perp} transforma $\Psi(\sigma)$ en una $\Psi^{\text{V}}(\sigma_{\perp})$ que cumple (2.3) o, lo que es lo mismo, (8.23). Llamamos $\Psi^{\text{V}}(x')$ al segundo miembro de (6.2-c), iterado, si la transformación es finita".

Mediante hiperplanos tangentes puede aún generalizarse la condición inicial a hipersuperficies de tipo espacial cualesquiera.

8.b-6) Las dos densidades lagrangeanas que se usarán.

En la formulación $\frac{1}{2}$ imponemos

$$\mathcal{L}^{(1/2)} = -m \Psi^{\text{V}} \Psi^{\text{V}} + \frac{1}{m} (\partial_{\sigma} \Psi^{\text{V}}) (\partial^{\sigma} \Psi^{\text{V}}) \quad (8.24)$$

La analogía con spin $\frac{1}{2}$ estriba únicamente en las consecuencias de $\mathcal{L}^{(1/2)}$.

En la formulación 0 imponemos

$$\mathcal{L}^{(0)} = -m \bar{\Psi}^{\text{V}} \Psi^{\text{V}} + \frac{1}{m} (\partial_{\sigma} \bar{\Psi}^{\text{V}}) (\partial^{\sigma} \Psi^{\text{V}}) \quad (8.25)$$

$\mathcal{L}^{(0)}$ es formalmente análogo a la densidad lagrangeana usada para spin 0,

$$\mathcal{L} = -m^2 \varphi^* \varphi + (\partial_{\sigma} \varphi^*) (\partial^{\sigma} \varphi)$$

salvo el factor 1/m mencionado más arriba).

8.b-7) Más sobre notación

Pese a que en (8.24) y (8.25) sólo 6 componentes de Ψ_{ij}^{V} (y 6 de $\bar{\Psi}_{ji}^{\text{V}}$) son independientes, usaremos como notación

$$\frac{\partial}{\partial \Psi_{ij}^{\text{V}}} (\bar{\Psi}^{\text{V}} \Psi^{\text{V}}) = \frac{\partial}{\partial \Psi_{ij}^{\text{V}}} (\bar{\Psi}_{r_1 r_2}^{\text{V}} \Psi_{r_1 r_2}^{\text{V}}) = \bar{\Psi}_{ji}^{\text{V}} \quad (8.26 - a)$$

En otras palabras: Si llamamos

$$\mathcal{L}' = \bar{\Psi}_{r_1 r_2}^{\text{V}} \Psi_{r_1 r_2}^{\text{V}}$$

conservaremos la dependencia funcional

$$\mathcal{L}' = f(\Psi_{11}^{\text{V}}, \Psi_{12}^{\text{V}}, \Psi_{21}^{\text{V}}, \dots, \Psi_{44}^{\text{V}}; \bar{\Psi}_{11}^{\text{V}}, \dots, \bar{\Psi}_{44}^{\text{V}})$$

sin reemplazar explícitamente las 15 Ψ_{ij}^{V} (resp. $\bar{\Psi}_{ji}^{\text{V}}$) dependientes en función de las seis independientes.

Conviene proceder así para que no aparezcan asimetrías. Por ejemplo, si usande

$$\Psi_{ij}^{\tau} = \Psi_{ji}^{\tau}$$

pusiéramos explícitamente las diez Ψ_{ij}^{τ} con $i > j$ en función de las Ψ_{ij}^{τ} con $i < j$ sería

$$\frac{\partial (\overline{\Psi}^{\tau} \Psi^{\tau})}{\partial \Psi_{12}^{\tau}} = 2 \overline{\Psi}_{12}^{\tau} ; \quad \frac{\partial (\overline{\Psi}^{\tau} \Psi^{\tau})}{\partial \Psi_{11}^{\tau}} = \Psi_{11}^{\tau}$$

Perores asimetrías aparecen si usamos (6.60) para eliminar las cuatro restantes componentes dependientes.

La (8.26-a) no teniendo asimetrías nos permite compactar

$$\frac{\partial (\overline{\Psi}^{\tau} \Psi^{\tau})}{\partial \Psi^{\tau}} = \Psi^{\tau} \quad (8.26-a)$$

Análogamente

$$\frac{\partial [(\partial_{\sigma} \overline{\Psi}^{\tau}) \delta_{(0)}^{\sigma} (\partial_{\tau} \Psi^{\tau})]}{\partial (\partial_{\mu} \Psi^{\tau})} = (\partial_{\sigma} \overline{\Psi}^{\tau}) \delta_{(0)}^{\sigma} \delta_{(2)}^{\mu} \quad (8.26-o)$$

Etc.

8.b-8) El procedimiento variacional (formulación 1)

A) DEFINICIONES E HIPOTESIS.

Como es usual, definimos la acción

$$W^{(1/2)} = \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} d^4x \mathcal{L}^{(1/2)}$$

donde σ_1 y σ_2 son dos hiperplanos de tipo espacial. Damos a Ψ^{τ} y $\overline{\Psi}^{\tau}$ (no a Ψ y $\overline{\Psi}$) variaciones arbitrarias $\delta \Psi^{\tau}$ y $\delta \overline{\Psi}^{\tau}$ tales que cumplan

$$\delta \Psi^{\tau} \in \mathcal{E}^{(1/2)}, \quad \delta \overline{\Psi}^{\tau} \in \mathcal{E}^{(1/2)} \quad (8.27-a)$$

y las habituales prescripciones

$$\delta \Psi^{\tau}|_{\sigma_1} = \delta \Psi^{\tau}|_{\sigma_2} = \delta \overline{\Psi}^{\tau}|_{\sigma_1} = \delta \overline{\Psi}^{\tau}|_{\sigma_2} = 0. \quad (8.27-b)$$

La (a) implica que sólo 6 de las $(\delta \Psi^{\tau})_{ij}$ son independientes.

Los campos y sus derivadas se anulan en el infinito espacial.

Además, sobre una de las dos hipersuperficies, por ejemplo sobre

σ_1 imponemos,

$$\Psi(\sigma_1) \in \mathcal{W}_{\sigma_1} ; \quad \partial_{\mu} \Psi(\sigma_1) \in \mathcal{W}_{\sigma_2} \quad \begin{matrix} \text{donde } \mu \text{ es la direc-} \\ \text{ción de la normal} \end{matrix} \quad (8.28)$$

Esta no es una restricción adicional del grado de libertad, pues no afecta a $\delta \Psi^{\tau}$ en las regiones en que no es nulo (o sea en el interior de las franjas delimitadas por σ_1 y σ_2).

Como es usual, postulamos

$$\int W^{(1/2)} = 0 \quad (8.29)$$

B) ECUACIONES DE EULER GENERALIZADAS.

Integrando por partes en (8.20) se obtiene

$$\int_{\sigma_1}^{\sigma_2} \left\{ \left[\frac{\partial \mathcal{L}^{(1/2)}}{\partial \Psi^{\tau}} - \partial_{\alpha} \left(\frac{\partial \mathcal{L}^{(1/2)}}{\partial (\partial_{\alpha} \Psi^{\tau})} \right) \right] \delta \Psi^{\tau} + \left[\frac{\partial \mathcal{L}^{(1/2)}}{\partial \overline{\Psi}^{\tau}} - \partial_{\alpha} \left(\frac{\partial \mathcal{L}^{(1/2)}}{\partial (\partial_{\alpha} \overline{\Psi}^{\tau})} \right) \right] \delta \overline{\Psi}^{\tau} \right\} d^4x = 0$$

+Expresando la parte VI de Ψ mediante (8.6-a). Para notación ver 8.b-7.

$$\Psi \left[\frac{\partial \mathcal{L}^{(1/2)}}{\partial \Psi^\sigma} - \partial_\alpha \left(\frac{\partial \mathcal{L}^{(1/2)}}{\partial (\partial_\alpha \Psi^\sigma)} \right) \right] \delta \Psi^\sigma = 0 \quad (8.30-a)$$

$$\delta \Psi^\sigma \left[\frac{\partial \mathcal{L}^{(1/2)}}{\partial \Psi^\sigma} - \partial_\alpha \left(\frac{\partial \mathcal{L}^{(1/2)}}{\partial (\partial_\alpha \Psi^\sigma)} \right) \right] = 0 \quad (8.30-b)$$

En (8.30-a), e sea en

$$\left[\right]_{i_2 i_1} \delta \Psi_{i_1 i_2}^\sigma = 0$$

el procedimiento usual consistiría en anular el coeficiente de cada $\delta \Psi_{i_1 i_2}^\sigma$. En nuestro caso no le podemos hacer, pues no todas las $\delta \Psi_{i_1 i_2}^\sigma$ son independientes.

En cambio, usando el 1er. lema obtenemos inmediatamente una forma generalizada de las ecuaciones de Euler,

$$\left[\frac{\partial \mathcal{L}^{(1/2)}}{\partial \Psi^\sigma} - \partial_\alpha \left(\frac{\partial \mathcal{L}^{(1/2)}}{\partial (\partial_\alpha \Psi^\sigma)} \right) \right]^{\sigma \Delta i m} = 0 \quad (8.31-a)$$

$$\left[\frac{\partial \mathcal{L}^{(1/2)}}{\partial \Psi^\sigma} - \partial_\alpha \left(\frac{\partial \mathcal{L}^{(1/2)}}{\partial (\partial_\alpha \Psi^\sigma)} \right) \right]^{\sigma \Delta i m} = 0 \quad (8.31-b)$$

C) PRIMERA FORMA DE LAS ECUACIONES DE EVOLUCION.

De (8.24) y (8.31-b) se obtiene

$$\left[m^2 \Psi^\sigma + \gamma_{(1)}^\alpha \gamma_{(2)}^\sigma \partial_\alpha \partial_\sigma \Psi^\tau \right]^{\sigma \Delta i m} = 0$$

Como en este caso el corchete es simétrica ante el intercambio (1) ↔ (2)

de los índices spinoriales,

$$\left[\right]^{\sigma \Delta i m} = \left[\right]^\tau$$

Además, por (6.59-a)

$$\left[\right]^\tau = \left[\right]$$

Por lo tanto,

$$\boxed{m^2 \Psi^\sigma + \gamma_{(1)}^\alpha \gamma_{(2)}^\sigma \partial_\alpha \partial_\sigma \Psi^\tau = 0} \quad (8.32-a)$$

Análogamente,

$$\boxed{m^2 \bar{\Psi}^\tau + (\partial_\alpha \partial_\sigma \bar{\Psi}^\tau) \gamma_{(1)}^\alpha \gamma_{(2)}^\sigma = 0} \quad (8.32-b)$$

Nuestro objetivo final será obtener la forma usual (1.2) de las ecuaciones de EW. Como etapas intermedias demostraremos primero que la condición inicial se cumple no sólo en σ_1 (cf.(8.28)) sino en todo x^k comprendido entre σ_1 y σ_2 , y luego, que las Ψ no pueden ser de tipo M (Secc. 8.b-4). Entre estas etapas habrá que intercalar varias subetapas.

Nota: En (D) y (E) particularizaremos σ_1 haciéndolo de tipo \perp :

$$\sigma_1 = \sigma_{\perp 1}$$

(cf. Secc. 8.b-5A). Como el resultado final es manifiestamente covariante y como $\Psi(\sigma_{\perp 1}) \in W_{\sigma_1}$ tiene generalización covariante (Cf. Secc. 8.b-5C) esta particularización no restringe la generalidad de los resultados.

D) DEMOSTRAREMOS QUE NO SOLO Ψ Y $\partial_\alpha \Psi$ CUMPLEN LA CONDICION INICIAL SOBRE $\sigma_{\perp 1}$ SINO QUE TAMBIEN $\partial_\alpha^2 \Psi(\sigma_{\perp 1})$ Y $\partial_\alpha \partial_\beta \Psi(\sigma_{\perp 1})$ LA CUMPLEN SOBRE $\sigma_{\perp 1}$.

→Para la notación ver Secc. 8.b-5A.

Nota: De que $\varphi = \partial_0 \psi$ cumpla (2.3) sobre σ_{11} ,

$$H_{(1)} \varphi(t_1, \vec{x}) = H_{(2)} \varphi(t_1, \vec{x}) \quad (\alpha)$$

no podemos deducir por mera derivación temporal que

$$H_{(1)} \partial_0 \varphi(t_1, \vec{x}) = H_{(2)} \partial_0 \varphi(t_1, \vec{x}) \quad (\beta)$$

puesto que por ahora sólo sabemos que $\varphi(t, \vec{x})$ cumple (2.3) para $t=t$ (no sabemos si (2.3) se cumple en un intervalo $t_1 < t < t_1 + \Delta t$).

Además, podemos construir un contraejemplo: Sea $\Theta(t, \vec{x})$ tal que

$$H_{(1)} \Theta(t, \vec{x}) = -H_{(2)} \Theta(t, \vec{x})$$

para todo t $\left\{ \begin{array}{l} \Theta \text{ existe: puede construirse con las } U_{\mathcal{F}} \text{ de (4.19)} \\ \text{sea } \Omega \text{ tal que} \end{array} \right\}$;

$$H_{(1)} \Omega(t, \vec{x}) = +H_{(2)} \Omega(t, \vec{x})$$

para todo t $\left\{ \begin{array}{l} \Omega \text{ existe: es cualquier solución de las (8.1)} \end{array} \right\}$. Entonces

$$\varphi(t, \vec{x}) = \Omega(t, \vec{x}) + (t - t_1) \Theta(t, \vec{x})$$

cumple (α) pero viola (β) .

De (8.28) y (8.23) es,

$$\Lambda^I \Lambda^V \psi^T(\sigma_{11}) = 0 \quad (8.33-a)$$

$$\Lambda^I \Lambda^V \partial_0 \psi^T(\sigma_{11}) = 0 \quad (8.33-b)$$

$$\Lambda^I \Lambda^III (\square^2 - \Delta - \vec{\alpha}_{(1)} \cdot \vec{\nabla} \partial_0) \psi^T(\sigma_{11}) = 0 \quad (8.33-c)$$

$$\Lambda^I \Lambda^III (\square^2 - \Delta - \vec{\alpha}_{(1)} \cdot \vec{\nabla} \partial_0) \partial_0 \psi^T(\sigma_{11}) = 0. \quad (8.33-d)$$

Premultiplicando (8.32-a) por $\delta_{(1)}^0 \delta_{(2)}^0$ se obtiene (para todo λ^μ),

$$\begin{aligned} \square^2 \delta_{(1)}^0 \delta_{(2)}^0 \psi^T(x^\mu) + \partial_0^2 \psi^T(x^\mu) + (\vec{\alpha}_{(1)} + \vec{\alpha}_{(2)}) \cdot \vec{\nabla} \partial_0 \psi^T(x^\mu) + \\ + (\vec{\alpha}_{(1)} \cdot \vec{\nabla})(\vec{\alpha}_{(2)} \cdot \vec{\nabla}) \psi^T(x^\mu) = 0 \end{aligned} \quad (8.34)$$

Premultiplicamos ésta por $\Lambda^II \Lambda^III$; usando (8.21), (8.18), (8.20) y

la (A8-2.2) que aquí transcribimos,

$$\Lambda^I \delta_{(1)}^0 = -\Lambda^I \delta_{(2)}^0 = \Lambda^I \delta_{(2)}^0 \Lambda^I \quad (8.35-a)$$

$$\Lambda^II \delta_{(1)}^0 = -\Lambda^II \delta_{(2)}^0 = \delta_{(1)}^0 \Lambda^II = -\delta_{(2)}^0 \Lambda^II \quad (8.35-b)$$

$$\Lambda^I \delta_{(1)}^0 \delta_{(2)}^0 = \delta_{(1)}^0 \delta_{(2)}^0 \Lambda^I = \Lambda^I \quad (8.35-c)$$

$$\Lambda^II \delta_{(1)}^0 \delta_{(2)}^0 = \delta_{(1)}^0 \delta_{(2)}^0 \Lambda^II = -\Lambda^II \quad (8.35-d)$$

obtenemos:

$$\begin{aligned} -\square^2 \Lambda^III \Lambda^II \psi^T(x^\mu) + \partial_0^2 \Lambda^II \Lambda^III \psi^T(x^\mu) + 2 \Lambda^II \Lambda^III (\vec{\alpha}_{(1)} \cdot \vec{\nabla}) \partial_0 \psi^T + \\ + \Lambda^II \Lambda^III \Delta \psi^T(x^\mu) = 0 \end{aligned} \quad (8.36)$$

Imponiendo en ésta $x^\mu \in \sigma_{11}$ y usando (8.33-c) resulta

$$\Lambda^I \Lambda^III (\partial_0^2 + \vec{\alpha}_{(1)} \cdot \vec{\nabla} \partial_0) \psi^T(\sigma_{11}) = 0 \quad (8.37)$$

Por otra parte premultiplicamos (8.34) por $\Lambda^I \Lambda^IV$ y usamos (8.18),

(8.20) y (8.35); obtenemos

$$-\square^2 \Lambda^IV \Lambda^II \psi^T(x^\mu) + \partial_0^2 \Lambda^II \Lambda^IV \psi^T(x^\mu) - \Lambda^II \Lambda^IV \Delta \psi^T(x^\mu) = 0; \quad (8.38)$$

teniendo en cuenta (8.33-a) resulta

$$\Lambda^II \Lambda^IV \left[\partial_0^2 \psi^T(\sigma_{11}) \right] = 0 \quad (8.39)$$

Finalmente premultiplicando (8.34) por $\Lambda^I \Lambda^III \partial_0$ se obtiene, luego de

usar (8.35-c), (8.18) y (8.20),

$$\begin{aligned} \square^2 \Lambda^III \Lambda^I \partial_0 \psi^T(x^\mu) + \Lambda^I \Lambda^III \partial_0^3 \psi^T(x^\mu) + 2 \Lambda^I \Lambda^III \vec{\alpha}_{(1)} \cdot \vec{\nabla} \partial_0 \psi^T(x^\mu) + \\ + \Lambda^I \Lambda^III \Delta \partial_0 \psi^T(x^\mu) = 0 \end{aligned} \quad (8.40)$$

Imponemos $x^k \in \sigma_{1\perp}$, premultiplicamos por $\vec{\alpha}_{(0)} \cdot \vec{\nabla}$ y usamos (8.33-c), (8.20) y (8.37)⁺:

$$\bigwedge^{\text{II}} \bigwedge^{\text{III}} (-m^4 + m^2 \Delta + \vec{\alpha}_{(0)} \cdot \vec{\nabla} \partial_0^3 + \Delta \partial_0^2) \Psi^{\text{V}}(\sigma_{1\perp}) = 0 \quad (8.41)$$

Pero por (8.33-c) y (8.37) es

$$\bigwedge^{\text{II}} \bigwedge^{\text{III}} (m^2 - \Delta + \partial_0^2) \Psi^{\text{V}}(\sigma_{1\perp}) = 0 \quad (8.42)$$

don lo que (8.41) se transforma en

$$\bigwedge^{\text{II}} \bigwedge^{\text{III}} (m^2 - \Delta + \vec{\alpha}_{(0)} \cdot \vec{\nabla} \partial_0) \left[\frac{1}{\partial_0} \Psi^{\text{V}}(\sigma_{1\perp}) \right] = 0 \quad (8.43)$$

Merced a (8.23) las (8.39) y (8.43) implican

$$\partial_0^2 \Psi(\sigma_{1\perp}) \in \mathcal{W} \quad (8.44-a)$$

Para obtenerla hemos usado (8.34), (8.33-a) y (8.33-c); de manera similar, si derivásemos (8.34) respecto al tiempo y utilizamos (8.33-b) y (8.33-d) obtendríamos

$$\partial_0^3 \Psi(\sigma_{1\perp}) \in \mathcal{W} \quad (8.44-b)$$

B) DEMOSTRAREMOS QUE Ψ CUMPLEN LA CONDICION INICIAL NO SOLO SOBRE σ_1 , SINO TAMBIEN PARA TODO x^k . CONSECUENCIAS.

A partir de la hipótesis (8.28) y mediante iteración de (D) resulta

$$\partial_0^{(n)} \Psi(\sigma_{1\perp}) \in \mathcal{W}; \quad n_0 = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (8.45-a)$$

Por otra parte derivando espacialmente la condición inicial (2.3-c)

$$H_{(1)} \Psi(\sigma_{1\perp}) = H_{(2)} \Psi(\sigma_{1\perp})$$

resulta que

$$\partial_1^{n_1} \partial_2^{n_2} \partial_3^{n_3} \Psi(\sigma_{1\perp}) \in \mathcal{W}, \quad n_i = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (8.45-b)^{++}$$

Mediante un desarrollo en serie de Taylor se obtiene la tesis de la primera etapa:

$$\boxed{\Psi(x^0, \vec{x}) \in \mathcal{W}_{x_0} \text{ para todo } x_0.} \quad (8.46)$$

Como consecuencia valen para todo x^k las relaciones demostradas

para $x^k \in \sigma_{1\perp}$:

$$\bigwedge^{\text{II}} \bigwedge^{\text{IV}} \Psi^{\text{V}}(x^k) = 0 \quad (8.47-a)$$

$$\bigwedge^{\text{II}} \bigwedge^{\text{III}} (m^2 - \Delta - \vec{\alpha}_{(0)} \cdot \vec{\nabla} \partial_0) \Psi^{\text{V}}(x^k) = 0; \quad (8.47-b)$$

de (8.37),

$$\bigwedge^{\text{II}} \bigwedge^{\text{III}} (\partial_0^2 + \vec{\alpha}_{(0)} \cdot \vec{\nabla} \partial_0) \Psi^{\text{V}}(x^k) = 0; \quad (8.47-c)$$

de (8.42),

$$\bigwedge^{\text{I}} \bigwedge^{\text{III}} (\square + m^2) \Psi^{\text{V}}(x^k) = 0; \quad (8.47-d)$$

además,

$$H_{(1)} \Psi(x^k) = H_{(2)} \Psi(x^k). \quad (8.47-e)$$

F) DEMOSTRAREMOS QUE SI Ψ ES SOLUCION DEL PROBLEMA VARIACIONAL, SUS PARTES Ψ^{D} Y Ψ^{M} TAMBIEN LO SON.+++

Hay que probar que

+Al ser atravesado por $\vec{\alpha}_{(0)} \cdot \vec{\nabla}$, \bigwedge^{I} muda en \bigwedge^{II} .

++Derivando espacialmente no se plantea el problema que para derivadas temporales fue discutido en la nota incluida en D.

+++ Ψ^{D} y Ψ^{M} se definen en 8.b-4A.

- 1) Ψ^T cumple (8.32-a) \Rightarrow $\left\{ \begin{array}{l} \Psi^{BT} \\ \Psi^{MT} \end{array} \right\}$ cumple (8.32-a)
- 2) $\delta \Psi^T$ " (8.27) \Rightarrow $\left\{ \begin{array}{l} \delta \Psi^B \\ \delta \Psi^M \end{array} \right\}$ " (8.27)
- 3) $\Psi(\sigma_1)$ " (8.28) \Rightarrow $\left\{ \begin{array}{l} \Psi^B(\sigma_1) \\ \Psi^M(\sigma_1) \end{array} \right\}$ " (8.28).

La primera se demuestra probando que Λ^B y Λ^M (8.13) conmutan con todos los operadores que aparecen en (8.32-a). La segunda es trivial.

Para la tercera, volveremos a particularizar por un momento $\sigma_1 = \sigma_1$ (Secc. 8.4-5A) lo cual no es restrictivo pues el resultado final es covariante. Hay que probar que

$$\begin{aligned} E_{(1)} \Psi(\sigma_1) &= E_{(1)} \Psi(\sigma_1) & (8.48-a) \\ E_{(1)} [\square \Psi(\sigma_1)] &= E_{(1)} [\square \Psi(\sigma_1)]. & (8.48-b) \end{aligned}$$

Antes de probar (B) esto era un problema difícil porque de (8.48-a)

no se seguía a priori

$$E_{(1)} [\partial_\alpha^2 \Psi(\sigma_1)] = E_{(1)} [\partial_\alpha^2 \Psi(\sigma_1)]$$

(cf. la nota que encabezaba B). Para una vez demostrada B sabemos que esto es cierto (cf. (8.44-a)).

El resto de la demostración es trivial.

6) DEMOSTRAREMOS QUE SI Ψ^M ES SOLUCIÓN DEL PROBLEMA VARIACIONAL, EN PARTE Ψ^{MT} ES NULA.

Escribimos (8.32-a) con $\Psi \rightarrow \Psi^M$; la premultiplicamos por

$\delta \Psi^T$ con (2) obtenemos

$$\delta \Psi^T \left[\square \partial_\alpha \Psi^M + \square \left[\partial_\alpha \Psi^M \right] \right] \Psi^{MT} = 0,$$

restamos la misma con Ψ^M y sumamos ambos resultados. Comparando con (8.6-a) resulta

$$\square^2 \Psi^{MT} + \square \Psi^{MT} = 0,$$

Usando (8.13-a) obtenemos

$$\Psi^{MT} = 0 \quad (8.49)$$

7) DEMOSTRAREMOS QUE SI Ψ^M ES SOLUCIÓN DEL PROBLEMA VARIACIONAL, EN PARTE Ψ^{MT} ES NULA.

Sea Ψ^M una solución del problema variacional; premultiplicando (8.32-a)

(con $\Psi \rightarrow \Psi^M \equiv \Psi^{MT}$) por $\delta \Psi^T$ y usando (8.13-d) para despejar

$\delta \Psi^T$ se obtiene

$$\square \square^2 \Lambda^T + \Delta + (\alpha_{(1)}^T + \alpha_{(2)}^T) \cdot \nabla \lambda + (\alpha_{(1)}^T \cdot \nabla) (\alpha_{(2)}^T \cdot \nabla) \Psi^{MT} = 0. \quad (8.50)$$

Premultiplicando por $\Lambda^T \Lambda^T$ y usando (8.13) y (8.50) resulta

$$(\Delta + 2 \square^2) \Psi^{MT} = 0$$

que para \bar{x} fija es una ecuación elíptica homogénea en \bar{x} ; como Ψ^{MT}

es nula para $\bar{x} \rightarrow \infty$ (cf. 4) la solución es idénticamente nula. También es nula por (8.47-a). Entonces

$\Psi^{MT} = 0$, etc.

$$\Psi^{M \nabla \nabla} = 0. \quad (8.52)$$

Finalmente, para una Ψ arbitraria es (cf. Secc. 8.b-4),

$$\Psi = \Psi^\tau + \Psi^\pi = \dots = \Psi^{\nabla I \text{ III}} + \Psi^{\nabla \text{ I II}} + \Psi^{\nabla \text{ I IV}} + \Psi^\pi. \quad (8.53)$$

Teniendo en cuenta (G) y (8.51) tenemos que para toda Ψ^M solución del problema variacional es

$$\Psi^M \equiv \Psi^{M \nabla} = \Psi^{M \nabla I \text{ III}} + \Psi^{M \nabla \text{ I II}} \quad (8.54)$$

I) DEMOSTRAREMOS QUE LA PARTE Ψ^M DE TODA SOLUCIÓN Ψ DEL PROBLEMA VARIACIONAL ES IDENTICAMENTE NULA.

Sea Ψ^M una solución; (8.47) \Rightarrow

$$\Psi^{M \nabla \text{ I II}} = 0. \quad (8.55)$$

Por otra parte, premultiplicando (8.50) por $\wedge^{\text{III}} \wedge^{\text{I}}$ se obtiene

$$(m^2 + \Delta) \Psi^{M \nabla I \text{ III}} + \overset{\rightarrow}{\alpha}_{(1)} \cdot \overset{\rightarrow}{\nabla} \Psi^{M \nabla \text{ I II}} = 0 \quad (8.56)$$

Con (8.55)

$$(m^2 + \Delta) \Psi^{M \nabla I \text{ III}} = 0; \quad (8.57)$$

usando un argumento idéntico al empleado para $\Psi^{M \nabla I \text{ IV}}$ (punto H) resulta

$$\Psi^{M \nabla I \text{ III}} = 0. \quad (8.58)$$

De (8.54), (8.55) y (8.58) resulta que para toda solución Ψ^M es

$$\Psi^M(x^k) \equiv 0. \quad (8.59-a)$$

Entonces, por (F), para toda solución Ψ del problema variacional es

$$\wedge^M \Psi(x^k) \equiv 0. \quad (8.59-b)$$

Con esto hemos llegado a la segunda etapa intermedia anunciada al final de C. A la ecuación (8.32-a) podemos añadir

$$\Psi \equiv \Psi^B \quad (8.60-a)$$

o sea

$$\square \Psi = m^2 \Psi \quad (8.60-b)^*$$

de donde

$$\square \Psi^\tau = -m^2 \Psi^\tau \quad (8.60-c)$$

Nota: Hemos demostrado (8.60) con un σ_1 particular ($\sigma_1 \equiv$ hiperplano $x_0 = \text{const}$). Pero como (8.60) es covariante, vale para $\sigma_1 =$ hiperplano de tipo espacial arbitrario.

J) DEMOSTRAREMOS QUE TODA Ψ SOLUCIÓN DEL PROBLEMA VARIACIONAL CUMPLE LA ECUACION (1:7) DE BELINFANTE.

Premultiplicamos (8.6-a) por $\frac{1}{2m} (\delta_{(1)}^k + \delta_{(2)}^k) \partial_k$. Teniendo en cuenta (8.32-a) y (8.60-c) obtenemos

$$\Psi^\tau = \frac{1}{2m} (\delta_{(1)}^\beta + \delta_{(2)}^\beta) \partial_\beta \Psi^\tau \quad (8.61)$$

Sumamos miembro a miembro (8.61) y (8.6-a):

$$\Psi = \frac{1}{2m} (\delta_{(1)}^\beta + \delta_{(2)}^\beta) \partial_\beta \Psi$$

que es la ecuación (1:7) de Belinfante.

K) AFIRMAMOS QUE TODA SOLUCION DEL PROBLEMA VARIACIONAL CUMPLE LAS ECUACIONES (2.1) DE BIRMANH-WIGNER.

Lo único que faltaría probar es que las (1.7) implican las (1.1), pero esto fué hecho mucho tiempo atrás por Belinfante³.

Esquematizamos la demostración de Belinfante: Se premultiplica (1.7) por $i \partial_\nu (\delta_{(1)}^\nu - \delta_{(2)}^\nu)$: Se obtiene $i \partial_\nu \delta_{(1)}^\nu \Psi = i \partial_\nu \delta_{(2)}^\nu \Psi$. Reemplazando en (1.7) se obtienen las (1.1-a) y (b). La (1.1-c) fué postulada en (8.2).

Con procedimiento similar se obtiene la ecuación adjunta (1.10) a partir de (8.32-b).

L) DEMOSTRAMOS QUE TODA SOLUCION DE LAS ECUACIONES DE B-W ES SOLUCION DEL PROBLEMA VARIACIONAL.

Cabe demostrarlo, porque en principio podría ocurrir que p. ej. (8.32-a) sea más fuerte que las (1.1) de BW.

Partimos de (1.1-a) y (b). Aplicando m. a m. \wedge^ν ó $\wedge^{\nu\tau}$ se obtiene

$$\Psi^\nu = \frac{1}{m} \delta_{(i)}^\mu \partial_\mu \Psi^{\nu\tau} \quad (8.62-a)$$

$$\Psi^{\nu\tau} = \frac{1}{m} \delta_{(i)}^\mu \partial_\mu \Psi^\nu \quad (8.62-b)$$

$i = 1, 2.$

Combinamos (a) con $i = 1$ y (b) con $i = 2$. Obtenemos la (8.32-a).

Por otra parte, sabemos (cf. Secc. 2.b) que las soluciones de BW cumplen para todo x^μ la condición inicial; por lo tanto, también sus derivadas temporales cumplen la condición inicial para todo x^μ ; con más rasca, cumplen (8.28). Análogamente para la ecuación adjunta.

CONCLUSION:

Ψ = solución de nuestro procedimiento variacional (formulación $\frac{1}{2}$)	
Ψ = " " las ecuaciones de BW.	(8.63)

8.b-9) El procedimiento variacional (formulación 0).

A) DEFINICIONES E HIPOTESIS:

Sen idénticas a Secc. 8.b-8A salvo $(\frac{1}{2}) \rightarrow (0)$:

$$W^{(0)} = \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} d^4x \mathcal{L} \quad ; \quad \int_{\sigma_1} \Psi^\nu \epsilon \epsilon^{\Delta_{im}} \quad (8.64-a)$$

$$\int_{\sigma_1} \Psi^\nu \epsilon \epsilon^{\Delta_{im}} - \int_{\sigma_2} \Psi^\nu \epsilon \epsilon^{\Delta_{im}} = 0. \quad (8.64-b)$$

$$\Psi(\sigma_1) \in W_{\sigma_1}; \quad \partial_\mu \Psi(\sigma_1) \in W_{\sigma_1} \quad (l_\mu \text{ = dirección normal a } \sigma_1) \quad (8.65)$$

Los campos y sus derivadas se anulan en el infinito espacial. Finalmente,

$$\delta W^{(0)} = 0. \quad (8.66)$$

B) ECUACIONES DE EULER GENERALIZADAS.

Como en la Secc. 8.b-8B se obtiene

$$\left[\frac{\partial \mathcal{L}^{(0)}}{\partial \Psi^\nu} - \partial_\alpha \left(\frac{\partial \mathcal{L}^{(0)}}{\partial (\partial_\alpha \Psi^\nu)} \right) \right]^{\nu \Delta_{im}} = 0 \quad (8.67-a)$$

$$\left[\frac{\partial \mathcal{L}^{(0)}}{\partial \Psi^\nu} - \partial_\alpha \left(\frac{\partial \mathcal{L}^{(0)}}{\partial (\partial_\alpha \Psi^\nu)} \right) \right]^{\nu \Delta_{im}} = 0 \quad (8.67-b)$$

C) PRIMERA FORMA DE LAS ECUACIONES DE EVOLUCION.

De (8.25) y (8.67),

$$\square \Psi^{\underline{v}} = -m^2 \Psi^{\underline{v}} \quad (8.68-a)$$

$$\square \Psi^{\underline{v}} = -m^2 \Psi^{\underline{v}} \quad (8.68-b)$$

como era de esperar dada la analogía formal de $\mathcal{L}^{(0)}$ con la densidad lagrangeana de Klein-Gordon (sólo el número de componentes es diferente).

Sólo elaboraremos la (a); (8.68-a) en (8.6-a),

$$\square \Psi^{\underline{v}} = -m^2 \Psi^{\underline{v}}$$

que en (8.3-a) implica

$$\square \Psi = -m^2 \Psi \quad (8.69)^*$$

D) DESCOMPOSICION EN ONDAS PLANAS.

Es

$$\Psi_{\ell_1 \ell_2}(\underline{t}, \underline{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d^3 p}{\sqrt{2p_0}} C_{\ell_1 \ell_2}(\underline{p}, t) e^{i \underline{p} \cdot \underline{x}} \quad (8.70)$$

$$p_0 = + \sqrt{\underline{p}^2 + m^2} \quad (8.71)$$

Reemplazando en (8.69) se obtiene una ecuación para la evolución de $C(\underline{p}, t)$; integrándola,

$$\Psi_{\ell_1 \ell_2}(\underline{t}, \underline{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sum_{\ell'=-1}^{+1} \int \frac{d^3 p}{\sqrt{2p_0}} d_{\ell_1 \ell_2}^{(\ell')}(\underline{p}) e^{i \underline{p} \cdot \underline{x} - i \ell' p_0 t} \quad (8.72)$$

Siendo Ψ simétrica (cf. (8.2)),

$$d_{\ell}^{(\ell')}(\underline{p}) \in \mathcal{E}_{SP}^{2im} \quad (8.73)^+$$

que es subtendido⁺⁺ por los 10 spinores $u_{\ell}(\underline{r}, \underline{p})$, $u_{\underline{f}}(x, s, \underline{p})$ definidos en (4.18) y (4.19):

$$\Psi_{\ell_1 \ell_2}(\underline{t}, \underline{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sum_{\ell'=-1}^{+1} \sum_{\ell=-1}^{+1} \int \frac{d^3 p}{\sqrt{2p_0}} e_{\ell}^{(\ell')}(\underline{r}, \underline{p}) u_{\ell_1 \ell_2}(\underline{r}, \underline{p}) e^{i \underline{p} \cdot \underline{x} - i \ell' p_0 t} + \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sum_{\ell'=-1}^{+1} \sum_{\underline{f}, s} \int \frac{d^3 p}{\sqrt{2p_0}} k^{(\ell')}(\underline{r}, s, \underline{p}) u_{\underline{f}}(x, s, \underline{p}) e^{i \underline{p} \cdot \underline{x} - i \ell' p_0 t} \quad (8.74)$$

donde $e_{\ell}^{(\ell')}$ y $k^{(\ell')}$ son coeficientes sin índices spinoriales.

E) CONSECUENCIAS DE LA CONDICION SOBRE \mathcal{G} .

Usaremos como \mathcal{G} el hiperplano definido por

$$t = x^0 = 0. \quad (8.75)$$

Como nuestros resultados finales son covariantes ante transformaciones continuas de Lorentz, la (8.75) no restringe las mismas.

Calculamos $\Psi(0, \underline{x})$, e imponemos ^{la primera} (8.65). Como las $u_{\underline{f}}(x, s, \underline{p})$ no pertenecen a \mathcal{W}_{-p} (cf. (4.20)) sus coeficientes se anulan:

$$k^{(+)}(x, s, \underline{p}) + k^{(-)}(x, s, \underline{p}) = 0.$$

* \mathcal{E}_{SP}^{2im} se definió en Secc. 2.0-3.

++ Cf. Secc. 4.0-b-1.

Hacemos lo mismo para la segunda (8.65), recordando que con el σ_1 elegido la dirección de su normal es $\underline{k} = 0$. Resulta

$$k^{(+)}(r, s, \vec{p}) - k^{(-)}(r, s, \vec{p}) = 0,$$

de donde

$$k^{(\epsilon)}(r, s, \vec{p}) = 0, \quad \forall \epsilon, r, s, \vec{p}. \quad (8.76)$$

con lo que la segunda integral en (8.74) desaparece:

$$\Psi_{(i_1, i_2)}(\vec{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sum_{\epsilon=1}^1 \sum_{\epsilon=2}^1 \int \frac{d^3 p}{V_{2\rho_0}} e^{i\epsilon(\vec{p}\cdot\vec{x} - \epsilon\epsilon_0 t)} u_{\epsilon, i_1, i_2}(\vec{r}, \vec{p}) \quad (8.77)$$

y ahora Ψ cumple automáticamente la condición sobre σ_1 .

G) DESCOMPOSICION DE Ψ EN $\Psi^b + \Psi^m$:

Como por una parte las seis $u(\vec{r}, p)$ son independientes entre sí, y por la otra $e^{-i\epsilon_0 t}$ y $e^{+i\epsilon_0 t}$ son dos funciones independientes, tengo en (8.77) $6 \times 2 = 12$ funciones independientes, que reagruparé en dos,

$$\Psi(\vec{x}) = \Psi^b(\vec{x}) + \Psi^m(\vec{x}) \quad (8.78-a)$$

de esta manera: Ψ^b está formada por los términos con $\epsilon = \epsilon^0$,

$$\Psi^b = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sum_{\epsilon=1}^1 \int \frac{d^3 p}{V_{2\rho_0}} e^{i\epsilon(\vec{p}\cdot\vec{x} - \epsilon\epsilon_0 t)} u_{\epsilon}(\vec{r}, \vec{p}) \quad (8.78-b)$$

y Ψ^m por los términos con $\epsilon = -\epsilon^0$,

$$\Psi^m = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sum_{\epsilon=1}^1 \int \frac{d^3 p}{V_{2\rho_0}} e^{i\epsilon(\vec{p}\cdot\vec{x} - \epsilon\epsilon_0 t)} u_{+\epsilon}(\vec{r}, \vec{p}) \quad (8.78-c)$$

Por lo antedicho la descomposición existe y es única. Además Ψ^b

y Ψ^m se pueden caracterizar por

$$\partial_0 \Psi^b = H_{(1)} \Psi^b = H_{(2)} \Psi^b \quad (8.79-a)$$

$$-\partial_0 \Psi^m = H_{(1)} \Psi^m = H_{(2)} \Psi^m \quad (8.79-b)$$

Además, si Ψ es una solución del problema variacional, sus partes Ψ^b y Ψ^m también lo son. Trataremos de demostrar que las Ψ^m son nulas.

H) ECUACIONES QUE LIGAN A LAS PARTES VII, VIII, IX, X, XI y XII de Ψ^m .

La (8.79)

$$\partial_0 \Psi^m = -H_{(i)} \Psi^m, \quad i=1,2$$

es

$$\partial_0 \Psi^m = + \vec{\nabla} \cdot \vec{\alpha}_{(i)} \Psi^m = \delta_{(i)}^0 \Psi^m, \quad i=1,2 \quad (8.80)$$

Aplicamos \wedge^V y \wedge^{π} :

$$\partial_0 \Psi^{mV} = \vec{\nabla} \cdot \vec{\alpha}_{(i)} \Psi^{mV} - \delta_{(i)}^0 \Psi^{mV} \quad (8.81-a)$$

$$\partial_0 \Psi^{m\pi} = \vec{\nabla} \cdot \vec{\alpha}_{(i)} \Psi^{m\pi} - \delta_{(i)}^0 \Psi^{m\pi} \quad i=1,2 \quad (8.81-b)$$

y ahora \wedge^I y \wedge^{II} :

$$\partial_0 \Psi^{mV II} = \vec{\nabla} \cdot \vec{\alpha}_{(i)} \Psi^{mV II} - \delta_{(i)}^0 \Psi^{mV II} \quad (8.82-a)$$

$$\partial_0 \Psi^{m\pi I} = \vec{\nabla} \cdot \vec{\alpha}_{(i)} \Psi^{m\pi I} - \delta_{(i)}^0 \Psi^{m\pi I} \quad (8.82-b)$$

$$\partial_0 \Psi^{m\pi II} = \vec{\nabla} \cdot \vec{\alpha}_{(i)} \Psi^{m\pi II} - \delta_{(i)}^0 \Psi^{m\pi II} \quad (8.82-c)$$

$$\partial_0 \Psi^{m\pi I} = \vec{\nabla} \cdot \vec{\alpha}_{(i)} \Psi^{m\pi I} - \delta_{(i)}^0 \Psi^{m\pi I} \quad (8.82-d)$$

$i=1,2.$

I) DEMOSTRACION DE QUE PARA TODA SOLUCION Ψ^m DEL PROBLEMA VARIACIONAL ES $\Psi^{m \nabla I} = 0$.

La (8.6-a) se escribe para Ψ^m

$$\Psi^{m \nabla} = \frac{1}{2^m} (\delta_{(1)}^0 + \delta_{(2)}^0) \partial_0 \Psi^m + \frac{1}{2^m} (\vec{\delta}_{(1)} + \vec{\delta}_{(2)}) \cdot \vec{\nabla} \Psi^m; \quad (8.83)$$

para cada i multiplicamos (8.83) por $\delta_{(i)}^0$ y semisumamos los casos $i=1$ e $i=2$.

$$\Psi^{m \nabla} = \frac{1}{2^m} (\delta_{(1)}^0 + \delta_{(2)}^0) \partial_0 \Psi^m + \frac{1}{2^m} (\vec{\delta}_{(1)} + \vec{\delta}_{(2)}) \cdot \vec{\nabla} \Psi^m \quad (8.84)$$

Comparando con (8.83):

$$\Psi^{m \nabla} = \frac{1}{2^m} (\vec{\delta}_{(1)} + \vec{\delta}_{(2)}) \cdot \vec{\nabla} \Psi^m \quad (8.85)$$

y

$$(\delta_{(1)}^0 + \delta_{(2)}^0) \partial_0 \Psi^m = 0$$

de donde

$$\partial_0 \Psi^{m \nabla} = 0. \quad (8.86)$$

Nótese que estos resultados no sólo valen en σ_1 sino para todo x^A comprendido entre σ_1 y σ_2 . En efecto, la (8.79) si vale para $t=0$ vale para todo t (ver (8.78)).

Entonces podemos derivar (8.86) respecto del tiempo:

$$\partial_0^2 \Psi^{m \nabla I} = 0. \quad (8.87)$$

$$\Delta \Psi^{m \nabla I} = 0$$

que siendo una ecuación elíptica homogénea en \vec{x} , y anulándose los campos para $\vec{x} \rightarrow \infty$ implica

$$\Psi^{m \nabla I} = 0 \quad (8.88)$$

J) DEMOSTRACION DE QUE TODA SOLUCION Ψ^m DEL PROBLEMA VARIACIONAL ES IDENTICAMENTE NULA.

Aplicando \wedge^{Π} a (8.85) y usando (8.88) obtenemos

$$\Psi^{m \nabla \Pi} = 0 \quad \partial_0 \Psi^{m \nabla \Pi} = 0. \quad (8.89)$$

Derivamos respecto al tiempo (8.82-b) y (c) y sustituimos (8.86) y (8.89);

resulta

$$\partial_0^2 \Psi^{m \nabla \Pi} = \partial_0^2 \Psi^{m \nabla \Pi} = 0$$

de donde, como para $\Psi^{m \nabla \Pi}$,

$$\Psi^{m \nabla \Pi} = \Psi^{m \nabla \Pi} \quad (8.90)$$

(8.88), (8.89) y (8.90) informan que

$$\Psi^m = 0 \quad \forall x^A \quad (8.91-a)$$

o sea, en (8.78-a),

$$\Psi = \Psi^b \quad (8.91-b)$$

Con (8.79-a) tenemos finalmente:

$$\text{Para toda } \Psi \text{ es } \partial_0 \Psi = H_{(1)} \Psi = H_{(2)} \Psi \quad (8.91-c)$$

K) DEMOSTRACION DE QUE TODA SOLUCION DEL PROBLEMA VARIACIONAL CUMPLE LAS ECUACIONES DE BARGMANN-WIGNER.

Basta multiplicar

$$\frac{1}{2} \partial_\alpha \Psi = H_{(\alpha)} \Psi$$

por $\delta_{(1)}^0$ para obtener (1.1-a); idem (1.1-b).

De manera similar (8.68-b) implica la ecuación adjunta (1.10).

L) DEMOSTRACION DE QUE TODA SOLUCION DE LAS ECUACIONES DE BARGMANN-WIGNER LO ES DEL PROBLEMA VARIACIONAL.

Es sabido que basta operar con $\frac{1}{2} \partial_\alpha \delta_{(1)}^\alpha$ sobre (1.1-a) para obtener

$$\square \Psi = -m^2 \Psi$$

de donde, aplicando Λ^ν deducimos (8.68-a).

Finalmente, como en 8.b-8=0, las soluciones de BW cumplen la (8.165).

CONCLUSION:

$\begin{aligned} \Psi &= \text{solucion de nuestro procedimiento variacional (formulacion 0)} \\ \Leftrightarrow \Psi &= \text{" " las ecuaciones de BW.} \end{aligned} \quad (8.92)$

8.b-10) Nota sobre la falta de contradicción en cuanto al número de variables independientes.

En la formulación $\dot{\bar{g}}$ (resp. 0) del procedimiento variacional hemos usado variaciones $\delta \Psi^\nu$ de 6 componentes spinoriales independientes. Pero, aunque injustificado, podría argüirse que quizás la (8.28) (resp. 8.65)) restrinja ese grado de libertad.

Para asegurar que no es así, basta recordar que nuestro procedimiento variacional equivale a las ecuaciones de BW (cf. (8.63) y (8.92)) y que las ecuaciones de BW aseguran a sus soluciones un grado de libertad spinorial también igual a 6 (cf. Seco. 2.3-5).

8.b-11) Corolario sobre la relación entre Ψ^ν y $\Psi^{\nu\sigma}$.

Una vez demostradas las ecuaciones de B-W (1.1), aplicarles Λ^ν o $\Lambda^{\nu\sigma}$ permite simplificar las (8.6):

$$\Psi^\nu(x) = \frac{1}{m} \partial_\mu \delta_{(\alpha)}^\mu \Psi^\nu(x) \quad , \quad \bar{\Psi}^\nu(x) = -\frac{1}{m} [\partial_\mu \bar{\Psi}^\nu(x)] \delta_{(\alpha)}^\mu, \quad k=1,2 \quad (8.92^0-a)$$

y añadir

$$\Psi^{\nu\sigma}(x) = \frac{1}{m} \partial_\mu \delta_{(k)}^\mu \Psi^{\nu\sigma}(x) \quad , \quad \bar{\Psi}^{\nu\sigma}(x) = -\frac{1}{m} [\partial_\mu \bar{\Psi}^{\nu\sigma}(x)] \delta_{(k)}^\mu \quad (8.92^0-b)$$

8.c - SEGUNDO LEMA.

8.c-1) Elección de componentes independientes en Ψ^ν .

Observando (6.60) nos damos cuenta que en la representación usual de las δ^μ podemos elegir como componentes independientes las que siguen:

$$\left. \begin{aligned} \psi^{(1)} &= \frac{1}{2}(\psi_{11} + \psi_{33}) \\ \psi^{(2)} &= \psi_{13} \\ \psi^{(3)} &= \frac{1}{2}(\psi_{22} + \psi_{44}) \end{aligned} \right\} \quad ; \quad \left. \begin{aligned} \psi^{(4)} &= \frac{1}{2}(\psi_{12} + \psi_{34}) \\ \psi^{(5)} &= \frac{1}{2}(\psi_{14} + \psi_{23}) \\ \psi^{(6)} &= \psi_{24} \end{aligned} \right\} \quad (8.93)$$

que denotaremos con

$$\psi^{(A)} \quad ; \quad A = 1, 2, \dots, 6. \quad (8.94)$$

Las $\psi^{(A)}$ muestran desagradables asimetrías, pero no nos preocuparemos por ellas pues, con ayuda del lema a demostrar, las haremos desaparecer.

8.c-2) Enunciado del segundo lema.

"Sean

$$\theta^\nu \in \mathcal{E}^{\text{sim } \nu}, \quad \Omega^\nu \in \mathcal{E}^{\text{sim } \nu}, \quad \chi^\nu \in \mathcal{E}^{\text{sim } \nu} \quad (8.95-a)^+$$

entonces,

$$1) \sum_{A=1}^6 \left[\frac{\partial(\overline{\theta^\nu \Omega^\nu})}{\partial \Omega^{\nu(A)}} \right] \chi^{\nu(A)} = \left[\frac{\partial(\overline{\theta^\nu \Omega^\nu})}{\partial \Omega^\nu} \right] \chi^\nu \quad (8.96-a)$$

$$2) \sum_{A=1}^6 \left[\frac{\partial(\overline{\theta^\nu \Omega^\nu})}{\partial \Omega^{\nu(A)}} \right] \chi^{\nu(A)} = \overline{\theta^\nu} \chi^\nu \quad (8.97-a)$$

análogamente, si $\chi^\nu \in \mathcal{E}^{\text{sim } \nu}, \theta^\nu \in \mathcal{E}^{\text{sim } \nu}, \Omega^\nu \in \mathcal{E}^\nu$ (8.95-b)++

$$1) \sum_{A=1}^6 \overline{\chi^{\nu(A)}} \left[\frac{\partial(\overline{\theta^\nu \Omega^\nu})}{\partial \theta^{\nu(A)}} \right] = \overline{\chi^\nu} \left[\frac{\partial(\overline{\theta^\nu \Omega^\nu})}{\partial \theta^\nu} \right] \quad (8.96-b)$$

$$2) \sum_{A=1}^6 \overline{\chi^{\nu(A)}} \left[\frac{\partial(\overline{\theta^\nu \Omega^\nu})}{\partial \theta^{\nu(A)}} \right] = \overline{\chi^\nu} \Omega^\nu \quad (8.97-b)$$

Las derivadas que aparecen en los segundos miembros son las definidas en Secc. 8.b-7. Las derivadas que aparecen en los primeros miembros son las calculadas poniendo las 16 $(\Omega^\nu)_{ij}$ y las 16 $(\theta^\nu)_{ij}$ en función de las seis $\Omega^{\nu(A)}$ y de las seis $\theta^{\nu(A)}$.

La demostración se efectúa en A8-1.

8.c-3) Rol del segundo lema.

Los observables del campo se construyen con expresiones tipo

$$\sum \frac{\partial(\overline{\theta_i \Omega_i})}{\partial \Omega_i} \chi_k \quad \text{y} \quad \sum \overline{\chi_k} \frac{\partial(\overline{\theta_i \Omega_i})}{\partial \theta_k}$$

donde se suma usualmente sobre las componentes independientes de los campos; en nuestro caso ello conduce a evaluar expresiones tipo 1er. miembro de (8.96) y (8.97), es decir, a cálculos desagradables, laboriosos y dependientes de la representación. Lo cual se evita con el 2º lema.

8.d - LA CORRIENTE.

8.d-1) Formulación 1

La densidad lagrangeana $\mathcal{L}^{(1/2)}$ (8.24) es invariante ante una trans-

+ θ^ν no es necesariamente simétrico.

++ Ω^ν " " " " " "

formación infinitesimal de fase. Como es bien sabido, ello implica la existencia de una corriente conservada,

$$j^{(1/2)\mu} = e \sum_{A=1}^6 \left[\bar{\Psi}^{\tau(A)} \frac{\partial \mathcal{L}^{(1/2)}}{\partial (\partial_\mu \Psi^{\tau(A)})} - \frac{\partial \mathcal{L}^{(1/2)}}{\partial (\partial_\mu \bar{\Psi}^{\tau(A)})} \Psi^{\tau(A)} \right] \quad (8.98)$$

En (8.96-b) ponemos:

$$\Theta^\tau = \partial_\mu \Psi^\tau; \quad \Omega^\tau = \frac{1}{m} \gamma_{(1)}^\sigma \gamma_{(2)}^\tau \partial_\sigma \Psi^\tau; \quad \chi^\tau = \bar{\Psi}^\tau \quad (8.99)$$

que son compatibles con la definición de Λ^τ . En efecto, por ejemplo la 2a.

es correcta porque siendo

$$\Lambda^\tau \gamma_{(1)}^\mu \gamma_{(2)}^\tau = \gamma_{(1)}^\mu \gamma_{(2)}^\tau \Lambda^\tau,$$

si $\Psi^\tau \in \mathcal{E}^{\text{sim}\tau}$ es

$$\frac{1}{m} \gamma_{(1)}^\mu \gamma_{(2)}^\tau \partial_\sigma \Psi^\tau \in \mathcal{E}^\tau$$

Entonces,

$$\sum_{A=1}^6 \bar{\Psi}^{\tau(A)} \frac{\partial \mathcal{L}^{(1/2)}}{\partial (\partial_\mu \Psi^{\tau(A)})} = \frac{1}{m} \bar{\Psi}^\tau \gamma_{(1)}^\mu \gamma_{(2)}^\tau \partial_\sigma \Psi^\tau \quad (8.100-a)$$

Análogamente,

$$\frac{1}{m} \frac{\partial \mathcal{L}^{(1/2)}}{\partial (\partial_\mu \bar{\Psi}^{\tau(A)})} \Psi^{\tau(A)} = \frac{1}{m} (\partial_\sigma \bar{\Psi}^\tau) \gamma_{(1)}^\sigma \gamma_{(2)}^\mu \Psi^\tau \quad (8.100-b)$$

de manera que

$$j^{(1/2)\mu} = e \frac{1}{m} \left[\bar{\Psi}^\tau \gamma_{(1)}^\mu \gamma_{(2)}^\tau \partial_\sigma \Psi^\tau - (\partial_\sigma \bar{\Psi}^\tau) \gamma_{(1)}^\sigma \gamma_{(2)}^\mu \Psi^\tau \right] \quad (8.101)$$

Con (8.92'),

$$j^{(1/2)\mu} = e \left[\bar{\Psi}^\tau \gamma_{(1)}^\mu \Psi^{\tau\tau} + \bar{\Psi}^{\tau\tau} \gamma_{(2)}^\mu \Psi^\tau \right]$$

Por (2.31) podemos sustituir la $\gamma_{(2)}^\mu$ del último sumando por $\gamma_{(1)}^\mu$, pero

como además es

$$\bar{\Psi}^\tau \gamma_{(1)}^\mu \Psi^\tau - \bar{\Psi}^{\tau\tau} \gamma_{(1)}^\mu \Psi^{\tau\tau} = 0$$

queda

$$j^{(1/2)\mu} = e \left[\bar{\Psi} \gamma_{(1)}^\mu \Psi \right] \quad (8.102)^*$$

Se puede verificar que las ecuaciones de EW implican

$$\partial_\mu j^{(1/2)\mu} = 0. \quad (8.103)^*$$

La (8.102) es formalmente análoga a la corriente $e \bar{\Psi} \gamma^\mu \Psi$ del

electrón.

8.d-2) Formulación 0.

Es

$$j^{(0)\mu} = e \sum_{A=1}^6 \left[\bar{\Psi}^{\tau(A)} \frac{\partial \mathcal{L}^{(0)}}{\partial (\partial_\mu \Psi^{\tau(A)})} - \frac{\partial \mathcal{L}^{(0)}}{\partial (\partial_\mu \bar{\Psi}^{\tau(A)})} \Psi^{\tau(A)} \right] \quad (8.104)$$

Usando (8.25) obtenemos (procediendo como en la formulación $\frac{1}{2}$)

$$j^{(0)\mu} = \frac{e}{m} \left[\bar{\Psi}^\tau \partial^\mu \Psi^\tau - (\partial^\mu \bar{\Psi}^\tau) \Psi^\tau \right] \quad (8.105)$$

formalmente análoga a la corriente $e i [\varphi^* \partial^\mu \varphi - (\partial^\mu \varphi)^* \varphi]$ (8.106)**

para spin cero cargado (salvo el factor $1/m$ mencionado en Secc. 8.a-2).

La analogía no es de extrañar dada la correspondiente analogía del lagrangiano.

Las ecuaciones de EW implican las de Klein-Gordon, las que a su vez permiten verificar

$$\partial_\mu j^{(0)\mu} = 0 \quad (8.106')$$

8.d-3) Comparación entre las dos formulaciones.

Llamamos

$$\Delta j^\mu = j^{(0)\mu} - j^{(1/2)\mu} \quad (8.107)$$

Queremos calcular Δj^μ . En (8.101), 2º miembro, podemos sustituir

gracias a (8.62-b). Por otra parte, por (2.31) podemos sustituir

$$\gamma_{(1)}^\sigma \quad \gamma_{(2)}^\mu \quad \longrightarrow \quad \gamma_{(1)}^\mu \quad \gamma_{(2)}^\sigma$$

y, como más arriba,

$$\gamma_{(2)}^\sigma \quad \longrightarrow \quad \gamma_{(1)}^\sigma$$

En definitiva queda

$$j^{(1/2)\mu} = \frac{e}{m} \left[\bar{\Psi}^\nu \gamma_{(1)}^\mu \gamma_{(1)}^\sigma \partial_\sigma \Psi^\nu - (\partial_\sigma \bar{\Psi}^\nu) \gamma_{(1)}^\mu \gamma_{(1)}^\sigma \Psi^\nu \right] \quad (8.108)$$

(8.105) y (8.108) en (8.107) dan, luego de un cálculo directo,

$$\Delta j^\mu = \frac{e}{m} \partial_\alpha \left(\bar{\Psi}^\nu \sigma_{(1)}^{\alpha\mu} \Psi^\nu \right), \quad \alpha=1,2 \quad (8.109)$$

$$\text{con } \sigma^{\alpha\mu} = \frac{1}{2} [\gamma^\alpha, \gamma^\mu]. \quad (8.110) **$$

Las dos corrientes son (al menos) globalmente equivalentes en cuanto dan la misma carga total: En un hiperplano $x^0 = \text{const.}$,

$$\int d^3x j^{(1/2)0} = \int d^3x j^{(0)0} \quad (8.111-a)$$

Esta última ecuación se obtiene trivialmente a partir de (8.109).

La corriente total es un 4-vector de tipo temporal⁺. Por lo tanto (8.111) nos dice que hay un sistema de referencia en que

$$\int d^3x j^{(1/2)\mu} = \int d^3x j^{(0)\mu} \quad (8.111-b)$$

Via transformación de Lorentz, la (8.111) vale en todo sistema inercial.

Las dos formulaciones proporcionan, pues, no sólo la misma carga total, sino también la misma corriente total.

8.d-4) Comparación con la aproximación de una carga.

La corriente que coincide con la usada en la aproximación de una carga es la de la formulación j_1 .

$$j^{(1/2)\mu} = j_1^\mu \quad (8.112)$$

(Ver (3.2-b) y (8.102)).

8.d-5) Comparación con otros formalismos.

Por (7.28) y (7.29), ó bien por (7.12) se ve que la corriente que se traduce en la corriente usualmente empleada^{21,30} en el formalismo de Proca

$$j_{\text{Proca}}^\mu = \frac{e}{m^2} (G^{\mu\nu} U_\nu - G^{\mu\nu} U_\nu^*) \quad (8.113) **$$

⁺ En la teoría número 0 el primer miembro de (8.111-a) vale ± 1 (cf. (8.112), y Secc. 3.a1) y, por lo tanto, no puede anularse.

es nuevamente la de la formulación $\frac{1}{2}$:

$$j^{(1/2)\mu} = j_{Proca}^{\mu} \quad (8.114-a)$$

En cuanto a la $j^{(1/2)\mu}$, se traduce al formalismo de Proca en

$$j^{(1/2)\mu} = \frac{e}{2m^3} \left[G_{\alpha\beta}^{\mu} \partial^{\alpha} G^{\mu\beta} - (\partial_{\alpha} G_{\alpha\beta}^{\mu}) G^{\alpha\beta} \right]; \quad (8.114-b)$$

Para probarlo, basta tener en cuenta que

- 1) por Secc. 7.b-5 extraer de Ψ la parte Ψ^{τ} equivale en el formalismo de Proca a extraer la parte $G^{\alpha\beta}$ del conjunto $G^{\alpha\beta}, U^{\alpha}$;
- 2) $\Psi \partial^{\mu} \Psi$ se obtiene de F_i (7.9) mediante

$$\begin{aligned} \Psi' &\rightarrow \Psi \\ \Psi &\rightarrow \partial^{\mu} \Psi \end{aligned}$$
- 3) sustitución similar para $(\partial^{\mu} \bar{\Psi}) \Psi$.

En lo referente a la comparación con otros formalismos, mediante (8.112) nos remitimos a lo dicho en la aproximación de una carga (Secc.3-b).

8.d-6) Representación momento.

Por completitud repetimos aquí la (4.47), teniendo en cuenta (8.111) y (8.112):

$$\text{Carga total} = \int d^3x j^{(1/2)0} = \int d^3x j^{(1/2)0} = e \sum_r \int d^3p \left[|a(r, \vec{p})|^2 - |b(r, \vec{p})|^2 \right] \quad (8.115)$$

8.d-7) Nota sobre la divergencia de corrientes.

En Secc. 6.g hemos demostrado que el único 4-vector de 4-divergencia nula que puede construirse a partir de $\bar{\Psi}$ y Ψ sin usar derivadas es

$$j^{\mu} = j^{(1/2)\mu}$$

Ello no contradice (8.109) pues $j^{(1/2)\mu}$ se construye con derivadas.

8.e - EL TENSOR ENERGIA-MOMENTO. EL 4-VECTOR MOMENTO TOTAL.

8.e-1) Formulaci3n $\frac{1}{2}$.

La densidad lagrangeana \mathcal{L} (8.24) es invariante ante traslaciones.

Como es bien sabido, de aqu3 se deduce el tensor energ3a momento can3nico,

$$T^{(1/2)\mu\nu} = \sum_{A=1} \left[\frac{\partial \mathcal{L}^{(1/2)}}{\partial(\partial_{\mu} \Psi^{\tau(A)})} \partial^{\nu} \Psi^{\tau(A)} + (\partial^{\nu} \bar{\Psi}^{\tau(A)}) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_{\mu} \Psi^{\tau(A)})} - \mathcal{L}^{(1/2)} g^{\mu\nu} \right] \quad (8.116)$$

tal que

$$\partial_{\mu} T^{(1/2)\mu\nu} = 0. \quad (8.117) *$$

Las componentes independientes $\Psi^{\tau(A)}$ pueden tomarse de (8.93). Pero ~~apenas~~ para la corriente (Secc. 8.d-1) puede usarse el 2º lema para no tener que lidiar con las engorrosas y asimétricas $\Psi^{\tau(A)}$; el procedimiento es completamente análogo al allí empleado. El resultado es

$$T^{(1/2)\mu\nu} = \frac{1}{m} \left[(\partial_{\sigma} \bar{\Psi}^{\tau}) \delta_{(1)}^{\sigma} \delta_{(2)}^{\mu} \partial^{\nu} \Psi^{\tau} + (\partial^{\nu} \bar{\Psi}^{\tau}) \delta_{(1)}^{\mu} \delta_{(2)}^{\sigma} \partial_{\sigma} \Psi^{\tau} \right] \mathcal{L}^{(1/2)} g^{\mu\nu} \quad (8.118)$$

Utilizamos (8.92º), y si tenemos en cuenta que (2.32) nos permite sustituir

$$\gamma_{(2)}^{\mu} \rightarrow \gamma_{(1)}^{\mu} \text{ obtenemos,}$$

$$T^{(1/2)\mu\nu} = \frac{1}{2} \left[\bar{\Psi}^{\nu\tau} \delta_{(\tau)}^{\mu} \partial^{\nu} \Psi^{\tau} - (\partial^{\nu} \bar{\Psi}^{\tau}) \delta_{(\tau)}^{\mu} \Psi^{\tau} \right]. \quad (8.119)$$

Sumamos y restamos en el 2° miembro

$$\frac{1}{2} \partial^{\nu} \left(\bar{\Psi}^{\mu\tau} \delta_{(\tau)}^{\mu} \Psi^{\tau} + \bar{\Psi}^{\tau} \delta_{(\tau)}^{\mu} \Psi^{\tau} \right)$$

desarrollamos las derivadas y tenemos en cuenta (cf. (6.59-b) y (6.54)),

$$\bar{\Psi}^{\mu\tau} \delta_{(\tau)}^{\mu} \partial^{\nu} \Psi^{\tau} = 0$$

y otras identidades análogas. Resulta, finalmente,

$$T^{(1/2)\mu\nu} = \frac{1}{2} \bar{\Psi} \delta_{(\tau)}^{\mu} \partial^{\nu} \Psi - \frac{1}{2} (\partial^{\nu} \bar{\Psi}) \delta_{(\tau)}^{\mu} \Psi \quad (8.121)$$

que es formalmente análogo al tensor energía momento canónico

$$T^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \bar{\Psi} \delta^{\mu} \partial^{\nu} \Psi - \frac{1}{2} (\partial^{\nu} \bar{\Psi}) \delta^{\mu} \Psi$$

válido en spin $\frac{1}{2}$.

Como es bien sabido, (8.117) implica que el 4-vector momento

$$P^{(1/2)\nu} = \int d\sigma_{\mu} T^{(1/2)\mu\nu} \quad (8.122-a)^{**}$$

se conserva:

$$\partial_0 P^{(1/2)\nu} = 0. \quad (8.123)^*$$

Si el hiperplano σ es perpendicular al eje x_0 , es (cf. A8-3),

$$P^{(1/2)\nu} = \int d^3x (\Psi, \frac{1}{2} \partial^{\nu} \Psi)_{\sigma_p} \quad (8.122-b)$$

Esta igualdad, es formalmente análoga a la de spin $\frac{1}{2}$.

$$P^{\nu} = \int d^3x (\Psi, \frac{1}{2} \partial^{\nu} \Psi)_{\sigma_p}$$

En efecto, al pasar de spin $\frac{1}{2}$ a spin $\frac{1}{2}$ debemos reemplazar el producto escalar spinorial (2.2)

$$(\Psi, \varphi)_{\sigma_p} = \Psi^{\tau} \delta_{(\tau)}^{\sigma} \varphi \quad (8.124-a)$$

que usamos en spin $\frac{1}{2}$ por el producto escalar spinorial

$$(\Psi, \varphi)_{\sigma_p} = \Psi^{\tau} \varphi \quad (8.124-b)^{**}$$

que se usa en spin $\frac{1}{2}$.

8.e-2) Formulación 0.

Es

$$T^{(0)\mu\nu} = \sum_{A=1}^6 \left[\frac{\partial \mathcal{L}^{(0)}}{\partial(\partial_{\mu} \Psi^{\tau(A)})} \partial^{\nu} \Psi^{\tau(A)} + (\partial^{\nu} \bar{\Psi}^{\tau(A)}) \frac{\partial \mathcal{L}^{(0)}}{\partial(\partial_{\mu} \bar{\Psi}^{\tau(A)})} - \mathcal{L}^{(0)} \delta^{\mu\nu} \right] \quad (8.125)$$

Procediendo como en la formulación $\frac{1}{2}$ obtenemos usando (8.25)

$$T^{(0)\mu\nu} = \frac{1}{m} (\partial^{\mu} \bar{\Psi}^{\tau}) (\partial^{\nu} \Psi^{\tau}) + \frac{1}{m} (\partial^{\nu} \bar{\Psi}^{\tau}) (\partial^{\mu} \Psi^{\tau}) - \mathcal{L}^{(0)} \delta^{\mu\nu} \quad (8.126)$$

tal que

$$\partial_{\mu} T^{(0)\mu\nu} = 0. \quad (8.127)$$

La (8.126) es formalmente equivalente al tensor energía-momento

$$T^{\mu\nu} = (\partial^{\mu} \varphi^*) (\partial^{\nu} \varphi) + (\partial^{\nu} \varphi^*) (\partial^{\mu} \varphi) - \mathcal{L} \delta^{\mu\nu}$$

usado para spin 0.

El 4-momento conservado es

$$P^{(0)\nu} = \int d\sigma_{\mu} T^{(0)\mu\nu} \quad (8.128)$$

tal que

$$\partial_0 \mathcal{P}^{(0)\nu} = 0. \quad (8.129)^*$$

Reemplazando (8.126) y (824) en (8.128) se obtiene (con σ perpendicular al eje x^0),

$$\mathcal{P}^{(0)0} = \frac{1}{m} \int d^3x \left[m^2 \bar{\Psi}^T \Psi^T + (\partial^0 \bar{\Psi}^T)(\partial^0 \Psi^T) + (\nabla^T \bar{\Psi}^T)(\nabla^T \Psi^T) \right] \quad (8.130)$$

$$\mathcal{P}^{(0)i} = \frac{1}{m} \int d^3x \left[(\partial^i \bar{\Psi}^T) \partial_0 \Psi^T + (\partial_0 \bar{\Psi}^T) (\partial^i \Psi^T) \right] \quad (8.131)$$

8.e-3) Comparación entre las dos formulaciones.

Los dos tensores energía momento canónicos $T^{(1/2)\mu\nu}$ y $\mathcal{T}^{(0)\mu\nu}$ no parecen ser idénticos, pero sí lo son los cuadrivectores energía-momento total,

$$\mathcal{P}^{(1/2)\nu} = \mathcal{P}^{(0)\nu} \quad (8.132)$$

según se demuestra en A8-4.

8.e-4) Comparación con la aproximación de una carga.

De (8.132), (8.122-b), Secc. 3.b, Secc. 3.a VII y (2.2),

$$\begin{aligned} \vec{\mathcal{P}}^{(1/2)} &= \vec{\mathcal{P}}^{(0)} = (\Psi, \vec{D}_{\text{operador aprox carga}} \Psi) = \\ &= \langle \vec{D} \rangle_{\text{aprox carga}} \end{aligned} \quad (8.133-a)$$

Para la componente temporal procedemos análogamente, pero reemplazando \vec{D} por H mediante (3.4):

$$\begin{aligned} \mathcal{P}^{(1/2)0} &= \mathcal{P}^{(0)0} = (\Psi, H_{\text{operador aprox carga}} \Psi) = \\ &= \langle H \rangle_{\text{aprox carga}} \end{aligned} \quad (8.133-b)$$

como era de desear.

8.e-5) Comparación con otros formalismos.

Recordando que por (2.31) y (2.27-a) es

$$\gamma_{(2)}^0 \sim \frac{1}{\omega} (\gamma_{(1)}^0 + \gamma_{(2)}^0) \quad (8.134)$$

se demuestra a partir de (8.65) que \mathcal{P}^ν es equivalente al 4-vector momento de Belinfante⁴.

Usando (1.6), $T^{(1/2)\mu\nu}$ se traslada en el tensor energía-momento de Kemmer¹⁵ quien lo postula (pero Pauli²¹ lo demuestra).

En el formalismo de Prosa (1.7³⁰) el momento 3-dimensional es

$$\mathcal{P}^{(\text{Prosa})i} = \frac{1}{m^2} \int \left[\vec{E}^* \cdot \partial^i \vec{U} + \vec{E} \cdot \partial^i \vec{U}^* \right] d^3x \quad (8.135-a)^{**}$$

y la energía del campo^{21,30}

$$\mathcal{P}^{(Proca)0} = \frac{1}{m} \int [\vec{V}' \vec{V}' + \vec{U}' \vec{U}' + \vec{E}' \cdot \vec{E}' + \vec{H}' \cdot \vec{H}'] d^3x \quad (8.135-b)^{**}$$

Empleando (7.12) con $\Psi' \rightarrow \Psi$ y $\Psi \rightarrow \partial^2 \Psi$ deducimos de (8.122-b),

$$(8.132) \text{ y } (8.135-a) \rightarrow -\mathcal{P}^{(1/2)} = \mathcal{P}^{(0)} = \mathcal{P}^{(Proca)} \quad (8.136-a)$$

Utilizando los resultados de Secc. 7.b-4C y teniendo en cuenta (8.133-b) y (8.135-b) obtenemos

$$\mathcal{P}^{(1/2)0} = \mathcal{P}^{(0)0} = \mathcal{P}^{(Proca)0} \quad (8.136-b)$$

8.e-6) Representación momento.

De (8.33), (4.48) y (4.49) deducimos

$$\mathcal{P}^{(1/2)} = \mathcal{P}^{(0)} = \sum \int d^3p \vec{p} \{ |a(\vec{r}, \vec{p})|^2 + |b(\vec{r}, \vec{p})|^2 \} \quad (8.137-a)$$

$$\mathcal{P}^{(1/2)0} = \mathcal{P}^{(0)0} = \sum \int d^3p p^0 \{ |a(\vec{r}, \vec{p})|^2 + |b(\vec{r}, \vec{p})|^2 \} \quad (8.137-b)$$

$$p^0 = + \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$$

Como es bien sabido, para spin 1 la energía total del campo es definida positiva (lo cual no ocurre para spin $\frac{1}{2}$), aún en la la. cuantificación.

8.f - EL TENSOR DENSIDAD DE MOMENTO ANGULAR. EL TENSOR MOMENTO ANGULAR.

8.f-1) Formulación $\frac{1}{2}$.

A) EL PROCEDIMIENTO HABITUAL.

La densidad lagrangeana $\mathcal{L}^{(1/2)}$ (8.24) es invariante ante rotaciones infinitesimales,

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu = x^\mu + \epsilon_{\mu\nu} x^\nu, \quad |\epsilon_{\mu\nu}| \ll 1 \quad (8.138)^{**}$$

lo cual, como es bien sabido implica la existencia de un tensor densidad de

momento angular total $M_{tot}^{(1/2)\lambda; \mu\nu}$ tal que

$$\partial_\lambda M_{tot}^{(1/2)\lambda; \mu\nu} = 0. \quad (8.139)^*$$

Siendo nuestras variables las $\Psi^{T(A)}$ y $\bar{\Psi}^{T(A)}$ (por ejemplo las (8.93))

el procedimiento habitual nos conduciría a escribir

$$M_{tot}^{(1/2)\lambda; \mu\nu} = M_{orb}^{(1/2)\lambda; \mu\nu} + M_{spin}^{(1/2)\lambda; \mu\nu} \quad (8.140)$$

$$M_{orb}^{(1/2)\lambda; \mu\nu} = x^\nu T^{(1/2)\lambda\mu} - x^\mu T^{(1/2)\lambda\nu} \quad (8.141)$$

(donde $T^{(1/2)\mu\nu}$ es el tensor energía momento canónico) y

$$M_{spin}^{(1/2)\lambda; \mu\nu} = - \sum_{A=1}^6 \sum_{B=1}^6 \frac{\partial \mathcal{L}^{(1/2)}}{\partial (\partial_\lambda \Psi^{T(A)})} A_{AB}^{\mu\nu} \Psi^{T(A)} - \sum_{A=1}^6 \sum_{B=1}^6 \bar{\Psi}^{T(A)} A_{AB}^{\mu\nu} \frac{\partial \mathcal{L}^{(1/2)}}{\partial (\partial_\lambda \bar{\Psi}^{T(B)})} \quad (8.142)$$

donde $A_{AB}^{\mu\nu}$ y $A_{BA}^{\mu\nu}$ son tales que

$$\delta \Psi^{T(A)}(x) = \Psi^{T(A)}(x) - \Psi^{T(A)}(x) - \frac{1}{2} \sum_{B=1}^6 \epsilon_{\mu\nu} A_{AB}^{\mu\nu} \Psi^{T(B)}(x), \quad (8.143)^{**}$$

$$\delta \bar{\Psi}^{T(A)}(x) = \bar{\Psi}^{T(A)}(x) - \bar{\Psi}^{T(A)}(x) - \frac{1}{2} \sum_{B=1}^6 \epsilon_{\mu\nu} \bar{\Psi}^{T(B)}(x) A_{BA}^{\mu\nu} \quad (8.143)^*$$

B) DIFICULTAD.

(8.142) nos envuelve nuevamente con las $\Psi^{T(A)}$, lo cual, como ya reiteradamente hemos dicho conduce a cálculos engorrosos y asimétricos; esto se agudiza ahora con las A_{AB} de por medio. Para los observables

anteriores nos auxilió el 2° lema, pero las A_{AB} intercaladas en (8.142) oscurecen un poco su aplicación directa.

c) SOLUCION

Contraemos (8.142) con $\epsilon_{\mu\nu}$ y usamos (8.143):

$$M_{spin}^{(1/2)\lambda;\mu\nu} \epsilon_{\mu\nu} = -2 \sum_{A=1}^2 \frac{\partial \mathcal{L}^{(1/2)}}{\partial(\partial_\lambda \Psi^{\tau(A)})} \delta \Psi^{\tau(A)} - 2 \sum_{A=1}^2 \delta \bar{\Psi}^{\tau(A)} \frac{\partial \mathcal{L}^{(1/2)}}{\partial(\partial_\lambda \bar{\Psi}^{\tau(A)})} \quad (8.144)$$

Los términos del 2° miembro son ahora justamente de la forma de los primeros miembros de (8.96) por lo que el segundo lema es claramente aplicable:

$$M_{spin}^{(1/2)\lambda;\mu\nu} \epsilon_{\mu\nu} = -2 \frac{\partial \mathcal{L}^{(1/2)}}{\partial(\partial_\lambda \Psi^\tau)} \delta \Psi^\tau - 2 \delta \bar{\Psi}^\tau \frac{\partial \mathcal{L}^{(1/2)}}{\partial(\partial_\lambda \bar{\Psi}^\tau)} \quad (8.145)$$

Por Secc. 8.a-1 es

$$\delta \Psi = -\frac{1}{4} \epsilon_{\mu\nu} (\sigma_{(1)}^{\mu\nu} + \sigma_{(2)}^{\mu\nu}) \Psi \quad (8.146-a)^{**}$$

$$\delta \bar{\Psi} = +\frac{1}{4} \bar{\Psi} (\sigma_{(1)}^{\mu\nu} + \sigma_{(2)}^{\mu\nu}) \epsilon_{\mu\nu} \quad (8.146-b)^{**}$$

donde nosotros el signo de $\sigma^{\mu\nu}$ lo definimos tal que

$$\sigma^{\mu\nu} = \frac{1}{2} (\gamma^\mu \gamma^\nu - \gamma^\nu \gamma^\mu). \quad (8.147)^{**}$$

Como $\sigma_{(i)}^{\mu\nu}$ ($i=1,2$) conmuta con Λ^τ , es

$$\delta \Psi^\tau = -\frac{1}{4} \epsilon_{\mu\nu} (\sigma_{(1)}^{\mu\nu} + \sigma_{(2)}^{\mu\nu}) \Psi^\tau \quad (8.148-a)$$

$$\delta \bar{\Psi}^\tau = +\frac{1}{4} \bar{\Psi}^\tau (\sigma_{(1)}^{\mu\nu} + \sigma_{(2)}^{\mu\nu}) \epsilon_{\mu\nu}. \quad (8.148-b)$$

Reemplazamos en (8.145) e igualamos en ambos miembros la parte antisimétrica de los coeficientes de las $\epsilon_{\mu\nu}$:

$$M_{spin}^{(1/2)\lambda;\mu\nu} = \frac{i}{2} \frac{\partial \mathcal{L}^{(1/2)}}{\partial(\partial_\lambda \Psi^\tau)} \left[(\sigma_{(1)}^{\mu\nu} + \sigma_{(2)}^{\mu\nu}) \Psi^\tau \right] - \frac{i}{2} \left[\bar{\Psi}^\tau (\sigma_{(1)}^{\mu\nu} + \sigma_{(2)}^{\mu\nu}) \right] \frac{\partial \mathcal{L}^{(1/2)}}{\partial(\partial_\lambda \bar{\Psi}^\tau)} \quad (8.149)$$

Ahora, el primer corchete pertenece a $\epsilon^{sim \tau}$ (resp. $\epsilon^{sim \tau}$) de manera que podemos completar el uso del 2° lema, empleando las (8.97).

El resultado es,

$$M_{spin}^{(1/2)\lambda;\mu\nu} = \frac{1}{2m} (\partial_\sigma \bar{\Psi}^\tau) \delta_{(1)}^\sigma \delta_{(2)}^\lambda (\sigma_{(1)}^{\mu\nu} + \sigma_{(2)}^{\mu\nu}) \Psi^\tau - \frac{1}{2m} \bar{\Psi}^\tau (\sigma_{(1)}^{\mu\nu} + \sigma_{(2)}^{\mu\nu}) \delta_{(1)}^\lambda \delta_{(2)}^\sigma \partial_\sigma \Psi^\tau$$

Mediante (8.92') podemos simplificar,

$$M_{spin}^{(1/2)\lambda;\mu\nu} = -\frac{1}{2} \bar{\Psi}^\tau \delta_{(2)}^\lambda (\sigma_{(1)}^{\mu\nu} + \sigma_{(2)}^{\mu\nu}) \Psi^\tau - \frac{1}{2} \bar{\Psi}^\tau (\sigma_{(1)}^{\mu\nu} + \sigma_{(2)}^{\mu\nu}) \delta_{(1)}^\lambda \Psi^\tau \quad (8.150)$$

Como $|\bar{\Psi}^\tau (\sigma_{(1)}^{\mu\nu} + \sigma_{(2)}^{\mu\nu})|_{i_2 i_1}$ es simétrica en los índices spinoriales i_1, i_2 , la (2.32) nos permite cambiar $\delta_{(2)}^\lambda \rightarrow \delta_{(1)}^\lambda$. Entonces,

$$M_{spin}^{(1/2)\lambda;\mu\nu} = -\frac{1}{2} \bar{\Psi}^\tau \delta_{(1)}^\lambda (\sigma_{(1)}^{\mu\nu} + \sigma_{(2)}^{\mu\nu}) \Psi^\tau - \frac{1}{2} \bar{\Psi}^\tau (\sigma_{(1)}^{\mu\nu} + \sigma_{(2)}^{\mu\nu}) \delta_{(1)}^\lambda \Psi^\tau \quad (8.151)$$

que no se asemeja mucho al tensor densidad de momento angular para spin 1/2.

$$M_{spin}^{\lambda;\mu\nu} = -\frac{1}{2} \bar{\Psi} \delta^\lambda \sigma^{\mu\nu} \Psi - \frac{1}{2} \bar{\Psi} \sigma^{\mu\nu} \delta^\lambda \Psi \quad (8.152)^{**}$$

Esto no es de extrañar, pues justamente lo que diferencia a un electrón de un mesón vectorial es el spin. Sin embargo para el tensor de momento

angular J^{ab} ($a, b = 1, 2, 3$) la diferencia disminuye.

Como es usual, obtenemos los tensor es momento angular $J^{\lambda\nu}$ a partir de las densidades $M^{\lambda;\mu\nu}$

$$J_Q^{(1/2)\mu\nu} = \int d\sigma_\mu M_Q^{(1/2)\lambda;\mu\nu} \quad (8.153)^{**}$$

$Q = \text{tot., orb } \text{ o spin.}$

Elegimos la hipersuperficie σ perpendicular al eje x^0 . Entonces, de (8.151),

$$J_{\text{spin}}^{(1/2)a} = J_{\text{spin}}^{(1/2)bc} = \frac{1}{2} \int [\bar{\Psi}^{\text{tr}} \delta_{(1)}^0 (\sigma_{(1)}^{bc} + \sigma_{(2)}^{bc}) \Psi^{\text{tr}} + \bar{\Psi}^{\text{tr}} \delta_{(1)}^0 (\sigma_{(1)}^{bc} + \sigma_{(2)}^{bc}) \Psi^{\text{tr}}] d^3x \quad (8.154)$$

$a, b, c = 1, 2, 3$ y permutaciones cíclicas. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} J_{\text{spin}}^{(1/2)a} = J_{\text{spin}}^{(1/2)bc} &= - \int \bar{\Psi} \delta_{(1)}^0 \frac{(\sigma_{(1)}^{bc} + \sigma_{(2)}^{bc})}{2} \Psi d^3x \\ &= - \int \left(\bar{\Psi}, \frac{(\sigma_{(1)}^{bc} + \sigma_{(2)}^{bc})}{2} \Psi \right)_{\text{sp}} d^3x \end{aligned} \quad (8.155)$$

$J_{\text{spin}}^{(1/2)a}$ es el spin del campo. Para spin $\frac{1}{2}$ el resultado (bien conocido) es

$$J_{\text{spin}}^a = \frac{1}{2} \int \bar{\Psi} (\delta^0 \sigma^{bc}) \Psi d^3x \quad (8.156-a)^{**}$$

$$= \int \left(\bar{\Psi}, \frac{\sigma^{bc}}{2} \Psi \right)_{\text{sp}} d^3x \quad (8.156-b)^{**}$$

Se pasa de spin $\frac{1}{2}$ a spin 1 reemplazand los producto escalares spinoriales como en (8.24) y reemplazando

$$\frac{(\sigma_{(1)}^{bc} + \sigma_{(2)}^{bc})}{2} \rightarrow \frac{1}{2} \sigma^{bc} \quad (8.157)$$

que es lo que cabría esperar.

En cuanto a $J^{(1/2)0a}$ que está asociado con el movimiento del centro de masa ²⁹ la parte de spin resulta ser

$$J_{\text{spin}}^{(1/2)0a} = - \int d^3x [\bar{\Psi}^{\text{tr}} \delta_{(2)}^0 \Psi^{\text{tr}} + \bar{\Psi}^{\text{tr}} \delta_{(1)}^0 \Psi^{\text{tr}}] + i \int d^3x \bar{\Psi}^{\text{tr}} \delta_{(1)}^0 \delta_{(1)}^a \Psi^{\text{tr}} \quad (8.158) \quad (8.159)$$

mientras que para spin $\frac{1}{2}$ es

$$J_{\text{spin}}^{0a} = 0. \quad (8.160)^{**}$$

Esta es la primera diferencia formal que encontramos entre spin 1 y spin $\frac{1}{2}$

que no se reduce a

- 1) cambiar el signo de un segundo miembro (ver ejemplos en Cap. 4);
- 2) cambiar el producto escalar (ver ejemplos en este capítulo y en el 3°);
- 3) complicaciones debidas a la existencia de componentes redundantes (Cap. 2, 3, 6 y 8).

Salvo la 1), las restantes podían ser encubiertas por una escritura que paralelizaba spin 1 y $\frac{1}{2}$. Esto no lo podemos hacer con las componentes O_1 del tensor de spin.

En realidad, aún nos falta probar que el 2° miembro de (8.159) no es idénticamente nulo, como podría ocurrir vía componentes redundantes

(cf. Cap 2). Por ello en A8-5 construimos una $\Psi \in W_c$ que no anula a (8.159), con lo cual queda probado que

$$\int_{\text{spin}}^{(1)0a} \neq 0 \quad (8.160')$$

8.f-2) Formulación 0.

Procediendo como en la formulación \dot{g} , obtenemos la densidad de momento angular total,

$$M_{\text{tot}}^{(0)\lambda; \mu\nu} = M_{\text{orb}}^{(0)\lambda; \mu\nu} + M_{\text{spin}}^{(0)\lambda; \mu\nu} \quad (8.161)$$

tal que

$$\partial_\lambda M_{\text{tot}}^{(0)\lambda; \mu\nu} = 0 \quad (8.162)**$$

donde

$$M_{\text{orb}}^{(0)\lambda; \mu\nu} = x^\nu T^{(0)\lambda\mu} - x^\mu T^{(0)\lambda\nu} \quad (8.163)$$

y [en lugar de (8.145)],

$$M_{\text{spin}}^{(0)\lambda; \mu\nu} \epsilon_{\mu\nu} = 2i \frac{\partial \mathcal{L}^{(0)}}{\partial(\partial_\lambda \Psi^\sigma)} \sigma^{\mu\nu} \Psi^\sigma - 2i \bar{\Psi}^\sigma \frac{\partial \mathcal{L}^{(0)}}{\partial(\partial_\lambda \bar{\Psi}^\sigma)} \quad (8.164)$$

Con ayuda de (8.146) y (8.25) deducimos

$$M_{\text{spin}}^{(0)\lambda; \mu\nu} = \frac{1}{m} (\partial^\lambda \bar{\Psi}^\sigma) \left[\frac{(\sigma_{(1)}^{\mu\nu} + \sigma_{(2)}^{\mu\nu})}{2} \Psi^\sigma \right] - \frac{1}{m} \bar{\Psi}^\sigma \left[\frac{(\sigma_{(1)}^{\mu\nu} + \sigma_{(2)}^{\mu\nu})}{2} \right] \partial^\lambda \Psi^\sigma \quad (8.165-a)$$

o aún, por (2.32),

$$M_{\text{spin}}^{(0)\lambda; \mu\nu} = \frac{1}{m} (\partial^\lambda \bar{\Psi}^\sigma) \sigma_{(2)}^{\mu\nu} \Psi^\sigma - \frac{1}{m} \bar{\Psi}^\sigma \sigma_{(2)}^{\mu\nu} \partial^\lambda \Psi^\sigma \quad (8.165-b)$$

Los tensores momento angular $J^{\mu\nu}$ son

$$J_Q^{(0)\mu\nu} = \int d\sigma_\mu M_Q^{(0)\mu\nu} \quad (8.166)**$$

Q = tot, orb o spin.

Calculamos el tensor spin del campo usando un hiperplano σ perpendicular al eje x^0 :

$$J_{\text{spin}}^{(0)\mu\nu} = \frac{1}{m} \int d^3x \left[(\partial^0 \bar{\Psi}^\sigma) \frac{(\sigma_{(1)}^{\mu\nu} + \sigma_{(2)}^{\mu\nu})}{2} \Psi^\sigma - \bar{\Psi}^\sigma \frac{(\sigma_{(1)}^{\mu\nu} + \sigma_{(2)}^{\mu\nu})}{2} \partial^0 \Psi^\sigma \right] \quad (8.167-a)$$

$$= \frac{1}{m} \int d^3x \left[(\partial^0 \bar{\Psi}^\sigma) \sigma_{(2)}^{\mu\nu} \Psi^\sigma - \bar{\Psi}^\sigma \sigma_{(2)}^{\mu\nu} \partial^0 \Psi^\sigma \right] \quad (8.167-b)$$

Expresaremos $J_{\text{spin}}^{(0)\mu\nu}$ en términos de Ψ y $\bar{\Psi}$: Empleamos (8.92'-a) con

tal para despejar las derivadas temporales que aparecen en (8.167-b). Como

consecuencia de emplear (8.92'-a) aparecen derivadas espaciales, pero

podemos cancelar los términos que las contienen mediante una integración

por partes. El resultado es,

$$J_{\text{spin}}^{(0)\mu\nu} = - \int d^3x \left[\bar{\Psi}^{\sigma(1)} \delta_{(1)}^0 \sigma_{(2)}^{\mu\nu} \Psi^\sigma + \bar{\Psi}^\sigma \delta_{(1)}^0 \sigma_{(2)}^{\mu\nu} \Psi^{\sigma(1)} \right]$$

o sea,

$$J_{\text{spin}}^{(0)\mu\nu} = - \int d^3x \bar{\Psi} \delta_{(1)}^0 \sigma_{(2)}^{\mu\nu} \Psi = \quad (8.168-a)$$

$$= - (\Psi, \sigma_{(2)}^{\mu\nu} \Psi). \quad (8.168-b)$$

En particular, el spin del campo es

$$J_{\text{spin}}^{(0)-a} = J_{\text{spin}}^{(0)bc} = (\Psi, \sigma_{(2)}^a \Psi) \quad ; \quad \sigma^a = i \delta^b \delta^c \quad (8.169)$$

con a, b, c = 1, 2, 3 y permutaciones cíclicas, y la contribución del spin al movimiento del centro de masa es

$$\int_{spin}^{(0)0} \alpha = -\frac{1}{2} (\Psi, \alpha_{(2)} \Psi) \quad (8.170)$$

La (8.168-b) muestra una diferencia esencial con spin cero, donde

$$J_{spin}^{\mu\nu} = 0. \quad (8.171)**$$

$\mathcal{L}^{(0)}$ es formalmente análoga a la densidad lagrangeana usual para spin 0, y antes de llegar al momento angular, venía proporcionando resultados formalmente análogos a los de spin cero. Por qué es

$$J_{spin}^{\mu\nu} \neq 0?$$

Porque mientras que para spin cero, se cumple

$$\delta \Psi = \delta \Psi^* = 0$$

ante rotaciones espaciales, en nuestro casos (cf. (8.146))

$$\delta \Psi^* \neq 0, \quad \delta \bar{\Psi}^* \neq 0.$$

Pero, aunque (8.168-b) sugiera

$$\int_{spin}^{(0)\mu\nu} \neq 0 \quad (8.172)$$

podría ocurrir que via componentes redundantes (cr. Cap 2) el 2º miembro de (8.168) fuese nulo; no es así, porque en A8-6 demostramos que existe al menos un campo $\Psi \in \mathcal{W}_t$ tal que para él,

$$-J_{spin}^{(0)12} = J_{spin}^{(0)3} \neq 0 \quad (8.173)$$

8.f-3) Comparación entre los dos formalismos.

Las ecuaciones (8.155) y (8.168) muestran que los spines tienen formas diferentes en las dos formulaciones. Pero (nuevamente por las componentes redundantes) queremos asegurarnos que

$$J_{spin}^{(1/2)2} \neq J_{spin}^{(0)2} \quad (8.174)$$

Lo hacemos en A8-6 probando que existe al menos una $\Psi \in \mathcal{W}_t$ tal que

$$J_{spin}^{(1/2)2} \neq J_{spin}^{(0)2}$$

Pero, aún cabría la posibilidad de que una transformación canónica adecuada lleve $J_{spin}^{(1/2)2}$ (8.155) a la forma $J_{spin}^{(0)2}$ (8.168)⁺. Ello también es imposible: En efecto, en A8-7 demostramos que

1) $\vec{J}_{spin}^{(0)}$ es una constante del movimiento

$$\frac{d \vec{J}_{spin}^{(0)}}{dt} = 0, \quad \text{para toda } \Psi \in \mathcal{W}_t; \quad (8.175-b)$$

2) $\vec{J}_{spin}^{(1/2)}$ no es una constante del movimiento,

$$\frac{d \vec{J}_{spin}^{(1/2)}}{dt} \neq 0 \quad (8.175-a)$$

en efecto, existe al menos una $\Psi \in \mathcal{W}_t$ tal que al menos en $t=0$ es

$$\frac{d \vec{J}_{spin}^{(1/2)}}{dt} < 0$$

(signo = excluido).

+Es decir, que la Ψ con la que calculamos $J_{spin}^{(1/2)}$ pertenezca a una representación diferente que la Ψ con la que calculamos $J_{spin}^{(0)}$, y que las dos representaciones sean conectables mediante una transformación canónica.

Por lo tanto, $\vec{J}_{spin}^{(1/2)}$ y $\vec{J}_{spin}^{(0)}$ no son conectables mediante una transformación canónica, pues las transformaciones canónicas conservan las constantes del movimiento.

Hasta este punto, las dos formulaciones daban (al menos) los mismos observables globales [carga total, corriente total y cuadrivector energía-momento, cf. (8.111) y (8.122)] y las mismas ecuaciones de evolución [cf. (8.63) y (8.92)] . Pero, llegados al spin, vemos que las dos formulaciones no son equivalentes.

8.f-4) Comparación con la aproximación de una carga.

Por (3.57), (2.23), (3.38) y (8.155),

$$\begin{aligned} \langle \vec{J}_{spin}^{(1/2)} \rangle_{\text{aprox carga}} &= (\Psi, \frac{1}{2} (\vec{\sigma}_0 + \vec{\sigma}_2) | \Psi) = \\ &= (\Psi, \frac{1}{2} (\vec{\sigma}_0 + \vec{\sigma}_2) | \Psi) = \\ &= (\Psi, \frac{1}{2} (\vec{\sigma}_0 + \vec{\sigma}_2) | \Psi) = \\ &= \vec{J}_{spin}^{(1/2)} \end{aligned}$$

$$\boxed{\langle \vec{J}_{spin}^{(1/2)} \rangle_{\text{aprox carga}} = \vec{J}_{spin}^{(1/2)}} \quad (8.176)$$

Es probable que a partir de $\vec{J}_{spin}^{(0)}$ pueda construirse un otro operador de spin, para otra teoría de una carga. Por (8.174) y (8.175), las dos teorías de una carga (la desarrollada en el Cap 3, y la que sugerimos) no son equivalentes. Pero no desarrollamos esta posibilidad. Sólo indicamos el hecho de que los autovalores de $\sigma_{(2)}^3$ sean ± 1 y no $+1, -1$ y 0 no inhabilita a la nueva teoría de una carga, pues $\sigma_{(2)}^3$ es de 2a. clase (cf. Secc. 3.e).

8.f-5) Comparación con otros formalismos.

Del texto de Wentzel³⁰ obtenemos un pseudotensor de spin usual en la formulación de Proca:

$$\vec{J}_{spin}^{(Proca, usual)} = \frac{1}{m^2} (\vec{E} \times \vec{U} + \vec{E}' \times \vec{U}). \quad (8.177) **$$

Por otra parte, mediante la tabla 6-1,

$$\vec{J}_{spin}^{(1/2)3} = \frac{1}{2} \int d^3x (F^{0;12} - F^{1;23}). \quad (8.178)$$

El último integrando lo tenemos explícitamente traducido a la formulación de Proca 3-dimensional en (7.14-b); el primero lo obtenemos vía (7.21) en la forma covariante, y de allí con (1.7'') lo trasladamos a la 3-dimensional. El resultado es la 3a. componente del 2º miembro de (8.177), de donde

$$\boxed{\vec{J}_{spin}^{(1/2)} = \vec{J}_{spin}^{(Proca, usual)}} \quad (8.179-a)$$

Vía (8.174) deducimos inmediatamente,

$$\boxed{\vec{J}_{spin}^{(0)} \neq \vec{J}_{spin}^{(Proca, usual)}} \quad (8.179-b)$$

En cambio $J_{spin}^{(0)12}$ coincide (salvo el signo) con el empleado por Bogoliubov en su versión del formalismo de Proca:

$$J_{spin}^{(Proca, Bog)12} = \frac{1}{m^3} \int d^3x \left[U^{\dagger} \partial_0 U + (\partial_0 U^{\dagger})^* U - U^{\dagger} \partial_0 U - (\partial_0 U^{\dagger})^* U \right]. \quad (8.180)^{**}$$

En efecto: De (8.168-a) y tabla 6-1,

$$J_{spin}^{(0)12} = \int d^3x F^{0;12} \quad (8.181)$$

Reemplazando (8.70-b) obtenemos,

$$J_{spin}^{(0)12} = J_{spin}^{(Proca, Bog)12} + \frac{1}{m^3} \int d^3x \left\{ [U^{\dagger} \partial_1 U^2 + U^{\dagger} \partial_1 U^2 - U^{\dagger} \partial_2 U^1 - U^{\dagger} \partial_2 U^1] + [\text{complejo conjugado}] \right\}.$$

Integrando por parte la integral se anula y queda

$$J_{spin}^{(0)12} = - J_{spin}^{(Proca, Bog)12} \quad (8.182)$$

Como verificación, puede observarse que nuestra (8.175-b) es consecuente con la afirmación de Bogoliubov⁵ de que no sólo el momento angular total, sino el spin que él emplea son constantes del movimiento. El origen de la conservación del spin es el mismo en los dos casos: Proviene del uso de un tensor energía momento canónico simétrico ver (8.126).

Respecto de otros formalismos, el empleo de (2.31) permite fácilmente demostrar que $J_{spin}^{(1/2)}$ es equivalente al de Belinfante⁴, que es idéntico al de de Broglie.⁹

$$J_{spin}^{(Bel)} = \frac{1}{2} \int \psi^{\dagger} (\delta_{ij}^{\dagger} + \delta_{ij}^{\dagger}) (\sigma_{ij}^3 + \sigma_{ij}^3) d^3x \quad (8.183)^{*}$$

y que vía (1.6) se traduce en el de Kemmer¹⁵.

8.g - SOBRE OTRAS FORMULACIONES POSIBLES.

Hemos partido de los densidades lagrangeanas diferentes $\mathcal{L}^{(1/2)}$ (8.24) y $\mathcal{L}^{(k)}$ (8.25). Hemos obtenido las mismas ecuaciones de evolución (las de BW) la misma 4-corriente total, el mismo 4-vector energía momento, pero diferente spin, uno conservado, $J_{spin}^{(0)}$ y otro no conservado $J_{spin}^{(1/2)}$ (cf. Secc.8.f-3) por lo que las dos formulaciones no son físicamente equivalentes.

Sea R un número real. De la linealidad de las expresiones utilizadas, se sigue que si definimos una nueva densidad lagrangeana,

$$\mathcal{L}^{(R)} = 2R \mathcal{L}^{(1/2)} + (1 - 2R) \mathcal{L}^{(0)} \quad (8.184-a)$$

volvemos a obtener como ecuaciones de movimiento las (1.2) de BW, y, para

los observables $\mathcal{O} \quad (\mathcal{O} = j^{\mu}, \dots, J_{spin})$

$$\mathcal{O}^{(R)} = 2R \mathcal{O}^{(1/2)} + (1 - 2R) \mathcal{O}^{(0)}. \quad (8.184-b)$$

Por ejemplo, para la corriente tenemos en lugar de (8.98) u (8.104),

$$j^{\mu} = \sum_{A=1}^L \left[\bar{\psi}^{\nu} \frac{\partial \mathcal{L}^{(R)}}{\partial (\partial_{\mu} \psi^{\nu(A)})} - \frac{\partial \mathcal{L}^{(R)}}{\partial (\partial_{\mu} \bar{\psi}^{\nu(A)})} \psi^{\nu(A)} \right] \quad (8.185-a)$$

Reemplazando (8.183-b) y teniendo en cuenta (8.98) y (8.104)

resulta inmediatamente

$$\mathbf{j}^{(R)\mu} = 2R \mathbf{j}^{(1/2)\mu} + (1 - 2R) \mathbf{j}^{(0)\mu}. \quad (8.185-b)$$

Análogamente para los demás observables.

De lo anterior se sigue que

$$\int d^3x \mathbf{j}^{(R)\mu} = \int d^3x \mathbf{j}^{(1/2)\mu} - \int d^3x \mathbf{j}^{(0)\mu} \quad (8.186-a)$$

$$\mathbf{P}^{(R)\mu} = \mathbf{P}^{(1/2)\mu} - \mathbf{P}^{(0)\mu} \quad (8.186-b)$$

$$\vec{\mathbf{J}}_{spin}^{(R)} \neq \begin{cases} \vec{\mathbf{J}}_{spin}^{(1/2)} & \text{salvo } R = \frac{1}{2} \\ \vec{\mathbf{J}}_{spin}^{(0)} & \text{salvo } R = 0 \end{cases} \quad (8.186-c)$$

$$\frac{d\vec{\mathbf{J}}_{spin}^{(R)}}{dt} = 2R \frac{d\vec{\mathbf{J}}_{spin}^{(1/2)}}{dt} \neq 0 \quad \text{salvo } R=0 \quad (8.186-d)$$

y que la formulación R no es conectable mediante una transformación canónica con las formulaciones $\frac{1}{2}$ ó 0.

Afirmar que Ψ describe a una partícula con masa m y spin de autovalores $\pm 1, 0, -1$, más hipótesis razonables, llevan (como es sabido) de manera unívoca a las ecuaciones de BW^{1, 17} (a menos de un cambio de representación).

Pero por (186-d) eso no basta para que quede unívocamente determinada la física de la partícula, ni siquiera en el límite en que las interacciones tienden a cero. No queda unívocamente determinado si el spin es constante del movimiento o no, ni la "intensidad" de su variación temporal.

Hasta ésta etapa de nuestro trabajo, podemos decir que presumiblemente la física del mesón vectorial queda unívocamente determinada si (además de la masa) se da otro parámetro R continuo, real, adimensional e invariante Lorentz.

El o los valores de R con correlato experimental, sólo pueden ser hallados mediante una predicción experimentalmente verificable. Pero para ello necesitamos la segunda cuantificación, con un desarrollo mayor del que haremos en el próximo capítulo.

CAPITULO NOVENO

INTRODUCCION A LA TEORIA CUANTICA
DE CAMPOS

9.2 - DEFINICIONES Y NOTACIONES.

9.2-1) La matriz \mathcal{S}^V .

Indicamos por $\{a, b\}$ un par no ordenado a, b. Definimos,

$$\mathcal{S}^V(\{1j\}, \{kl\}) = \frac{1}{2}(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk} + \delta_{ik}^5\delta_{jl}^5 + \delta_{il}^5\delta_{jk}^5) \quad (9.1)$$

Observamos que el 2º miembro es invariante ante

$$i \leftrightarrow j \quad y \quad k \leftrightarrow l \quad (9.2)$$

Es fácil calcular la tabla de valores de \mathcal{S}^V en la representación

(9.46) de δ^5 . El resultado es

a) $\mathcal{S}^V = 1$ para	<table border="1" style="border-collapse: collapse; text-align: center;"> <tr><td>11</td><td>11</td></tr> <tr><td>22</td><td>22</td></tr> <tr><td>33</td><td>33</td></tr> <tr><td>44</td><td>44</td></tr> <tr><td>11</td><td>33</td></tr> <tr><td>22</td><td>44</td></tr> <tr><td>33</td><td>11</td></tr> <tr><td>44</td><td>22</td></tr> </table>	11	11	22	22	33	33	44	44	11	33	22	44	33	11	44	22		; $\mathcal{S}^V = \frac{1}{2}$ para	<table border="1" style="border-collapse: collapse; text-align: center;"> <tr><td>12</td><td>12</td></tr> <tr><td>14</td><td>14</td></tr> <tr><td>23</td><td>23</td></tr> <tr><td>34</td><td>34</td></tr> <tr><td>12</td><td>34</td></tr> </table>	12	12	14	14	23	23	34	34	12	34	(9.3-a)
11	11																														
22	22																														
33	33																														
44	44																														
11	33																														
22	44																														
33	11																														
44	22																														
12	12																														
14	14																														
23	23																														
34	34																														
12	34																														

y demás valores obtenidos vía (9.2) y mediante,

$$b) \mathcal{S}^V(\{1j\}, \{kl\}) = \mathcal{S}^V(\{kl\}, \{1j\}) \quad (9.3-b)$$

$$c) \mathcal{S}^V = 0$$

en los casos restantes.

Observamos que a las triviales (9.2) se añade la simetría (9.3-b). Para ella basta que sea $\delta_{ij}^5 = \pm \delta_{ji}^5$, lo cual ocurre al menos en las representaciones usuales.

9.2-2) La matriz \mathcal{S}^{VI} .

Definimos

$$\mathcal{S}^{VI}(\{x_1, x_2\}, \{y_1, y_2\}) = \Lambda_{r_1, r_2, s_1, s_2}^I \mathcal{S}^V(\{s_1, s_2\}, \{t_1, t_2\}) \quad (9.4-a)$$

Recordemos que con la notación dada en Secc. 1.a es

$$\Lambda_{r_1, r_2, s_1, s_2}^I = \frac{1}{2}(\delta_{r_1, s_1} \delta_{r_2, s_2} + \delta_{r_1, s_2}^0 \delta_{r_2, s_1}^0)$$

Como $\delta^0 \delta^5 = \delta^5 \delta^0$, obtenemos de (9.4-a) que también es

$$\mathcal{S}^{VI}(\{x_1, x_2\}, \{y_1, y_2\}) = \mathcal{S}^V(\{x_1, x_2\}, \{s_1, s_2\}) \Lambda_{s_1, s_2, t_1, t_2}^I \quad (9.4-b)$$

De la invariancia de \mathcal{S}^V ante (9.2) se deduce que también \mathcal{S}^{VI} es invariante ante

$$x_1 \leftrightarrow x_2 \quad y \quad s_1 \leftrightarrow s_2 \quad (9.5)$$

Usando (2.6 b) obtenemos que en la representación usual de las matrices de Dirac es

$$\begin{aligned} \mathcal{S}^{\sigma I}(\{ij\}, \{kl\}) &= \frac{1}{2}(1 + \epsilon_i \epsilon_j) \mathcal{S}^{\sigma}(\{ij\}, \{kl\}) - \\ &= \frac{1}{2}(1 + \epsilon_k \epsilon_l) \mathcal{S}^{\sigma}(\{ij\}, \{kl\}), \end{aligned} \quad (9.6)^+$$

con $\epsilon_1 = \epsilon_2 = 1$, $\epsilon_3 = \epsilon_4 = -1$. Entonces deducimos inmediatamente de tabla (9.3) la tabla para $\mathcal{S}^{\sigma I}$:

a) $\mathcal{S}^{\sigma I} = 1$ para $\begin{array}{c|c} ij & kl \\ \hline 11 & 11 \\ 22 & 22 \\ 33 & 33 \\ 44 & 44 \\ 11 & 33 \\ 22 & 44 \end{array}$, $\mathcal{S}^{\sigma I} = \frac{1}{2}$ para $\begin{array}{c|c} ij & kl \\ \hline 12 & 12 \\ 34 & 34 \\ 12 & 34 \end{array}$

y demás valores obtenidos vía (9.5) y mediante,

$$b) \mathcal{S}^{\sigma I}(\{ij\}, \{kl\}) = \mathcal{S}^{\sigma I}(\{kl\}, \{ij\}); \quad (9.7b)$$

$$c) \mathcal{S}^{\sigma I} = 0 \quad \text{en los casos restantes.} \quad (9.7-c)$$

9.b - LAS REGLAS DE CONMUTACION EN LA FORMULACION $\frac{1}{2}$

9.b-1) Las reglas de conmutación para tiempos iguales.

Aunque en el capítulo anterior hemos mantenido (dentro de lo posible) la covariancia manifiesta, aquí usaremos como punto de partida las reglas de conmutación para tiempos iguales, pues (debido a una peculiaridad que en este caso tienen los momentos conjugados Π^0) disminuirémos la probabilidad de ensayar juegos de reglas de conmutación incompatibles entre sí.

Como las variables son seis $\Psi^{\sigma(A)}$ y otras seis $\bar{\Psi}^{\sigma(A)}$ (por ejemplo las (8.9-3), parecería plausible ensayar

$$[\Psi^{V(B)}(x^0, \vec{x}), \Pi^{V(A)0}(x^0, \vec{x}^0)] = i \delta_{AB} \delta(\vec{x} - \vec{x}^0) \quad (9.8-a)$$

$$[\bar{\Psi}^{V(B)}(x^0, \vec{x}), \bar{\Pi}^{V(A)0}(x^0, \vec{x}^0)] = i \delta_{AB} \delta(\vec{x} - \vec{x}^0) \quad (9.8-b)$$

$$[\bar{\Psi}^{V(B)}(x^0, \vec{x}), \Pi^{V(A)0}(x^0, \vec{x}^0)] = 0 \quad (9.8-c)$$

$$[\Psi^{V(B)}(x^0, \vec{x}), \bar{\Pi}^{V(A)0}(x^0, \vec{x}^0)] = 0 \quad (9.8-d)$$

$$[\Psi^{V(B)0}(x^0, \vec{x}), \bar{\Pi}^{V(A)0}(x^0, \vec{x}^0)] = 0 \quad (9.8-e)$$

$$[\bar{\Psi}^{V(B)0}(x^0, \vec{x}), \Pi^{V(A)0}(x^0, \vec{x}^0)] = 0 \quad (9.8-f)$$

$$[\Psi^{V(B)0}(x^0, \vec{x}), \bar{\Pi}^{V(A)0}(x^0, \vec{x}^0)] = 0 \quad (9.8-g)$$

$$[\Psi^{V(B)}(x^0, \vec{x}), \bar{\Psi}^{V(A)}(x^0, \vec{x}^0)] = 0 \quad (9.8-h)$$

$$[\bar{\Psi}^{V(B)}(x^0, \vec{x}), \Psi^{V(A)}(x^0, \vec{x}^0)] = 0 \quad (9.8-i)$$

$$[\bar{\Psi}^{V(B)}(x^0, \vec{x}), \bar{\Psi}^{V(A)}(x^0, \vec{x}^0)] = 0 \quad (9.8-j)$$

donde

$$A, B = 1, 2, \dots, 6. \quad (9.9)$$

$$y \quad \prod^{\tau(A)} = \frac{\partial \int^{(1/2)}}{\partial (\partial_0 \Psi^{\tau(A)})}, \quad \overline{\prod^{\tau(A)}} = \frac{\partial \int^{(1/2)}}{\partial (\partial_0 \overline{\Psi}^{\tau(A)})} \quad (9.10)$$

Pero ante todo busquemos un procedimiento que nos permita eliminar en las relaciones anteriores los índices A y B. El motivo es el mismo ya discutido en el Cap. 8.

Por (8.24)

$$\prod^{\tau(A)} = \frac{1}{m} \frac{\partial ([(\partial_\sigma \overline{\Psi}^\sigma) \gamma_{(1)}^\sigma \gamma_{(2)}^\sigma] [\partial_0 \Psi^\tau(x^0, \vec{x}^1)])}{\partial (\partial_0 \Psi^{\tau(A)})} \quad (9.11)$$

donde habría que desarrollar cada corchete como una superposición de componentes, como en A8-1.4.

Sea ahora

$$W \in W_{SP}^P \quad (9.12)$$

un spinor arbitrario (no un operador de campo). Calculamos cada $W^{\tau(A)}$ y lo contraemos con (9.8-a), sumando respecto de A; luego de reemplazar (9.11) tenemos

$$\frac{1}{m} [\Psi^{\tau(B)}(x^0, \vec{x}^1)] \sum_{A=1}^6 \frac{\partial ([(\partial_\sigma \overline{\Psi}^\sigma) \gamma_{(1)}^\sigma \gamma_{(2)}^\sigma] [\partial_0 \Psi^\tau(x^0, \vec{x}^1)] W^{\tau(A)}}{\partial (\partial_0 \Psi^{\tau(A)})} = i W^{\tau(B)} \delta_{(\vec{x}-\vec{x}')} \quad (9.13)$$

(al no ser W un operador, lo podemos introducir en el interior del conmutador).

Pero en la demostración del 2º lema del Cap. anterior (Secc. 8.3-2 y apéndice A8-1) sólo interviene el aspecto spinorial de los campos, por lo que el 2º lema es aplicable en el 2º factor del conmutador (9.13). Aplicándolo,

$$\frac{1}{m} [\Psi^{\tau(B)}(x^0, \vec{x}^1)] \frac{\partial ([(\partial_\sigma \overline{\Psi}^\sigma) \gamma_{(1)}^\sigma \gamma_{(2)}^\sigma] [\partial_0 \Psi^\tau(x^0, \vec{x}^1)] W^\tau)}{\partial (\partial_0 \Psi^\tau)} = i W^{\tau(B)} \delta_{(\vec{x}-\vec{x}')} \quad (9.14)$$

donde ahora la derivada lo es en el sentido (8.26pa) y por lo tanto, inmediatamente calculable vía 2º lema:

El 2º factor del conmutador vale,

$$[(\partial_\sigma \overline{\Psi}^\sigma) \gamma_{(1)}^\sigma \gamma_{(2)}^\sigma] W^\tau$$

Además, el 2º factor es (desde el punto de vista spinorial) un escalar, por lo que ambos miembros de (9.14) son las componentes "B" (p. ej. en el sentido (8.93)) de un spinor. Siendo iguales todas las componentes B de dichos spinores, se trata de spinores iguales; es decir, también son iguales sus componentes usuales i_1, i_2 .

Por lo tanto,

$$\frac{1}{m} [\Psi_{i_1 i_2}^{\nu} (x^{\circ}, \vec{x}), [(\partial_{\sigma} \bar{\Psi}^{\nu} (x^{\circ}, \vec{x})) \delta_{(1)}^{\sigma} \delta_{(2)}^{\circ}] W^{\nu}] = i W_{i_1 i_2}^{\nu} \delta(\vec{x} - \vec{x}') \quad (9.15)$$

De esta manera, nos hemos liberado en la la. regla de conmutación, de los engorrosos índices A y B. Claro, que debemos desembarazarnos de W^{ν} . Pero antes, empleemos (8.92°) para abreviar (9.15) y mostrar qué problema aparece con (9.8):

$$[\Psi_{i_1 i_2}^{\nu} (x^{\circ}, \vec{x}), \bar{\Psi}^{\nu} (x^{\circ}, \vec{x}) \delta_{(2)}^{\circ} W^{\nu}] = W_{i_1 i_2}^{\nu} \delta(\vec{x} - \vec{x}') \quad (9.16)$$

Por (2.31),

$$\frac{1}{2} [\Psi_{i_1 i_2}^{\nu} (x^{\circ}, \vec{x}), \bar{\Psi}^{\nu} (x^{\circ}, \vec{x}) (\delta_{(1)}^{\circ} + \delta_{(2)}^{\circ}) W^{\nu}] = W_{i_1 i_2}^{\nu} \delta(\vec{x} - \vec{x}') \quad (9.17a)$$

Pero siendo

$$(\delta_{(1)}^{\circ} + \delta_{(2)}^{\circ}) \Lambda^{\text{II}} = \Lambda^{\text{II}} (\delta_{(1)}^{\circ} + \delta_{(2)}^{\circ}) = 0, \quad (9.17b)$$

el 1er. miembro es insensible a una modificación de la parte

$$W^{\nu \text{II}} = \Lambda^{\text{II}} W^{\nu}$$

de W^{ν} , mientras que el 2° miembro varía al variar $W^{\nu \text{II}}$ (p. ej. en la representación (2.9-b) el 2º miembro no cambia al incrementar $W_{14}^{\nu} = W_{41}^{\nu}$, pero cambia la componente 14 del segundo).

La contradicción se debe a que las (2.8) valen en tanto los momentos no sean idénticamente nulos, y, en nuestro caso aquellos $\Pi^{\nu(A)}$ (y $\bar{\Pi}^{\nu(A)}$) correspondientes a valores de A que a su vez están asociados a componentes tipo II son nulos, como se comprende retrocediendo en la demostración.

Por ejemplo, con la elección (8.93) de las $\Psi^{\nu(A)}$, las

$$\Psi^{\nu(3)}, \Psi^{\nu(4)} \text{ y } \Psi^{\nu(6)}$$

están formadas únicamente con las $\Psi_{i_1 i_2}^{\nu}$ — que forman una $\Psi^{\nu \text{II}}$ (ver (2.9-b)) (mientras que las restantes $\Psi^{\nu(A)}$ corresponden puramente a $\Psi^{\nu \text{I}}$). En este caso la dificultad encontrada para $W^{\nu \text{II}}$ es un reflejo de que si hubiéramos querido calcular las

$$\Pi^{\nu(3)0}, \Pi^{\nu(4)0} \text{ y } \Pi^{\nu(6)0}$$

hubiéramos encontrado

$$\Pi^{\nu(3)0} = \Pi^{\nu(4)0} = \Pi^{\nu(6)0} = 0 \quad (9.18-a)$$

(y

$$\bar{\Pi}^{\nu(3)0} = \bar{\Pi}^{\nu(4)0} = \bar{\Pi}^{\nu(6)0} = 0 \quad (9.18-b)$$

Este tipo de dificultad se presenta con cierta frecuencia en la formulación canónica de las reglas de conmutación de campos sencillos.

Dado el conocido peligro de contradicciones que existe al trabajar con componentes redundantes, y spin elevado, la solución que ensayemos será la de retroceder al máximo: Eliminaremos de (9.8) no sólo aquellos conmutadores con $\Pi^{\nu(A)0} = 0$, sino también aquellas $\Psi^{\nu(A)}$ cuyas A anule un

$\prod^{V(A)0}$ (y, por supuesto, lo mismo para $\bar{\Psi}^{V(A)}$ y $\bar{\eta}^{V(A)0}$).

Con la elección (8.93) de las $\Psi^{V(A)}$, ello equivale a mantener (9.8) pero sustituyendo (9.9) por

$$A, B = 1, 2, \text{ ó } 5. \tag{9.19-a}$$

o simbólica (y un poco más generalmente)

$$A, B \longleftrightarrow \Psi^{VI} \tag{9.19-b}$$

Pero ... luego de esta drástica eliminación, cómo completaremos las reglas de conmutación? : Usando las ecuaciones de evolución, lo cual resultará posible. Se puede obtener así, a partir de las menos numerosas reglas de conmutación (9.8), (9.19) un conjunto de reglas no sólo autoconsecuentes sino que también sea compatible con las ecuaciones de evolución.

Todo el procedimiento anterior ((9.12)...(9.16)) para independizar de las A-es las reglas de conmutación es inmediatamente readaptado, con la sustitución

$$V \longleftrightarrow V I \tag{9.20}$$

que proviene de reemplazar (9.9) por (9.19).

Repasando rápidamente: En (9.13) en lugar de $W^{V(A)}$ usamos $W^{VI(A)}$, y eliminamos de la sumatoria los valores prohibidos de A. A continuación, observamos que el segundo lema del Cap. anterior (Seco. 8.c-2) continúa valiendo si en todas partes se efectúa la sustitución (9.20) (la demostración es similar a la efectuada en A8-1). Entonces podemos pasar a (9.15) y finalmente a (9.16) simplemente usando (9.20). Queda, pues,

$$\left[\Psi_{i_1 i_2}^{VI} (x^0, \vec{x}), \Psi^{VI} (x^0, \vec{x}') \delta_{(12)} W^{VI} \right] = W_{i_1 i_2}^{VI} \delta(\vec{x} - \vec{x}'). \tag{9.21}$$

Eliminadas las asimétricas $\Psi^{V(A)}$, debemos desembarasarnos del spinor auxiliar W^{VI} . Como W^{VI} es arbitrario, esto hace recordar al 1er. lema del Cap. anterior (Seco. 8.b-2), al que trataré de usar. Defino un spinor $\Theta^{(i_1 i_2)}$ tal que las componentes spinoriales de su adjunto sean

$$\left[\Theta^{(i_1 i_2)} \right]_{j_1 j_2} = \delta_{i_1 j_1} \delta_{i_2 j_2} \tag{9.22}$$

con lo cual (9.22) se escribe

$$\left[\Psi_{i_1 i_2}^{VI} (x^0, \vec{x}), \Psi^{VI} (x^0, \vec{x}') \delta_{(12)} W^{VI} \right] = \Theta^{(i_1 i_2)} W^{VI} \tag{9.23}$$

El primer lema también continúa valiendo si se efectúa la sustitución (9.20). Entonces, como W^{VI} es arbitrario (dentro de $\{ \text{dim } VI \}$) obtenemos

$$\left[\Psi_{i_1 i_2}^{VI} (x^0, \vec{x}), \left(\bar{\Psi}^{VI} (x^0, \vec{x}') \delta_{(12)} \right)_{k_1 k_2}^{VI \text{ dim}} \right] = \left(\Theta^{(i_1 i_2)} \right)_{k_1 k_2}^{VI \text{ dim}} \tag{9.24}$$

A primera vista podría objetarse " W^{VI} es arbitrario dentro de $\epsilon^{sim VI}$ " pues además W cumple (9.12). Pero la (9.12) no viola la proposición en cuestión porque

$$W^{VI} = \Lambda^I \Lambda^V W = \Lambda^V \Lambda^I W = \Lambda^V W^I,$$

y la parte W^I de una $W \in W$ es arbitraria (cf. final de Secc. 2.f-3).

Ahora, de comparar (9.22) con (9.1) y (9.4-b) se deduce,

$$\left[\theta^{(i_1 i_2)} \right]_{k_2 k_1}^{VI} = \frac{1}{2} \delta^V(\{i_1 i_2\}, \{k_2 k_1\}) \quad (9.25-a)$$

$$\begin{aligned} \text{y} \left[\theta^{(i_1 i_2)} \right]_{k_2 k_1}^{VI} &= \left[\theta^{(i_1 i_2)} \right]_{k_2 k_1}^{VI} I \\ &= \frac{1}{2} \delta^{VI}(\{i_1 i_2\}, \{k_2 k_1\}) \end{aligned} \quad (9.25-b)$$

Reemplazando en (9.24) y sustituyendo k_2 por k_1 (cf. (9.5)) tenemos,

en resumen

$$\begin{aligned} (9.8-a) &\implies \\ \left[\Psi_{i_1 i_2}^{VI}(\mathbf{x}^0, \vec{\mathbf{x}}), (\bar{\Psi}^{VI}(\mathbf{x}^0, \vec{\mathbf{x}}) \delta^0)_{k_2 k_1} \right] &= \frac{1}{2} \delta^{VI}(\{i_1 i_2\}, \{k_1 k_2\}) \delta(\vec{\mathbf{x}} - \vec{\mathbf{x}}^0) \\ &u = 1, 2. \end{aligned} \quad (9.26-a)$$

Notas:

1) Hemos eliminado las indicaciones "VI" de $(\bar{\Psi}^{VI} \delta^0_{(1)})$ porque

$$\bar{\Psi}^{VI} \delta^0_{(2)} \Lambda^I = \bar{\Psi}^{VI} \Lambda^I \delta^0_{(2)} = \bar{\Psi}^{VI}$$

2) Hemos eliminado la indicación "sim" porque siendo

$$\Lambda^I \delta^0_{(2)} = \Lambda^I \delta^0_{(1)} = \frac{1}{2} \Lambda^I (\delta^0_{(1)} + \delta^0_{(2)}) \quad (9.27)$$

y siendo $\bar{\Psi}_{s_2 s_1}^{VI} = \bar{\Psi}_{s_1 s_2}^{VI}$, resulta que $(\bar{\Psi}^{VI} \delta^0_{(2)})_{k_1 k_2}$ es simétrica ante $k_1 \leftrightarrow k_2$

3) También por (9.27) podemos sustituir $\delta^0_{(2)}$ por $\delta^0_{(u)}$, $u = 1, 2$.

4) Las propiedades de simetría (9.5) de δ^{VI} son las del primer miembro de (9.26-a)

Con el procedimiento empleado para demostrar (9.26-a) se obtienen a partir de las restantes (9.8),

$$[(\delta_{(u)} \Psi^{\nabla I}(x, \vec{x}))_{i_1, i_2}, \bar{\Psi}_{k_1, k_2}^{\nabla I}(x', \vec{x}')] = \frac{1}{2} \delta^{\nabla I}(\{k_1, k_2\}, \{i_1, i_2\}) \delta(x - x') \quad (9.26-b)(D)$$

$$[\bar{\Psi}_{i_1, i_2}^{\nabla I}(x, \vec{x}), (\Psi_{(u)}^{\nabla I}(x', \vec{x}') \delta_{(u)}^{\circ})_{k_1, k_2}] = 0 \quad (9.26-c)(D)$$

$$[\Psi_{i_1, i_2}^{\nabla I}(x, \vec{x}), (\delta_{(u)} \Psi^{\nabla I}(x', \vec{x}'))_{k_1, k_2}] = 0 \quad (9.26-d)$$

$$[(\bar{\Psi}^{\nabla I}(x, \vec{x}))_{i_1, i_2}, (\Psi^{\nabla I}(x', \vec{x}'))_{k_1, k_2}] = 0 \quad (9.26-e)$$

$$[(\bar{\Psi}^{\nabla I}(x, \vec{x}))_{(u)}^{\circ} \delta_{(u)}^{\circ}]_{i_1, i_2}, (\bar{\Psi}^{\nabla I}(x', \vec{x}') \delta_{(u)}^{\circ})_{k_1, k_2}] = 0 \quad (9.26-f)(D)$$

$$[(\delta_{(u)} \Psi^{\nabla I}(x, \vec{x}))_{i_1, i_2}, (\delta_{(u)} \Psi^{\nabla I}(x', \vec{x}'))_{k_1, k_2}] = 0 \quad (9.26-g)$$

$$[\Psi_{i_1, i_2}^{\nabla I}(x, \vec{x}), \bar{\Psi}_{k_2, k_1}^{\nabla I}(x', \vec{x}')] = 0 \quad (9.26-h)$$

$$[\Psi_{i_1, i_2}^{\nabla I}(x, \vec{x}), \Psi_{k_1, k_2}^{\nabla I}(x', \vec{x}')] = 0 \quad (9.26-i)$$

$$[\bar{\Psi}_{i_1, i_2}^{\nabla I}(x, \vec{x}), \bar{\Psi}_{k_2, k_1}^{\nabla I}(x', \vec{x}')] = 0 \quad (9.26-j)(D)$$

u =

de las cuales hay varias dependientes de las restantes, o de sus conjugadas hermitianas. Las hemos indicado con (D) sin afirmar con ello que las restantes sean totalmente independientes.

9.b-2) Comparación con el formalismo de Proca.

A) LAS REGLAS DE CONMUTACION USUALES

Del artículo de Pauli²¹ o del texto de Bogoliubov⁵ obtenemos

las reglas de conmutación para intervalos arbitrarios:

$$[U_{\mu}(x), U_{\nu}^{\dagger}(x')] = i (m^2 g_{\mu\nu} + m \partial_{\mu} \partial_{\nu}) \Delta(x - x') \quad (9.27-a)^{+} \times \times$$

$$[U_{\mu}(x), U_{\nu}(x')] = 0 \quad (9.27-b) \times \times$$

Usando conocidas propiedades de $\Delta(x)$ y las ecuaciones de Proca (1.7⁰⁰) obtenemos las reglas de conmutación usuales para tiempos iguales, en la notación 3-dimensional (1.7ⁿ):

+Al comparar, tener presente que las U_{μ} de Bogoliubov difieren en un factor constante $m^{-3/2}$ de las U_{μ} usadas por nosotros, factor al que ya hemos tenido en cuenta

$$[V(x^0, \vec{x}), U^{+a}(x^0, \vec{x}')] = -i m \partial_a \delta(\vec{x} - \vec{x}') \quad (9.28-a)^*$$

$$[E^a(x^0, \vec{x}), U^{+b}(x^0, \vec{x}')] = i m^2 \delta_{bc} (\vec{x} - \vec{x}') \quad (9.28-b)^*$$

$$[E^a(x^0, \vec{x}), H^{+3}(x^0, \vec{x}')] = i m (\delta_{a1} \partial_2 - \delta_{21} \partial_a) \delta(\vec{x} - \vec{x}') \quad (9.28-c)^*$$

y permutaciones cíclicas sobre 1,2,3

$$[V(x^0, \vec{x}), V^+(x^0, \vec{x}')] = 0 \quad (9.28-d)^*$$

$$[V(x^0, \vec{x}), E^+(x^0, \vec{x}')] = 0 \quad (9.28-e)^*$$

$$[V(x^0, \vec{x}), H^+(x^0, \vec{x}')] = 0 \quad (9.28-f)^*$$

$$[U(x^0, \vec{x}), U^{+b}(x^0, \vec{x}')] = 0 \quad (9.28-g)^*$$

$$[U(x^0, \vec{x}), H^{+b}(x^0, \vec{x}')] = 0 \quad (9.28-h)^*$$

$$[E^+(x^0, \vec{x}), E^{+b}(x^0, \vec{x}')] = 0 \quad (9.28-i)^*$$

$$[H^+(x^0, \vec{x}), H^{+b}(x^0, \vec{x}')] = 0 \quad (9.28-j)^*$$

Finalmente,

$\vec{V}, \vec{U}, \vec{E}$ y \vec{H} , tomadas en puntos diferentes pero tiempos iguales, conmutan entre sí. (9.28-k)^*

Hasta aquí, el procedimiento usual.

B) TRADUCCION DE NUESTRAS REGLAS DE CONMUTACION AL FORMALISMO DE PROCA

Podemos traducir (9.26) al formalismo de Proca usando (7.36) y (7.37) para traducir ψ^{ν} y $\psi^{\nu\dagger}$, (2.9-b) para tomar las partes I, y (2.6-b) para multiplicar por ψ^0 ó para traducir $\bar{\psi}^{\nu\dagger}$ ó $\bar{\psi}^{\nu}$.

De las (9.26) (desechando las que sabemos que no son independientes, o sea las (D)) aquellas que vinculan componentes del campo con sus conjugadas hermitianas, son las (a), (e) y (h). La (9.26-a) se traduce en la (9.28-b)⁺, la (9.26-e) en la (9.28-g) y la (9.26-h) en la (9.28-i). Análogamente para traducir las que vinculan ψ con $\bar{\psi}$ o $\bar{\psi}$ con ψ , se traducen en parte de las (9.28-k).⁺

C) DEMOSTRAMOS QUE TENIENDO EN CUENTA LAS ECUACIONES DE PROCA, DE LAS REGLAS REOBTENIDAS EN (B) SE DEDUCEN TODAS LAS (9.28):

C₁) De (9.28-i) y la segunda (1.7^{no}-b) se deduce (9.28-d)

C₂) " (" -i) " " " " " " (" -e)

C₃) " (" -g) " " primera " " " (" -j)

C₄) " (" -e) se deduce

$$[\partial_0 V(x^0, \vec{x}), \vec{E}^+(x^0, \vec{x}')] = -[V(x^0, \vec{x}), \partial_0 \vec{E}^+(x^0, \vec{x}')] \quad (9.29-a)$$

Combinándola con la 1a. (1.7^{no}-o) y con la 2a. (1.7^{no}-a):

$$-[\text{div } \vec{U}(x^0, \vec{x}), \vec{E}^+(x^0, \vec{x}')] = -m [V(x^0, \vec{x}), \vec{U}^+(x^0, \vec{x}')] - [V(x^0, \vec{x}), \text{rot } \vec{H}(x^0, \vec{x}')] .$$

El último término se anula debido a (9.28-f):

$$[\text{div } \vec{U}(x^0, \vec{x}), \vec{E}^+(x^0, \vec{x}')] = m [V(x^0, \vec{x}), \vec{U}^+(x^0, \vec{x}')] . \quad (9.29-b)$$

~~El~~ menos de un factor i.

Por otra parte conjugando hermitianamente (9.28-b), intercambiando $\vec{x} \leftrightarrow \vec{x}'$ y derivando luego respecto de \vec{x} se obtiene

$$[\text{div } \vec{U}(\vec{x}, \vec{x}'), \vec{E}'(\vec{x}, \vec{x}')] = -i m^2 \delta(\vec{x} - \vec{x}') \quad (9.29-c)$$

Combinándola con (9.29-b) resulta la (9.28-a).

C₅) De la la. (1.7''-b) y (9.28-b) se deduce (9.28-c).

C₆) " " " (" -b) " (" -a) " " (" -f).

Análogamente para las que vinculan U^μ y $G^{\mu\nu}$ con $U^{\mu\dagger}$, $G^{\mu\nu\dagger}$ ó $U^{\mu\dagger}$ y $G^{\mu\nu\dagger}$ con $U^{\mu\dagger}$ y $G^{\mu\nu\dagger}$.

D) (B) Y (C) IMPLICAN QUE LAS REGLAS DE CONMUTACION (9.26-b) (FORMALISMO DE BARGMANN-WIGNER, FORMULACION (1/2)) SE TRASLADAN EN LAS REGLAS DE CONMUTACION USUALES (9.27) o (9.28) DEL FORMALISMO DE PROCA. Además, procediendo análogamente, se puede demostrar la proposición inversa. En resumen

$(9.26) \Big _{\text{BW}(\frac{1}{2})} \longleftrightarrow (9.27) \Big _{\text{Proca}} \quad (9.30)$
--

9.b-3) Sobre la compatibilidad de nuestras reglas de conmutación.

Las reglas de conmutación usuales para Proca (9.27) son

- I) compatibles entre sí;
- II) compatibles con las ecuaciones (1.7') de Proca.

Además, es bien sabido que las ecuaciones (1.7') de Proca son equivalentes a las (1.1) de BW (ver p. ej. el texto de Leite Lopes¹⁷).

Entonces, 9.b-3D implica

<p>Las reglas de conmutación (9.26) del formalismo de BW en la formulación 1/2 son</p> <ul style="list-style-type: none"> I) compatibles entre sí; II) compatibles con las ecuaciones (1.1) de BW. (9.31)
--

CAPITULO 10

SOBRE LA INTERACCION CON EL CAMPO ELECTROMAGNETICO

10-a) OBJETO DE ESTE CAPITULO

Alguna vez se objetó a las ecuaciones (1.1) de BW que si se introduce el campo electromagnético mediante la sustitución habitual

$$p_{\mu} = i\partial_{\mu} \longrightarrow \Pi_{\mu} = i\partial_{\mu} - e A_{\mu} \quad (10.1)$$

se obtienen ecuaciones incompatibles. Si fuera imposible introducir la interacción con el campo electromagnético, nuestro trabajo sería casi inútil porque partículas inhabilitadas de interactuar son inobservables.

El objeto principal de este capítulo es recordar que en un antiguo artículo de Belinfante³ (anterior incluso al de BW) está la forma correcta de introducir la interacción con el campo electromagnético en las ecuaciones (1.1) de BW. A diferencia de los restantes capítulos, nuestro trabajo original aquí es pequeño.

10-b) LAS ECUACIONES DE BW EN PRESENCIA DE CAMPO ELECTROMAGNETICO.

Notación : para el campo electromagnético: $A_{\mu}, F_{\mu\nu}$,

$$\Pi_{\mu} = i\partial_{\mu} - e A_{\mu} .$$

Si $A_{\mu} = 0$ la ecuación (1.7) de Belinfante es equivalente a la (1.1) de BW (cf. Secc. 8.b-8K). En cambio, si en (1.7) se efectúa la sustitución en cuestión (la (10.1)) se obtienen para $A_{\mu} \neq 0$ ecuaciones no equivalentes a las que resultan efectuando la sustitución en las (1.1) de BW. Belinfante, usa, para $A_{\mu} \neq 0$ la

$$\frac{1}{2}(\delta_{(1)}^{\mu} + \delta_{(2)}^{\mu}) \Pi_{\mu} \Psi = m \Psi \quad (10.2)^{**}$$

En A10-1 repetimos cálculos de Belinfante³ que demuestran que

$$\begin{aligned} \Rightarrow \Pi_{\mu} \delta_{(1)}^{\mu} \Psi = m \Psi - \frac{1}{2} \frac{e}{\hbar m} F_{\mu\nu} (\delta_{(1)}^{\mu} - \delta_{(2)}^{\mu}) (\delta_{(1)}^{\nu} + \delta_{(2)}^{\nu}) \Psi & \quad (10.3-a)^{**} \\ \Pi_{\mu} \delta_{(2)}^{\mu} \Psi = m \Psi + \frac{1}{2} \frac{e}{\hbar m} F_{\mu\nu} (\delta_{(1)}^{\mu} - \delta_{(2)}^{\mu}) (\delta_{(1)}^{\nu} + \delta_{(2)}^{\nu}) \Psi & \quad (10.3-b)^{**} \end{aligned}$$

que, añadiendo

$$\boxed{\Psi_{ij} = \Psi_{ji}} \quad (10.3-c)$$

es la generalización de las ecuaciones (1.1) de BW en presencia de campo electromagnético. Las (10.3) son invariantes ante transformaciones de Lorentz y de gauge, lo que prueba la debilidad del argumento que se mencionó en Secc. 10.a contra las ecuaciones de BW.

Además,

$$(10.2) \iff (10.3)$$

pero (10.2) está escrita con "mínima interacción electromagnética" (en el sentido tradicional), cosa que no ocurre con (10.3). Lo cual abona otra argumete contra la forma tradicional del principio de mínima interacción electromagnética.

Pero aún nos falta:

- A) Probar que (10.3-c) es compatible con las (a) y (b).
- B) Demostrar que las (10.3) (a) y (b) son compatibles entre sí.
- C) Comparar con Proca.

Demostraremos en seguida la (A). Para (B) nos remitimos a Secc. 10.d y para C a Secc. 10.e.

Demstración de la compatibilidad de (10.3-c) con (a) y (b). (Belinfante

no la da, presumiblemente porque él no estaba interesado en spin 1 puro, que es consecuencia de la (10.3-c)).

Elamé

$$\Psi = \prod_{\mu} (\delta_{(1)}^{\mu} + \delta_{(2)}^{\mu}) \Psi \quad (10.4)$$

Descompongo Ψ_{ij} y Ψ_{ji} en parte simétrica y antisimétrica (ante el intercambio $i \leftrightarrow j$).

$$\Psi = \Psi^{sim} + \Psi^{ant} \quad (10.5)$$

$$\Psi = \varphi^{sim} + \varphi^{ant}$$

Es,

$$\Psi^{sim} = \prod_{\mu} (\delta_{(1)}^{\mu} + \delta_{(2)}^{\mu}) \varphi^{sim} \quad (10.6-a)$$

$$\Psi^{ant} = \prod_{\mu} (\delta_{(1)}^{\mu} + \delta_{(2)}^{\mu}) \varphi^{ant} \quad (10.6-b)$$

Reemplazo en (10.2); obtengo

$$\Psi^{sim} = 2m \Psi^{sim} \quad (10.7-a)$$

$$\Psi^{ant} = 2m \Psi^{ant} \quad (10.7-b)$$

Por lo tanto, la (10.2) se desdobra en

$$\frac{1}{2} \prod_{\mu} (\delta_{(1)}^{\mu} + \delta_{(2)}^{\mu}) \Psi^{sim} = m \Psi^{sim} \quad (10.8-a)$$

$$\frac{1}{2} \prod_{\mu} (\delta_{(1)}^{\mu} + \delta_{(2)}^{\mu}) \Psi^{ant} = m \Psi^{ant} \quad (10.8-b)$$

Es decir, las (10.8) (o, sus equivalentes (10.3-a) y (10.3-b)) no acoplan Ψ^{sim} y Ψ^{ant} . Puedo, pues, imponer la (10.3-c) sin caer en contradicción. El resultado es que las ecuaciones de BW en presencia de campo electromagnético son compatibles con spin 1 puro.

10.c - COMPARACION CON EL FORMALISMO DE PROCA

Las conocidas ecuaciones de Proca en presencia de campo electromagnético son,

$\Pi_{\mu} U^{\mu} = 0$	(10.9-a)*
$i m G^{\mu\nu} = \Pi^{\mu} U^{\nu} - \Pi^{\nu} U^{\mu}$	(10.9-b)*
$\Pi_{\mu} G^{\mu\nu} = -i m U^{\nu}$	(10.9-c)*

Es sabido³ que las ecuaciones de Belinfante (10.2) son equivalentes a las de Proca. Por lo tanto las ecuaciones (10.3) también lo son. La demostración se suele efectuar utilizando una representación particular de las Ψ_{ij} .

En un texto de Leite Lopes¹⁷ se describe un método elegante para pasar de las ecuaciones (1.1) de BW a las (1.7') de Proca en ausencia de campo electromagnético. Emplearemos el mismo método para probar que

$$(10.3) \implies (10.9)$$

en presencia de campo.

En primer lugar, con los mismos argumentos empleados¹⁷ para $A_{\mu} = 0$ se puede demostrar la (7.2) para $A_{\mu} \neq 0$.

Además, por (1.3) la (10.3-a) se puede escribir

$$\begin{aligned} \Pi_{\mu} \delta^{\mu} \Psi = m \Psi + \frac{i e}{8m} F_{\mu\nu} \gamma^{\mu} \gamma^{\nu} \Psi + \frac{i e}{8m} F_{\mu\nu} \gamma^{\mu} \Psi \gamma^{\nu} \\ - \frac{i e}{8m} F_{\mu\nu} \gamma^{\nu} \Psi \gamma^{\mu} - \frac{i e}{8m} F_{\mu\nu} \Psi \gamma^{\nu} \gamma^{\mu} \end{aligned} \quad (10.10)$$

De (7.3-a) obtenemos:

$$B^{-1} \delta^{\lambda\tau} = \delta^{\lambda\mu} B^{-1} \quad (10.11-a)$$

$$\delta^{\nu} B^{-1} \delta^{\mu\tau} = \delta^{\nu\mu} B^{-1} \quad (10.11-b)$$

$$\delta^{\nu} B^{-1} \gamma^{\nu} \gamma^{\mu} = \gamma^{\nu} \gamma^{\mu} \delta^{\nu} B^{-1} \quad (10.11-c)$$

Reemplazamos (7.2) en (10.10), empleamos (10.11) para pasar hacia la derecha los $\delta^{\nu} B^{-1}$; luego de postmultiplicar por $B \delta^{\nu}$ resulta,

$$\begin{aligned} \Pi_{\mu} \gamma^{\mu} (U_{\lambda} \gamma^{\lambda} + \frac{1}{2} G_{\lambda\eta} \gamma^{\lambda} \gamma^{\eta}) = m (U_{\lambda} \gamma^{\lambda} + \frac{1}{2} G_{\lambda\eta} \gamma^{\lambda} \gamma^{\eta}) + \\ + \frac{i e}{8m} F_{\mu\nu} \gamma^{\mu} \gamma^{\nu} (U_{\lambda} \gamma^{\lambda} + \frac{1}{2} G_{\lambda\eta} \gamma^{\lambda} \gamma^{\eta}) - \frac{i e}{8m} F_{\mu\nu} \gamma^{\mu} (U_{\lambda} \gamma^{\lambda} + \frac{1}{2} G_{\lambda\eta} \gamma^{\lambda} \gamma^{\eta}) \gamma^{\nu} + \\ + i e F (U + \frac{1}{2} G) - i e F (U + \frac{1}{2} G) \end{aligned} \quad (10.12)$$

de donde,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} (\Pi_{\mu} U^{\mu} - \Pi_{\lambda} U^{\lambda} - i m G_{\mu\lambda}) \gamma^{\mu} \gamma^{\lambda} = -\Pi_{\lambda} \gamma^{\lambda} + m U_{\lambda} \gamma^{\lambda} - \frac{1}{2} \Pi_{\mu} G_{\lambda\eta} \gamma^{\mu} \gamma^{\lambda} \gamma^{\eta} \\ + \frac{i e}{8m} F_{\mu\nu} U_{\lambda} (\gamma^{\mu} \gamma^{\nu} \gamma^{\lambda} - \gamma^{\nu} \gamma^{\lambda} \gamma^{\mu} + \gamma^{\lambda} \gamma^{\mu} \gamma^{\nu} - \gamma^{\lambda} \gamma^{\nu} \gamma^{\mu}) \\ + \frac{i e}{16m} F_{\mu\nu} G_{\lambda\eta} (\gamma^{\mu} \gamma^{\nu} \gamma^{\lambda} \gamma^{\eta} - \gamma^{\nu} \gamma^{\lambda} \gamma^{\mu} \gamma^{\eta} + \gamma^{\lambda} \gamma^{\mu} \gamma^{\nu} \gamma^{\eta} - \gamma^{\lambda} \gamma^{\nu} \gamma^{\mu} \gamma^{\eta}) \end{aligned} \quad (10.13)$$

Tomando trazas se obtiene la (10.9-a) con los procedimientos habituales del cálculo de trazas.

Premultiplico (10.13) por γ^{λ} y tomo trazas; resulta la (10.9-c). Premultiplico la (10.13) por $\gamma^{\lambda} \gamma^{\beta}$ y tomo trazas; resulta la (10.9-b). Por lo tanto,

$$(10.3) \implies (10.9)$$

Finalmente, combinando las ecuaciones (10.9) de Proca con (7.2) resulta (10.10), o sea la (10.3-a):

$$(10.9) \quad \Rightarrow \quad (10.3)$$

10.d - NOTA SOBRE LA COMPATIBILIDAD DE LAS ECUACIONES DE BARGMANN-WIGNER EN PRESENCIA DE CAMPO ELECTROMAGNETICO.

Es bien sabido que las ecuaciones (10.9) de Proca son compatibles entre sí. Como las ecuaciones de Proca son equivalentes a las (10.3) de BW, no necesita redemostrarse la compatibilidad de estas.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- 1) V. Bargmann and E. P. Wigner, Proc. Nat. Acad. Sci., 34, 221 (1948).
- 2) J. F. Belinfante, Physica, 6, 849 (1939).
- 3) J. F. Belinfante, Physica, 6, 870 (1939).
- 4) J. F. Belinfante, Physica, 6, 887 (1939).
- 5) N. N. Bogolubov and D. V. Shirkov, Introduction to the theory of quantized fields. Interscience Publishers Inc (1959).
- 6) G. G. Bollini and J. J. Giambiagi, Nuovo Cimento, 21, 107 (1961).
- 7) F. Booth and A. H. Wilson, Proc. of the Royal Soc. (London) A 175, 482 (1940).
- 8) K. M. Case, Phys. Rev. 95, 1323 (1954).
- 9) L. de Broglie, Theorie Générale des Particules a Spin (Methode de fusion), Gauthier-Villars (1942).
- 10) H. Feshbach and F. Villars, Rev. of Mod. Phys., 30, 24 (1958).
- 11) L. L. Foldy and S. A. Wouthuysen, Phys. Rev. 78, 29 (1950).
- 12) T. J. Giambiagi and J. Thomno, Notas de Fisica (C. B. P. F.) 14, 1 (1954).
- 13) T. J. Giambiagi, Nuovo Cimento 16, 202 (1960).
- 14) W. Heitler, Proc. Roy. Irish Acad. 49, 1 (1943).
- 15) N. Kemmer, Proc. Roy. Soc. A 173, 91 (1939).
- 16) J. Leite Lopes, Inversion Operations in Quantum Field Theory, Univ. de Br. As., F. C. E. N., Contribuciones Cientificas, Serie Física, 1, 147 (1960).
- 17) J. Leite Lopes, Lectures on Relativistic Wave Equations, Monografias de Fisica, 9 (1961), C. B. P. F.
- 18) A. Messiah, Mecanique Quantique, Tomo 2, Serie. XX-5, Dunod (1960).
- 19) N. Shōno and N. Oda, Progress of Theor. Phys., 4, 358 (1949).
- 20) W. Pauli, Ann. Inst. Henri Poincaré 6, 109 (1936).
- 21) W. Pauli, Rev. of the Mod. Phys., 13, 203 (1941).
- 22) W. Pauli, Rev. of the Mod. Phys. 15, 175 (1943).
- 23) A. L. Proca, J. Phys. et Radium, 7, 347 (1936).
- 24) A. L. Proca, J. Phys. et Radium, 9, 61 (1938).
- 25) Sakata and Taketani, Proc. Phys. Mat. Soc. (Japan) 22, 757 (1940).
- 26) Sakata and Taketani, Scient. Papers of the Inst. of Phys. and Chem. Research, Tokyo, 38, 1 (1940). Ver la exposicion de Heitler¹⁴.
- 27) S. Tanaka, Soryushiron Kenkyu 1, 15 (1949).
- 28) S. Tanaka, Progress of Theor. Phys., 6, 267 (1951).
- 29) W. E. Thirring, Principles of Quantum Electrodynamics, Academic Press (1958).
- 30) G. Wentzel, Quantum Theory of Fields, Interscience Publishers Inc (1949).

[Handwritten signature]

[Handwritten signature: G. G. Bollini]

A P E N D I C E S

A2-1

DEMOSTRACION DE QUE (2.3-b) \iff (2.3-c)*

a) (2.3-b) \implies (2.3-c):

Supongo válida la (2.3-b). Como

$$\frac{1}{2}(\mathbf{I} - \gamma_{(1)}^{\circ} \gamma_{(2)}^{\circ}) = \mathbf{I} - \frac{1}{2}(\mathbf{I} + \gamma_{(1)}^{\circ} \gamma_{(2)}^{\circ}), \text{ la (2.3-b) implica}$$

$$\Psi = \frac{1}{2}(\mathbf{I} + \gamma_{(1)}^{\circ} \gamma_{(2)}^{\circ}) \Psi = \frac{(\vec{\gamma}_{(1)} + \vec{\gamma}_{(2)}) \cdot \vec{p}}{4m} \frac{1}{2}(\mathbf{I} + \gamma_{(1)}^{\circ} \gamma_{(2)}^{\circ}) \Psi \quad (\text{A2-1.1})$$

Desarrollando, (A-2-1.1) $\cdot 2m$

$$\Psi = \frac{1}{2} \Psi + \frac{(\vec{\gamma}_{(1)} + \vec{\gamma}_{(2)}) \cdot \vec{p}}{4m} \Psi + \frac{(\gamma_{(1)}^{\circ} \vec{\alpha}_{(1)} + \gamma_{(2)}^{\circ} \vec{\alpha}_{(2)}) \cdot \vec{p}}{4m} \Psi \quad (\text{A2-1.2})$$

Por otro lado desarrollando

$$\frac{1}{4m} (H_{(1)} + H_{(2)}) (\gamma_{(1)}^{\circ} + \gamma_{(2)}^{\circ}) \Psi = \frac{1}{2}(\mathbf{I} + \gamma_{(1)}^{\circ} \gamma_{(2)}^{\circ}) \Psi + \frac{1}{4m} (-\vec{\gamma}_{(1)} + \gamma_{(1)}^{\circ} \vec{\alpha}_{(1)} + \gamma_{(2)}^{\circ} \vec{\alpha}_{(2)} + \vec{\gamma}_{(2)}) \cdot \vec{p} \Psi \quad (\text{A2-1.3})$$

En (A2-1.2) resulta que toda Ψ que cumple (2.3-b) es tal que

$$\Psi = \frac{1}{4m} (H_{(1)} + H_{(2)}) (\gamma_{(1)}^{\circ} + \gamma_{(2)}^{\circ}) \Psi ;$$

Pero como $H^2 = p^2$,

$$H_{(1)} \Psi = \frac{1}{4m} (p^2 + H_{(1)} H_{(2)}) (\gamma_{(1)}^{\circ} + \gamma_{(2)}^{\circ}) \Psi ; \quad (\text{A2-1.4})$$

$$H_{(2)} \Psi = \frac{1}{4m} (p^2 + H_{(1)} H_{(2)}) (\gamma_{(1)}^{\circ} + \gamma_{(2)}^{\circ}) \Psi .$$

$$\therefore H_{(1)} \Psi = H_{(2)} \Psi$$

que es la (2.3-c).

Q.E.D.

b) (2.3-c) \implies (2.3-b):

Supongo válida la (2.3-c), de donde

$$(\mathbf{I} - \gamma_{(1)}^{\circ} \gamma_{(2)}^{\circ}) (\gamma_{(1)}^{\circ} H_{(1)} + \gamma_{(2)}^{\circ} H_{(2)}) \Psi = (\mathbf{I} - \gamma_{(1)}^{\circ} \gamma_{(2)}^{\circ}) (\gamma_{(1)}^{\circ} + \gamma_{(2)}^{\circ}) (H_{(1)} \Psi) =$$

$$= (\gamma_{(1)}^{\circ} + \gamma_{(2)}^{\circ} - \gamma_{(1)}^{\circ} \gamma_{(2)}^{\circ} - \gamma_{(2)}^{\circ} \gamma_{(1)}^{\circ}) (H_{(1)} \Psi) = 0$$

\therefore (2.3-c) \implies (2.3-a)

Pero un sencillo cálculo muestra que

$$(2.3-a) \implies (2.3-b) \quad \therefore \quad (2.3-c) \implies (2.3-b) \quad (\text{Q.E.D.})$$

A2-2

DEMOSTRACION DE (2.12) Y (2.13).

$$\text{Si } \Psi \in \mathcal{E}^{\text{sim}} \text{ es } \Psi_{rs} = \Psi_{sr} \quad (\text{A2-2.1})$$

Como $A_{ij,rs} = B_{ij,sr}$

permutando índices mudos es

$$(A \Psi)_{ij} = A_{ij,rs} \Psi_{rs} = B_{ij,sr} \Psi_{rs} = B_{ij,sr} \Psi_{sr}$$

usando (A2-2.1),

$$(A \Psi)_{ij} = B_{ij,sr} \Psi_{sr} = B_{ij,rs} \Psi_{rs} = (B \Psi)_{ij} \quad \text{o sea}$$

$$A \stackrel{\mathcal{E}^{\text{sim}}}{=} B$$

Para demostrar (2.13) emplear (2.3-c).

* " \implies " significa "implica"; " $a \iff b$ " significa " $a \implies b$ y $b \implies a$ "

A2-3

DEMOSTRACION DE (2.17)

a) Pruebo que $M \stackrel{\sim}{\underset{\mathcal{A}}{\text{esc}}} N \Rightarrow (\Psi, M\Phi) = (\Psi, N\Phi)$ para todo $\Psi, \Phi \in \mathcal{A}$

Defino

$$f(\Psi, \Phi) = (\Psi, M\Phi) \quad ; \quad g(\Psi, \Phi) = (\Psi, N\Phi) \quad (A2-3.1)$$

Por (2.16) se que

$$f(\Psi, \Phi) = g(\Psi, \Phi) \quad \text{para todo } \Psi \in \mathcal{A}. \quad (A2-3.2)$$

Lo que debo probar es que

$$f(\Psi, \Phi) = g(\Psi, \Phi) \quad " \quad " \quad \Psi, \Phi \in \mathcal{A}.$$

Como $f(\Psi, \Phi)$ es lineal en Φ y antilineal en Ψ , vale la conocida identidad

$$4 f(\Psi, \Phi) = f(\Psi + \Phi, \Psi + \Phi) - f(\Phi - \Psi, \Phi - \Psi) + if(\Phi + i\Psi, \Phi + i\Psi) - if(\Phi - i\Psi, \Phi - i\Psi) \quad (A2-3.3)$$

Análogamente,

$$4g(\Psi, \Phi) = g(\Psi + \Phi, \Psi + \Phi) - g(\Phi - \Psi, \Phi - \Psi) + ig(\Phi + i\Psi, \Phi + i\Psi) - ig(\Phi - i\Psi, \Phi - i\Psi) \quad (A2-3.4)$$

Pero (A2-3.2) $\Rightarrow f(\Psi + \Phi, \Psi + \Phi) = g(\Psi + \Phi, \Psi + \Phi)^*$, etc., de donde término a término los 2os. miembros de (A2-3.3) y (A2-3.4) son iguales; ppr lo tanto son iguales los primeros miembros. Luego se cumple

$$f(\Psi, \Phi) = g(\Psi, \Phi) \quad \text{para toda } \Psi, \Phi \in \mathcal{A}$$

o sea se cumple

$$(\Psi, M\Phi) = (\Psi, N\Phi) \quad " \quad " \quad " \quad " \quad " \quad . \quad \text{Q.E.D.}$$

b) La implicación opuesta es trivial. Por lo tanto, queda probada la (2.17) en los dos sentidos.

A2-4

DEMOSTRAREMOS QUE EXISTE Ψ , O PERTENECIENTE A \mathcal{W} TAL QUE

$$(\Psi, \Psi) = 0 \quad (A2-4.1)$$

En elCap. 4 se demostrará que si descomponemos las soluciones de "energía" positiva $\Psi^{(+)}$ y negativa $\Psi^{(-)}$ en ondas planas monocromáticas,

$$\Psi^{(+)}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d^3 p}{\sqrt{2p_0}} a(\mathbf{r}, \vec{p}) u(\mathbf{r}, \vec{p}) \cdot e^{-ipx} \quad (A2-4.2)$$

$$\Psi^{(-)}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d^3 p}{\sqrt{2p_0}} b^*(\mathbf{r}, \vec{p}) v(\mathbf{r}, \vec{p}) \cdot e^{-ipx}$$

entonces en la "teoría número o" es

$$\left. \begin{aligned} (\Psi^{(+)}, \Psi^{(+)}) &= \int d^3 p \sum_{\mathbf{r}} |a(\mathbf{r}, \vec{p})|^2 ; \\ (\Psi^{(-)}, \Psi^{(-)}) &= -\int d^3 p \sum_{\mathbf{r}} |b(\mathbf{r}, \vec{p})|^2 ; \\ (\Psi^{(+)}, \Psi^{(-)}) &= (\Psi^{(-)}, \Psi^{(+)}) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (A2-4.3)$$

+Para Ψ, Φ arbitrarias $\in \mathcal{A}$.

Aplicando el principio de superposición formamos la solución

particular

$$\psi = \psi^{(+)} + \psi^{(-)} \quad \text{con} \quad a(r, \vec{p}) = b(r, \vec{p}) \quad (\text{A2-4.4})$$

lo cual es siempre posible en la teoría número 0. Entonces,

$$(\psi, \psi) = (\psi^{(+)}, \psi^{(+)} + (\psi^{(+)}, \psi^{(-)}) + (\psi^{(-)}, \psi^{(+)} + (\psi^{(-)}, \psi^{(-)}) = 0.$$

Q.E.D.

Nota: Como toda $\psi \in W$ pertenece a \mathcal{E}^{sim} y a \mathcal{E} , también en estos últimos espacios existen vectores ortogonales a si mismos.

A2-5

CONTRA EJEMPLO: OPERADORES EQUIVALENTES, PERO DIFERENTES, EN \mathcal{E}^{sim} ; DEMOSTRAMOS QUE (ver (2.5))

$$\Lambda^{\text{II}} \underset{\mathcal{E}^{sim}}{\sim} 0 \quad (\text{A2-5.1})$$

PESE A QUE

$$\Lambda^{\text{II}} \underset{\mathcal{E}^{sim}}{\neq} \mathcal{E}^{sim} \quad (\text{A2-5.2})$$

(ponemos " $\mathcal{E}^{sim} \mathcal{E}^{sim}$ " porque Λ^{II} no se sale de \mathcal{E}^{sim} al operar sobre \mathcal{E}^{sim}).

a) Prueba de la (A2-5.1):

$$(\psi, \Lambda^{\text{II}} \psi) = \psi^\dagger \gamma_{(2)}^0 \frac{1}{2} (\mathbf{I} - \gamma_{(1)}^0 \gamma_{(2)}^0) \psi = \frac{1}{2} \psi (\gamma_{(2)}^0 - \gamma_{(1)}^0) \psi \quad ; \quad (\text{A2-5.3})$$

pero como $\psi \in \mathcal{E}^{sim}$ es $\psi = \psi$

$$\therefore \psi^\dagger \gamma_{(1)}^0 \psi = \psi_{(1)1}^* \gamma_{(1)1}^0 \psi_{(1)1} \quad (\text{A2-5.4})$$

$$\therefore (\psi, \Lambda^{\text{II}} \psi) = 0$$

$$\text{Pero obviamente } (\psi, 0 \psi) = 0 \quad \therefore (\psi, \Lambda^{\text{II}} \psi) = (\psi, 0 \psi),$$

o sea es cierta la (A2-5.1).

b) Prueba de (A2-5.1).

Utilizando la representación (2.9-b) es evidente que

$$\psi^{\text{II}} \neq 0 \quad \therefore \Lambda^{\text{II}} \psi = \psi^{\text{II}} \neq 0. \quad \text{Q.E.D.}$$

A2-6
DEMOSTRACION DE FORMULAS DE LA SECCION 2.d-4.

a) Demostración de (2.30)

$$a_1) \text{ Demostración de } \gamma_{(1)}^0 M \underset{\mathcal{A}}{\sim} \gamma_{(1)}^0 N \Rightarrow M \underset{\mathcal{A}}{\overset{(\sim)}{\mathcal{A}}} N. \quad (\text{A2-6.1})$$

$$\text{Por (2.23) si } \gamma_{(1)}^0 M \underset{\mathcal{A}}{\sim} \gamma_{(1)}^0 N \text{ es } \psi^\dagger \gamma_{(1)}^0 M \psi = \psi^\dagger \gamma_{(1)}^0 N \psi \quad (\text{A2-6.2})$$

para todo $\psi, \psi \in \mathcal{A}$ (pues $\psi^\dagger \gamma_{(1)}^0 = \psi^\dagger \gamma_{(1)}^0 \gamma_{(2)}^0 \gamma_{(1)}^0 = \psi^\dagger \gamma_{(2)}^0$);

basta usar (2.20) para ver que $M \underset{\mathcal{A}}{\overset{(\sim)}{\mathcal{A}}} N$ Q.E.D.

$$a_2) \text{ Demostración de } M \underset{\mathcal{A}}{\overset{(\sim)}{\mathcal{A}}} N \Rightarrow \gamma_{(1)}^0 M \underset{\mathcal{A}}{\sim} \gamma_{(1)}^0 N.$$

Se efectúa como en a_1 utilizando (2.20).

$$a_3) \text{ Demostración de que } M \underset{\mathcal{A}}{\overset{(\sim)}{\mathcal{A}}} N \Rightarrow M \underset{\mathcal{A}}{\overset{(\sim)}{\mathcal{A}}} N.$$

Basta integrar (2.18-b) y comparar con (2.16).

Equivalentes escalar.

b) Demostración de (2.31).

Sea $\Psi \in \mathcal{E}^{sim}$; es

$$\overline{\Psi}_{A_{(1)} B_{(2)}} \Psi = \overline{\Psi}_{i_1 j_1} A_{i_1 j_1} B_{i_2 j_2} \Psi_{j_1 j_2} \quad (A2-6.3)$$

$$\Psi_{A_{(1)} B_{(2)}} \Psi = \Psi_{j_1 j_2} A_{i_1 j_1} B_{i_2 j_2} \Psi_{j_1 j_2}$$
; mudando $i_1 \leftrightarrow i_2$, $j_1 \leftrightarrow j_2$ y usando
 luego $\overline{\Psi}_{i_1 j_1} = \overline{\Psi}_{j_1 i_1}$, $\Psi_{j_1 j_2} = \Psi_{j_2 j_1}$ se obtiene

$$\overline{\Psi}_{A_{(1)} B_{(2)}} \Psi = \overline{\Psi}_{i_2 j_2} A_{i_2 j_2} B_{i_1 j_1} \Psi_{j_2 j_1}$$
. Entonces, con (A2-6.3) queda demostrada la (2.31). Análogamente se demuestra la (2.31').

c) Demostración de (2.32-a)

Por (2.31), $(\delta^0 A)_{(1)} B_{(2)} \in \mathcal{E}^{sim}(\delta^0 A)_{(2)} B_{(1)}$,

$$\overline{\Psi}_{\delta^0 A_{(1)} B_{(2)}} \Psi = \overline{\Psi}_{\delta^0 A_{(2)} B_{(1)}} \Psi, \quad \Psi_{\delta^0 A_{(2)} B_{(1)}} \Psi = \Psi_{\delta^0 A_{(1)} B_{(2)}} \Psi,$$

$$(\Psi_{\delta^0 A_{(1)} B_{(2)}} \Psi) = (\Psi_{\delta^0 A_{(2)} B_{(1)}} \Psi),$$

 se cumple la (2.32-a).

d) Demostración de (2.32-b) y (c).

Análoga a A2-5 con $\mathcal{E}^{sim} \rightarrow \mathcal{E}_{sp}^{sim}$

e) Demostración de (2.33-a)

Usar (2.32-a) y la segunda (2.30).

f) Demostración de (2.33-b) y (c)

Ver A2-5.

g) Demostración de (2.33-d) y (2.33-f).

Usaremos la noción de conjugado pseudohermitiano principal $\overline{A} = \delta^0 A \delta^0$ de un operador A , que se introduce en Secc. 2.e.

Por (2.3-b) $(\Psi, H_{(1)} \Psi) = (\Psi, H_{(1)} \Psi)$ si $\Psi \in W$; (A2-6.4)

por Secc. 2.e,

$$\begin{aligned} (\Psi, H_{(1)} \Psi) &= (\overline{H}_{(1)} \Psi, \Psi) = (\delta^0_{(1)} H_{(1)} \delta^0_{(2)} \Psi, \Psi) = (\delta^0_{(2)} H_{(1)} \delta^0_{(1)} \Psi, \Psi) = \\ &= (\overline{H}_{(2)} \Psi, \Psi). \end{aligned} \quad (A2-6.5)$$

Nuevamente por (2.3-b),

$$(H_{(1)} \Psi, \Psi) = (H_{(2)} \Psi, \Psi) \quad (A2-6.6)$$

nuevamente por Secc. 2.e,

$$\begin{aligned} (H_{(1)} \Psi, \Psi) &= (\Psi, \overline{H}_{(1)} \Psi) = (\Psi, \delta^0_{(2)} H_{(1)} \delta^0_{(1)} \Psi) = (\Psi, \delta^0_{(1)} H_{(2)} \delta^0_{(2)} \Psi) = \\ &= (\Psi, [-\vec{\alpha}_{(1)} \cdot \vec{p} + \delta^0_{(1)} m] \Psi). \end{aligned} \quad (A2-6.7)$$

De (A2-6.4), (5), (6) y (7),

$$\begin{aligned} (\Psi, [-\vec{\alpha}_{(1)} \cdot \vec{p} + \delta^0_{(1)} m] \Psi) &= (\Psi, [-\vec{\alpha}_{(2)} \cdot \vec{p} + \delta^0_{(2)} m] \Psi) \quad \bullet \text{ sea} \\ (\Psi, \vec{\alpha}_{(1)} \cdot \vec{p} \Psi) &= 0 \quad \bullet \quad \vec{\alpha}_{(2)} \cdot \vec{p} \approx 0. \end{aligned} \quad (A2-6.8-a)$$

Es $\vec{\alpha}_{(1)} \cdot \vec{p} = H_{(1)} - m \delta^0_{(1)} = H_{(2)} - m \delta^0_{(2)} = m \delta^0_{(2)} + \vec{\alpha}_{(2)} \cdot \vec{p} - m \delta^0_{(1)}$;

con (A2-6.8-a) y (2.33-g) $\vec{\alpha}_{(1)} \cdot \vec{p} \approx 0$. (A2-6.8-b)

Como por (2.32) es

$$(\Psi, \vec{\alpha}_{(1)} \cdot \vec{p} \Psi) = (\Psi, \vec{\alpha}_{(2)} \cdot \vec{p} \Psi), \quad (A2-6.9)$$

+que se demuestra independientemente en (1).

integrando ambos miembros tenemos que (A2-6.8) $\Rightarrow (\Psi, \vec{\alpha}_{(1)} \cdot \vec{p} \vec{\chi}_{(1)}^0 \Psi) = 0$

o sea
$$\vec{\chi}_{(1)}^0 \cdot \vec{p} \vec{\chi}_{(1)}^0 \sim 0. \quad (A2-6.10-a)$$

Análogamente

$$\vec{\chi}_{(1)}^0 \cdot \vec{p} \vec{\chi}_{(1)}^0 \sim 0. \quad (A2-6.10-b)$$

Q.E.D.

Notas:

1) La 2a. (2.33-d) $(\Psi, H_{(1)} \Psi) = (\Psi, H_{(2)} \Psi) = (\Psi, m \vec{\chi}_{(2)}^0 \Psi)$
 o sea $H_{(1)} \sim m \vec{\chi}_{(2)}^0 \quad (A2-6.11)$

y, por otra parte,

2)
$$\int \Psi^\dagger \vec{\chi}_{(1)}^0 H_{(1)} \Psi d^3x = \int \Psi^\dagger m (\vec{\chi}_{(2)}^0) (\vec{\chi}_{(1)}^0) \Psi d^3x = m \int \Psi^\dagger \Psi d^3x \quad (A2-6.12)$$

Esta última relación fué verificada al trasladar ambos miembros a la formulación de Preca (Cap. 7): ambos miembros se trasladan en una misma expresión.

h) Demostración de (2.33-e).

Sea $\vec{p} = p^i + \frac{1}{2} p^2$; usando la representación (2.6) es

$$\vec{\alpha}_{(1)} \cdot \vec{p} = \begin{pmatrix} p^3 & p_- \\ p_+ & -p^3 \end{pmatrix} \quad (A2-6.13)$$

o sea para spinores 4×1 es

$$\vec{\alpha}_{(1)} \cdot \vec{p} \Psi = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \vec{\alpha}_{(1)} \cdot \vec{p} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \vec{\alpha}_{(1)} \cdot \vec{p} & \dots & 0 & \dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \\ \dots \\ \Psi_3 \\ \Psi_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p^3 \Psi_3 + p_- \Psi_4 \\ p_+ \Psi_3 - p^3 \Psi_4 \\ p^3 \Psi_1 + p_- \Psi_2 \\ p_+ \Psi_1 - p^3 \Psi_2 \end{pmatrix} \quad (A2-6.14)$$

Como $(\vec{\alpha}_{(1)} \cdot \vec{p})$ sólo actúa en el segundo índice de

$$\Psi = \begin{pmatrix} \Psi_{11} & \Psi_{12} & \Psi_{13} & \Psi_{14} \\ \Psi_{21} & \Psi_{22} & \Psi_{23} & \Psi_{24} \\ \Psi_{31} & \Psi_{32} & \Psi_{33} & \Psi_{34} \\ \Psi_{41} & \Psi_{42} & \Psi_{43} & \Psi_{44} \end{pmatrix} \in \mathcal{E} \quad (A2-6.15)$$

se obtiene empleando (A2-6.14)

$$\vec{\alpha}_{(1)} \cdot \vec{p} \Psi = \begin{pmatrix} p^3 \Psi_{13} + p_- \Psi_{14} & p_+ \Psi_{13} - p^3 \Psi_{14} & p^3 \Psi_{11} + p_- \Psi_{12} & p_+ \Psi_{11} - p^3 \Psi_{12} \\ p^3 \Psi_{23} + p_- \Psi_{24} & p_+ \Psi_{23} - p^3 \Psi_{24} & p^3 \Psi_{21} + p_- \Psi_{22} & p_+ \Psi_{21} - p^3 \Psi_{22} \\ p^3 \Psi_{33} + p_- \Psi_{34} & p_+ \Psi_{33} - p^3 \Psi_{34} & p^3 \Psi_{31} + p_- \Psi_{32} & p_+ \Psi_{31} - p^3 \Psi_{32} \\ p^3 \Psi_{43} + p_- \Psi_{44} & p_+ \Psi_{43} - p^3 \Psi_{44} & p^3 \Psi_{41} + p_- \Psi_{42} & p_+ \Psi_{41} - p^3 \Psi_{42} \end{pmatrix} \quad (A2-6.16)$$

Evidentemente, si solamente impone $\Psi \in \mathcal{E}$, es $\vec{\alpha}_{(1)} \cdot \vec{p} \Psi \neq 0$

o sea $\vec{\alpha}_{(1)} \cdot \vec{p} \neq 0$; restringo: sea $\Psi \in \mathcal{E}^{sim}$ o sea $\Psi_{12} = \Psi_{21}$, etc. pero aún así

$\vec{\alpha}_{(2)} \cdot \vec{p} \Psi \neq 0 \quad \therefore \quad \vec{\alpha}_{(2)} \cdot \vec{p} \neq 0$; restringe nuevamente: $\Psi \in W$; por la observación que precede a (2.64) se ve que la restricción solamente liga los $\Psi_{ij} \in \mathcal{E}^{sim} \Pi$, o sea (ver (2.9-b)) los Ψ_{ij} del tipo 13, 14, 23, 24, 31, 41, 32, 42; los restantes son arbitrarias; por ejemplo, Ψ_{11} es arbitrario y Ψ_{12} también; esto implica que al menos el elemento 14 de (A2-6.16) es diferente de cero, con lo cual es $\vec{\alpha}_{(2)} \cdot \vec{p} \Psi \neq 0 \quad \therefore$

$$\vec{\alpha}_{(2)} \cdot \vec{p} \neq 0 \quad \text{Q.E.D.}$$

1) Demostración de (2.33-g).

Basta emplear (2.33-a) y (2.27-b).

A2-7

DEMOSTRACION DE QUE (2.46-e) SE SATISFACE CON (2.46-f).

$$(2.46-f) \Rightarrow (\Psi^{(1)}, \Lambda_{\lambda_1}^{\lambda_2 \lambda} \varphi^{(2)}) = (\Psi^{(1)}, \Lambda_{\lambda_1}^{\lambda_2 \lambda} \varphi^{(2)})$$

$$\therefore (\Psi^{(1)}, \Lambda_{\lambda_1}^{\lambda_2 \lambda} \varphi^{(2)}) = (\Lambda_{\lambda_1}^{\lambda_2 \lambda} \Psi^{(1)}, \varphi^{(2)}) =$$

$$= (0, \varphi^{(2)}) = 0.$$

Además,

$$\Lambda_{\lambda_1}^{\lambda_2 \lambda} \varphi^{(1)} = \varphi^{(2)}$$

$$(\Psi^{(1)}, \varphi^{(1)}) = 0. \quad \text{Q.E.D.}$$

A2-8

DEMOSTRACION DE (2.47).

Es

$$\overline{\delta_{(1)}^0 \delta_{(2)}^0} = \delta_{(1)}^0 (\delta_{(1)}^0 \delta_{(2)}^0)^+ \delta_{(2)}^0 = \delta_{(1)}^0 (\delta_{(1)}^0 \delta_{(2)}^0) \delta_{(2)}^0 = \delta_{(1)}^0 \delta_{(2)}^0$$

\therefore en (2.5),

$$\overline{\Lambda^I} = \Lambda^I ; \quad \overline{\Lambda^{II}} = \Lambda^{II} \quad \text{Q.E.D.}$$

A2-9

DEMOSTRACION DE (2.52).

a) En primer lugar no se cumple la condición suficiente (2.46-f):

En efecto,

$$\overline{H_{(1)}} = \delta_{(1)}^0 H_{(2)}^+ \delta_{(2)}^0 = \delta_{(1)}^0 H_{(2)} \delta_{(2)}^0 = - \vec{\alpha}_{(2)} \cdot \vec{p} + m \delta_{(2)}^0 = H_{(2)} - 2 \vec{\alpha}_{(2)} \cdot \vec{p} ; \quad \overline{H_{(1)}} = H_{(1)} .$$

$$\therefore \quad \Lambda_F^{W \mathcal{E}^{sim}} = \frac{1}{2} (\mathbf{I} + \frac{H_{(1)} H_{(2)}}{p_0^2}) = \frac{1}{2} (\mathbf{I} + \frac{H_{(1)} H_{(2)}}{p_0^2}) - \frac{\vec{\alpha}_{(2)} \cdot \vec{p} H_{(1)}}{p_0^2}$$

Ahora: El término $\frac{\vec{\alpha}_{(2)} \cdot \vec{p} H_{(1)}}{p_0^2}$ es equivalente escalar a 0 en W (por (2.33)) pero no lo es en \mathcal{E}^{sim} , que es donde necesitaríamos que lo fuera para que se cumpliera (2.46-f):

$$\Lambda_F^{W \mathcal{E}^{sim}} \quad \Lambda_F^{W \mathcal{E}^{sim}}$$

b) En segundo lugar, existe un ejemplo de un par de vectores, el uno de W, el otro de F tales que vale (2.52):

Usamos resultados del Cap. 4° (que se demuestran independientemente);

si ponemos

$$\Psi(\vec{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2} \sqrt{z_0}} \int d^3 p \mathbf{a}(\vec{p}) \mathbf{u}_+(2, \vec{p}) e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}} \quad (A2-9.2)$$

$$\Psi(\vec{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2} \sqrt{z_0}} \int d^3 p \mathbf{c}(\vec{p}) \mathbf{u}_F(1, 1, \vec{p}) e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}}$$

entonces es (cf. (4.21) y Secc. 4.b-1):

$$\Psi \in \mathcal{W}, \quad \Psi \in \mathcal{F} \quad (A2-9.3)$$

Por otra parte,

$$(\Psi, \Psi) = \int \Psi^\dagger \gamma_{0\nu} \Psi d^3 x = \int d^3 p \mathbf{a}^\dagger(\vec{p}) \mathbf{c}(\vec{p}) (\mathbf{u}_+(2, \vec{p}), \mathbf{u}_F(1, 1, \vec{p}))_{sp}. \quad (A2-9.4)$$

Usando las definiciones A de r y \mathbf{u}_F (cf. A4-1 y A4-2) se puede

obtener tras algún cálculo,

$$(\mathbf{u}_+(2, \vec{p}), \mathbf{u}_F(1, 1, \vec{p}))_{sp} = -R p^3 / m \quad (A2-9.5)$$

$$\therefore (\Psi, \Psi) = -\frac{1}{z_0 m} \int d^3 p \mathbf{a}^\dagger(\vec{p}) \mathbf{c}(\vec{p}) p^3. \quad (A2-9.6)$$

Basta ahora elegir

$$\mathbf{a}(\vec{p}) = p^3 \mathbf{c}(\vec{p}) \quad \text{y} \quad \mathbf{c}(\vec{p}) \neq 0 \quad (A2-9.7)$$

para que sea

$$(\Psi, \Psi) < 0 \quad \therefore \quad (\Psi, \Psi) \neq 0 \quad \text{Q.E.D.}$$

A2-10

SE DEMUESTRA QUE LAS FORMULAS (2.58-a), ..., (2.58-g) DEFINEN AL MISMO

OPERADOR $\hat{\Lambda}_\perp^{W \in Sim}$.

a) $(2.58-a) \iff (2.58-f)$:

Fue demostrado en (A2-1.2) (demostración invertible).

b) $(2.58-e) \iff (2.58-f)$

Idem en (A2-1.3).

c) $(2.58-a) \iff (2.58-b)$

Es inmediato recordando que

$$\vec{\gamma} \vec{\gamma} = -r \vec{\gamma} \implies \hat{\Lambda}^\Pi(\vec{\gamma}_{(1)} + \vec{\gamma}_{(2)}) = (\vec{\gamma}_{(1)} + \vec{\gamma}_{(2)}) \hat{\Lambda}^I. \quad (A2-10.1)$$

d) $(2.58-c) \iff (2.58-e)$

Es inmediato teniendo en cuenta que

$$\mathbf{H}^2 = p_0^2 \implies (\mathbf{I} + \mathbf{H}_{(1)} \mathbf{H}_{(2)}) (\mathbf{H}_{(1)} \gamma_{(1)}^0 + \mathbf{H}_{(2)} \gamma_{(2)}^0) = \mathbf{H}_{(1)} \gamma_{(1)}^0 + \mathbf{H}_{(2)} \gamma_{(2)}^0 + \mathbf{H}_{(2)} \mathbf{K}_{(1)}^* \gamma_{(1)}^0 + \mathbf{H}_{(1)} \mathbf{K}_{(2)}^* \gamma_{(2)}^0 = \quad (A2-10.2)$$

$$= (\mathbf{H}_{(1)} + \mathbf{H}_{(2)}) (\gamma_{(1)}^0 + \gamma_{(2)}^0). \quad (A2-10.3)$$

e) $(2.58-c) \iff (2.58-d)$:

Ver (A2-10.2).

f) $(2.58-g) \iff (2.58-f)$:

$$\begin{aligned} \mathbf{I} - \frac{1}{4m} (\gamma_{(1)}^0 - \gamma_{(2)}^0) (\mathbf{H}_{(1)} - \mathbf{H}_{(2)}) &= \mathbf{I} - \frac{1}{4m} (\gamma_{(1)}^0 - \gamma_{(2)}^0) \mathbf{H} (\gamma_{(1)}^0 - \gamma_{(2)}^0) = \frac{1}{4m} (\gamma_{(1)}^0 - \gamma_{(2)}^0) (\vec{\alpha}_{(1)} - \vec{\alpha}_{(2)}) \vec{p} \\ &= \mathbf{I} - \frac{1}{2} (2\mathbf{I} - 2\gamma_{(1)}^0 \gamma_{(2)}^0) = \frac{1}{4m} (\gamma_{(1)}^0 - \gamma_{(2)}^0) (\vec{\alpha}_{(1)} - \vec{\alpha}_{(2)}) \vec{p} \\ &= \frac{\mathbf{I}}{2} + \frac{\gamma_{(1)}^0 \gamma_{(2)}^0}{2} = \frac{1}{4m} (\gamma_{(1)}^0 + \gamma_{(2)}^0) \cdot \vec{p} + \frac{1}{4m} (\gamma_{(1)}^0 \vec{\alpha}_{(1)} + \gamma_{(2)}^0 \vec{\alpha}_{(2)}) \cdot \vec{p} \\ &\quad \text{Q.E.D.} \end{aligned}$$

A2-11

DEMOSTRACION DE (2.61).

a) Demostración de (2.61-a).

Basta demostrar

$$\left(\bigwedge_{\perp}^{W \varepsilon^{sim}} \right)^2 = \bigwedge_{\perp}^{W \varepsilon^{sim}} \tag{A2-11.1}$$

pues las restantes son consecuencias de ésta.

$$\left(\bigwedge_{\perp}^{W \varepsilon^{sim}} \right)^2 = \left[\mathbf{I} - \frac{1}{2m} (\vec{\gamma}_{(1)} + \vec{\gamma}_{(2)}) \cdot \vec{p} \right] \mathbf{A}^I \left[\mathbf{A}^I - \mathbf{A}^{II} \frac{(\vec{\gamma}_{(1)} + \vec{\gamma}_{(2)}) \cdot \vec{p}}{2m} \right] \tag{A2-11.2}$$

Con (2.5-d),

$$\left(\bigwedge_{\perp}^{W \varepsilon^{sim}} \right)^2 = \left[\mathbf{I} - \frac{1}{2m} (\vec{\gamma}_{(1)} + \vec{\gamma}_{(2)}) \cdot \vec{p} \right] (\mathbf{A}^I - 0)$$

que es la (A2-11.1) (ver 2.58-b).

Q.E.D.

b) Demostración de (2.61-b)

$$\text{En (A2-8) vimos que } \vec{\gamma}_{(1)}^c \vec{\gamma}_{(2)}^c = \vec{\gamma}_{(1)}^o \vec{\gamma}_{(2)}^o \tag{A2-11.3}$$

De (2.40-b),

$$\begin{aligned} \vec{\gamma}_{(1)}^c &= \vec{\gamma}_{(1)}^o \vec{\gamma}_{(1)}^c + \vec{\gamma}_{(2)}^o \vec{\gamma}_{(2)}^c = -\vec{\gamma}_{(2)}^o \vec{\gamma}_{(1)}^o \vec{\gamma}_{(2)}^o = -\vec{\gamma}_{(1)}^o \\ \vec{\gamma}_{(2)}^c &= \vec{\gamma}_{(2)}^o \vec{\gamma}_{(2)}^c + \vec{\gamma}_{(1)}^o \vec{\gamma}_{(1)}^c = -\vec{\gamma}_{(1)}^o \vec{\gamma}_{(2)}^o \vec{\gamma}_{(1)}^o = +\vec{\gamma}_{(2)}^o \\ \vec{\alpha}_{(1)}^c &= \vec{\alpha}_{(2)}^o \vec{\alpha}_{(1)}^c + \vec{\alpha}_{(2)}^o \vec{\alpha}_{(2)}^c = \vec{\alpha}_{(2)}^o \vec{\alpha}_{(1)}^o \vec{\alpha}_{(2)}^o = +\vec{\alpha}_{(1)}^o \\ \vec{\alpha}_{(2)}^c &= \vec{\alpha}_{(2)}^o \vec{\alpha}_{(2)}^c + \vec{\alpha}_{(1)}^o \vec{\alpha}_{(1)}^c = \vec{\alpha}_{(1)}^o \vec{\alpha}_{(2)}^o \vec{\alpha}_{(1)}^o = -\vec{\alpha}_{(2)}^o \\ \vec{\alpha}_{(1)}^o \vec{\alpha}_{(2)}^o &= +\vec{\alpha}_{(1)}^o \vec{\alpha}_{(2)}^o = +\vec{\alpha}_{(1)}^o \vec{\alpha}_{(2)}^o = \vec{\alpha}_{(1)}^o \vec{\alpha}_{(2)}^o \\ \vec{\gamma}_{(1)}^o \vec{\alpha}_{(1)}^o &= -\vec{\gamma}_{(1)}^o \vec{\alpha}_{(1)}^o \end{aligned} \tag{A2-11.4}$$

En (2.58-f),

$$\bigwedge^{W \varepsilon^{sim}} = \frac{1}{4m} \left[2m + 2m(\vec{\gamma}_{(1)}^o \vec{\gamma}_{(2)}^o) + (\vec{\gamma}_{(1)} - \vec{\gamma}_{(2)}) \cdot \vec{p} + (-\vec{\gamma}_{(1)}^o \vec{\alpha}_{(2)}^o + \vec{\gamma}_{(2)}^o \vec{\alpha}_{(1)}^o) \cdot \vec{p} \right] \tag{A2-11.5}$$

$$\bigwedge_{(1)}^{W \varepsilon^{sim}} \bigwedge_{(2)}^{W \varepsilon^{sim}} \quad , \text{ pero (2.33-a)} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \vec{\gamma}_{(1)}^o \mathbf{I}_{(2)} \vec{\gamma}_{(2)}^o &\approx (\vec{\gamma}_{(1)}^o \mathbf{I}_{(1)} \vec{\gamma}_{(1)}^o) (\vec{\gamma}_{(2)}^o \vec{\gamma}_{(2)}^o) = \vec{\gamma}_{(1)}^o \vec{\alpha}_{(2)}^o \\ -\vec{\gamma}_{(1)}^o \vec{\alpha}_{(2)}^o &\approx -(\vec{\gamma}_{(1)}^o \vec{\alpha}_{(2)}^o) (\vec{\gamma}_{(2)}^o \vec{\gamma}_{(2)}^o) = -\vec{\gamma}_{(1)}^o \mathbf{I}_{(2)} \end{aligned} \tag{A2-11.6}$$

Además (2.28) \Rightarrow

$$-\vec{\gamma}_{(1)}^o \mathbf{I}_{(2)} \vec{\gamma}_{(2)}^o \approx -\vec{\gamma}_{(1)}^o \mathbf{I}_{(1)} \vec{\gamma}_{(1)}^o \quad ; \quad \vec{\gamma}_{(2)}^o \vec{\alpha}_{(1)}^o \approx \vec{\gamma}_{(2)}^o \vec{\alpha}_{(1)}^o \quad ; \quad 2m + 2m \vec{\gamma}_{(1)}^o \vec{\gamma}_{(2)}^o \approx 2m + 2m \vec{\gamma}_{(1)}^o \vec{\gamma}_{(2)}^o$$

con lo que

$$\bigwedge_{(1)}^{W \varepsilon^{sim}} \approx \bigwedge_{(2)}^{W \varepsilon^{sim}} \tag{Q.E.D.}$$

A2-12

DEMOSTRACION DE (2.63) EN LA REPRESENTACION (2.6)

Usando (2.6-b) se ve que

$$\frac{1}{2} (\delta_{(a)}^0 + \delta_{(a)}^c) \Psi = \begin{pmatrix} \Psi_{11} & \Psi_{12} & 0 & 0 \\ \Psi_{21} & \Psi_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\Psi_{33} & -\Psi_{34} \\ 0 & 0 & -\Psi_{43} & -\Psi_{44} \end{pmatrix} \quad (\text{A2-12.1})$$

Con (A2-6.16) es,

$$\vec{\alpha}_{(a)} \cdot \vec{P} \left[\frac{1}{2} (\delta_{(a)}^0 + \delta_{(a)}^c) \Psi \right] = \begin{pmatrix} \Psi_{11} & \Psi_{12} & 0 & 0 \\ \Psi_{21} & \Psi_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\Psi_{33} & -\Psi_{34} \\ 0 & 0 & -\Psi_{43} & -\Psi_{44} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & P^3 \Psi_{11} + P^2 \Psi_{12} & P_+ \Psi_{11} - P^3 \Psi_{12} \\ 0 & 0 & P^3 \Psi_{21} + P^2 \Psi_{22} & P_+ \Psi_{21} - P^3 \Psi_{22} \\ -P^3 \Psi_{33} - P_- \Psi_{34} & -P_+ \Psi_{33} + P^3 \Psi_{34} & 0 & 0 \\ -P^3 \Psi_{43} - P_- \Psi_{44} & -P_+ \Psi_{43} + P^3 \Psi_{44} & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A2-12.2})$$

Análogamente,

$$\vec{\alpha}_{(a)} \cdot \vec{P} \left[\frac{1}{2} (\delta_{(a)}^0 + \delta_{(a)}^c) \right] \Psi = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -P^3 \Psi_{33} - P_- \Psi_{43} & -P^3 \Psi_{34} - P_- \Psi_{44} \\ 0 & 0 & -P_+ \Psi_{33} + P^3 \Psi_{43} & -P_+ \Psi_{34} + P^3 \Psi_{44} \\ P^3 \Psi_{11} + P_- \Psi_{21} & P^3 \Psi_{12} + P_- \Psi_{22} & 0 & 0 \\ P_+ \Psi_{11} - P^3 \Psi_{21} & P_+ \Psi_{12} - P^3 \Psi_{22} & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A2-12.3})$$

Por otra parte, de (2.58-c) y (2.5-b),

$$\Lambda_{\pm}^{\text{Weyl}} \Psi = \frac{1}{4m} (H_{(a)} + H_{(c)}) (\delta_{(a)}^c + \delta_{(a)}^0) \Psi = \frac{\vec{P} \cdot (\vec{\alpha}_{(a)} + \vec{\alpha}_{(c)})}{4m} (\delta_{(a)}^c + \delta_{(a)}^0) + \Lambda^{\text{II}} \Psi \quad (\text{A2-12.4})$$

Basta ahora reemplazar en ésta las (A2-12.3), (A2-12.2) y (2.9-b)

para obtener la (2.63).

Q.E.D.

A2-13

DEMOSTRACION DE LAS (2.65).

Se pueden demostrar de varias maneras; indico la más rápida para cada caso.

a) (2.65-a)

Usar (2.58-g) y (2.48) recordando $(H_{(1)} - H_{(2)})(H_{(1)} + H_{(2)}) = 0$ (A2-13.1)

b) (2.65-b)

Como $H^2 = p^2$, de (2.58-g) y (2.48) se obtiene

$$\begin{aligned} \Lambda_{\perp}^{W \varepsilon^{sim}} \Lambda_{\perp}^{F \varepsilon^{sim}} &= \frac{1}{2} \left(\mathbb{I} - \frac{H_{(1)} H_{(2)}}{p^2} \right) - \frac{1}{4m} (\gamma_{(1)}^0 - \gamma_{(2)}^0) (H_{(1)} - H_{(2)}) \frac{1}{2} \left(\mathbb{I} - \frac{H_{(1)} H_{(2)}}{p^2} \right) = \\ &= \Lambda_{\perp}^{F \varepsilon^{sim}} - \frac{1}{4m} (\gamma_{(1)}^0 - \gamma_{(2)}^0) (H_{(1)} - H_{(2)}) = \Lambda_{\perp}^{F \varepsilon^{sim}} - \Lambda_{\perp}^{J \varepsilon^{sim}} \end{aligned}$$

(recordar (2.60).

Q.E.D.

c) (2.65-c)

Usar (2.60) y (2.48).

d) (2.65-d)

Usar (2.60) y (2.48).

e) (2.65-e)

Usar (2.48) y (2.58-e).

f) (2.65-f)

Usar (2.65-e) recordando $\Lambda_{\perp}^{J \varepsilon^{sim}} = \mathbb{I} - \Lambda_{\perp}^{W \varepsilon^{sim}}$

g) (2.65-g)

Usar (2.65-e) recordando $\Lambda_{\perp}^{F \varepsilon^{sim}} = \mathbb{I} - \Lambda_{\perp}^{W \varepsilon^{sim}}$

h) (2.65-h)

Usar (2.65-e) recordando $\Lambda_{\perp}^{J \varepsilon^{sim}} = \mathbb{I} - \Lambda_{\perp}^{W \varepsilon^{sim}}$

A2-14

a) DEMOSTRACION DE (2.67).

De (2.66), si $\Psi \in \mathcal{E}$:

$$\begin{aligned} \left(\Lambda_{\mathcal{E}^{ant}}^{F \varepsilon^{sim}} \Psi \right)_{i_1 i_2} &= \frac{1}{2} (\delta_{i_1 j_1} \delta_{i_2 j_2} + \delta_{i_1 j_2} \delta_{i_2 j_1}) \Psi_{j_1 j_2} = \frac{1}{2} (\Psi_{i_1 i_2} + \Psi_{i_2 i_1}) \\ \therefore \left(\Lambda_{\mathcal{E}^{ant}}^{F \varepsilon^{sim}} \Psi \right)_{i_1 i_2} &= \left(\Lambda_{\mathcal{E}^{ant}}^{F \varepsilon^{sim}} \Psi \right)_{i_2 i_1} \end{aligned} \quad (A2-14.1)$$

Análogamente,

$$\left(\Lambda_{\mathcal{E}^{sim}}^{F \varepsilon^{ant}} \Psi \right)_{i_1 i_2} = - \left(\Lambda_{\mathcal{E}^{sim}}^{F \varepsilon^{ant}} \Psi \right)_{i_2 i_1} \quad \text{Q.E.D.}$$

b) DEMOSTRACION DE (2.70) y de la no ortogonalidad de $\Lambda_{\mathcal{E}^{ant}}$

En primer lugar, no vale la condición suficiente (2.46-f) porque

$$\begin{aligned} \Lambda_{i_1 i_2 j_1 j_2}^{\mathcal{E}^{sim} \mathcal{E}} &= \gamma_{i_1 r_1}^+ \Lambda_{i_2 r_2, j_1 s_2}^+ \gamma_{s_2 j_2}^0 = \gamma_{i_2 r_2}^0 \Lambda_{i_1 s_1, j_1 r_1}^* \gamma_{s_1 j_1}^0 = \frac{1}{2} \gamma_{i_1 r_2}^0 (\delta_{j_1 i_1} \delta_{s_2 r_2} + \delta_{j_1 r_2} \delta_{i_1 s_2}) \gamma_{s_2 j_2}^0 = \\ &= \frac{1}{2} \delta_{i_1 j_1} \delta_{i_2 j_2} + \frac{1}{2} \gamma_{i_2 j_1}^0 \gamma_{i_1 j_2}^0 \end{aligned} \quad (A2-14)$$

(o sea, (2.70) es correcta).

Además, podemos demostrar que existen $\Psi \in \mathcal{E}^{sim}$ y $\Psi \in \mathcal{E}^{ant}$ tales que

$$(\Psi^{(sim)}, \Psi^{(ant)}) \neq 0 \quad (A2.14.3)$$

En efecto: Elijo $\Psi_{12}^{(sim)} = \Psi_{31}^{(sim)} = f(\vec{x})$, restantes $\Psi_{ij}^{(sim)} = 0$
 $\Psi_{13}^{(ant)} = -\Psi_{31}^{(ant)} = f(\vec{x})$, " $\Psi_{ij}^{(ant)} = 0$

con $f(\vec{x})$ arbitraria de cuadrado integrable. (A2-14.4)

Usando (2.6-b):

$$(\Psi^{(sim)}, \Psi^{(ant)}) = \int \Psi_{i_1 i_2}^{(sim) \dagger} \Psi_{i_1 i_2}^{(ant)} d^3x = \int \Psi_{i_2 i_1}^{(sim) \dagger} \Psi_{i_1 i_2}^{(ant)} d^3x$$

$$= \int \{ \epsilon_{123} \Psi_{13}^{(sim) \dagger} \Psi_{31}^{(ant)} + \epsilon_{312} \Psi_{31}^{(sim) \dagger} \Psi_{13}^{(ant)} \} d^3x = \int \{ (+1) f(\vec{x}) [-f(\vec{x})] + (-1) f(\vec{x}) f(\vec{x}) \} d^3x = -2 \int f^2 d^3x$$

basta elegir $f(\vec{x})$ no idénticamente nula para que sea

$$(\Psi^{(sim)}, \Psi^{(ant)}) < 0 \quad \text{Q.E.D.}$$

A2-15

DEMOSTRACION DE (2.71).

Por ejemplo, demostración de la segunda:

Sea $\Psi \in \mathcal{E}^{sim}$

$$(\Lambda_{\mathcal{E}^{sim}}^{\mathcal{E}^{ant}} A_{(1)} I_{(2)} \Psi)_{i_1 i_2} =$$

$$= \frac{1}{2} (\delta_{i_1 j_1} \delta_{i_2 j_2} - \delta_{i_1 j_2} \delta_{i_2 j_1}) A_{j_1 k_1} \delta_{j_2 k_2} \Psi_{k_1 k_2} =$$

$$= \frac{1}{2} A_{i_1 k_1} \delta_{i_2 k_2} \Psi_{k_1 k_2} - \frac{1}{2} A_{i_2 k_1} \delta_{i_1 k_2} \Psi_{k_1 k_2} =$$

$$= \frac{1}{2} A_{i_1 k_1} \delta_{i_2 k_2} \Psi_{k_1 k_2} - \frac{1}{2} A_{i_2 k_1} \delta_{i_1 k_2} \Psi_{k_2 k_1}$$

Mudando índices mudos ($k_1 \leftrightarrow k_2$) en el último término,

$$(\Lambda_{\mathcal{E}^{sim}}^{\mathcal{E}^{ant}} A_{(1)} I_{(2)} \Psi)_{i_1 i_2} = \frac{1}{2} A_{i_1 k_1} \delta_{i_2 k_2} \Psi_{k_1 k_2} - \frac{1}{2} A_{i_2 k_2} \delta_{i_1 k_1} \Psi_{k_2 k_1} =$$

$$= \frac{1}{2} [(A_{(1)} I_{(2)} - I_{(1)} A_{(2)}) \Psi]_{i_1 i_2} \quad \text{Q.E.D.}$$

A2-16

a) DEMOSTRACION DE QUE LAS (2.72-a), ... (2.72-e) DEFINEN EL MISMO OPERADOR

a₁) (2.72-a) \iff (2.72-b):

Es inmediata con (A2-10.1).

a₂) (2.72-a) \iff (2.72-c)

Es $H \vec{\gamma} = (\vec{\alpha} \cdot \vec{p} + m \gamma^0) = -\vec{\gamma} \cdot \vec{p} + m I$

$\therefore (H \vec{\gamma})_{(1)} - (H \vec{\gamma})_{(2)} = -(\vec{\gamma}_{(1)} - \vec{\gamma}_{(2)}) \cdot \vec{p} + m (I_{(1)} I_{(2)} - I_{(2)} I_{(1)}) = -(\vec{\gamma}_{(1)} - \vec{\gamma}_{(2)}) \cdot \vec{p}$ (A2-16.1)

Con esta, la demostración se completa fácilmente.

a₃) (2.72-a) \iff (2.72-d).

Es $H = \vec{\gamma} \cdot \vec{p} + m I$

$\therefore (H)_{(1)} - (\vec{\gamma} \cdot H)_{(2)} = +(\vec{\gamma}_{(1)} - \vec{\gamma}_{(2)}) \cdot \vec{p} + 0,$ (A2-16.2)

que permite efectuar la demostración.

a₄) (2.72-e) \iff (2.72-c) Basta desarrollar usando (2.72-c), (2.58-e) y (266)

b) DEMOSTRACION DE $(\Lambda_{\mathcal{E}^{sim}}^{\mathcal{E}^{ant}} \Psi) \in W$ PARA TODA $\Psi \in W$. (A2-16.3)

Sea $\Psi \in \mathcal{E}$; con (2.72-c),

$$(H_{(1)} - H_{(2)}) (\Lambda_{\mathcal{E}^{sim}}^{\mathcal{E}^{ant}} \Psi) = (H_{(1)} - H_{(2)}) \Lambda_{\mathcal{E}^{sim}}^{\mathcal{E}^{ant}} (\Lambda_{\mathcal{E}^{ant}}^{\mathcal{E}^{sim}} \Psi)$$

$$= (H_{(1)} - H_{(2)}) \frac{1}{2m} \left[(H_{(1)} \gamma_{(1)}^0 - H_{(2)} \gamma_{(2)}^0) \Lambda_{\mathcal{E}^{ant}}^{\mathcal{E}^{sim}} \right] \Lambda_{\mathcal{E}^{sim}}^{\mathcal{E}^{ant}} \Psi$$

Por (2.56) el 1er. sumando es nulo (recordar (2-3.c)). También es nulo el 2º pues

$$(H_{(1)} - H_{(2)}) (H_{(1)} \delta_{(1)}^0 - H_{(2)} \delta_{(2)}^0) \Lambda^{\Pi} = (p_0^2 \delta_{(1)}^0 - H_{(1)} H_{(2)} \delta_{(2)}^0 - H_{(2)} H_{(1)} \delta_{(1)}^0 + p_0^2 \delta_{(2)}^0) \Lambda^{\Pi} =$$

$$= (p_0^2 - H_{(1)} H_{(2)}) (\delta_{(1)}^0 + \delta_{(2)}^0) \frac{1}{2} (\Pi - \delta_{(1)}^0 \delta_{(2)}^0) - \frac{1}{2} (p_0^2 - H_{(1)} H_{(2)}) (\delta_{(1)}^0 + \delta_{(2)}^0 - \delta_{(2)}^0 \delta_{(1)}^0) = 0.$$

Por lo tanto,

$$H_{(1)} (\Lambda_{\perp}^{w\epsilon} \Psi) = H_{(2)} (\Lambda_{\perp}^{w\epsilon} \Psi) \quad (A2-16.4)$$

o sea $(\Lambda_{\perp}^{w\epsilon} \Psi)$ cumple (2.3-c) o sea pertenece a \mathcal{W} .

c) DEMOSTRACION DE (2.75).

$$\text{Basta demostrar } (\Lambda_{\perp}^{w\epsilon})^2 = \Lambda_{\perp}^{w\epsilon} \quad (A2-16.5)$$

pues las restantes son consecuencia de esta.

c₁) Sea $\Psi \in \mathcal{E}^{sim}$; por (2.69) la (2.72) implica

$$\Lambda_{\perp}^{w\epsilon} \Psi = \Lambda_{\perp}^{w\epsilon} \Lambda_{\perp}^{sim} \Psi \quad (A2-16.6)$$

pero $\Lambda_{\perp}^{w\epsilon} \Lambda_{\perp}^{sim} \Psi \in \mathcal{E}^{sim}$ de manera que reiterando,

$$(\Lambda_{\perp}^{w\epsilon})^2 \Psi = \Lambda_{\perp}^{w\epsilon} (\Lambda_{\perp}^{sim} \Psi) = \Lambda_{\perp}^{w\epsilon} \Lambda_{\perp}^{sim} (\Lambda_{\perp}^{sim} \Psi); \text{ pero } (\Lambda_{\perp}^{w\epsilon} \Lambda_{\perp}^{sim})^2 \Psi = \Lambda_{\perp}^{w\epsilon} \Lambda_{\perp}^{sim} \Psi \quad (A2-16.7)$$

De (A2-16.6) y (7),

$$(\Lambda_{\perp}^{w\epsilon})^2 \Psi = \Lambda_{\perp}^{w\epsilon} \Psi \therefore (\Lambda_{\perp}^{w\epsilon})^2_{\mathcal{E}^{sim}} = \Lambda_{\perp}^{w\epsilon} \quad (A2-16.8)$$

c₂) Demostración de (A2-16.14).

Sea $\Psi \in \mathcal{E}^{ant}$; por (2.69),

$$\Lambda_{\perp}^{w\epsilon} \Psi = + \frac{1}{2^m} (\vec{\delta}_{(1)} - \vec{\delta}_{(2)}) \cdot \vec{p} \Lambda^{\Pi} \Psi \quad (A2-16.9)$$

$$\text{Pero siendo } \Psi_{ij} = -\Psi_{ji} \text{ es } [(\vec{\delta}_{(1)} - \vec{\delta}_{(2)}) \cdot \vec{p} \Lambda^{\Pi} \Psi] \in \mathcal{E}^{sim} \quad (A2-16.10)$$

de manera que reiterando y volviendo a usar (2.69) resulta

$$(\Lambda_{\perp}^{w\epsilon})^2 \Psi = \Lambda_{\perp}^{w\epsilon} \Lambda_{\perp}^{sim} (\frac{1}{2^m} (\vec{\delta}_{(1)} - \vec{\delta}_{(2)}) \cdot \vec{p} \Lambda^{\Pi} \Psi) \quad (A2-16.11)$$

Por otro lado, de la demostración hecha en (b) se deduce que

$$(H_{(1)} - H_{(2)}) [(\vec{\delta}_{(1)} - \vec{\delta}_{(2)}) \cdot \vec{p} \Lambda^{\Pi} \Psi] = 0$$

de manera que $\frac{1}{2^m} (\vec{\delta}_{(1)} - \vec{\delta}_{(2)}) \cdot \vec{p} \Lambda^{\Pi} \Psi \in \mathcal{W} \quad (A2-16.12)$

Entonces, con (2.62) la (A2-16.10) queda,

$$(\Lambda_{\perp}^{w\epsilon})^2 \Psi = + \frac{1}{2^m} (\vec{\delta}_{(1)} - \vec{\delta}_{(2)}) \cdot \vec{p} \Lambda^{\Pi} \Psi \quad (A2-16.13)$$

De (A2-16.9) y (A2-16.13),

$$(\Lambda_{\perp}^{w\epsilon})^2 \Psi = \Lambda_{\perp}^{w\epsilon} \Psi \therefore (\Lambda_{\perp}^{w\epsilon})^2_{\mathcal{E}^{ant}} = \Lambda_{\perp}^{w\epsilon} \quad (A2-16.14)$$

c₃) De (A2-16.8) y (A2-16.14),

$$(\Lambda_{\perp}^{w\epsilon})^2 = \Lambda_{\perp}^{w\epsilon} \quad \text{o sea} \quad (\Lambda_{\perp}^{w\epsilon})^2 = \Lambda_{\perp}^{w\epsilon}$$

Q.E.D.

$$\text{d) DEMOSTRACION DE } \Lambda_{\perp}^{w\epsilon} = \Lambda_{\perp}^{w\epsilon} \quad (A2-16.15)$$

(de donde $\Lambda_{\perp}^{w\epsilon} = \Lambda_{\perp}^{w\epsilon}$).

d₁) Demuestro primero que

$$(\Lambda_{\perp}^{w\epsilon} \Lambda_{\perp}^{ant}) = (\Lambda_{\perp}^{ant} \Lambda_{\perp}^{w\epsilon}) ; (\Lambda^{\Pi} \Lambda_{\perp}^{ant}) = \Lambda^{\Pi} \Lambda_{\perp}^{ant} \quad (A2-16.16)$$

En efectos:

$$[\gamma_{(1)}^0 \gamma_{(2)}^0 \Lambda_{\epsilon^{ant}}^{\epsilon^{sim}}]_{i_1 i_2 k_1 k_2} = (\gamma_{i_1 j_1}^0 \gamma_{i_2 j_2}^0) \frac{(\delta_{j_1 k_1} \delta_{j_2 k_2} + \delta_{j_1 k_2} \delta_{j_2 k_1})}{2} =$$

$$= \frac{\gamma_{i_1 k_1}^0 \gamma_{i_2 k_2}^0 + \gamma_{i_1 k_2}^0 \gamma_{i_2 k_1}^0}{2} \quad (A2-16.17)$$

Con (2.5)

$$\left. \begin{aligned} (\Lambda^I \Lambda_{\epsilon^{ant}}^{\epsilon^{sim}})_{i_1 i_2 j_1 j_2} &= \frac{1}{4} (\delta_{i_1 j_1} \delta_{i_2 j_2} + \delta_{i_1 j_2} \delta_{i_2 j_1} \gamma_{i_1 j_1}^0 \gamma_{i_2 j_2}^0 + \gamma_{i_1 j_2}^0 \gamma_{i_2 j_1}^0 \delta_{i_1 j_1} \delta_{i_2 j_2}) \\ \text{Análogamente,} \\ (\Lambda^{II} \Lambda_{\epsilon^{sim}}^{\epsilon^{ant}})_{i_1 i_2 j_1 j_2} &= \frac{1}{4} (\delta_{i_1 j_1} \delta_{i_2 j_2} - \delta_{i_1 j_2} \delta_{i_2 j_1} \gamma_{i_1 j_1}^0 \gamma_{i_2 j_2}^0 + \gamma_{i_1 j_2}^0 \gamma_{i_2 j_1}^0 \delta_{i_1 j_1} \delta_{i_2 j_2}) \end{aligned} \right\} (A2-16.18)$$

en el 2º m. todos los operadores son evidentemente hermitianos; el único que merece verificación es el último sumando:

Sea

$$B_{i_1 i_2 j_1 j_2} = \gamma_{i_1 j_2}^0 \gamma_{i_2 j_1}^0 ; B_{i_1 i_2 j_1 j_2}^\dagger = \gamma_{j_1 i_2}^0 \gamma_{j_2 i_1}^0 = \gamma_{i_2 j_1}^0 \gamma_{i_1 j_2}^0 = B_{i_1 i_2 j_1 j_2}$$

∴ también el último sumando es hermitiano, con lo que la (A2-16.16) queda demostrada.

d₂) Demuestro que

$$\Lambda^I \Lambda_{\epsilon^{ant}}^{\epsilon^{sim}} = \Lambda^I \Lambda_{\epsilon^{ant}}^{\epsilon^{sim}} ; \Lambda^{II} \Lambda_{\epsilon^{sim}}^{\epsilon^{ant}} = \Lambda^{II} \Lambda_{\epsilon^{sim}}^{\epsilon^{ant}} \quad (A2-16.19)$$

En efecto: Si un operador A es hermitiano, $\bar{A} = \delta_{(2)}^0 A \delta_{(2)}^0$; entonces, con (A2-16.18),

$$\begin{aligned} \Lambda^I \Lambda_{\epsilon^{ant}}^{\epsilon^{sim}} &= \delta_{i_2 r}^0 (\Lambda^I \Lambda_{\epsilon^{ant}}^{\epsilon^{sim}})_{i_1 r j_1 j_2} \delta_{s j_2}^0 = \\ &= \frac{1}{4} \delta_{i_2 r}^0 (\delta_{i_1 j_1} \delta_{r s} + \delta_{i_1 s} \delta_{r j_1} + \gamma_{i_1 j_1}^0 \gamma_{r s}^0 + \gamma_{i_1 s}^0 \gamma_{r j_1}^0) \delta_{s j_2}^0 = \\ &= \frac{1}{4} (\delta_{i_1 j_1} \delta_{i_2 j_2} + \delta_{i_2 j_1} \delta_{i_1 j_2} + \gamma_{i_1 j_1}^0 \gamma_{i_2 j_2}^0 + \gamma_{i_1 j_2}^0 \gamma_{i_2 j_1}^0) = \\ &= (\Lambda^I \Lambda_{\epsilon^{ant}}^{\epsilon^{sim}})_{i_1 i_2 j_1 j_2} \end{aligned}$$

Por otra parte

$$\begin{aligned} (\Lambda^{II} \Lambda_{\epsilon^{sim}}^{\epsilon^{ant}})_{i_1 i_2 j_1 j_2} &= \delta_{i_2 r}^0 (\Lambda^{II} \Lambda_{\epsilon^{sim}}^{\epsilon^{ant}})_{i_1 r j_1 j_2} \delta_{s j_2}^0 = \\ &= \frac{1}{4} \delta_{i_2 r}^0 (\delta_{i_1 j_1} \delta_{r s} - \delta_{i_1 s} \delta_{r j_1} - (\gamma_{i_1 j_1}^0 \delta_{r s}^0 + \delta_{i_1 s}^0 \gamma_{r j_1}^0)) \delta_{s j_2}^0 = \\ &= \frac{1}{4} (\delta_{i_1 j_1} \delta_{i_2 j_2} - \delta_{i_2 j_1} \delta_{i_1 j_2} - \gamma_{i_1 j_1}^0 \gamma_{i_2 j_2}^0 + \delta_{i_1 j_2}^0 \delta_{i_2 j_1}^0) \end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} (\Lambda^{II} \Lambda_{\epsilon^{ant}}^{\epsilon^{sim}})_{i_1 i_2 j_1 j_2} &= \\ &= \frac{1}{4} (\delta_{i_1 r_1} \delta_{i_2 r_2} - \delta_{i_1 r_2} \delta_{i_2 r_1}) (\delta_{r_1 j_1} \delta_{r_2 j_2} + \delta_{r_1 j_2} \delta_{r_2 j_1}) = \\ &= \frac{1}{4} (\delta_{i_1 j_1} \delta_{i_2 j_2} + \delta_{i_1 j_2} \delta_{i_2 j_1} - \gamma_{i_1 j_1}^0 \gamma_{i_2 j_2}^0 - \gamma_{i_1 j_2}^0 \gamma_{i_2 j_1}^0) \end{aligned}$$

de donde

$$\Lambda^{II} \Lambda_{\epsilon^{sim}}^{\epsilon^{ant}} = \Lambda^{II} \Lambda_{\epsilon^{ant}}^{\epsilon^{sim}}$$

$d_3)$

De (2.58-b) y (2.72-a),

$$\Lambda_{\perp}^{WE} = \left[\mathbb{I} - \frac{1}{2m} (\vec{\gamma}_{(1)} + \vec{\gamma}_{(2)}) \cdot \vec{p} \right] \Lambda^I \Lambda_{\varepsilon}^{\sin t} \frac{1}{2m} (\vec{\gamma}_{(1)} - \vec{\gamma}_{(2)}) \cdot \vec{p} \Lambda^{\Pi} \Lambda_{\varepsilon}^{\sin t} \quad (A2-16.20)$$

Con (2.41), (A2-16.19) y (A2-11.4),

$$\Lambda_{\perp}^{WE} = \left(\Lambda^I \Lambda_{\varepsilon}^{\sin t} \right) \mathbb{I} + \frac{1}{2m} (\vec{\gamma}_{(1)} - \vec{\gamma}_{(2)}) \cdot \vec{p} - \frac{1}{2m} \Lambda^{\Pi} \Lambda_{\varepsilon}^{\sin t} (\vec{\gamma}_{(1)} + \vec{\gamma}_{(2)}) \cdot \vec{p} \quad (A2-16.21)$$

d_{3-1}) Sea $\Psi \in \varepsilon^{\sin t}$; por (2.65),

$$\Lambda_{\perp}^{WE} \Psi = \left[\mathbb{I} - \frac{1}{2m} (\vec{\gamma}_{(1)} + \vec{\gamma}_{(2)}) \cdot \vec{p} \right] \Lambda^I \Psi \quad (A2-16.22)$$

Si $\Psi \in \varepsilon^{\sin t}$ es $\frac{1}{2m} (\vec{\gamma}_{(1)} - \vec{\gamma}_{(2)}) \cdot \vec{p} \Psi \in \varepsilon^{\sin t}$ y $(\vec{\gamma}_{(1)} + \vec{\gamma}_{(2)}) \cdot \vec{p} \Psi \in \varepsilon^{\sin t}$

$$\Lambda_{\perp}^{WE} \Psi = \Lambda^I \Psi + 0 - \frac{1}{2m} \Lambda^{\Pi} (\vec{\gamma}_{(1)} + \vec{\gamma}_{(2)}) \cdot \vec{p} \Psi \quad (A2-16.23)$$

Por (A2-2.10), las (A2-16.22) y (A2-16.23)

$$\Lambda_{\perp}^{WE} \Psi = \Lambda_{\perp}^{WE} \Psi \quad \text{o sea} \quad \Lambda_{\varepsilon}^{\sin t} \Lambda_{\perp}^{WE} \quad (A2-16.24)$$

$$d_{3-2}) \text{ Sea } \Psi \in \varepsilon^{\sin t}; \Lambda_{\perp}^{WE} \Psi = \frac{1}{2m} (\vec{\gamma}_{(1)} - \vec{\gamma}_{(2)}) \cdot \vec{p} \Lambda^{\Pi} \Psi \quad (A2-16.25)$$

$$\text{Ahora } (\vec{\gamma}_{(1)} - \vec{\gamma}_{(2)}) \cdot \vec{p} \Psi \in \varepsilon^{\sin t}; \quad (\vec{\gamma}_{(1)} + \vec{\gamma}_{(2)}) \cdot \vec{p} \Psi \in \varepsilon^{\sin t}; \quad (A2-16.25')$$

$$\therefore \Lambda_{\perp}^{WE} \Psi = \Lambda^{\Pi} \frac{1}{2m} (\vec{\gamma}_{(1)} - \vec{\gamma}_{(2)}) \cdot \vec{p} \Psi \quad (A2-16.26)$$

Usando nuevamente (A2-10.1) es

$$\Lambda_{\perp}^{WE} \Psi = \Lambda_{\perp}^{WE} \Psi \quad \text{o sea} \quad \Lambda_{\varepsilon}^{\sin t} \Lambda_{\perp}^{WE} \quad (A2-16.27)$$

d_{3-3}) De d_{3-1} y d_{3-2} ,

$$\Lambda_{\perp}^{WE} = \Lambda_{\perp}^{WE}$$

Q.E.D.

A3 - 1

DEMOSTRACION DE (3.1-C)

Sea $\Psi_{a,b, \dots, q}^{(o)}$ un estado que cumple (3.1-b). Los valores medibles con precisión $(a)_m, (b)_m, \dots, (q)_m$ para tal estado, corresponderán en general a observables A, B, \dots, Q tales que

$$A \Psi_{a,b, \dots, q}^{(o)} = a \Psi_{a,b, \dots, q}^{(o)}$$

$$B \Psi_{a,b, \dots, q}^{(o)} = b \Psi_{a,b, \dots, q}^{(o)}$$

$$Q \Psi_{a,b, \dots, q}^{(o)} = q \Psi_{a,b, \dots, q}^{(o)}$$

Entonces

$$(a)_m = (\Psi_{a,b, \dots, q}^{(o)}, A \Psi_{a,b, \dots, q}^{(o)}) = a (\Psi_{a,b, \dots, q}^{(o)}, \Psi_{a,b, \dots, q}^{(o)})$$

por (3.1-b),

$$(a)_m = a \int \Psi_{a,b, \dots, q}^{(o)*} \Psi_{a,b, \dots, q}^{(o)}$$

Análogamente,

$$(b)_m = b \int \Psi_{a,b, \dots, q}^{(o)*} \Psi_{a,b, \dots, q}^{(o)}$$

Q.E.D.

A3 - 2

DEMOSTRACION DE (3-8-d)

Por Sec. 4.b-1 los 10 spinores (4.18) y (4.19) substituyen el espacio spinorial $\mathcal{E}_{s,p}^{(4)}$; usando (4.4-a), es inmediato que sólo las cuatro $u_{\mathcal{F}}$ de (4.19) (y no las $u_{\mathcal{E}}$ de 4.18) pueden contribuir a la parte spinorial de una $\Psi^{(o)}$ que cumpla (3.8-b). Pero entonces toda $\Psi^{(o)}$ es del tipo

$$\Psi^{(o)} = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sum_{r,s} \int \frac{d^3 p}{\sqrt{2p_0}} C(r,s,\vec{p}) u_{\mathcal{F}}(r,s,\vec{p}) e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}} \quad (A3-2.1)$$

donde las C son coeficientes sin subíndices spinoriales.

Supongamos ahora que pudiera ser $\Psi^{(o)} \in \mathcal{W}$; entonces (2.3-c) en (A3-2.1)

implica $C(r,s,\vec{p}) \equiv 0$ (A3-2.1)

si se usa nuevamente (4.19) y (4.4-a). O sea, la única $\Psi^{(o)} \in \mathcal{W}$ es la

$$\Psi^{(o)} = 0$$

Q.E.D.

A3-3

a) DEMOSTRACION DE QUE $m \chi_{(1)}^0$ ES DE 2a. CLASE.

En la representación (2.6) se ve usando (A2-12.1) que p. ej. para cada $\Psi \in W$ tal que $\Psi \neq 0$ (lo cual es posible: ver (2.63)) es $m \chi_{(1)}^0 \Psi \notin E$ y por lo tanto $m \chi_{(1)}^0 \Psi \in W$. Q.E.D.

b) DEMOSTRACION DE QUE SI

$$p_1 = p_2 = 0, \quad p_3 \neq 0, \quad (A3-3.1)$$

NINGUN AUTOVECTOR f^b DE $m \chi_{(1)}^0$ PERTENECE A W .

Siempre es posible medir simultáneamente el momento y la energía de una partícula libre; aunque no lo usemos (cf. Secc. 3.c-3), $m \chi_{(1)}^0$ puede representar la energía como operador de 2a. clase; es pues compatible (A3-3.1) con una medición de $m \chi_{(1)}^0$.

Trabajaremos en la representación p. Por (A2-12.1) los autovectores en E de $m \chi_{(1)}^0$ son

$$f^{+1} = \begin{pmatrix} f_{11}^{+1} & f_{12}^{+1} & f_{13}^{+1} & f_{14}^{+1} \\ f_{21}^{+1} & f_{22}^{+1} & f_{23}^{+1} & f_{24}^{+1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad f^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ f_{31}^{-1} & f_{32}^{-1} & f_{33}^{-1} & f_{34}^{-1} \\ f_{41}^{-1} & f_{42}^{-1} & f_{43}^{-1} & f_{44}^{-1} \end{pmatrix} \quad (A3-3.2)$$

Demostremos por el absurdo que $f^{+1} \notin W$ (salvo el caso sin interés $f^{+1} = 0$). (A3-3.3)

Si fuera $f^{+1} \in W$ sería $f^{+1} \in E^{sim}$, de donde, (a)

$$f^{+1} = \begin{pmatrix} f_{11}^{+1} & f_{12}^{+1} & 0 & 0 \\ f_{12}^{+1} & f_{22}^{+1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad f_{31}^{+1} = f_{32}^{+1} = f_{41}^{+1} = f_{42}^{+1} = 0 \quad (A3-3.4)$$

De (2.63) obtenemos $f_{31}^{+1}, f_{41}^{+1}, f_{32}^{+1}, f_{42}^{+1}$ si $f^{+1} \in W$; usando (A3-3.1) queda, $f_{31}^{+1} = \frac{p^3}{m} f_{11}^{+1}$; $f_{41}^{+1} = -\frac{p^3}{m} f_{12}^{+1}$; $f_{32}^{+1} = \frac{p^3}{m} f_{12}^{+1}$; $f_{42}^{+1} = -\frac{p^3}{m} f_{22}^{+1}$ (A3-3.5)

Como $p^3 \neq 0$ obtenemos de (A3-3.4) y (A3-3.5), $f_{11}^{+1} = f_{12}^{+1} = f_{22}^{+1} = 0 \quad \therefore f^{+1} = 0$. (a) es falsa. (A3-3.6)

Análogamente, $f^{-1} \in W$. Q.E.D.

a) DEMOSTRACION DE $B \stackrel{A3-4}{\approx} B \rightarrow B^{(w)} \stackrel{A3-4}{\approx} B^{(w)}$
 Sea $\Psi \in \mathcal{E}$ usando (2.77), $(\Psi, B^{(w)} \Psi) = (\Psi, \Lambda_{\perp}^{w\epsilon} B \Lambda_{\perp}^{w\epsilon} \Psi)$
 $= (\Psi, \Lambda_{\perp}^{w\epsilon} B \Lambda_{\perp}^{w\epsilon} \Psi) = (\Psi, B^{(w)} \Psi) = (\Lambda_{\perp}^{w\epsilon} \Psi, B \Lambda_{\perp}^{w\epsilon} \Psi)$
 Como $\Lambda_{\perp}^{w\epsilon} \Psi \in \mathcal{W}$ y como $B \stackrel{A3-4}{\approx} B$ es $(\Psi, B^{(w)} \Psi) = (\Lambda_{\perp}^{w\epsilon} \Psi, B \Lambda_{\perp}^{w\epsilon} \Psi)$
 $= (\Psi, \Lambda_{\perp}^{w\epsilon} B \Lambda_{\perp}^{w\epsilon} \Psi) = (\Psi, B^{(w)} \Psi)$
 donde volvemos a usar (2.77).

Q.E.D.

b) SE COMPLETA LA DEMOSTRACION DE (3.31-a)

Falta demostrar que $B^{(w)} \stackrel{A3-4}{\approx} B^{(w)}$

lo cual es inmediato con (2.27-o)

Por otro lado, la relación con (2.27-o)

$B \stackrel{A3-4}{\approx} B \implies B^{(w)} \stackrel{A3-4}{\approx} B^{(w)}$

Algo menos fuerte que la (3.30-a); es consecuencia directa de (3.23-b) ya que esta implica que $B \stackrel{A3-4}{\approx} B$ conserva el carácter real de los valores medios.

c) DEMOSTRACION DE (3.30-b)

(A3-4)

Sea $\Psi \in \mathcal{W}$, es $B\Psi = B\Psi$

Entonces $B^{(w)} \Psi = \Lambda_{\perp}^{w\epsilon} B \Lambda_{\perp}^{w\epsilon} \Psi = \Lambda_{\perp}^{w\epsilon} B \Lambda_{\perp}^{w\epsilon} \Psi$

pero $\Lambda_{\perp}^{w\epsilon} \Psi \in \mathcal{W}$ (A3-5.4) $\implies B \Lambda_{\perp}^{w\epsilon} \Psi = \Lambda_{\perp}^{w\epsilon} B \Lambda_{\perp}^{w\epsilon} \Psi$

$\therefore B^{(w)} \Psi = \Lambda_{\perp}^{w\epsilon} B \Lambda_{\perp}^{w\epsilon} \Psi = B^{(w)} \Psi$ Q.E.D.

d) DEMOSTRACION DE QUE EXISTEN OPERADORES B DE 2a CLASE TALES QUE SU ESPECTRO DIFIERE DEL DE $B^{(w)}$

Basta un ejemplo: $B = \Lambda^{\perp}$; $B^2 = \Lambda^{\perp} - \theta$, su espectro es: 0; 1.

Usando (2.58-b) y $\Lambda \Lambda^{\perp} = 0$, es

$B^{(w)} = \Lambda_{\perp}^{w\epsilon} \Lambda^{\perp} \Lambda_{\perp}^{w\epsilon} = 0$ cuyo espectro es: 0. Q.E.D.

A3-5

DEMOSTRACION DE 3.e-8

A.) Demostración de (3.32) $\implies "A\Psi \in \mathcal{W}"$ para toda $\Psi \in \mathcal{W}$; pero $A^{(w)} \Psi \in \mathcal{W}$.

$A \Psi \in \mathcal{W}$ Q.E.D.

A.) Demostración de " $A \Psi \in \mathcal{W}$ para toda Ψ " \implies (3.32).

Ver 3.e-7.

B.) Demostración de (3.33) $\implies "A\Psi \in \mathcal{W}$ para toda $\Psi \in \mathcal{W}"$

(3.33) \implies que si $\Psi \in \mathcal{W}$ es

$H_{(1)} A\Psi = A H_{(1)} \Psi = H_{(1)} A\Psi = A H_{(1)} \Psi$

Pero $\Psi \in \mathcal{W} \subseteq H_{(1)}$ $\Psi = H_{(1)} \Psi$ (cf. (2.3-o))

$\therefore H_{(1)} (A\Psi) = H_{(1)} (A\Psi) \implies A\Psi \in \mathcal{W}$ (cf. (2.3-o)). Q.E.D.

+ Usaremos $B^{(w)}$ en lugar de $B^{(w)}$ por lo discutido más adelante en Secc. 3.f

B₂) Demostración de "AΨ ∈ W para toda Ψ ∈ W" ⇒ (3.33).

$$\Psi \in W \Rightarrow H_{(v)} \Psi = H_{(v)} \Psi \Rightarrow A_{H_{(v)}} \Psi = A_{H_{(v)}} \Psi \Rightarrow A_{H_{(v)}} = A_{H_{(v)}} \quad (A3-5.1)$$

$$A\Psi \in W \Rightarrow H_{(v)} (A\Psi) = H_{(v)} (A\Psi) \Rightarrow H_{(v)} A = H_{(v)} A \quad (A3-5.2)$$

De (A3-5.1) y (A3-5.2),

$$[A, H_{(v)}] = [A, H_{(v)}] \quad \text{Q.E.D.}$$

A3-6

a) DEMOSTRACION DE (3.35-e)

Por (3.32) para toda Ψ ∈ W es

$$(m \gamma_{(v)}^o I_{(v)})^{(w)} \Psi = m \Lambda_{\perp}^{wE} \gamma_{(v)}^o \Lambda_{\perp}^{wE} \Psi = m \Lambda_{\perp}^{wE} \gamma_{(v)}^o \Psi.$$

Con (2.72-a), (2.58-b) y (2.71) es

$$(m \gamma_{(v)}^o I_{(v)})^{(w)} \Psi = m \left[I - \frac{1}{2m} (\vec{\gamma}_{(v)}^o + \vec{\gamma}_{(v)}^r) \cdot \vec{p} \right] \frac{1}{2} (\gamma_{(v)}^o + \gamma_{(v)}^r) \Psi + \frac{1}{2} (\vec{\gamma}_{(v)}^o - \vec{\gamma}_{(v)}^r) (\gamma_{(v)}^o - \gamma_{(v)}^r) \cdot \vec{p} \Psi \quad (A3-6.1)$$

$$= m \frac{1}{2} (\gamma_{(v)}^o + \gamma_{(v)}^r) \Psi - \frac{\vec{p}}{2} (\gamma_{(v)}^o \vec{\gamma}_{(v)}^r + \gamma_{(v)}^r \vec{\gamma}_{(v)}^o) \Psi \quad (A3-6.2)$$

Q.E.D.

b) DEMOSTRACION DE (3.36-g)

Por reducción al absurdo: Si fuera $(m \gamma_{(v)}^o I_{(v)})^{(w)} \Psi = H_{(v)} \Psi$ para toda Ψ ∈ W, sería también (cf. (2.3-c)),

$$(m \gamma_{(v)}^o I_{(v)})^{(w)} \Psi = \frac{1}{2} (H_{(v)} + H_{(v)}) \Psi.$$

Usando $H = \vec{\alpha} \cdot \vec{p} + m \gamma^r$ y (3.35-e) sería

$$\vec{p} \cdot (\vec{\alpha}_{(v)} + \vec{\alpha}_{(v)} + \gamma_{(v)}^o \vec{\gamma}_{(v)}^r + \gamma_{(v)}^r \vec{\gamma}_{(v)}^o) \Psi = 0,$$

o sea

$$(\gamma_{(v)}^o + \gamma_{(v)}^r) (\vec{\alpha}_{(v)} + \vec{\alpha}_{(v)}) \cdot \vec{p} \Psi = 0 \quad \therefore \Lambda^r (\vec{\alpha}_{(v)} + \vec{\alpha}_{(v)}) \cdot \vec{p} \Psi = 0. \quad (A3-6.3)$$

Pero

$$p_o \Psi - \frac{1}{2} (H_{(v)} + H_{(v)}) \Psi = m (\gamma_{(v)}^o + \gamma_{(v)}^r) \Psi + \frac{1}{2} (\vec{\alpha}_{(v)} + \vec{\alpha}_{(v)}) \cdot \vec{p} \Psi;$$

premultiplicando ésta por Λ^r y usando (A3-6.3) sería

$$p_o \frac{1}{2} (\gamma_{(v)}^o + \gamma_{(v)}^r) \Psi = m \Lambda^r \Psi.$$

o sea

$$(p_o - m) (\Lambda^r \Psi) = 0 \quad \text{con}^+ p_o \neq m; \quad \therefore \Psi^I = 0$$

Pero por (2.3-b) ello implicaría

$$\Psi = 0$$

Hemos llegado a un absurdo, lo cual prueba (3.36-g).

Q.E.D.

Salvo p = 0, lo cual no afecta la conclusión.

C) DEMOSTRACION DE QUE LOS VALORES MEDIBLES DE $(m \gamma_{(1)}^{\circ})^{(w)}$ SON DIFERENTES DE LOS DE H :

Busco primero los autovalores λ de $(m \gamma_{(1)}^{\circ})^{(w)}$:

$$\lambda \Psi_{\lambda}^{\text{II}} = (m \gamma_{(1)}^{\circ})^{(w)} \Psi_{\lambda} = -\frac{1}{2}m(\gamma_{(1)}^{\circ} + \gamma_{(2)}^{\circ}) \Psi_{\lambda} - \frac{1}{4}(\vec{\gamma}_{(1)} + \vec{\gamma}_{(2)}) \cdot \vec{p}(\gamma_{(1)}^{\circ} + \gamma_{(2)}^{\circ}) \Psi_{\lambda} + \frac{1}{4}\vec{p}(\vec{\gamma}_{(1)} - \vec{\gamma}_{(2)})(\gamma_{(1)}^{\circ} - \gamma_{(2)}^{\circ}) \Psi_{\lambda}. \quad (\text{A3-6.4})$$

Premultiplicamos por Λ^{II} recordando $\Lambda^{\text{II}} \vec{\gamma}_{(1)} = \vec{\gamma}_{(1)} \Lambda^{\text{I}}$, etc. y que $\Lambda^{\text{II}}(\gamma_{(1)}^{\circ} + \gamma_{(2)}^{\circ}) = 0$; $\Lambda^{\text{I}}(\gamma_{(1)}^{\circ} + \gamma_{(2)}^{\circ}) = \gamma_{(1)}^{\circ} + \gamma_{(2)}^{\circ}$; $\Lambda^{\text{I}}(\gamma_{(1)}^{\circ} - \gamma_{(2)}^{\circ}) = 0$.

(A3-6.5)

Se obtiene

$$\lambda \Psi_{\lambda}^{\text{II}} = -\frac{1}{4}(\vec{\gamma}_{(1)} + \vec{\gamma}_{(2)}) \cdot \vec{p}(\gamma_{(1)}^{\circ} + \gamma_{(2)}^{\circ}) \Psi_{\lambda}^{\text{I}} .$$

Iterando con el operador del 2º miembro,

$$\lambda^2 \Psi_{\lambda}^{\text{II}} = \frac{1}{16} [(\vec{\gamma}_{(1)} + \vec{\gamma}_{(2)}) \cdot \vec{p}(\gamma_{(1)}^{\circ} + \gamma_{(2)}^{\circ})] [(\vec{\gamma}_{(1)} + \vec{\gamma}_{(2)}) \cdot \vec{p}(\gamma_{(1)}^{\circ} + \gamma_{(2)}^{\circ}) (\Lambda^{\text{I}} \Psi_{\lambda})].$$

Llevando el Λ^{I} hacia la izquierda y usando (A3-6.5) se ve que

$$\lambda^2 \Psi_{\lambda}^{\text{II}} = 0.$$

1er. caso: $\lambda = 0$.

2º caso: $\Psi_{\lambda}^{\text{II}} = 0$, $\therefore \Psi_{\lambda} = \Psi_{\lambda}^{\text{I}}$. (A3-6.6)

Me interesan los $\Psi_{\lambda} \in \mathcal{V}$ pues son los posibles autoestados; pero

$\Psi_{\lambda} \in \mathcal{V}$ implica (por (2.3-b) y (A3-6.6)),

$$(\vec{\gamma}_{(1)} + \vec{\gamma}_{(2)}) \cdot \vec{p} \Psi_{\lambda} = 0$$

de donde deducimos

$$\vec{p} \cdot [\gamma_{(1)}^{\circ} \vec{\gamma}_{(1)} + \vec{\alpha}_{(1)}] \Psi_{\lambda} = 0 \quad ; \quad \vec{p} \cdot [\gamma_{(2)}^{\circ} \vec{\gamma}_{(2)} + \vec{\alpha}_{(2)}] \Psi_{\lambda} = 0 \quad ; \quad (\text{A3-6.7})$$

o sea

$$\vec{p} \cdot (\vec{\gamma}_{(1)} - \vec{\gamma}_{(2)})(\gamma_{(1)}^{\circ} - \gamma_{(2)}^{\circ}) \Psi_{\lambda} = 0. \quad (\text{A3-6.8})$$

(A3-6.6) y (A3-6.8) en (A3-6.4),

$$\lambda \Psi_{\lambda}^{\text{I}} = \frac{1}{2}m(\gamma_{(1)}^{\circ} + \gamma_{(2)}^{\circ}) \Psi_{\lambda}^{\text{I}} - \frac{1}{4}(\vec{\gamma}_{(1)} + \vec{\gamma}_{(2)}) \cdot \vec{p}(\gamma_{(1)}^{\circ} + \gamma_{(2)}^{\circ}) \Psi_{\lambda}^{\text{I}} .$$

Aplicando Λ^{I} y recordando (A3-6.5),

$$\lambda \Psi_{\lambda}^{\text{I}} = \frac{1}{2}m(\gamma_{(1)}^{\circ} + \gamma_{(2)}^{\circ}) \Psi_{\lambda}^{\text{I}} .$$

Iterando con el operador del 2º miembro,

$$\lambda^2 \Psi_{\lambda}^{\text{I}} = m^2 \Lambda^{\text{I}} \Psi_{\lambda}^{\text{I}} = m^2 \Psi_{\lambda}^{\text{I}} \quad \therefore \quad \lambda = \pm m. \quad (\text{A3-6.9}).$$

Reuniendo los dos casos:

$$\lambda = \pm m, 0. \quad (\text{A3-6.10}).$$

Multiplicando por la carga $\varepsilon = \pm 1$ resulta que los valores medibles de $(m \gamma_{(1)}^{\circ} I_{(1)})^{(w)}$ son a lo sumo $\pm m, 0$ es decir diferentes (salvo p particulares) del único valor medible $+p_0$ de $H = H_{(1)} I_{(1)}$ (cf. (3.17)).

Q.E.D.

DEMOSTRACION DE (3.38-a).

Por ser B simétrico de 2a. clase es

$$\Psi \in \mathcal{E}^{sim} \implies B\Psi \in \mathcal{E}^{sim}; \quad (A3-7.1)$$

por otro lado, si $\Psi \in \mathcal{E}^{sim}$ es (cf. (2.76-b),

$$B^{(w)} \Psi - \Lambda_{\perp}^{w\mathcal{E}^{sim}} B \Lambda_{\perp}^{w\mathcal{E}^{sim}} \Psi - \Lambda_{\perp}^{w\mathcal{E}^{sim}} B \Lambda_{\perp}^{w\mathcal{E}^{sim}} \Psi; \quad (A3-7.2)$$

poniendo $\Psi - \Lambda_{\perp}^{w\mathcal{E}^{sim}} \Psi$, deducimos de (A3.7-1)

$$B \Lambda_{\perp}^{w\mathcal{E}^{sim}} \Psi \in \mathcal{E}^{sim}; \quad (A3-7.3)$$

usando entonces nuevamente (2.76-b),

$$B^{(w)} \Psi - \Lambda_{\perp}^{w\mathcal{E}^{sim}} B \Lambda_{\perp}^{w\mathcal{E}^{sim}} \Psi; \quad (A3-7.4)$$

pero de (3.37),

$$B^{(w)} \Psi - \Lambda_{\perp}^{w\mathcal{E}^{sim}} B \Lambda_{\perp}^{w\mathcal{E}^{sim}} \Psi;$$

$$\therefore B^{(w)}_{\mathcal{E}^{sim}} = B^{(w)} \quad \text{Q.E.D.}$$

a) DEMOSTRACION DE (3.44).

Siendo $\partial A / \partial t = 0$ es (para toda $\Psi \in W$)

$$\left(\Psi, \frac{dA}{dt} \Psi \right) = \frac{d}{dt} \left(\Psi, A \Psi \right) - \left(\frac{\partial \Psi}{\partial t}, A \Psi \right) + \left(\Psi, A \frac{\partial \Psi}{\partial t} \right);$$

usando

$$i \frac{\partial \Psi}{\partial t} = H \Psi \quad \text{y} \quad \bar{H} = H$$

se llega por la vía habitual a

$$\left(\Psi, \frac{dA}{dt} \Psi \right) = \left(\Psi, i [H, A] \Psi \right). \quad (A3-8.1)$$

Pero de aquí no se deduce necesariamente (en nuestro caso) una igualdad sino una equivalencia (cf. Secc. 2.d-2):

$$\frac{dA}{dt} \underset{W}{\approx} i [H, A].$$

Q.E.D.

b) DEMOSTRACION DE QUE SI A ES DE 1a. CLASE, dA / dt TAMBIEN LO ES.

Si llamamos

$$\mathcal{X} = \left[H, \frac{dA}{dt} \right] - \left[H_{(t)}, \frac{dA}{dt} \right] \quad (A3-8.2)$$

la tesis es⁺

$$\mathcal{X} = 0 \quad (\text{cf. (3.33)}). \quad (A3-8.3)$$

Usando $H_{(t)}^2 = H_{(t)}^2 = p_3^2$ es

$$\begin{aligned} \mathcal{X} &= \left[H_{(t)}, [H_{(t)}, A] \right] - \left[H_{(t)}, [H_{(t)}, A] \right] = \\ &= \left[H_{(t)}, H_{(t)} A - A H_{(t)} \right] - \left[H_{(t)}, H_{(t)} A - A H_{(t)} \right] = \\ &= p_3^2 A - H_{(t)} A H_{(t)} - H_{(t)} A H_{(t)} + A p_3^2 - H_{(t)} H_{(t)} + H_{(t)} A H_{(t)} + \\ &+ H_{(t)} A H_{(t)} - A H_{(t)} H_{(t)}. \end{aligned} \quad (A3-8.4)$$

⁺Se sobreentiende $H_{(t)} \rightarrow H_{(t)} I_{(t)}$, etc.

A3-9

DEMOSTRACION DE QUE (Secc. 3.1-1) EL QUE \bar{J} SEA DE 1a. CLASE ES CONSECUENTE CON EL HECHO DE QUE GENERA LAS ROTACIONES INFINITESIMALES \bar{J}

Es bien sabido que (Cap. 6) la función de onda $\Psi'(x)$ proveniente de rotar infinitesimalmente al sistema es

$$\Psi'(x) = \Psi(x) - \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu} J_{\mu\nu} \Psi(x) \tag{A3-9.1}$$

Como Ψ' es un estado posible, $\Psi'(x) \in \mathcal{W} \therefore \Lambda_{\perp}^{\omega\epsilon} \Psi'(x) = \Psi'(x)$
 $\therefore \Lambda_{\perp}^{\omega\epsilon} \Psi(x) - \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu} \Lambda_{\perp}^{\omega\epsilon} J_{\mu\nu} \Psi(x) = \Psi(x) - \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu} J_{\mu\nu} \Psi(x)$ (A3-9.2)

Como $\Lambda_{\perp}^{\omega\epsilon} \Psi = \Psi$, se verifica que (A3-10.2) se satisface si y sólo si $\Lambda_{\perp}^{\omega\epsilon} J_{\mu\nu} \Psi = J_{\mu\nu} \Psi$ (A3-9.3)
 para toda $\Psi \in \mathcal{W}$; por lo tanto, (A3-9.1) implica que $J^{\mu\nu}$ (cuya parte espacial es \bar{J}) es de la. clase.

A3-10

a) DEMOSTRACION DE (3.54-c).

En la representación (2.6),

$$\sigma^3 \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ -\psi_2 \\ \psi_3 \\ -\psi_4 \end{pmatrix} \quad \text{ó} \quad \sigma^3_{ij} \psi_j = -(-1)^i \psi_i \tag{A3-10.1}^*$$

entonces $\left[\frac{(\sigma^3_{(1)} + \sigma^3_{(2)})}{2} \Psi \right]_{i_1 i_2} = \frac{1}{2} \sigma^3_{i_1 j_1} \psi_{j_1 i_2} + \frac{1}{2} \sigma^3_{i_2 j_2} \psi_{i_1 j_2} = -\frac{1}{2} [(-1)^{i_1} + (-1)^{i_2}] \psi_{i_1 i_2}$ (A3-10.2)

Por lo tanto para toda $\psi \in \mathcal{E}$ es

$$\frac{\sigma^3_{(1)} + \sigma^3_{(2)}}{2} \psi = \begin{pmatrix} \psi_{11} & 0 & \psi_{13} & 0 \\ 0 & -\psi_{22} & 0 & -\psi_{24} \\ \psi_{31} & 0 & \psi_{33} & 0 \\ 0 & -\psi_{42} & 0 & -\psi_{44} \end{pmatrix} \tag{A3-10.3}$$

Si $\Psi \in \mathcal{W}$, es $\psi = \Lambda^{\omega\epsilon} \Psi$; entonces (2.63) implica que ψ =

2º miembro de (2.63) (con $\Psi \rightarrow \psi$); de allí sale (3.54-c).

Q.E.D.

b) DEMOSTRACION DE (3.55-d).

De (3.55-b) con $S = +1$, y de (A3-11.3) con $\psi \rightarrow \psi_1$ es

$$\begin{pmatrix} \psi_{1,11} & 0 & \psi_{1,13} & 0 \\ 0 & -\psi_{1,22} & 0 & -\psi_{1,24} \\ \psi_{1,31} & 0 & \psi_{1,33} & 0 \\ 0 & -\psi_{1,42} & 0 & -\psi_{1,44} \end{pmatrix} \xrightarrow{+1} \begin{pmatrix} \psi_{1,11} & \psi_{1,12} & \psi_{1,13} & \psi_{1,14} \\ \psi_{1,21} & \psi_{1,22} & \psi_{1,23} & \psi_{1,24} \\ \psi_{1,31} & \psi_{1,32} & \psi_{1,33} & \psi_{1,34} \\ \psi_{1,41} & \psi_{1,42} & \psi_{1,43} & \psi_{1,44} \end{pmatrix}$$

*No sumar sobre i (Cf. Secc. 1.c)

$$\therefore f_{1,12} = f_{1,13} = f_{1,21} = f_{1,22} = f_{1,23} = f_{1,24} = f_{1,32} = f_{1,33} = f_{1,41} = f_{1,42} = f_{1,43} = f_{1,44} = 0, \text{ de donde se deduce (3.55-d).}$$

A3-11

DEMOSTRACION DE (3.58).

a) Cálculo de $\Theta = \frac{1}{2}(\sigma_{11}^3 + \sigma_{22}^3) \Lambda_{\perp}^{w \epsilon^{sim}} \Psi$ PARA $\Psi \in \mathcal{E}^{sim}$

Por (3.54-a) $\frac{1}{2}(\sigma_{11}^3 + \sigma_{22}^3) \Lambda_{\perp}^{w \epsilon^{sim}} \Psi$ está dado por el 2º m. de (3.54-a), con

$$\Psi \rightarrow \Psi_i$$

$$\Theta = \frac{1}{2}(\sigma_{11}^3 + \sigma_{22}^3) \Lambda_{\perp}^{w \epsilon^{sim}} \Psi =$$

$$\left(\begin{array}{cccc} \Psi_{11} & 0 & \frac{1}{2m}(\Psi_{11} - \Psi_{33}) + \frac{1}{2}(\Psi_{12} - \Psi_{34}) & 0 \\ & -\Psi_{22} & 0 & \frac{1}{2m}(\Psi_{22} - \Psi_{44}) + \frac{1}{2}(\Psi_{34} - \Psi_{12}) \\ & & \Psi_{33} & 0 \\ & & & -\Psi_{44} \end{array} \right) \quad (A3-11.1)$$

b) Cálculo de $\frac{1}{2}(\sigma_{11}^3 + \sigma_{22}^3) \Lambda_{\perp}^{w \epsilon^{sim}} \Psi$ PARA $\Psi \in \mathcal{E}^{sim}$

$\frac{1}{2}(\sigma_{11}^3 + \sigma_{22}^3) \Psi = \Lambda_{\perp}^{w \epsilon^{sim}} \Theta$ - 2º m. de (2.63) con $\Psi \rightarrow \Theta$ -

$$\left(\begin{array}{cccc} \Psi_{11} & 0 & \frac{1}{2m}(\Psi_{11} - \Psi_{33}) & \frac{1}{2m}(\Psi_{11} + \Psi_{44}) \\ 0 & -\Psi_{22} & \frac{-1}{2m}(\Psi_{22} - \Psi_{44}) - \frac{1}{2}(\Psi_{34} - \Psi_{12}) & \frac{1}{2m}(\Psi_{22} - \Psi_{44}) \\ \frac{1}{2m}(\Psi_{11} - \Psi_{33}) & \frac{-1}{2m}(\Psi_{22} - \Psi_{44}) - \frac{1}{2}(\Psi_{34} - \Psi_{12}) & \Psi_{33} & 0 \\ \frac{1}{2m}(\Psi_{11} + \Psi_{44}) & \frac{1}{2m}(\Psi_{22} - \Psi_{44}) & 0 & -\Psi_{44} \end{array} \right) \quad (A3-11.2)$$

c) Soluciones de (3.58-a). Por otro lado si $\Psi \in \mathcal{E}^{sim}$,

$$S \Psi = S \left(\begin{array}{cccc} \Psi_{11} & \Psi_{12} & \Psi_{13} & \Psi_{14} \\ \Psi_{12} & \Psi_{22} & \Psi_{23} & \Psi_{24} \\ \Psi_{13} & \Psi_{23} & \Psi_{33} & \Psi_{34} \\ \Psi_{14} & \Psi_{24} & \Psi_{34} & \Psi_{44} \end{array} \right) \quad (A3-11.3)$$

+Observar que $\Theta_{11} = \Psi_{11}$, $\Theta_{12} = \Theta_{21} = \Theta_{34} = \Theta_{43} = 0$; $\Theta_{22} = -\Psi_{22}$;

$$\Theta_{33} = \Psi_{33} ; \Theta_{44} = -\Psi_{44} .$$

Por (A3-11.3) las soluciones de (3.58) deben cumplir entre otras las condiciones de igualar los elementos 11, 12, 22, 33, 34 y 44 de dichas ecuaciones (con $\Psi \rightarrow \Psi_s^{(\epsilon)}$):

$$\begin{aligned}
 11) \quad & \Psi_{s,11}^{(\epsilon)} = s \Psi_{s,11}^{(\epsilon)} \\
 12) \quad & 0 = s \Psi_{s,12}^{(\epsilon)} \\
 22) \quad & -\Psi_{s,22}^{(\epsilon)} = s \Psi_{s,22}^{(\epsilon)} \\
 33) \quad & \Psi_{s,33}^{(\epsilon)} = s \Psi_{s,33}^{(\epsilon)} \\
 34) \quad & 0 = s \Psi_{s,34}^{(\epsilon)} \\
 44) \quad & -\Psi_{s,44}^{(\epsilon)} = s \Psi_{s,44}^{(\epsilon)}
 \end{aligned}
 \tag{A3-11.4}$$

Las (A3-11.4) son condiciones necesarias pero no suficientes (pues faltan igualar los restantes elementos) para las $\Psi_s^{(\epsilon)}$ de (3.58-a) Por lo tanto las únicas soluciones posibles (pero aún inseguras) son

$$s = 1, \quad s = 0, \quad s = -1;$$

Las (A3-11.4) determinan la parte I de $\Psi_s^{(\epsilon)}$ (ver (2.9-b)):

$$s = 1, \quad (\Psi_1^{(\epsilon)})^I = \begin{pmatrix} \Psi_{1,11}^{(\epsilon)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Psi_{1,33}^{(\epsilon)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
 \tag{A3-11.5-a}$$

$$s = 0, \quad (\Psi_0^{(\epsilon)})^I = \begin{pmatrix} 0 & \Psi_{0,12}^{(\epsilon)} & 0 & 0 \\ \Psi_{0,12}^{(\epsilon)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Psi_{0,34}^{(\epsilon)} \\ 0 & 0 & \Psi_{0,34}^{(\epsilon)} & 0 \end{pmatrix}
 \tag{A3-11.5-b}$$

$$s = -1, \quad (\Psi_{-1}^{(\epsilon)})^I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Psi_{-1,22}^{(\epsilon)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Psi_{-1,44}^{(\epsilon)} \end{pmatrix}
 \tag{A3-11.5-c}$$

Recalcamos que las $\Psi_s^{(\epsilon)}$ cuya parte I está dada por (A3-11.5) son soluciones aún inseguras; pero que no puede haber soluciones de otro tipo pues lo impediría (A3-11.4).

De aquí en adelante nos restringiremos a trabajar en el espacio spino-

rial W_p de Secc. 2.c-3; las autofunciones en W se obtienen fácilmente si se conocen las autofunciones en W_{sp}^f .

Los dos vectores de W_{sp}^f cuyas partes I son

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

son del tipo (A3-11.5-a); por (2.6-c) para el primero es

$$\xi = (\Psi_1^{(+)}, \Psi_1^{(-)}) = +1$$

y para el segundo

$$\xi = -1;$$

ponemos, pues:

$$\left(\Psi_1^{(+)} \right)^I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \left(\Psi_1^{(-)} \right)^I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{A3-11.6-a})$$

Observamos que los dos vectores que acabamos de definir subtienden todo el subespacio de $\xi_{sp}^{sim I}$ definido por las (A3-11.5-a). Pero de (2.63) y (2.9-b) vemos que un sistema de vectores Ψ_n de W_{sp}^f es completo en W_{sp}^f si sus partes Ψ_n^I forman sistema completo en $\xi_{sp}^{sim I}$; de manera análoga concluimos que las $\Psi_1^{(+)}$ y $\Psi_1^{(-)}$ cuyas partes I están dadas en (A3-11.6-a) forman sistema completo en el subespacio de W_{sp}^f definido por las soluciones de (3.58-a) con $S = +1$.

Con ayuda de (2.63) terminamos de construir las $\Psi_1^{(\pm)}$:

$$\Psi_1^{(+)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{p^3}{2m} & \frac{p_4}{2m} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{p^3}{2m} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{p_4}{2m} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \Psi_1^{(-)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{p^3}{2m} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{p_4}{2m} & 0 \\ -\frac{p^3}{2m} & -\frac{p_4}{2m} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{A3-11.7-a})$$

Como ya hemos dicho, nuestras "soluciones" (hasta aquí) pueden no ser realmente soluciones de (3.58-a); pero son las soluciones correctas pues de (A3-11.7-a) y (A3-11.2) deducimos que efectivamente es

$$\left(\frac{\sigma_{\omega}^3 + \tau_{\omega}^3}{2} \right)_{sim}^{(\omega)} \Psi_1^{(\pm)} = + \Psi_1^{(\pm)}.$$

Como ya demostramos, no puede haber otras soluciones (independientes de éstas) con $S = +1$.

Procediendo análogamente para $S = 0$ y $S = -1$ se llega a que

$$\Psi_0^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \Psi_0^{(-1)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad (A3-11.6-b)$$

$$\Psi_{-1}^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \Psi_{-1}^{(-1)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad (A3-11.6-c)$$

Por lo tanto,

$$\Psi_0^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \frac{p-}{2m} & \frac{-p^3}{2m} \\ 1 & 0 & \frac{p^3}{2m} & \frac{p-}{2m} \\ \frac{p-}{2m} & \frac{p^3}{2m} & 0 & 0 \\ \frac{-p^3}{2m} & \frac{p-}{2m} & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \Psi_0^{(-1)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{-p-}{2m} & \frac{-p^3}{2m} \\ 0 & 0 & \frac{p^3}{2m} & \frac{-p-}{2m} \\ \frac{-p-}{2m} & \frac{p^3}{2m} & 0 & 1 \\ \frac{-p^3}{2m} & \frac{-p-}{2m} & 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad (A3-11.7-b)$$

$$\Psi_{-1}^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{p-}{2m} & \frac{-p^3}{2m} \\ 0 & \frac{p-}{2m} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-p^3}{2m} & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \Psi_{-1}^{(-1)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{-p-}{2m} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{p^3}{2m} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-p-}{2m} & \frac{p^3}{2m} & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad (A3-11.7-c)$$

Las (A3-11.7) coinciden con las (3.58-o); ya hemos demostrado que no hay otros autovectores independientes. Es fácil ver que forman sistema completo en \mathcal{W}_p , pues sus partes I lo forman en \mathcal{E}^{4m-1} ; además son linealmente independientes porque

$$\sum_{s, \epsilon} a_s^{(\epsilon)} \Psi_s^{(\epsilon)} = 0 \quad (A3-11.8)$$

implica

$$\sum_{s, \epsilon} a_s^{(\epsilon)} \Psi_s^{(\epsilon)} = 0. \quad (A3-11.9)$$

Basta observar (A3-11.6) para ver que estas últimas implican

$$Q_s^{(t)} = 0.$$

Finalmente, son ortogonales (respecto de (2.2)) como se verifica con (2.6-c); siendo pseudo-normalizadas por construcción, se cumple la (3.58-a). Q.E.D.

A3-12

a) DEMOSTRACION DE QUE EL TRANSFORMADO DE UN OPERADOR DE 1a. CLASE ES DE 1a. CLASE (SECC. 3.m-4).

Efectuando operaciones, es para toda $\Psi' \in W'$ (si A' es el transformado principal de A),

$$\{[(H_{(1)} I_{(2)})', A'] - [(I_{(1)} H_{(2)})', A']\} \Psi' - U \{[(H_{(1)} I_{(2)}), A] - [(I_{(1)} H_{(2)}), A]\} \Psi$$

por lo que (3.33) \Leftrightarrow (3.79). Demostrada la (3.79) para los transformados principales, es trivial que vale también para todos los otros transformados (cf. (3.78-o)). Q.E.D.

b) DEMOSTRACION DE (3.80-b).

$$A' = (I_{(1)} \gamma_{(2)}^0)' A^+ (I_{(1)} \delta_{(2)}^0)' - U (I_{(1)} \gamma_{(2)}^0) U^+ U A^+ U^+ U (I_{(1)} \delta_{(2)}^0) U^+ - U (\delta_{(2)}^0 A^+ \gamma_{(2)}^0) U^+ - U \bar{A} U^+ = (\bar{A})' . \quad \text{Q.E.D.}$$

A3-13

a) DEMOSTRACION DE (3.91).

Seguimos el procedimiento empleado por Foldy y Wouthuysen para spin $\frac{1}{2}$:
1a. demostración.

De (3.96) y (3.90) es trivial que

$$i \frac{\partial}{\partial t} \Phi' = p_0 \Phi' \quad ; \quad i \frac{\partial}{\partial t} \chi' = -p_0 \chi' \quad \text{(A3-13.1)}$$

de donde sigue la (3.91). Q.E.D.

2a. demostración.

Por Cap. 4 tenemos la descomposición en ondas planas en la vieja representación,

$$\Psi^{(\pm)}(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sum_{\mathbf{r}} \int \frac{d^3 p'}{\sqrt{2 p'_0}} \alpha(\mathbf{r}, \vec{p}') u_{\pm}(\mathbf{r}, \vec{p}') e^{\mp i \vec{p}' \cdot \mathbf{x}_0 \pm i \vec{p}' \cdot \vec{x}} \quad \text{(A3-13.2)}$$

Por (3.10) es

$$u_{\pm} = \frac{1}{2} \left(I \pm \frac{H_{\omega}}{p_0} \right) u$$

y, combinando (2.3) con (3.10) es

$$u_{\pm} = \frac{1}{2} \left(I \pm \frac{H_{\omega}}{p_0} \right) \frac{1}{2} \left(I \pm \frac{H_{\omega}}{p_0} \right) u \quad ; \quad \text{(A3-13.3)}$$

de donde,

$$\Psi^{(+)}(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sum_{\mathbf{r}} \int \frac{d^3 p'}{\sqrt{2p'_0}} \mathbf{a}(\mathbf{r}, \vec{p}') \frac{1}{2} \left(\mathbf{I} \pm \frac{\mathbf{H}_{(2)}}{p'_0} \right) \frac{1}{2} \left(\mathbf{I} \pm \frac{\mathbf{H}_{(2)}}{p'_0} \right) \mathbf{u}(\mathbf{r}, \vec{p}') \times e^{\mp i \mathbf{p}' \cdot \mathbf{x}_0 \pm i \mathbf{p}' \cdot \mathbf{x}} \quad (\text{A3-13.4})$$

Por otra parte, (3.81-a) puede ponerse

$$\Pi = \frac{(\beta H + p_0)}{[2p_0(p_0 + m)]^{1/2}} \quad (\text{A3-13.5})$$

con lo cual ((3.84) se transforma en

$$\mathbf{U} = \frac{(\beta_{(2)} H_{(2)} + p_0)(\beta_{(2)} H_{(2)} + p_0)}{[2p_0(p_0 + m)]} \quad (\text{A3-13.6})$$

Reemplazando (A3-13.4) y (A3-13.6) en $\Psi^{(\pm)'} = \mathbf{U} \Psi^{(\pm)}$ se llega tras algunas operaciones a

$$\Psi^{(\pm)'} = \frac{1}{2} \left(\mathbf{I} \pm \beta_{(2)} \right) \frac{1}{2} \left(\mathbf{I} \pm \beta_{(2)} \right) \times \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sum_{\mathbf{r}} \int \frac{d^3 p'}{\sqrt{2p'_0}} \mathbf{a}(\mathbf{r}, \vec{p}') \frac{p'_0}{2(p'_0 + m)} \left(\mathbf{I} \pm \frac{\mathbf{H}_{(2)}}{p'_0} \right) \left(\mathbf{I} \pm \frac{\mathbf{H}_{(2)}}{p'_0} \right) \mathbf{u}(\mathbf{r}, \vec{p}') \times e^{\mp i \mathbf{p}' \cdot \mathbf{x}} \quad (\text{A3-13.7})$$

Como $\Psi' = \Psi^{(+)} + \Psi^{(-)}$, resulta

$$\Psi' = \frac{1}{2} \left(\mathbf{I} + \beta_{(2)} \right) \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sum_{\mathbf{r}} \int \frac{d^3 p'}{\sqrt{2p'_0}} \mathbf{a}(\mathbf{r}, \vec{p}') \frac{p'_0}{2(p'_0 + m)} \times \left(\mathbf{I} \pm \frac{\mathbf{H}_{(2)}}{p'_0} \right) \left(\mathbf{I} \pm \frac{\mathbf{H}_{(2)}}{p'_0} \right) \mathbf{u}(\mathbf{r}, \vec{p}') e^{\mp i \mathbf{p}' \cdot \mathbf{x}} \quad (\text{A3-13.8})$$

Entonces, con (3.90) se obtiene

$$\left\{ \begin{matrix} \phi \\ \chi \end{matrix} \right\} = \left(\frac{\mathbf{I} \pm \beta_{(2)}}{2} \right) \left(\frac{\mathbf{I} \pm \beta_{(2)}}{2} \right) \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sum_{\mathbf{r}} \int \frac{d^3 p'}{\sqrt{2p'_0}} \frac{p'_0}{2(p'_0 + m)} \times \mathbf{a}(\mathbf{r}, \vec{p}') \left(\mathbf{I} \pm \frac{\mathbf{H}_{(2)}}{p'_0} \right) \left(\mathbf{I} \pm \frac{\mathbf{H}_{(2)}}{p'_0} \right) \mathbf{u}(\mathbf{r}, \vec{p}') e^{\mp i \mathbf{p}' \cdot \mathbf{x}} \quad (\text{A3-13.9})$$

Comparando (A3-13.7) y (A3-13.9) resulta la (3.91). Q.E.D.

3a. demostración

Hasta aquí hemos seguido el procedimiento de Foldy y Wouthuysen para spin $\frac{1}{2}$ (procedimientos 1 y 2); pero quizás sea aún más breve observar que (3.95-b) y (3.90) implican directamente la (3.91). Q.E.D.

A3-14

DEMOSTRACION DE (3.92).

Por (3.95-a),

$$(\mathbf{H}_{(2)} \mathbf{I}_{(2)})' = \gamma_{(2)}^0 \mathbf{I}_{(2)} p_0 \quad (\text{A3-14.1})$$

De la misma manera se obtiene

$$(\mathbf{I}_{(2)} \mathbf{H}_{(2)})' = \mathbf{I}_{(2)} \gamma_{(2)}^0 p_0 \quad (\text{A3-14.2})$$

Por (2.3-c) si $\Psi \in W$ ($\therefore \Psi' \in W'$) es

$$p_0 \gamma_{(1)}^0 \Psi' = p_0 \gamma_{(1)}^c \Psi'$$

Como $p_0 \neq 0$, se obtiene (3.92).

Q.E.D.

A3-15

DEMOSTRACION DE (3.105).

$$[(H_{(1)} \gamma_{(1)}^c - H_{(1)} \gamma_{(1)}^0) \wedge^{\bar{1}}]' = \frac{1}{2} [H_{(1)} \gamma_{(1)}^c - H_{(1)} \gamma_{(1)}^0 - H_{(1)} \gamma_{(1)}^c + H_{(1)} \gamma_{(1)}^0]'$$

Usando (3.86-b) y (3.94) se obtiene

$$\begin{aligned} []' &= \frac{1}{2} [-\vec{\gamma}_{(1)}^c \cdot \vec{p} + \vec{\gamma}_{(1)}^0 \cdot \vec{p} + \gamma_{(1)}^c \vec{\alpha}_{(1)} \cdot \vec{p} - \gamma_{(1)}^0 \vec{\alpha}_{(1)} \cdot \vec{p}] = \\ &= -\wedge^{\bar{1}} (\vec{\gamma}_{(1)}^c - \vec{\gamma}_{(1)}^0) \cdot \vec{p} \end{aligned}$$

Reemplazando en (2.72-c), junto con (3.102) y (3.104) se deduce la (3.105).

Q.E.D.

A3-16

a) DEMOSTRACION DE (3.118)

Utilizando (3.80-a) y (3.86) es (en la representación de FWT),

$$\begin{aligned} 1 \frac{\partial}{\partial p^a} &= \frac{(m \delta^c - \vec{\alpha} \cdot \vec{p})}{p_0} 1 \frac{\partial}{\partial p^a} \frac{(m \delta^c - \vec{\alpha} \cdot \vec{p})}{p_0} = \\ &= \frac{(m \delta^c - \vec{\alpha} \cdot \vec{p})}{p_0} 1 \left[\frac{\partial}{\partial p^a} \frac{(m \delta^c - \vec{\alpha} \cdot \vec{p})}{p_0} \right] + \frac{(m \delta^c - \vec{\alpha} \cdot \vec{p})^2}{p_0} 1 \frac{\partial}{\partial p^a} \end{aligned}$$

Como

$$\left(\frac{m \delta^c - \vec{\alpha} \cdot \vec{p}}{p_0} \right)^2 = (\gamma^c)^2 = I, \text{ se obtiene la (3.118).}$$

b) DEMOSTRACION DE (3.122)

Por (3.121-b), (3.78-b), (3.84) y (3.82-b)

$$\begin{aligned} q^a &= U_{(1)} \left[U_{(1)} 1 \frac{\partial}{\partial p^a} U_{(1)}^\dagger \right] U_{(1)}^\dagger = \\ &= U_{(1)} X_{(1)}^a U_{(1)}^\dagger = \\ &= U_{(1)} \left[X^a + 1 \frac{\gamma_{(1)}^a}{2 p_0} - 1 \frac{(\vec{\gamma} \cdot \vec{p})_{(1)} p^a}{2 p_0^2 (p_0 + m)} + \frac{(\vec{p} \times \vec{\sigma})_{(1)}^a}{2 p_0 (p_0 + m)} \right] U_{(1)}^\dagger = \\ &= U_{(1)} X^a U_{(1)}^\dagger + \frac{1 \gamma_{(1)}^a}{2 p_0} - 1 \frac{(\vec{\gamma} \cdot \vec{p})_{(1)} p^a}{2 p_0^2 (p_0 + m)} + \frac{(\vec{p} \times \vec{\sigma})_{(1)}^a}{2 p_0 (p_0 + m)} \end{aligned} \tag{A3-16.2}$$

Pero $U_{(1)} X^a U_{(1)}^\dagger = X_{(1)}^a$; volviendo a usar (3.82-b) y (A3-16.2) se obtiene la (3.122-b). La (3.122-a) se obtiene de la anterior, usando una vez más la (3.82-b).

Q.E.D.

c) DEMOSTRACION DE (3.124).

En la representación de FWT es (cf. 3.45)

$$\frac{d}{dt} (1 \frac{\partial}{\partial \vec{p}}) = 1 \left[\gamma^c p^c, 1 \frac{\partial}{\partial \vec{p}} \right] = \frac{\vec{r}}{p_0} \gamma^c = \frac{\vec{r}}{p_0} \left(\frac{H}{p_0} \right) \tag{A3-16.3}$$

Por otra parte,

$$\begin{aligned} \langle \bar{B} \rangle = \langle B \rangle^* &\Rightarrow \frac{d}{dt} \langle \bar{B} \rangle = \frac{d}{dt} \langle B \rangle^* \Rightarrow \left\langle \frac{d}{dt} \bar{B} \right\rangle = \left\langle \frac{d}{dt} B \right\rangle^* \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{d}{dt} \bar{B} \approx \overline{\left(\frac{d}{dt} B \right)}. \end{aligned} \tag{A3-16.4}$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{p} \frac{H'}{p} \right) = \frac{\dot{p}}{p^2} \left(\frac{H'}{p} \right) ; \text{ entonces, de (A3-16) se deduce,}$$

$$\frac{d}{dt} \left(1 \frac{\partial}{\partial \vec{p}} \right) = \frac{d}{dt} 1 \frac{\partial}{\partial \vec{p}} \therefore \frac{d}{dt} \left[1 \left(\frac{\partial}{\partial \vec{p}} + i \frac{\partial}{\partial \vec{p}} \right) \right] = \frac{\dot{p}}{p_0} \left(\frac{H'}{p_0} \right) \quad (\text{A3-16.5})$$

Con (3.46-b),

$$\frac{d}{dt} \left[\left(1 \frac{\partial}{\partial \vec{p}} \right)^{(w)} \right] \underset{w}{\approx} \frac{\dot{p}}{p_0} \left(\frac{H'}{p_0} \right) \quad (\text{A3-16.6})$$

Volviendo a la representación original, se tiene la (3.124).

A4-1

EL PARAMETRO r DE LOS SPINORES $u_{\xi}(r, \vec{p})$ DE SPIN $\frac{1}{2}$.

Para evitar confusiones en una sección posterior, necesitaremos distinguir explícitamente entre dos definiciones usuales de r .

Definición A.

Se pone

$$u_{+}(1, 0) = \sqrt{2m} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} ; u_{+}(-1, 0) = \sqrt{2m} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} ; u_{-}(1, 0) = \sqrt{2m} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} ; u_{-}(-1, 0) = \sqrt{2m} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} ;$$

(A4-1.1)

entonces $u_{\xi}(r, \vec{p})$ queda definido mediante (4.7), y el "r" de $u_{\xi}(r, \vec{p})$ es por definición el "r" de $u_{\xi}(r, 0)$.

Si bien

$$\sigma_z u_{\xi}(r, 0) = r u_{\xi}(r, 0) \quad (\text{A4-1.2})$$

las $u_{\xi}(r, \vec{p})$ aquí definidas no resultan autofunciones de σ_z (salvo $p_x = p_y = 0$) ni de $\vec{\sigma} \cdot \vec{p} / |\vec{p}|$ (salvo $\vec{p} = 0$). Pero conducen a las formas tradicionales

$$u_{+}(1, \vec{p}) = \text{const} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ p^3 / (m + p_z) \\ p_x / (m + p_z) \end{pmatrix}, \text{ etc.} \quad (\text{A4-1.3})$$

Definición B.

Se construyen las $u_{\xi}(r, \vec{p})$ como autofunciones de la helicidad, con autovalor $r/2$:

$$\frac{1}{2} \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{|\vec{p}|} u_{\xi}(r, \vec{p}) = \frac{1}{2} r u_{\xi}(r, \vec{p}) \quad (\text{A4-1.4})$$

Se demuestra (Messiah, op cit¹⁸, tomo II, Seco. XX-25) que un procedimiento equivalente pero más simple para obtener estas $u_{\xi}(r, \vec{p})$ es buscar las $u_{\xi}(r, 0)$ tales que

$$\frac{1}{2} \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{|\vec{p}|} u_{\xi}(r, 0) = \frac{1}{2} r u_{\xi}(r, 0) \quad (\text{A4-1.5})$$

obteniendo luego las $u_{\xi}(r, \vec{p})$ mediante (4.7).

A4-2

EL PARAMETRO γ DE LOS SPINORES $U_{\pm}(\mathbf{r}, \vec{p})$ DE SPIN 1.

Definición A.

Por analogía con spin $\frac{1}{2}$ ponemos

$$U_{+}(2,0) = \sqrt{2m} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad U_{-}(2,0) = \sqrt{2m} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$U_{+}(0,0) = \sqrt{m} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad U_{-}(0,0) = \sqrt{m} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$U_{+}(-2,0) = \sqrt{2m} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad U_{-}(-2,0) = \sqrt{2m} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(A4-2.1)

que son autofunciones de la componente z de $\frac{1}{2}(\vec{\sigma}_{(1)} + \vec{\sigma}_{(2)})$. Entonces $U_{\epsilon}(\mathbf{r}, \vec{p})$ queda definido mediante (4.27), y el " γ " de $U_{\epsilon}(\mathbf{r}, \vec{p})$ es, por definición, el " γ " de las $U_{\epsilon}(\mathbf{r}, 0)$.

Es equivalente usar (4.18) empleando las $u_{\epsilon}(\mathbf{r}, \vec{p})$ de tipo A definidas en el apéndice anterior.

Definición B.

Similarmente a spin $\frac{1}{2}$, construimos las $U_{\epsilon}(\mathbf{r}, \vec{p})$ como autofunciones en \mathcal{W} de la helicidad, con autovalor $\gamma/2$. Con (3.61),

$$\frac{\vec{\sigma}_{(1)} + \vec{\sigma}_{(2)}}{2|\vec{p}|} U_{\epsilon}(\mathbf{r}, \vec{p}) = \frac{\gamma}{2} U_{\epsilon}(\mathbf{r}, \vec{p}). \quad (A4-2.2).$$

Es equivalente usar (4.18) empleando las $u_{\epsilon}(\mathbf{r}, \vec{p})$ de tipo B.

Nota: Al igual que para spin $\frac{1}{2}$, la definición A da un estado de polarización, pero no un autoestado de la helicidad (salvo $\vec{p} = 0$) ni de la 3a. componente del spin (salvo $p_x = p_y = 0$). La polarización correspondiente a la definición A es la de una partícula que en un sistema de reposo está en un autoestado de la 3a. componente del spin.

A4-3

DEMOSTRACION DE (4.21).

Como función de \vec{x} solamente, (es decir, t, i_1 e i_2 fijos), $\Psi_{i_1, i_2}(t, \vec{x})$ admite desarrollo en integral de Fourier, si se trabaja con hipótesis matemá-

ticas adecuadas,

$$\Psi_{i_1 i_2}(t, \vec{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d^3 p}{\sqrt{2 p_0}} C_{i_1 i_2}(\vec{p}, t) e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}} \quad (A4-3.1)$$

Impongo $\Psi \in \mathcal{K}$; entonces,

$$\Lambda_{\perp}^{\mathcal{K}\mathcal{E}} \Psi(t, \vec{x}) = \Psi(t, \vec{x}). \quad (A4-3.2)$$

Usando (A4-3.1) e igualando coeficientes de Fourier,

$$\Lambda_{\perp}^{\mathcal{K}\mathcal{E}}(\vec{p}) C(\vec{p}, t) = C(\vec{p}, t) \quad (A4-3.3)$$

o sea (para t fijo)

$$C(\vec{p}, t) \in W_{SP}^P \quad (A4-3.4)$$

Como los 6 spinores (4.18) subtienden W_{SP}^P (cf. Secc. 4-b-1), entonces existen coeficientes $d(r, \vec{p}, t)$ y $e(r, \vec{p}, t)$ tales que para t fijo,

$$C_{i_1 i_2}(\vec{p}, t) = \sum_r [d(r, \vec{p}, t) u_{+, i_1 i_2}(r, \vec{p}) + e(r, \vec{p}, t) u_{-, i_1 i_2}(r, \vec{p})]. \quad (A4-3.5)$$

(Nótese que ni d ni e tienen índices spinoriales).

En (A4-3.1),

$$\Psi(t, \vec{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sum_r \int \frac{d^3 p}{\sqrt{2 p_0}} d(r, \vec{p}, t) u_+(r, \vec{p}) e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}} + \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sum_r \int \frac{d^3 p}{\sqrt{2 p_0}} e(r, \vec{p}, t) u_-(r, \vec{p}) e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}} \quad (A4-3.6)$$

Usando (3.4) y (4.18) resulta

$$d(r, \vec{p}, t) = d(r, \vec{p}, 0) e^{-i p_0 t}; \quad e(r, \vec{p}, t) = e(r, \vec{p}, 0) e^{i p_0 t};$$

llamando

$$a(r, \vec{p}) = d(r, \vec{p}, 0); \quad b(r, \vec{p}) = e^*(r, -\vec{p}, 0).$$

se obtiene (4.21).

Q.E.D.

A5-1

a) DEMOSTRACION DE (5.15).

Formamos la expresión

$$\hat{\Phi}^{(\mathcal{E})}(z, x^0) = \frac{\lambda}{\sqrt{2m}} \int d^3 x \left\{ \Psi_{(1)}^{(\mathcal{E})}(z-x) \Psi_{(2)}^{(\mathcal{E})}(x) + (1) \leftrightarrow (2) \right\}; \quad (A5-1.1)$$

ahora, si $\Psi^{(n)}(x)$ satisface a la ecuación de Dirac, entonces

$$\varphi(x) = \int \Psi^{(n)}(x^0, \vec{x}) dx^0 \quad (\text{integral indefinida}) \quad (A5-1.2)$$

también la satisface; por lo tanto $\hat{\Phi}^{(\mathcal{E})}$ es del tipo de las $\hat{\Phi}^{(\mathcal{E})}$ definidas en (5.1) con la sustitución $\Psi^{(n)} \rightarrow \varphi$.

Como el teorema 5.a-1 vale para cualquier par de soluciones Ψ', Ψ'' , vale también para Ψ', φ ; de donde, $\hat{\Phi}^{(\mathcal{E})}$ cumple (5.3):

$$\frac{\partial \hat{\Phi}^{(\mathcal{E})}}{\partial x^0}(z, x^0) = 0. \quad (A5-1.3)$$

(Esta ecuación puede obtenerse también usando (5.5) en (A5-1.1)).

De (5.7), (A5-1.1) y (A5-1.3) obtenemos

$$\Psi^{(\mathcal{E})}(z) = -\frac{\lambda}{\sqrt{2m}} \int d^3 x \left\{ \left[1 \frac{\partial}{\partial x^0} \Psi_{(1)}^{(\mathcal{E})}(z-x) \right] \Psi_{(2)}^{(\mathcal{E})}(x) + (1) \leftrightarrow (2) \right\}. \quad (A5-1.4)$$

Para obtener (5.15) solo resta intercambiar $\Psi' \leftrightarrow \Psi''$.

b) DEMOSTRACION DE (5.16).

Como

$$i \frac{\partial}{\partial \vec{x}} \Psi''(\vec{x}) = \left[-i \frac{\partial}{\partial \vec{x}} \cdot \vec{\alpha} + m\beta \right] \Psi''(\vec{x}),$$

$$\begin{aligned} i \frac{\partial}{\partial \vec{x}} \Psi''(\vec{z} - \vec{x}) &= -i \frac{\partial}{\partial (\vec{z} - \vec{x})} \Psi''(\vec{z} - \vec{x}) = \\ &= - \left[-i \frac{\partial}{\partial (\vec{z} - \vec{x})} \cdot \vec{\alpha} + m\beta \right] \Psi''(\vec{z} - \vec{x}) = \\ &= \left[-i \frac{\partial}{\partial \vec{z}} \cdot \vec{\alpha} + m\beta \right] \Psi''(\vec{z} - \vec{x}) \\ &= -H(\vec{z}) \Psi''(\vec{z} - \vec{x}). \end{aligned}$$

(A5-1.5)

(A5-1.5) en (5.15) implica (5.16).

Q.E.D.

A6-1

a) DEMOSTRACION DE (6.13).

Multiplicando (6.11) por P a la izquierda, y por P⁻¹, y teniendo en cuenta (6.12-b),

$$\Psi'(\vec{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d^3 p}{\sqrt{2p_0}} \left[a(\vec{r}, \vec{p}) u(\vec{r}, \vec{p}) e^{i\vec{p}\vec{x}} + b^\dagger(\vec{r}, \vec{p}) v(\vec{r}, \vec{p}) e^{ipx} \right]. \quad (A6-1.1)$$

Por otra parte, como $p\vec{x} = p_0 x_0 - \vec{p} \cdot \vec{x}$,

$$\begin{aligned} \Psi(\vec{x}') &= \Psi(x_0', -\vec{x}) = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d^3 p}{\sqrt{2p_0}} \left[a(\vec{r}, \vec{p}) u(\vec{r}, \vec{p}) e^{-i(\vec{p}\vec{x}' + \vec{p} \cdot \vec{x})} + b^\dagger(\vec{r}, \vec{p}) v(\vec{r}, \vec{p}) e^{i(p_0 x_0' + \vec{p} \cdot \vec{x})} \right]; \end{aligned}$$

cambiando de variable de integración

$$\Psi(\vec{x}') = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d^3 p}{\sqrt{2p_0}} \left[a(\vec{r}, -\vec{p}) u(\vec{r}, -\vec{p}) e^{-ipx} + b^\dagger(\vec{r}, -\vec{p}) v(\vec{r}, -\vec{p}) e^{ipx} \right]. \quad (A6-1.2)$$

De (6.12-a), (A6-1.1) y (A6-1.2) se deduce inmediatamente (6.13).

b) DEMOSTRACION DE (6.14).

Fijando \vec{p} , el subespacio $W_{\vec{p}}^{(+)}$ subtendido por las $u(\vec{r}, \vec{p}) = u_{\downarrow}(\vec{r}, \vec{p})$ es el de los autovectores de $H(\vec{p}) = [\vec{\alpha} \cdot \vec{p} + m\beta]_{(1)(2)} I_{(2)}$ con autovalor $+p_0$ (cf. Secc.4.b) y que cumplen además $u_j = u_{ji}$.

$$u \in W_{\vec{p}}^{(+)} \iff \begin{cases} [\vec{\alpha} \cdot \vec{p} + m\beta]_{(1)(2)} u = p_0 u \\ u_j = u_{ji} \end{cases} \quad (A6-1.3)$$

Si en

$$[\vec{\alpha} \cdot \vec{p} + m\beta]_{(1)(2)} u(\vec{r}', +\vec{p}) = p_0 u(\vec{r}', +\vec{p})$$

cambiamos \vec{p} por $-\vec{p}$ (lo cual puede implicar cambiar \vec{r} por $\vec{r}' \neq \vec{r}$; ello depende de la definición de \vec{r})⁺ se obtiene,

$$[-\vec{\alpha} \cdot \vec{p} + m\beta]_{(1)(2)} u(\vec{r}, -\vec{p}) = p_0 u(\vec{r}, -\vec{p})$$

de donde

⁺Con la definición A (cf. A4-2) es $\vec{r} = \vec{r}'$; con la B es $\vec{r} = -\vec{r}'$.

$$[\vec{\alpha} \cdot \vec{p} = m_{(1)} [\delta_{(1)}^0 \gamma_{(1)}^0] U(\vec{r}, -\vec{p})] = p_0 [\gamma_{(1)}^0 \delta_{(1)}^0] U(\vec{r}, -\vec{p});$$

por lo tanto $\delta_{(1)}^0 \delta_{(1)}^0 U(\vec{r}, -\vec{p})$ cumple (A6-1.3), de donde se sigue (6.14-a).

Análogamente (6.14-b).

Q.E.D.

c) DEMOSTRACION DE FORMULAS PARA SPIN $\frac{1}{2}$ QUE NECESITAMOS.

Para spin $\frac{1}{2}$ hay fórmulas análogas a las (6.14):

$$\begin{aligned} \int u(\vec{r}, -\vec{p}) &= \sum_{r=1}^{m+1} \lambda(\vec{r}, \vec{r}', \vec{p}) u(\vec{r}, \vec{p}) \\ \int v(\vec{r}, -\vec{p}) &= \sum_{r=1}^{m+1} \mu(\vec{r}, \vec{r}', \vec{p}) u(\vec{r}, \vec{p}). \end{aligned} \tag{A6-1.4}$$

Los coeficientes λ y μ dependen de la definición elegida para r (ver A4-1).

g₁) Definición A de r .

De (4.9) y (4.7) obtenemos

$$u(\vec{r}, \vec{p}) = \frac{1}{\sqrt{2m(m+p_0)}} (m + p_0 + \vec{\alpha} \cdot \vec{p}) u_+(\vec{r}, 0) \tag{A6-1.5}$$

$$v(\vec{r}, \vec{p}) = \frac{1}{\sqrt{2m(m+p_0)}} (m + p_0 + \vec{\alpha} \cdot \vec{p}) u_-(\vec{r}, 0)$$

Recordemos que " r " se define primero para $u_\epsilon(\vec{r}, 0)$ mediante (A4-1.1) y luego se define " r " de $u(\vec{r}, p)$ (ó $v(\vec{r}, p)$) como el " r " del $u(\vec{r}, 0)$ (ó $v(\vec{r}, 0)$) con el cual está vinculado mediante (A6-1.5). Por lo tanto, al cambiar $\vec{p} \rightarrow -\vec{p}$,

$$u(\vec{r}, -\vec{p}) = \frac{1}{\sqrt{2m(m+p_0)}} (m + p_0 - \vec{\alpha} \cdot \vec{p}) u_+(\vec{r}, 0) \tag{A6-1.6}$$

$$v(\vec{r}, -\vec{p}) = \frac{1}{\sqrt{2m(m+p_0)}} (m + p_0 - \vec{\alpha} \cdot \vec{p}) u_-(\vec{r}, 0)$$

el " r " no cambia: Su definición (A4-1.1) es independiente de \vec{p} .

De (A4-1.1)

$$\delta^0 u_\epsilon(\vec{r}, 0) = \epsilon u_\epsilon(\vec{r}, 0); \tag{A6-1.7}$$

por lo tanto (A6-1.6) implica,

$$\begin{aligned} \delta^0 u(\vec{r}, -\vec{p}) &= u(\vec{r}, \vec{p}) \\ \delta^0 v(\vec{r}, -\vec{p}) &= -v(\vec{r}, \vec{p}) \end{aligned} \tag{A6-1.8-a}$$

o sea

$$\lambda(\vec{r}, \vec{r}') = \delta_{r r'}; \quad \mu(\vec{r}, \vec{r}') = -\delta_{r r'}. \tag{A6-1.8-b}$$

g₂) Definición B de r .

Como la definición (A4-1.4) es invariante ante rotaciones 3-dimensionales, no se pierde generalidad si se eligen ejes tales que

$\vec{p} = (0, 0, p^3)$. Entonces de (4.9) y (A4-1.4),

$$\begin{aligned} (\text{sg } p^3) \sigma^3 u(\vec{r}, \vec{p}) &= r u(\vec{r}, \vec{p}) \\ (\text{sg } p^3) \sigma^3 v(\vec{r}, \vec{p}) &= -r v(\vec{r}, \vec{p}) \end{aligned} \tag{A6-1.9}$$

donde sg indica a la función signo.

Es trivial la obtención de las $u(\vec{r}, \vec{p})$ y $v(\vec{r}, \vec{p})$ que satisfacen (A6-1.9) y (4.11-a) en la representación usual (2.6) de las γ .

Para $p^3 > 0$ se tienen las conocidas soluciones (no normalizadas),

$$u(+1;0,0, |p^3|) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ |p^3|/(p_0 + m) \\ 0 \end{pmatrix}; \quad u(-1;0,0, |p^3|) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -|p^3|/(p_0 + m) \end{pmatrix};$$

$$v(-1;0,0, |p^3|) = \begin{pmatrix} |p^3|/(p_0 + m) \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad v(+1;0,0, |p^3|) = \begin{pmatrix} 0 \\ -|p^3|/(p_0 + m) \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix};$$

para $p^2 < 0$ se obtiene (cuidado con $\text{sg } p^3$ en (A6-1.9!)),

$$u(+1;0,0, -|p^3|) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ |p^3|/(p_0 + m) \end{pmatrix}; \quad u(-1;0,0, -|p^3|) = \begin{pmatrix} +1 \\ 0 \\ -|p^3|/(p_0 + m) \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$v(-1;0,0, -|p^3|) = \begin{pmatrix} 0 \\ |p^3|/(p_0 + m) \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad v(+1;0,0, -|p^3|) = \begin{pmatrix} -|p^3|/(p_0 + m) \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(A6-1.10-b)

Se obtiene entonces como es sabido¹⁶ $\gamma^0 u(+1;0,0, |p^3|) = u(-1;0,0, -|p^3|)$ y expresiones análogas que se sintetizan en

$$\gamma^0 u(r;0,0, -p^3) = u(-r;0,0, +p^3) \quad ; \quad \gamma^0 v(r;0,0, -p^3) = -v(-r;0,0, +p^3).$$

Debido ante la invariancia ante rotaciones arriba mencionada, ocurre lo propio en el caso general:

$$\gamma^0 u(r, -\vec{p}) = + u(-r, \vec{p}) \quad ; \quad \gamma^0 v(r, -\vec{p}) = -v(-r, \vec{p}) \quad ; \quad (\text{A6-1.11-a})$$

o sea

$$\lambda(r, r', \vec{p}) = \delta_{r, -r'} \quad ; \quad \mu(r, r', \vec{p}) = -\delta_{r, -r'} \quad . \quad (\text{A6-1.11-b})$$

d) DEMOSTRACION DE (6.16-a) y (6.17-a).

d₁) Definición A.

De (4.30) y (A6-1.8),

$$\begin{aligned} \gamma_{(1)}^0 \gamma_{(2)}^0 \mathcal{U}(\Gamma = r+s, -\vec{p}) &= \frac{1}{\sqrt{|\Gamma|!} m} \{ [\gamma^0 u(r, -\vec{p})]_{(1)} [\gamma^0 u(s, -\vec{p})]_{(2)} + \\ &\quad + [\gamma^0 u(s, -\vec{p})]_{(1)} [\gamma^0 u(r, -\vec{p})]_{(2)} \} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{|\Gamma|!} m} \{ u_{(1)}(-r, \vec{p}) u_{(2)}(-s, \vec{p}) + u_{(1)}(-s, \vec{p}) u_{(2)}(-r, \vec{p}) \} = \\ &= \mathcal{U}[-(r+s), \vec{p}] = \mathcal{U}(-\Gamma, \vec{p}). \end{aligned} \quad (\text{A6-1.12-a})$$

Análogamente, $\gamma_{ij}^{\alpha\beta} U(r-r+s, -p) = U(-r, \vec{p})$ (A6-1.12-b)
o sea la (6.16-a).

d₂) Definición B.

Se obtiene análogamente (6.17-a) a partir de (4.30) y (A6-1.11).

Q.E.D.

-A6-2-

a) DEMOSTRACION DE (6.38).

Nota: Como las 16 componentes de las $\Psi_{i_1 i_2} \in \mathcal{E}$ son independientes, demostrar que la dimensión del espacio $\overline{\mathcal{E}}_{sp} \mathcal{E}_{sp}$ de las formas bilineales

$$\overline{\Psi}_{i_1 i_2} M_{i_1 i_2 ; j_1 j_2} \Psi_{j_1 j_2}$$

es 16^2 , es equivalente a demostrar que la dimensión del espacio de las matrices

$$M_{i_1 i_2 ; j_1 j_2}$$

es 16^2 . Haremos esto último, utilizando un método usual.

Formamos las 16^2 matrices

$$N_{i_1 i_2 ; j_1 j_2}^{(r_1, r_2 ; s_1, s_2)} = \delta_{r_1 i_1} \delta_{r_2 i_2} \delta_{s_1 j_1} \delta_{s_2 j_2} \quad ; \quad r_u, s_u, i_u, j_u = 1, 2, 3, 4, \quad u = 1, 2. \quad (A6-2.1)$$

donde la cuaterna de índices superiores distingue entre sí a las matrices y los índices inferiores son los spinoriales.

$$\sum_{\substack{r_1, r_2 \\ s_1, s_2}} c_{r_1 r_2 ; s_1 s_2} N_{i_1 i_2 ; j_1 j_2}^{(r_1, r_2 ; s_1, s_2)} = 0$$

($c_{r_1 r_2 ; s_1 s_2}$ = números) se deduce trivialmente $c_{r_1 r_2 ; s_1 s_2} = 0$; por lo tanto las 16^2 matrices (A6-2.1) son linealmente independientes. Además, es elemental demostrar que toda matriz $M_{i_1 i_2 ; j_1 j_2}$ es desarrollable como combinación lineal de las matrices (A6-2.1); por lo tanto, las 16^2 matrices $N_{i_1 i_2 ; j_1 j_2}^{(r_1, r_2 ; s_1, s_2)}$ forman base en el espacio (vectorial) de las M ; pero como hay 16^2 matrices en la base, la dimensión del espacio vectorial de las $M_{i_1 i_2 ; j_1 j_2}$ es 16^2 .

Q.E.D.

b) DEMOSTRACION DE QUE SI $\Psi, \varphi \in \mathcal{E}_{sp}$, LOS ELEMENTOS DE $\overline{\mathcal{E}}_{sp} \mathcal{E}_{sp}$ DADOS EN TABLA 6-1 SON LINEALMENTE INDEPENDIENTES.

Queremos demostrar que si

$$\sum_{A, B} c_{AB} \overline{\Psi} \Gamma_{(1)}^A \Gamma_{(2)}^B \varphi = 0, \quad \forall \Psi, \varphi \quad (A6-1.2)$$

entonces

$$c_{AB} = 0, \quad \forall A, B. \quad (A6-1.3)$$

Como en (A6-2.2) Ψ y $\varphi \in \mathcal{E}_{sp}$ son arbitrarias, podemos poner

$$\Psi = \Psi'_{(1)} \Psi''_{(2)}, \quad \varphi = \varphi'_{(1)} \varphi''_{(2)}$$

con Ψ', Ψ'', φ' y φ'' arbitrarias.

Entonces, se puede poner

$$\sum_A [c_{AB} \sum_B \Psi''_{(2)} \Gamma_{(2)}^B \varphi''_{(2)}] \Psi'_{(1)} \Gamma_{(1)}^A \varphi'_{(1)} = 0, \quad \forall \Psi', \varphi' \quad (A6-1.4)$$

Por la independencia lineal de las (6.27), los coeficientes [] se anulan:

$$C_{AB} \begin{bmatrix} \psi_{11} & \psi_{12} & \psi_{13} & \psi_{14} \\ \psi_{21} & \psi_{22} & \psi_{23} & \psi_{24} \\ \psi_{31} & \psi_{32} & \psi_{33} & \psi_{34} \\ \psi_{41} & \psi_{42} & \psi_{43} & \psi_{44} \end{bmatrix} = 0, \quad \forall A;$$

por el mismo motivo,

$$C_{AB} = 0, \quad \forall A, B.$$

A6-3

DEMOSTRACION DE (6.45).

Por (A2-12.1) si $\Psi \in \mathcal{E}$ es

$$\delta_{(1)}^0 \delta_{(2)}^0 \Psi = \begin{pmatrix} \Psi_{11} & \Psi_{12} & -\Psi_{13} & -\Psi_{14} \\ \Psi_{21} & \Psi_{22} & -\Psi_{23} & -\Psi_{24} \\ -\Psi_{31} & -\Psi_{32} & \Psi_{33} & \Psi_{34} \\ -\Psi_{41} & -\Psi_{42} & \Psi_{43} & \Psi_{44} \end{pmatrix} \quad (A6-3.1-a)$$

De (2.6) deducimos que si $\Psi \in \mathcal{E}$ es

$$\delta_{(1)}^1 \Psi = \begin{pmatrix} \Psi_{41} & \Psi_{42} & \Psi_{43} & \Psi_{44} \\ \Psi_{31} & \Psi_{32} & \Psi_{33} & \Psi_{34} \\ -\Psi_{21} & -\Psi_{22} & -\Psi_{23} & -\Psi_{24} \\ -\Psi_{11} & -\Psi_{12} & -\Psi_{13} & -\Psi_{14} \end{pmatrix}$$

$$\delta_{(1)}^2 \Psi = \begin{pmatrix} \Psi_{41} & -\Psi_{42} & -\Psi_{43} & -\Psi_{44} \\ \Psi_{31} & \Psi_{32} & \Psi_{33} & \Psi_{34} \\ \Psi_{21} & \Psi_{22} & \Psi_{23} & \Psi_{24} \\ -\Psi_{11} & -\Psi_{12} & -\Psi_{13} & -\Psi_{14} \end{pmatrix} \quad (A6-3.2)$$

$$\delta_{(1)}^3 \Psi = \begin{pmatrix} \Psi_{31} & \Psi_{32} & \Psi_{33} & \Psi_{34} \\ -\Psi_{41} & -\Psi_{42} & -\Psi_{43} & -\Psi_{44} \\ -\Psi_{11} & -\Psi_{12} & -\Psi_{13} & -\Psi_{14} \\ \Psi_{21} & \Psi_{22} & \Psi_{23} & \Psi_{24} \end{pmatrix}$$

$$\gamma_{(1)}^1 \gamma_{(2)}^1 \Psi = \begin{pmatrix} \Psi_{44} & \Psi_{43} & -\Psi_{42} & -\Psi_{41} \\ \Psi_{34} & \Psi_{33} & -\Psi_{32} & -\Psi_{31} \\ \Psi_{24} & -\Psi_{23} & \Psi_{22} & \Psi_{21} \\ -\Psi_{14} & -\Psi_{13} & \Psi_{12} & \Psi_{11} \end{pmatrix}$$

$$\gamma_{(1)}^2 \gamma_{(2)}^2 \Psi = \begin{pmatrix} \Psi_{44} & \Psi_{43} & -\Psi_{42} & -\Psi_{41} \\ \Psi_{34} & \Psi_{33} & -\Psi_{32} & \Psi_{31} \\ \Psi_{24} & -\Psi_{23} & -\Psi_{22} & \Psi_{21} \\ -\Psi_{14} & \Psi_{13} & \Psi_{12} & -\Psi_{11} \end{pmatrix} \tag{A6-3.1-b}$$

$$\gamma_{(1)}^3 \gamma_{(2)}^3 \Psi = \begin{pmatrix} \Psi_{33} & -\Psi_{34} & \Psi_{31} & \Psi_{32} \\ \Psi_{43} & \Psi_{44} & \Psi_{41} & -\Psi_{42} \\ \Psi_{13} & \Psi_{14} & \Psi_{11} & -\Psi_{12} \\ \Psi_{23} & -\Psi_{24} & -\Psi_{21} & \Psi_{22} \end{pmatrix}$$

Con $\gamma_{(1)}^\mu \gamma_{(2)}^\nu = \delta_{(1)}^\mu \delta_{(2)}^\nu - \vec{\gamma}_{(1)} \cdot \vec{\gamma}_{(2)}$

se obtiene (6.45).

Q.E.D.

A6-4

a) DEMOSTRACION DE (6.67^a-a).

Es bien sabido que en la representación (2.6) de las es

$$\vec{\sigma} = \begin{pmatrix} \vec{\sigma} & | & 0 \\ 0 & | & \vec{\sigma} \end{pmatrix} \tag{A6-4.1}$$

reemplazando los σ^a bidimensionales por (2.6) se obtiene

$$\Psi \in \mathcal{E}^{s_{111}} \Rightarrow \vec{\sigma}_{(1)} \cdot \vec{\sigma}_{(2)} \Psi = \begin{pmatrix} \Psi_{11} & \Psi_{12} & \Psi_{13} & (2\Psi_{23} - \Psi_{14}) \\ \Psi_{12} & \Psi_{22} & (2\Psi_{14} - \Psi_{23}) & \Psi_{24} \\ \Psi_{13} & (2\Psi_{14} - \Psi_{32}) & \Psi_{33} & \Psi_{34} \\ (2\Psi_{23} - \Psi_{14}) & \Psi_{24} & \Psi_{34} & \Psi_{44} \end{pmatrix} \tag{A6-4.2}$$

Si $\Psi \in \mathcal{E}^{s_{111}}$ se pueden reemplazar las Ψ_{ij} por los elementos ij del 2° miembro de (6.60); se observa que lo obtenido es nuevamente el 2° miembro de (6.60); por lo tanto,

$$\frac{1}{G_{(1)}} \cdot \frac{1}{G_{(2)}} \Psi^{\nabla} = \Psi^{\nabla} \quad (A6-4.3)$$

Q.E.D.

b) DEMOSTRACION DE (6.67''').

Desarrollando,

$$\sigma_{(1)}^{\mu\nu} \sigma_{(2)}^{\lambda\rho} \varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho} = 4(\sigma_{(1)}^{01} \sigma_{(2)}^{23} - \sigma_{(1)}^{02} \sigma_{(2)}^{13} + \sigma_{(1)}^{03} \sigma_{(2)}^{12}) + (1) \leftrightarrow (2) ;$$

usando (6.34-d),

$$\sigma^{\mu\nu} = 1 \gamma^5 \sigma^{\mu\nu} ; \quad (A6-4.4)$$

reemplazando,

$$\begin{aligned} \sigma_{(1)}^{\mu\nu} \sigma_{(2)}^{\lambda\rho} \varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho} &= 41 \gamma_{(1)}^5 (\sigma_{(1)}^{\mu\nu} \cdot \sigma_{(2)}^{\lambda\rho}) + (1) \leftrightarrow (2) = \\ &= 81 \gamma_{(1)}^5 \sigma_{(1)}^{\mu\nu} \cdot \sigma_{(2)}^{\lambda\rho} ; \end{aligned} \quad (A6-4.5)$$

con (6.67''-a),

$$\sigma_{(1)}^{\mu\nu} \sigma_{(2)}^{\lambda\rho} \varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho} = \varepsilon_{sp}^{\mu\nu\lambda\rho} = 81 \gamma_{(1)}^5 \varepsilon_{sp}^{\mu\nu\lambda\rho} = 81 \gamma_{(2)}^5 \varepsilon_{sp}^{\mu\nu\lambda\rho} . \quad Q.E.D.$$

A8-1

DEMOSTRACION DEL SEGUNDO LEMA (Secc. 8.o-2).

Demostraremos las (8.96-a) y (8.97-a); las (b) se obtienen de manera similar. En (8.96-a) la parte antisimétrica de θ no contribuye a $\theta \Omega$ pues Ω^{∇} es simétrica. Podemos, pues, suponer $\theta^{\nabla} \in \varepsilon^{\text{sim}\nabla}$.

De (6.60) y (8.35) observamos que

$$\Psi^{\nabla} \in \varepsilon^{\text{sim}\nabla} \Rightarrow \Psi^{\nabla} = \begin{pmatrix} \Psi^{\nabla(1)} & \Psi^{\nabla(2)} & \Psi^{\nabla(3)} & \Psi^{\nabla(4)} \\ \Psi^{\nabla(2)} & \Psi^{\nabla(5)} & \Psi^{\nabla(4)} & \Psi^{\nabla(6)} \\ \Psi^{\nabla(3)} & \Psi^{\nabla(4)} & \Psi^{\nabla(1)} & \Psi^{\nabla(2)} \\ \Psi^{\nabla(4)} & \Psi^{\nabla(6)} & \Psi^{\nabla(2)} & \Psi^{\nabla(5)} \end{pmatrix} \quad (A8-1.1)$$

Por una parte tenemos

$$\overline{\theta^{\nabla} \Omega^{\nabla}} = (\overline{\theta^{\nabla}})_{i_1 i_2} (\overline{\Omega^{\nabla}})_{i_1 i_2} \quad (A8-1.2)$$

donde se suma para todo $i_1, i_2 = 1, 2, 3, 4$.

Por otra parte reemplazando (A8-1.1) en (A8-1.2), o sea usando

$$(\overline{\Omega^{\nabla}})_{11} = \overline{\Omega^{\nabla(1)}}, \dots, (\overline{\theta^{\nabla}})_{44} = \overline{\theta^{\nabla(5)}} \quad (A8-1.3)$$

obtenemos

$$\overline{\theta^{\nabla} \Omega^{\nabla}} = 2 \overline{\theta^{\nabla(1)} \Omega^{\nabla(1)}} + 4 \overline{\theta^{\nabla(2)} \Omega^{\nabla(2)}} + 2 \overline{\theta^{\nabla(3)} \Omega^{\nabla(3)}} + 4 \overline{\theta^{\nabla(4)} \Omega^{\nabla(4)}} + 2 \overline{\theta^{\nabla(5)} \Omega^{\nabla(5)}} + 2 \overline{\theta^{\nabla(6)} \Omega^{\nabla(6)}} .$$

(A8-1.4)

Conservando en (A8-1.2) la dependencia funcional indicada en el 2º miembro, es decir procediendo según Secc. 8.b-7, resulta

$$\frac{\partial(\overline{\theta^\nabla} \Omega^\nabla)}{\partial \Omega^\nabla} \chi^\nabla = \left[\frac{\partial(\overline{\theta^\nabla_{i_1 i_2}} \Omega^\nabla_{i_1 i_2})}{\partial \Omega^\nabla_{r_1 r_2}} \right] \chi^\nabla_{r_1 r_2} = \overline{\theta^\nabla_{r_1 r_2}} \chi^\nabla_{r_1 r_2} = \overline{\theta^\nabla} \chi^\nabla. \quad (\text{A8-1.5})$$

En cambio derivando en (A8-1.4) respecto de las $\Omega^{\nabla(A)}$, $A = 1, 2, \dots$,

6 (independientes) se obtiene

$$\sum_{A=1}^6 \left[\frac{\partial(\overline{\theta^\nabla} \Omega^\nabla)}{\partial \Omega^{\nabla(A)}} \right] \chi^{\nabla(A)} = 2 \overline{\theta^{\nabla(1)}} \chi^{\nabla(1)} + 4 \overline{\theta^{\nabla(2)}} \chi^{\nabla(2)} + \dots + 2 \overline{\theta^{\nabla(6)}} \chi^{\nabla(6)}$$

Comparando con (A8-1.4),

$$\sum_{A=1}^6 \left[\frac{\partial(\overline{\theta^\nabla} \Omega^\nabla)}{\partial \Omega^{\nabla(A)}} \right] \chi^{\nabla(A)} = \overline{\theta^\nabla} \chi^\nabla. \quad (\text{A8-1.6})$$

Con (A8-1.5) y (A8-1.6) la demostración queda completa.

A8-2

DEMOSTRACION DE (8.23)

a) Cálculos previos:

De (8.6-a) y (2.5) deducimos

$$\Psi^\nabla(x) = \frac{i}{m} \gamma_{(1)}^\circ \partial_\omega \Lambda^I \Psi^\nabla + \frac{i}{2m} (\vec{\gamma}_{(1)}^\circ + \vec{\gamma}_{(2)}^\circ) \cdot \vec{\nabla} \Psi^\nabla. \quad (\text{A8-2.1})$$

puesto que

$$\Lambda^I \gamma_{(1)}^\circ = \Lambda^I \gamma_{(2)}^\circ = \gamma_{(1)}^\circ \Lambda^I = \gamma_{(2)}^\circ \Lambda^I. \quad (\text{A8-2.2-a})$$

Además,

$$\Lambda^{\text{II}} \gamma_{(1)}^\circ = -\Lambda^{\text{II}} \gamma_{(2)}^\circ = \gamma_{(1)}^\circ \Lambda^{\text{II}} = -\gamma_{(2)}^\circ \Lambda^{\text{II}}; \quad (\text{A8-2.2-b})$$

$$\Lambda^I \gamma_{(1)}^\circ \gamma_{(2)}^\circ = \gamma_{(1)}^\circ \gamma_{(2)}^\circ \Lambda^I = \Lambda^I, \quad (\text{A8-2.3-a})$$

y

$$\Lambda^{\text{II}} \gamma_{(1)}^\circ \gamma_{(2)}^\circ = \gamma_{(1)}^\circ \gamma_{(2)}^\circ \Lambda^{\text{II}} = -\Lambda^{\text{II}}. \quad (\text{A8-2.3-b})$$

b) Demostraremos que si

$$H_{(1)} \Psi(\sigma_\perp) = H_{(2)} \Psi(\sigma_\perp) \quad (\text{A8-2.4})$$

entonces es

$$\Lambda^{\text{II}} \Lambda^{\text{IV}} \Psi^\nabla(\sigma_\perp) - \Lambda^{\text{II}} \Lambda^{\text{III}} (m^2 - \Delta - \vec{\alpha}_{(1)}^\circ \cdot \vec{\nabla} \partial_\omega) \Psi(\sigma_\perp) = 0.$$

En efecto:

$$(\text{A8-2.4}) \Rightarrow i(\vec{\alpha}_{(1)}^\circ - \vec{\alpha}_{(2)}^\circ) \cdot \vec{\nabla} \Psi(\sigma_\perp) = m(\gamma_{(1)}^\circ - \gamma_{(2)}^\circ) \Psi(\sigma_\perp). \quad (\text{A8-2.5})$$

Premultiplicamos esta ecuación por Λ^{III} y usamos (8.17-a); obtenemos

$$0 = \Lambda^{\text{III}} m(\gamma_{(1)}^\circ - \gamma_{(2)}^\circ) \Psi(\sigma_\perp) = m(\gamma_{(1)}^\circ - \gamma_{(2)}^\circ) \Lambda^{\text{IV}} \Psi(\sigma_\perp). \quad (\text{A8-2.6})$$

Premultiplicamos ésta por Λ^{II} y usamos (A8-2.2-b) y (8.21).

$$0 = 2m \gamma_{(1)}^\circ \Lambda^{\text{II}} \Lambda^{\text{IV}} \Psi(\sigma_\perp)$$

de donde

$$\Lambda^{\text{II}} \Lambda^{\text{IV}} \Psi(\sigma_\perp) = 0. \quad (\text{A8-2.7})$$

Premultiplicamos (A8-2.7) por Λ^{∇} y volvemos a usar (8.17-a),

$$\boxed{\Lambda^{\text{II}} \Lambda^{\text{IV}} \Psi^\nabla(\sigma_\perp) = 0} \quad (\text{A8-2.8})$$

con lo que queda probada una parte de la tesis.

Descomponemos ahora $\Psi(\sigma_{\perp})$ en sus partes I y II, y cada una de estas en sus partes III y IV; teniendo en cuenta (A8-2.7), resulta

$$\Psi(\sigma_{\perp}) = \Lambda^{\text{III}} \Lambda^{\text{I}} \Psi(\sigma_{\perp}) + \Lambda^{\text{IV}} \Lambda^{\text{I}} \Psi(\sigma_{\perp}) + \Lambda^{\text{III}} \Lambda^{\text{II}} \Psi(\sigma_{\perp}) \quad (\text{A8-2.9})$$

que reemplazamos en (A8-2.5). Teniendo en cuenta (8.18) y (A8-2.2) obtenemos

$$m \gamma_{(1)}^c \Lambda^{\text{IV}} \Lambda^{\text{III}} \Psi(\sigma_{\perp}) = i \bar{\alpha}_{(1)} \cdot \vec{\nabla} \Lambda^{\text{I}} \Lambda^{\text{IV}} \Psi(\sigma_{\perp}). \quad (\text{A8-2.10})$$

Si multiplicamos por Λ^{IV} ,

$$m \gamma_{(1)}^c \Lambda^{\text{II}} \Lambda^{\text{III}} \Psi(\sigma_{\perp}) = i \bar{\alpha}_{(1)} \cdot \vec{\nabla} \Lambda^{\text{I}} \Lambda^{\text{IV}} \Psi(\sigma_{\perp}), \quad (\text{A8-2.11})$$

y usamos (A8-2.1):

$$\begin{aligned} m \gamma_{(1)}^c \Lambda^{\text{I}} \Lambda^{\text{IV}} \Psi(\sigma_{\perp}) &= -\frac{1}{m} \bar{\alpha}_{(1)} \cdot \vec{\nabla} \Lambda^{\text{I}} \Lambda^{\text{IV}} \gamma_{(1)}^c \partial_0 \Psi^{\nabla} - \\ &\quad - \frac{1}{2m} (\bar{\alpha}_{(1)} \cdot \vec{\nabla}) \Lambda^{\text{I}} \Lambda^{\text{IV}} (\bar{\gamma}_{(1)} \cdot \vec{\nabla}) \Psi^{\nabla} - \\ &\quad - \frac{1}{2m} (\bar{\alpha}_{(1)} \cdot \vec{\nabla}) \Lambda^{\text{I}} \Lambda^{\text{II}} (\bar{\gamma}_{(1)} \cdot \vec{\nabla}) \Psi^{\nabla}. \end{aligned} \quad (\text{A8-2.12})$$

Reemplazamos

$$\bar{\gamma}_{(1)} \cdot \vec{\nabla} = \delta_{(1)}^0 \bar{\alpha}_{(1)} \cdot \vec{\nabla} \quad ; \quad \bar{\gamma}_{(1)} \cdot \vec{\nabla} = -\bar{\alpha}_{(1)} \cdot \vec{\nabla} \delta_{(1)}^c \quad (\text{A8-2.13})$$

en (A8-2.12) y empleamos (8.18) y (A8-2.2) para sustituir las matrices tipo (2) por matrices tipo (1); como

$$(\bar{\alpha}_{(1)} \cdot \vec{\nabla})^2 = \Delta \quad (\text{A8-2.14})$$

el resultado es

$$\begin{aligned} m \gamma_{(1)}^c \Lambda^{\text{II}} \Lambda^{\text{III}} \Psi^{\nabla}(\sigma_{\perp}) &= -\frac{1}{m} \bar{\alpha}_{(1)} \cdot \vec{\nabla} \Lambda^{\text{I}} \Lambda^{\text{IV}} \gamma_{(1)}^c \partial_0 \Psi^{\nabla}(\sigma_{\perp}) + \\ &\quad + \frac{1}{m} \Lambda^{\text{II}} \Lambda^{\text{IV}} \gamma_{(1)}^c \Delta \Psi^{\nabla}(\sigma_{\perp}) \end{aligned} \quad (\text{A8-2.15})$$

de donde

$$\Lambda^{\text{II}} \Lambda^{\text{III}} (m^2 - \Delta - \bar{\alpha}_{(1)} \cdot \vec{\nabla} \partial_0) \Psi^{\nabla}(\sigma_{\perp}) = 0. \quad (\text{A8-2.16})$$

(A8-2.8) y (A8-2.16) prueban la tesis de (b).

c) DEMOSTRAREMOS QUE

$$\left. \begin{array}{l} (\text{A8-2.8}) \\ (\text{A8-2.16}) \end{array} \right\} \Rightarrow H_{(1)} \Psi(\sigma_{\perp}) = H_{(2)} \Psi(\sigma_{\perp}). \quad (\text{A8-2.17})$$

En efecto, definimos

$$\begin{aligned} \mathcal{X} &= (H_{(1)} - H_{(2)}) \Psi(\sigma_{\perp}) = \\ &= -i(\bar{\alpha}_{(1)} - \bar{\alpha}_{(2)}) \cdot \vec{\nabla} \Psi(\sigma_{\perp}) + m(\gamma_{(1)}^0 - \gamma_{(2)}^c) \Psi(\sigma_{\perp}). \end{aligned} \quad (\text{A8-2.18})$$

Bastará probar $\mathcal{X} = 0$.

Descomponemos en (A8-2.18) Ψ en sus partes V y VI y luego cada una de estas en

I III, I IV, II III y II IV;

usando (A8-2.8), (A8-2.2) y (8.18) obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \mathcal{X} &= -i \bar{\alpha}_{(1)} \cdot \vec{\nabla} \Lambda^{\text{II}} \Lambda^{\text{I}} \Psi^{\nabla}(\sigma_{\perp}) + m \gamma_{(1)}^0 \Lambda^{\text{II}} \Lambda^{\text{III}} \Psi^{\nabla} - \\ &\quad - i \bar{\alpha}_{(1)} \cdot \vec{\nabla} \Lambda^{\text{IV}} (\Lambda^{\text{I}} + \Lambda^{\text{II}}) \Psi^{\nabla}(\sigma_{\perp}) + m \gamma_{(1)}^c \Lambda^{\text{II}} (\Lambda^{\text{III}} + \Lambda^{\text{IV}}) \Psi^{\nabla}(\sigma_{\perp}). \end{aligned} \quad (\text{A8-2.19})$$

Después reemplazamos $\Psi^{\bar{u}}$ por su expresión (A8-2.1). Usando adecuadamente (A8-2.13), (8.18), (A8-2.2) y las hipótesis (A8-2.8) y (A8-2.16) se obtiene mediante cálculos algo engorrosos pero similares a los anteriores,

$$\begin{aligned} \dot{\bar{z}} \mathcal{X} &= -i \bar{\alpha}_{(0)}^{\bar{v}} \cdot \vec{\nabla} \Lambda^{\bar{u}} \Lambda^{\bar{r}} \Psi^{\bar{v}}(\sigma_{\perp}) + m \gamma_{(0)}^{\bar{c}} \Lambda^{\bar{u}} \Lambda^{\bar{m}} \Psi^{\bar{v}}(\sigma_{\perp}) + \\ &+ \frac{1}{2m} \bar{\alpha}_{(0)}^{\bar{v}} \cdot \vec{\nabla} \Lambda^{\bar{u}} \gamma_{(0)}^{\bar{c}} \partial_{\bar{c}} \Lambda^{\bar{r}} \Psi^{\bar{v}}(\sigma_{\perp}) + \frac{1}{2m} (\bar{\alpha}_{(0)}^{\bar{v}} \cdot \vec{\nabla}) \Lambda^{\bar{u}} (\gamma_{(0)}^{\bar{c}} \cdot \vec{\nabla}) \Psi^{\bar{v}}(\sigma_{\perp}) + \\ &+ \frac{1}{2m} (\bar{\alpha}_{(0)}^{\bar{v}} \cdot \vec{\nabla}) \Lambda^{\bar{u}} (\bar{\gamma}_{(0)}^{\bar{c}} \cdot \vec{\nabla}) \Psi^{\bar{v}}(\sigma_{\perp}) + \frac{1}{2} \Lambda^{\bar{u}} \bar{\gamma}_{(0)}^{\bar{c}} \cdot \vec{\nabla} \Psi^{\bar{v}}(\sigma_{\perp}) + \\ &+ \frac{i}{2} \gamma_{(0)}^{\bar{c}} \Lambda^{\bar{u}} \bar{\gamma}_{(0)}^{\bar{c}} \cdot \vec{\nabla} \Psi^{\bar{v}}(\sigma_{\perp}) = \\ &= -i \bar{\alpha}_{(0)}^{\bar{v}} \cdot \vec{\nabla} \Lambda^{\bar{u}} \Lambda^{\bar{r}} \Psi^{\bar{v}}(\sigma_{\perp}) + m \gamma_{(0)}^{\bar{c}} \Lambda^{\bar{u}} \Lambda^{\bar{m}} \Psi^{\bar{v}}(\sigma_{\perp}) - \\ &- \frac{1}{3m} \gamma_{(0)}^{\bar{c}} \Lambda^{\bar{u}} \Lambda^{\bar{m}} (m^2 - \Delta) \Psi^{\bar{v}}(\sigma_{\perp}) - \frac{1}{3m} \Delta \Lambda^{\bar{u}} \gamma_{(0)}^{\bar{c}} \Lambda^{\bar{m}} \Psi^{\bar{v}}(\sigma_{\perp}) + \\ &+ i \Lambda^{\bar{u}} \bar{\alpha}_{(0)}^{\bar{v}} \cdot \vec{\nabla} \Lambda^{\bar{r}} \Psi^{\bar{v}}(\sigma_{\perp}) = \\ &= 0 \end{aligned}$$

con lo que queda probada la tesis (c).

(b) y (c) demuestran (8.23).

DEMUESTRASE LA (8.122-b)[†] A8-3

Por (8.121), (8.122-a) y (2.2),

$$\begin{aligned} \mathcal{P}^{(v)} &= \frac{i}{2} \int d^3x [\Psi^{\dagger} \delta_{(0)}^{\nu} \partial^{\nu} \Psi - (\partial^{\nu} \Psi)^{\dagger} \gamma_{(0)}^{\nu} \Psi] = \\ &= \frac{i}{2} \int d^3x [(\Psi, \partial^{\nu} \Psi)_{sp} - (\partial^{\nu} \Psi, \Psi)_{sp}] . \end{aligned} \tag{A8-3.1}$$

a) $\nu = 0$.

Por la ecuación de continuidad (8.103), deducimos

$$\begin{aligned} (\partial_0 \Psi, \Psi) + (\Psi, \partial_0 \Psi) &= \partial_0 (\Psi, \Psi) = \\ &= \partial_0 (\bar{\Psi} \delta_{(0)}^0 \Psi) = \\ &= -\vec{\nabla} \cdot (\bar{\Psi} \vec{\delta}_{(0)} \Psi) \end{aligned}$$

y, por lo tanto las condiciones de contorno en el infinito espacial implican

$$\int d^3x (\partial_0 \Psi, \Psi)_{sp} = - \int d^3x (\Psi, \partial_0 \Psi)_{sp} \tag{A8-3.2-a}.$$

b) $\nu = a = 1, 2, 3$.

Por una trivial integración por partes,

$$\int d^3x (\partial_a \Psi, \Psi)_{sp} = - \int d^3x (\Psi, \partial_a \Psi)_{sp} \tag{A8-3.2-b}.$$

c) Conclusión:

(De (A8-3.1) y (A8-3.2) obtenemos

$$\mathcal{P}^{(v)} = i \int d^3x (\Psi, \partial^{\nu} \Psi)_{sp}$$

que es la (8.122-b).

Q.E.D.

†Esta demostración es muy similar a una ya conocida para spin $\frac{1}{2}$.

A8-4

DEMOSTRACION DE (8.132).

De (8.122-b) y (8.92') con $k = 2$,

$$P^{(1/2)\nu} = \int d^3x \left[\bar{\Psi}^\nu \gamma_{\nu\alpha}^c i \partial^\alpha \Psi^\nu + \bar{\Psi}^\nu \gamma_{\nu\alpha}^c i \partial^\alpha \Psi^\nu \right] =$$

$$\frac{1}{m} \int d^3x \left[-\bar{\Psi}^\nu \partial_\nu \Psi^\nu - \bar{\Psi}^\nu \vec{\alpha}_{\nu\alpha} \partial^\alpha \Psi^\nu + \right.$$

$$\left. + (\partial_\nu \bar{\Psi}^\nu) \partial^\nu \Psi^\nu + (\vec{\nabla} \bar{\Psi}^\nu) \cdot (-\vec{\alpha}_{\nu\alpha}) \partial^\alpha \Psi^\nu \right].$$

El 2º término cancela al 4º mediante una integración por partes:

$$P^{(1/2)\nu} = \frac{1}{m} \int d^3x \left[-\bar{\Psi}^\nu \partial_\nu \Psi^\nu + (\partial_\nu \bar{\Psi}^\nu) \partial^\nu \Psi^\nu \right]. \quad (A8-4.1)$$

a) $\nu = 0$.

Con la ecuación de Klein-Gordon cumplida por Ψ^ν (A8-4.1)

$$P^{(1/2)0} = \frac{1}{m} \int d^3x \left[m^2 \bar{\Psi}^\nu \Psi^\nu - \bar{\Psi}^\nu \Delta \Psi^\nu + (\partial_\nu \bar{\Psi}^\nu) (\partial^\nu \Psi^\nu) \right]. \quad (A8-4.2)$$

Basta reemplazar $\bar{\Psi}^\nu \Delta \Psi^\nu$ por $\bar{\Psi}^\nu \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \Psi^\nu$ e integrar por partes para obtener $P^{(1/2)0}$ en la forma (8.130).

b) $\nu = a = 1, 2, 3$.

Basta integrar por partes en el 1er. sumando de (A8-4.1) para obtener $P^{(1/2)a}$ en la forma (8.131). Q.E.D.

A8-5

DEMOSTRACION DE (8.160').

Por Secc. 2.f-4 (ecuación (2.64)), la parte Ψ^I de una $\Psi(0, \vec{x}) \in W^I$ es arbitraria (salvo la convergencia de (Ψ, Ψ)); elegimos, pues

$$\Psi^I = \begin{pmatrix} f(\vec{x}) & g(\vec{x}) & 0 & 0 \\ g(\vec{x}) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (A8-5.1)^+$$

con f y g reales, tales que

$$p^0 f = p^1 g = p^2 f = p^3 g = 0. \quad (A8-5.2)$$

Las (A8-5.2) tomadas al pié de la letra implicarían (Ψ, Ψ) divergentes. Esto se puede evitar usando autodiferenciales, cosa que no haremos; pero omitiendo las integraciones respecto de dx^2 y dx^3 llegaremos al mismo resultado a que se arribaría usando autodiferenciales.

De (2.63),

$$\Psi(u, \vec{x}) = \begin{pmatrix} f & g & \frac{-i}{2m} \not{\partial} g & \frac{-i}{2m} \not{\partial} f \\ g & 0 & 0 & \frac{-i}{2m} \not{\partial} g \\ \frac{-i}{2m} \not{\partial} g & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-i}{2m} \not{\partial} f & \frac{-i}{2m} \not{\partial} g & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (A8-5.3)$$

de donde

$$\gamma_{(3)}^3 \Psi = \begin{pmatrix} \frac{-i}{2m} \not{\partial} g & 0 & 0 & 0 \\ \frac{i}{2m} \not{\partial} f & \frac{i}{2m} \not{\partial} g & 0 & 0 \\ -f & -g & \frac{i}{2m} \not{\partial} g & \frac{i}{2m} \not{\partial} f \\ g & 0 & 0 & \frac{-i}{2m} \not{\partial} g \end{pmatrix} \quad (A8-5.4)$$

Entonces,

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx^0 \Psi^\dagger \gamma_{(3)}^3 \Psi = \int_{t_1, t_2} \Psi^\dagger_{i_1, i_2} (\gamma_{(3)}^3 \Psi)_{i_1, i_2} dx^1 = \int_{t_1, t_2} \Psi^\dagger_{i_1, i_2} (\gamma_{(3)}^3 \Psi)_{i_1, i_2} dx^1 = \frac{i}{m} \int_{-\infty}^{\infty} [-f \not{\partial} g + (\not{\partial} f) g] dx^1$$

Reemplazando en (8.159) e integrando por partes obtenemos

$$J_{\text{spin}} \Big|_{t_1}^{t_2} = \frac{2}{m} \int_{-\infty}^{\infty} (\not{\partial} f) g dx^1 \quad (A8-5.5)$$

Eligiendo f y g tales que

$$sg(\not{\partial} f) = sg(g)$$

se obtiene un integrando definido positivo, de donde al menos para esta Ψ , y al menos en $t=0$ es

$$J_{\text{spin}}^{(1/2)03} \neq 0 \quad (A8-5.6)$$

lo que basta para probar (8.160').

+ En la representación (2.6) de las γ^μ .

A8-6

DEMOSTRACION DE (8.173) Y (8.174).

Elegimos como $\Psi(0, x) \in V$ la dada por (A8-5.3) con $g = 0$

$$\Psi(0, \vec{x}) = \begin{pmatrix} f & 0 & 0 & \frac{-i}{2m} \partial_1 f \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-i}{2m} \partial_1 f & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A8-6.1})$$

donde $f(\vec{x})$ es real y cumple (A8-5.2).

Entonces,

$$\sigma_{(2)}^3 \Psi = \begin{pmatrix} f & 0 & 0 & \frac{+i}{2m} \partial_1 f \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-i}{2m} \partial_1 f & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} ; \quad (\text{A8-6.2})$$

$$\left(\frac{\sigma_{(2)}^3 + \sigma_{(2)}^3}{2} \right) \Psi = \begin{pmatrix} f & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} ; \quad (\text{A8-6.3})$$

$$\delta_{(2)}^0 \sigma_{(2)}^3 \Psi = \begin{pmatrix} f & 0 & 0 & \frac{-i}{2m} \partial_1 f \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-i}{2m} \partial_1 f & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} ; \quad (\text{A8-6.4})$$

$$\delta_{(2)}^i \frac{(\sigma_{ij} + \bar{\sigma}_{ij})}{2} \Psi = \begin{pmatrix} f & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A8-6.5})$$

$$\therefore (\Psi, \sigma_{(2)}^i \Psi)_{\text{spin}} = \Psi^\dagger \sigma_{(2)}^i \Psi = |f|^2 + \frac{1}{2m^2} |\partial_2 f|^2 \quad (\text{A8-6.6})$$

$$\text{y} \quad (\Psi, \frac{\sigma_{(2)}^i + \bar{\sigma}_{(2)}^i}{2} \Psi)_{\text{spin}} = |f|^2 \quad (\text{A8-6.7})$$

Integrando, y reemplazando (A8-6.6) en (8.169) y (A8-6.7) en (8.155) resulta que para la Ψ usada es

$$\int_{\text{spin}}^{(0)3} \Big|_{t=0} - \int_{\text{spin}}^{(1/2)3} \Big|_{t=0} = \frac{1}{2m^2} \int_1^\infty |\partial_2 f|^2 dx^1 > 0 \quad (\text{A8-6.8})$$

con lo que queda probada (8.174), y que

$$\int_{\text{spin}}^{(0)3} = \int_{-\infty}^\infty (|f|^2 + \frac{1}{2m^2} |\partial_2 f|^2) dx^1 > 0 \quad (\text{A8-6.9})$$

con lo que queda probada la (8.173).

Q.E.D.

A8-7

DEMOSTRACION DE (8.177)

Como en la teoría de una carga (Secc. 3.g), se cumple que

$$(8.155) \Rightarrow \frac{d}{dt} \int_{\text{spin}}^{(1/2)3} = i(\Psi, [H_{(0)}, \frac{\sigma_{(0)}^3 + \bar{\sigma}_{(0)}^3}{2}] \Psi) = \frac{1}{2}(\Psi, \{\partial_2 \alpha^1 - \partial_1 \alpha^2\}_{(0)} \Psi) = \quad (\text{A8-7.1})$$

$$\text{y (8.169)} \Rightarrow \frac{d}{dt} \int_{\text{spin}}^{(0)3} = i(\Psi, [H_{(0)}, \sigma_{(0)}^3] \Psi) = 0. \quad (\text{A8-7.2})$$

Sea Ψ tal que

$$p^2 \Psi = p^3 \Psi = 0. \quad (\text{A8-7.3})$$

(Vale análoga observación sobre convergencia a la hecha sobre (A8-5.2)).

Si esta Ψ cumple además que (al menos) para $t=0$ sea

$$(\Psi, F^1 \alpha_{(0)}^2 \Psi) = (\Psi, -i \partial_1 \alpha_{(0)}^2 \Psi) \neq 0 \quad (\text{A8-7.4})$$

entonces será

$$\frac{d}{dt} \int_{\text{spin}}^{(1/2)3} \neq 0 \quad (\text{A8-7.5})$$

y quedará probada la (8.177).

Tal Ψ existe; construimos (en la representación (2.6) de las γ^{μ}) su parte Ψ^I (arbitraria):

$$\Psi^I = \begin{pmatrix} f(\vec{x}) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i\bar{\alpha} \end{pmatrix}. \quad (\text{A8-7.6})$$

Usando (2.63) construimos $\Psi(0, \vec{x})_{\epsilon(0)}$:

$$\Psi(0, \vec{x}) = \begin{pmatrix} f & 0 & 0 & -(1+i)f \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -(1+i)f & 0 & 0 & if \end{pmatrix} \quad (\text{A8-7.7})$$

Entonces, $\gamma_{(0)}^{\nu}(-i\partial_1, \alpha_{(0)}^2) \Psi =$

$$= \begin{pmatrix} (1+i)(\partial_1)^2 f & 0 & 0 & i\partial_1 f \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \partial_1 f & 0 & 0 & (1+i)(\partial_1)^2 f \end{pmatrix} \quad (\text{A8-7.8})$$

de donde

$$\begin{aligned} (\Psi, \gamma_{(0)}^{\nu} \Psi) &= \int \Psi^{\dagger}(-i\partial_1, \alpha_{(0)}^2) \Psi \, d x^1 = \\ &= \int d x^1 \{ [f^*(\partial_1)^2 f - 2(\partial_1 f^*)(\partial_1 f) + f^*(\partial_1)^2 f] \}. \end{aligned}$$

Mediante integraciones por partes,

$$(\Psi, \gamma_{(0)}^{\nu} \Psi) = -4 \int |\partial_1 f|^2 \, d x^1 < 0 \quad (\text{A8-7.9})$$

lo que prueba (A8-7.4), o sea la (8.177)

A10-1

LOS CALCULOS DE BELINFANTE QUE PRUEBAN (10.2) \Rightarrow (10.3-a) y (b) (SECC. 10-b).

Premultiplicamos (10.2) por $\Pi_{\nu}(\gamma_{(0)}^{\nu} - \gamma_{(0)}^{\nu})$:

$$\Pi_v \Pi_{\mu} (\gamma_{\mu}^{\nu} - \gamma_{\nu}^{\mu})(\gamma_{\mu}^{\nu} + \gamma_{\nu}^{\mu}) \Psi = 2m \Pi_v (\gamma_{\mu}^{\nu} - \gamma_{\nu}^{\mu}) \Psi \quad (A10-1.1)$$

En el primer miembro intercambio $\mu \leftrightarrow \nu$ y sumo la nueva ecuación con la primitiva (A10-1.1). Después tengo en cuenta que

$$[\Pi_{\mu}, \Pi_{\nu}] = i e F_{\mu\nu} \quad (A10-1.2)$$

El resultado es

$$\Pi_v \Pi_{\mu} \{ (\gamma_{\mu}^{\nu} - \gamma_{\nu}^{\mu})(\gamma_{\mu}^{\nu} + \gamma_{\nu}^{\mu}) + (\gamma_{\nu}^{\mu} - \gamma_{\mu}^{\nu})(\gamma_{\nu}^{\mu} + \gamma_{\mu}^{\nu}) + i e F_{\mu\nu} (\gamma_{\mu}^{\nu} - \gamma_{\nu}^{\mu})(\gamma_{\mu}^{\nu} + \gamma_{\nu}^{\mu}) \} \Psi = 4m \Pi_v (\gamma_{\mu}^{\nu} - \gamma_{\nu}^{\mu}) \Psi \quad (A10-1.3)$$

de donde

$$\Pi_{\mu} (\gamma_{\nu}^{\mu} - \gamma_{\mu}^{\nu}) \Psi = - \frac{i e}{4m} F_{\mu\nu} (\gamma_{\nu}^{\mu} - \gamma_{\mu}^{\nu})(\gamma_{\nu}^{\mu} + \gamma_{\mu}^{\nu}) \Psi \quad (A10-1.4)$$

Semisumando esta última con la (A10-1.1) obtenemos la (10.3-a) y semirestando, la (10.3-b). Q.E.D.