Espacios de norma mixta de funciones diferenciables y de distribuciones

Benedek de Panzone, Agnes I.

1962

Tesis presentada para obtener el grado de Doctor en Ciencias Matemáticas de la Universidad de Buenos Aires

Tesis para optar al título de
Doctor en Ciencias Matemáticas

ESPACIOS DE NORMA MIXTA DE FUNCIONES DIFERENCIABLES Y DE DISTRIBUCIONES

Agnes I. Benedek de Panzone

1962

I N D I C E

INTRODUCCION

La presente tésis tiene por finalidad estudiar en el marco de los espacios de norma mixta algunos resultados recientes de operadores y espacios de distribuciones de interés en la teoría de las Ecuaciones Diferenciales. Los espacios L^P de norma mixta son estudiados en [2] . Su definición y propiedades que en este momento nos interesan se enunciarán luego.

El objetivo en forma más concreta de la presente tésis es reproducir en estos espacios la mayor parte de los resultados del trabajo [3] . La presente consta además de un apéndice en el cual se estudian caracterizaciones de conjuntos relativamente compactos en espacios L^P-Bochner, y condiciones suficientes para que una sucesión de funciones de L^P , convergente en cierto sentido sea convergente en L^P .

Este trabajo está dividido en cuatro secciones y como ya dijimos un apéndice. En la primera sección se introducen los espacios L^P_u que son espacios de funciones para $u \geq 0$ (u es real) y de distribuciones temperadas en general. En el caso de u entero no-negativo corresponden a la familia de las funciones de L^P que admiten derivadas hasta órden u inclusive en L^P . (ver [1], Teorema 6). En este mismo párrafo se consideran operadores multiplicación (Mihlin-Hörmander-Calderón) y operadores singulares (Calderón-Zygmund). Se estudian también los operadores potenciales de Bessel reales y complejos (J^u , J^z) y los de derivación, y su comportamiento en los espacios L^P_u . El primer párrafo concluye con un teorema de interpolación entre los espacios L^P_u .

En la segunda sección se consideran análogos de los teoremas de Soboleff y Krylov.

En la tercera sección se estudian las propiedades de continuidad Hölder y análogas de funciones de L_u^P , $0<u\leq 1$.

La sección cuarta trata de espacios $L_u^P(D)$, definidos en un recinto D no necesariamente $= E^n$, y se considera una extensión de $L_u^P(D)$ a $L_u^P(E^n)$.

Algunos de los resultados aquí considerados son demostrados en forma análoga a la de sus homólogos con $P = p$. Los que no pertenecen a esta categoría son, entre otros, los siguientes:

a) Nota 2 al teorema de interpolación (§1) (cfr. [3] pg. 40)

b) Teorema de Soboleff (cfr. [2] pg. 321)

c) Lema 1 del §2 , en particular el punto e) (cfr. [3] , pg. 34)

d) El párrafo 3 (cfr. [3] , pg. 37) .

Finalmente quiero agradecer al profesor Calderón quién sugirió el tema y al Dr. Gonzalez Dominguez quien apadrina la presente.

Se enumeran a continuación definiciones y resultados básicos del trabajo usados en el transcurso de este trabajo.

Sea E^n el espacio Euclídeo n-dimensional, y sean $x = (x_1,\ldots,x_n)$, $y = (y_1,\ldots,y_n)$, etc. , puntos de este espacio. Denotaremos con $dx = dx_1 \ldots dx_n$ el elemento de volúmen de E^n . Sean además $P = (p_1,\ldots,p_n)$, Q , R , etc. , n-uplas de números reales generalizados $1\leq p_i \leq \infty$. (Esto lo notamos más brevemente con $1\leq P \leq \infty$, y en lo sucesivo, toda relación o igualdad que involucra P , Q , etc., debe entenderse componente a componente).

Para una función $f(x)$ medible Lebesgue sobre E^n , introducimos la siguiente norma-P : tomamos, para $(x_2,\ldots,x_n)$ fijos la norma p_1

de $f(x)$ en la variable x_1 . Resulta así una función $||f||_{p_1/x_1}$ medible en $(x_2,\ldots,x_n)$. Fijando ahora $(x_3,\ldots,x_n)$ tomamos de esta función la norma p_2 en la variable x_2 y así siguiendo. Denotamos el número así obtenido con $||f||_P$. Entonces

$$||f||_P = ||\,(||(||f||_{p_1/x_1})||_{p_2/x_2})\ldots\,||_{p_n/x_n} \;.$$

Se verifica que $||.||_P$ es efectivamente una norma y que el espacio de las funciones medibles $f(x)$ para las cuales $||f||_P$ es finito es un espacio de Banach. A este espacio llamamos $L^P(E^n)$.

Los teoremas que enunciaré a continuación aparecen demostrados en nuestro trabajo y sólo las menciono aquí para ser autoconsistente.

<u>Teorema 1</u> : (Teorema de Young) Si P , Q , R , $1 \leq p_i, q_i, r_i \leq \infty$, verifican

$$(1/p_i) + (1/q_i) = 1 + (1/r_i) \;,$$

esto es

$$1/P + 1/Q = 1 + 1/R \;, \quad y \quad f \in L^P \;, \quad g \in L^Q$$

entonces:

$$f * g \in L^R \quad y \quad ||f * g||_R \leq ||f||_P . ||g||_Q$$

<u>Teorema 2</u> : (Teorema de Sobolev) Sea $L = (\ell_1,\ldots,\ell_n)$ una n-upla de números reales, $0 < \ell_i < 1$. Si P y Q son tales que $(1/P) - (1/Q) = L$, $1 < P \leq 1/L$, entonces vale:

$$\| f \# |x|^{\ell - n} \|_Q \leq C(L,P) \; \|f\|_P$$

para todo $f \in L^P$, donde $\ell = \ell_1 + \ldots + \ell_n$.

Definición 1 : Designamos con H al subespacio de las funciones simples de E^n que verifican la propiedad adicional de ser constantes sobre paralelepípedos de "caras" paralelas a los ejes, y ser nulos fuera de un compacto.

Definición 2 : Decimos que una función $F(z)$, ~~continua~~ definida en $0 \leq \mathrm{Re}(z) \leq 1$ es de crecimiento admisible, si

$$\log |F(x+iy)| \leq A \,.\, \mathrm{esp}\,(a|y|) \quad \text{con cierto} \quad a < \pi \quad ; \quad 0 \leq x \leq 1 \; .$$

Definición 3 : Decimos que una familia de operadores lineales T_z es de crecimiento admisible si cumple los tres puntos siguientes:

i) T_z, para $0 \leq \mathrm{Re}(z) \leq 1$, es una transformación de $H(E^n)$ en la clase de las funciones medibles sobre E^m.

ii) para $F \in H(E^n)$ y G una función acotada, de soporte compacto y medible en E^m, vale

$$\int_{E^m} (T_z F).G \, dy$$

es analítica en la franja $0 < \mathrm{Re}(z) < 1$ y continua en $0 \leq \mathrm{Re}(z) \leq 1$.

iii) para $F \in H(E^n)$ y $k = 1, 2, \ldots$

$$\int_{|y| < k} |T_z F| \, dy$$

es una función de crecimiento admisible (Def. 2).

<u>Teorema 3</u> : (Riesz-Thorin) Sea $P_i = (p_{1i},\dots,p_{ni})$, $Q_i = (q_{1i},\dots,q_{mi})$ $i = 1,0$, $1 \leq p_{ij}, q_{ij} \leq \infty$ y sean P y Q definidos por

$$1/p_i = (1-t)/p_{i0} + t/p_{i1} \quad , \quad 1/q_i = (1-t)/q_{i0} + t/q_{i1} \ .$$

Sea T_z una familia de transformaciones de crecimiento admisible, que verifique para $F \in H(E^n)$

$$||T_{iy} F||_{Q_0} \leq A_0(y) \ ||F||_{P_0}$$

$$||T_{1+iy} F||_{Q_1} \leq A_1(y) \ ||F||_{P_1} \quad \text{con} \quad \log |A_i(y)| \leq C.e^{a|y|} \quad , \quad i=1,0 \quad a<\pi$$

Entonces $||T_t f||_Q \leq A_t \ ||f||_P$, donde A_t depende de $A_0(y)$, $A_1(y)$ y en el caso especial en que $A_i(y)$ no dependen de y , $A_t = A_0^{1-t}.A_1^t$.

<u>Teorema 4</u> : Si $P = (p_1,\dots,p_n)$ $1 \leq p_i \leq \infty$, entonces el dual de $L^P(E^n)$ es $L^Q(E^n)$, $1/p_i + 1/q_i = 1$, en el sentido que toda función lineal F sobre L^P tiene la forma

$$F(f) = \int g.f \, dx \quad \text{con} \quad g \in L^Q \quad y \quad ||F|| = ||g||_Q \ .$$

§1.- Sea J^z la transformada de Bessel definida por

$$\widehat{J^z f} = (1 + 4\pi^2|x|^2).\hat{f} \quad , \quad \text{para todo } z \text{ complejo,}$$

y $f \in (S')$ = espacio de las distribuciones temperadas de Schwartz.
($\hat{}$ indica la transformada de Fourier definida por:

$$\hat{f} = \int e^{2\pi i(x,y)} f(x)\, dx \quad , \quad \text{para funciones de } (S) \text{)} .$$

Los J^z forman un grupo aditivo y como $(1 + 4\pi^2|x|^2)^{-z/2} \in (O_M)$ para todo z , cada una de ellas define un isomorfismo en (S) . Además, si Δ designa el Laplaciano, $(1+\Delta)J^z = J^{z-2}$.

Teorema 1 :

Sea $Re(z)>0$ y $1 \leq p_1 \leq \infty$. Entonces J^z transforma $L^p(E^n)$ continuamente en L^p , y si z es real, con norma ≤ 1 . Además $\int f.J^z g\, dx$ es una función entera de z , para $f,g \in (S)$.

Demostración :

La antitransformada de $(1+4\pi^2|x|^2)^{-z/2} = G_z(x)$ está dada por

$$G_z(x) = c(z) . e^{-|x|}\int_0^{\infty} e^{-|x|t} . (t + \tfrac{1}{2}t^2)^{(n-z-1)/2}\, dt \quad ,$$

si $0 < Re(z) < n+1$, donde $c(z)^{-1} = (2\pi)^{(n-1)/2}.2^{z/2}.\Gamma(\frac{z}{2}).\Gamma(\frac{n-z+1}{2})$.
Si $z = a+ib$, $n+1 > a > 0$, $|G_z(x)| \leq |c(z)/c(a)|.G_a(x) = c.G_a(x)$.
Además es fácil verificar que $G_a(x) \in L^1$ y como es no negativa , $||G_a(x)||_1 = \hat{G}_a(0) = 1$. Esto prueba las dos primeras afirmaciones .
Para probar la última basta ver que:

$$\left[(1 + 4\pi^2 |x|^2)^{-(z+\Delta z)/2} - (1 + 4\pi^2 |x|^2)^{-z/2} \right] / \Delta z = (\Delta z)^{-1} . \widehat{\Delta J}$$

converge en (O_M) , luego $(\Delta z)^{-1}(\Delta J)g$ converge en (S') e

$$\int f(\Delta z)^{-1}.(\Delta J)g \, dx \quad \text{converge en } C \quad . \quad \text{c.q.d.}$$

Para lo que sigue se necesita la siguiente extensión de un teorema de Mihlin:

__Teorema 2__ :

Sea K un operador sobre (S) definido por $\widehat{Kf} = k(x).\hat{f}$, donde $k(x) \in L^{\infty}$ y es tal que $\int_{R/2 < |x| \leq 2R} |R^{|\alpha|} D^{\alpha} k|^2 \, dx \leq B^2.R^n$ para $0 < R < \infty$, y para $|\alpha| \leq \left[(n+2)/2 \right] = \tau$. (R aquí es un número real, no una n-upla!). Entonces se verifica $||Kf||_p \leq C_p \, ||f||_p$ para todo P , $1 < p_1 < \infty$.

Este teorema es consecuencia del siguiente teorema sobre núcleos singulares, demostrado en nuestro trabajo en colaboración con A.P. Calderon:

__Teorema 3__ :

Sea $K(x)$ una función sobre E^n , tal que verifica las condiciones a) y b) siguientes:

a) Si $x = (u,v)$, $u \in E^i$, $v \in E^j$ con $i+j = n$, $i,j \geq 0$, entonces $K(u,v) \in L^1(u,v)$, localmente en v .

b) $\int_{|s| > 2a} |K(s-t) - K(s)| \, ds \leq M < \infty$ si $|t| \leq a$

Si para algún q , $1 < q \leq \infty$, vale

$$||K \# f||_q \leq c \, ||f||_q \quad ,$$

entonces cualquiera sea P , $1 < p_i < \infty$, vale

$$||K\#f||_p \leq c(M,P,q,c)\ ||f||_p$$

D e m o s t r a c i ó n del teorema 2 :

Sea $\theta(x)$ una función de (D) con soporte en $\frac{1}{2} < |x| < 2$, tal que $\sum_{-\infty}^{\infty} \theta(2^{-j}x) = 1$ para $x \neq 0$ (para la existencia de una tal función ver Lema 6 , §3 .)

Definimos $k_j(x) = k(x).\theta(2^{-j}x)$ y $K_j = \check{k}_j$. Observese que K_j es una función $(\in L^2)$.

Vale,

i) $\int |K_j|\ dx \leq C.B$ con C independiente de j

ii) llamando $G_N(x) = \sum_{j=-N}^{N} K_j(x)$, se verifica

$$\int_{|x| > 2a} |G_N(x-y) - G_N(x)|\ dx \leq C'.B \quad \text{mientras} \quad |y| < a \ .$$

En efecto,

$$\left(\int |K_j|\ dx\right)^2 \leq \int (1+2^{2j}|x|^2)^{\alpha} |K_j|^2\ dx \ . \int (1+2^{2j}|x|^2)^{-\alpha}\ dx =$$

$$= C.2^{-nj} \int \sum_{|\alpha| \leq \beta} c_\alpha\, 2^{2j|\alpha|}\, |D^\alpha k_j|^2\ dx \leq$$

$\leq$ usando la hipótesis sobre $k(x)$ y la definición de $k_j \leq C.B^2$,

esto prueba i) .

Por cálculos análogos al anterior se obtiene:

$$\int_{|x|>a} |K_j(x)|\ dx \leq C.B\ (2^j.a)^{(n/2-\alpha)} \tag{1}$$

y,

$$\int |K_j(x-y) - K_j(x)|\ dx \leq C.B\ .\ 2^j.a \quad , \quad |y| < a \tag{2}$$

De (1) y (2) resulta:

$$\int_{|x|\geq 2a} |G_N(x-y) - G_N(x)|\ dx \leq C.B. \sum_{-\infty}^{+\infty} \min\ (2^j a\ ,\ (2^j a)^{(\frac{n}{2}-\alpha)}) \leq C.B$$

lo que prueba ii) .

Sigue de i) y ii) que la función G_N verifica las hipótesis del teorema 3 . Como $|\widehat{G_N}| = |\sum_{-N}^{+N} k_j(x)| \leq ||k||_\infty$, $||G_N \# f||_2 \leq ||k||_\infty . ||f||_2$; resulta entonces de dicho teorema que

$$||G_N \# f||_p \leq c||f||_p$$

donde c depende de B , P , $||k||_\infty$ pero no de N .

Ahora, si $f \in (S)$, $G_N \# f$ converge en L^2 a Kf , para $N \to \infty$ (pues $\widehat{G_N \# f} = \sum_{-N}^{N} k_j.\hat{f}$ converge en L^2 a $k.\hat{f}$); sigue que una subsucesión $G_{N_j} \# f$ converge en casi todas partes a Kf , de donde resulta la tésis.

<u>C o r o l a r i o</u> del Teorema 2 :

Si Kf está definido para $f \in (S)$ por $\widehat{Kf} = k.\hat{f}$ y k(x) verifica

$$|D^\alpha k(x)| \leq C\ |x|^{-|\alpha|} \quad \text{para} \quad |\alpha| \leq \alpha\!\!\!\!\alpha\ ,$$

entonces el operador K definido como en el teorema 2 verifica

$$||Kf||_p \leq C_p \, ||f||_p \quad , \quad \text{cualquiera sea } p \quad , \quad 1 < p_i < \infty \quad , \quad f \in (S) \quad .$$

En efecto, las condiciones impuestas en el corolario a la función k implican que $k(x)$ verifica las hipótesis del teorema 2, y el hecho adicional que $||Kf||_2 \leq C \, ||f||_2$. l.q.q.d.

Teorema 4 :

Si $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ α_i enteros no negativos, y $Re(z) \geq |\alpha|$, entonces $D^\alpha J^z$ transforma L^P continuamente en si mismo si $1 < P < \infty$.
Si $z = i\gamma$, vale

$$||J^z f||_p \leq C_p (1+|\gamma|)^n \, ||f||_p \quad .$$

Demostración :

$\widehat{D^\alpha J^z f} = C \, x^\alpha (1+4\pi^2 |x|^2)^{-z/2} \, \hat{f} = k(x).\hat{f}$, y se verifica:
$|D^\delta k(x)| \leq (1+|z|)^n |x|^{-|\delta|}.C$ si $|\delta| \leq n$. Luego del corolario precedente resulta la tésis.

Definición 4 : Sea u un número real y P tal que $1 \leq p_i \leq \infty$. Definimos L^P_u como la imágen de L^P bajo J^u ; además si $f = J^u g$, definimos $||f||_{P,u} = ||g||_P$.

Teorema 5 :

a) Los espacios L^P_u son isométricos con L^P , $1 \leq p_i \leq \infty$.

b) Si $1 < p_i < \infty$, J^z es un isomorfismo entre L^P_u y L^P_v , donde $v = Re(z) + u$.

c) Si z es real el isomorfismo precedente es una isometría, aún cuando $1 \leq p_i \leq \infty$.

d) Si $u < v$, entonces $L_u^p \supset L_v^p$ y para $f \in L_v^p$ tenemos $\|f\|_{p,v} \leq \|f\|_{p,u}$

e) Si $1 < p_i < \infty$, entonces D_{x_i} transforma L_u^p continuamente en L_{u-1}^p .

D e m o s t r a c i ó n ;

a) y c) son consecuencia inmediata de la definición de L_u^p .

b) Si f L_u^p , $f = J^u g$ con g L^p . Luego $J^z f = J^{z+u} g =$ $= J^{re(z)+u}(J^{Im(z)i} g)$. Por el teorema 4 ;

$$\|J^z f\|_{p,v} = \|J^{iIm(z)} g\|_p \leq C \|g\|_p = C \|f\|_{p,u}$$

q.e.d.

d) resulta análogamente:

$$\|f\|_{p,u} = \|J^{-u} f\|_p = \|J^{v-u} J^{-v} f\|_p \leq \text{por T.3} \leq \|J^{-v} f\|_p = \|f\|_{p,v} .$$

e)

$$\|D_{x_i} f\|_{p,u-1} = \|J^{1-u} D_{x_i} f\|_p = \|(J^1 D_{x_i}) J^{-u} f\|_p \leq \text{por T.4} \leq$$

$$\leq C_p \|J^{-u} f\|_p = C_p \|f\|_{p,u} .$$

q.e.d.

<u>Definición</u> : Llamamos H_u^p , u entero no negativo, al espacio de Banach de las funciones de L^p , tales que sus derivadas en el sentido de Schwartz de órden $\leq u$ son funciones de L^p , con la norma de finida por $\sum_{|\alpha| \leq u} \|D^\alpha f\|_p$, que denotaremos con $|f|_{p,u}$.

Teorema 6 :

a) Sea u entero no negativo y $1 < p_1 < \infty$, Entonces $L_u^P = H_u^P$, y existe una constante $c = c(P,u)$, tal que:

$$(1/c)\ \|f\|_{P,u} \leq |f|_{P,u} \leq c\ \|f\|_{P,u}$$

b) Si u es entero no positivo $1 < p_1 < \infty$, $f \in L_u^P$ si y sólo si $f = \sum_{|\alpha| \leq -u} D^{\alpha} g_{\alpha}$, donde $g\ \ L^P$. Además existe una elección de los g_{α} tal que

$$C^{-1} \cdot \|f\|_{P,u} \leq \sum_{|\alpha| \leq -u} \|g_{\alpha}\|_P \leq c \cdot \|f\|_{P,u} \ .$$

Demostración :

a) Sea $f \in L_u^P$ y $|\alpha| \leq u$. $\|D^{\alpha} f\|_P = \|J^u D^{\alpha} J^{-u} f\|_P \leq$ por T.4 $\leq$ $\leq C\ \|J^{-u} f\|_P = C.\ \|f\|_{P,u}$. Esto prueba la segunda desigualdad.

Además si $f \in (S)$, $\|J^{-u} f\|_P = \|J^{2r-u}(1+\Delta)^r f\|_P \leq$ si r es mayor que $u/2$ $\leq \sum_{\substack{|\beta| \leq u \\ |\alpha| \leq 2r-u}} C_{\alpha\beta} \|J^{2r-u} D^{\alpha} D^{\beta} f\|_P \leq \sum_{|\beta| \leq u} C_{\beta} \|D^{\beta} f\|_P$.

Esto termina de probar a) dado que toda función f con u derivadas en L^P es aproximable de tal manera por funciones de (S) que las derivadas de orden menor que $u+1$ de dichas funciones converjan en L^P a las derivadas de f .

b) Si $f = \sum D^{\alpha} g_{\alpha}$, $g_{\alpha} \in L^P$, entonces:

$$\|f\|_{P,u} = \|J^{-u} f\|_P = \|\sum_{|\alpha| < u} J^{-u} D^{\alpha} g_{\alpha}\|_P \leq \sum_{|\alpha| \leq u} c_{\alpha} \|g_{\alpha}\|_P$$

Sea ahora $f \in (S)$ y r entero tal que $2r > -u$. Entonces

$$f = (1+\Delta)^r J^{2r} f = \sum_{\substack{|\alpha| \leq -u \\ |\beta| \leq 2r+u}} c_{\alpha\beta} D^{\alpha} D^{\beta} J^{2r+u} J^{-u} f =$$

$$= \sum_{|\alpha| \leq -u} D^{\alpha} \Big(\sum_{|\beta| \leq 2r+u} c_{\alpha\beta} D^{\beta} J^{2r} f \Big) = \sum_{|\alpha| \leq -u} D^{\alpha} g_{\alpha} \ ,$$

y $||g_{\alpha}||_P \leq c \ ||J^{-u} f||_P$. Esto prueba la segunda desigualdad en b) en el caso en que $f \in (S)$. El caso general sigue por un argumento de densidad. En efecto, sea $f \in L^P_u$; entonces $f = J^u g$ con $g \in L^P$. Sea $g_n \in (S)$ una sucesión que converge a g en L^P , y llamemos $f_n = J^u g_n \in (S)$. Entonces los g^n_{α} asignados en la demostración previa a f_n son de Cauchy en L^P , y convergen allí a ciertos g_{α} . Luego $\sum D^{\alpha} g^n_{\alpha}$ converge en (S') a $\sum D^{\alpha} g_{\alpha}$; por otra parte $\sum D^{\alpha} g^n_{\alpha} = f_n$ converge en (S') a f , $\therefore$ $f = \sum D^{\alpha} g_{\alpha}$. Además existe una subsucesión f_{n_i} tal que g_{n_i} , g_{α} convergen puntualmente. Por la desigualdad b) para estos f_{n_i} y el teorema de Fatou sigue la tésis.

<u>Nota 1</u> :

Si u es entero positivo, y t es cualquier real > 0 , entonces valen las inclusiones $L^P_{u+t} \subset H^P_u \subset L^P_{u-t}$, para todo P , $1 \leq p_1 \leq \infty$, y $c^{-1} ||f||_{P,u-t} \leq |f|_{P,u} \leq c ||f||_{P,u+t}$.

Demostración :

Probaremos que el operador $(J^u D^{\alpha})$, si $u > |\alpha|$ transforma contínuamente L^P en L^P , para $1 \leq p_1 \leq \infty$.

Veamos como de este resultado sigue la afirmación de la nota:

Si $f \in L^P_{u+t}$ $\|D^{\alpha} f\|_P = \|J^{u+t}D^{\alpha}J^{-u-t}\|_P \leq$ por (3) $\leq C\|J^{-u-t}\|_P =$ $= C\,\|f\|_{P,u+t}$ mientras $|\alpha| \leq u$. Esto prueba la primera inclusión continua.

Si $f \in H^P_u$, $J^{-u+t}f = J^{u+t}J^{-2u}f = J^{u+t}(1+\Delta)^u f =$

$= \sum_{|\alpha|\leq u} C_{\alpha}(J^{u+t}D^{\alpha}).D^{\alpha}f$, entonces por (3) $\|f\|_{P,u-t} =$

$= \|J^{-u+t}f\|_P \leq \sum_{|\alpha|\leq u} C'_{\alpha}\|D^{\alpha}f\|_P \leq C\,|f|_{P,u}$. Esto prueba la segunda inclusión continua.

Para probar finalmente que (J^uD^{α}) transforma contínuamente L^P en L^P , siempre que $u > |\alpha|$, consideremos el operador $(J^vD_{x_i})$ con $v > 1$. $D_{x_i}J^vf = D_{x_i}(G_v \# f)$. De la fórmula explícita de G_v dada en el teorema 1 se ve que $(D_{x_i}G_v)$ es una función de L^1 para $n+1 > v > 1$, y como $G_{v+u} = G_u \# G_v$ para $u,v > 0$, el mismo resultado vale para todo $v > 1$.

Luego $D_{x_i}J^v$ transforma H^P en L^P contínuamente si $v > 1$, $1 \leq p_i \leq \infty$. Como $J^uD = \prod_{j=1} (J^{u/|\alpha|}D_{x_j})^{\alpha_j}$ es una aplicación sucesiva de operadores de esta forma, tiene la misma propiedad. q.c.d.

<u>Teorema</u> 7 :

Sean f y $g \in (S)$, $1 \leq P < \infty$. Entonces $\langle f,g\rangle = \int f\,g\,dx$ es tal que $|\langle f,g\rangle| \leq \|f\|_{P,u}\|g\|_{P',-u}$ $(1/p'_i = 1 - 1/p_i)$ y $\langle f,g\rangle$ puede ser extendida contínuamente a $L^P_u \oplus L^{P'}_{-u}$.

Toda funcional lineal contínua en L^P_u es de la forma $l(f) = \langle f,g\rangle$ con un cierto $g \in L^{P'}_{-u}$, si $1 \leq P < \infty$.

Demostración :

Para funciones de (S) evidentemente se tiene:

$\langle f, J^u g\rangle = \langle J^u f, g\rangle$, cualquiera sea u . Por lo tanto $\langle f,g\rangle = \langle J^u J^{-u} f, g\rangle = \langle J^{-u} f, J^u g\rangle$. Por la desigualdad de Hölder para los espacios L^P , vale $|\langle f,g\rangle| = |\langle J^{-u} f, J^u g\rangle| \leq$ $\leq ||J^{-u}f||_P \, ||J^u g||_{P'} = ||f||_{P,u} ||g||_{P',-u}$.

Hay entonces una extensión de $\langle f,g\rangle$ para la cual vale: $\langle f,g\rangle = \langle J^{-u} f, J^u g\rangle \;\forall u$.

Sea ahora L una funcional lineal contínua sobre L^P_u . Entonces $F(h) =_{def} L(J^u h)$, para $h \in L^P$ es una funcional contínua sobre L^P $\therefore$ por el teorema 4 de la introducción, $L(J^u h) = \langle h,g\rangle$ con cierto $g \in L^{P'}$. Ahora $J^{-u} g = g' \in L^{P'}_{-u}$, de modo que $g = J^u g'$, y $L(J^u h) = \langle h, J^u g'\rangle = \langle J^u h, g'\rangle = \langle f,g'\rangle = L(f)$ q.e.d.

A continuación se dará un teorema de interpolación entre los espa - ción L^P_u :

<u>Teorema 8</u> :

Sea A un operador definido en (S) , contínuo de $L^{P_i}_{u_i}(E^n)$ en $L^{Q_i}_{v_i}(E^m)$, $i = 0,1$, u_i, v_i reales .

Si $P_i = (p_{i1},\ldots,p_{in})$, $Q_i = (q_{i1},\ldots,q_{im})$, $1 < p_{ij}, q_{ij} < \infty$ y $P = (p_1,\ldots,p_n)$, $Q = (q_1,\ldots,q_m)$, u y v están definidos por $1/p_j = (t/p_{1j}) + (1-t)/p_{0j}$, $1/q_j = (t/q_{1j}) + (1-t)/q_{0j}$, $u = tu_1 + (1-t)u_0$, $v = tv_1 + (1-t)v_0$ entonces A definido en (S) es contínuo de $L^P_u(E^n)$ en $L^Q_v(E^m)$.

D e m o s t r a c i ó n :

Supondremos sin pérdida de generalidad que $v_1 - v_0 \geq 0$. Sean $\varphi_1 \in \mathcal{D}(E^n)$, $\varphi_2 \in \mathcal{D}(E^m)$, $\varphi_i \geq 0$, y de integral $= 1$; sean K_i , $i = 1,2$ los operadores $K_1 = \varepsilon^{-n}\varphi_1(x/\varepsilon)\#$, $K_2 =$

$= \mathcal{E}^{-m}\varphi_2(x/\mathcal{E})\#$; J_1^z , J_2^z las transformaciones de Bessel en E^n y E^m respectivamente. Sean además $\ell(z) = (u_1-u_0)z + u_0$, $L(z) = (v_0-v_1)z - v_0$ y por último sea B_z el operador definido por $B_z f = J_2^{L(z)} A K_1 J^{\ell(z)} f$ para f simple, perteneciente a la clase H , definida en la introducción, y $0 \leq Re(z) \leq 1$.

Evidentemente $K_1 J^{\ell(z)} f = J^{\ell(z)} K_1 f \in (S)$, luego $A K_1 J^{\ell(z)} f$ está bien definido y pertenece a $L^{Q_1}_{v_1}$, es decir es de la forma $J^{v_1} g$ con $g \in L^{Q_1}$. Como $Re(L(z)) \geq -v_1$, $J^{L(z)} A K_1 J^{\ell(z)} f = J^{L(z)+v_1} g$ es por el teorema 3 una función, $\in L^{Q_1}$.

Queremos probar ahora que el operador B_z cumple las hipótesis del teorema de interpolación de la introducción; nuestro teorema seguirá como conclusión.

<u>Lema</u> :

El operador B_z verifica:

i) $||B_z f||_{Q_0} \leq C_0(|z|+1)^{n+m} ||f||_{P_0}$ si $z = iy$; C_0 dep. de P_0 , Q_0 , M_0

ii) $||B_z f||_{Q_1} \leq C_1(|z|+1)^{n+m} ||f||_{P_1}$ si $z = 1+iy$; C_1 dep. de P_1 , Q_1 , M_1.

iii) La familia B_z es de crecimiento admisible.

D e m o s t r a c i ó n   d e l   l e m a :

Consideremos las siguientes aplicaciones continuas:

a) $K_1 : L^P \longrightarrow L^P$ con norma ≤ 1 , si $1 \leq p_1 \leq \infty$.

b) $J_1^{\ell(z)} : L^P_r \longrightarrow L^P_{r+Re(\ell(z))}$ con norma $\leq C_P(1+|z|)^n$, si $1 < p_1 < \infty$.

c) Identidad: $L^P_s \longrightarrow L^P_{s-t}$ con norma ≤ 1 , $0 \leq t$, $1 \leq p_1 \leq \infty$ $\forall s$.

d) $A : L^{P_i}_{u_i} \longrightarrow L^{Q_i}_{v_i}$ con norma $\leq M_i$, $i = 1,0$

e) $J_2^{L(z)}$: $L^Q_v \longrightarrow L^Q_{v+Re(L(z))}$ con norma $\leq (1+|z|)^m . C_Q$, $1 < q_i < \infty$

f) Identidad: $L^Q_{s'} \longrightarrow L^Q_{s'-t'}$ con norma ≤ 1 , $t' \geq 0$ $0 \leq q_i \leq 1$

Si $z = iy$, por los puntos a)-f) anteriores tomando $r = 0$, $P = P_0$, $Q = Q_0$, resulta i) .

Si $z = 1+iy$, por los mismos puntos tomando $r = 0$, $P = P_1$, $Q = Q_1$ sigue ii) .

En el caso $z = x+iy$, eligiendo en a)-f) $r = |u_1-u_0|$, $P = P_1$ $Q = Q_1$, $s = |u_1-u_0| + Re(\ell(z))$; $t = s-u_1$, $s' = t' = v_1+Re(L(z))$, obtenemos

$$||B_z f||_{Q_1} \leq c\ (|z|+1)^{n+m}\ ||K_1 f||_{P_1, |u_1-u_0|} \tag{4}$$

Como $K_1 f \in (S)$, de esta desigualdad sigue que, si se demuestra que $\int (B_z f) g\ dx$ es analítica en la franja $0 < Re(Z) < 1$, para $f \in H$, g acotada de soporte acotado, la familia B_z es de crecimiento admisible.

Se ve como en el teorema 1 que:

$$I(f,g,z) = \int (J_2^{-v_1} A\ J_1^{\ell(z)} f)\ (J_2^{(v_1-v_0)(1-z)} g)\ dx$$

es para $f,g \in (S)$ una función entera de z .

Además

$$|I(f,g,z)| \leq ||(J_2^{-v_1} A\ J_1^{\ell(z)} f)||_{Q_1} . ||J_2^{(v_1-v_0)(1-z)} g||_{Q_1'} \leq$$

$$\leq \text{ por la cont. del op. } A \leq$$

$$\leq M_1 \, ||J_1^{-u_1+h(z)} f||_{Q_1} \, ||J_2^{(v_1-v_0)(1-z)} g||_{Q_1'} \quad ,$$

luego si $0 \leq \mathrm{Re}\, z \leq 1$,

$$|I(f,g,z)| \leq M_1 \, C_{Q_1} \, (1+|z|)^{n+m} \, ||f||_{Q_1, |u_1-u_0|} \, ||g||_{Q_1'} \qquad (5)$$

Si ahora g es acotado de soporte compacto, existe una sucesión $g_n \in (S)$ tal que $g_n \to g$ en $L^{Q_1'}$.

De (5) resulta que para $0 \leq \mathrm{Re}(z) \leq 1$, y $|z| \leq C$, $I(f,g_n,z)$ converge uniformemente a $I(f,g,z)$. Esto prueba que $I(f,g,z)$ es continua en $0 \leq \mathrm{Re}(z) \leq 1$ y analítca en el interior de esta región, para $f \in (S)$ y g acotado de soporte acotado.

O b s e r v a c i ó n : Sea $z = u+iv$, u y v reales arbitrarios. Si $1 < P < \infty$, con analogía al teorema 7 se ve que

$$\int J^z f \, g \, dx = \int f \, J^z g \, dz \quad , \quad \forall \, f,g \quad (S) \quad ,$$

además

$$\int J^z f \, g \, dx \leq C_P \, (1+|z|)^n \, . \begin{cases} ||f||_P \, ||g||_{P^\#, -u} & (1/P^\# = 1 - 1/P) \\ ||f||_{P,-u} \, ||g||_{P^\#} & \end{cases}$$

Luego un argumento de densidad permite inferir

$$\int J^z f \, g \, dx = \int f \, J^z g \, dx \quad \text{para } f \in L^P \; L^P_{-u} \; ; \; g \in L^{P^\#} \cap L^{P^\#}_{-u} \qquad (6)$$

Usando (6) se ve que si $f \in H$; g acotado de sop. acotado, $\int B_z f\, g\, dx = I(K_1 f, g, z)$, y esta última función es contínua en la franja $0 \leq \mathrm{Re}(z) \leq 1$. y analítica en su interior. Además por (5)

$$\left| \int B_z f\, g\, dx \right| \leq C_{k,f,g} (1+|z|)^{n+m}$$

lo que termina de probar que B_z es un operador de crecimiento admisible.

Seguimos ahora con la demostración del teorema 8 .

Por los tres puntos del lema y el teorema 3 de la introducción sigue que:

$$\|B_t f\|_Q \leq A_t \|f\|_P ,$$

donde P y Q son las definidas en el enunciado de este teorema. A_t depende sólo de t , P_i , Q_i , M_i . Tomando ahora el ε en la definición de K_1 tan pequeño que $\|f\|_P \leq 2 \|K_1 f\|_P$, resulta

$$\|B_t f\|_Q \leq 2 A_t \|K_1 f\|_P \tag{7}$$

Pero $B_t = J_2^{-v} A J_1^u K_1$, así que si llamamos $J_1^u K_1 f = g$, la desigualdad (7) dice

$$\|Ag\|_{Q,v} \leq 2 A_t \|g\|_{P,u}$$

esto es lo que queríamos demostrar, pues las funciones $g = J_1^u K_1 f$, con $f \in H$, $\varepsilon \leq \mathcal{E}(f)$, son densas en L^P_u .

<u>N o t a</u> <u>1</u> : Si $u_i = 0$, $i = 0,1$, y $P = (p_1, \ldots, p_n)$ verifica $p_i < \infty$, entonces el teorema vale con $1 \leq p_{ij} \leq \infty$. Si $v_i = 0$, $i = 0,1$, entonces el teorema vale con $1 \leq q_i \leq \infty$. La demostración en estos casos sigue las mismas líneas generales y es aún más simple.

<u>N o t a</u> <u>2</u> : Es abierto el problema si el teorema de interpolación vale o no con $x \geq 1$, $Q \geq 1$. En estos casos el método de demostración sólo da el siguiente resultado más débil:
si

$$||Af||_{Q_i, v_i} \leq M_i \, ||f||_{P_i, u_i} \quad , \quad i = 0,1$$

para f,g S entonces:

$$||Af||_{Q, v-\varepsilon} \leq M \quad ||f||_{P, u+\varepsilon}$$

para P , Q , u , v definidos en el T.8 y ε arbitrario pero $\varepsilon > 0$, $f \in (S)$.

D e m o s t r a c i ó n :

Sólo hay que modificar la demostración del T.8 en los siguientes puntos:

$$\text{definir } B_z \text{ como: } B_z = (J_2^{\varepsilon + L(z)} \, A \, J_2^{\varepsilon + \ell(z)} \, K_1) \quad ,$$

y en el Lema en los puntos b) y e) considerar $J_1^{\ell(z)+\varepsilon}$ y $J_2^{L(z)+\varepsilon}$ en lugar de $J_1^{\ell(z)}$ y $J_2^{L(z)}$ respectivamente, valiendo entonces b) y e) para $1 \leq P \leq \infty$, $1 \leq Q \leq \infty$.

§2.- Estableceremos a continuación algunos teoremas tipo Soboleff y Krylof en los espacios L_u^P .

Para ello demostraremos una forma más fuerte del teorema 2 de la introducción:

<u>Teorema</u> 1 :

Sea $L = (\ell_1,\ldots,\ell_n)$ una n-upla de números reales, $0<\ell_1<1$. Si P y Q son tales que $(1/P) - (1/Q) = L$ (la relación entendida componente a componente), $1\leq p_1 \leq 1/\ell_1$, $1<p_n<1/\ell_n$, entonces vale

$$||f \# |x|^{\ell-n}||_Q \leq C \, ||f||_P$$

para todo $f \in L^P$, donde $\ell = \ell_1+\ldots+\ell_n$.

Demostración :

Para probar el teorema basta ver que

$$I = \left| \int \frac{f(x)\, g(y)}{|x-y|^{n-\ell}}\, dx\, dy \right| \leq c \; ||f||_P \; ||g||_{Q^\#} \qquad (1/Q^\# = 1 - 1/Q)$$

para los P y Q indicados en el enunciado.

Consideremos entonces los $(n-1)$-uplas: $P' = (p_1,\ldots,p_{n-1})$, $Q' = (q_1,\ldots,q_{n-1})$, $R' = (r_1,\ldots,r_{n-1})$, este último definido por: $1/R' = 1 + 1/Q' - 1/P' = 1 - L'$ $(L' = (\ell_1,\ldots,\ell_{n-1}))$.

La función $h(x_1,\ldots,x_{n-1},a) = h(x',a) = (|x'|^2+a^2)^{(\ell-n)/2}$ verifica: $||h(x',a)||_{R'} = |a|^{\ell_n - 1}.C$.

En efecto, $||h(x',1)||_{R'} = C < \infty$ por admitir $h(x',1)$ como mayorante a $(x_1^2 + 1)^{(\ell_1-1-\varepsilon)/2} \ldots (x_{n-1}^2+1)^{(\ell_{n-1}-1-\varepsilon)/2}$ (por ejemplo con

$\varepsilon = (1-\ell_n)/(n-1)$). Además, $h(ay', a) = |a|^{\ell-n} h(y', 1)$, de modo que $||h(x',a)||_{R'} = |a|^{\sum_1^{n-1} 1/r_i} ||h(ay',a)||_{R'} =$
$= |a|^{n-\ell-1+\ell_n} ||h(ay',a)||_{R'} = |a|^{\ell_n-1} ||h(y',1)||_{R'} = |a|^{\ell_n-1} . C$,
que es lo que hemos afirmado. Fijando entonces x_n , y_n , tenemos: por el teorema de Young $|| \int \frac{f(x)}{|x-y|^{-\ell+n}} dx_1 \ldots dx_{n-1} ||_{Q'} \leq$
$\leq ||f||_{P'/E^{n-1}} . ||h(x', |x_n-y_n|)||_{R'} = ||f||_{P'} . C . |x_n-y_n|^{\ell_n-1}$,
y aplicando este resultado y la desigualdad de Hölder obtenemos:

$$\left| \int \frac{g(y).f(x)}{|x-y|^{n-\ell}} dx_1 \ldots dx_{n-1}\, dy_1 \ldots dy_{n-1} \right| \leq ||g||_{Q'^{\#}} . ||f||_{P'} . C. |x_n-y_n|^{\ell_n-1}$$

Si llamamos $F(x_n) = ||f(x)||_{P'/E^{n-1}}$, $G(y_n) = ||g(y)||_{Q'^{\#}/E^{n-1}}$,
de la desigualdad precedente resulta:

$$I \leq C . \int F(x_n)\, G(y_n)\, |x_n-y_n|^{\ell_n-1} dx_n\, dy_n \leq \text{ por el teorema de Sobolev}$$

$$\leq C' \; ||F||_{p_n} \; ||G||_{q_n^{\#}} = C' \; ||f||_P . ||g||_{Q^{\#}} \quad , \text{ q.e.d.}$$

Necesitamos el siguiente resultado auxiliar:

<u>Lema 1</u> :

Sea la función $F_u(x)$, u real > -2 definida por $F_u(x) =$
$= \Gamma^{-1} (\frac{u+2}{2}) \int_0^\infty e^{-|x|.(t+1)} . (t+t^2/2))^{u/2}\, dt$. Aveces escribiremos $F_u(r)$ por $F_u(x)$ con $|x| = r$, es decir la consideramos función de una sola variable real no-negativa (el radio $r = |x|$). Vale:

a) $F'_u(r) = -r . F_{u+2}(r)$.

b) $F_u(r) \leq \begin{cases} C \,.\, r^{-u-1} \,.\, \exp(-r/2) & , \text{ si } u > -1 \,, \\ C \,.\, (\log^+(1/r) + 1) \,.\, e^{-r/2} & , \text{ si } u = -1 \\ C \,.\, e^{-r} \text{ si } -2 < u < -1 \end{cases}$

c) si $R = (r_1, \ldots, r_n)$ es tal que $1 \leq R \leq \infty$ y $\sum 1/r_i > u+1$ entonces $F_u(|x|) \in L^R(E^n)$.

d) Si R es tal que $1 > \sum 1/r_i - u - 1 > 0$ y $u > -1$, entonces $||F_u(x+h) - F_u(x)||_R \leq C\, |h|^{\sum 1/r_i - u-1}$.

e) Si R verifica $2 > \sum 1/r_i - u-1 > 0$, y $u > -1$, entonces $||F_u(x+2h) - 2\, F_u(x+h) + F_u(x)||_R \leq C\, |h|^{\sum 1/r_i - u-1}$

D e m o s t r a c i ó n :

a) Obsérvese que para calcular $F'_u(r)$ es lícito derivar bajo el signo de integral, por la convergencia absoluta de esta última integral. Luego

$$F'_u(r) = (1/\Gamma((u+4)/2)) \,.\, \int_0^\infty e^{-r(t+1)} \, d(t+t^2/2))^{(u+2)/2} \,,$$

e integrando por partes obtenemos a) .

b) Si $r \geq 1$, $F_u(r) \leq C.e^{-r} \int_0^\infty e^{-t} \, (t+(t^2/2))^{u/2} \, dt = C'.e^{-r}$.

Si $r < 1$ separaremos casos:

$$u > -1 \quad : \quad F_u(r) \leq C \left(\int_0^\infty e^{-t'} (r.t'+(t'^2/2))^{u/2} \, dt' \right).r^{-u-1} \leq C'.r^{-u-1},$$

$u = -1$: Por a) y el comportamiento de $F_u(r)$ en el ∞ , resulta $F_{-1}(r) = \int_r^\infty r'.F_1(r') \, dr' \leq$ por la parte ya demostrada de b) $\leq$

$$\leq C. \int_r^\infty r'^{-1}.e^{-r'/2} \, dr' \leq \tilde{C}' \, (\lg \tfrac{1}{r} + 1) \,.$$

$$u \leq -1 \,:\, F_u(r) < e^{-r} \int_0^\infty (t+(t^2/2))^{u/2} dt. \left[1/\Gamma(\tfrac{u+2}{2})\right] = e^{-r}.C \,.$$

Estas desigualdades terminan por probar b) .

c) Por b) tenemos $F_u(x) \leq C . \prod_{i=1}^{n} e^{-|x_i|/2n} . |x_i|^{-\ell_i(u+1)}$ si $u > -1$, y ℓ_i está definido por $\ell_i = (1/r_i)/(\sum 1/r_i)$. Esta misma cota vale si $u = -1$, mientras se interpreta $|x_i|^0$ como $(\log^+(1/|x_i|) + 1)$. Es fácil de ver que dichas cotas pertenecen a L^R . Si $u < -1$ se ve más rápido aún que $F_u(x)$ pertenece a todo L^R .

d) De una aplicación del teorema del V.M. y de a) obtenemos $|\Delta_h F_u(x)| \leq |h|\, F_u'(r') = |h|\, r'\, F_{u-2}(r')$, $r' = |x+th|$, $0<t<1$. Por b) sigue que:

$$|\Delta_h F_u(x)| \leq C . |h|\, r'^{-u-2} \leq C'\, |h| . |x|^{-u-2} \quad \text{si} \quad |x| \geq 2|h| \qquad (1)$$

Sea ahora $G_1(x;a) = a.|x|^{-u-2}$ si $|x| > 2a$ y 0 en otra parte, y $G_2(x;a) = |x|^{-u-1}$ si $|x| < 3a$, y 0 en otra parte.

Por (1) y b) resulta que

$$||\Delta_h F_u(x)||_R \leq C . ||G_1(x;|h|)||_R + C\, ||G_2(x;|h|)||_R \ .$$

Acotaremos estas dos últimas normas.

Se ve que $G_i(ax;a) = a^{-u-1}.G_i(x;1)$ $i = 1,2$, por lo que
$||G_i(x;|h|)||_R = |h|^{\sum 1/r_i}\, ||G_i(|h|x;|h|)||_R =$

$$= |h|^{\sum(1/r_i)-u-1}\, ||G_i(x;1)||_R \ .$$

Habremos mostrado d) si logramos mostrar que esta última norma es finita para $i = 1,2$. La función $4\,|x|^{-u-1}(1+|x|)^{-1}$ es una mayorante de $G_i(x;1)$ y por tanto lo es también la función $4 \prod |x_i|^{-\ell_i(u+1)}(1 + |x_i|)^{-\ell_i}$, $\ell_i = (1/r_i)/(\sum 1/r_i)$, y esta función pertenece a L^R por las condiciones impuestas a R . q.e.d.

e) Aplicando el teorema del V.M. para las diferencias segundas y teniendo en cuenta que $F_u(x)$ es una función radial, se obtiene: $|\Delta_h^2 F_u(x)| \leq |h|^2 (2 r'^{-1} . F_u'(r') + F_u''(r'))$, r' siendo un valor intermedio entre $|x|$ y $|x+h|$. Luego de a) y b) resulta:

$$|\Delta_h^2 F_u(x)| \leq |h|^2 . C\, r'^{-u-3} \leq (\text{si } |x| \geq 2|h|) \leq |h|^2 . c|x|^{-u-3} .$$

Se repite ahora la demostración del caso anterior sustituyendo $\Delta_h F_u$ por $\Delta_h^2 F_u$, y cambiando la definición de G_1 por $G_1(x;a) = a^2 . |x|^{-u-3}$ si $|x| \geq 2a$ y 0 en otra parte, de modo que $||G_1(x;1)||_R$ será finita para las nuevas condiciones impuestas a R . Sigue l.q.q.d.

<u>Teorema</u> 2 :

Sea $u > v$, $1 \leq P$, $1 < p_n$, y $1/Q = 1/P - L > 0$, donde $L = (\ell_1, \ldots, \ell_n)$ es una n-upla de números reales, $\ell_i > 0$, $\sum \ell_i = u-v$. Entonces $L_u^P \subset L_v^Q$ y $||f||_{Q,v} \leq C||f||_{P,u}$, con C dependiendo de $P,Q,u-v$.

Si $1 > u - \sum 1/p_i > 0$, entonces toda función L_u^P coincide p.p. con una función contínua $\bar{f}$ y

$$|\bar{f}(x)| \leq C\, ||f||_{P,u} \qquad |\bar{f}(x-h) - \bar{f}(x)| \leq C\, |h|^{u-\sum 1/p_i}\, ||f||_{P,u}$$

Demostración :

Observemos que las condiciones impuestas implican que $n > (u-v) > 0$. Luego $J^{u-v} = G_{u-v}^{*}\#$ (ver Teorema 1), donde G_{u-v} es salvo factor $F_{n-u+v-1}(x)$. Entonces por a) del precedente Lema $|G_{u-v}(x)| \leq C/|x|^{n-u+v}$ y $|(J^{u-v}f)(x)| \leq C.|f|\#|x|^{u-v-n}$. Sigue del teorema

1, §2 que $||J^{u-v}f||_Q \leq C\ ||f||_P$. Llamando $g = J^u f$, esta desigualdad se escribe $||g||_{Q,v} = ||J^{-v}g||_Q \leq C||J^{-u}g||_P = C||g||_{P,u}$. Esto prueba la primera parte.

Para la segunda parte observemos que $n+1 > u > 0$, por tanto si $f \in L^P_u$ entonces $f = G_u \# g$ con $g \in L^P$. $G_u = F_{n-u-1}$ pertenece por c) del Lema 1, §2 a $L^{P^\#}$ $(1/P^\# = 1 - 1/P)$ y sigue por el teorema de Young la continuidad de la función f y también la acotación $||f(x)||_\infty \leq C.||g||_P = C||f||_{P,u}$. Finalmente $f(x+h)-f(x) = = (G_u(x+h)-G_u(x)) \# g$ y por d) ,

$$||G_u(x+h) - G_u(x)||_{P^\#} \leq C\ |h|^{u-n+\sum 1/p_i^\#} = C|h|^{u-\sum 1/p_i} .$$

Sigue de nuevo por el teorema de Young que

$$|f(x+h) - f(x)| \leq C\ |h|^{u-\sum 1/p_i}\ ||f||_{P,u} \qquad \text{q.e.d.}$$

N o t a a l t e o r e m a 2 :

1) Si en la primera parte Q satisface $1/Q > 1/P - L > 0$ en lugar de la igualdad, entonces la conclusión sigue aún sin la restricción $1 < p_n$, pues entonces $||J^{u-v}f||_Q \leq C\ ||f||_P$ resulta del teorema de Young, ya que $G_{u-v} = C\ F_{n-u+v-1} \in L^R$, $1/R + 1/P = 1 + 1/Q$ por c) del lema 1 , §2 ,

2) Si en la segunda parte se tuviera $1 = u - \sum 1/p_i$, $u < n+1$, las conclusiones se modificarían sólo en cuanto

$$|\overline{f}(x-h) - \overline{f}(x)| \leq C\ |h|\ (\log^+(1/|h|) + 1)\ ||f||_{P,u}$$

D e m o s t r a c i ó n   d e   2) :

\- . Lo que hay que probar entonces es:

$$||(G_u(x+h) - G_u(x)) * g||_\infty \leq C.|h|(\log^+(1/|h|+1)\ ||g||_p$$

y $||G_u * g||_\infty \leq C.||g||_p$.

La segunda de estas desigualdades sigue del teorema de Young, ya que por c) $G_u \in L^{p^\#}$.

Para la primera consideremos la integral

$$I(|h|) = \int (|G_u(x-y+h) - G_u(x-y)|)\ |f(x)|\ |g(y)|\ dx\,dy \qquad f,g \in (S).$$

Por a) y b) del lema:

$$|G_u(x+h) - G_u(x)| \leq C.|h|.|x|^{u-n-1}\ e^{-|x|/4} \qquad \text{si} \quad |x| \geq 2|h|$$

$$\leq C'.|h|.(|x|+|h|)^{u-n-1}\ .\ e^{-|x|/4} = G'(x;h)$$

En cambio la restricción de $|G_u(x)-G_u(x+h)|$ a $|x| \leq 2|h|$, que llamaremos $G''(x;h)$, verifica por a) : $||G''(x;h)||_{p'} \leq$
$\leq C.|h|.(\log^+(1/|h|)+1)$ $(1/P' = 1 - 1/P)$. Tenemos entonces:

$$I(h) \leq \int G'(x-y;h)|f(x)|\ |g(y)|dxdy + \int G''(x-y;h)|f(x)|\ |g(y)|dxdy =$$
$$= I_1(h) + I_2(h) \ .$$

$$I_2(h) \leq ||G''||_{p'}.||f||_1||g||_p \leq C|h|(\log^+(1/|h|)+1)\ ||f||_1||g||_p \ .$$

Obtendremos una cota semejante para $I_1(h)$. Para ello observemos que $I_1(|h|)/|h|$ es una función decreciente con $|h|$.

$$\frac{d(I_1(|h|)/|h|)}{d|h|} = -C. \int (|x-y|+|h|)^{u-n-2}\, e^{-|x-y|/4} |f(x)|\,|g(y)|\,dxdy \quad .$$

Teniendo en cuenta que $||(|x|+|h|)^{u-n-2}||_{p'} =$
$= |h|^{\{\Sigma 1/p\} - u+2+n}\, ||(|x|+1)^{u-n-2}||_{p'} = |h|^{-1}.C$, resulta:

$$- \frac{d(I_1(|h|)/|h|)}{d|h|} \leq C\ .\ |h|^{-1} ||f||_1 ||g||_p \quad ,$$

y por tanto

$$I_1(|h|)/|h| \leq C\ .\ \log (1/|h|)\ ||f||_1 ||g||_p + I_1(1) \qquad (2)$$

para $|h| < 1$

$$\frac{I_1(|h|)}{|h|} \leq I_1(1) \leq C\ ||f||_1 ||g||_p \quad \text{si} \quad |h| \geq 1\ . \qquad (3)$$

De (2) y (3) resulta: la cota para $I_2(|x|)$ análoga a la de $I_1(|x|)$.
Como $||(G_u(x-h) - G_u(x)) \# g||_\infty \leq \sup_{||f||_1=1} I(|h|) \leq \sup I_1(|h|) +$
$+ \sup I_2(|h|)$.

Sigue de dichas cotas la nota.

§3.- En este párrafo estudiaremos propiedades de continuidad Hölder de las funciones pertencientes a una clase L^P_u .

D e f i n i c i ó n : Sea u un número real y r el mayor entero menor que u . Denotaremos con Λ^P_u a la clase de distribuciones f , $f \in L^P_r$, tales que $\|\Delta^2_h J^{-r} f\|_P \leq C\,|h|^{u-r}$. La norma de f en Λ^P_u la definiremos como $\|f\|_{P,r}$ + la menor de las constantes C que mantienen la precedente desigualdad. La denotaremos con $/f/_{P,u}$.

T e o r e m a 1 :

a) Si u no es entero, entonces la condición $\|\Delta^2_h J^{-r} f\|_P \leq$ $\leq C\,|h|^{u-r}$ es equivalente a $\|\Delta_h J^{-r} f\|_P \leq C\,|h|^{u-r}$.

b) J^v es un isomorfismo entre Λ^P_u y Λ^P_{u+v} , para todo u,v real y $1 \leq P \leq \infty$.

c) Si $u < v$, y $1 < P < \infty$, entonces $\Lambda^P_u \supset L^P_u \supset \Lambda^P_v$, siendo las inclusiones contínuas.

Antes de la demostración necesitamos una serie de resultados auxiliares.

L e m a 1 :

Sea $g(x) \in (D)$ tal que el soporte de $g(x) \subset \{x \,;\, \frac{1}{2} < |x| < 2\}$; sean t y v números reales $0 < t < 1$, y el operador T_{vt} definido por $\widehat{T_{vt}\, f} = g(tx)\,(1+|x|^2)^{v/2}\,\hat{f}$, para $f \in L^P$. Entonces $\|T_{vt} f\|_P \leq C.t^{-v}\,\|f\|_P$ para todo P , $1 \leq P \leq \infty$, con $C = C(g,v)$.

D e m o s t r a c i ó n :

Llamamos $G_{vt}(x)$ a la antitransformada de $g(tx)(1+|x|^2)^{v/2}$.
$G_{tv}(x) = \dfrac{1}{(-ix)^{\alpha}} \int e^{i(x.y)}\, D^{\alpha}(g(ty)(1+|y|^2)^{v/2})\, dy$ y el integrando tiene soporte contenido en $\{y \,;\, 1/2t < |y| < 2/t\}$ y está acotado por $C\,(1+|y|^2)^{(v-s)/2}$ donde $s = |\alpha|$.

Luego: $|G_{tv}(x)| \leq C\,|x|^{-s}.t^{s-v-n}$, para $s = 0,1,\ldots$. En particular:

$$|G_{tv}(x)| \leq \begin{cases} C\,t^{-n-v} & \text{si } |x| \leq t \\ C\,t^{1-v}|x|^{-n-1} & \text{si } |x| \geq t \end{cases}$$

Integrando estas cotas vemos q ue $\|G_{tv}(x)\|_1 \leq C.t^{-v}$. Sigue lo afirmado por el teorema de Young.

En el lema 2 y 3 , $x,y,z,$ denotarán variables unidimensionales , $x,y,z \geq 0$.

<u>Lema 2</u> :

Sean r,s,t números reales, $r \geq 0$, $0 < t < 1$.

Llamamos $F(x) = \int_0^x \exp\,(i\,zy/t)z^r(1+z^2)^{(-r-s)/2}dz$. Si $0 < s < 1$, entonces $F(x) \leq C.(t/y)^{1-s}$; si $s \leq 0$, entonces $F(x) \leq C(1+x)^{-s}(t/y)$. C es una constante absoluta.

Demostración :

Sea $0 < s < 1$. Descompongamos $F(x)$ en parte real e imaginaria, y acotaremos cada parte.

$$\operatorname{Re} F(x) = \left\{ \int_0^{\pi t/2y} + \int_{\pi t/2y}^{\pi 3t/2y} + \ldots + \int_{\pi(2m-1)t/2y}^{x} \right\} = c_0 + c_1 + \ldots + c_m$$

La sucesión c_i es alterna, y si la función $z^r(t^2+z^2)^{-(r+s)/2}$ es monótona en $(\pi(2j-1)t/2y)$, $\pi(2k+1)t/2y)$, entonces la sucesión $c_j,\ldots,c_k$ es también monótona. Sigue que se puede asociar $c_0+\ldots+c_m$ en a lo sumo 5 términos $(c_0+\ldots+c_{i_1})+\ldots+(c_{i_4}+\ldots+c_m)$ tales que en cada paréntesis el módulo de los sumandos es monótono. Luego cada paréntesis está acotado por $2.\max|c_i|$, $i = 0,\ldots,m$. Además siendo $z^r(t^2+z^2)^{-(r+s)/2} \leq z^{-s}$, resulta $|c_i| \leq \int_0^{\pi t/y} z^{-s}\,dz =$ $= (\pi t/y)^{1-s}/(1-s)$. Juntando resultados obtenemos $|\operatorname{Re}(F(x))| =$

$= |c_0+\ldots+c_m| \leq C.(t/y)^{1-s}$.

Procediendo análogamente con la parte imaginaria de $F(x)$ se obtiene una cota similar, de donde sigue la primera afirmación del Lema.

Si $s\leq 0$ la demostración sigue como antes excepto que cambia la cota de $|c_1|$: en este caso $z^r(t^2+z^2)^{-(r+s)/2} \leq (z^2+1)^{-s/2} \leq (z+1)^{-s}$ y $|c_1| \leq (x+1)^{-s}.(t/y)$.

Lema 3 :

Si $g(x)$ es una función indefinidamente diferenciable en $(0,\infty)$, que se anula para $x\geq 2$, tal que $g'(x)$ es integrable, entonces $I = \int_0^\infty g(x)\,.\,\exp(i\,xy/t)\,x^r\,.\,(t^2+x^2)^{(-r-s-)/2}\,dx$ verifica $|I| \leq C_{r,s}\,.\,||g'||_1(t/y)^{1-s_1}$, donde s_1 es un cierto número real $0<s_1<1$. siempre cuando $r\geq 0$, $0<t<1$, $s<1$

Demostración :

Con la nomenclatura del Lema 2 tenemos:

$$I = \int_0^\infty F'(x)\, g(x)\, dx \ .$$

Sea $0<s<1$. Integrando por partes en la expresión de I y usando lema 2 obtenemos la cota requerida con $s_1 = s$.

Sea $s\leq 0$; se ve que $|I|\leq C_{r,s}||g||_\infty \leq C_{r,s}||g'||_1$. También se ve como en el caso anterior que $|I|\leq C_{r,s}||g'||_1(t/y)$. Luego

$$|I|\leq C_{r,s}||g'||_1 \min(1,(t/y)) \leq C_{r,s}||g'||_1 \min^{1-s_1}(1,(t/y))$$

con cualquier s_1 , $0<s_1<1$. Sigue lo afirmado.

Generalizaremos ahora en cierto sentido el Lema 1 .

Nuevamente x, y denotan puntos de E^n .

Lema 4 :

Si $v \geq 0$ el Lema 1 vale con $g(x) \in (D)$, soporte de $g(x) \in \{x ; |x| \leq 2\}$ (En esta última restricción el número 2 no es esencial, sólo la adoptamos por comodidad).

Demostración :

Usamos la notación de la demostración de Lema 1 .

Sea $v > 0$:

$$G_{tv}(x) = (1/-ix_1)^s \int \exp (i\ x.y)\ D^s_{y_1}\left[g(ty)\ (1+|y|^2)^{v/2}\right] dy =$$

$$= x_1^{-s} \text{ . suma finita de términos } T_s \text{ de la forma :}$$

$$T_s = \int \exp (i\ x.y)\ g_r(ty)\ .\ t^r\ (1+|y|^2)^{(v-s+r-j)/2}\ .\ y_1^j\ dy \quad ,$$

donde $g_r(x)$ son derivadas de $g(x)$, esto es son funciones con las mismas características que $g(x)$, $0 \leq r \leq s$, $j \geq 0$.

Acotaremos estas integrales en dos casos:

Caso 1 : $s = 0$

$$|T_0| \leq C(g) \int_{|y| \leq 2/t} (1+|y|^2)^{v/2}\ dy \leq C\ .\ t^{-v-n}$$

Caso 2 : $s = n$. Introduzcamos como variable $y' = ty$. Entonces

$$T_n = t^{-v} \int \exp (i|x|\,|y| \cos \hat{xy} /t).g_r(y)\ (t^2+|y|^2)^{(v-n+r-j)/2}.y_1^j\ dy$$

Escribiendo la integral en coordenadas polares, resulta

$$T_n = $$
$$= t^{-v} \int_{\Sigma} \cos\theta_1{}^j d\Sigma \int_0^{\infty} \exp(i|x|\rho \cos\gamma/t).g_r(\rho,\theta)(t^2+\rho^2)^{(v-n+r-j)/2} \rho^{n+j-1}\ d\rho$$

Aplicando el Lema 3 a la integral en ρ , obtenemos

$$|T_n| \leq t^{-v} C \int_{\Sigma} \left\| \frac{\partial}{\partial \rho} g_r \right\|_1 (t/|x||\cos\gamma|)^{1-s_1} \, d\Sigma$$

Evidentemente $\left\|\frac{\partial}{\rho} g_r\right\|_1$ es una función acotada en las variables angulares, de modo que

$$|T_n| \leq t^{-v}.C.(t/|x|)^{1-s_1} \int_{\Sigma} (1/|\cos\gamma|)^{1-s_1} \, d\Sigma = t^{-v}.C.(t/|x|)^{1-s_1} \quad .$$

De estas cotas sigue que

$$|G_{tv}(x)| \leq \begin{cases} C.t^{-v-n} & \text{para} \quad |x| < t \\ C.t^{-v}(t/|x|)^{1-s_1} \; |x|^{-n} & \text{para} \quad |x| \geq t \end{cases}$$

y se concluye como el Lema 1 .

Falta tratar el caso $v = 0$. Es inmediato que $G_{t0}(x) =$ $= t^{-n} G_{10}(x/t)$, de modo que $\|G_{t0}\|_1 = \|G_{10}\|_1 =$ cte. y sigue por Young el Lema

<u>Lema</u> 5 :

Sea Γ un cono circular en E^n de abertura $\pi/4$, con vértice el origen cuyo eje tiene la dirección del vector unitario $\vec{e}$. Sea $g \in (D)$ tal que soporte de $g \in \Gamma \cap \{x \; ; \; \frac{1}{2} < |x| < 2\}$. Para $0 < t < 1$ sea el operador O_t definido por $\widehat{O_t f} = g(tx) \, (\exp(it \, \vec{e}.x) - 1)^{-1} \hat{f}$. Entonces $\|O_t f\|_p \leq C \|f\|_p$, $C = C(g)$ para todo P , $1 \leq P \leq \infty$.

Demostración :

Sólo hay que observar que $\cos \widehat{ex} > \cos \pi/4$ en el soporte de $g(x)$, y que entonces $g(x) \, (\exp(i \, e.x) - 1)^{-1} \in (D)$. Se aplica aho ra el Lema 4 con $v = 0$.

Lema 6 :

Existe una función $g(x) \in (D)$, tal que sop de $g \subset \subset \{x \; ; \; \frac{1}{2} < |x| < 2\}$ y $\sum_{-\infty}^{\infty} g^2(2^{-m}x) = 1$.

Demostración :

Sea $g_1(t)$, la función característica de $-\frac{1}{4} < t < \frac{3}{4}$, en E^1 . Entonces $\sum_{-\infty}^{\infty} g_1(t-n) = 1$.

Sea $\varphi(t) = C_n \cdot \exp(1/(n^2t^2-1))$ para $-1/n < t < 1/n$ y cero en otra parte. n es un entero fijo, tal que $2/n < 1/4$. C_n es una constante de normalización, tal que $\int \varphi(t)\, dt = 1$.

Entonces $g_2(t) = g_1(t) \# \varphi(t)$ es $C^{\infty}(E^1)$ y tiene soporte en $-\frac{1}{2} < t < 1$, además $\sum_{-\infty}^{\infty} g_2(t-n) = 1$ para todo t .

Afirmamos, cosa que probaremos más tarde, que $g_2(t)^{\frac{1}{2}} = g_3(t)$ es también una función indefinidamente diferenciable. Supuesto esto, definimos la función $g(x)$, $x \in E^n$, como: $g(x) = g_3(\log_2|x|)$. $g(x)$ tiene soporte en $2^{-\frac{1}{2}} < |x| < 2$, es indefinidamente diferenciable por serlo $g_3(t)$, y $\sum_{-\infty}^{\infty} g^2(2^{-m}x) = \sum_{-\infty}^{\infty} g_2(\log_2|x|-m) = 1$,q.e.d.

Veamos ahora la diferenciabilidad de $g_3(t)$: los puntos donde esto no es obvio son los ceros de $g_2(t)$ que pertenecen al soporte de dicha función, esto es $t = -1/4 - 2/n$ y $t = 3/4 + 2/n$. Consideraremos este último punto;en el otro la función se comporta simétricamente.

$$g_2\left(\frac{3}{4} + \frac{2}{n} - t\right) = \int_{-1/n}^{t-1/n} \exp(1/(n^2s^2-1))\,dx \quad \text{para} \quad 0 \leq t < 1/n \; .$$

Tenemos que mostrar que la raíz cuadrada de esta función tiene todas sus derivadas nulas para $t = 0$. Por su expresión explícita

$$g_2(\tfrac{3}{4} + \tfrac{2}{n} - t) \geq (t-t_1)\ \exp\ (1/(n^2(t_1-\tfrac{3}{n})^2-1)) \geq (t-t_1)\exp(1/t_1(n^2t-2n)))$$

para todo t_1 , $0 < t_1 < t$. Tomando $t_1 = [(4h-1)/4h].t$ resulta

$$g_2(3/4 + 2/n - t) \geq (t/4h).\exp(4h/(4h-1)(n^2t^2-2nt))$$

Además

$$g_2^{(m)}(3/4 + 2/n - t) = t^{-m}.(\text{función acotada de } t).\exp(1/(n^2t^2-2nt)) .$$

De estas dos fórmulas, y del hecho que $g_3^{(m)}$ = suma finita de términos de la forma

$$C \,.\, g_2^{(m_1)} \ldots g_2^{(m_h)} . g_2^{-h-\frac{1}{2}} ,$$

sigue que $g_3^{(m)}(3/4 + 2/n - t) \longrightarrow 0$, para $t \to 0$, q.e.d.

Demostración del teorema 1 :

Observemos que vale

i) $$2^N \Delta_{2^{-N}h} - 2^M \Delta_{2^{-M}h} = (\tfrac{1}{2}) \sum_{N+1}^{M} 2^j \Delta^2_{2^{-j}h} .$$

y como casos particulares de esta fórmula:

ii) $$\Delta_h - 2^{-N}\Delta_{2^{+N}h} . = -(\tfrac{1}{2}) \sum_{0}^{N-1} 2^{-j}\Delta^2_{2^jh}$$

iii) $$\Delta_h - 2^N \Delta_{2^{-N}h} = (\tfrac{1}{2}) \sum_{1}^{N} 2^j \Delta^2_{2^{-j}h}$$

Escribimos $F = J^{-r}f$, y $s = u-r$. Supongamos que $||\Delta_h^2 F||_p \leq C.|h|^s$, además de $||F||_p < \infty$.

Aplicando ii) y tomando normas se obtiene:

$$||\Delta_h F||_p \leq (\ast) \sum_{0}^{N-1} C.2^{-j}(2^j|h|)^s + 2^{-N+1}||F||_p$$

y haciendo tender N a infinito resulta

$$||\Delta_h F||_p \leq C_s\ |h|^s \quad .$$

La conversa sigue pues $||\Delta_h^2 F||_p \leq 2||\Delta_h F||_p$. Esto prueba a) .

b) Como para v entero b) es cierto por la misma definición de los Λ_u^p , queda sólo por probar b) para $0<v<1$. También basta considerar $0<u\leq 1$.

Caso 1 : $u+v\leq 1$.

$$||\Delta_h^2\, J^v f||_p = ||\Delta_h G_v * \Delta_h f||_p \leq ||\Delta_h G_v||_1 C_u|h|^u/f/_{p,u} \quad ,$$

y utilizando d) del Lema 1 §2, y el hecho que $G_v = C.F_{n-v-1}$, resulta $||\Delta_h^2 J^v f||_p \leq |h|^{u+v}.C_{u,v}\ /f/_{p,u}$. Además $||J^v f||_p \leq ||f||_p \leq$ $\leq /f/_{p,u}$, de donde resulta

$$/J^v f/_{p,u-v} \leq C_{u,v}\ /f/_{p.u} \qquad \text{q.e.d.}$$

Caso 2 ; $1< u+v < 2$.

Sea $\{\Gamma_i\}$ $i = 1,\dots,N$ una familia de conos circulares, con vértice el orígen, cuyos ejes tienen la dirección de los vectores unitarios $\vec{e}_i$, de abertura $\pi/4$, abiertos, que cubren la superficie Σ = $= \{x\ ;\ |x| = 1\}$. Sea $\{g_i(x)\}$ una familia de funciones idefinidamente diferenciables sobre Σ , soporte de $g_i \subset \Gamma_i$, tal que $\sum_{i=1}^{N} g_i^2(x) = 1$ para todo $x\in\Sigma$. La construcción de una tal familia podría ser como sigue: sea $g_i'(x)$ una partición de la unidad sobre Σ , subordinado al cubrimiento Γ_i , $g_i'(x)$ siendo funciones no-negativas. Sea $g(x) = \sum_{i=1}^{N} g_i'^2\ (x)$ sobre Σ ; $g(x)$ es positiva e indefinidamente diferenciable y por lo tanto también lo es $g(x)^{-\frac{1}{2}}$. Las funciones $g_i'(x) = g_i(x).g(x)^{-\frac{1}{2}}$ forman una familia con las propiedades buscadas. Sea $g(x)$ la función del Lema 6. Definimos $g_i^{\#}(x) = g_i(x/|x|).g(x)$; $g_i^{\#}(x)$ son indefinidamente diferenciables y además verifican:

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{i=1}^{N} g_i^{\#2}(2^{-m}x) = 1 \quad \text{para todo} \quad x \neq 0 \ .$$

Consideremos $f \in \Lambda_u^P$, y $|h| < 1$.

$$\widehat{\Delta_h^2 J^{v-1} f} = (1-\exp(i\, h.x))^2 (1+|x|^2)^{(1-v)/2} \hat{f} =$$

$$= \Big(\sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{i=1}^{N} g_i^{\#2}(2^{-m}|h|x)\Big). \text{ lo mismo}$$

Pero $\displaystyle\sum_{m=-\infty}^{0} \sum_{i=1}^{N} g_i^{\#2}(2^{-m}x) = g^{\#\#}(x)$ es una función de (D) , con soporte contenido en $\{x \ ; \ |x| < 2\}$; de donde

$$\widehat{\Delta_h^2 J^{v-1} f} = g^{\#\#}(|h|x)(1+|x|^2)^{(1-v)/2} \widehat{\Delta_h^2 f} \ +$$

$$+ \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{N} (1-\exp(i\, h.x))^2 g_i^{\#}(2^{-m}|h|x)(1+|x|^2)^{(1-v)/2} \ .$$

$$. \ g_i^{\#}(2^{-m}|h|x)(1-\exp(2^{-m}|h|e_i.x))^{-2} \widehat{\Delta_{2^{-m}|h|e_i}^2 f} \ .$$

Luego usando la nomenclatura de los Lemas 1 , 4 y 5 tenemos

$$\Delta_h^2 J^{v-1} f = T_{(1-v)|h|} \Delta_h^2 f + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{N} \Delta_h^2 \, T_{(1-v)(2^{-m}|h|)} \, O_{2^{-m}|h|} \Delta_{2^{-m}|h|e_i}^2 f$$

y por dichos lemas:

$$||\Delta_h^2 J^{v-1} f||_p \leq C.|h|^{v-1}||\Delta_h^2 f||_p + \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{N}(2^{-m}|h|)^{v-1} C||\Delta^2_{2^{-m}|h|e_1} f||_p \leq$$

$$\leq C.|h|^{v-1+u} /f/_{p,u} + \sum_{m=1}^{\infty}(2^{-m}|h|)^{v-1+u} C. /f/_{p,u} = C|h|^{v+u-1} /f/_{p,u} \quad (1)$$

Análogamente se llega a que

$$J^{v-1} f = T_{(1-v)\,1}\, f + \sum_{m=1}^{\infty} T_{(1-v)2^{-m}}\, O_{2^{-m}} (\Delta^2_{2^{-m} e_1} f) \quad , \text{ de donde:}$$

$$||J^{(v-1)} f||_p \leq C\ ||f||_p + \sum_{m=1}^{\infty} C.2^{-m(v+u-1)} /f/_{p,u} \leq C./f/_{p,u} \quad (2)$$

De (1) y (2) obtenemos $/J^v f/_{p,u+v} \leq C\ /f/_{p,u}$ q.e.d.

c) Demostraremos primero la segunda inclusión: Según la definición de Λ^p_{v-u} , $\Lambda^p_{v-u} \subset L^p_0$, con la inclusión contínua. Aplicando J^u a ambos espacios y usadno b) obtenemos $\Lambda^p_v \subset L^p_u$ q.e.d.

Para demostrar la primera inclusión separaremos dos casos:

$n \geq 2$: llamando $s = u-r$ vemos

$$\Delta_h^2 J^s f = (\Delta_h^2 G_s) * f \quad ,$$

luego

$$||\Delta_h^2 J^s f||_p \leq ||\Delta_h^2 G_s||_1\ ||f||_p$$

usando e) del Lema 1, §2

resulta $||\Delta_h^2 J^s f||_p \leq C|h|^s.||f||_p = C|h|^s||J^u f||_{p,u}$

como además

$$||J^s f||_p = ||J^u f||_{p,r} \leq ||f||_p = ||J^u f||_{p,u}$$

vemos que

$$/J^u f/_{p,u} \leq C.\ ||J^u f||_{p,u} \qquad \text{q.e.d.}$$

$n = 1$: aplicaremos un método parecido al caso h) : sea $h>0$, lo cual no restringe la generalidad.

$$\widehat{\Delta_h^2 J^s f} = -g^{\#\#}(|h|x)(1-e^{ixh})^2(1+x^2)^{-s/2}\hat{f} +$$

$$+\sum_{m=1}^{\infty}(1-e^{ihx})^2 . g^{\#^2}(2^{-m}|h|x)(1+x^2)^{-s/2}\hat{f} \quad .$$

Llamando $g(x) = g^{\#\#}(x)(1-\exp(ix))^2/x^2$, vemos que $g(x) \in (D)$, y

$\widehat{\Delta_h^2 J^s f} = g(hx)\left[(1+x^2)^{(2-s)/2}-(1+x^2)^{-s/2}\right] h^2 . \hat{f}$ + el segundo sumando sin modificarse.

Tenemos entonces

$$\Delta_h^2 J^s f = h^2 . T_{(2-s)h} f - h^2 T_{0h} J^s f + \sum_{m=1}^{\infty} \Delta_h^2 (T_{-s,2^{-m}h} f) \quad .$$

Aplicando lemas 1 y 4 se obtiene

$$||\Delta_h^2 J^s f||_p \leq h^2 . C\, h^{s-2}||f||_p + h^2||J^s f||_p + \sum C(2^{-m}h)^s||f||_p \leq Ch^s||f||_p$$

se concluye ahora como en el caso anterior.

O b s e r v a c i ó n : En este párrafo se ha usado la transformada de Fourier $\hat{f} = \int e^{i(x-\xi)} f(\xi)\, d\xi$, de donde se modificó la definición de J^u :

$$\widehat{J^u f} = (1+|x|^2)^{-\frac{u}{2}} \hat{f} \quad .$$

Este cambio no altera los resultados. Tan solo altera las constantes numéricas.

§4.- Esta sección está dedicada a un teorema de extensión que muestra que definiendo en una manera natural espacios $L_k^P(D)$ sobre un recinto D cuyo contorno satisface condiciones adecuadas estos espacios no son sino la restricción de $L_k^P(E^n)$ a D.

Necesitamos para ello definir qué entendemos bajo $L^P(D)$, si D es un dominio en E^n.

<u>Definición</u> : Sea $f(x)$ definido y medible sobre D. Llamamos $||f||_{P(D)}$ a $||\tilde{f}||_{P(E^n)}$, donde $\tilde{f}$ es igual a f en D y 0 fuera de D. Llamamos además $L^P(D)$ al espacio de las funciones medibles sobre D tales que su $||.||_{P(D)}$ sea finito.

$L^P(D)$ con norma $||.||_{P(D)}$ es un espacio de Banach, lo que sigue inmediatamente del hecho que lo podemos identificar con el subespacio cerrado de $L^P(E^n)$ de aquellas funciones que se anulan fuera de D.

<u>Definición</u> : Dado un dominio D en E^n diremos que una función f definida sobre D pertenece a $L_k^P(D)$, donde k es un entero no-negativo, si $f \in L^{P(D)}$ y todas sus derivadas en el sentido de Schwartz de orden $\leq k$ son también funciones de $L^P(D)$. Definimos además la norma de $f \in L_k^P(D)$ como la suma de las normas de $D^{\alpha}f$, $|\alpha| \leq k$, en $L^P(D)$.

<u>Definición</u> : Un dominio D en E^n se dirá que tiene contorno regular si existe un cubrimiento finito de ∂D por medio de abiertos U_i, y para cada U_i existe un cono finito γ_i tal que

(i) todo punto de $D \cap U_i$ es el vértice de un trasladado de γ_i enteramente contenido en D.

<u>Teorema</u> :

Sea D un dominio de contorno regular. Entonces existe un operador extensión $\mathcal{E}$ que lleva $L_k^P(D)$ continuamente en $L_k^P(E^n)$, para todo

P , $1 < P < \infty$. Más explícitamente $\mathcal{E}$ es tal que si $f \in L_k^P(D)$ entonces $\mathcal{E} f \in L_k^P(E^n)$ y $\mathcal{E} f = f$ en D . Además

$$\| \mathcal{E} f \|_{P,k} \leq C_{P,k,D} \| f \| \quad ,$$

donde $\|f\|$ es la norma de f en $L_k^P(D)$.

D e m o s t r a c i ó n :

Sea η_1, η una partición de la unidad subordinada al cubrimiento U_1, U de $\bar{D}$, donde U es un abierto contenido en D . Sea ahora $-\gamma_1$ el cono opuesto a γ_1 , y sea $\phi_1(x)$ una función soportada por $-\gamma_1$, con vértice en el orígen, que es indefinidamente diferenciable en el complemento del orígen, y que coincide con una función homogénea, no negativa , $\not\equiv 0$, de grado $k-n$ en un entorno del orígen.

Introduzcamos coordenadas polares en E^n ; sea $x = \rho \nu$, donde ν es un vector unitario y $\rho = |x|$. Entonces $(\partial/\partial\rho)^k(\rho^{n-1}\phi_1(\rho\nu)) = \Psi_1$ es cero en un entorno del orígen y es por lo tanto una función indefinidamente diferenciable.

Sea ahora $f \in L_k^P(D)$, y extendamos f y todas sus derivadas a ser 0 fuera de D . Con esta extensión definamos

$$\mathcal{E}_1 f = f_1 = C_1 \Big[\int \phi_1(\rho\nu)\, \rho^{n-1} (\partial/\partial\rho)^k f(x-\rho\nu)\, d\nu\, d\rho - \\ - \Psi_1(\rho\nu)\, f(x-\rho\nu)\, \rho^{n-1}\, d\nu\, d\rho \Big]$$

donde $d\nu$ denota el elemento de área de la esfera unitaria en E^n y C_1 es una constante cuyo valor determinaremos más tarde.

Mostraremos que vale:

i) $f = f_1$ en $D \cap U_1$

ii) $||f_i||_{P,k} \leq C_{P,k,i} \, ||f||$

Probado esto

$$f = \eta(x).f(x) + \sum \eta_i(x).f_i(x)$$

es la extensión buscada (supuesto que los $\eta(x)$ tienen derivadas de órden $\leq k$ acotadas, cosa que podemos suponer).

Para probar i) supongamos primero que f tiene derivadas contínuas de todos los órdenes en D. Entonces si $x \in U_i \cap D$ la función $f(x-\rho\gamma)$ es k veces diferenciable en el soporte de $\phi_i(\rho\gamma)$. Luego la primera integral en la definición de f_i puede ser integrada por partes k veces, con respecto de ρ, quedando el segundo miembro reducido al término

$$C_i.f(x) \int (\partial/\rho)^{k-1} (\rho^{n-1} \phi_i(\rho\gamma))_{\rho=0} \, d\gamma$$

y la integral es por las hipótesis un número positivo K_i. Eligiendo $C_i = 1/K_i$ hemos probado i) para f indefinidamente diferenciable.

Si ahora f es una función arbitraria de $L^P_k(D)$. Existe una sucesión de funciones indefinidamente diferenciables que convergen p.p. a f en D, y $D^\alpha f_m \longrightarrow D^\alpha f$ en $L^P(C)$ para todo C compacto contenido en D y $|\alpha| \leq k$ (los f_m pueden estar definidos por ejemplo como $f_m(x) = \int f(x-y).h(my).m^n \, dy$, donde $h(y)$ es una función C^∞ de integral $= 1$ y de soporte compacto.)

Reescribamos ahora la definición de f_i. Como $(\partial/\partial\rho)^{\ell} = \sum_{|\alpha|=\ell} \frac{\ell!}{\alpha!} \gamma^\alpha D^\alpha$, escribiendo f_α por $D^\alpha f$ en D y 0 fuera, vemos que:

$$\mathcal{E}_i f = f_i = C_i \left[\sum_{|\alpha| = k} \int \phi_\alpha \# f_\alpha - \Psi_i^\# f \right] . \tag{1}$$

donde $\phi_\alpha = (-1)^k (k!/\alpha!) \gamma^\alpha \phi_i(\rho \gamma)$.

Como ϕ_α y Ψ_i son funciones de L^1 , teniendo en cuenta que si $x \in C_i$ = compacto contenido en $D \cap U_i$, entonces en la definición de $\mathcal{E}_i f_m$ la f_m se integra sobre un compacto $C \subset D$, vemos que $\mathcal{E}_i f_m \longrightarrow \mathcal{E}_i f$ en $L^p(C_i)$. Como $\mathcal{E}_i f_m = f_m$ en $U_i \cap D$, resulta que $\mathcal{E}_i f = f$ p.p. en $U_i \cap D$. Esto termina de probar i) .

Para mostrar ii) , debemos acotar $||D^\beta f_i||_p$ para $|\beta| \leq k$, por $C_{i,p,k} ||f||$. Usando la fórmula (1) y el hecho que ϕ_α es indefinidamente diferenciable en $E^n - 0$, y coincide con una función homogénea de grado $n-k$ en un entorno del origen, vemos que si $|\beta| \leq k-1$, $D^\beta(\phi_\alpha \# f) = (D^\beta \phi_\alpha) \# f$, la función entre paréntesis siendo de L^1 . Luego por el teorema de Young en este caso

$$||D^\beta f_i||_p \leq C_i ||f||_p \leq C_i ||f|| .$$

Sea ahora $|\beta| = k$. Si g es continuamente diferenciable, entonces $\phi_\alpha \# g$ se puede derivar bajo el signo integral, pasando $k-1$ derivadas a la ϕ_α y una derivada a la g . Esto es

$$D^\beta(\phi_\alpha \# g) = (D^{\beta - 1_i} \phi_\alpha \# \frac{\partial}{\partial x_i} g) .$$

Si en esta última integral excluímos una esfera de radio ε alrededor del punto singular de la ϕ_α , e integramos por partes se obtiene:

$$D^{\beta}(\emptyset_{\alpha} \# g) = \int D^{\beta}\emptyset_{\alpha}(y)\, g(x-y)\, dy + C.g(x) + o(1) \quad ,$$

y haciendo tender ε a 0

$$D^{\beta}(\emptyset_{\alpha} \# g) = \text{v.p.}(D^{\beta}\emptyset_{\alpha}) \# g + C.g(x) \tag{2}$$

Usaremos ahora el teorema 3 del párrafo 1 (demostrado en [1]) para demostrar que $\text{v.p.}(D^{\beta}\emptyset_{\alpha})$ conserva los espacios $L^{P}(E^{n})$.

Llamemos para ello $h(x) = (D^{\beta}\emptyset_{\alpha})$. $h(x)$ coincide en un entorno del origen con una función homogénea de grado $-n$ de media 0, es indefinidamente diferenciable fuera del origen, y tiene soporte compacto (más precisamente su soporte está contenido en $-\gamma_1$) . Designamos con $h_{\varepsilon}(x)$ a la función igual a $h(x)$ para $|x| > \varepsilon$, y 0 para $|x| \leq \varepsilon$. Mostraremos que $h_{\varepsilon}(x)$ satisface las hipótesis del teorema 3 , párrafo 1 , uniformemente en ε , y que

$$\|h_{\varepsilon} \# f\|_2 \leq C\, \|f\|_2 \quad \forall\ f \in L^2 \tag{3i}$$

de modo que $\|h_{\varepsilon}(x) \# g\|_P \leq C_P \|g\|_P$ donde C_P no depende de ε . Seguirá por un pasaje al límite y lema de Fatou que

$$\|\text{vp } h(x) \# g(x)\|_P \leq C_P\, \|g\|_P \tag{3ii}$$

para g continuamente diferenciable, y $1 < P < \infty$.

La condición a) del Teorema 3 es obviamente satisfecha, ya que $h_{\varepsilon}(x)$ es acotada de soporte compacto. Veamos ahora la condición b): si $|t| \leq a$

$$\int_{|s| \geq 2a} |h_{\varepsilon}(s-t) - h_{\varepsilon}(s)|\, dx \leq \int_{|s| \geq 2|t|} |h_{\varepsilon}(s-t) - h_{\varepsilon}(s)|\, dx = F(t, \varepsilon)$$

de modo que basta mostrar que

$$F(t,\mathcal{E}) \leq M \tag{3iii}$$

Sea primero $\mathcal{E} = 0$:

Si $|s| \geq 2|t|$ podemos aplicar el teorema del valor medio en la siguiente fórmula, obteniendo

$$h(x-t) - h(s) = (\nabla h)_{s-\theta t} \times t \quad ,$$

y como

$$|\partial h/\partial s_i| \leq C\,|s|^{-n-1}$$

resulta

$$|h(s-t) - h(s)| \leq C|s|^{-n-1}.|t| \quad \text{para} \quad |s| \geq 2t \tag{4}$$

Sigue de (4) que

$$F(t,0) \leq C\,.\,|t| \int_{2|t|}^{\infty} |s|^{-2}\, d|s| = C \tag{5}$$

Sea ahora $\mathcal{E} \leq |t|$. En este caso $F(t,\mathcal{E}) = F(t,0)$, y de (5) resulta (3iii).

Sea $\mathcal{E} \geq |t|$. Descompongamos $F(t,\mathcal{E})$:

$$F(t,\mathcal{E}) = \int_{|s|\geq 2} + \int_{2|t|\leq |s| \leq 2\mathcal{E}} \leq F(t,|t|) + \int_{3\mathcal{E} > |s| > \mathcal{E}} |s|^{-n}\, ds \leq$$

$$\leq \text{ por (5) } \leq C + C \log 3 \quad ,$$

de donde resulta (3iii) de modo que $h(x)$ satisface b) .

Veamos ahora que (3i) se verifica. Basta mostrar que $|\hat{h}_{\mathcal{E}}| < C$, pues (3i) sigue por el teorema de Plancherel.

Sea $k(x)$ la función homogénea de grado $-n$ con el cual coincide

$h(x)$ en un entorno del origen.

Llamemos $k_{\varepsilon\delta}(x)$ a la función igual a $k(x)$ en $\varepsilon<|x|<\delta$ y cero en otra parte. Se sabe que $\left|\hat{k}_{\varepsilon\delta}(x)\right| \leq C$.

(En efecto, por tener $k(x)$ media nula sobre la esfera unitaria,

$$\hat{k}_{\varepsilon\delta}(x) = \int_{\varepsilon<|y|<\delta} (\exp(i\, x.y) - 1)\, k(y)\, dy \leq C \int_{\varepsilon\leq|y|\leq\delta} |x|\,|y|\,|y|^{-n} dy =$$

$$= C.\,\delta.\,|x|$$

Esto prueba que para x tal que $|x|\delta \leq C$, $|\hat{k}_{\varepsilon,\delta}(x)| \leq C$.
Mostraremos lo mismo para $|x| \geq C/\delta$.

$$\hat{k}_{\varepsilon\delta}(x) = \int_{\varepsilon\leq|y|\leq 2\pi/|x|} e^{ixy} k(y)dy + \int_{2\pi/|x|\leq|y|<\delta} e^{ixy} k(y)dy =$$

$$= \int_{\varepsilon\leq|y|\leq 2\pi/|x|} - \int_{2\pi/|x|\leq|y|<\delta} e^{ix.(y+\frac{x}{|x|^2}\pi)}\, k(y)\, dy =$$

$$= \text{primera} \int - \int_{\frac{2\pi}{|x|}\leq|y-\frac{x}{|x|^2}\pi|\leq\delta} e^{ixy}\, k(y - \frac{x}{|x|^2}\pi)\, dy \quad .$$

Luego

$$|\hat{k}_{\varepsilon\delta}(x)| \leq \left|\int_{\varepsilon\leq|y|\leq 2\pi/|x|} (e^{ixy}-1)\, k(y)\, dy\right| + \tfrac{1}{2}\left|\int_{3\pi/|x|\leq|y|\leq\delta-\pi/|x|} e^{ix.y}(k(y)-k(y-\tfrac{x}{|x|^2}\pi))dy\right|$$

$$+\int_{\frac{\pi}{|x|}\leq|y|\leq\frac{3\pi}{|x|}} |k(y)|\, dy + \int_{\delta-\frac{\pi}{|x|}\leq|y|\leq\delta+\frac{\pi}{|x|}} |k(y)|\, dy \leq |x| \int_0^{\frac{2\pi}{|x|}} c\; d|y| +$$

$$+ \int_{\frac{3\pi}{|x|}}^{\infty} \frac{\pi}{|x|} \cdot \frac{c}{|y|^2}\, d|y| + \int_{\frac{\pi}{|x|}}^{\frac{3\pi}{|x|}} c\,\frac{d|y|}{|y|} + \int_{\delta-\frac{\pi}{|x|}}^{\delta+\frac{\pi}{|x|}} c\,\frac{d|y|}{|y|} \leq$$

$$\leq \quad \text{para} \quad \delta \geq \frac{2\pi}{|x|} \quad \leq c \Big).$$

Pero $h_{\varepsilon\delta}(x) = k_{\varepsilon\delta}(x)$ - una función acotada de soporte compacto, y por lo tanto - L_1 , quedando así demostrado que $\hat{h}_{\varepsilon\delta}(x) \leq C$,

l.q.f.d.

A P E N D I C E

Algunos teoremas referentes a compacidad relativa y convergencia de sucesiones en espacios L^p - Bochner (caso particular de estos son los L^p , ver [2] , pag. 318 a)).

Este apéndice tuvo su origen en la nota [4] que aún no publicada nos comunicó gentilmente el profesor J. Serrin, El teorema 2 de este Apéndice es una extensión del teorema central de aquella nota.

Sea B un espacio de Banach, p un número real $1 \leq p < \infty$, y $L^p(B;E^n)$ el espacio de las funciones medibles con dominio E^n y rango B , p-integrables Bochner en la medida de Lebesgue usual.

(Una función f a valores en B se dice m e d i b l e si existe una sucesión de funciones simples que convergen en B en casi todo punto a f , f pertenece a $L^p(E^n;B)$ si $\int ||f-f_n||^p dx \to 0$ para $n \to \infty$; para una cierta sucesión f_n de funciones simples $\int ||f_m||^p < M$. Se demuestra que para que esta última condición se cumpla es suficiente que f es medible y que $\int ||f||^p dx \leq \infty$.)

Un conjunto $G \subset L^p(E^n;B)$ se dirá e q u i c o n t i n u o , si para todo $\varepsilon > 0$ existen $\lambda, \mu > 0$ tales que

$$\sup_{g \in G} \int_{|x| \geq \lambda} ||g||^p dx < \varepsilon \qquad (1)$$

y

$$\sup_{g \in G} \int ||g(x-t) - g(x)||^p dx \leq \varepsilon \quad , \text{ si } \quad |t| \leq \mu . \qquad (2)$$

G se dirá <u>localmente condicionalmente compacto</u>, si para todo $x \in E^n$ existe un entorno $U(x)$ de x tal que para todo conjunto V, abierto y acotado, $V \subset U(x)$, el conjunto

$$\left\{ \int_V g(t)\, dt \quad ; \quad g \in G \right\}$$

es condicionalmente compacto en B. (La integración está tomada en el sentido de Bochner).

Vale el siguiente teorema:

<u>Teorema 1</u> :

$G \subset L^p(E^n;B)$ es un conjunto condicionalmente compacto si y sólo si G es equicontinua, acotado y localmente condionalmente compacto.

Demostración :

Las condiciones son necesarias: La equicontinuidad y acotación de todo conjunto condicionalmente compacto pueden ser probados como [2] Sec.10, Teorema 2 .

Además dado cualquier conjunto abierto acotado $V \subset E^n$, y una sucesión $\{g_n\} \subset G$ podemos elegir una subsucesión f_n convergente en $L^p(E^n;B)$. Entonces:

$$\left\| \int_V (f_n - f_m)\, dx \right\| \leq \int_V \| f_n - f_m \|\, dx \leq C \left(\int_V \| f_n - f_m \|^p dx \right)^{1/p} \longrightarrow 0$$

lo que prueba la condicional compacidad de $\int_V g\, dx$, $g \in G$.

Las condiciones son suficientes:

Llamamos g' a la restricción de $g \in G$ a la esfera $|x| < 2\lambda$, donde λ está asociado a $\mathcal{E}$ por (1). Además denotamos con g'' la función $g'' = g' \# w$ donde $w(t)$ es una función continua no-negativa, cuyo soporte está contenido en $\{x ; |x| \leq \min(\lambda, \mu)\}$, y tiene integral 1 (μ aquí es el número asociado a $\mathcal{E}$ por (2).)

Entonces g'' , $g \in G$, es una familia de funciones contínuas a valores en B , cuyos soportes están contenidos en $|x| \leq 3\lambda$.

Se verá que este conjunto es condicionalmente compacto en el espacio de las funciones contínuas a valores en B , de dominio la esfera cerrada $|x| \leq 3\lambda$, con la topología de la convergencia uniforme. Para mostrar esto aplicaremos el siguiente:

<u>Teorema</u> de Ascoli :

Sea C una familia de funciones contínuas definidas en un espacio de Hausdorff compacto, y con valores en un espacio métrico y con la topología de la convergencia uniforme.

Entonces $F \subset C$ es condicionalmente compacto si y sólo si:

a) F es una familia equicontínua

b) el conjunto $\{f(x) ; f \in F\}$ es condicionalmente compacto en Y para todo $x \in X$. (cfr. Kelley, J., General Topology, Chap.7, th. 17)

Que g'' satisface a) sigue de que

$$\sup \| g''(x-h) - g''(x) \| < \int |w(x-h-t) - w(x-t)| \, \|g'(t)\| \, dt \leq$$

$$\leq \sup \| w(x-h) - w(x) \|_{\infty} . M \left(\int \|g'\|^{p} dt \right)^{1/p}$$

Probaremos a continuación que satisface b) .

No es difícil ver que el espacio E^n puede ser dividido en una malla tan fina de cubos no rampantes, de caras paralelas a los ejes, que cada cubo que interseca la esfera $|x| \leq \lambda$, está contenido en algún $U(x)$ con $|x| \leq \lambda$. Esta subdivisión la llamaremos P_1 . Defina la subdivisión P_j , llamamos P_{j+1} a la subdivisión obtenida dividiendo cada cubo perteneciente a la subdivisión P_j en 2^n cubos iguales.

Sea w_n la función que en cada cubo $Q \in P_n$ toma el valor $\inf_{x \in Q} w(x)$. Para probar b) sólo tenemos que mostrar que dada una sucesión $g_j'(x)$ existe una subsucesión f_j , tal que

$$\int w(x-t)\, f_j(t)\, dt \quad \text{converge en } B \,. \tag{3}$$

Ahora por la hipótesis de la condicional compacidad local, sabemos que para todo n $\int w_n(x-t)\, g_j'(t)\, dt$ es la unión de un número finito de conjuntos condicionalmente compactos y por tanto condicionalmente compacto. Por un proceso diagonal podemos extraer una subsucesión $\{f_j\} \in \{g_j'\}$ tal que. $\int w_n(x-t)\, f_j(t)\, dt$ converge para todo n fijo.

Tenemos ahora:

$$|| \int w(x-t) \mid f_j(t)-f_i(t) \mid dt|| \leq$$

$$\leq ||\int w_n(f_j-f_i)dt|| + ||\int f_j(w-w_n)dt|| + || \; f_i(w-w_n)|| \leq$$

$$\leq ||\int w_n(f_j-f_i)dt|| + ||w-w_n||_\infty .M \left(\int||f_j||dt + ||f_i||\, dt \right).$$

Como w_n converge uniformemente a $w(t)$ y $\sup \int||g'||dt < \infty$ se ve que (3) es verificado.

La demostración sigue ahora como en [2] sec. 10 ,th.2 .

<u>Observación</u> : La condición de local condicional compacidad no puede ser cambiada por esta otra condición más débil.:

Todo punto tiene un entorno abierto U tal que $\left\{ \int_U g\, dx \right\}$ es condicionalmente compacto.

En efecto, sea E un espacio de Hilbert, S_1 y S_2 dos esferas en

E^n disjuntas, de medida 1 . Sea

$$g_j(x) = \begin{cases} e_j & \text{si} \quad x \in S_1 \\ e_1 - e_j & \text{si} \quad x \in S_2 \\ 0 & \text{en otra parte} \end{cases}$$

donde $\{e_i\}$ es una sucesión ortonormal en B . Entonces $g_n \in L^p(B)$, $||g_n - g_m||^p dt = \sum_n^m 2^{3/2}$ y el conjunto no es condicionalmente compacto mientras que es acotado, equicontínuo, y la condición r) está satisfecha (si $x \notin \overline{S_1 \cup S_2}$ tomar como $U(x)$ cualquier abierto que contiene $\overline{S_1}$ y $\overline{S_2}$).

A p l i c a c i ó n : Como un caso particular tenemos el teorema de Riesz sobre conjuntos relativamente compactos en L^p . También es fácilmente verificado la suficiencia de las condiciones dadas en [2] , Sec. 10,Th.2 .

<u>L e m a 1</u> :

Sea $f_n(y)$ una familia de funciones a valores en B , tal que para casi todo y , $f_n(y)$ converge débil en B . Supongamos que $f_n \in L^p(E^n;B)$ y que existe una función real $v(y)$ tal que $v(y) \in L^p$ y

$$||f_n(y)|| \leq v(y) \quad \text{para casi todo } y .$$

Entonces $f_n(y)$ es una sucesión de Cauchy en $L^p(B)$ si y sólo si toda subsucesión de f_n contiene una subsucesión f_{n_k} que converge p.p. en B .

D e m o s t r a c i ó n :

La condiciones son suficientes. En efecto, $\{f_{n_k}\}$ converge en L^p a alguna función f_o (por el teorema de la convergencia dominada) y el límite $f_o(y)$ = al límite débil puntual p.p. Luego f_n converge en $L^p(B)$.

La necesidad es obvia, pues toda sucesión convergente en $L^p(B)$ contiene una subsucesión convergente p.p.

El argumento precedente será usado varias veces, pero no será escrito explícitamente.

Corolario :

Sea $f_n(x,y)$ una sucesión de funciones de $L^{q,p}(x,y)$, $1 \leq p$, $q < \infty$, tal que para casi todo y $f_n(x,y)$ converge débil en $L^q(x)$ y existe una función $v(y) \in L^p(y)$ tal que $||f_n(x,y)||_{q/x} \leq v(y)$ p. p. y, entonces f_n es una sucesión de Cauchy sobre $L^{q,p}(x,y)$ si y sólo si vale:

I) toda subsucesión de f_n contiene una subsucesión f_{n_k} convergente en $L^q(x)$ para casi todo y .

(Basta observar que según [2] §9 , $L^{q,p}(x,y) = L^p(L^q(x)) = L^p(B,y)$ y aplicar el Lema anterior, q.e.d.)

A continuación veremos que en el corolario anterior se puede sustituír la condición I) por la siguiente condición:

II) $\Big|\Big| \, ||f_n(x-h,y) - f_n(x,y)||_{q/x} \, \Big|\Big|_{p/y} \xrightarrow[|h| \to 0]{} 0$ uniformemente en n , si se pide que los f_n tengan soportes contenidos en un mismo compacto,

Estableceremos este resultado con un poco más de generalidad.

Teorema 2 :

Sea $Q = (q_1,\dots,q_m)$, $P = (p_1,\dots,p_n)$, $1 \leq p_i$, $q_i < \infty$, y $f_n(x,y)$ una sucesión de funciones sobre $E^m \times E^n$, $f_n(x,y) \in L^{Q,P}(E^m \times E^n)$ tal que para casi todo y , $f_n(x,y)$ converge débil en $L^Q(E^m)$, y existe una función $v(x,y) \in L^{Q,P}$ tal que para casi todo x,y ,

$$\int_{|x-t|<1} |f_n(t,y)|\, dt \leq v(x,y)$$

Entonces f_n converge en $L^{Q,P}$ si y sólo si

II') $$||f_n(x-h,y) - f_n(x,y)||_{P,Q} \xrightarrow[|h| \to 0]{} 0 \quad \text{uniformemente en } n.$$

D e m o s t r a c i ó n :

Sea $K(x)$ una función sobre E^m no-negativa, contínua de soporte en la esfera unitaria, de integral 1 . Definamos para $f \in L^{Q,P}$, f_h por : $f_h(x,y) = \int K(t/h)\, f(x-t,y)\, dt \,/\, h^m$, siendo h real positiva. Un cálculo standard da:

$$||f_h(x,y) - f(x,y)||_{Q,P} \leq \sup_{|t| \leq h} ||f(x-t,y) - f(x,y)||_{Q,P} \tag{4}$$

Mostraremos ahora que la condición II') es suficiente:

$$||f_n(x,y) - f_m(x,y)||_{Q,P} < ||f_{nh}-f_n||_{QP} + ||f_{mh}-f_m||_{QP} + ||f_{mh}-f_{nh}||_{QP} \tag{5}$$

Por verificarse II') y (4) los dos primeros sumandos del segundo miembro pueden hacerse menores que un $\mathcal{E}$ arbitrario con tal de tomar h pequeño. Para h fijo, por la convergencia débil de los f_n se ve que $(f_{nh}-f_{mh})(x,y)$ converge a 0 con $m,n \to \infty$, para casi todo x,y . Además

$$|f_{mh}(x,y)| \leq C(K,h). \int_{|t| \leq h} |f_m(x-t,y)|\, dt \leq \text{por la hipótesis} < C.v(x,y).$$

Sigue por el teorema de la convergencia dominada que

$$||(f_{nh}-f_{mh})||_{QP} \xrightarrow{n,m \to \infty} 0$$

Luego, de (5):

$$\limsup \|f_n - f_m\|_{Q,P} \leq \varepsilon \quad , \text{ y por tanto } = 0 \ .$$

La necesidad de la condición II') sigue de que todo conjunto condicionalmente compacto en $L^{Q,P}$ lo verifica (ver [2] pg. 320) .

BIBLIOGRAFIA

[1] A. Benedek, A.P.Calderon, and R. Panzone, Convolution Operators on Banach Space Valued Functions, Proceedings of the National Acad. of Sciences of the U.S.A., Vol. 48, March 1962, N° 3, pp. 356 - 365.

[2] A. Benedek and R. Panzone, The Spaces L^P, with Mixed Norm, Duke Math. Journal, Vol. 28, N°3 (1961) pp. 301-324.

[3] A.P. Calderón, Lebesgue Spaces of Diff. Functions and Distributions, Proceedings of Symposia in Pure Math. of the Amer. Math. Soc. Vol IV (1961).

[4] J. Serrin, Strong Convergence in a Product Space, Proceedings of the A.M.S. Vol 13, N°4 pág 651-655).

RESUMEN

En este trabajo se estudian espacios de Banach de distribuciones sobre E^n, que tienden a generalizar en varios sentidos a los espacios funcionales de $L^p(E^n)$ con cierto número de derivadas en $L^p(E^n)$. Estos espacios son los $L_u^P(E^n)$, u real, definidos en la siguiente forma: $L_u^P(E^n) = \left\{ f = J^u g \ ; \ g \in L^P(E^n) \right\}$.

Aquí $P = (p_1, \ldots, p_n)$ es una n-upla de números reales $1 \leq p_i \leq \infty$, y $L^P(E^n)$ es un espacio de norma mixta (cfr. A. Benedek y R. Panzone "The Spaces - L^P with Mixed Norm" Duke Math. Journal, Vol 28, N°3, pp. 301-324 (1961)). El operador J^u está definido para u complejo arbitrario, como

$$\widehat{J^u g} = (1 + 4\pi^2 |x|^2)^{-\frac{u}{2}} \hat{g} \qquad \text{para} \qquad g \in (S')$$

(^ significa transformada de Fourier).

Luego los elementos de L_u^P son en general distribuciones temperadas. La norma en L_u^P se define como

$$\|J^u g\|_{P,u} = \|g\|_P \ .$$

Estos espacios son estudiados en el trabajo de A.P. Calderón "Lebesgue Spaces of Differentiable Functions and Distributions" Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, of the American Math, Soc. Vol IV, pp. 33-49 (1960), en el caso en que $L^P = L^p$.

Aquí se generalizan los resultados de este último trabajo sustituyendo L^p por L^P.

Las generalizaciones se logran en general para P tales que cada componente p_i de P verifica la misma relación que la p en el teorema original y en varios resultados se logran mejoras. Por ejemplo en la generalización del Lema de Sobolev se sustituye $1<p$ por $1\leq p_i$, $1<p_n$ y como consecuencia, este mismo tipo de mejora se presenta en las relaciones de inclusión que valen entre L^P_u y L^q_v. (cfr. Teorema 6 pg. 35 del trabajo de Calderón); el teorema 8, pg. 37 del mismo trabajo se obtiene por un método de demostración distinto, para $1\leq p_i\leq\infty$.

Se agregó también una versión para los espacios L^P de un teorema de Mihlin sobre continuidad de L^P en L^P de ciertos operadores tipo convolución.

En el apéndice se estudian problemas relativos a compacidad relativa de subconjuntos de L^P y de otros espacios de Banach, y se generalizan los resultados de la nota de J.Serrin"Strong Convergence in a Product Space" (Proceedings of the A.M.S. Vol. 13 N°4 pág. 651-655) para los L^P - de norma mixta.