Geometría integral en espacios proyectivos

Luccioni, Raúl E.

1963

Tesis presentada para obtener el grado de Doctor en Ciencias Matemáticas de la Universidad de Buenos Aires

TESIS PARA OPTAR AL TITULO DE DOCTOR EN CIENCIAS MATEMATICAS

GEOMETRIA INTEGRAL
EN
ESPACIOS PROYECTIVOS

Raúl E. Luccioni

1 9 6 3

I N D I C E

1 - PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA EN TERMINOS GENERALES

En un espacio E de puntos x, sea G_r un grupo de Lie dependiente de r parámetros $a^1, a^2, \ldots, a^r$. En el espacio de los parámetros, que llamaremos espacio G, a cada conjunto $a^1, a^2, \ldots, a^r$, corresponde un punto a cuyas r coordenadas son los valores de esos parámetros.

Designaremos con T_a el elemento del grupo G_r que corresponde al punto a, esto es, T_a es la transformación correspondiente a los valores $a^1, a^2, \ldots, a^r$ de los parámetros.

Para indicar que el punto x' es el transformado de x mediante T_a, escribiremos $x' = T_a x$ y con T_a^{-1} indicaremos la transformación inversa de T_a.

Dado un punto a del espacio G, escribimos

$$b' = p_a(b)$$

si b y b′ son dos puntos del espacio tales que $T_{b'} = T_a T_b$.

Es inmediato verificar que el conjunto de transformaciones p_a $(a \in G)$, es un grupo, llamado el grupo de los parámetros, que opera en forma simplemente transitiva sobre los puntos de G (Para los detalles, ver Santaló [3]).

Sea ahora el punto $a + da$ (de coordenadas $a^1 + da^1, \ldots, a^r + da^r$). La transformación producto $T_a^{-1} T_{a+da}$ tiende a la transformación idéntica T_e para $da^i \to 0$ $(i=1,2,..,r)$. Si ponemos

$$T_{e+\omega} = T_a^{-1} \; T_{a+da}$$

el punto $e+\omega$, de coordenadas $e^i + \omega^i$, es infinitamente vecino al punto e, esto es, $\omega^i \to 0$ para $da^i \to 0$, con $i = 1, 2, .., r$.

La parte lineal de las ω^i, son entonces r formas diferenciales lineales (formas de Pfaff) en las da^i que llamaremos (provisoriamente) componentes relativas del grupo G_r.

Se demuestra (Santaló [3]) que estas r componentes relativas son linealmente independientes y que una forma de

Pfaff de los mismos argumentos es invariante respecto al grupo de los parámetros, si y solo si, es una combinación lineal con coeficientes constantes en las ω^i. Por esto, llamaremos (en forma más general) componentes relativas del grupo G_r a cualquier conjunto de r combinaciones lineales independientes con coeficientes constantes, de las ω^i antes definidas.

Sea ahora en el espacio E, un conjunto H de elementos geométricos, tal que el grupo G_r actúa transitivamente sobre sus elementos. Un problema de tipo general es determinar si se puede o no asociar a los elementos de H una "medida", esto es, una expresión que permanezca invariante bajo el grupo G_r. Nuestras consideraciones se limitarán, más adelante, al caso en que E es un espacio proyectivo y los elementos de H serán, por ejemplo, conjuntos de subespacios lineales (en particular puntos), hipercuádricas, etc.

Sea un elemento $H_0 \in H$ y consideremos el subgrupo $g < G$ que deja invariante H_0: $g\,H_0 = H_0$

Vamos a establecer una correspondencia biunívoca entre los elementos de H y las clases laterales izquierdas del subgrupo g, en el siguiente modo:

Dado un $H' \in H$, por la supuesta transitividad de G_r respecto del conjunto H, existe por lo menos una transformación $T_a \in G$, tal que

$$H' = T_a\, H_0$$

Asociaremos a H', la clase lateral $T_a\, g$. La correspondencia, no depende de la particular transformación T_a, sino de la clase $T_a\, g$. En efecto, si también es

$$H' = T_b\, H_0$$

sigue $$T_b^{-1}\, T_a\, H_0 = H_0$$

de donde $$T_b^{-1}\, T_a \in g$$

y por tanto $T_b \, g = T_a \, g$

Inversamente, si T_a y T_b pertenecen a la misma clase, es

$$T_a H_o = T_a \, g \, H_o = T_b \, g \, H_o = T_b \, H_o$$

Si la determinación de H_o en E, depende de $h \leq r$ parámetros, en el subgrupo g, habrá h relaciones entre los r parámetros de G_r y, en el espacio G de los parámetros, g estará representado por una variedad r-h dimensional, que seguiremos llamando g.

Cada clase lateral $T_s \, g$, se representa en G por una variedad cuyos puntos están en correspondencia biunívoca con los puntos de g. Cuando el punto a recorre la variedad g, el punto $p_s(a)$ recorre $T_s \, g$. Entre los puntos del espacio de los parámetros, queda establecida una partición cuyos elementos son variedades r-h dimensionales.

Este conjunto de variedades, puede ser entonces representado por un sistema de h ecuaciones

$$\varphi_i(a^1, a^2, \ldots, a^r) = \xi_i = \text{constante}; \; i=1,2,\ldots,h \qquad (1.1)$$

de manera que a cada conjunto de h constantes $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_h$, corresponde una y una sola variedad del espacio G. Interpretando cada conjunto de valores $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_h$, como las coordenadas de un punto ξ en un nuevo espacio S, queda establecida una correspondencia biunívoca entre los elementos del dado conjunto H y los puntos del espacio S, de manera que una transformación de un elemento de H mediante $T_a \in G$, equivale a la transformación del correspondiente punto de S mediante p_a del grupo de los parámetros.

Dar una medida para los elementos geométricos que sea invariante respecto del grupo G_r, es entonces equivalente a dar una medida invariante respecto al grupo de los parámetros para los puntos de S.

Las medidas que nosotros consideraremos, serán del tipo

$$\int_X f(\xi)\, d\xi_1 d\xi_2 \ldots d\xi_h \tag{1.2}$$

en donde X es un conjunto de puntos del espacio S.

Observemos que el conjunto de variedades (1.1), puede considerarse como las integrales del sistema

$$\sum_{j=1}^{r} \frac{\partial \varphi_i}{\partial a^j} da^j = 0 \qquad i=1,2,..,h, \tag{1.3}$$

cuyos h primeros miembros son formas de Pfaff. Ya que el sistema (1.3) es invariante bajo el grupo de los parámetros, él es equivalente a otro sistema de h formas de Pfaff en el que cada forma es invariante (ver Santaló [3], § 17.6). Por las mencionadas propiedades de las componentes relativas, podemos tomar como ecuaciones del sistema de variedades:

$$\omega_1 = 0,\ \omega_2 = 0, \ldots,\ \omega_h = 0 \tag{1.4}$$

donde $\omega_1, \ldots, \omega_h$ son h componentes relativas del grupo G_r.

Siendo los sistemas (1.3) y (1.4) equivalentes, se tiene

$$d\xi_i = \sum_{j=1}^{h} F_{ij}(a)\,\omega_j \qquad i=1,2,..,h \tag{1.5}$$

donde $F_{ij}(a)$ es una función de los parámetros $a^1, .., a^r$.

Multiplicando exteriormente entre sí las h ecuaciones (1.5), obtenemos:

$$d\xi_1 \wedge d\xi_2 \wedge \ldots \wedge d\xi_h = \Delta(a)\, \omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \ldots \wedge \omega_h$$

donde $\Delta(a)$ es el determinante $\| F_{ij}(a) \|$.

La integral (1.2) toma ahora la forma

$$\int_X f[\xi(a)]\, \Delta(a)\, \omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \ldots \wedge \omega_h \tag{1.6}$$

Ya que cada ω_i es invariante, el producto exterior de ellas también lo es, de manera que si queremos que la integral (1.6) sea invariante para cada conjunto X, deberá ser también invariante bajo el grupo de los parámetros, el factor $f[\xi(a)]\Delta(a)$. Pero, ya que el grupo es simplemente transitivo respecto de los puntos a, esto impone la condición de que $f[\xi(a)]\Delta(a)$ tome el mismo valor en cada punto a de G. Es decir, $f[\xi(a)]\Delta(a)=\text{const.}$,

o sea
$$\Delta(a)=\frac{\text{const.}}{f(\xi)} \tag{1.7}$$

La (1.7) no se cumple en general. La existencia o no de medida para los elementos de H, depende de la existencia o no de una función $f(\xi)$ para la cual vale la (1.7). Esta condición ha sido obtenida por Chern.

En los casos en que existe medida, ésta se expresa en la forma

$$\int \omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \dots \wedge \omega_h$$

a menos de un factor constante. Llamaremos densidad δ para los elementos de H, al producto exterior

$$\delta \doteq \omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \dots \wedge \omega_h$$

donde el símbolo $\doteq$, que se usará a menudo en el futuro, designa una igualdad salvo un factor constante.

En casos concretos, el estudio de la existencia o no de medida mediante la condición de Chern, es poco práctico. Nosotros usaremos una condición mucho más simple (Santaló [1]) que expresa:

Condición necesaria y suficiente para la existencia de medida del conjunto H, es que

$$d(\omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \dots \wedge \omega_h) = 0 \tag{1.8}$$

Veamos finalmente que, exista o no medida, siempre se tiene

$$\omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \ldots \wedge \omega_h \wedge d\omega_i = 0 \qquad i=1,2,..,h \qquad (1.9)$$

En efecto, por la equivalencia de los sistemas (1.3) y (1.4), pongamos analogamente a (1.5)

$$\omega_i = \sum_{j=1}^{h} G_{ij}(\xi)\, d\xi_j \qquad i=1,2,..,h$$

y derivando exteriormente

$$d\omega_i = \sum_{j=1}^{h} \sum_{l=1}^{h} \frac{\partial G_{ij}(\xi)}{\partial \xi_l}\, d\xi_l \wedge d\xi_j \qquad (1.10)$$

y ya que

$$\omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \ldots \wedge \omega_h = \| G_{ij}(\xi) \|\, d\xi_1 \wedge d\xi_2 \wedge \ldots \wedge d\xi_h \qquad (1.11)$$

tiene como factor cada una de las $d\xi_i$, por multiplicación exterior de (1.10) y (1.11), sigue la (1.9).

2.- EL ESPACIO PROYECTIVO

El espacio E del nº 1, será ahora en particular el espacio proyectivo de n dimensiones S_n, las coordenadas homogeneas de cuyos puntos x, designaremos por $x_0, x_1, \ldots, x_n$. El grupo G_r, con $r = n^2 + 2n$, sea el grupo G de transformaciones

$$x_i' = \sum_{j=0}^{n} a_{ij}\, x_j \quad ; \quad i=1,2,..,n \quad ; \quad \| a_{ij} \| = 1 ,$$

que en forma matricial escribiremos

$$x' = A\, x \quad , \quad |A| = 1 \qquad (2.1)$$

en donde

$$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & \dots & a_{0n} \\ a_{10} & a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n0} & a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} , \qquad x = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Sean ω_{ij} $(i,j=0,1,..,n)$, $(n+1)$ formas de Pfaff, entre las cuales están $r = n^2 + 2n$ componentes relativas, y designaremos con Ω la matriz (ω_{ij}). Si E designa la matriz unidad será entonces

$$A^{-1}(A + dA) = E + \Omega$$

de donde

$$\Omega = A^{-1}\, dA \tag{2.2}$$

Si ahora ponemos $\alpha^{ij} = \text{adj. } a_{ji}$, esto es, $A^{-1} = (\alpha^{ij})$, la (2.2) nos da

$$\omega_{ij} = \sum_{l=0}^{n} \alpha^{il}\, da_{lj} \tag{2.3}$$

Por otra parte, como $A^{-1} A = E$, sigue

$$\sum_{l=0}^{n} \alpha^{il} a_{lj} = \delta_j^i = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j \end{cases}$$

De donde por diferenciación y teniendo presente las (2.3),

$$\omega_{ij} = -\sum_{l=0}^{n} a_{lj}\, d\alpha^{il} \tag{2.4}$$

Por otra parte, sigue de (2.3)

$$\sum_{i=0}^{n} \omega_{ii} = \sum_{i=0}^{n} \sum_{l=0}^{n} \alpha^{il}\, da_{li} = d|A|$$

y con (2.1)

$$\sum_{i=0}^{n} \omega_{ii} = 0 \tag{2.5}$$

que es la única relación existente entre las $(n+1)$ formas ω_{ij}.

Para determinar ahora las ecuaciones de estructura de Maurer - Cartan, pongamos la (2.2) en la forma

$$dA = A\,\Omega \tag{2.6}$$

Derivando exteriormente (2.6) y usando de nuevo (2.6)

$$A\, \Omega \wedge \Omega + A\, d\Omega = 0$$

de donde

$$d\Omega = -\Omega \wedge \Omega \tag{2.7}$$

esto es,

$$d\,\omega_{ij} = -\sum_{l=0}^{n} \omega_{il} \wedge \omega_{lj} \tag{2.8}$$

Por otra parte, la (2.6) en su desarrollo nos da

$$da_{ij} = \sum_{l=0}^{n} a_{il}\, \omega_{lj} \tag{2.9}$$

y si convenimos en llamar analíticos a los $n+1$ puntos:

$$a_j\,(a_{0j}\ ,\ a_{1j}\ ,\dots,\ a_{nj}\ ) \qquad j=0,1,\dots,n \tag{2.10}$$

es decir, a los transformados por G de los puntos fundamentales de coordenadas, las (2.9) se escriben más simplemente

$$da_j = \sum_{l=0}^{n} a_l\, \omega_{lj} \tag{2.11}$$

3 - PUNTO DE PARTIDA PARA NUESTROS ESTUDIOS

El más general resultado sobre la existencia de medida para conjuntos de subespacios de S_n, viene expresado por el siguiente teorema debido a Santaló [1]:

<u>Teorema T</u>:

Sea H un conjunto formado por k subespacios, cada uno alabeado con el espacio suma de los restantes $k-1$. Existe medida para H, si y solo si, el espacio suma de los k subespacios coincide con S_n.

Gran parte de los resultados que aqui presentamos, se basan substancialmente en este resultado de Santaló, del cual daremos algunas generalizaciones. Comenzamos en el nº 4, dando expresiones explícitas para la densidad de medida (existentes, según el Teorema T) de los siguentes conjuntos:

1º, $n+1$ puntos linealmente independientes

2º, punto e hiperplano.

En este cálculo y también más adelante en nuestro trabajo, resultará cómodo usar los puntos analíticos (2.9). En particular, necesitamos conocer cuáles son las componentes relativas del grupo G que se anulan en el subgrupo que deja invariante el subespacio S_h definido por los $h+1$ puntos

$$a_{i_0}\ ,\ a_{i_1}\ ,\ldots,\ a_{i_h}\ ,$$

esto es, el subespacio cuyos puntos x se expresan

$$x = \sum_{k=0}^{h} \lambda_k \, a_{i_k} \qquad , \quad \lambda_k = \text{const.}$$

Para que S_h sea fijo, los puntos a_{i_k} deben permanecer en S_h , es decir,

$$da_{i_k} = \sum_{j=0}^{h} \mu_j \, a_{i_k} \qquad k=0,1,..,h \tag{3.1}$$

Pero de (2.10)

$$da_{i_k} = \sum_{l=0}^{n} a_l \, \omega_{l i_k}$$

de donde, por comparación con (3.1), sigue

$$\omega_{rs} = 0 \quad \begin{cases} s = i_0,\ i_1,\ldots,\ i_h \\ r \neq i_0,\ i_1,\ldots,\ i_h \end{cases} \tag{3.2}$$

4 - CALCULO DE ALGUNAS DENSIDADES DE MEDIDA

a)- <u>n + 1 puntos linealmente independientes</u>

Consideremos los $n+1$ puntos analíticos

$$a_j\,(a_{0j}\ ,\ a_{1j}\ ,\ldots,\ a_{nj}) \quad , \quad j = 0,1,..,n$$

De acuerdo al nº 3, el subgrupo de G que deja invariante el punto a_j $(j=0,1,..,n)$, está caracterizado por

$$\omega_{ij} = 0 \quad \text{para} \quad i = 0,1,..,j-1,j+1,..,n.$$

La densidad δ de medida para los $n+1$ puntos, está por lo tanto dada por el producto de todas las componentes relativas ω_{ij} para las cuales $i \neq j$ $(i,j=0,1,\ldots,n)$.

Si ponemos $\quad \Pi_j \doteq \omega_{0j} \wedge \dots \wedge \omega_{j-1,j} \wedge \omega_{j+1,j} \wedge \dots \wedge \omega_{nj}$

tendremos $\quad \delta \doteq \Pi_0 \wedge \Pi_1 \wedge \dots \wedge \Pi_n$

Para calcular Π_j , designaremos con

$$z_\ell^j = \frac{a_{\ell j}}{a_{0j}} \qquad (\ell = 1,2,..,n) \tag{4.1}$$

las coordenadas no homogeneas del punto a_j (j=0,1,..,n). Diferenciando en (4.1)

$$da_{\ell j} = \frac{a_{\ell j}}{a_{0j}} da_{0j} + a_{0j}\, dz_\ell^j \qquad (\ell = 1,2,..,n)$$

Entonces, de (2.3),

$$\omega_{ij} = \sum_{\ell=0}^{n} \alpha^{i\ell} da_{\ell j} = \alpha^{i0} da_{0j} + \sum_{\ell=1}^{n} \alpha^{i\ell} \left[\frac{a_{\ell j}}{a_{0j}} da_{0j} + a_{0j}\, dz_\ell^j \right]$$

$$= \frac{da_{0j}}{a_{0j}} \sum_{\ell=0}^{n} \alpha^{i\ell} a_{\ell j} + a_{0j} \sum_{\ell=1}^{n} \alpha^{i\ell} dz_\ell^j$$

Como $\quad \sum_{\ell=0}^{n} \alpha^{i\ell} a_{\ell j} = 0 \quad$ para $\quad i \neq j$,

sigue $\quad \omega_{ij} = a_{0j} \sum_{\ell=1}^{n} \alpha^{i\ell} dz_\ell^j \quad , \ i \neq j \ , \quad j = 0,1,..,n \qquad (4.2)$

Si designamos con

$$dQ_j = dz_1^j \wedge dz_2^j \wedge \dots \wedge dz_n^j$$

el elemento de volumen del punto a_j, se tiene, multiplicando exteriormente las (4.2)

$$\Pi_j = a_{0j}^n \begin{vmatrix} \alpha^{01} & \alpha^{02} & \dots & \alpha^{0n} \\ \alpha^{11} & \alpha^{12} & \dots & \alpha^{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha^{j-1,1} & \alpha^{j-1,2} & \dots & \alpha^{j-1,n} \\ \alpha^{j+1,1} & \alpha^{j+1,2} & \dots & \alpha^{j+1,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha^{n1} & \alpha^{n2} & \dots & \alpha^{nn} \end{vmatrix} dQ_j$$

Esto es $\qquad \pi_j = a_{oj}^{n+1}\ dQ_j$

y la densidad δ viene entonces dada por:

$$\delta \doteq \pi_o \wedge \ldots \wedge \pi_n \doteq (a_{oo}\, a_{o1} \ldots a_{on})^{n+1}\ dQ_o \wedge \ldots \wedge dQ_n$$

Por otra parte,

$$1/(a_{oo}\, a_{o1} \ldots a_{on}) = 1/(a_{oo}\, a_{o1} \ldots a_{on}) \cdot |A| =$$

$$= \begin{vmatrix} \dfrac{a_{oo}}{a_{oo}} & \dfrac{a_{o1}}{a_{o1}} & \cdots & \dfrac{a_{on}}{a_{on}} \\ \dfrac{a_{10}}{a_{oo}} & \dfrac{a_{11}}{a_{o1}} & \cdots & \dfrac{a_{1n}}{a_{on}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{a_{no}}{a_{oo}} & \dfrac{a_{n1}}{a_{o1}} & \cdots & \dfrac{a_{nn}}{a_{on}} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ z_1^o & z_1^1 & \ldots & z_1^n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ z_n^o & z_n^1 & \ldots & z_n^n \end{vmatrix} \doteq V$$

donde V designa el volumen (n dimensional) del (n + 1)-edro determinado por los (n + 1) puntos a_j . Se tiene en definitiva:

$$\delta = \frac{1}{V^{n+1}}\ dQ_o \wedge dQ_1 \wedge \ldots \wedge dQ_n$$

Esto es: La densidad de medida de n + 1 puntos independientes de S_n , viene dada por el producto de los elementos de volumen de los puntos, dividido por la n+1 potencia del volumen del (n + 1)-edro que ellos determinan.

b)- Medida cinemática del grupo proyectivo

El grupo G, es simplemente transitivo para conjuntos de n + 2 puntos tales que n + 1 cualesquiera de ellos sean independientes. La densidad de medida para tales conjuntos (siempre existente), se obtiene como producto de todas las componentes relativas (independientes) del grupo y se llama medida cinemática del grupo.

El resultado y la notación del nº 4a, nos permitirá sin mayores cálculos, obtener una expresión relativamente corta para la medida cinemática.

Para ello, consideremos los $n+2$ puntos

$$a_0\,,\ a_1\,,\dots,\ a_n\,,\ a_{n+1} = a_0 + a_1 + \dots + a_n\ ,$$

donde el punto a_{n+1}, como la notación lo sugiere, tiene i-ésima coordenada igual a

$$a_{i0} + a_{i1} + \dots + a_{in} \qquad (i = 0,1,\dots,n)$$

De acuerdo al nº 4a, el producto de las componentes relativas que se anulan en el subgrupo g_j que deja invariante los $n+1$ puntos

$$a_0\,,\ a_1\,,\dots,\ a_{j-1}\,,\ a_{j+1}\,,\dots,\ a_n\,,\ a_{n+1} \qquad (j = 0,1,\dots,n)$$

está dado por:

$$\delta_j \doteq (1/V_j^{n+1})\ dQ_0 \wedge \dots \wedge dQ_{j-1} \wedge dQ_{j+1} \wedge \dots \wedge dQ_n \wedge dQ_{n+1} \qquad (j=0,\dots,n)$$

donde V_j es el volumen del $(n+1)$-edro formado por los $n+1$ puntos considerados y dQ_ℓ $(\ell=0,\dots,j-1,j+1,\dots,n,n+1)$ el elemento de volumen del punto a_ℓ. Si z_i^ℓ designa como antes las coordenadas no homogeneas del punto a_ℓ,

$$V_j \doteq \begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 & 1 & \dots & 1 \\ z_1^0 & \dots & z_1^{j-1} & z_1^{j+1} & \dots & z_1^{n+1} \\ z_2^0 & \dots & z_2^{j-1} & z_2^{j+1} & \dots & z_2^{n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ z_n^0 & \dots & z_n^{j-1} & z_n^{j+1} & \dots & z_n^{n+1} \end{vmatrix} \doteq$$

$$\doteq \left[a_{00}\, a_{01} \dots a_{0,j-1}\, a_{0,j+1} \dots a_{0n} \left(\sum_{\ell=0}^{n} a_{0\ell} \right) \right]^{-1} \begin{vmatrix} a_{00} & \dots & a_{0,j-1} & a_{0,j+1} & \dots & (\Sigma a_{0\ell}) \\ a_{10} & \dots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \dots & (\Sigma a_{1\ell}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n0} & \dots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \dots & (\Sigma a_{n\ell}) \end{vmatrix} \doteq$$

$$\doteq \left[a_{00}\, a_{01} \ldots a_{0,j-1}\, a_{0,j+1} \ldots a_{0n} \left(\sum_{\ell=0}^{n} a_{0\ell}\right)\right]^{-1}$$

De manera que

$$\delta_j \doteq \left[a_{00} \ldots a_{0,j-1}\, a_{0,j+1} \ldots a_{0n} \left(\sum_{\ell=0}^{n} a_{0\ell}\right)\right]^{n+1} dQ_0 \wedge \ldots \wedge dQ_{j-1} \wedge dQ_{j+1} \wedge \ldots \wedge dQ_{n+1}$$

Por otra parte, el subgrupo de g_j que deja invariante el punto a_j, está caracterizado por las relaciones

$$\omega_{0j} = \omega_{1j} = \ldots = \omega_{j-1,j} = \omega_{j+1,j} = \ldots = \omega_{nj} = 0$$

(ver nº 3). Estas componentes relativas de G, son independientes de las componentes relativas que se anulan en el subgrupo g_j, ya que g_j no impone ninguna condición sobre el punto a_j.

Si ahora (como en el nº 4a) ponemos

$$\pi_j \doteq \omega_{0j} \wedge \ldots \wedge \omega_{j-1,j} \wedge \omega_{j+1,j} \wedge \ldots \wedge \omega_{nj} \doteq a_{0j}^{n+1}\, dQ_j \quad , \quad \text{es}$$

$$\delta \doteq \delta_j \wedge \pi_j \doteq \left(a_{00} \ldots a_{0n} \sum_{\ell=0}^{n} a_{0\ell}\right)^{n+1} dQ_0 \wedge \ldots \wedge dQ_{n+1} \doteq$$

$$\doteq (a_{00} \ldots a_{0n}) \prod_{j=0}^{n} \left(a_{00} \ldots a_{0,j-1}\, a_{0,j+1} \ldots a_{0n} \sum_{\ell=0}^{n} a_{0\ell}\right) dQ_0 \wedge \ldots \wedge dQ_{n+1}.$$

$$\therefore \quad \delta \doteq \frac{dQ_0 \wedge dQ_1 \wedge \ldots \wedge dQ_{n+1}}{V_0 \quad V_1 \qquad V_{n+1}}$$

es decir: La medida cinemática del grupo G, esto es, la densidad de medida para n+2 puntos tales que n+1 cualesquiera de ellos son independientes, está dada por el producto de los elementos de volumen de los n+2 puntos, dividido por el producto de los volúmenes de los n+2 (n+1)-edros que los n+2 puntos determinan.

c) - <u>Punto e hiperplano</u>

Consideremos el punto a_0 y el hiperplano H determinado por los n puntos $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

En el subgrupo de G que deja invariante el punto

a_0 , se tiene (nº 4a)

$$\omega_{10} = \omega_{20} = \ldots = \omega_{n0} = 0$$

y
$$\pi = \omega_{10} \wedge \omega_{20} \wedge \ldots \wedge \omega_{n0} = a_{00}^{n+1}\, dQ$$

donde dQ es el elemento de volumen del punto a_0.

Por otra parte, el hiperplano H, es el lugar de los puntos x dados por

$$x = \sum_{\ell=1}^{n} \lambda_\ell\, a_\ell \qquad \lambda_\ell = \text{const.} ,$$

esto es, puntos cuyas coordenadas homogeneas x_j se expresan

$$x_j = \sum_{\ell=1}^{n} \lambda_\ell\, a_{j\ell} \qquad (j=0,1,\ldots,n) \tag{4.3}$$

con λ_ℓ independiente de j.

Del nº 3 sigue que el subgrupo que deja invariante el hiperplano H, está caracterizado por

$$\omega_{01} = \omega_{02} = \ldots = \omega_{0n} = 0$$

Si π' designa el producto de estas componentes relativas, la densidad buscada viene dada por $\delta \doteq \pi \wedge \pi'$

Para expresar π' mediante magnitudes vinculadas al hiperplano H, comenzamos por determinar la ecuación de H. Para ello, de (4.3):

$$\sum_{j=0}^{n} \alpha^{ij}\, x_j = \sum_{\ell=1}^{n} \lambda_n \sum_{j=0}^{n} \alpha^{ij}\, a_{j\ell} = \sum_{\ell=1}^{n} \lambda_\ell\, \delta_\ell^i \qquad , \quad \delta_\ell^i = \begin{cases} 0 \text{ si } & i \neq \ell \\ 1 \text{ si } & i = \ell \end{cases}$$

Poniendo i = 0, se obtiene como ecuación del hiperplano H:

$$\sum_{j=0}^{n} \alpha^{0j}\, x_j = 0$$

e introduciendo las coordenadas no homogeneas

$$z_i = \frac{x_i}{x_0} \quad , \quad k_i = \frac{\alpha^{0i}}{\alpha^{00}} \quad , \quad i=1,2,\ldots,n \quad , \tag{4.4}$$

se tiene para H la ecuación

$$k_1 z_1 + k_2 z_2 + \ldots + k_n z_n + 1 = 0$$

Además, de (4.4)

$$d\alpha^{0i} = \alpha^{00}\, dk_i + \frac{\alpha^{0i}}{\alpha^{00}}\, d\alpha^{00} \qquad i=1,2,..,n$$

y entonces

$$\omega_{0j} \doteq \sum_{i=0}^{n} a_{ij}\, d\alpha^{0j} = a_{0j}\, d\alpha^{00} + \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\left[\alpha^{00} dk_i + \frac{\alpha^{0i}}{\alpha^{00}}\, d\alpha^{00}\right]$$

$$\doteq \frac{d\alpha^{00}}{\alpha^{00}} \sum_{i=0}^{n} a_{ij}\alpha^{0i} + \alpha^{00}\sum_{i=1}^{n} a_{ij}\, dk_i \doteq \alpha^{00}\sum_{i=1}^{n} a_{ij}\, dk_i \qquad ,(j \neq 0)$$

De donde

$$\pi' = (\alpha^{00})^n \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} dk_1 \wedge dk_2 \wedge \dots \wedge dk_n$$

$$\doteq (\alpha^{00})^{n+1}\, dk_1 \wedge dk_2 \wedge \dots \wedge dk_n = (\alpha^{00})^{n+1}\, dK \ ,$$

donde dK es el elemento de volumen del hiperplano H en el espacio dual de S_n.

La densidad es entonces

$$\delta \doteq \pi \wedge \pi' \doteq (a_{00}\alpha^{00})^{n+1}\, dQ \wedge dK$$

Por otra parte

$$\frac{1}{a_{00}\alpha^{00}} = \frac{1}{a_{00}\alpha^{00}} \sum_{i=0}^{n} \alpha^{0i} a_{i0} = 1 + \sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha^{0i}}{\alpha^{00}}\, \frac{a_{i0}}{a_{00}} =$$

$$= k_1 z_1 + k_2 z_2 + \dots + k_n z_n + 1 \quad ,$$

de manera que en definitiva es:

$$\delta \doteq \frac{dQ \quad dK}{(k_1 z_1 + k_2 z_2 + \dots + k_n z_n + 1)^{n+1}}$$

Para expresar esta densidad δ en una nueva forma, llamamos p a la distancia del hiperplano H al origen y D la distancia del hiperplano al punto a_0. Se tiene

$$D = p\,(k_1 z_1 + k_2 z_2 + \dots + k_n z_n + 1)$$

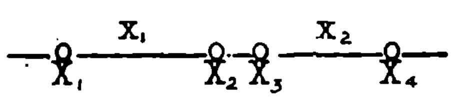
de manera que

$$\delta \doteq \left[\frac{p}{D}\right]^{n+1} dQ \wedge dK$$

d) - <u>Un caso particular</u>

En particular para la recta proyectiva ($n = 1$), las configuraciones estudiadas en 4a y 4c coinciden entre sí, reduciendose a un par de puntos x_1, x_2. La densidad (en ambos casos) viene dada por

$$\frac{dx_1 \wedge dx_2}{(x_1 - x_2)^2}$$



Supongamos ahora que x_1 y x_2 pertenecen respectivamente a los intervalos (X_1, X_2), (X_3, X_4). Para obtener la medida correspondiente, hacemos la integral doble de la densidad sobre los respectivos intervalos, y encontramos:

medida = $\ln(X_1 X_2 X_3 X_4)$ = logaritmo de la razón doble.

Ya que estamos en un caso particular de los nº 4a y 4c, este resultado parecería sugerir la existencia en S_n de invariantes proyectivos (expresados mediante integrales multiples) que podrían tomarse como generalizaciones de la razón doble de cuatro puntos.

5 - TRANSITIVIDAD DEL GRUPO PROYECTIVO PARA CIERTOS ELEMENTOS GEOMETRICOS.

El estudio de la existencia de medida para conjuntos de elementos geométricos, tiene sentido cuando el grupo es transitivo con respecto a los elementos es cuestión. Para justificar (respecto a este punto) estudios que vienen más adelante, presentamos aqui las siguientes observaciones.

Es inmediato que en el espacio proyectivo S_n, todas las familias de k ($k = 1,2,\ldots,n+1$, fijo) subespacios lineales $S_{h_1}, S_{h_2},\ldots, S_{h_k}$, de dimensiones $h_1, h_2,\ldots, h_k$ prefijadas y tales que cada uno es alabeado con el espacio suma de los restantes, son proyectivamente equivalentes entre sí. Dadas dos familias de este tipo: $S_{h_1}, S_{h_2},\ldots, S_{h_k}$ y $\bar{S}_{h_1}, \bar{S}_{h_2},\ldots, \bar{S}_{h_k}$, siempre existe por lo menos una proyectividad que transforma el espacio S_{h_i} en $\bar{S}_{h_i}$, para cada $i = 1,2,\ldots,k$.

Probaremos aqui que elegida en forma genérica esta proyectividad, ella subordina entre cada par de espacios correspondientes, una homografía genérica. Para ello, mostraremos que la proyectividad siempre puede ser elegida de modo tal que transforme h_i+2 puntos dados arbitrariamente en S_{h_i} (con la única condición de que h_i+1 cualesquiera de ellos sean independientes), en otros tantos puntos de $\bar{S}_{h_i}$ que cumplen con la misma condición, para cada $i = 1,2,\ldots,k$.

Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que el espacio suma de los S_{h_i} ($\bar{S}_{h_i}$) es todo el espacio S_n. En efecto, el espacio suma es un S_s ($\bar{S}_s$) de dimensión

$$s = h_1+h_2+\ldots+h_k+k-1$$

Si fuese $s < n$, consideraríamos un espacio S_{h_0} ($\bar{S}_{h_0}$) alabeado y de dimensión dual respecto de S_s ($\bar{S}_s$) y fijando h_0+2 punen S_{h_0} ($\bar{S}_{h_0}$), estaríamos en las mismas condiciones con $k+1$ espacios y tal que el espacio suma de todos ellos coincide con S_n. Tenemos entonces

$$h_1+h_2+\ldots+h_k+k-1 = n \tag{5.1}$$

Sean

$$Q_0^i,\ Q_1^i,\ldots,\ Q_{h_i}^i \qquad (i = 1,2,\ldots,k)$$

h_i+1 entre los h_i+2 puntos dados de S_{h_i},

$$\bar{Q}_0^i,\ \bar{Q}_1^i, \ldots,\ \bar{Q}_{h_i}^i, \qquad (i = 1,2,..,k)$$

los correspondientes puntos también prefijados de $\bar{S}_{h_i}$.

Ya que cada S_{h_i} ($\bar{S}_{h_i}$) es alabeado con el espacio suma de los restantes, los puntos Q_j^i ($\bar{Q}_j^i$), $i = 1,2,..,k$, $j = 0,1,..,h$, son linealmente independientes y, de acuerdo a (5.1) en total $n+1$.

Sea Q^i el restante punto dado en S_{h_i} y $\bar{Q}^i$ su análogo en $\bar{S}_{h_i}$. Los k puntos Q^i ($\bar{Q}^i$) son linealmente independientes entre si y definen por lo tanto un espacio S_{k-1} ($\bar{S}_{k-1}$) de dimensión $k - 1$. Tomamos ahora en S_{k-1} ($\bar{S}_{k-1}$) un punto arbitrario Q ($\bar{Q}$) con la única condición de no depender linealmente de $k - 1$ de los puntos Q^i ($\bar{Q}^i$).

El punto Q ($\bar{Q}$) depende linealmente de los $n+1$ Q_j^i ($\bar{Q}_j^i$), pero por su elección, no depende de n de ellos. Existe entonces, una y una sola proyectividad que lleva los puntos Q_j^i en los correspondientes $\bar{Q}_j^i$ y Q en $\bar{Q}$.

Veamos que esta proyectividad transforma Q^i en $\bar{Q}^i$ ($i = 1,2,..,k$). El espacio S^i ($\bar{S}^i$), suma de Q ($\bar{Q}$) con $S_{h_1}, S_{h_2}, .., S_{h_{i-1}}, S_{h_{i+1}}, .., S_{h_k}$ ($\bar{S}_{h_1}, \bar{S}_{h_2}, .., \bar{S}_{h_{i-1}}, \bar{S}_{h_{i+1}}, .., S_{h_k}$) es de dimensión $h_1 + \ldots + h_{i-1} + h_{i+1} + \ldots + h_k + k - 1 = n - h_i$ y por lo tanto corta a S_{h_i} ($\bar{S}_{h_i}$) en un solo punto que es precisamente Q^i ($\bar{Q}^i$), pues Q^i ($\bar{Q}^i$) está contenido en S_{k-1} ($\bar{S}_{k-1}$) y este espacio está a su vez, contenido en S^i ($\bar{S}^i$).

Como la proyectividad transforma S^i en $\bar{S}^i$ y S_{h_i} en $\bar{S}_{h_i}$, sigue que ella lleva Q^i en $\bar{Q}^i$ ($i = 1,2,..k$). Queda demostrada nuestra afirmación que finalmente expresaremos en la siguiente forma equivalente:

Si $\{S_{h_i}\}$ ($i = 1,2,..,k$) es una familia de subespacios lineales de S_n , tal que cada subespacio es alabeado con el espacio suma de los restantes y si $\{H_i\}$ (i = 1,2,..,k) es una familia de elementos geométricos (puntos, rectas,....., cuádricas, etc, inclusive el conjunto vacio) tal que H_i está contenido en S_{h_i} para cada i y tal además que el grupo proyectivo de S_{h_i} actúa transitivamente sobre H_i , entonces, el grupo proyectivo de S_n es transitivo respecto al par de familias $\{S_{h_i}\}$ $\{H_i\}$.

Nota - En el caso en que un espacio S_{h_i} se reduce a un punto, los $h_i + 2 = 2$ puntos que se toman en él, son necesariamente coincidentes, pero aun asi, la demostración anterior sigue siendo válida en todas sus partes.

6 - CONDICIONES PARA QUE UN PRODUCTO DE COMPONENTES RELATIVAS ω_{ij} (CON $i \neq j$) TENGA DERIVADA NULA

Según (3.2), las componentes relativas del grupo G que se anulan en el subgrupo que deja invariante un subespacio lineal definido por puntos analíticos, son del tipo ω_{ij} con $i \neq j$.

Resulta por tanto de interés, encontrar condiciones para la existencia de medida de un elemento geométrico H (no necesariamente compuesto por subespacios lineales) tal que el subgrupo g que deja invariante a H, está caracterizado por la anulación de los elementos del siguiente conjunto σ de componentes relativas

$$\sigma : \omega_{i_1 j_1}, \omega_{i_2 j_2}, \ldots, \omega_{i_h j_h} \text{ con } i_s \neq j_s \text{ para } s = 1,2,..,h \tag{6.1}$$

Según la condición (1.8) de Santaló, hay medida si y solo si

$$d\Omega = 0 \quad \text{con} \quad \Omega \doteq \bigwedge_{s=1}^{h} \omega_{i_s j_s} \tag{6.2}$$

Por (2.8), se tiene:

$$d\Omega \doteq \sum_{k=1}^{h} (-1)^k \omega_{i_0 j_0} \wedge \dots \wedge \omega_{i_{k-1} j_{k-1}} \wedge d\omega_{i_k j_k} \wedge \omega_{i_{k+1} j_{k+1}} \wedge \dots \wedge \omega_{i_h j_h} \doteq$$

$$\doteq \sum_{k=1}^{h} (-1)^k \omega_{i_0 j_0} \wedge \dots \wedge \omega_{i_{k-1} j_{k-1}} \wedge \left[\sum_{\ell=0}^{n} \omega_{i_k \ell} \wedge \omega_{\ell j_k} \right] \wedge \omega_{i_{k+1} j_{k+1}} \wedge \dots \wedge \omega_{i_h j_h}$$

Por otra parte, de (1.9)

$$\Omega \wedge d\omega_{i_k j_k} \doteq \Omega \wedge \left[\sum_{\ell=0}^{n} \omega_{i_k \ell} \wedge \omega_{\ell j_k} \right] = 0$$

y siendo $i_k \neq j_k$ y las $\omega_{i_k j_k}$ independientes entre sí, sigue que Ω contiene uno por lo menos de los factores de $\omega_{i_k \ell} \wedge \omega_{\ell j_k}$. Esto es,

$$\omega_{i_k \ell} \in \sigma \qquad \text{o} \qquad \omega_{\ell j_k} \in \sigma \tag{6.3}$$

para todo $k = 1,2,..,h$ y $\ell = 0,1,..,n$. Asi

$$d\Omega \doteq \sum_{k=1}^{h} (-1)^k \omega_{i_0 j_0} \wedge \dots \wedge \omega_{i_{k-1} j_{k-1}} \wedge \left[\omega_{i_k j_k} \wedge (\omega_{j_k j_k} - \omega_{i_k i_k}) \right] \wedge \omega_{i_{k+1} j_{k+1}} \wedge \dots \wedge \omega_{i_h j_h}$$

esto es

$$d\Omega \doteq \Omega \wedge \sum_{k=1}^{h} (\omega_{j_k j_k} - \omega_{i_k i_k}) \tag{6.4}$$

Sea N_ℓ^1 el número de veces que ℓ (=0,1,...,n) se presenta como primer índice en los elementos del conjunto σ. N_ℓ^2 sea el número correspondiente para el segundo índice. Entonces (6.4) se escribe

$$d\Omega \doteq \Omega \wedge \sum_{\ell=0}^{n} (N_\ell^2 - N_\ell^1)\, \omega_{\ell\ell} \tag{6.5}$$

Teniendo presente que la única relación entre las componentes relativas de G es (2.5) y que en Ω no hay factores del tipo $\omega_{\ell\ell}$, sigue de (6.5) que vale la (6.2) si y solo si

$$N_\ell^2 - N_\ell^1 = N = \text{constante independiente de } \ell$$

Veamos que $N = 0$. En efecto, siendo h el número de componentes relativas en el conjunto σ (6.1), se tiene

$$\sum_{\ell=0}^{n} N_\ell^1 = h \quad , \quad \sum_{\ell=0}^{n} N_\ell^2 = h$$

o sea

$$0 = \sum_{\ell=0}^{n} (N_\ell^2 - N_\ell^1) = (n+1)\, N$$

de donde $N = 0$.

Por tanto, existe medida para H si y solo si

$$N_\ell^1 = N_\ell^2 \quad \text{para cada} \quad \ell = 0,1,\ldots,n \tag{6.6}$$

y queda probado asi,el

Teorema 1

Condición necesaria y suficiente para que H tenga medida, es que el conjunto σ contenga tantos elementos de la fila de índice ℓ de la matriz (ω_{ij}), como elementos de la columna de índice ℓ de la misma matriz, esto, para cada ℓ =0,..,n

Mejoraremos ahora este resultado mostrando el

Teorema 2

Hay densidad para H, si y solo si con cada elemento ω_{ij} , el conjunto σ también contiene el elemento ω_{ji} .

Por el Teorema 1, la condición es evidentemente suficiente. Para probar la necesidad, supongamos que vale la (6.6), pero, en forma más general, solo para $\ell \geqslant h+1$, y que el conjunto σ contiene a ω_{rs} , con $r,s \geqslant h+1$, mientras que por el contrario, ω_{sr} no pertenece a σ .

Mostraremos que en tal hipótesis, si $N_r^1 \geqslant t$ $(t = 1,2,\ldots)$, entonces $N_r^1 \geqslant t+2$.

En efecto, de $N_r^1 \geqslant t$ sigue por (6.6) (aun con la limitación $\ell \geqslant h+1$) que $N_r^2 \geqslant t$, esto es, σ contiene por lo menos los t elementos:

$$\omega_{s_1 r} , \omega_{s_2 r} , \ldots , \omega_{s_t r} ,$$

con $s_1 , s_2 , \ldots , s_t$, distintos entre sí y distintos de s y r.

Sigue de (6.3) que σ contiene por lo menos uno de los elementos $\omega_{s_k \ell}$, $\omega_{\ell r}$, para cada $k = 1,2,\ldots,t$ y $\ell = 0, 1,\ldots, n$.

Como $\omega_{sr} \notin \sigma$, resulta $\omega_{s_k s} \in \sigma$. Esto es, σ

contiene los elementos

$$\omega_{rs}\,,\omega_{s_1 s}\;,\ldots,\omega_{s_t s}$$

Luego, $N_s^2 \geqslant t+1$ y por (6.6) (limitada a $\ell \geqslant h+1$) $N_s^1 \geqslant t+1$. Sean

$$\omega_{sr_1}\;,\omega_{sr_2}\,,\ldots,\omega_{sr_{t+1}}$$

con $r_1,\ldots,r_{t+1}$ distintos entre sí y distintos de r y s, t + 1 elementos, seguramente existentes, de σ. Como $\omega_{sr} \notin \sigma$, de (6.3) sigue que

$$\omega_{rr_1}\;,\omega_{rr_2}\,,\ldots,\omega_{rr_{t+1}}$$

son elementos de σ. Siendo $\omega_{rs} \in \sigma$, resulta finalmente $N_r^1 \geqslant t+2$.

Ahora bien, de $\omega_{rs} \in \sigma$ sigue $N_r^1 \geqslant 1$ y aplicando q veces el razonamiento anterior, $N_r^1 \geqslant 1+2q$ con q arbitrario. Esto es manifiestamente absurdo ya que $N_r^1 \leqslant n$.

Resulta asi que con cada ω_{rs} $(r,s \geqslant h+1)$, σ contiene a ω_{sr}. Basta tomar $h+1 = 0$ y el teorema queda demostrado. (El resultado obtenido para $h+1 > 0$ nos servirá más adelante).

7 - CARACTERIZACION DE CIERTOS CONJUNTOS DE SUBESPACIOS LINEALES CON MEDIDA.

Llamaremos sistema tipo S, a todo conjunto de subespacios lineales para definir los cuales se usan $n+1$ puntos linealmente independientes y tales que

1º) Los subespacios son dos a dos alabeados

2º) El espacio suma de todos los subespacios es S_n.

Diremos además que dos familias de subespacios de S_n son equivalentes, cuando cada espacio de cada una de las familias se puede obtener mediante intersecciones y sumas de los espacios de la otra familia.

Ya que las transformaciones proyectivas conservan las intersecciones y sumas de subespacios, es claro que dos familias equivalentes, simultaneamente tienen o no tienen medida.

Teorema 3

Un conjunto C de subespacios lineales, para definir los cuales se usan subconjuntos de $n+1$ puntos linealmente independientes, tiene medida si y solo si él es equivalente a un sistema tipo S definido por los mismos puntos.

Que la condición es suficiente , resulta inmediatamente del Teorema T de Santaló, del cual el Teorema 3 es una generalización. En efecto, basta observar que el Teorema T se puede expresar en el modo siguiente: Un conjunto de subespacios, para definir los cuales se usan $n+1$ puntos independientes y tal que cumple con la condición 1ª de un sistema tipo S, tiene medida si y solo si, cumple también con la 2ª condición.

Para mostrar la condición necesaria, supongamos que existe medida para el conjunto C y que este conjunto está definido en base a los $n+1$ puntos analíticos a_i $(i = 0,1,..,n)$. Si σ es el conjunto de componentes relativas que se anulan en el subgrupo g que deja invariante a C, entonces $\omega_{ll} \notin \sigma$ $(l=0,..,n)$

Sea $i_0, i_1, \ldots, i_n$ una permutación de los números $0, 1, \ldots, n$ y supongamos que $S_h \in C$ está definido por los puntos analíticos $a_{i_0}, a_{i_1}, \ldots, a_{i_h}$. De (3.2) sigue que a σ pertenecen las $(h+1)(n-h)$ componentes relativas:

$$\omega_{ki} \quad \text{con} \quad \begin{cases} i = i_0, i_1, \ldots, i_h \\ k = i_{h+1}, i_{h+2}, \ldots, i_n \end{cases}$$

De acuerdo al Teorema 2, a σ también pertenecen:

$$\omega_{ik} \quad \text{con} \quad \begin{cases} i = i_0, i_1, \ldots, i_h \\ k = i_{h+1}, i_{h+2}, \ldots, i_n \end{cases}$$

y como por (3.2), la anulación de estas componentes relativas caracteriza al subgrupo que deja invariante el subespacio S_{n-h-1} definido por los puntos analíticos $a_{i_{h+1}}, a_{i_{h+2}}, \dots, a_{i_n}$, sigue que el subgrupo g deja invariante con cada subespacio $T^0 \in C$, el subespacio T^1 dual de T^0 y definido por los puntos analíticos que no intervienen en la definición de T^0.

Podemos por tanto, identificar a C con un conjunto C^* de subespacios distintos del tipo:

$$C^* : \begin{cases} T_1^0, \; T_2^0, \dots, \; T_k^0 \\ T_1^1, \; T_2^1, \dots, \; T_k^1 \end{cases}$$

donde

$$\left. \begin{aligned} T_i^0 \cap T_i^1 &= \phi \\ T_i^0 + T_i^1 &= S_n \end{aligned} \right\} \; i = 1,2,\dots,k \qquad (7.1)$$

Por otra parte, el conjunto C^* es equivalente al conjunto S^* de los 2^k subespacios (algunos eventualmente vacios) definidos por:

$$T(e_1, e_2, \dots, e_k) = T_1^{e_1} \cap T_2^{e_2} \cap \dots \cap T_k^{e_k} \qquad (7.2)$$

para $e_i = 0, 1$ $(i = 1, 2, \dots, k)$.

En efecto, observando que

$$T(e_1, \dots, e_{j-1}, 0, e_{j+1}, \dots, e_k) + T(e_1, \dots, e_{j-1}, 1, e_{j+1}, \dots, e_k) =$$

$$= T_1^{e_1} \cap \dots \cap T_{j-1}^{e_{j-1}} \cap T_{j+1}^{e_{j+1}} \cap \dots \cap T_k^{e_k},$$

se ve inmediatamente que

$$\left. \begin{aligned} T_i^0 &= \sum_e T(e_1, \dots, e_{i-1}, 0, e_{i+1}, \dots, e_k) \qquad (7.3) \\ T_i^1 &= \sum_e T(e_1, \dots, e_{i-1}, 1, e_{i+1}, \dots, e_k) \qquad (7.4) \end{aligned} \right\} \; i = 1,2,\dots,k$$

donde $\sum_e$ significa el espacio suma al variar las e de todas las maneras posibles.

Quedará probado el Teorema 3, cuando demostremos que el conjunto S^* es un sistema tipo S.

Basta observar que dos elementos de S^*:

$$T(e_1,..,e_k) \quad y \quad T(e'_1,..,e'_k)$$

tienen por lo menos una e_i distinta. Luego su intersección contiene el factor $T_i^0 \cap T_i^1$ y por tanto es vacía. Que el espacio suma de todos los $T \in S^*$ es S_n, sigue de (7.3) y (7.4), cuando se tiene en cuenta la (7.1).

En el Teorema T de Santaló, no se considera la posibilidad de subespacios que se corten, sin embargo, el Teorema 3 nos enseña que las únicas configuraciones de subespacios (definidos por $n+1$ puntos) que tienen medida son substancialmente las previstas por Santaló.

El siguiente Corolario del Teorema 3, caracteriza completamente a los pares de subespacios con medida.

<u>Corolario</u>

Condición necesaria y suficiente para la existencia de medida de dos subespacios S_h y S_k es que sean alabeados y de dimensiones duales.

La condición suficiente es inmediata. Para ver que la condición es también necesaria, basta observar que S_h y S_k siempre se pueden definir con la ayuda de $n+1$ puntos linealmente independientes y que S_h y S_k sólo determinan los cuatro espacios:

$$S_h \,,\; S_k \,,\; S_h \cap S_k \,,\; S_h + S_k \qquad (7.5)$$

Ahora bien, si $S_h \cap S_k \neq \emptyset$, los cuatro espacios (7.5) tienen, dos a dos, intersecciones no vacia y por tanto, S_h y S_k no pueden ser equivalentes a un sistema tipo S.

Si en cambio $S_h + S_k \neq S_n$, como los cuatro subespacios (7.5) están contenidos en $S_h + S_k$, sigue que tampoco ahora los subespacios S_h y S_k pueden ser equivalentes a un sistema tipo S.

Observación

Hemos ya dicho que el estudio de la existencia de medida para elementos geométricos, tiene solo sentido cuando el grupo es transitivo respecto de esos elementos. Por lo tanto cuando se habla (como en el Teorema 3) de un conjunto C de subespacios lineales, debe entenderse que él queda definido no sólo por el número y las dimensiones de los subespacios que lo forman, sino también, por las posiciones relativas que los subespacios ocupan entre si.

Para fijar ideas, consideremos en S_3 el conjunto formado por dos rectas. El grupo proyectivo de S_3 , no es transitivo para los pares de rectas. Sí lo es en cambio, para pares de rectas alabeadas y también para pares de rectas que se cortan. Por lo tanto, en el estudio de la existencia de medida para pares de rectas en S_3, se deben considerar necesariamente dos problemas distintos. El corolario anterior nos dice que en un caso hay medida y en el otro no.

Los resultados del Teorema 3, si bien son generales, no agotan todas las posibilidades para conjuntos de subespacios lineales. Ello se debe a la restricción de que los subespacios se definen mediante $n+1$ puntos linealmente independientes. Por ejemplo, no queda contemplado en el Teorema 3, el caso de dos rectas alabeadas y un punto fuera de ellas en S_3.

8 - UNA NUEVA CARACTERIZACION

Con el fin de dar una nueva caracterización de los conjuntos de subespacios lineales (definidos mediante $n+1$

puntos independientes) para los cuales existe medide, probaremos ahora que todo conjunto C de tipo S:

$$C: \qquad T_1 , T_2 , \ldots , T_k \tag{8.1}$$

con

$$\sum_{\ell=1}^{k} T_\ell = S_n \tag{8.2}$$

$$T_i \cap T_j = \phi \qquad \text{para} \quad i \neq j \tag{8.3}$$

es equivalente a un conjunto C' de $2(k - 1)$ subespacios

$$C': \qquad T_1^0 , T_2^0 , \ldots , T_{k-1}^0 ; T_1^1 , T_2^1 , \ldots , T_{k-1}^1 \tag{8.4}$$

tales que

$$\left.\begin{array}{l} T_1^0 \subset T_2^0 \subset \ldots . \subset T_{k-1}^0 \\ T_1^1 \supset T_2^1 \supset \ldots . \supset T_{k-1}^1 \end{array}\right\} \tag{8.5}$$

y

$$\begin{array}{l} T_i^0 + T_i^1 = S_n \\ T_i^0 \cap T_i^1 = \phi \end{array} \qquad i = 1,2,..,k-1 \tag{8.6}$$

Dado C, definimos C' del siguiente modo

$$T_i^0 = \sum_{\ell=1}^{i} T_\ell \quad , \quad T_i^1 = \sum_{\ell=i+1}^{k} T_\ell \quad , \ i = 1,2,..,k-1 \tag{8.7}$$

De estas definiciones, siguen las (8.5). Las (8.6) siguen de (8.2) y (8.3).

Inversamente, dado el conjunto C' por la (8.4) y valiendo (8.5) y (8.6), definimos el conjunto C (8.1) mediante:

$$T_i = T_i^0 \cap T_{i-1}^1 \quad , \quad i = 1,2,..,k \tag{8.8}$$

conviniendo que

$$T_k^0 = T_{-1}^1 = S_n \tag{8.9}$$

Para probar (8.2), veamos por inducción que

$$\sum_{\ell=1}^{i} T_\ell = T_i^0 \tag{8.10}$$

De (8.8) y (8.9) sigue que (8.10) vale para i = 1. De (8.10) $\sum_{\ell=1}^{i+1} T_\ell = T_i^0 + (T_{i+1}^0 \cap T_i^1) = T_{i+1}^0$. Luego $\sum_{\ell=1}^{k} T_i = T_k^0 = S_n$ y vale (8.2).

Para probar (8.3), sea $i < j$. Entonces

$$T_i \cap T_j = T_i^0 \cap T_{i-1}^1 \cap T_j^0 \cap T_{j-1}^1 = T_i^0 \cap T_{j-1}^1 \subset T_{j-1}^0 \cap T_{j-1}^1 = \phi$$

Queda asi probada la equivalencia de los conjuntos C y C′. Con este resultado y el Teorema 3, sigue el

Teorema 4

Un conjunto de subespacios lineales (para definir los cuales se usan $n+1$ puntos independientes), tiene medida si y solo si, él es equivalente a un par de encajes de subespacios:

$$T_1 \subset T_2 \subset \ldots. \subset T_m$$
$$T_1' \subset T_2' \subset \ldots. \subset T_m'$$

con. $T_i \cap T_i' = \phi$ y $T_i + T_i' = S_n$, para $i = 1,..,m$.

9 - SOBRE LA EXISTENCIA DE MEDIDA PARA LOS "PUNTOS DE UN SUBESPACIO".

Del Teorema 3 de Santaló, sigue que si $h < n$, no existe medida para los subespacios S_h (de dimensión h). Tampoco existe medida para el conjunto formado por S_h y k puntos ($k = 1,2,\ldots,h+1$) independientes de S_h , como se ve inmediatamente del Teorema 3.

Queremos estudiar aqui, el caso de un S_h y $h+2$ puntos de él, tales que $h+1$ cualesquiera de ellos sean independientes. La configuración (para $h > 0$) no está contemplada en los Teoremas T, 3, ni 4.

Ya que si los $h+2$ puntos de S_h quedan invariantes, cada punto de S_h queda invariante, hablaremos (por brevedad) de la existencia o no de medida para los puntos de un subespacio.

Teorema 5

Condición necesaria y suficiente de la existencia de medida para los puntos de un subespacio S_h $(0 \leq h \leq n)$, es que $h = n$.

Para $h = 0$, el Teorema 5 vale como un caso particular del Teorema T de Santaló. Supondremos en lo que sigue $h>0$.

Sea S_h definido por los puntos analíticos:

$$a_0 , \ a_1 , \dots , \ a_h \tag{9.1}$$

De acuerdo a (3.2), el subgrupo g_j que deja invariante el punto a_j $(j = 0,1,..,h)$, está caracterizado por

$$\omega_{ij} = 0 \qquad \textbf{para} \quad i = 0,..,j-1,j+1,..,n$$

y en el subgrupo g que deja invariantes los h puntos (9.1), valen las hn relaciones:

$$\omega_{ij} = 0 \qquad j = 0,1,\dots,h \ ; \ i \neq j \tag{9.2}$$

Sea

$$\Omega_1 \doteq \bigwedge_{i,j} \omega_{ij} \tag{9.3}$$

el producto exterior de los primeros miembros de (9.2).

Para fijar ahora cada uno de los puntos de S_h , fijamos en él, el punto (ver 4b):

$$a = a_0 + a_1 + \dots + a_h$$

Si a es fijo, $da = \lambda a$, λ = const. Y con

(2.11) $$\sum_{\ell=0}^{n} \sum_{j=0}^{h} \omega_{\ell j} \, a_\ell = \lambda \sum_{\ell=0}^{h} a_\ell$$

es decir

$$\sum_{j=0}^{h} \omega_{\ell j} = 0 \qquad \ell = h+1,\dots,n \tag{9.4}$$

$$\sum_{j=0}^{h} \omega_{\ell j} = \lambda \qquad \ell = 0,1,\dots,h \tag{9.5}$$

Las relaciones (9.4) se cumplen ya en g. Las (9.5) se pueden poner, teniendo en cuenta las (9.2),

$$\omega_{kk} - \omega_{00} = 0 \qquad k = 1,2,\dots,h$$

Llamando
$$\Omega_2 \doteq \bigwedge_{k=1}^{h} (\omega_{kk} - \omega_{oo}) \tag{9.6}$$

existirá medida si y sólo si

$$d\,\Omega = d(\Omega_1 \wedge \Omega_2) = d\Omega_1 \wedge \Omega_2 + (-1)^{nh}\,\Omega_1 \wedge d\Omega_2 = 0 \tag{9.7}$$

Veamos que siempre es:

$$\Omega_1 \wedge d\Omega_2 = 0 \tag{9.8}$$

En efecto, cada término de $d\Omega_2$ contiene un factor de la forma

$$d(\omega_{kk} - \omega_{oo}) = -\sum_{\substack{\ell=0\\ \ell\neq k}}^{n} \omega_{i\ell} \wedge \omega_{\ell k} + \sum_{\ell=1}^{n} \omega_{o\ell} \wedge \omega_{\ell o} \quad , \ k = 1,\ldots,h$$

y cada término de esta expresión contiene un factor de Ω_1 .

Por otra parte, usando la (6.5) para el conjunto (9.2) y teniendo en cuenta la (2.5), se calcula

$$d\,\Omega_1 \doteq \Omega_1 \wedge \sum_{\ell=0}^{h} \omega_{\ell\ell} \tag{9.9}$$

y por tanto existe medida o no, según se anule o no la expresión

$$d\Omega \doteq \Omega_1 \wedge \Omega_2 \wedge \sum_{\ell=0}^{h} \omega_{\ell\ell} \tag{9.10}$$

esto es

$$d\Omega \doteq \Omega_1 \wedge \omega_{oo} \wedge \omega_{11} \wedge \ldots \wedge \omega_{hh} \tag{9.11}$$

<u>Condición necesaria</u>: Si $h < n$, los factores de $d\Omega$ en (9.11) son independientes y por tanto $d\Omega \neq 0$.

<u>Condición suficiente</u>: Si $h = n$, $d\Omega$ en (9.10) contiene el factor nulo dado por (2.5).

El Teorema 5 es en particular una demostración de la existencia de la medida cinemática que nosotros hemos calculado en el nº 4b.

10 - PUNTOS DE UN CONJUNTO DE SUBESPACIOS LINEALES

Utilizando los resultados del nº 9, demostraremos aqui una generalización de esos mismos resultados.

Teorema 6

Sea el conjunto de r subespacios lineales

$$S_{h_1}\ ,\ S_{h_2}\ ,\ldots\ldots,\ S_{h_r}\qquad , \tag{10.1}$$

de dimensiones $h_\ell > 0$ $(\ell = 1,2,..,r)$, cada uno alabeado con el espacio suma de los restantes, y sea $S_h = \sum_{\ell=1}^{r} S_{h_\ell}$. Condición necesaria y suficiente para la existencia de medida para los puntos de los subespacios S_{h_ℓ} (en el sentido del nº 9), es que $h = n$. (Después del Teorema 7, se verá que la condición $h_\ell > 0$ es innecesaria.)

Consideremos los

$$h + 1 = (h_1 + 1) + (h_2 + 1) + \ldots. + (h_r + 1)$$

puntos analíticos (9.1). De ellos, tomamos los $h_1 + 1$ primeros para definir S_{h_1}, los $h_2 + 1$ siguientes para definir S_{h_2} y asi continuamos hasta definir S_{h_r} mediante los últimos $h_r + 1$ puntos (9.1).

Procediendo con cada S_{h_ℓ} en la misma forma que con S_h en el nº 9, llamaremos $\Omega_{1,\ell}$ al producto de las componentes relativas que se anulan en el subgrupo g_ℓ que deja invariantes los $h_\ell + 1$ puntos que definen S_{h_ℓ}, y con $\Omega_{2,\ell}$ el producto análogo a (9.6).

Si ahora ponemos:

$$\Omega_1 = \bigwedge_{\ell=1}^{r} \Omega_{1,\ell} \qquad , \quad \Omega_2^* = \bigwedge_{\ell=1}^{r} \Omega_{2,\ell} \qquad , \quad \Omega = \Omega_1 \wedge \Omega_2$$

resulta que Ω_1 viene dado por (9.3) y hay medida si y sólo si $d\,\Omega = 0$.

Teniendo en cuenta (9.8) para cada $\ell = 1,2,..,r$ sigue $\Omega_{1,\ell} \wedge d\,\Omega_{2,\ell} = 0$ y por tanto

$$\Omega_1 \wedge d\,\Omega_2^* = 0 \tag{10.2}$$

es decir

$$d\Omega = \Omega_1 \wedge \Omega_2^* \wedge \sum_{l=0}^{h} \omega_{ll} \qquad (10.3)$$

Condición suficiente: Inmediata por (2.5)

Condición necesaria: Sigue de la correspondiente condición del Teorema 5, comparando (9.10) con (10.3) y observando que Ω_2^* es un factor de Ω_2 . En efecto, el subgrupo caracterizado por la anulación de los factores de $\Omega_1 \wedge \Omega_2$ (en nº 9), deja fijo cada uno de los puntos de S_h y por lo tanto, es un subgrupo del subgrupo que deja fijos los puntos de cada uno de los S_{h_l} (cuya suma es S_h) y que está caracterizado por la anulación de los factores de $\Omega_1 \wedge \Omega_2^*$.

11 - SUBESPACIOS Y PUNTOS DE SUBESPACIOS

Veremos aqui una generalización del Teorema 6.

Teorema 7

Sean los $r + s$ subespacios lineales:

$$S_{h_1} , S_{h_2} ,\ldots, S_{h_r} ; S_{k_1} , S_{k_2} ,\ldots, S_{k_s} \qquad , \qquad (11.1)$$

cada uno alabeado con el espacio suma de todos los restantes, existe medida para el conjunto formado por los s subespacios $S_{k_1} ,\ldots, S_{k_s}$ y los puntos de los r subespacios $S_{h_1} ,\ldots, S_{h_r}$, si y sólo si el espacio suma de los $r + s$ subespacio (11.1) coincide con S_n .

Podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que ninguno de los subespacios S_{h_i} se reduce a un punto, ya que si no fuese este el caso, colocamos esos puntos en el conjunto de los S_{k_j} . Observemos además, que el Teorema 7 vale para $r = 0$ (Teorema T) y también para $s = 0$ (Teorema 6).

Pongamos
$$S_h = \sum_{i=1}^{r} S_{h_i} \quad , \quad S_k = \sum_{j=1}^{s} S_{k_j}$$

de manera que el espacio suma total será de dimensión m=h + k + 1.

Definamos los S_{h_i} como en el nº 10 y tengan Ω_1 y Ω_2^* el mismo significado que alli. Definamos los S_{k_j} mediante subconjuntos de los puntos analíticos $a_{h+1}, \dots, a_m$ y sea Ω_3 el producto de las componentes relativas que se anulan en el subgrupo que deja invariantes los s subespacios S_{k_j} .

Entonces, hay medida si y sólo si

$$d(\Omega_2^* \wedge \Omega_1 \wedge \Omega_3) = 0$$

esto es, por (10.2), si y solo si

$$\Omega_2^* \wedge d(\Omega_1 \wedge \Omega_3) = 0 \qquad (11.2)$$

Calculando en base a (3.2) y (6.5), se obtiene

$$d(\Omega_1 \wedge \Omega_3) = \Omega_1 \wedge \Omega_3 \wedge \sum_{\ell=0}^{m} \omega_{\ell\ell}$$

y la (11.2) queda:

$$\Omega_2^* \wedge \Omega_1 \wedge \Omega_3 \wedge \sum_{\ell=0}^{m} \omega_{\ell\ell} = 0 \qquad (11.3)$$

Condición suficiente: Si m = n, vale la (11.3) por (2.5)

Condición necesaria: Si m < n y valiese la (11.3), tendría que ser

$$\Omega_2^* \wedge \sum_{\ell=0}^{m} \omega_{\ell\ell} = 0 \qquad (11.4)$$

Esto es falso, pues implica que existe medida para el conjunto de los puntos de todos los subespacios (11.1). En efecto, la ecuación análoga a (11.3) para este caso, contiene como factor de su primer miembro, al primer miembro de (11.4).

El Teorema que acabamos de probar, se puede escribir en la siguiente forma equivalente:

Teorema 8

El Teorema T de Santaló sigue siendo válido si si en lugar de uno o más de los k subespacios, se consideran los puntos de esos subespacios.

Observemos que el Teorema 7 asegura la validez del Teorema 6 aun en el caso en que algunos de los subespacios S_{k_ℓ} allí considerados se reduzcan a puntos.

Calcularemos ahora en forma efectiva la densidad de medida (existente por el Teorema 7) para el conjunto formado por $n+2$ puntos, tales que $n+1$ de ellos son independientes y el restante depende de exactamente $h+1$ de los otros.

Sean los $n+1$ puntos independientes $a_0, a_1, \ldots, a_n$ y el restante sea $a = a_0 + a + \ldots + a_h$. Si como en el nº 4a ponemos $z_i^\ell = a_{i\ell}/a_{0\ell}$ para las coordenadas no homogeneas del punto a_ℓ ($\ell = 0,1,\ldots,n$), las **mismas coordenadas**

$$z_i = \frac{\sum_{k=0}^{h} a_{ik}}{\sum_{k=0}^{h} a_{0k}} \tag{11.5}$$

del punto a, quedan expresadas por

$$z_i = \sum_{k=0}^{h} \lambda_k \, z_i^k \qquad \text{con} \qquad \sum_{k=0}^{h} \lambda_k = 1 \tag{11.6}$$

De acuerdo al nº 4a, el subgrupo que deja invariante los $n+1$ puntos $a_0, \ldots, a_n$, está caracterizado por

$$\omega_{ij} = 0 \qquad i \neq j \quad ; \qquad i,j = 0,1,\ldots,n$$

y el producto de estas componentes da, usando la notación del nº 4a,

$$\Pi \doteq \frac{1}{V^{n+1}} \, dQ_0 \wedge dQ_1 \wedge \ldots \wedge dQ_n \ , \ \text{con} \quad \frac{1}{V} = a_{00}\, a_{01} \ldots a_{0n}$$

Por otra parte, la condición de que el punto a sea fijo, viene dada por la (9.5), que a los efectos del cálculo posterior es conveniente escribir ahora en la forma:

$$\sum_{k=0}^{h}(\omega_{ik} - \omega_{hk}) = 0 \qquad i = 0,1,\ldots,h-1 \qquad (11.7)$$

La densidad δ se obtiene entonces, multiplicando π por el producto π' de los h primeros miembros de (11.7).

Se tiene, para $i = 0,1,\ldots,h$

$$\sum_{k=0}^{h}\omega_{ik} = \sum_{k=0}^{h}\sum_{s=0}^{n}\alpha^{is}\, da_{sk} = \sum_{s=0}^{n}\alpha^{is}\, d\sum_{k=0}^{h} a_{sk}$$

y con (11.5)

$$\sum_{k=0}^{h}\omega_{ik} = \frac{d\sum_{k=0}^{h} a_{ok}}{\sum_{k=0}^{h} a_{ok}} \sum_{s=0}^{n}\alpha^{is}\sum_{k=0}^{h} a_{sk} + \sum_{k=0}^{h} a_{ok}\sum_{s=1}^{n}\alpha^{is}\, dz_s$$

de donde con (11.6)

$$\sum_{k=0}^{h}\omega_{ik} = \frac{d\sum_{k=0}^{h} a_{ok}}{\sum_{k=0}^{h} a_{ok}} + \sum_{k=0}^{h} a_{ok}\sum_{s=1}^{n}\alpha^{is}\sum_{\ell=0}^{h}(\lambda_\ell\, dz_s^\ell + z_s^\ell\, d\lambda_\ell) =$$

$$= \frac{d\sum_{k=0}^{h} a_{ok}}{\sum_{k=0}^{h} a_{ok}} + \sum_{k=0}^{h} a_{ok}\left[\sum_{\ell=0}^{h} d\lambda_\ell \sum_{s=1}^{n}\alpha^{is}\frac{a_{s\ell}}{a_{o\ell}}\right] + ((\, dz_s^\ell\,)) ,$$

donde $((\, dz_s^\ell\,))$ indica una suma en cada uno de cuyos términos hay un factor de la forma dz_s^ℓ . Teniendo en cuenta que de (11,6) sigue $\sum_{\ell=0}^{h} d\lambda_\ell = 0$, resulta

$$\sum_{k=0}^{h}\omega_{ik} = \frac{d\sum_{k=0}^{h} a_{ok}}{\sum_{k=0}^{h} a_{ok}} + \left(\sum_{k=0}^{h} a_{ok}\right)\frac{d\lambda_i}{a_{oi}} + ((\, dz_s^\ell\,))$$

Con estas expresiones y ya que

$$\pi' \doteq \bigwedge_{i=0}^{h-1}\sum_{k=0}^{h}(\omega_{ik} - \omega_{hk}) \doteq \sum_{i=0}^{h}(-1)\left[\sum_{k=0}^{h}\omega_{ok}\wedge\ldots\wedge\sum_{k=0}^{h}\omega_{i-1,k}\wedge\sum_{k=0}^{h}\omega_{i+1,k}\wedge\ldots\wedge\sum_{k=0}^{h}\omega_{hk}\right]$$

sigue

$$\Pi' \doteq \frac{\left(\sum_{k=0}^{h} a_{0k}\right)^{h}}{a_{00} \ldots a_{0h}} \sum_{i=0}^{h} (-1)^{i} a_{0i}\, d\lambda_0 \wedge \ldots \wedge d\lambda_{i-1} \wedge d\lambda_{i+1} \wedge \ldots \wedge d\lambda_h + ((\, dz_s^{\ell}\,))$$

y poniendo $\quad d\lambda_h = -\,(d\lambda_0 + d\lambda_1 + \ldots + d\lambda_{h-1})$

$$\Pi' \doteq \frac{\left(\sum_{k=0}^{h} a_{0k}\right)^{h+1}}{a_{00}\, a_{01} \ldots a_{0h}}\, d\lambda_0 \wedge d\lambda_1 \wedge \ldots \wedge d\lambda_{h-1} + ((\, dz_s^{\ell}\,))$$

Si ahora llamamos V_k $(k = 0,1,\ldots,h)$ al volumen del $(n+1)$-edro determinado por los puntos

$$a_0\, ,\, a_1\, ,\ldots,\, a_{k-1}\, ,\, a\, ,\, a_{k+1}\, ,\ldots,\, a_n$$

se tiene $\quad 1/V_k \doteq a_{00}\, a_{01} \ldots a_{0,k-1}\,(a_{00} + a_{01} + \ldots + a_{0h})\, a_{0,k-1} \ldots a_{0h} \ldots a_{0n}$

de donde

$$\frac{\left(\sum_{k=0}^{h} a_{0k}\right)^{h+1}}{a_{00}\, a_{01} \ldots a_{0h}} \doteq \frac{1}{V_0 V_1 \ldots V_h} \cdot \frac{1}{(a_{00}\, a_{01} \ldots a_{0n})^{h+1}} = \frac{V^{h+1}}{V_0 V_1 \ldots V_h}$$

y por tanto

$$\Pi' \doteq \frac{V^{h+1}}{V_0 V_1 \ldots V_h}\, d\Lambda + ((\, dz_s^{\ell}\,)) \tag{11.8}$$

donde $\quad d\Lambda = d\lambda_1 \wedge d\lambda_2 \wedge \ldots \wedge d\lambda_{h-1}$

En definitiva, resulta para la densidad:

$$\delta = \Pi \wedge \Pi' \doteq \frac{dQ_0 \wedge dQ_1 \wedge \ldots \wedge dQ_n \wedge d\Lambda}{V^{n-h}\, V_0\, V_1 \ldots V_h} \tag{11.9}$$

ya que $\quad \Pi \wedge ((\, dz_s^{\ell}\,)) = 0$

En particular, poniendo $h = n$ en este resultado, obtenemos una nueva expresión para la medida cinemática del grupo G. Es claro que aqui, uno de los $n+2$ puntos, desempeña un papel asimétrico con respecto a los otros, lo que no ocurría en nuestro cálculo del nº 4b. Con todo, si en lugar de $d\Lambda$ ponemos su valor en función de las coordenadas no homogeneas z_i del punto a, se obtiene, con un poco de cálculo, la expresión del nº 4b. En efecto, cuando $h = n$,

$$dz_i = \sum_{k=0}^{n} z_i^k \, d\lambda_k + \sum_{k=0}^{n} \lambda_k \, dz_i^k$$

$$dz_i = \sum_{k=0}^{n-1} (z_i^k - z_i^n) \, d\lambda_k + ((\, dz_s^\ell \,))$$

$$dQ_{n+1} \doteq \bigwedge_{\ell=1}^{n} dz_\ell \doteq \begin{vmatrix} z_1^0 - z_1^n & z_1^1 - z_1^n & \dots & z_1^{n-1} - z_1^n \\ z_2^0 - z_2^n & z_2^1 - z_2^n & \dots & z_2^{n-1} - z_2^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ z_n^0 - z_n^n & z_n^1 - z_n^n & \dots & z_n^{n-1} - z_n^n \end{vmatrix} d\Lambda + ((\, dz_s^\ell \,))$$

o sea

$$dQ_{n+1} = V \, d\Lambda + ((\, dz_s^\ell \,))$$

de donde todo sigue.

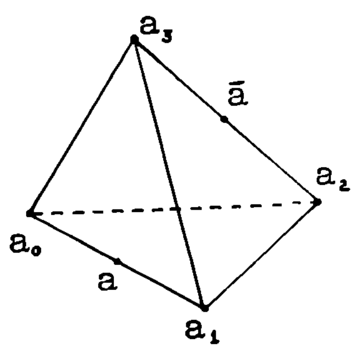
Volviendo al caso $h < n$, el desarrollo del cálculo de la densidad δ (11.9) muestra en forma inmediata como él puede ser generalizado para obtener, en base al nº 4a, las densidades de todas las configuraciones con medida prevista en el nº 10. Para evitar las complicaciones de notación del caso general, damos aqui (sin detalles de cálculo), la densidad para los puntos de un par de rectas alabeadas en S_3.

La densidad para los puntos:

$$a_0, \; a_1, \; a = a_0 + a_1 \; ; \; a_2, \; a_3 \tag{11.10}$$

obtenida de (11.9) para $n = 3$, $h = 1$, es

$$V^4/(V_0 V_1) \, . \; dQ_0 \wedge dQ_1 \wedge dQ_2 \wedge dQ_3 \wedge d\Lambda \tag{11.11}$$



Para obtener la densidad del conjunto (11.10) más el punto $\bar{a} = a_2 + a_3$, basta multiplicar (11.11) por $V^2/(V_2 V_3) \, . d\bar{\Lambda}$ [ver (11.8)] donde V_2, V_3, $d\bar{\Lambda}$, son las expresiones correspondientes a V_0,

V_1 , $d\Lambda$ con respecto a a_2, a_3 (en lugar de a_0, a_1) y se obtiene

$$\delta_1 = \frac{dQ_0 \wedge dQ_1 \wedge dQ_2 \wedge dQ_3 \wedge d\Lambda \wedge d\bar{\Lambda}}{V^2 \quad V_0 \quad V_1 \quad V_2 \quad V_3}$$

como densidad para los puntos de un par de rectas alabeadas de S_3 .

Ampliaremos ahora con un ejemplo, la observación hecha en el n 7. Consideremos el pl no S_2 y en él cuatro puntos distintos. Se distinguen las siguientes posibilidades:

1º) Los cuatro puntos tres a tres independientes

2º) Tres puntos de una recta y el cuarto fuera de ella

3º) Los cuatro puntos alineados

El grupo proyectivo de S_2 , es transitivo para configuraciones del 1º y 2º tipo, pero no lo es para las del 3º.

Para los dos primeros casos existen medida (Teoremas 5 y 7,respectivamente) y hemos dado formas explícitas para las densidades. En el tercer caso, no tiene sentido hablar de la existencia o no de medida.

Podemos decir entonces: Existe medida en el plano para los conjuntos de cuatro puntos no alineados.

En esta afirmación, sin embargo, debe tenerse presente que se consideran <u>dos problemas distintos</u> y que en cada uno de los dos casos existe medida. No tiene sentido reducir a uno sólo los dos casos, porque el grupo proyectivo de S_2 no es transitivo para conjuntos de cuatro puntos bajo la <u>única</u> hipótesis de que no sean alineados.

12 - MAS SOBRE SUBESPACIOS Y PUNTOS DE SUBESPACIOS

<u>Observación I</u>

El grupo proyectivo de S_n, no es transitivo para los puntos de dos subespacios (en el sentido del nº 9), cuando éstos no se suponen alabeados. No tiene por tanto sentido, en forma general, hablar de la existencia o no de medida para los puntos de dos subespacios, esto es, para $h+2$ puntos ($h+1$ cualesquiera independientes) de un S_h y $k+2$ puntos (en condiciones análogas) de un S_k .

En el nº 7 se observó que para asegurar la transitividad del grupo proyectivo respecto de pares de subespacios era necesario prefijar la dimensión del espacio intersección. Esto, no es más suficiente en el caso de los puntos de dos subespacios.

Sin embargo, en el caso en que los subespacios se cortan en un punto y (como parece natural hacerlo), este punto común se toma en cada subespacio como uno de los puntos dados, no existe problema con la transitividad del grupo y por lo tanto, se puede hablar de medida.

En efecto, probaremos ahora que dados: S_h, S_k y $\bar{S}_h$, $\bar{S}_k$ que se cortan respectivamente en los puntos Q y $\bar{Q}$, existe una proyectividad que transforma Q en $\bar{Q}$ y además $h+1$ puntos de S_h y $k+1$ puntos de S_k dados arbitrariamente (con la usual condición en cada caso), en $h+1$ y $k+1$ puntos de $\bar{S}_h$ y $\bar{S}_k$ dados en condiciones análogas.

Sean $P_0, \dots, P_h$ y $R_0, \dots, R_k$ los puntos daen S_h y S_k ; $\bar{P}_0, \dots, \bar{P}_h$ y $\bar{R}_0, \dots, \bar{R}_k$ los correspondientes en $\bar{S}_h$ y $\bar{S}_k$. Los puntos P_i ($\bar{P}_i$) son independientes entre sí y Q ($\bar{Q}$) no depende de h de ellos. Análoga condición vale para los puntos R_j ($\bar{R}_j$) en S_k ($\bar{S}_k$).

Resulta asi, que los puntos $Q, P_1, \dots, P_h, R_1, \dots, R_k$ ($Q, \bar{P}_1, \dots, \bar{P}_h, \bar{R}_1, \dots, \bar{R}_k$) son independientes; su espacio suma S_{h+k} ($\bar{S}_{h+k}$) coincide con $S_h + S_k$ ($\bar{S}_h + \bar{S}_k$) y es de dimensión $h+k$.

Definimos los espacios

$$S_k' = P_o + R_1 + \ldots + R_k \qquad (\bar{S}_k' = \bar{P}_o + \bar{R}_1 + \ldots + \bar{R}_k)$$

de dimensión k, y

$$S_h' = R_o + P_1 + \ldots + P_h \qquad (\bar{S}_h' = \bar{R}_o + \bar{P}_1 + \ldots + \bar{P}_h)$$

de dimensión k. Como $S_h' + S_k' = S_h + S_k = S_{h+k}$, sigue que S_h' y S_k' ($\bar{S}_h'$ y $\bar{S}_k'$) se cortan en un punto T ($\bar{T}$), que no pertenece a S_h ni a S_k ($\bar{S}_h$ ni $\bar{S}_k$).

De acuerdo al nº 5, existe una proyectividad que lleva los puntos $Q, P_1, \ldots, P_h, R_1, \ldots, R_k, T$

respectivamente a $\bar{Q}, \bar{P}_1, \ldots, \bar{P}_h, \bar{R}_1, \ldots, \bar{R}_k, \bar{T}$

Veamos que esta proyectividad transforma también los puntos P_o y R_o en $\bar{P}_o$ y $\bar{R}_o$. En efecto, S_h y S_k' tienen por suma S_{h+k} y por tanto se cortan en un punto, que es precisamente P_o. Asi,

$$P_o = S_h \cap S_k' = (Q_o + P_1 + \ldots + P_h) \cap (T + R_1 + \ldots + R_k)$$

y analogamente

$$\bar{P} = \bar{S}_h \cap \bar{S}_k' = (\bar{Q}_o + \bar{P}_1 + \ldots + \bar{P}_h) \cap (\bar{T} + \bar{R}_1 + \ldots + \bar{R}_k)$$

de donde sigue que P_o se transforma en $\bar{P}_o$. En forma similar, de $R_o = S_k \cap S_h'$ ($\bar{R}_o = \bar{S}_k \cap S_h'$), sigue que R_o se transforma en $\bar{R}_o$.

Despues de esto, parece natural buscar una definición adecuada de "los puntos de dos subespacios" en el caso general en que su intersección es un S_ℓ, para que el grupo proyectivo sea transitivo respecto de ellos.

Diremos asi, que dar los puntos de dos subespacios S_h y S_k que se cortan en un S_ℓ, significa dar: $h+2$ puntos de S_h ($h+1$ cualesquiera independientes) y $k+2$ puntos de S_k ($k+1$ independientes) y tales que

1º) $\ell+1$ de los puntos de S_h están en S y coinciden con otros tantos de S_k .

2º) El espacio suma de los $h-\ell+1$ puntos de $S_h - S_\ell$ tiene un punto común con el espacio suma de los $k-\ell+1$ puntos de $S_k - S_\ell$

La primera condición, surge en forma espontánea. La segunda en cambio, es una restricción poco natural, pero indispensable para nuestro propósito. En el caso $\ell = 0$, esto es, cuando los subespacios dados se cortan en un punto, la 2ª condición se cumple automaticamente despues de la 1ª.

Veamos que dados los subespacios S_h, S_k y $\bar{S}_h$, $\bar{S}_k$ que se cortan respectivamente en S_ℓ y $\bar{S}_\ell$, existe una proyectividad que transforma los puntos

$$Q_o, \ldots, Q_\ell ;\ P_o, \ldots, P_{h-\ell} ;\ R_o, \ldots, R_{k-\ell}$$

respectivamente en

$$\bar{Q}_o, \ldots, \bar{Q}_\ell ;\ \bar{P}_o, \ldots, \bar{P}_{h-\ell} ;\ \bar{R}_o, \ldots, \bar{R}_{k-\ell}$$

bajo las condiciones que

$$Q_o, \ldots, Q_\ell ,\ P_o, \ldots, P_{h-\ell}$$

son puntos dados en S_h ($h+1$ cualesquiera independientes),

$$Q_o, \ldots, Q_\ell ,\ R_o, \ldots, R_{k-\ell}$$

dados en S_k ($k+1$ independientes) y los espacios

$$S_{h-\ell} = P_o + \ldots + P_{h-\ell} \quad , \quad S_{k-\ell} = R_o + \ldots + R_{k-\ell}$$

tienen un punto común (necesariamente único y en S_ℓ), valiendo además las condiciones análogas para los puntos transformados.

En efecto, los puntos

$$Q_o, \ldots, Q_\ell ,\ P_1, \ldots, P_{h-\ell} ,\ R_1, \ldots, R_{k-\ell}$$

son linealmente independientes, su especio suma $S_{h+k-\ell}$ coincide con $S_h + S_k$ y tiene dimensión $h+k-\ell$.

Si ahora definimos

$$S'_{k-\ell} = P_o + R_1 + \ldots + R_{k-\ell} \quad , \quad S'_{h-\ell} = R_o + P_1 + \ldots + P_{h-\ell} \quad ,$$

como $S'_{h-\ell} + S'_{k-\ell} = S_{h-\ell} + S_{k-\ell}$ tiene dimensión $h+k-2\ell$, sigue que

$$T = S'_{h-\ell} \cap S'_{k-\ell}$$

es un punto que no pertenece ni a S_h ni a S_k . Además

$$P_o = S_h \cap S'_{k-\ell} = (Q_o + \ldots + Q_\ell + P_1 + \ldots + P_{h-\ell}) \cap (T + R_1 + \ldots + R_{k-\ell})$$

$$R_o = S_k \cap S'_{h-\ell} = (Q_o + \ldots + Q_\ell + R_1 + \ldots + R_{k-\ell}) \cap (T + P_1 + \ldots + P_{h-\ell})$$

Si en forma análoga construimos el punto $\bar{T}$ en base a los puntos transformados, se ve en la misma forma que para $\ell = 0$, que la proyectividad (seguramente existente) que lleva los puntos $Q_o, \ldots, Q_\ell, P_1, \ldots, P_{h-\ell}, R_1, \ldots, R_{k-\ell}, T$

respectivamente en $\bar{Q}_o, \ldots, \bar{Q}_\ell, \bar{P}_1, \ldots, \bar{P}_{h-\ell}, \bar{R}_1, \ldots, \bar{R}_{k-\ell}, \bar{T}$

transforma también los puntos P_o y R_o en $\bar{P}_o$ y $\bar{R}_o$.

Observación II

Los Teoremas 6 y 7, han sido probados bajo la hipótesis de que cada uno de los subespacios $S_{h_1}, \ldots, S_{h_r}$, es alabeado con el espacio suma de los restantes. Despues de la observación I, tiene sentido estudiar esos problemas bajo condiciones más amplias. Las consideraciones que siguen, muestran sin embargo, que la hipótesis de no incidencia en esos teoremas, no es ninguna restricción del caso general.

Mostraremos en primer lugar que el subgrupo g que deja invariante los puntos de dos subespacios incidentes S_h y S_k , es idéntico al subgrupo g^* que deja invariante los puntos del espacio suma $S_h + S_k$.

Que g^* es subgrupo de g , es inmediato. Para ver que si los puntos de S_h y de S_k son fijos, también lo son los puntos del espacio suma, dejamos de lado el caso trivial en que uno de los subespacios está contenido en el otro, y ponemos

$$S_\ell = S_h \cap S_k \qquad \text{con} \qquad \ell \geqslant 0 \qquad \text{y} \qquad h,k > \ell$$

y $$S_t = S_h + S_k \qquad \text{y por tanto:} \qquad t = h + k - \ell$$

Tomamos en $S_h - S_\ell$, $h+1$ puntos linealmente independientes $Q_1 , Q_2 , \ldots , Q_{h+1}$. Luego tomamos en $S_k - S_\ell$ un punto P_1 . El espacio $S_h + P_1$ corta a S_k en un $S_{\ell+1}$. Tomamos en $S_k - S_{\ell+1}$ un punto P_2 . El espacio $S_h + P_1 + P_2$ corta a S_k en un $S_{\ell+2}$. Tomamos un punto P_3 en $S_k - S_{\ell+2}$ y continuamos de esta manera, hasta tomar un punto $P_{k-\ell}$ en S_k y no contenido en el espacio $S_h + P_1 + P_2 + \ldots + P_{k-\ell-1}$.

Tenemos asi en S_t , un total de $h+1+k-\ell = t+1$ puntos fijos linealmente independientes, de los cuales, $k-\ell$ $(\leqslant k)$ están en S_k . El espacio suma de t cualesquiera de estos puntos, es un hiperplano de S_t que no contiene a S_k y que por lo tanto lo corta en un S_{k-1} . Podemos entonces tomar un nuevo punto en S_k que no está en ninguno de los $t+1$ posibles espacios S_{k-1} .

En definitiva, tenemos en S_t , $t+1$ puntos independientes $$Q_1 , Q_2 , \ldots , Q_{h+1} , P_1 , P_2 , \ldots , P_{k-\ell}$$

y un nuevo punto que depende linealmente de todos ellos, pero no de un subconjunto propio. Siendo fijo cada uno de estos $t+2$ puntos, resulta fijo todo otro punto de S_t .

Pasando al caso general, sean los r subespacios:

$$S_{h_1}\ ,\ S_{h_2}\ ,\ldots,\ S_{h_r}\ ,$$

cada uno alabeado con el espacio suma de los restantes, y sea S_k un subespacio alabeado con cada uno de los r subespacios:

$$S_{\ell_i} = S_{h_1} + \ldots + S_{h_{i-1}} + S_{h_{i+1}} + \ldots + S_{h_r} \qquad ,\ i = 1,2,..,r$$

pero incidente con

$$S_h = S_{h_1} + S_{h_2} + \ldots + S_{h_r} \quad .$$

Veamos que el subgrupo g que deja invariante los puntos de $S_{h_1}, S_{h_2}, \ldots, S_{h_r}$ y de S_k, coincide con el subgrupo g^* que deja invariante los puntos del espacio suma de estos subespacios.

Es evidente que g^* es subgrupo de g. Para demostrar lo inverso, supongamos que los puntos de $S_{h_1}, S_{h_2}, \ldots, S_{h_r}, S_k$ son fijos y sea P un punto (seguramente existente) común a S_h y S_k. Entonces, $P \notin S_{h_i}$, $P \notin S_{\ell_i}$ para $i = 1,2,..,r$.

El espacio $P + S_{\ell_i}$ es de dimensión $h - h_i$ y corta a S_{h_i} en un sólo punto P_i. La recta $P + P_i$ es fija y corta al espacio fijo S_{ℓ_i} en un sólo punto P_i^*. Este punto es por tanto fijo y entonces la recta $P + P_i$ tiene tres puntos distintos fijos. Es decir, esta recta tiene todos sus puntos fijos. De acuerdo al resultado anterior, el espacio

$$S_{h_i} + P = S_{h_i} + (P + P_i)$$

es fijo punto a punto. Escribiendo ahora

$$S_h = \sum_{i=1}^{r} S_{h_i} = \sum_{i=1}^{r} (S_{h_i} + P)$$

y usando reiteradamente el resultado para dos subespacios, se ve que los puntos de S_h son fijos.

Finalmente, siendo fijos los puntos de S_h y de S_k y teniendo estos subespacios puntos comunes, sigue que el espacio suma $S_h + S_k$ tiene todos sus puntos fijos.

Teniendo presente las observaciones anteriores y haciendo uso del Teorema 7, estudiaremos ahora una configuración similar a la alli considerada, pero en hipótesis menos restrictivas.

Teorema 9

Sean los $r+s$ subespacios

$$S_{h_1}\ ,\ S_{h_2}\ ,\dots,\ S_{h_r}\ ;\ S_{k_1}\ ,\ S_{k_2}\ ,\dots,\ S_{k_s} \tag{12.1}$$

para definir los cuales se usan subconjuntos de $(n+1)$ puntos linealmente independientes. Sean

$$S_h = \sum_{\ell=1}^{r} S_{h_\ell} \quad , \quad S_k = \sum_{\ell=1}^{s} S_{k_\ell}$$

con S_h y S_k alabeados y suponemos además (ver Observación II) que los subespacios S_{h_ℓ} son alabeados entre si. Condición necesaria y suficiente para que exista medida para el conjunto formado por los subespacios $S_{k_1},\dots,S_{k_s}$ y los puntos de $S_{h_1},\dots,S_{h_r}$, es que los subespacios S_h y S_k sean de dimensiones duales ($k = n - h - 1$) y que el conjunto $S_{k_1},\dots,S_{k_s}$ (subespacios de S_k) sea equivalente a un sistema tipo S con respecto al S_k.

Condición Suficiente

Si la familia $S_{k_1},\dots,S_{k_s}$ es equivalente en S_k al sistema $S_{k'_1}, S_{k'_2},\dots, S_{k'_{s'}}$, tipo S, entonces, el conjunto (12.1) es equivalente al conjunto

$$S_{h_1}\ ,\ S_{h_2}\ ,\dots,\ S_{h_r}\ ;\ S_{k'_1}\ ,\ S_{k'_2}\ ,\dots,\ S_{k'_{s'}}$$

para el cual valen las hipótesis del Teorema 7. Si además $k = n - h - 1$, resulta $S_h + S_k = S_n$ y por Teorema 7, la medida existe.

Condición Necesaria

Es evidentemente válida para $r = 0$ (Teorema 3) y para $s = 0$ (Teorema 6). Supondremos $r > 0$, $s > 0$ y además, sin pérdida de generalidad (ver Teorema 7), $h_i > 0$ $(i = 1,2,..,r)$.

Definimos los subespacios $S_{h_1}, \ldots, S_{h_r}$ como en el nº 10 y tengan Ω_1 y Ω_2^* el mismo significado que en el nº 11. Si definimos los subespacios $S_{k_1}, \ldots, S_{k_s}$ mediante puntos analíticos $(a_{h+1}, a_{h+2}, \ldots, a_n)$ y llamamos Ω_3 al producto de las componentes relativas que se anulan en el subgrupo que deja fijos estos subespacios, resulta que Ω_3 sólo contiene factores del tipo ω_{ij} con $i \neq j$, $j = h+1,\ldots,n$.

La existencia de medida, implica que

$$d(\Omega_1 \wedge \Omega_2^* \wedge \Omega_3) = 0$$

y de aqui, con (10.2), sigue

$$\Omega_2^* \wedge d(\Omega_1 \wedge \Omega_3) = 0 \tag{12.2}$$

Sea σ el conjunto de los factores de $\Omega_1 \wedge \Omega_3 = \Omega$, es decir, σ es el conjunto de las componentes relativas que se anulan en el subgrupo que deja invariante los elementos del conjunto C formado por los puntos $a_0, \ldots, a_h$ y los subespacios $S_{k_1}, \ldots, S_{k_s}$.

Para mostrar la condición necesaria del Teorema, basta mostrar que la (12.2) implica que el conjunto C tiene medida. En efecto, por el Teorema 3 sigue entonces que C es equivalente a un sistema C^*:

$$S_{q_1}, S_{q_2}, \ldots, S_{q_u}$$

de tipo S (en S_n). Como los elementos de C^* son alabeados entre si y determinan los puntos $a_0, \ldots, a_h$, sigue que C^*

tiene la forma:

$$a_0 \ , \ a_1 \ , \ldots , \ a_h \ , \ S_{q_1} \ , \ldots , \ S_{q_t} \ ,$$

donde $S_{q_1}, \ldots, S_{q_t}$ son alabeados entre si y su espacio suma es de dimensión $n - h - 1$. Además, de la equivalencia de C y C^* sigue que el conjunto $S_{k_1}, \ldots, S_{k_s}$ es equivalente a $S_{q_1}, \ldots, S_{q_t}$, de donde finalmente resulta $k = n - h - 1$ y $S_{k_1}, \ldots, S_{k_s}$ equivalente a un sistema tipo S en S_k.

Veamos pues que el conjunto C tiene medida. Comenzamos por definir Ω_2 mediante la (9.6). Recordando que Ω_2^* es un factor de Ω_2 (nº 10), sigue de (12.2) que

$$\Omega_2 \wedge d\Omega = 0 \tag{12.3}$$

Calculando $d\Omega$ mediante (6.5), se tiene

$$d\Omega \doteq \Omega \wedge \sum_{\ell=0}^{n} N_\ell \, \omega_{\ell\ell} \tag{12.4}$$

con $N_\ell = N_\ell^2 - N_\ell^1$, siendo (como en el nº 6) N_ℓ^1 y N_ℓ^2 respectivamente los números de elementos de σ con primero y segundo índice igual a ℓ. Por tanto,

$$\Omega \wedge \Omega_2 \wedge \sum_{\ell=0}^{n} N_\ell \, \omega_{\ell\ell} = 0$$

de donde, teniendo en cuenta la independencia de los factores de Ω respecto de los restantes

$$\Omega_2 \wedge \sum_{\ell=0}^{n} N_\ell \, \omega_{\ell\ell} = 0 \tag{12.5}$$

Si ahora, para cada $i = h+1, h+2, \ldots, n$, ponemos

$$\Omega^i = \Omega_2 \wedge (\omega_{h+1,h+1} - \omega_{00}) \wedge \ldots \wedge (\omega_{i-1,i-1} - \omega_{00}) \wedge (\omega_{i+1,i+1} - \omega_{00}) \wedge \ldots \wedge (\omega_{nn} - \omega_{00})$$

resulta

$$\Omega^i = \sum_{j=0}^{i-1} (-1)^j \, \omega_{00} \wedge \ldots \wedge \omega_{j-1,j-1} \wedge \omega_{j+1,j+1} \wedge \ldots \wedge \omega_{i-1,i-1} \wedge \omega_{i+1,i+1} \wedge \ldots \wedge \omega_{nn} \; +$$

$$+ \sum_{j=i+1}^{n} (-1)^{j-1} \, \omega_{00} \wedge \ldots \wedge \omega_{i-1,i-1} \wedge \omega_{i+1,i+1} \wedge \ldots \wedge \omega_{j-1,j-1} \wedge \omega_{j+1,j+1} \wedge \ldots \wedge \omega_{nn}$$

Teniendo presente (2.5) y

$$\sum_{\ell=0}^{n} N_\ell\, \omega_{\ell\ell} = \sum_{\ell=0}^{n} (N_\ell - N_i)\, \omega_{\ell\ell}$$

la (12.5) da

$$0 = \Omega^i \sum_{\ell=0}^{n} N_\ell\, \omega_{\ell\ell} = \sum_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n} (N_j - N_i)\, \omega_{00} \wedge \cdots \wedge \omega_{i-1,i-1} \wedge \omega_{i+1,i+1} \wedge \cdots \wedge \omega_{nn}$$

de donde, por la independencia de las componentes relativas:

$$\omega_{00}, \ldots, \omega_{i-1,i-1}, \omega_{i+1,i+1}, \ldots, \omega_{nn}$$

sigue que
$$\sum_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n} (N_j - N_i) = 0$$

o sea
$$\sum_{j=0}^{n} N_j = (n+1)\, N_i \tag{12.6}$$

Ahora bien,

$$\sum_{j=0}^{n} N_j^2 = \sum_{j=0}^{n} N_j^1 = \text{número de elementos de } \sigma ,$$

de donde
$$\sum_{j=0}^{n} N_j = \sum_{j=0}^{n} (N_j^2 - N_j^1) = 0$$

y por tanto, de (12.5)

$$N_i = N_i^2 - N_i^1 = 0 \qquad \text{para} \quad i = h+1, h+2, \ldots, n \tag{12.7}$$

De la (12.7), sigue que con cada elemento ω_{ij} $(i,j = h+1, h+2, \ldots, n)$ el conjunto σ también contiene el elemento ω_{ji} . En efecto, no hay mas que repetir aqui las argumentaciones de la demostración de la condición necesaria del Teorema 2, probada justamente bajo la hipótesis (12.7) más general que la (6.6) de aquel Teorema.

Con esto, con (12.6) y del hecho que σ contiene las componentes

$$\omega_{i0}, \omega_{i1}, \ldots, \omega_{ih},$$

(factores de Ω_i) para cada $i = h+1, \ldots, n$, sigue que σ también contiene las componentes

$$\omega_{0i}, \omega_{1i}, \ldots, \omega_{hi},$$

para cada $i = h+1, \ldots, n$.

Finalmente, ya que σ contiene las componentes ω_{ij} (factores de Ω_1) para todo $i,j = 0,1,\ldots,h$, $i \neq j$, si-sigue que con cada ω_{ij} , σ contiene también a ω_{ji} para todo $i,j = 0,1,\ldots,n$. Esto a su vez, por el Teorema 2, implica que el conjunto C tiene medida y queda por tanto probado el Teorema 9.

13 - RESULTADOS POR DUALIDAD Y CONFIGURACIONES AUTODUALES

En forma análoga al estudio (en nº 9) de los puntos de un subespacio S_h , se puede considerar el problema de los hiperplanos que pasan por un S_h , esto es, $n-h+1$ hiperplanos ($n-h$ cualesquiera de ellos independientes) que contienen a S_h . No es necesario sin embargo, un estudio directo, ya que por dualidad, el Teorema 5 nos dice que no existe medida para el conjunto de (todos) los hiperplanos que pasan por un S_h , salvo que S_h sea vacio ($h = -1$), esto es, salvo que se trate de todos los hiperplanos de S_n .

En forma obvia, los Teoremas 6, 7 y 9 en sus traducciones duales, nos conducen a resultados sobre la existencia de medida para conjuntos de subespacios e hiperplanos que pasan por subespacios dados.

Por ejemplo, del Teorema 6 se obtiene, para $r=2$, que dados dos subespacios S_h y S_k tales que $S_h + S_k = S_n$ existe medida para los hiperplanos que pasan por S_h y los hiperplanos que pasan por S_k , si y solo si, S_h y S_k son alabeados. Si tenemos en cuenta aqui las observaciones del nº 12, podemos prescindir de la hipótesis $S_h + S_k = S_n$. Cuando $S_h + S_k \neq S_n$, dejar fijos los hiperplanos por S_h y por S_k , es lo mismo que dejar fijos los hiperplanos por $S_h \cap S_k$ y por tanto, también hay medida si y solo si S_h y S_k son disyuntos.

En lo que sigue de este número, estudiaremos configuraciones que no pueden ser obtenidas por dualidad de los casos ya estudiados.

Comencemos por observar que dar $n-h+1$ hiperplanos ($n-h$ cualesquiera independientes) por S_h , es equivalente a dar $n-h+1$ subespacios S_{h+1} ($n-h$ independientes) por S_h .

Queremos ver ahora que el grupo proyectivo es transitivo para el conjunto de los puntos de S_h, los hiperplanos por S_h y un subespacio S_{n-h-1} alabeado con S_h. Más concretamente, dados dos pares de subespacios alabeados S_h , S_{n-h-1} y $\bar{S}_h$, $\bar{S}_{n-h-1}$, los puntos $P_0, \dots, P_{h+1}$ y $\bar{P}_0, \dots, \bar{P}_{h+1}$ ($h+1$ independientes) respectivamente en S_h y $\bar{S}_h$, los subespacios $T_0, \dots, T_{n-h}$ y $\bar{T}_0, \dots, \bar{T}_{n-h}$ de dimensiones $h+1$ que pasan por S_h y $\bar{S}_h$ ($n-h$ independientes), existe una proyectividad que lleva los puntos P_i en $\bar{P}_i$, los subespacios T_j en $\bar{T}_j$ y S_{n-h-1} en $\bar{S}_{n-h-1}$.

Designemos con Q_j ($\bar{Q}_j$) ($j = 0,1,\dots, n-h$) el punto (único) intersección de T_j con S_{n-h-1} ($\bar{T}_j$ con $\bar{S}_{n-h-1}$). Por la condición impuesta a los T_j ($\bar{T}_j$), los $n-h+1$ puntos Q_j ($\bar{Q}_j$) de S_{n-h-1} ($\bar{S}_{n-h-1}$) son tales que $n-h$ cualesquiera de ellos resultan independientes. Por el nº 5, existe una proyectividad que lleva los puntos $P_0, \dots, P_{h+1}$, $Q_0, \dots, Q_{n-h+1}$ respectivamente en $\bar{P}_0, \dots, \bar{P}_{h+1}$, $\bar{Q}_0, \dots, \bar{Q}_{n-h+1}$. Esta proyectividad lleva por lo tanto

$$T_j = S_h + Q_j \qquad \text{en} \qquad \bar{T}_j = \bar{S}_h + \bar{Q}_j$$

y obviamente, S_{n-h-1} en $\bar{S}_{n-h-1}$.

Podemos entonces estudiar el problema de la existencia o no de medida para el conjunto de los puntos de S_h, los hiperplanos por S_h y un subespacio S_{n-h-1} alabeado con S_h (y de dimensión dual). La medida existe y ella coincide con la medida de los puntos de S_h y los puntos de S_{n-h-1} (Teorema 6, $r = 2$). En efecto, mostraremos que el subgrupo g que deja inriante los puntos de S_h, los hiperplanos por S_h y el subespacio S_{n-h-1}, coincide con el subgrupo g^* que deja fijos los puntos de S_h y los puntos de S_{n-h-1}.

Que g es un subgrupo de g^* resulta del hecho de que si P es un punto de S_{n-h-1}, se tiene

$$P = (S_h + P) \cap S_{n-h-1}$$

En g, $S_h + P$ y S_{n-h-1} son fijos y por lo tanto P. Inversamente, si S_{h+1} contiene a S_h,

$$S_{h+1} = S_h + (S_{h+1} \cap S_{n-h-1})$$

y como en g^*, S_h y $S_{h+1} \cap S_{n-h-1}$ son fijos, resulta g^* subgrupo de g.

Veremos ahora, que no existe medida para el conjunto de los puntos de un S_h y los hiperplanos por S_h ($0 \leq h \leq n - 1$). En primer lugar, observamos que la transitividad del grupo está asegurada, a fortiori, por las consideraciones del problema anterior.

Los casos $h = 0$ y $h = n - 1$, corresponden respectivamente a hiperplanos por un punto y puntos de un hiperplano y ya sabemos que en ninguno de los casos hay medida. Suponiendo entonces $0 < h < n - 1$, definimos el subespacio S_h mediante los puntos analíticos $a_0, a_1, \ldots, a_h$.

La invariancia del espacio de dimensión $h+1$

definido por los puntos $a_0, a_1, \ldots, a_h, a_\ell$ $(\ell = h+1, \ldots, n)$ está caracterizado por

$$\omega_{ij} = 0 \qquad \text{con} \quad \begin{cases} j = 0, 1, \ldots, h, \\ i = h+1, \ldots, \ell-1, \ell+1, \ldots, n \end{cases} \tag{13.1}$$

Son en total, $n - h$ subespacios independientes por S_h. Para fijar cada subespacio por S_h, fijamos el S_{h+1} definido por los puntos

$$a_0, a_1, \ldots, a_h, (a_{h+1} + a_{h+2} + \ldots + a_n).$$

Debe ser entonces

$$d(a_{h+1} + \ldots + a_n) = \lambda_0 a_0 + \ldots + \lambda_h a_h + \mu(a_{h+1} + \ldots + a_n)$$

con $\lambda_0, \ldots, \lambda_h, \mu$, constantes. De acuerdo a (2.11) se tiene

$$\sum_{r=h+1}^{n} \sum_{\ell=0}^{n} a_\ell \omega_{\ell r} = \lambda_0 a_0 + \ldots + \lambda_h a_h + \mu(a_{h+1} + \ldots + a_n)$$

de donde

$$\sum_{r=h+1}^{n} \omega_{\ell r} = 0 \qquad \text{para} \quad \ell = h+1, \ldots, n$$

Teniendo presente que las (13.1) valen para cada $\ell = h+1, \ldots, n$, se puede poner

$$\omega_{h+1,h+1} = \omega_{h+2,h+2} = \ldots = \omega_{nn} \tag{13.2}$$

Dentro del subgrupo que deja invariante los hiperplanos por S_h, es decir, dentro del subgrupo en el cual valen (13.1) y (13.2), impongamos la invariancia de los puntos de S_h. De acuerdo al nº 9, se tiene para esto:

$$\omega_{ij} = 0 \qquad i, j = 0, 1, \ldots, h \;;\; i \neq j \tag{13.3}$$

y

$$\omega_{00} = \omega_{11} = \ldots = \omega_{hh} \tag{13.4}$$

Si ahora llamamos Ω_1 al producto de los primeros miembros de (13.1) y (13.3), y además ponemos:

$$\Omega_2 \doteq \bigwedge_{k=1}^{h} (\omega_{kk} - \omega_{00})$$

resulta que Ω_1 y Ω_2 tienen el mismo significado que en el nº 9. Poniendo finalmente

$$\Omega_3 \doteq \bigwedge_{j=h+1}^{n-1} (\omega_{jj} - \omega_{nn})$$

existe medida si y sólo si

$$d(\Omega_1 \wedge \Omega_2 \wedge \Omega_3) = 0 \tag{13.5}$$

De acuerdo a (9.8), $\Omega_1 \wedge d\Omega_2 = 0$. En forma análoga, $\Omega_1 \wedge d\Omega_3 = 0$. En efecto, cada término de $d\Omega_3$ contiene un factor de la forma

$$d(\omega_{jj} - \omega_{nn}) \doteq \sum_{\substack{\ell=0 \\ \ell \neq j}}^{n} \omega_{j\ell} \wedge \omega_{\ell j} - \sum_{\ell=0}^{n-1} \omega_{n\ell} \wedge \omega_{\ell n} \qquad , \ j=h+1,..,n-1$$

y cada término de esta expresión tiene un factor común con Ω_1 .

Sigue entonces que hay medida si y sólo si

$$d\Omega_1 \wedge \Omega_2 \wedge \Omega_3 = 0 \tag{13.6}$$

esto es, por (.11), si y sólo si

$$\Omega_1 \wedge \omega_{00} \wedge \omega_{11} \wedge \ldots . \wedge \omega_{hh} \wedge \Omega_3 = 0 \qquad \text{y como}$$

$$\Omega_3' \doteq \sum_{i=h+1}^{n} (-1)^{n-i} \omega_{h+1,h+1} \wedge \ldots \wedge \omega_{i-1,i-1} \wedge \omega_{i+1,i+1} \wedge \ldots . \wedge \omega_{nn} =$$

$$= \omega_{h+1,h+1} \wedge \ldots \wedge \omega_{n-1,n-1} - \sum_{\ell=h+1}^{n-1} (-1)^{n-i} \omega_{h+1,h+1} \wedge \ldots \wedge \omega_{i-1,i-1} \wedge \omega_{i+1,i+1} \wedge \ldots$$

$$\ldots \omega_{n-1,n-1} \wedge (\omega_{00} + \omega_{11} + \ldots . + \omega_{n-1,n-1}) =$$

$$= (n-h)\, \omega_{h+1,h+1} \wedge \ldots \wedge \omega_{n-1,n-1} - \sum_{\ell=h+1}^{n-1} (-1)^{n-i} \omega_{h+1,h+1} \wedge \ldots \wedge \omega_{i-1,i-1} \wedge$$

$$\wedge\, \omega_{i+1,i+1} \wedge \ldots \wedge \omega_{n-1,n-1} \wedge (\omega_{00} + \ldots + \omega_{hh})$$

sigue de (13.6) que hay medida si y sólo si

$$\Omega_1 \wedge \omega_{00} \wedge \omega_{11} \wedge \ldots \wedge \omega_{n-1,n-1} = 0 \tag{13.7}$$

Ya que las componentes relativas que figuran como factores en el primer miembro de (13.7) son todas independientes entre si, resulta que (13.7) no se cumple y por tanto, no existe medida para los puntos y los hiperplanos de un S_h .

14 - PARES DE SUBESPACIOS Y ELEMENTOS GEOMETRICOS DE UNO DE ELLOS.

Estudiaremos en este número, la existencia o no de medida para conjuntos de elementos geométricos, no necesariamente compuestos por subespacios lineales como hasta ahora.

Se sabe (Teorema T) que existe medida para un par de subespacios S_h y S_{n-h-1} alabeados (y de dimensiones duales). Queremos ahora considerar el conjunto C formado por esos subespacios y una familia H de elementos geométricos contenidos en S_h . Cuando el grupo proyectivo de S_h es transitivo respecto a los conjuntos H , se puede hablar de la existencia (o no) de medida para H <u>en el espacio S_h</u> . En este caso, de acuerdo al nº 5, también tiene sentido estudiar la existencia de medida para el conjunto C .

<u>Teorema 10</u>

Existe medida para el conjunto C formado por S_h , S_{n-h-1} , H ($0 \leqslant h \leqslant n$ 1 , S_h y S_{n-h-1} alabeados , $H \subset S_h$) si y sólo si existe medida para el conjunto H en el espacio proyectivo S_h (considerado como espacio y no como subespacio de S_n).

Escribiendo explicitamente el grupo proyectivo G:

$$
\begin{aligned}
x_0' &= a_{00}\,x_0 + a_{01}\,x_1 + \dots + a_{0n}\,x_n \\
x_1' &= a_{10}\,x_0 + a_{11}\,x_1 + \dots + a_{1n}\,x_n \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
x_n' &= a_{n0}\,x_0 + a_{n1}\,x_1 + \dots + a_{nn}\,x_n
\end{aligned}
$$

con $A = (a_{ij})$, $|A| = 1$, se ve de inmediato que el subgrupo g de G que deja invariante los espacios S_h y S_{n-h-1} defidos por

$S_h: \; x_{h+1} = x_{h+2} = \ldots = x_n = 0 \quad , \quad S_{n-h-1}: \; x_0 = x_1 = \ldots = x_h = 0$

está caracterizado por la anulación de las matrices:

(a_{ij}) para $i \leq h$, $j > h$ y (a_{ij}) para $i > h$, $j \leq h$.

Sean $D = (a_{ij})$ $i, j \leq h$ y $D_1 = (a_{ij})$ $i, j > h$ y pongamos $\Delta = |D|$, $\Delta_1 = |D_1|$. Entonces $\Delta \cdot \Delta_1 = |A| = 1$.

Según (2.3), las componentes relativas de G son:

$$\omega_{ij} = \sum_{\ell=0}^{n} \alpha^{i\ell} \, da_{\ell j} \qquad (\alpha^{i\ell} = \text{adj. de } a_{\ell j})$$

En el subgrupo $g \in G$, se tiene entonces

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Para } i \leq h, \; j > h: & \omega_{ij} = \sum_{\ell=h+1}^{n} \alpha^{i\ell} \, da_{\ell j} = 0 \text{ , pues } \alpha^{i\ell} = 0 \; (\ell = h+1, \ldots, n) \\ \text{" } \; i > h, \; j \leq h: & \omega_{ij} = \sum_{\ell=0}^{h} \alpha^{i\ell} \, da_{\ell j} = 0 \text{ , pues } \alpha^{i\ell} = 0 \; (\ell = 0, \ldots, h) \\ \text{" } \; i \leq h, \; j \leq h: & \omega_{ij} = \sum_{\ell=0}^{h} \alpha^{i\ell} \, da_{\ell j} \\ \text{" } \; i > h, \; j > h: & \omega_{ij} = \sum_{\ell=h+1}^{n} \alpha^{i\ell} \, da_{\ell j} \end{array}\right\} \quad (14.1)$$

Con referencia al mismo sistema de coordenadas, consideremos en S_h , el grupo proyectivo general g^* :

$$\begin{array}{l} x'_0 = b_{00} x_0 + b_{01} x_1 + \ldots + b_{0h} x_h \\ x'_1 = b_{10} x_0 + b_{11} x_1 + \ldots + b_{1h} x_h \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x'_h = b_{h0} x_0 + b_{h1} x_1 + \ldots + b_{hh} x_h \end{array} \qquad (14.2)$$

Como en el subgrupo g no existe ninguna relación entre los elementos de la matriz D , podemos tomar

$$b_{ij} = \Delta^{\frac{-1}{h+1}} \cdot a_{ij} \qquad i, j \leq h \qquad (14.3)$$

Con esta elección, resulta $|(b_{ij})| = 1$. Si designamos con (β^{ij}) la matriz de la transformación inversa de (14.2), en base a (14.3) se tiene:

$$\beta^{ij} = \frac{1}{\Delta^{\frac{h}{h+1}}} \frac{\alpha^{ij}}{\Delta_1} = \Delta^{\frac{1}{h+1}} \alpha^{ij} \tag{14.4}$$

También de (14.3)
$$db_{\ell j} = \Delta^{\frac{-1}{h+1}} da_{\ell j} - \frac{a_{\ell j}}{h+1} \Delta^{-\frac{h+2}{h+1}} d\Delta \tag{14.5}$$

La (2.3) aplicada al grupo g^* de S_h , nos da para las componentes relativas ω^*_{ij} de g^*

$$\omega^*_{ij} = \sum_{\ell=0}^{h} \beta^{i\ell} db_{\ell j} \qquad i,j = 0,1,\ldots,h$$

De donde, con (14.4) y (14.5):

$$\omega^*_{ij} = \sum_{\ell=0}^{h} \alpha^{i\ell} da_{\ell j} - \frac{1}{h+1}\frac{d\Delta}{\Delta} \sum_{\ell=0}^{h} \alpha^{i\ell} da_{\ell j} \qquad i,j=0,1,..,h$$

y de aqui, con (14.1):

$$\left.\begin{aligned} \omega^*_{ij} &= \omega_{ij} \qquad \text{si} \quad i \neq j \\ \omega^*_{ii} &= \omega_{ii} - \frac{1}{h+1}\frac{d\Delta}{\Delta} \end{aligned}\right\} \quad i,j \leq h \tag{14.6}$$

Ahora bien, la (2.5) aplicada a las ω^*_{ii} de g^*, nos da

$$0 = \sum_{i=0}^{h} \omega^*_{ii} = \sum_{i=0}^{h} \omega_{ii} - \frac{d\Delta}{\Delta}$$

de modo que de (14.6)

$$\omega^*_{ii} = \omega_{ii} - \frac{1}{h+1} \sum_{\ell=0}^{h} \omega_{\ell\ell} \tag{14.7}$$

Las componentes ω^*_{ij} independientes, son en total $h(h+2)$. Adoptaremos todas, excepto ω^*_{hh}.

Las $h(h+2)+1$ componentes ω_{ij} , $i,j \leq h$, de g son todas independientes entre si. En su lugar, adoptaremos las siguientes combinaciones lineales independientes formadas por ellas:

$$\bar{\omega}_{ij} = \omega_{ij} \qquad i \neq j \ ; \ i,j \leq h$$

$$\bar{\omega}_{ii} = \omega_{ii} - \frac{1}{h+1}\sum_{\ell=0}^{h} \omega_{\ell\ell} \qquad i \leq h-1 \qquad (14.8)$$

$$\sigma = \sum_{\ell=0}^{h} \omega_{\ell\ell}$$

A las restantes componentes de g las dejamos sin cambio. Siendo además, por (2.5) y (14.8)

$$\sigma + \sum_{\ell=h+1}^{n} \omega_{\ell\ell} = \sum_{\ell=0}^{n} \omega_{\ell\ell} = 0 \ ,$$

podemos adoptar como componentes independientes de g, todas las ya definidas, salvo σ.

Con esta elección, resulta de (14.6), (14.7) y (14.8), que cada componente relativa independiente de g^* coincide con una componente independiente de g (la que tiene los mismos índices), teniendo g además, las componentes ω_{ij} para $i,j > h$.

Consideremos ahora el subgrupo g_1 de g que deja invariante el conjunto H contenido en S_h. En g_1, no existe ninguna relación en la cual interviene alguna componente ω_{ij} de g para $i,j > h$. En efecto, basta observar (de acuerdo al nº 9), que tales relaciones no existen ni aun en el subgrupo de g que deja invariante cada punto de S_h.

Resulta entonces, que g_1 está caracterizado por la anulación de combinaciones lineales de las componentes $\bar{\omega}_{ij}$ $(i,j \leq h)$, cuyo producto designamos por $\bar{\Omega}$.

El subgrupo g_1^* de g^* que deja invariante el conjunto H está caracterizado por la anulación de las mismas combinaciones lineales en las ω_{ij}^*. Si llamamos Ω^* al correspondiente producto, se tiene:

$$\bar{\Omega} = \Omega^* \qquad (14.9)$$

Volviendo al grupo original G, consideremos en él el subgrupo g_1 ($g_1 \subset g \subset G$) que deja invariante el conjunto C (S_h, S_{n-h-1} , H). Hay medida para el conjunto C en S_n, si y sólo si

$$d(\bar{\Omega} \wedge \Omega) = 0 \qquad (14.10)$$

donde Ω es el producto de las componentes relativas de G que se anulan en el subgrupo g que deja invariante los espacios S_h y S_{n-h-1} . Concretamente, los factores de Ω son las componentes ω_{ij} para $i \leq h$, $j > h$ y para $i > h$, $j \leq h$.

Ahora bien, la existencia de medida en S_n para el par de espacios S_h , S_{n-h-1} , implica que $d\Omega = 0$ y por tanto sigue de (14.10) que hay medida para C si y sólo si

$$\Omega \wedge d\bar{\Omega} = 0 \qquad (14.11)$$

Por otra parte, de la igualdad $\bar{\omega}_{ij} = \omega^*_{ij}$ sigue

$$\Omega \wedge d\,\bar{\omega}_{ij} = \Omega \wedge d\,\omega^*_{ij} \qquad i, j \leq h \qquad (14.12)$$

ya que, como se facilmente a partir de (14.6), (14.7) y (14.8), los términos de la diferencia $d\bar{\omega}_{ij} - d\omega^*_{ij}$ contienen todos factores de Ω . De (14.11) y (14.12), sigue que hay medida para C si y sólo si

$$\Omega \wedge d\,\Omega^* = 0$$

y esto vale si y sólo si

$$d\,\Omega^* = 0 \qquad (14.13)$$

pues en $d\Omega^*$ sólo intervienen componentes ω_{ij} con $i, j \leq h$ y éstas, son independientes de los factores de Ω .

El Teorema queda probado, ya que la (14.13) es la condición (necesaria y suficiente) para la existencia de medida del conjunto H en S_h .

Como una consecuencia inmediata del Teorema 10 y del resultado de Santaló [4] de que existe medida para las hipercuádricas no singulares, veamos ahora de que existe medida para el conjunto Z formado por una hipercuádrica singular Q y un subespacio S_h alabeado con el vértice S_{n-h-1} de Q.

En efecto, dar el conjunto Z es equivalente a dar el vértice S_{n-h-1}, el subespacio S_h y la hipercuadrica Q' (no singular) de S_h, intersección de Q con S_h. A este resultado habiamos llegado ya en forma directa, Luccioni [1].

15 - SUBESPACIOS Y ELEMENTOS GEOMETRICOS CONTENIDOS EN ELLOS

Consideremos ahora el conjunto D que se obtiene agregando al conjunto C del nº 14, una nueva familia K de elementos geométricos contenidos en S_{n-h-1}, suponiendo naturalmente, que el grupo de S_{n-h-1} es transitivo respecto de K.

Mostraremos que, bajo la hipótesis de que el conjunto C' formado por S_h, S_{n-h-1}, K tiene medida (lo cual ocurre, de acuerdo al Teorema 10, si y sólo si K tiene medida en S_{n-h-1}), el Teorema 10 sigue siendo válido para el conjunto más amplio D. Por el contrario, si C' no tiene medida, tampoco tiene medida D.

Usaremos aqui la notación del nº 14 y repetimos lo dicho alli, hasta la igualdad (14.9) inclusive.

El subgrupo que deja invariante el conjunto C' no impone condiciones a las componentes relativas de ω_{ij} de G para $i,j \leq h$. Llamando Ω_1 a las componentes relativas del subgrupo g_1 ($g_1 \subset g \subset G$) que se anulan en el subgrupo g_2 de g_1 que deja invariante el conjunto K, se tiene que existe medida para D si y sólo si

$$d(\overline{\Omega} \wedge \Omega_1 \wedge \Omega \quad) = 0 \qquad (15.1)$$

mientras que la medida para C' existe si y sólo si

$$d(\Omega_1 \wedge \Omega) = d\Omega_1 \wedge \Omega = 0 \qquad (15.2)$$

Si m es el orden de la forma diferencial $\bar{\Omega}$, la (15.1) se escribe

$$d\bar{\Omega} \wedge \Omega_1 \wedge \Omega = (-1)^{m-1} \bar{\Omega} \wedge d\Omega_1 \wedge \Omega$$

esto es (nº 14)

$$d\Omega^* \wedge \Omega_1 \wedge \Omega = (-1)^{m-1} \Omega^* \wedge d\Omega_1 \wedge \Omega \qquad (15.3)$$

Si ahora designamos con Ω_2 la suma de los términos de $d\Omega_1$ que no contienen factores de Ω, resulta $\Omega_2 \wedge \Omega = d\Omega_1 \wedge \Omega$ y Ω_2 (lo mismo que Ω_1) sólo contiene componentes ω_{ij} con $i,j > h$. La (15.2) se escribe ahora $\Omega_2 = 0$ (condición de existencia de medida para C') y la (15.3), condición de existencia de medida para D, resulta

$$d\Omega^* \wedge \Omega_1 = (-1)^{m-1} \Omega^* \wedge \Omega_2 \qquad (15.4)$$

y ésta igualdad vale si y sólo si

$$d\Omega^* = 0 \qquad y \qquad \Omega_2 = 0 \qquad (15.5)$$

En efecto, que (15.5) implica (15.4) es inmediato. Para ver lo inverso, observamos que $d\Omega^*$ se puede desarrollar en base a las componentes ω^*_{ij} (nº 14) que son independientes de las componentes ω_{ij} con $i,j > h$ que intervienen en Ω_1 y Ω_2 (inclusive de σ, nº 14). Si una de las (15.5) vale, la (15.4) implica que vale también la otra. En el caso en que ninguna de las (15.5) vale, la (15.4) no puede cumplirse ya que $d\Omega^*$ es de orden $m+1$ en las ω^*_{ij} mientras que en el segundo miembro Ω^* es de orden m.

Como las (15.5) son las condiciones de existencia de medida para H en S_h y para K en S_{n-h-1}, queda demostrado para $r = 2$ el siguiente

Teorema 11

Dados los r subespacios $S_{h_1}, S_{h_2}, \ldots, S_{h_r}$, cada uno alabeado con el espacio suma de los restantes y tales que el espacio suma de todos ellos coincide con S_n, sea H_i para cada $i = 1, 2, \ldots, r$ un conjunto de elementos geométricos de S_{h_i} con la condición que el grupo proyectivo del espacio S_{h_i} sea transitivo para H_i (H_i puede ser vacio). Existe medida para el conjunto

$$C_r : \quad S_{h_1}, H_1, S_{h_2}, H_2, \ldots\ldots, S_{h_r}, H_r, \tag{15.6}$$

si y sólo si existe medida para el conjunto H_i en el espacio S_{h_i}, para cada $i = 1, 2, \ldots, r$.

Para demostrar el Teorema 11 en forma general, supongamoslo válido para $r - 1$ subespacios y probemos que vale para r. Sea

$$S_k = \sum_{i=1}^{r-1} S_{h_i}$$

entonces, S_k y S_{h_r} son alabeados y de dimensiones duales. Podemos interpretar ahora a C_r (15.6), como el conjunto formado por S_{h_r}, $H_r \subset S_{h_r}$, S_k, $C_{r-1} \subset S_k$.

Como el Teorema 11 vale para $r = 2$, sigue que hay medida para C_r si y solo si hay medida para H_r en S_{h_r} y para C_{r-1} en S_k. Queda probado el Teorema 11 pues, por la hipótesis de inducción, C_{r-1} tiene medida en S_k si y sólo si H_i tiene medida en S_{h_i}, para cada $i = 1, 2, \ldots, r - 1$.

Observación

Es inmediato ver en el nº 14 que la densidad de medida (supuesta existente) para el conjunto $\{H, S_h, S_{n-h-1}\}$

en S_n , es el producto de la densidad de $\{S_h , S_{n-h-1}\}$ en S_n por la densidad de H en S_h . Procediendo por inducción, se ve que la densidad para C_r (15.6) en S_n , es el producto de la densidad de $\{S_{h_1}, \ldots, S_{h_r}\}$ en S_n por las densidades de los H_i en los S_{h_i} .

El Teorema 11 (r = 2) asegura la existencia de medida para el conjunto X formado por dos subespacios S_h, S_k alabeados y de dimensiones duales y las hipercuádricas $Q_h(\subset S_h)$ $Q_k(\subset S_k)$ no singulares en esos espacios.

Ya que dar X equivale a dar las proyecciones de Q_h y Q_k desde S_k y S_h respectivamente, resulta que existe medida para los pares de hipercuádricas singulares cuyos espacios vértices son alabeados y de dimensiones duales. Por cálculo directo conocíamos ya este resultado (Luccioni [1]).

16 - ELEMENTOS $H \subset S_h$ CONSIDERADOS EN S_n

Como consecuencia de los resultados del nº 14, probaremos aqui el siguiente

<u>Teorema 12</u>

Sea H un conjunto de elementos geométricos en S_n y sea S_h , con $h < n$, el espacio suma de los puntos de H. Si H tiene medida en S_h , entonces, H no tiene medida en S_n.

Sean S_h y S_{n-h-1} definidos como en el nº 14. La existencia de medida para H en S_h implica, por el Teorema 10, la existencia de medida en S_n para el conjunto $\{H, S_h, S_{n-h-1}\}$.

Sean Ω y Ω_1 los productos de las componentes relativas que se anulan en los subgrupos g y g_1 de G, que dejan invariante H y S_{n-h-1} . Ya que por su definición, S_h

es invariante bajo g , sigue que

$$d(\Omega \wedge \Omega_1) = 0 \tag{16.1}$$

Para demostrar el teorema, veamos que (16.1) implica que $d\Omega \neq 0$. En efecto, si fuese $d\Omega = 0$, **sería**

$$\Omega_1 \wedge d\Omega = 0 \tag{16.2}$$

Teniendo presente que $\Omega_1 \doteq \bigwedge_{\substack{i \leq h \\ j > h}} \omega_{ij}$ con (6.5) se calcula

$$d\Omega_1 \doteq \Omega_1 \wedge \sum_{\ell=0}^{h} \omega_{\ell\ell} = \Omega_1 \wedge \sigma$$

y la (16.2) daría

$$\Omega \wedge \Omega_1 \wedge \sigma = 0$$

de donde, debido a la independencia de los factores de Ω_1 respecto de los de Ω y de σ , seguiría

$$\Omega \wedge \sigma = 0$$

Esta relación, implica que σ se anula en el subgrupo g lo cual es falso, pues, de acuerdo al nº 9, σ no se anula ni aun en el subgrupo de G que deja invariante cada punto de S_h . Queda asi probado el Teorema 12.

De este teorema y de la existencia de la medida cinemática, sigue inmediatamente el Teorema 5. Es más, del Teorema 11, siguen las condiciones suficientes de los Teoremas 6 y 7; de éstas y del Teorema 12, las respectivas condiciones necesarias. El tratamiento directo de los Teoremas 5, 6 y 7 en este trabajo, es sin embargo necesario para simplificar la demostración del Teorema 9, más general, que no puede obtenerse en base a los Teoremas 11 y 12.

Teniendo presente el resultado de Santaló sobre hipercuádricas (citado en el nº 14), sigue del Teorema 12 que no existe medida para la intersección de hipercuádricas no singulares de S_n con un subespacio (propio) S_h .

El Teorema 12, permite también, en forma inmediata, mejorar el resultado del nº 15 sobre pares de hipercuádricas singulares, escribiendo:

Existe medida para pares de hipercuádricas singulares cuyos espacios vértices son alabeados, si y sólo si, estos espacios tienen dimensiones duales.-

B I B L I O G R A F I A

1 - Cartan, E. Théorie des groupes finis et continus et la géométrie differentielle traitées par la méthode du repère mobile. Gauthier-Villars. Paris. 1951.

1 - Gaeta, F. Sobre la subordinación de la geometría integral a la teoría de la representación de grupos mediante transformaciones lineales. Contribuciones Científicas (Serie Matemática). II. Nº 2, 31-87.

1 - Luccioni, R. Sobre la existencia de medida para hipercuádricas singulares en espacios proyectivos. Rev. Matemática y Física Teórica, XIV, 269-276.

1 - Santaló, L. Integral geometry in proyective and affine spaces. Ann. of Math. 51, 739-755.

2 - Santaló, L. Problemas de geometría integral. Simposium sobre algunos problemas matemáticos que se están estudiando en Latino América. UNESCO. Punta del Este, 1951.

3 - Santaló, L. Introduction to integral geometry. Hermann. Paris. 1953.

4 - Santaló, L. Two applications of the integral geometry in affine and proyective spaces. Publicationes Mathematicae. 7. 1960. 226-237.

RESUMEN

El punto de partida y la base principal de nuestro trabajo, ha sido el más general resultado debido a Santaló (Teorema T), sobre la existencia de medida para conjuntos de subespacios lineales del espacio proyectivo S_n .

En él, se da una condición necesaria y suficiente, para la existencia de medida de tales conjuntos, bajo las hipotesis de que 1º, los espacios se definan mediante $n+1$ puntos linealmente independientes y 2º, los subespacios sean, dos a dos, sin puntos comunes.

Despues de una introducción en los nºs 1 - 3, los resultados que presentamos a partir del nº 4, se pueden resumir del modo siguiente:

En el nº 4, se dan expresiones explícitas para la medida cinemática del grupo proyectivo y para dos configuraciones cuyas medidas tenían existencia conocida de acuerdo al Teorema T.

Los resultados del nº 5, se refieren a la transitividad del grupo proyectivo respecto a ciertos elementos geométricos y se establecen al sólo efecto de justificar el estudio posterior de la existencia de medida para esos elementos.

En el nº 6, se establecen condiciones para la existencia de medida de elementos geométricos, pero bajo hipótesis no geométricas, esto es, no dadas en S_n .

Estas condiciones son sin embargo, la base para la caracterización (en nº 7), de los conjuntos de subespacios lineales con medida, bajo la sóla hipótesis de que ellos se pueden definir mediante $n+1$ puntos linealmente independientes. Esta caracterización, contiene como caso particular al resulta-

do de Santaló, ya que prescinde de la 2ª hipótesis del Teorema T. Resulta en particular que dar un conjunto de subespacios para el cual existe medida (aun en el caso en que los subespacios se corten y por lo tanto la configuración no se pueda estudiar con el Teorema T), es "substancialmente" lo mismo que dar una familia de subespacios para la cual Santaló ha previsto medida.

Como una consecuencia de este resultado se da, también en el nº 7, una caracterización total (sin hipótesis alguna) para los pares de subespacios con medida.

En el nº 8, se establecen nuevas condiciones para la existencia de medida de los conjuntos estudiados en el nº 7.

En el nº 9, se estudian conjuntos de $h+2$ puntos ($h+1$ cualesquiera independientes) de un subespacio S_h (que llamamos "los puntos de S_h") y se demuestra que la medida existe si, y sólo si, $h = n$ (medida cinemática).

En el nº 10, se da una generalización de los resultados del nº 9, considerando los puntos de más de un subespacio.

En el nº 11, se da una nueva generalización (en un sentido distinto a la del nº 7) del Teorema T de Santaló, estableciendose que, bajo las mismas hipótesis sobre el conjunto de subespacios, el Teorema T sigue siendo válido cuando en lugar de uno o más subespacios, se consideran los puntos de esos subespacios.

Se calcula la medida para los puntos de un par de rectas en S_3 (de existencia conocida por el nº 10) y para el conjunto (en S_n) de $n+2$ puntos, uno de ellos dependiendo de $h+1$ de los otros. De aqui, como caso particular

$h = n$, se obtiene una nueva expresión para la medida cinemática (ya calculada en el nº 4).

En el nº 12, en base a los resultados de los nºs 7 y 11, se establece un resultado general que contiene como casos particulares a las dos generalizaciones del Teorema T dadas en esos números.

El nº 13 está dedicado a plantear problemas duales de los antes considerados y a estudiar algunas configuraciones sobre las cuales no se pueden establecer resultados por dualidad.

En los nºs 14 y 15 se consideran elementos geométricos H_i (no necesariamente subespacios lineales) contenidos en subespacios S_{h_i} . Bajo las hipótesis del Teorema T y la existencia de medida para el conjunto $\{S_{h_i}\}$, se demuestra que la familia $\{S_{h_i} , H_i \subset S_{h_i}\}$ tiene medida si, y sólo si, cada H_i tiene medida "dentro" de S_{h_i} .

Finalmente, en el nº 16, se demuestra que si un conjunto H tiene medida en el espacio suma de sus puntos, la medida no existe en un espacio de dimensión mayor.-

^ ^ ^ ^ ^ ^ ^ ^ ^ ^ ^