El principio de acción de Fokker en electromagnetismo y gravitación

Schiminovich, Samuel

1962

Tesis presentada para obtener el grado de Doctor en Ciencias Físico-matemáticas de la Universidad de Buenos Aires

UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales

El principio de acción de Fokker

[illegible] en electromagnetismo y gravitación

Samuel [illegible]vich

Resumen de la Tesis presentada para optar al Título de Doctor en Ciencias Fisicomatemáticas

Año 1962

RESUMEN DE LA ACCION DE FOKKER EN ELECTROMAGNETISMO Y GRAVITACION

Se estudia la equivalencia entre las acciones usuales para campos en interacción con sistemas materiales y las correspondientes acciones de Fokker. Se lo hace según este doble propósito: determinar un método matemático que permita pasar de unas a otras, y entonces, determinar a partir de las condiciones necesarias, la relación que existe entre las descripciones que ellos proporcionan del sistema. Se encuentra como solución un simple método de substitución y para la validez del mismo, condiciones que expresan el congelamiento de los grados de libertad de todo campo de radiación libre, la distinta manera de darse las condiciones iniciales del problema y la clausura de nuestro sistema físico, que se considera como una totalidad. Todas estas condiciones están de acuerdo con la filosofía de acción a distancia que acompaña a la formulación de Fokker.

Nuestra investigación conduce a una crítica de las acciones usuales de campo, que no describen adecuadamente un sistema radiante, ya que sus soluciones no la hacen estacionaria. Se establece que la acción definida sobre un dominio no compacto lleva implícitas condiciones naturales de contorno. En el caso de la acción usual para el campo electromagnético ellos excluyen a las soluciones radiativas. La discusión que se efectúa nos lleva a ver a esta acción como incompleta en su descripción del sistema en interacción con el absorbente.

Un intento de completarla por medio de una divergencia espacial sin hacer intervenir nuevos grados de libertad nos lleva a una acción buena para potenciales simétricos que nos permite deducir en seguida la conocida acción de Fokker para partículas cargadas. El mismo procedimiento es insuficiente en el caso de potenciales avanzados o retardados pero da la expresión del frenado de radiación, y una definición para la misma que puede considerarse como fruto de nuestra observación de que la acción usual era incompleta. Se relacionan estas derivaciones con la introducción, por Feynman y Wheeler, de un universo de absorción completa.

Las mismas técnicas nos permiten dar la acción de Fokker para el caso de un sistema material en interacción con el campo gravitatorio hasta la segunda aproximación para movimiento rápido relativista. Una discusión similar a la llevada a cabo para el electromagnetismo permite llegar a un ente similar al tensor campo electromagnético a los efectos de la discusión del problema de las condiciones de contorno de las soluciones o de sus propiedades radiativas. La expresión del mismo es sencilla y se la puede determinar para todos los órdenes de aproximación y se espera pueda ser útil en relación con el problema de la energía y la radiación gravitatoria y en la determinación de la existencia de frenado de radiación.

Como un paso preparatorio previo al ataque de estos problemas, se estudia la influencia que sobre la expresión de la acción de Fokker tienen las diferentes elecciones de un gauge para el campo. Se utiliza como ejemplo preparatorio previo el caso del campo electromagnético llegándose a una expresión en la cual sólo las componentes transversas de la corriente interactúan en forma no instantánea. La derivación hecha desde el punto de vista de la acción de Fokker permite llegar a una expresión análoga para el campo gravitatorio en la aproximación lineal. Se da pues la expresión que corresponde al gauge de radiación en esta teoría, donde las únicas dos variables dinámicas verdaderas del mismo aparecen explícitamente.

En realidad esta expresión en el gauge de radiación, así como la correspondiente acción en el gauge de De Donder pueden ser obtenidas ambas al mismo tiempo, con gran economía de postulados y sin el conocimiento de la acción ni las ecuaciones para el campo gravitatorio.

UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales

El principio de acción de Fokker en electromagnetismo y gravitación

Samuel Schiminovich

Tesis presentada para optar al

Título de Doctor en Ciencias Fisicomatemáticas

Año 1962

INDICE

INTRODUCCION Y PLAN DE TRABAJO.

A principios de esta centuria Schwarzschild,[3] Tetrode[4] y Fokker[5,6] introdujeron el concepto de acción a distancia en la descripción del movimiento de partículas cargadas en interacción con el campo electromagnético, siguiendo con una línea de pensamiento que trataba de revisar críticamente la necesidad de introducir el concepto de campo en la descripción de la Naturaleza. Se encontraron ecuaciones de movimiento en las cuales sólo aparecían explícitamente las variables dinámicas asociadas a las partículas y fué Fokker quien mostró que dichas ecuaciones de movimiento podían derivarse de una acción que se podía escribir en forma simple y sin la introducción de un campo mediador, con grados de libertad propios.

Todos estos intentos, de importancia filosófica y de interpretación obvios, plantearon el problema de establecer la equivalencia entre ambas formulaciones,[11] la de campos usual y la de una acción de tipo Fokker, para todos los fenómenos electromagnéticos. En particular el problema de la descripción del frenado de radiación quedaba abierto como uno de los más difíciles de la teoría clásica de campo. Fué Dirac[8] quien dió una formulación consistente de la misma, que obviaba la aparición de divergencias e incluía la derivación de la fuerza de frenado en forma satisfactoria para partículas cargadas estrictamente puntuales. Quedaba por verse si era posible llegar a un resultado análogo en la formulación de Fokker.

Feynman y Wheeler[10,12] completaron la acción de Fokker con una hipótesis particular sobre la estructura del universo en la cual verificamos tanto las ecuaciones de Maxwell como la existencia de radiación y su frenado: la de que ese universo actúa como un absorbente completo de la radiación. Aún estando mediada la interacción electromagnética por potenciales simétricos encuentran, como efecto neto del absorbente sobre el sistema en consideración, una fuerza igual a la de frenado de radiación obtenida por Dirac.[8,9] En dicho universo no serían distinguibles experimentalmente una formulación de la otra, salvándose así la necesidad de introducir en la acción de Fokker términos ad-hoc para dar cuenta de la reacción de la radiación sobre las partículas cargadas.

En el interesante trabajo de Feynman y Wheeler se hace evidente la importancia que tiene en la discusión de la equivalencia de ambas formulaciones la posición que se tome en el problema de la naturaleza de la radiación.

Por otra parte, ha cobrado interés la formulación de Fokker en la descripción del movimiento de partículas materiales en interacción gravitatoria. En un reciente trabajo de Plebanski y Bazanski[18] se subraya su conveniencia para llegar fácilmente a las ecuaciones de movimiento en la aproximación de Einstein-Infeld-Hoffman[7], en comparación con otros métodos de cálculo más elaborados. En otro reciente trabajo de Plebanski y Bertoti[22] se da la ecuación de movimiento de Fokker hasta el segundo orden de aproximación en el campo gravitatorio, en aproximación rápida, pero no se da la acción de la cual deriva. Esta se halla habitualmente por tanteo y es sólo en el trabajo anteriormente citado que se discute la posibilidad de hallar un método de cálculo a partir de la acción usual de campo, como dato. La discusión no se extiende a la consideración de la equivalencia física de ambas formulaciones o a una comparación de las características peculiares de las mismas, y da un resultado demasiado restrigido según nuestro punto de vista. Se limita la aplicabilidad del método de substitución que ellos han considerado a la situación particular en que las interacciones son instantáneas y no hay efectos de retardo y radiación, con lo que quedaba excluído el ejemplo primigenio de acción de Fokker: el caso electromagnético.

El objeto de nuestro trabajo será precisar la demostración de Plebanski y Bazanski haciendo incapié justamente en la comparación de ambos puntos de vista, el de campos y el de acción a distancia en la interpretación física de los fenómenos. De esta manera quedan establecidos con precisión las condiciones para la existencia de un principio de Fokker equivalente a una formulación de campos y en particular, la deducción del conocido caso de potenciales simétricos para electromagnetismo. Esto se hará en el capítulo I, donde se considerará principalmente y como ejemplo el caso del campo de Maxwell.

En el capítulo III se establecerá igualmente la existencia de un principio de acción de Fokker para el campo gravitatorio. Se da la expresión del mismo hasta el segundo orden de aproximación. Pero la discusión del problema de radiación para este caso es muy complicada y nuestro intento debe forzosamente verse como un primer paso para establecer el camino que conduzca a su consideración más detallada.

En el caso gravitatorio la situación se complica, ya sea por no existir todavía una definición explícita de los verdaderos observables de la teoría, ya sea por la falta de univocidad en la definición de lo que se llamará energía del sistema.[21] Es por este motivo que se hace particularmente interesante encontrar, aunque sea en la aproximación lineal en el campo gravitatorio la acción expresada en términos de las dos variables gauge invariantes del mismo. Nosotros lo hacemos desde el punto de vista de la acción de Fokker en el capítulo IV y, para preparar el camino con un ejemplo bien conocido, deducimos desde ese punto de vista la acción de Fokker para el campo electromagnético en el capítulo II.

El resultado será mucho más interesante para el caso gravitatorio porque allí las transformaciones de gauge tienen sentido aún para las fuentes de los campos, ya que las componentes del tensor simétrico de tensiones-momento-energía también se ven afectadas por las transformaciones de coordenadas. Los resultados de este capítulo IV serán preparatorios no sólo para una discusión más accesible del problema de radiación y de energía gravitatoria y de formulación en términos de verdaderos observables, sino también para una discusión más cómoda de la naturaleza de las singularidades y sus movimientos.

NOTACION

Aclaramos aquí algunas de las convenciones de notación que usamos en el texto.

^{7} Un número sobre el texto indicará nota bibliográfica.

x cuadrivector posición.

$\underset{\sim}{x}$ vector posición en el espacio tridimensional.

$\mu, \nu, \kappa, \lambda,$ son índices griegos que toman valores 0,1,2,3.

$i, j, r, s,$ son índices latinos que toman valores 1,2,3. El índice r indicará ocasionalmente, según se indica, la dirección radial. La convención de suma ordinaria se usa para todos los índices repetidos y se suspende, según se indica, desde ecuación (22) del capítulo III hasta el fin de dicho capítulo.

$\dot{a}_\mu, \dot{T}_{or}$ un punto sobre un símbolo indicará derivada respecto a un parámetro, el tiempo propio o el tiempo ordinario, según se indique.

$\overset{1}{h}_{\mu\nu}, \overset{1+2}{\mathcal{L}}$ indica término del orden indicado en una expansión en potencias de $\overset{1}{\kappa}$, la constante de acoplamiento gravitatoria. La suma de índices indica que se tomará la suma de los respectivos términos hasta lograrse una expresión exacta hasta el orden indicado por el mayor índice.

Σ hipersuperficie producto topológico de una superficie esférica tridimensional en reposo por un segmento de tiempo $t_0 \leq t \leq t_1$.

$\oint_\Sigma^\mu d^3S$ integral extendida sobre toda la superficie Σ de elemento de superficie d^3S y normal n^μ.

D es una función de Green genérica de la ecuación de las ondas.

D^R es la función de Green retardada, D^A la avanzada, D^S la simétrica.

S indica acción, S_F acción de Fokker, S^B acción buena.

En este parágrafo estableceremos un método general por el cual es posible llegar a una acción de Fokker a partir del conocimiento de la acción usual para un sistema material en interacción con un campo. Es decir, suponemos dada

$$S = S_c + S_I + S_M = \int_{\mathcal{D}} d^4x \left[\mathcal{L}_c(\psi) + \mathcal{L}_I(\psi, \xi) + \mathcal{L}_M(\xi) \right] \qquad (1)$$

donde $\mathcal{D}$ es el dominio de espacio tiempo donde está definida la acción, $\mathcal{L}_c(\psi)$ es la densidad lagrangiana correspondiente a la acción del campo libre S_c, función de las variables dinámicas ψ del campo y de sus derivadas primeras; $\mathcal{L}_M(\xi)$ es la densidad lagrangiana correspondiente a la acción del campo material libre S_M, función de las variables dinámicas ξ y de sus derivadas primeras y finalmente $\mathcal{L}_I(\psi, \xi)$ es la densidad lagrangiana de la acción de interacción S_I, función de todas las variables dinámicas introducidas.

Esto significa que conocemos las ecuaciones de movimiento del sistema material

$$\frac{\delta \mathcal{L}_M}{\delta \xi} + \frac{\delta \mathcal{L}_I}{\delta \xi} = 0 \qquad (2)$$

obtenidas al variar (1) respecto á ξ, y donde se indica con el símbolo $\delta/\delta\xi$ la derivada variacional definida como

$$\frac{\delta \mathcal{L}(\xi; \xi_{,\mu}; \ldots)}{\delta \xi} \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \xi} - \frac{\partial}{\partial x_\mu}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \xi_{,\mu}} \right) \qquad (3)$$

Llamaremos al primer término de la (2) el término inercial y al segundo el término de fuerza de la ecuación de movimiento.

Por otra parte, las ecuaciones de movimiento del campo ψ serán

$$\frac{\delta \mathcal{L}_c}{\delta \psi} + \frac{\delta \mathcal{L}_I}{\delta \psi} = 0 \qquad (4)$$

y tendrán una solución $\psi[\xi]$ que depende paramétricamente de los ξ. Con referencia a una discusión que haremos más adelante, queremos subrayar que (4) es sólo una condición necesaria para las soluciones, las cuales además deben cumplir ciertas condiciones de contorno, Nosotros adoptaremos luego el temperamento de considerar a

$$\frac{\delta S}{\delta \psi} = 0 \qquad (5)$$

como condición necesaria y suficiente, esto es, exigiremos que las soluciones hagan estacionaria a la acción que hemos escrito para describir a nuestro sistema.

Si substituímos la solución $\psi[\xi]$ en (2) obtendremos ecuaciones para las en las cuales no figuran más las ψ. Estas ecuaciones de movimiento se llaman de Fokker e interesa determinar si son derivables de alguna acción, y en tal caso dar dicha acción de Fokker explícitamente. En ésta sólo figurarán explícitamente las ξ.

Es natural ensayar la substitución de ψ por su solución $\psi[\xi]$ directamente en la acción. Dicho procedimiento, que llamaremos método de substitución ya ha sido considerado por Plebanski y Bazanski,[18] quienes llegan a la conclusión de que no siempre da el resultado requerido, a lo que los autores llaman una "buena acción de Fokker".

Nosotros en cambio deseamos mostrar que dicho método de substitución da lugar a una buena acción de Fokker cuando la acción original era una "buena acción de campo" en el sentido de que la solución $\psi[\xi]$ la hace realmente estacionaria, o sea satisface (5). Las dificultades halladas por los citados autores o bien tienen ya su origen en la acción de campo o bien están motivadas por un cambio de filosofía sobre la naturaleza de la interacción física al pasarse de uno a otro tipo de acción. No debe olvidarse que una descripción del sistema por medio de una acción de Fokker corresponde a la filosofía de acción a la distancia por la cual quedan eliminados los campos de "radiación libre" que matemáticamente corresponden a soluciones de la ecuación homogénea para los campos.

Para probar nuestro aserto substituiremos $\psi[\xi]$ en (1) y variaremos respecto a ξ :

$$\frac{\delta S}{\delta \xi} = \frac{\delta S_c(\psi[\xi])}{\delta \psi^*} + \frac{\delta S_I(\psi[\xi],\xi)}{\delta \psi^*} + \frac{\delta S_I(\psi[\xi],\xi)}{\delta(\xi)} + \frac{\delta S_M(\xi)}{\delta \xi} \quad (6)$$

donde $\delta/\delta\xi$ aplicado a S significa variación de la funcional respecto de ξ y $\delta/\delta\xi$ significa variación respecto delos ξ que aparecen explícitos en la acción original y no por efecto de la substitución y $\delta/\delta\psi^*$ simboliza variación debida a $\delta\psi^*$ que es

$$\delta\psi^* = \int_{\mathfrak{D}} d^4x \, \frac{\delta\psi[\xi]}{\delta\xi} \, \delta\xi(x) \quad (7)$$

Los dos últimos términos dan las ecuaciones de movimiento de Fokker si las variaciones son arbitrarias excepto en que deben anularse en los bordes del dominio $\mathfrak{D}$, y si la suma de los dos primeros es cero. Esto último demostraría nuestra proposición y efectivamente sabemos que $\psi[\xi]$ hace estacionaria la variación de los dos primeros términos para variaciones de ψ permitidas.

Debemos demostrar entonces que $\delta\psi^*$ es una variación de primer orden permitida. Para ello supondremos dos cosas:1º) que la variación inducida por ξ se propaga con velocidad no nula. Por ejemplo, en el caso de corresponder ψ al campo electromagnético, $\delta\psi^*$ se propaga según los conos de luz. 2º) que la variación $\delta\xi$ se realiza en un intervalo de tiempo finito.

Ahora tomaremos a $\mathfrak{D}$, el dominio donde está definida nuestra acción como limitado por dos hipersuperficies de tipo espacial Σ_0 y Σ_1, dadas por las ecuaciones $t=t_0$ y $t=t_1$ y por una tercera hipersuperficie Σ que es el producto topológico de una esfera de radio R, en reposo en nuestro sistema de coordenadas, y el segmento temporal $t-t_0$, con lo cual no restringimos la generalidad de nuestros argumentos. En estas condiciones, $\delta\psi^*$ será una variación permitida, es decir que se anula en Σ_0 y Σ_1, si se verifica para $\mathfrak{D}$ que ninguna variación inducida por $\delta\xi$ pueda alcanzar a Σ_0 ó Σ_1. Se podrá encontrar un dominio que cumpla con estas condiciones si el intervalo de tiempo para el cual $\delta\xi \neq 0$ es finito y si las coordenadas del sistema material permanecen especialmente acotadas. De esta manera, habrá variaciones $\delta\psi^*$ inducidas sobre la superficie Σ por variaciones de primer orden $\delta\xi$, pero nosotros consideramos dichas variaciones como permitidas según se discute en detalle en el próximo parágrafo. Pero queremos indicar aquí cual es el sentido que tiene la restricción impuesta sobre $\mathfrak{D}$ para hacer válida nuestra demostración.

La imposición sobre $\delta\psi$ de anularse sobre Σ_0 y Σ_1 expresa el hecho de que nuestra solución ψ debe tomar valores prefijados por las condiciones iniciales sobre esas hipersuperficies. Con nuestra elección del dominio $\mathfrak{D}$ eliminamos éfectivamente toda la influencia que sobre nuestro sistema material puedan tener dichas condiciones iniciales, puesto que al propagarse nunca alcanzan al sistema en un punto de interés, es decir donde las variaciones son distintas de cero. En cambio, para la confrontación que se hace al determinar el caracter estacionario de la solución, son importantes las interacciones con <u>todos</u> los elementos del sistema material y las condiciones de contorno en el infinito, Ambas estan preservadas al mantener nuestras condiciones sobre $\mathfrak{D}$ en el pasaje al límite en que R tiende a infinito.

Pero esta situación corresponde justamente a la filosofía de la acción a distancia que acompaña a la formulación de Fokker, en la cual interesan las interacciones mutuas del sistema material, que constituye un sistema total y cerrado, y para la cual sería inadmisible una interacción con un campo libre que pudiese estar involucrado en las condiciones iniciales, arbitrariamente impuestas para el campo en una hipersuperficie espacial.

Llamaremos, en adelante, a todo dominio $\mathfrak{D}$ que satisface las restricciones dadas más arriba, un "dominio de integración bueno". Restringiéndonos a dichos dominios tenemos que toda acción de campo buena da lugar por el método de substitución a una buena acción de Fokker.

LAS ACCIONES DE CAMPO DEFINIDAS EN DOMINIOS NO COMPACTOS

a) Las condiciones de Contorno en el Infinito

Ahora pasaremos a discutir con el ejemplo del campo electromagnético la siguiente cuestión general: Si una acción definida en un dominio no compacto es buena para toda solución que satisfaga a las ecuaciones de movimiento que se derivan de la misma.

En el parágrafo anterior hemos indicado que dichas ecuaciones forman en general un conjunto de condiciones necesarias que deben satisfacer las soluciones. Si además éstas hacen estacionaria a la acción sólo si cumplen con ciertas condiciones adicionales, de contorno por ejemplo, tendremos que la acción sólo será buena, por definición, para dichas soluciones y que en realidad las ecuaciones de movimiento no son la única información contenida en el principio variacional.

La acción correspondiente a un sistema material cargado en interacción con el campo electromagnético se escribe

$$S = \int_{\mathcal{D}} d^4x \, (F_{\mu\nu} F_{\mu\nu} + A_\mu j_\mu) + S_M$$

donde $F_{\mu\nu} = A_{\mu,\nu} - A_{\nu,\mu}$ es el campo electromagnético expresado en términos del potencial vectorial A_μ y j_μ es el cuadrivector corriente que depende de las variables dinámicas que intervienen en S_M, la acción correspondiente al sistema material libre. $\mathcal{D}$ es el dominio de definición de la acción, que es notoriamente no compacto, ya que tiene la topología del espacio euclídeo de cuatro dimensiones.

La variación de (8) respecto de A_μ resulta en

$$\delta S = \int_{\lim \mathcal{D}' \to \mathcal{D}^0} d^4x \, \delta A^\mu \left(-A_{\mu,\nu\nu} + A_{\nu,\mu\nu} + j_\mu\right) + \oint_{\Sigma \atop \lim R \Rightarrow \infty}^{\nu} d^3s \, \delta A_\mu \left(A_{\mu,\nu} - A_{\nu,\mu}\right) = 0$$

donde $\mathcal{D}^0$ es una faja de $\mathcal{D}$ limitada por los hiperplanos $t = t_0$ y $t = t_1$ donde se dan las condiciones iniciales para los campos, Σ es una hipersuperficie que es el producto topológico de una superficie esférica, de radio R y en reposo en nuestro sistema de coordenadas, por el segmento temporal $t_1 - t_0$; $\mathfrak{D}'$ es la parte de $\mathfrak{D}^0$ interior y limitada por Σ y se considera el límite de la expresión para $R \to \infty$ por la naturaleza no compacta de $\mathfrak{D}$.

Como las variaciones son arbitrarias excepto que deben anularse para t_0 y t_1, cosa que hemos tenido ya en cuenta en (9), pueden tomarse en particular como nulas sobre Σ . Se deduce entonces de la (9)

$$A_{\mu,\nu\nu} = j_\mu \quad . \tag{10}$$

Si se impone el gauge de Lorentz

$$A_{\mu,\mu} = 0 , \tag{11}$$

Porque debe satisfacerse la ecuación de movimiento (10) para todo punto de $\mathfrak{D}'$, tenemos que

$$\underset{\lim R \Rightarrow \infty}{\oint_\Sigma^\nu} d^3s\, \delta A_\mu (A_{\mu,\nu} - A_{\nu,\mu}) = \underset{\lim R \Rightarrow \infty}{\int dt \int_\Sigma} R^2 d\Omega\, \delta A_\mu F_{\mu r} \tag{12}$$

donde $F_{\mu r}$ indica la componente radial de $\vec{E}$ para F_{4r} y las componentes tangenciales de $\vec{H}$ para F_{ir} .

Es costumbre hacer las variaciones δA_μ nulas sobre Σ lo cual nos parece susceptible de críticas. En efecto, las variaciones deben anularse sólo para los puntos en que las variables toman valores prefijados, pero no en los puntos para los cuales se debe hallar la solución, puesto que la razón de ser de la acción es justamente ser variada para comparar dicha solución con funciones próximas. Con todo, hacer a las δA_μ completamente arbitrarias puede resultar demasiado fuerte, puesto que podemos exigir a las soluciones cierto comportamiento asintótico y entonces no resultar las variaciones de primer orden respecto a la solución para R suficientemente grande. Nosotros adheriremos al siguiente criterio:

Las variaciones de las variables dinámicas que describen nuestro campo serán arbitrarias excepto que se anularán donde dichas varia bles dinámicas tomen valores prefijados, ya sea de contorno o de valor inicial n un problema de Cauchy y viceversa. Por otra parte cuando las soluciones sean constreñidas a cumplir con cierto comportamiento asintótico las variaciones también lo cumplirán y a la inversa, cuando las variaciones lo hagan sólo podrán sacarse conclusiones válidas para soluciones que presentan dicho comportamiento.

Con este criterio resulta de la (12) que es incompatible la introducción de un $F_{\mu\nu}$ correspondiente a una solución radiativa de nuestro problema. Los potenciales se comportarán como $\frac{1}{r}$ y de la misma manera las variaciones de los mismos. En ese caso, para que (12) se anule para δA_μ por otra parte arbitrario, será necesario que $F_{\mu r}$ tienda a cero más rápido que $\frac{1}{r}$. Pero es notorio que para una solución radiativa $F_{\mu r}$ se comporta como $\frac{1}{r}$, con le cual se llega a la conclusión de que dicha solución no hace estacionaria a la acción.

Vemos pues que la acción (8) no sólo determina las ecuacions de movimiento para nuestro campo sino que también pone restricciones en el comportamiento asintótico de las soluciones. En particular, para un sistema de coordenadas polares con origen en un punto accesible de nuestro sistema, con cuya elección no se restringe la generalidad de nuestros argumentos, resulta que sobre una superficie esférica de radio R $\to \infty$ se debe verificar la condición de contorno

$$\lim_{R \to \infty} R\, F_{\mu\nu} \to 0 \qquad (13)$$

que llamaremos condición de contorno natural de la acción (12). Tenemos pues que la elección de soluciones a partir de potenciales retardados, o para estos efectos, simétricos o avanzados, en base a consideraciones físicas es no sólo arbitraria sino incorrecta si se toma a la acción (12) como dándonos una descripción completa de nuestro sistema físico. En efecto, ninguna de estas soluciones radiativas es compatible con las condiciones de contorno naturales, excepto en el caso particular de tenerse una sóla partícula cargada en movimiento uniforme.

Como primer paso para resolver este problema se debería estudiar la posible existencia de soluciones físicamente satisfactorias que satisfaciesen (13), sin restringirse en la construcción de los potenciales a emplear puramente funciones de Green retardadas, sino mezclando las distintas funciones de Green entre sí y con soluciones de la homogénea de manera de modificar el movimiento de las partículas cargadas y el comportamiento de los campos para satisfacer la condición de contorno natural.

Argumentos de orden físico permiten esperar soluciones estacionarias en las cuales el sistema no pierda energía, puesto que (13) implica una componente radial nula para el vector de Poynting. Sin embargo la solución estacionaria para dos partículas cargadas en interacción con potenciales simétricos no anularía a (12) porque para ella el vector de Poynting sólo se anula en el promedio temporal, o en tiempos múltiples del período del sistema. Dicha solución satisfaría (12) si los δA_μ se restringen a ser constantes en intervalos de tiempo múltiplos del período del sistema.

Nada diremos aquí sobre la posible existencia de soluciones que satisfagan las condiciones de contorno naturales de (8). Se dejará abierta la cuestión y se indica sólo la posible solución del problema por este camino.

Otra posibilidad, encontrada por Feynman y Wheeler[10,12] por otro camino, es la de suponer que nuestro sistema tiene una estructura tal que hace compatible con la solución del problema la condición de contorno siguiente

$$F^{S}_{\mu\nu} \equiv \frac{1}{2}\left(F^{A}_{\mu\nu} + F^{R}_{\mu\nu}\right) \qquad \text{para} \quad r > R_0 \qquad (14)$$

donde $F_{\mu\nu}$ es el campo debido a todas las partículas de nuestro sistema o universo y R_0 es fijo. Un universo de este tipo será llamado de absorción completa o universo de Feynman-Wheeler. Para él se tendrá que

$$F_{\mu\nu}^{A} = F_{\mu\nu}^{R} = 0 , \quad para \quad r > R_o , \qquad (15)$$

dado que las ondas salientes y entrantes que representan sólo pueden cancelarse por interferencia para todo punto y todo tiempo si a su vez ellas son cero. Pero entonces se deduce

$$\frac{1}{2}\left(F_{\mu\nu}^{A} - F_{\mu\nu}^{R}\right) = 0 \qquad (16)$$

para todo punto puesto que (16) es una solución de la homogénea que tiene condición de contorno nula para cierto $r > R_o$, y por lo tanto debe ser idénticamente nula. De todo lo cual concluímos que para un universo de Feynman-Wheeler se verifica $F^R = F^A = F^S$. Además, por (15) las condiciones de contorno naturales son satisfechas.

Es notoria la relación que tiene el problema de las condiciones de contorno en el infinito con el problema de la radiación y con la inclusión de integrales superficiales en la definición de nuestra acción. Antes de entrar en más detalles, discutiremos otra fuente de no compacidad para el dominio de definición de la acción de un campo.

b) <u>El Caso de Líneas de Universo Singulares</u>

Del dominio $\mathfrak{D}^o$ de definición de la acción pueden excluírse ciertas líneas de universo[13] donde se deja sin definir la acción por hacerse singulares los campos en dichos puntos. El dominio $\mathfrak{D}^*$ que resulta al excluirse todas esas líneas singulares es no compacto, no sólo en el infinito sino a lo largo de las mismas, formadas por puntos de acumulación de $\mathfrak{D}^*$.

Estas líneas singulares se usan frecuentemente como descripción de las singularidades materiales puntuales y si suponemos que todo nuestro sistema está constituído por partículas de ese tipo, podemos ensayar el estudio de una acción.

$$S^c = \int_{\mathfrak{D}^*} d^4x \left\{ A_{\mu,\nu} A_{\mu,\nu} - A_{\mu,\nu} A_{\nu,\mu} \right\} \qquad (17)$$

definida sólo para el campo electromagnético que existe en $\mathfrak{D}^*$, para ver cuanto queda determinado del movimiento de dichas singularidades.

Supenemos que no existen otras corrientes fuera de los dominios singulares y llamamos a una acción de este tipo acción *c*.

La variación de (17) resultará en

$$\delta S^c = \int_{\mathcal{E}' \Rightarrow \mathcal{D}^*} d^4x\, \delta A_\mu \left\{ -A_{\mu,\nu\nu} + A_{\nu,\mu\nu} \right\} + \oint_{\substack{\Sigma \\ \lim R \to \infty}} {}^{\nu} d^3s\, \delta A_\mu F_{\mu\nu} + \oint_{\substack{\Sigma^* \\ \lim r \to 0}} {}^{\nu} d^3s\, \delta A_\mu^* F_{\mu\nu} \qquad (18)$$

donde la segunda integral superficial es idéntica a la discutida más arriba y la tercera está definida sobre una hipersuperficie Σ^* que limita a D'formando un tubo alrededor de las líneas singulares y que en el paso al límite se cierra sobre las mismas. Sin restringir la generalidad de nuestros argumentos podemos elegir para Σ^* el producto topológico de superficies esféricas de dos dimensiones con centro en los sucesivos puntos de cada una de las líneas singulares por las respectivas líneas de universo, de tipo temporal. El radio de las esferas r es un vector espacial ortogonal a las trayectorias singulares y se hace tender a cero en el proceso límite.

La ecuación de movimiento resulta ser $A_{\mu,\nu\nu} = 0$ para todo punto de $\mathcal{D}^*$, pero ello no excluye un comportamiento singular en los puntos excluídos. De hecho, ese comportamiento singular puede tomarse como una condición de contorno y si nos limitamos a singularidades polares, esa condición de contorno está definida por una función $j_\mu(\tau^{(a)})$ a lo largo de las líneas de universo, donde $\tau^{(a)}$ es el tiempo propio de la a-ésima singularidad, y el comportamiento de la solución es

$$A_\mu^*(x) \underset{\lim r \to 0}{\longrightarrow} \frac{j_\mu(\tau^{(a)})}{r} \quad ; \quad A_{\mu,\nu\nu} = 0 \ \text{ en } \mathcal{D}^* \qquad (19)$$

Este comportamiento es el de la solución de la ecuación definida en todo el espacio:

$$A_{\mu,\nu\nu} = \sum_a j_\mu(\tau^{(a)})\, \delta\left(x - \xi^{(a)}\right) \qquad (20)$$

donde $\xi^{(a)}$ son las coordenadas de la trayectoria singular *a*.

Nos preguntamos ahora que restricciones pueden resultar de la S^c para las $j_\mu(\tau^{(a)})$. Para ello debemos evaluar

$$\oint^{\nu}_{\Sigma^*} d^3s\, \delta A^*_\mu F_{\mu\nu} = 0 \qquad (21)$$
$$\lim r \to 0$$

para $F_{\mu\nu}$ definido por las soluciones correspondientes. Podemos usar (20) y el recurso formal de las funciones δ de Dirac para extender el dominio de definición de la acción al volumen $\mathfrak{D}^s$ situado dentro de la hipersuperficie Σ^*. Por el teorema de Gauss:

$$\oint^{\nu}_{\Sigma^*} d^3s\, \delta A^*_{\mu} F_{\mu\nu} = -\int_{\mathfrak{D}^s} d^4x\, \delta A^*_{\mu,\nu} F_{\mu\nu} - \int_{\mathfrak{D}^s} d^4x\, \delta A^*_\mu F_{\mu\nu,\nu} \qquad (22)$$

Si suponemos que $\delta A^*_{\mu,\nu}$ no tiene ninguna singularidad de tipo δ, lo cual es una restricción lógica, resulta que en el límite de volumen nu lo sólo sobrevive la segunda integral, que en virtud de la ecuación (20) es

$$-\oint^{\nu}_{\Sigma^*} d^3s\, \delta A^*_\mu F_{\mu\nu} = -\sum_a \int d\tau_{(a)}\, \delta A^*_\mu(\xi^{(a)})\, j_\mu(\tau^{(a)}) = 0 \qquad (23)$$
$$\lim r \to 0$$

lo cual requiere $j_\mu(\tau^{(a)}) = 0$. En otros términos, la solución que hace estacionaria a la S^c no debe tener singularidades y si tenemos en cuenta las condiciones de contorno naturales en el infinito debe ser la solución nula.

Esta situación es satisfactoria si tenemos en cuenta que toda singularidad significaría un intercambio de energía que de esta manera no se mantendría constante para el sistema considerado, es decir para el campo electromagnético exclusivamente. Este hecho está ligado con el de que la solución singular no haga estacionaria a la acción, pues si lo hiciese, estarían satisfechas todas las condiciones del teorema de Noether que aseguraría justamente la conservación del impulso y energía

El procedimiento usual y normal en el caso de quererse las singularidades, es el de agregar a la acción S^c un término corrector que compense al término (23). Ese término será el de interacción usual, con el cual la ecuación de movimiento resulta ser la (20) y la acción esta cionaria para variaciones a partir de una solución singular (19). Vemos que la acción $\underline{S}$ determina la forma del término de interacción a ser tal que su variación respecto a A_μ sea justamente

$$\delta S_I(A,\xi) = \int d^4x\, \delta A_\mu\, j_\mu(x) \qquad , \qquad (24)$$

con $$j_\mu(x) = \sum_a \int d\tau^{(a)}\, j_\mu(\xi^{(a)})\, \delta(x-\xi^{(a)}) \qquad (25)$$

Tomando la cuadridivergencia de la ecuación (20) y recordando que se satisface la condición de Lorentz $A_{\mu,\mu}=0$ se tiene además la siguiente restricción sobre la $j_\mu(x)$:

$$\frac{\partial j_\mu(x)}{\partial x_\mu} = 0 \qquad (26)$$

que es la ecuación de continuidad de la corriente.

Además se puede agregar a la acción S^c un término independiente de los A_μ que da el desenvolvimiento dinámico de los ξ_μ que intervienen en la expresión $j_\mu(x)$. Este S_M describe la dinámica de las estructuras singulares libres, es decir sin interacción electromagnética.

El presente ejemplo de acción $\underline{S}$ lo hemos desarrollado por su valor heurístico, para mostrar en una situación familiar la naturaleza de la incompletitud de la acción definida en un dominio no compacto, y como es que se completa usualmente la descripción del sistema para dar la interacción con un sistema material foráneo. Parte de dicha descripción ya estaba dada por la integral superficial, pero no se habían introducido nuevos grados de libertad para el nuevo sistema. Trataremos ahora de llevar esta imágen a la discusión de la situación análoga, con las integrales superficiales en el infinito.

EL PROBLEMA DE LA RADIACION

Las consideraciones del parágrafo anterior nos han mostrado que la acción ~~xxxx~~ $\underline{S}$ no es una buena acción para soluciones singulares y que era incompleta porque justamente adolecía de la falta de descripción de la interacción entre el campo y las corrientes. De la misma manera, queremos extender este punto de vista a considerar que las acciones de campo usuales no son buenas para soluciones radiativas por faltarles una descripción adecuada de la interacción del sistema con el absorbente. En efecto, por sí solas determinan condiciones de contorno naturales que excluyen la posibilidad de soluciones radiativas.

Así como no debíamos ver el intercambio de energía con las trayectorias singulares como mediada con un misterioso agente localizado en las mismas, es de esperar que el fenómeno de radiación en esta imágen no sea meramente un intercambio de energía con un misterioso agente colocado en el infinito, sino una interacción descripta en términos físicos con un absorbente que posee sus propios grados de libertad. Esta filosofía es particularmente apropiada para el punto de vista de acción a la distancia, que acompaña generalmente a una formulación de Fokker. No obstante, déjesenos pasar revista, aún a riesgo de repetirnos, a distintas posiciones que se pueden tomar en este delicado problema.

1º) Una primera posición sería la siguiente: considérense sólo procesos de duración finita y tómese la hipersuperficie Σ tan lejos, o las Σ_0 y Σ_1 tan cerca como para que ninguna radiación del sistema pueda alcanzar a Σ. Esta elección del dominio $\mathfrak{D}^\circ$ es opuesta a la que hemos hecho nosotros para dominios buenos, es decir que permitían una comparación con la acción de Fokker por el método de substitución. La solución del problema queda determinada más bien por los datos iniciales en Σ_0 y Σ_1 que por la naturaleza [redacted] del sistema como totalidad. En dichos datos iniciales puede estar involucrado un campo de radiación libre. En ninguno de los puntos siguientes se hará esta elección para $\mathfrak{D}^\circ$ y nuestro sistema.

2º) Se puede suponer que el universo es de Feynman-Wheeler[10], o sea que posee una estructura tal que ningún campo de radiación llega a alcanzar a Σ. Entonces se tendrá $\overset{c}{F}{}^{A}_{\mu\nu} = F^{R}_{\mu\nu} = F^{S}_{\mu\nu}$ para el campo total en todas partes, solución cero para la homogénea y no habrá problemas con ninguna integral superficial. El absorbente está formado por el mismo universo y sus grados de libertad son los de todas las partículas del mismo, o bien se lo deja sin especificar y no se da ninguna descripción dinámica detallada del mismo, pero siempre el supuesto fundamental es el de absorción completa. Queda por determinarse la posible realización de un sistema como el que se pide.

3º) Aceptando a la acción (8) como a la que describe nuestro sistema, están fijadas para las soluciones las condiciones naturales de contorno discutidas más arriba. Queda por determinarse la existencia de soluciones de valor físico y la forma como aparecen las soluciones retardadas que nos da la experiencia. Además las condiciones bajo las cuales se presenta el fenómeno de lo que llamamos radiación.

4º) Podemos tratar de suplementar la acción (8) con integrales superficiales que modifiquen las condiciones de contorno. Entonces, en lugar de suponer las partículas del absorbente, que forman el universo de fondo, como incluídas entre las singularidades de nuestro sistema tal como lo hemos propuesto en el punto 2, consideramos que es la integral superficial la que da una descripción idealizada del absorbente. A continuación discutiremos un caso particular de acción (8) completada.

LA ACCION DE FOKKER PARA EL CAMPO ELECTROMAGNETICO

Si buscamos completar la acción (8) con una integral superficial formada exclusivamente por expresiones en A_μ y sus derivadas primeras y tal que cancele el efecto restrictivo que (12) tiene sobre las soluciones radiativas, resulta la siguiente expresión en forma natural y quizás única:

$$S^{B} = \int_{D'} d^4x \left[A_{\mu,\nu} A_{\mu,\nu} - A_{\mu,\nu} A_{\nu,\mu} + A_\mu j_\mu\right] - \oint_{\Sigma}^{\nu} d^3s\, A_\mu \left(A_{\mu,\nu} - A_{\nu,\mu}\right) + S_M \qquad (27)$$

Si no transformamos la integral superficial en integral de volumen antes de variar la acción S^B, no modificaremos las ecuaciones de movimiento, ya que estas se obtienen haciendo las variaciones nulas sobre Σ. La variación de (27) si suponemos que se satisfacen dichas ecuaciones de movimiento resulta entonces

$$2 \oint_{\Sigma}^{\nu} d^3s\, \delta A_\mu F_{\mu\nu} - \oint_{\Sigma}^{\nu} \delta A_\mu F_{\mu\nu}\, d^3s - \oint_{\Sigma}^{\nu} d^3s\, A_\mu \delta F_{\mu\nu} = 0 \qquad (28)$$

o sea:

$$\oint_{\Sigma}^{\nu} d^3S\,[\delta A_\mu F_{\mu\nu} - A_\mu \delta F_{\mu\nu}] = \oint_{\Sigma}^{\nu} d^3S\,\delta A_\mu F_{\mu\nu} - \int_{D'} d^4x\, A_{\mu,\nu}\delta A_{\mu,\nu} + \int_{D'} d^4x\, A_{\mu,\nu}\delta A_{\nu,\mu} -$$

$$- \int_{D'} d^4x\, A_\mu\, \delta F_{\mu\nu,\nu} = \int_{D'} d^4x\,[\delta A_\mu F_{\mu\nu,\nu} - A_\mu \delta F_{\mu\nu,\nu}] = 0 \qquad (29)$$

donde se ha tenido en cuenta $A_{\mu,\mu} = 0$. No se obtiene nada más que las condiciones naturales de contorno si no se hace esta importante restricción sobre los δA_μ :

Las variaciones δA_μ son de la forma

$$\delta A_\mu(x) = \int d^4x'\, D(x-x')\, (\delta A_\mu)_{,\nu\nu} \quad ; \quad (\delta A_\mu)_{,\mu} = 0 \qquad (30)$$

con $(\delta A_\mu)_{,\nu\nu}$ arbitraria y D una función determinada de Green (D^A, D^R o D^S) Físicamente significa que se pueden variar arbitrariamente las corrientes, de hecho aún crearlas donde no existían aún y por ello estas δA_μ son equivalentes a las δA_μ^* inducidas por una variación de las variables dinámicas del sistema material. Por ello esta restricción constituye una transición natural a la Acción de Fokker y además significa que se elige un modo particular de propagación de las perturbaciones y que se eliminan los grados de libertad correspondientes al campo libre de la radiación. Con la elección (30) la integral de volumen de la (29) pasa a ser:

$$\iint dx\,dx'\,\left[(\delta A_\mu(x))_{,\nu\nu}\, D(x-x')\, A_{\mu,\lambda\lambda}(x') - A_{\mu,\lambda\lambda}(x)\, D(x-x')\, (\delta A_\mu(x'))_{,\nu\nu}\right] =$$

$$= \int d^4x \int d^4x'\, A_{\mu,\nu\nu}(x)\, (\delta A_\mu(x'))_{,\lambda\lambda}\, [D(x-x') - D(x'-x)] = 0 \qquad (31)$$

Tenemos que una condición necesaria y suficiente para que se satisfaga (31) es que D sea la función de Green simétrica con lo que alcanzamos el importante resultado siguiente: La acción S^B es una buena acción para el caso de emplearse potenciales simétricos y excluírse solu ciones de la homogénea y dará lugar por el método de substitución a una buena acción de Fokker para el campo electromagnético, o mejor, para el sistema físico descripto por la acción (27). Dicha acción será:

$$S^F = \int d^4x \int d^4x' \, j_\mu(x) \, D^s(x-x') \, j_\mu(x') + S_M \qquad (32)$$

Hallaremos la expresión de la fuerza variando el término de interacción respecto a las variables dinámicas ξ_μ que describen al sistema material. Introduciremos para ello una notación abreviada que usaremos más adelante:

$$\delta \int d^4x \int d^4x' \, j(x) \, D^s(x-x') \, j(x') = 2 \int d^4x \int d^4x' \, j(x) \, \delta j(x') \, D^s(x-x') \qquad (33)$$

donde

$$\delta j_\mu(x) = \frac{\delta j_\mu(x)}{\delta \xi_\nu} \delta \xi_\nu \equiv \sum_a \int d\tau^{(a)} \left(\frac{\partial j_\mu(x)}{\partial \xi_\nu^{(a)}} - \frac{d}{d\tau^{(a)}} \frac{\partial j_\mu(x)}{\partial \dot{\xi}_\nu^{(a)}} \right) \delta \xi_\nu^{(a)} \; ; \; \dot{\xi}_\nu^{(a)} \equiv \frac{\partial \xi_\nu^{(a)}}{d\tau} \qquad (34)$$

Se compurebа que (33) dará el resultado apetecido siempre que j sea de la forma $\delta^4(x-\xi)$ por una función de ξ_μ, $\dot{\xi}_\mu$, etc. Por ejemplo, en el caso de singularidades puntuales monopolares, el modelo más sencillo para la corriente que satisface la ecuación de continuidad es:

$$j_\mu(x) = \sum_a e_a \int d\tau_a \, \dot{\xi}_\mu^{(a)} \, \delta^4(x - \xi^{(a)})$$

con lo cual (33) pasa a ser

$$\delta \sum_a \sum_b e_a e_b \int d\tau_a \int d\tau_b \, \dot{\xi}_\mu^{(a)} D^s(\xi^{(a)} - \xi^{(b)}) \, \dot{\xi}_\mu^{(b)} =$$

$$= 2 \sum_a \sum_b e_a e_b \int d\tau_a \int d\tau_b \left\{ \dot{\xi}_\mu^{(a)} D^s_{,\nu}(\xi^{(a)} - \xi^{(b)}) \dot{\xi}_\mu^{(b)} \delta \xi_\nu^{(b)} - \dot{\xi}_\mu^{(b)} D^s_{,\mu}(\xi^{(a)} - \xi^{(b)}) \dot{\xi}_\nu^{(a)} \delta \xi_\nu^{(b)} \right\}$$

$$= 2 \sum_b e_b \int d\tau_b \, \delta \xi_\nu^{(b)} \, F^s_{\mu\nu}(\xi^{(b)}) \, \dot{\xi}_\mu^{(b)}$$

o sea que la fuerza es efectivamente $j_\mu(x) \, F_{\mu\nu}(x)$.

Ahora será interesante estudiar que sucede para soluciones avanzadas o retardadas de los potenciales. Para ninguna de ellas es estacionaria la acción (27) ya que (31) no se anula. Podemos observar en primer lugar que el método de substitución para D dará lugar a

$$S = \int d^4x \int d^4x' \, j_\mu(x) \, D^R(x-x') \, j_\mu(x') + S_M \qquad (37)$$

que al ser variada resultará en la misma ecuación de movimiento que (32), es decir en una fuerza derivada de un simétrico pues:

$$\delta \int d^4x \int d^4x' j_\mu(x) \, D^R(x-x') \, j_\mu(x') = \int d^4x \int d^4x' \left[\delta j_\mu(x) \, j_\mu(x') + j_\mu(x) \, \delta j_\mu(x')\right] D^R(x-x') =$$

$$= \int d^4x \int d^4x' \, \delta j_\mu(x) \, j_\mu(x') \left[D^R(x-x') + D^A(x-x')\right] =$$

$$= 2 \int d^4x \int d^4x' \, \delta j_\mu(x) \, j_\mu(x') \, D^S(x-x') \qquad (38)$$

Una segunda observación será la de que en las condiciones de variación de la acción de Fokker, es decir cuando $\left(\delta A_\mu\right)_{\lambda\lambda} = \delta j_\mu$ por ser las variaciones de las inducidas por variaciones en las corrientes, según (31) el efecto de la integral superficial añadida a la acción en (27) será expresable en términos de las corrientes y sus variaciones. Para potenciales retardados (31) pasa a ser

$$2 \int d^4x \, \delta j_\mu(x) \, \frac{1}{2} \left[A_\mu^R(x) - A_\mu^A(x)\right] \qquad (39)$$

De estas dos observaciones llegamos a la conclusión de que el movimiento que resulta de la ecuación de Fokker que se obtiene al substituir en la acción (27) soluciones retardadas es el mismo que el que resulta de interacciones por potenciales simétricos. En realidad el movimiento con potenciales retardados no el el mismo. Sucede simplemente que la acción de Fokker no era buena por no ser (27) una buena acción para potenciales retardados. Es necesario agregar un término corrector, y la variación del mismo dará una contribución a la fuerza igual a

$$F_\mu^{DAMP.} = \frac{1}{2} \left(F_{\mu\nu}^R - F_{\mu\nu}^A\right) j_\nu \qquad (40)$$

según se deduce de (39) y que es el frenado de radiación[8,9] (radiation damping). Pero no hemos podido hallarlo, expresado en términos de los potenciales y sus derivadas primeras y tal que diese (39).

Si se tiene en cuenta la corrección (40) la ecuación de movimiento es la determinada por potenciales retardados, que incluyen un término de self-interacción divergente. La parte infinita de este término es una renormalización de la masa y la parte finita del mismo da justamente el frenado por radiación que se observa experimentalemente.[15]

La exigencia de que el universo sea de Feynman-Wheeler nos permite una formulación consistente de la acción para el campo electromagnético, a costa de suponer para la estructura de dicho universo algo quizas incompatible desde un punto de vista lógico estricto. En ese caso tenemos que por ser $F^R = F^A = F^S$ el término (40) será nulo y la acción (27) buena, y no obstante se tendrá frenado de radiación, pues el movimiento de las partículas estará dado correctamente por los potenciales retardados. Ese frenado se puede interpretar como un efecto debido al absorbente, en la forma hecha por Feynman y Wheeler.

CONCLUSIONES

Hemos mostrado como se puede deducir una acción de Fokker de la acción usual de campo. Las hipótesis que fueron necesarias en el curso de la demostración dan el conjunto de condiciones para las cuales habrá equivalencia en las descripciones del sistema físico que ambas proporcionan, una adecuada a la filosofía de acción a la distancia y la otra considerando al campo como agente dinámico intermediario.

Una de las restricciones ha recaído sobre el dominio de integración de la acción y la hemos interpretado como una primera eliminación de los grados de libertad del campo, ya que las condiciones iniciales sobre el mismo quedan fuera de consideración con dicha elección. La otra condición, la de que la acción original de campo fuese una buena acción, esto es fuese hecha estacionaria por las soluciones físicamente aceptadas, puede ser derivada al requerimiento de que el sistema en consideración sea completo y cerrado.

En este momento se plantea una disyuntiva que discutimos con el ejem plo del campo electromagnético. Si se estipula solamente que dé lugar a las ecuaciones de movimiento, la acción está definida a menos de divergencias y diferenciales totales del tiempo. Estas últimas se pueden despreciar cuando la acción está integrada en el dominio bueno a que hicimos referencia más arriba. Pero cuando está definida además en un dominio no compacto da lugar a ciertas condiciones de contorno naturales que pueden depender de dichas divergencias tridimensionales. La acción gauge invariante usual del campo electromagnético no da lugar a soluciones radiativas si se aceptan las condiciones de contorno. O mejor aún, el conjunto de requerimientos sobre las soluciones no ha sido considerado hasta el presente y no podemos afirmar nada sobre la existencia de las mismas o su aceptabilidad desde el punto de vista físico. Ellas dan lugar a un buen principio de Fokker, aunque no en el sentido usual, ya que posiblemente haya involucradas soluciones de la homogénea en la interacción, de manera que el propagador dejaría de ser una función de Green pura independiente del movimiento.

La otra posibilidad en la disyuntiva es congalar los grados de libertad del campo restringiendo a las variaciones a propagarse como perturbaciones a partir de variaciones arbitrarias en las corrientes, tal mal en las vatiaciones inducidas en al principio de Fokker. En ese caso mediante el agregado de una integral superficial se puede hallar una buena acción de campo para los potenciales simétricos, que dan lugar a la acción de Fokker usual.

Pero aquí dejamos también abierta la interpretación física de dicha integral superficial. Desde el punto de vista de los campos, podría describir a una interacción idealizada con un absorbente, aunque en la imágen física de acción a distancia el mismo sistema es visto simplemente como el de partículas cargadas en interacción con propagadores simétricos. Con todo, la consideración de dicha integral superficial con potenciales retardados o avanzados muestra que ella describe justamente el frenado de radiación.

No se encuentra ninguna acción buena para dichos potenciales no simétricos, aunque no se prueba que no existan. Pero esta situación insatisfactoria nos recuerda que una suposición ad hoc para el sistema de partículas, esto es, que ellas formen un universo completamente absorbente, salvaría todas las dificultades en forma elegante y consistente desde el punto de vista formal, aunque queda por demostrar la compatibilidad lógica de un sistema tal, con la suposición de que en nuestro sistema sólo obran fuerzas electromagnéticas y con cualquier imágen cosmológica del universo.

Cap. II - LA ELECCION DE UN GAUGE Y LA ACCION DE FOKKER EN ELECTROMAGNETISMO

Está claro que las transformaciones de gauge deberán tener un sentido muy diferente para las acciones de Fokker en comparación con las acciones de campo usuales, puesto que las variables sujetas a dichas transformaciones han sido eliminadas. Las diferentes elecciones de gauge para dichas variables corresponderán entonces a diferentes expresiones matemáticas de la acción de Fokker.

En concreto estudiaremos a continuación la posibilidad de cambiar la forma de la interacción elemental en el término de interacción de la acción de Fokker, que se propaga por medio de una función de Green D de la ecuación de onda. Buscaremos otras formas, como por ejemplo, interacciones instantáneas entre elementos de corriente, etc., sin transformar las variables dinámicas de las cuales los j_μ dependen pero cambiando la forma matemática de la acción.

ALGUNAS PROPIEDADES DE LAS FUNCIONES DE GREEN DE LA ECUACION DE LAS ONDAS.

Antes de entrar en otros detalles, permítasenos decir algo sobre la función D y sus propiedades. Según Dirac, una expresión para dicha función de Green es:

$$D^S(x-x') = 2\,\delta\,(x-x')^2 \qquad (1)$$

esto es, la función δ común con argumento igual a

$$(x-x')^2 \equiv -(x_1-x_1')^2-(x_2-x_2')^2-(x_3-x_3')^2+(x_4-x_4')^2$$

Para singularidades puntuales de corriente

$$j_\mu(x) = \sum_a e_a \int d\tau_a\, \dot{a}_\mu\, \delta^4(x-a) \qquad (2)$$

el potencial tomará la forma dada por Lienard-Wiechert:

$$A_\mu(x) = \int d^4x'\, D^S(x-x')\, j_\mu(x') = \sum_a e_a \int d\tau_a\, \delta\,(x-a)^2 =$$
$$= \sum_a e_a \dot{a}_\mu \frac{1}{\dot{a}_\lambda(x_\lambda-a_\lambda)} \qquad (3)$$

Nos interesa verificar si el A_μ definido por la función de Green (1) satisface alguna condición de gauge. Mostramos ahora que dicho A_μ satisface el gauge de Lorentz para todos los puntos del espacio exceptuados los extremos de las trayectorias de las partículas. En efecto:

$$\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\mu} = \sum_a 4e_a \int d\tau_a \, \dot a_\mu (x_\mu - a_\mu)\, \delta'(x-a)^2 =$$

$$= -\sum_a 2e_a \int d\tau_a \frac{\dot a_\mu (x_\mu - a_\mu)}{\dot a_\lambda (x_\lambda - a_\lambda)} \frac{d}{d\tau_a} \delta(x-a)^2 = -\sum_a 2e_a \, \delta(x-a)^2 \Big|_{\tau_a=-\infty}^{\tau_a=+\infty} \qquad (4)$$

Esta propiedad es en última instancia consecuencia de la relación $j_{\mu,\mu}=0$ que también, obviamente, se verifica en todas partes menos en los extremos de las trayectorias:

$$\frac{\partial j_\mu}{\partial x_\mu} = \sum_a e_a \int d\tau_a \, \dot a_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} \delta^4(x-a) = -\sum_a e_a \int d\tau_a \, \dot a_\mu \frac{\partial}{\partial a_\mu} \delta^4(x-a) =$$

$$= -\sum_a e_a \, \delta^4(x-a) \Big|_{\tau_a=-\infty}^{\tau_a=+\infty}$$

Es interesante verificar ahora bajo que condiciones una distribución continua de cargas dará lugar a un A_μ que satisface al gauge de Lorentz. Tenemos:

$$\frac{\partial A_\mu(x)}{\partial x_\mu} = \int d^4x' \, \partial_\mu D(x-x') j_\mu(x') = \oint^\mu d^3s' \, D(x-x') j_\mu(x') + \oint d^4x' \, D(x-x') \partial'_\mu j_\mu(x') \qquad (6)$$

El segundo término se anula por satisfacerse la ecuación de continuidad. El primer término es una integral superficial que puede descomponerse en suma de dos integrales

$$\oint^\mu d^3s' \, D(x-x') j_\mu(x') = \int d^3x' \, D(x-x') j_\mu(x') \Big|_{t=-\infty}^{t=\infty} + \int dt \oint_\Sigma^{r'} d^2s' \, D(x-x') j_\mu(x') \qquad (7)$$

La segunda integral es nula si las corrientes están acotadas en el espacio, en cuyo caso también la primera integral es cero para un x fijo. También se anula la primera integral cuando $j_\mu(x)$, aún sin estar acotada espacialmente, tiene un comportamiento asintótico como $\frac{1}{r}$.

Ahora pasaremos a discutir bajo que condiciones la D^S nos da un potencial que satisface la condición del gauge de radiación A^L_r, parte longitudinal de A_r, igual a cero. En ese gauge satisface A^T_r, parte transversal de A_r, la ecuación:

$$A^T_{r,\lambda\lambda} = j^T_r \qquad (8)$$

y queremos saber si

$$A^T_r(x) = \int d^4x' \; D^S(x-x') \, j^T_r(x') \qquad (9)$$

con la función de Green definida más arriba. Tendremos

$$\nabla_r A^T_r(x) = \int d^4x' \, \nabla_r D^S(x-x') \left[j_r(x') - j^L_r(x') \right] =$$

$$= \int d^4x' \, D^S(x-x') \, \nabla'_r j_r(x') - \int d^4x' \, \nabla_r D^S(x-x') \cdot \nabla'_r \int d^3x'' \frac{\nabla''_s \cdot j_s(\underline{x}'',t)}{-4\pi |\underline{x}'-\underline{x}''|} \qquad (10)$$

donde hemos integrado por partes en la primer integral suponiendo que la distribución de j_μ está acotada en el espacio y por ello es igual a cero en Σ. En cuanto a la segunda integral, integrando por partes

$$\int d^4x' \, \nabla_r D^S(x-x') \, \nabla'_r \int d^3x'' \frac{\nabla''_s j_s(\underline{x}'',t)}{-4\pi |\underline{x}'-\underline{x}''|} =$$

$$= \int d^4x' \, D^S(x-x') \, \nabla'_s j_s(x') - \int dt' \oint_\Sigma {}^r d^2S' \, D^S(x-x') \, \nabla'_r \int d^3x'' \frac{\nabla''_s j_s(\underline{x}'',t)}{-4\pi |\underline{x}'-\underline{x}''|} \qquad (11)$$

con lo cual (10) queda igual a

$$\nabla_r A^T_r(x) = \int dt' \oint_\Sigma {}^r d^2S' \, D^S(x-x') \, \nabla'_r \dot{\phi}(x') \qquad (12)$$

donde hemos puesto

$$\dot{\phi}(x) \equiv \int d^3x'' \frac{\nabla''_s j_s(\underline{x}'',t)}{-4\pi |\underline{x}-\underline{x}''|} = \int d^3x'' \frac{\dot{\rho}(\underline{x}'',t)}{-4\pi |\underline{x}-\underline{x}''|} \qquad (13)$$

notación que usaremos más adelante. La expresión (12) tiende a cero para un x fijo si la distribuión de carga está acotada espacialmente, puesto que entonces se tendrá:

$$D^{s}(x-x') \longrightarrow \frac{1}{r'} \; ; \quad \dot{\phi}(x') \longrightarrow \frac{1}{r'} \; ; \quad \nabla'_r \dot{\phi}(x') \longrightarrow \frac{1}{r^2} \qquad (14)$$

Se tendrán conclusiones completamente análogas para las funciones de Green D^A y D^R.

LA ACCION DE FOKKER EN EL GAUGE DE RADIACION

Podríamos ahora hallar sin ninguna dificultad la acción de Fokker usando en el método de substitución las soluciones del campo electromagnético en el gauge de radiación. Haremos esto más adelante, para usar ahora un método más instructivo, y en el cual comenzaremos por calcular la expresión:

$$\int d^4x \int d^4x' \, j_r(x) \, D(x-x') j_r^T(x') = \int d^4x' \, j_r(x) \, D(x-x') \left[j_r(x') - j_r^L(x') \right] \qquad (15)$$

que presumimos puede ser parte integrante de la acción de Fokker en dicho gauge. La segunda integral de (15) es:

$$\int d^4x \int d^4x' \, j_r(x) \, D(x-x') \, \nabla'_r \phi(x') = \int d^4x \int d^4x' \, j_r(x) \, \nabla_r D(x-x') \, \dot{\phi}(x') + \oint_{1} =$$

$$= - \int d^4x \int d^4x' \, \dot{\rho}(x) \, D(x-x') \, \dot{\phi}(x') + \oint_{1} + \oint_{2} = \int d^4x \int d^4x' \, \rho(x) \, \partial_t D(x-x') \, \dot{\phi}(x') +$$

$$+ \oint_{1} + \oint_{2} + \oint_{3} = \int d^4x \int d^4x' \, \rho(x) \, \partial_t^2 D(x-x') \, \phi(x') + \oint_{1} + \oint_{2} + \oint_{3} + \oint_{4} =$$

$$= \int d^4x \, \rho(x) \, \phi(x) + \int d^4x \int d^4x' \, \rho(x) \, \nabla^2 D(x-x') \, \phi(x') + \oint_{1} + \oint_{2} + \oint_{3} + \oint_{4} \qquad (16)$$

donde para cada integración por partes hemos dejado indicada la integral superficial resultante, que detallamos y discutimos más abajo, y sólo hemos usado las relaciones:

$$\nabla_r j_r = \dot{\rho} \quad ; \quad \nabla^2 D(x-x') - \partial_t^2 D(x-x') = \delta^4(x-x') \qquad (17)$$

Además tenemos para el segundo término en la (16)

$$\int d^4x \int d^4x' \; \rho(x) \; \nabla^2 D(x-x') \, \phi(x') = \int d^4x \int d^4x' \, \rho(x) \, \nabla_r D(x-x') \, \nabla'_r \phi(x') + \oint_{5} =$$

$$= \int d^4x \int d^4x' \, \rho(x) \, D(x-x') \, \rho(x') + \oint_{5} + \oint_{6} \qquad (18)$$

De manera que podemos concluir de (15), (16) y (18) que

$$\int d^4x \int d^4x' \, j_\mu(x) \, D(x-x') \, j_\mu(x') = \int d^4x \int d^4x' \, j_r \, D(x-x') \, j_r^{T\,\prime} + \int d^4x \int d^3x \, \frac{\rho \rho'}{4\pi |\underline{x}-\underline{x}'|} \qquad (19)$$

siempre y cuando la suma de las seis integrales superficiales tienda a cero.

En otras palabras, hemos reducido el término de interacción de la acción de Fokker a otra forma matemáticamente equivalente, que contiene un elemento de interacción instantánea entre las cuartas componentes de las corrientes y que podemos presumir corresponde al gauge de radiación, según comprobamos más abajo.

Consideremos ahora una a una las integrales superficiales aparecidas en el proceso de integración por partes que nos ha llevado de la ecuación (16) a la (19)

$$\oint_{1} = \int d^4x \int dt \oint_{\Sigma}^{r} d^2S' \, j_r(x) \, D(x-x') \, \dot{\phi}_r(x') = \int dt' \oint_{\Sigma}^{r} d^2S' \, A_r(x') \, \dot{\phi}(x') =$$

$$= - \int dt' \oint_{\Sigma}^{r} d^2S' \, \dot{A}_r(x') \, \phi(x') + \oint_{1'} \equiv \oint_{1''} + \oint_{1'} \qquad (20)$$

Donde aquí como en lo sucesivo introducimos los A_μ sólo como notacíon conveniente.

$$\oint_{2} = \int dt \oint_{\Sigma}^{r} d^2S \int d^4x' \, j_r(x) \, D(x-x') \, \dot{\phi}(x') = 0 \qquad (21)$$

porque $j_r(x) = 0$ sobre Σ.

$$\oint_{(3)} = -\int d^3x \int d^4x' \, \rho(x) \, D(x-x') \, \dot{\phi}(x') \Big|_{t=-\infty}^{t=+\infty} \qquad (22)$$

puede desecharse de la acción pues no contribuye en el proceso de variación por el siguiente motivo: éstas se reducen siempre a una faja finita $t_0 \leq t \leq t_1$ de manera que $\rho(x)$ no se varía. Por otra parte para $t \to \pm\infty$ bastante grande $\rho(x)$ será cero en los puntos en que $D(x-x')\delta\dot{\phi}(x')$ sea distinta de cero por haber supuesto que la distribución de cargas permanece siempre espacialmente acotada.

$$\oint_{(4)} = \int d^4x \int d^3x \, \rho(x) \, \partial_t D(x-x') \, \phi(x') \Big|_{t=-\infty}^{t=+\infty} = \int d^3x' \, \dot{A}_4(x') \, \phi(x') \Big|_{t=-\infty}^{t=+\infty} =$$

$$= \int d^3x' \, A_{r,r}(x') \, \phi(x') \Big|_{t=-\infty}^{t=\infty} = \int d^3x' \, A_r(x') \, \nabla_r \phi(x') \Big|_{t=-\infty}^{t=\infty} + \oint_{(4')}$$

De acuerdo con la discusión para la integral anterior, el integrando será distinto de cero en una corona esférica de radio finito, correspondiente al hecho de que $t_1 - t_0$ el intervalo de variación es finito, pero el radio interior de dicha corona crece sin límites con $t \to \pm\infty$ y el integrando se comporta como $\frac{1}{r^3}$.

$$\oint_{(5)} = \int d^4x \int dt' \oint_{\Sigma}^{r} d^2s' \, \rho(x) \, \nabla_r' D(x-x') \, \phi(x') = \int dt' \oint_{\Sigma}^{r} d^2s' \, \nabla_r' A_4(x') \, \phi(x') \qquad (24)$$

$$\oint_{(6)} = -\int d^4x \int dt' \oint_{\Sigma}^{r} d^2s' \, \rho(x) \, D(x-x') \, \nabla_r' \phi(x') = -\int dt' \oint_{\Sigma}^{r} d^2s' \, A_4(x') \, \nabla_r' \phi(x') \qquad (25)$$

Este último tiende a cero por comportarse el integrando como $\frac{1}{r^3}$.
Para tener establecida la validez de (19) es necesario que

$$\oint_{(1'')} + \oint_{(5)} + \oint_{(1')} + \oint_{(4')} \Rightarrow 0 \qquad (26)$$

Por una parte podemos ver que

$$\oint_{(1'')} + \oint_{(5)} = \int dt' \oint^{r} d^2s' \, F_{4r}(x') \, \phi(x') \Rightarrow 0 \qquad (27)$$

no sólo en los casos en que se cumplan las condiciones de contorno naturales , o el universo sea de Feynman-Wheeler, sino también en el caso de tenerse soluciones radiativas, pues en ellas la componente radial del campo eléctrico F_{4r} tiende a cero como $\frac{1}{r^2}$. Esto es cuán lejos podemos llegar teniendo en cuenta el comportamiento asintótico de campos y potenciales y restringiendo las variaciones a tener lugar en un intervalo finito de tiempo.

Finalmente, tendremos que la variación de

$$\oint (1') + \oint (4') = 2 \oint^r d^2 s' A_r(x') \phi(x') \Big|_{t=-\infty}^{t=\infty} \qquad (28)$$

será igual a cero para recintos elegidos como en el capítulo I en la derivación del principio de Fokker por el método de substitución que pasaremos ahora a considerar para este sencillo caso.

EL METODO DE SUBSTITUCION EN EL GAUGE DE RADIACION

Se substituirá la solución para el campo electromagnético en el gauge de radiación

$$A_r^L(x) = 0 \quad ; \quad A_r^T(x) = \int d^4x\, D(x-x') j_r^T(x') \quad ; \quad \phi(x) = \int d^3x' \frac{\rho(\underline{x}', t)}{-4\pi|\underline{x}-\underline{x}'|} \qquad (29)$$

en la acción del campo electromagnético "buena":

$$S = \int d^4x \left(A_{\mu,\nu} A_{\mu,\nu} - A_{\mu,\nu} A_{\nu,\mu} + A_\mu j_\mu \right) + \oint_\Sigma^\nu d^3 s\, A_\mu \left(A_{\mu,\nu} - A_{\nu,\mu} \right) + S_M \, , \qquad (30)$$

lo cual da como resultado

$$S = \int d^4x \left(A^T_{r,s} A^T_{r,s} - A^T_{r,s} A^T_{s,r} - \phi_{,s} \phi_{,s} - A^T_{s,4} A^T_{s,4} + 2\phi_{,s} A^T_{s,4} + A^T_r j_r - \phi\rho \right) +$$

$$+ \oint_\Sigma^s d^3 s \left[A_r^T \left(A^T_{r,s} - A^T_{s,r} \right) - \left(\phi_{,s} - A^T_{s,4} \right) \phi \right] + S_M =$$

$$= \int d^4x \int d^4x'\, j_r^T D(x-x') j_r' - \int d^4x \int d^3x' \frac{\rho(\underline{x},t)\rho(\underline{x}',t)}{-4\pi|\underline{x}-\underline{x}'|} + S_M \qquad (31)$$

donde se ha dejado de lado una diferencial total del tiempo. El resultado final coincide con la (19).

Eliminación de la parte longitudinal de la corriente

En la (31) es tentador eliminar la parte longitudinal de la corriente en la expresión

$$\int d^4x \int d^4x' \, j_r^T D(x-x') j_r' = \int d^4x \int d^4x' \, j_r^T D(x-x') j_r^{T'} + \int d^4x \int d^4x' \, j_r^T D(x-x') j_r^{L'} , \quad (32)$$

para lo cual quisiéramos determinar en que condiciones el segundo término es nulo. Este es igual a

$$\int d^4x \int d^4x' \, j_r^T(x) D(x-x') \nabla_r' \dot{\phi}(x') = \int dt' \oint_\Sigma^r d^2s' \, A_r^T(x') \dot{\phi}(x') =$$

$$= \int dt' \oint_\Sigma^{r'} d^2s' \, \dot{A}_r^T(x') \phi(x') + \oint_\Sigma^r d^2s' \, A_r^T(x') \phi(x') \Big|_{t=-\infty}^{t=\infty} . \quad (33)$$

La variación del segundo término será cero de acuerdo con nuestro argumento usual. En cuanto al primer término, tenemos que el integrando tenderá a cero más fuerte que $\frac{1}{r^2}$ si $\dot{A}_r^T$ tiende a cero más rápido que $\frac{1}{r}$. Ahora bien, en (33)

$$\dot{A}_r^T(x) = E_r(x) + \nabla_r \phi(x) , \quad (34)$$

donde E_r es la componente radial del campo eléctrico y $\nabla_r\phi$ el gradiente de ϕ en la misma dirección. Ambos se comportan como $\frac{1}{r^2}$ aún para el caso de soluciones radiativas, por lo que podemos asegurar que (31) podrá escribirse

$$S = \int d^4x \int d^4x' \, j_r^T(x) D(x-x') j_r^T(x') - \int d^4x \int d^3x' \, \frac{\rho(\underline{x},t)\rho(\underline{x}',t)}{-4\pi |\underline{x}-\underline{x}'|} + S_M , \quad (35)$$

despreciando diferenciales totales respecto al tiempo en la forma como hemos venido haciéndolo para el principio de Fokker, esto es restringiendo el dominio de integración al "buen dominio" definido en el capítulo I.

Para llegar a la fórmula (35) no hemos usado ninguna propiedad de la función de Green D que hiciese referencia a una elección particular entre las D^R, D^A o D^S . Por otra parte, es evidente por la forma del resultado final que cualquiera de ellas dará lugar al mismo término de fuerza en la ecuación de movimiento que se obtiene al variar la acción (35): un término en que aparecen actuando campos simétricos. Esta situación es completamente análoga a la encontrada en el capítulo I para el gauge de Lorentz.

RESULTADOS

Tal como lo anticipáramos en la introducción, hemos desarrollado en este capítulo ciertas técnicas, que, sin llevarnos a resultados por demás interesantes en el caso presente del campo electromagnético, tienen su interés por la aplicación que haremos posteriormente, y según líneas análogas, a la aproximación lineal del campo gravitatorio. También tienen su interés por mostrar la forma en que se llega al gauge de radiación desde el punto de vista de la acción de Fokker pura.

En consecuencia, y de acuerdo con las consideraciones del capítulo I, hemos creído que era lícito restrigir la discusión al caso en que las variaciones se efectuasen en un dominio acotado del espacio-tiempo y despreciar diferenciales totales del tiempo. Comenzamos con una discusión de las propiedades de las funciones de Green D para determinar bajo que condiciones aseguraban las mismas el cumplimiento de las condiciones subsidiarias sobre los potenciales, que ellas definen a partir de las fuentes respectivas. Esta discusión nos hizo ver como aceptable la restricción a sistemas acotados en el espacio, pues de esta manera se verifican los resultados usuales.

La importancia del gauge de radiación está en el hecho de que con su uso las variables dinámicas verdaderas, esto es, las que son buenos datos iniciales de Cauchy y son gauge invariantes, son las únicas que aparecen explícitamente como tales. La escritura de la teoría dinámica en términos explícitos de los verdaderos observables es uno de los problemas capitales aún no resueltos de la teoría de la relatividad.

También, como su nombre lo indica, está este gauge ligado al problema de la radiación. Se acostumbra definir como campo de radiación al que está formado por estas variables dinámicas verdaderas, que representan los verdaderos grados de libertad del campo. Así las dos componentes transversas del vector potencial del campo de Maxwell representan con sus dos grados de libertad, el campo de radiación electromagnética.

No obstante, desde el punto de vista de la acción de Fokker, dichos grados de libertad aparecen congelados y no se admite la existencia de un campo libre de radiación, es decir, un campo que no haya sido calculado a partir de las trayectorias y el movimiento de las fuentes por intermedio de la función de Green de elección. Y con todo, se quiere hablar de un campo de radiación físicamente originado en dicho movimiento.

Aquí se hace deseable considerar a las variables transversas como relacionadas con la radiación más bien por el efecto de retardo (o de avance) de la interacción mediada por ellas o por el efecto concomitante de transportar un flujo no nulo de energía a grandes distancias debido a su comportamiento asintótico. Una observación interesante es que dichas componentes transversas del potencial están originadas por componentes transversas del vector corriente, que no están restringidas de ninguna manera por la ecuación de continuidad de la corriente. Tampoco aparecen más que dichas componentes transversas de la corriente como afectadas por interacciones retardadas (o avanzadas) en la acción de Fokker.

Cabe preguntarse entonces por el grado de arbitrariedad en esa parte transversa de la corriente y en tal caso, por la naturaleza de la interacción del campo de radiación con las partículas cargadas. La respuesta está, a nuestro juicio, en que los conceptos de parte longitudinal y parte transversa de la corriente son fuertemente no locales, mientras que nuestra imágen de un sistema cargado es generalmente local. Por ejemplo, nuestro sistema más sencillo, la singularidad puntual es estrictamente local; para construirlo necesitamos de la suma de ambas partes de la corriente. Podemos decir pues, que la interacción del campo de radiación con el sistema material está mediada en última instancia por la estructura del sistema mismo.

En el capítulo I hemos dado razones generales para fundamentar el método de substitución y hemos guiado nuestras discusiones con el ejemplo, sencillo y conocido, del campo electromagnético. En otros casos puede resultar imposible resolver exactamente la ecuación de movimiento del campo que se desea eliminar, como sucede con el campo gravitatorio en interacción con un sistema material. Es entonces que somos llevados en forma natural a la consideración de acciones de Fokker aproximadas, correspondientes al determinado grado de precisión con que dicho campo es resuelto.

La acción de dicho sistema puede escribirse

$$S = \int d^4x \left[\mathcal{L}_G + \mathcal{L}_M \right] \qquad (1)$$

donde supondremos, como es usual, que la interacción resulta del requerimiento de escribir en forma covariante general al lagrangiano Lorentz-covariante de nuestro sistema material. En otras palabras, $\mathcal{L}_M$ se reduce a su forma Lorentz-covariante al hacer corresponder el tensor métrico $g_{\mu\nu}$, que es la variable de campo que aparece en $\mathcal{L}_G$, con los valores

$$\eta_{11} = \eta_{22} = \eta_{33} = -1 \ ; \ \eta_{44} = 1 \ ; \ \eta_{ik} \underset{i \neq k}{=} 0 \qquad (2)$$

Tomaremos el caso particular de singularidades puntuales monopolares para las cuales

$$\mathcal{L}_M = \sum_a \kappa m_a \int d\tau_a \left(\dot{a}_\mu \dot{a}_\nu g^{\mu\nu} \right)^{1/2} \delta^4(x-a)$$

$$\dot{a}_\mu \equiv \frac{da_\mu}{d\tau_0} \quad , \quad d\tau_0 \equiv -(a_1)^2 - (a_2)^2 - (a_3)^3 + (a_4)^2 = a_\mu a_\nu \eta^{\mu\nu} \qquad (3)$$

siendo K la constante gravitatoria y a_μ las coordenadas de las trayectorias de la a-ésima partícula.[1] A su vez

$$\mathcal{L}_G = g^{\mu\nu} \left(\Gamma^\beta_{\mu\alpha} \Gamma^\alpha_{\nu\beta} - \Gamma^\alpha_{\mu\nu} \Gamma^\beta_{\alpha\beta} \right) \sqrt{-g} \qquad (4)$$

donde

$$g^{\mu\kappa} g_{\kappa\nu} = \delta^\kappa_\nu \quad , \quad -g = \det g_{\mu\nu} \ ;$$

$$\Gamma^\lambda_{\mu\nu} = g^{\kappa\lambda} [\mu\nu, \kappa] \equiv \frac{1}{2} g^{\kappa\lambda} \left(g_{\mu\kappa,\nu} + g_{\nu\kappa,\mu} - g_{\mu\nu,\kappa} \right) \qquad (5)$$

son los símbolos de Christoffel

Es sabido que en general las ecuaciones para $g_{\mu\nu}$ que derivan de la acción (1) sólo pueden resolverse por medio de un procedimiento de aproximaciones sucesivas en el cual se supone $g_{\mu\nu}$ desarrollable en términos de un parámetro

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \overset{1}{h}_{\mu\nu} + \overset{2}{h}_{\mu\nu} + \cdots \qquad (6)$$

donde el índice 1 sobre $h_{\mu\nu}$ indica un término infinitésimo de orden 1 en términos del parámetro de expansión, y donde resulta en orden cero la métrica constante de Minkowski $\eta_{\mu\nu}$.

Según hemos dicho más arriba $\overset{0}{\mathcal{L}}_M$ es la expresión Lorentz covariante del lagrangiano de la materia, para la cual, a diferencia del método de Einstein-Infeld-Hoffman no supondremos ninguna restricción, es decir las velocidades del sistema material no están restringidas a ser pequeñas respecto a la de la luz.

Esta forma de aproximación para resolver el problema se llama "de movimiento rápido" [22] y tiene como ventaja sobre otros métodos, aparte de la covariancia de Lorentz, el tratar en cada estadío de aproximación toda la trayectoria del sistema material como exacta, sin introducir el cuestionable concepto de aproximaciones de diverso orden para dichas trayectorias. De esa manera, en la correspondiente ecuación de Fokker a un dado orden, nosotros tomaremos las a_μ que definen las variables dinámicas del sistema material como las completas y exactas hasta ese orden de aproximación, mientras que la ecuación de movimiento que satisfacen resultará contener términos de diverso orden respecto al parámetro de expansión de las $g_{\mu\nu}$, que es generalmente la constante gravitatoria de acoplamiento.

Hallaremos las ecuaciones de movimiento hasta el segundo orden, para lo cual será necesario desarrollar nuestra acción hasta el tercer orden. La acción resulta ser entonces

$$\overset{1+2+3}{S} = \overset{2+3}{S}_G + \overset{2+3}{S}_I + \overset{1}{S}_M = \int d^4x \left[\overset{2+3}{\mathcal{L}}_G + \overset{2+3}{\mathcal{L}}_I + \kappa \overset{0}{\mathcal{L}}_M \right]$$

donde $\overset{2+3}{\mathcal{L}}_G = \overset{0+1}{g^{\mu\nu}}\,\overset{0+1}{g^{\beta\tau}}\,\overset{0+1}{g^{\alpha\lambda}}\left(\overset{1+2}{[\mu\alpha,\tau]}\,\overset{1+2}{[\nu\beta,\lambda]} - \overset{1+2}{[\mu\nu,\lambda]}\,\overset{1+2}{[\alpha\beta,\tau]}\,\overset{0+1}{\sqrt{-g}}\right)$, (8)

indicando la suma de varios índices sobre cada símbolo la suma de los órdenes correspondientes y debiendo tomarse los productos correspondientes de orden 2 y 3 para formar el respectivo $\overset{2}{\mathcal{L}}$ y $\overset{3}{\mathcal{L}}$;

$$\overset{0}{\mathcal{L}}_M = \frac{1}{\kappa}\,\mathcal{L}_M\Big|_{g_{\mu\nu}=\eta_{\mu\nu}} \qquad (9)$$

y

$$\overset{2+3}{\mathcal{L}}_I = \overset{1}{h}_{\mu\nu}\,\overset{1}{T}{}^{\mu\nu} + \frac{1}{2}\,\overset{1}{h}_{\mu\nu}\,\overset{1}{h}_{\kappa\lambda}\,\overset{1}{T}{}^{\mu\nu\kappa\lambda}\,, \qquad (10)$$

siendo

$$\overset{1}{T}{}^{\mu\nu} \equiv \frac{\partial\mathcal{L}_M}{\partial g_{\mu\nu}}\Big|_{g_{\mu\nu}=\eta_{\mu\nu}} = \overset{1}{\kappa}\sum_a \frac{1}{2}m_a\int d\tau_0\,\frac{\dot a^\mu \dot a^\nu\,\delta^4(x-a)}{(g^{\alpha\beta}\dot a_\alpha\,\dot a_\beta)^{1/2}}\Big|_{g_{\alpha\beta}=\eta_{\alpha\beta}} \qquad (11)$$

el tensor de impulso-energía y

$$\overset{1}{T}{}^{\mu\nu\kappa\lambda} \equiv \frac{\partial^2\mathcal{L}_M}{\partial g_{\mu\nu}\,\partial g_{\kappa\lambda}}\Big|_{g_{\mu\nu}=\eta_{\mu\nu}} = \overset{1}{\kappa}\sum_a \frac{1}{4}m_a\int d\tau_0\,\frac{\dot a^\mu \dot a^\nu \dot a^\kappa \dot a^\lambda\,\delta^4(x-a)}{(g^{\alpha\beta}\dot a_\alpha\,\dot a_\beta)^{3/2}}\Big|_{g_{\alpha\beta}=\eta_{\alpha\beta}}\,. \qquad (12)$$

Será conveniente para nuestros propósitos expresar $\overset{2+3}{\mathcal{L}}_I$ en términos de las componentes covariantes de las $\overset{1}{T}$, y en la aproximación deseada resulta

$$\overset{2+3}{\mathcal{L}}_I = \overset{1+2}{h}_{\mu\nu}\,\overset{0+1}{g^{\mu\kappa}}\,\overset{0+1}{g^{\nu\lambda}}\,\overset{1}{T}_{\kappa\lambda} + \frac{1}{2}\,\overset{1}{h}_{\mu\nu}\,\overset{1}{h}_{\kappa\lambda}\,\eta^{\mu\rho}\eta^{\nu\tau}\eta^{\kappa\xi}\eta^{\lambda\psi}\,\overset{1}{T}_{\rho\tau\xi\psi} =$$

$$= \overset{1+2}{h}_{\mu\nu}\,\overset{1}{T}{}^{\underline{\mu\nu}} - 2\,\overset{1}{h}_{\mu\nu}\,\overset{1}{h}_{\mu\kappa}\,\overset{1}{T}_\kappa{}^{\underline{\nu}} + \frac{1}{2}\,\overset{1}{h}_{\mu\nu}\,h_{\kappa\lambda}\,\overset{1}{T}{}^{\underline{\mu\nu\kappa\lambda}} \qquad (13)$$

donde hemos tenido en cuenta $\overset{1}{h}_{\mu\nu} = -\overset{1}{h}{}^{\mu\nu}$ en primer orden y hemos definido

$$\overset{1}{T}{}^{\underline{\mu\nu}} = \eta^{\mu\kappa}\eta^{\nu\lambda}\,\overset{1}{T}_{\kappa\lambda}\,, \quad \text{etc.} \qquad (14)$$

entendiendo siempre en lo sucesivo que un índice subrayado ha sido elevado o bajado por medio de las $\eta^{\mu\nu}$ y $\eta_{\mu\nu}$ respectivamente.

Será también conveniente más adelante introducir el gauge de De Donder que se expresa fácilmente por intermedio de las densidades tensoriales de campo:

$$\mathfrak{g}^{\mu\nu} \equiv (-g)^{1/2} g^{\mu\nu} \qquad \acute{o} \qquad \mathfrak{g}_{\mu\nu} \equiv (-g)^{-1/2} g_{\mu\nu} \qquad (15)$$

De la misma manera que con los $g_{\mu\nu}$, podemos considerar la expansión de (15)

$$\mathfrak{g}^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} + \overset{1}{\mathfrak{g}}{}^{\mu\nu} + \overset{2}{\mathfrak{g}}{}^{\mu\nu} + \dots \quad , \qquad (16)$$

que se pueden relacionar con los $\overset{1}{h}_{\mu\nu}$, $\overset{2}{h}_{\mu\nu}$,.. desarrollando la expresión hasta el segundo orden[22]

$$\overset{0+1+2}{\mathfrak{g}}{}^{\alpha\rho} \; \overset{0+1+2}{\mathfrak{g}}_{\rho\beta} = \delta_\beta^\alpha \, \overset{0+1+2}{(-g)}{}^{1/2} \qquad (17)$$

Resulta ser

$$\overset{1}{h}_{\alpha\beta} = -\overset{1+2}{\mathfrak{g}}_{\underline{\alpha}\beta} + \tfrac{1}{2}\eta_{\alpha\beta}\left[\overset{1+2}{\mathfrak{g}}{}^{\tau}{}_{\underline{\tau}} + \tfrac{1}{4}(\overset{1}{\mathfrak{g}}{}^{\tau}{}_{\tau})^2 - \tfrac{1}{2}\overset{1}{\mathfrak{g}}{}^{\tau}{}_{\underline{\omega}}\,\overset{1}{\mathfrak{g}}{}^{\omega}{}_{\underline{\tau}}\right] + \overset{1}{\mathfrak{g}}_{\underline{\alpha}\underline{\tau}}\,\overset{1}{\mathfrak{g}}{}^{\tau}{}_{\beta} -$$
$$- \tfrac{1}{2}\overset{1}{\mathfrak{g}}_{\underline{\alpha}\beta}\,\overset{1}{\mathfrak{g}}{}^{\tau}{}_{\underline{\tau}} \;, \qquad (18)$$

si se tiene en cuenta que

$$-g = \det\left|\delta_\alpha{}^\beta + h^\alpha{}_\beta\right| = \det\left|\delta_\alpha{}^\beta + \mathfrak{g}_{\underline{\alpha}}{}^\beta\right| = 1 + \overset{1+2}{h}{}^{\underline{\alpha}}{}_{\alpha} + \tfrac{1}{2}\left[(\overset{1}{h}{}^{\underline{\alpha}}{}_{\alpha})^2 - \overset{1}{h}{}^{\underline{\alpha}}{}_{\beta}\,\overset{1}{h}{}^{\beta}{}_{\alpha}\right] \qquad (19)$$

de (17) y (19) resulta que la relación (18) entre $\overset{1+2}{h}_{\alpha\beta}$ y $\overset{1+2}{\mathfrak{g}}_{\underline{\alpha}\beta}$ es recíprocamente simétrica. Hagamos notar que se tiene

$$\overset{1+2}{h}_{\tau\tau} = \overset{1+2}{\mathfrak{g}}_{\underline{\tau}\underline{\tau}} \;. \qquad (20)$$

La condición de De Donder es $\quad \mathfrak{g}^{\alpha\beta}{}_{,\beta} = 0. \qquad (21)$

LAS ECUACIONES DE MOVIMIENTO EN 1er ORDEN Y SU ACCION DE FOKKER

Para hallar las ecuaciones de movimiento del campo de 1er orden debemos variar respecto de $\overset{1}{h}_{\mu\nu}$ la accion $\overset{2}{S}$. Esta es

$$\overset{2}{S} = \int d^4x \left\{[\mu\alpha,\tau][\mu\tau,\alpha] - [\mu\mu,\lambda][\lambda\tau,\tau] + \overset{1}{h}_{\mu\nu}\overset{1}{T}{}^{\underline{\mu}\underline{\nu}}\right\} = \int d^4x \left\{2\,\overset{1}{h}_{\tau\mu,\alpha}\,\overset{1}{h}_{\alpha\mu,\tau} - \right.$$
$$\left. - \overset{1}{h}_{\tau\mu,\alpha}\,\overset{1}{h}_{\tau\mu,\alpha} - 2\,\overset{1}{h}_{\lambda\mu,\mu}\,\overset{1}{h}_{\tau\tau,\lambda} + \overset{1}{h}_{\mu\mu,\lambda}\,\overset{1}{h}_{\tau\tau,\lambda} + \overset{1}{h}_{\mu\nu}\,\overset{1}{T}_{\mu\nu}\right\} , \qquad (22)$$

donde en adelante usaremos indistintamente la convención del índice subrayado o la de sumar con métrica de minkowski cuando aparecen los índices repetidos entendiéndolos todos como correspondientes a las componentes covariantes respecto de la métrica Riemaniana

La variación de (22) respecto a $\overset{1}{h}_{\tau\mu}$ resulta en

$$\delta \overset{2}{S} = \int d^4x\, \delta \overset{1}{h}_{\tau\mu} \left\{ 2\overset{1}{h}_{\tau\mu,\alpha\alpha} - \eta_{\tau\mu} \overset{1}{h}_{\tau\tau,\kappa\kappa} + \overset{1}{T}_{\tau\mu} \right\} +$$

$$+ \oint^{\alpha} d^3S\, \delta \overset{1}{h}_{\tau\mu} \left\{ 4\overset{1}{h}_{\alpha\mu,\tau} - 2\overset{1}{h}_{\tau\mu,\alpha} - 2\overset{1}{h}_{\kappa\kappa,\tau}\eta_{\alpha\mu} + \eta_{\tau\mu}\overset{1}{h}_{\lambda\lambda,\alpha} \right\} =$$

$$= \int d^4x\, \delta \overset{1}{h}_{\tau\mu} \left\{ 2\overset{1}{h}_{\tau\mu,\alpha\alpha} - \eta_{\tau\mu} \overset{1}{h}_{\lambda\lambda,\alpha\alpha} + \overset{1}{T}_{\tau\mu} \right\} + \oint^{\alpha} d^3S\, \delta \overset{1}{h}_{\tau\mu} F_{\tau\mu\dot{\alpha}} \,, \qquad (23)$$

donde hemos tenido en cuenta la condición (21) de De Donder en 1ª aproximación:

$$\overset{1}{h}_{\alpha\beta,\beta} = \frac{1}{2} \overset{1}{h}_{\tau\tau,\alpha} \qquad (24)$$

para reducir las ecuaciones de movimiento de $\overset{1}{h}_{\tau\mu}$ a

$$\left(h_{\tau\mu} - \frac{1}{2}\eta_{\tau\mu} h_{\lambda\lambda} \right)_{,\alpha\alpha} = -\frac{1}{2} \overset{1}{T}_{\tau\mu} \qquad (25)$$

y donde se ha definido el "tensor" $F_{\tau\mu\dot{\alpha}}$ como:

$$F_{\tau\mu\dot{\alpha}} = 4\overset{1}{h}_{\alpha\mu,\tau} - 2\overset{1}{h}_{\tau\mu,\alpha} - 2\eta_{\alpha\mu}\overset{1}{h}_{\kappa\kappa,\tau} + \eta_{\tau\mu}\overset{1}{h}_{\lambda\lambda,\alpha} \qquad (26)$$

que tiene la propiedad

$$F_{\tau\mu\dot{\alpha},\alpha} = \overset{1}{T}_{\tau\mu} \,. \qquad (27)$$

De la ecuación (25) se deduce

$$\overset{1}{h}_{\tau\tau,\alpha\alpha} = \frac{1}{2} \overset{1}{T}_{\tau\tau} \qquad (28)$$

o sea que tenemos (29)

$$\overset{1}{h}_{\tau\mu,\alpha\alpha} = -\frac{1}{2}\left(\overset{1}{T}_{\tau\mu} - \frac{1}{2}\eta_{\tau\mu}\overset{1}{T}_{\kappa\kappa} \right) \; ; \; y \quad \overset{1}{h}_{\tau\mu}(x) = \int d^4x'\, D(x-x') \left\{ \frac{1}{4}\eta_{\tau\mu}\overset{1}{T}_{\kappa\kappa}(x') - \frac{1}{2}\overset{1}{T}_{\tau\mu}(x') \right\},$$

como solución del problema en primera aproximación, debiendo $\overset{1}{h}_{\tau\mu}$ satisfacer la condición de De Donder. Ella se cumple si el tensor $\overset{1}{T}_{\tau\mu}$ satisface la condición

$$\overset{1}{T}_{\tau\mu,\mu} = 0 \qquad (30)$$

en forma análoga al caso del gauge de Lorentz en Electromagnetismo, que se satisface si $j_{\mu,\mu}=0$. La condición (30) es equivalente a las ecuaciones de movimiento para orden cero, es decir para el sistema material en un espacio plano, y asegura a su vez la satisfacción de las condiciones de De Donder en el primer orden.

De acuerdo con nuestra discusión del capítulo I, las ecuaciones (25) son sólo condiciones necesarias sobre las soluciones. De nuestro conocimiento de las propiedades de las soluciones de la ecuación de las ondas (29) podemos inferir un comportamiento asintótico del tipo $\frac{1}{r}$ para las soluciones radiativas con funciones de Green D^A, D^R o D^S. Sin embargo podemos considerar como segunda condición emplícita en nuestra acción la condición de contorno natural

$$n^{\alpha} F_{\mu\tau\alpha} \longrightarrow \frac{1}{r^2} \qquad (31)$$

que en general entra en conflicto con dicho comportamiento asintótico de las soluciones radiativas.

Podríamos llevar a cabo aquí una discusión en todo paralela a la hecha en el capítulo I a propósito del problema planteado por estas integrales superficiales en la acción, las condiciones de contorno que determinan y su incumbencia en el problema de la radiación. Las conclusiones serían análogas, con el "tensor" $F_{\mu\tau\alpha}$ teniendo el papel del $F_{\mu\nu}$, tensor campo electromagnético. Según esto el "tensor" $F_{\mu\tau\nu}$ tendría un sentido físico relevante, y sería interesante llevar a cabo una discusión de su naturaleza y propiedades, tanto físicas como geométricas. Debemos con todo dejar dicho programa fuera del marco de este trabajo.

Obtendremos la acción de Fokker para el primer orden por simple sustitución de (29) en (22), bajo la suposición de que ésta última es una buena acción, es decir, que es estacionaria para la solución (29). Esto permite olvidar las integrales superficiales que aparecen al integrar por partes la (22) para llegar a

$$\overset{1+2}{S} = \frac{1}{4}\int d^4x \int d^4x' \left[\overset{1}{T}_{\lambda\nu}(x)\, \overset{1}{T}_{\lambda\nu}(x') - \frac{1}{2}\, \overset{1}{T}_{\kappa\kappa}(x)\, \overset{1}{T}_{\rho\rho}(x') \right] D(x-x') + \int d^4x\, \overset{1}{\mathcal{L}}_M\,, \qquad (32)$$

que es la acción de Fokker hasta el primer orden en el campo gravitatorio. La corrección a las ecuaciones del movimiento libre de la partícula a-ésima dadas por esta interacción se halla fácilmente variando (32) respecto a a_μ. Escribiremos primero (32) explícitamente en términos de los a_μ, teniendo en cuenta (11):

$$\overset{1+2}{S} = \sum_a m_a \kappa \int d\tau_a (\dot{a}_\mu \dot{a}_\mu)^{1/2} + \kappa^2 \sum_a \sum_b m_a m_b \int d\tau_a \int d\tau_b \left[\frac{\dot{a}_\mu \dot{a}_\nu \dot{b}_\mu \dot{b}_\nu}{(\dot{a}_\mu \dot{a}_\mu)^{1/2} (\dot{b}_\nu \dot{b}_\nu)^{1/2}} - (\dot{a}_\mu \dot{a}_\mu)^{1/2} (\dot{b}_\nu \dot{b}_\nu)^{1/2} \right] D(a-b) \quad (33)$$

Resulta en el orden más bajo $\ddot{a}_\mu = 0$ al variar respecto de a_μ, de lo cual deducimos que $\ddot{a}_\mu$ será de orden superior e igual al primero. Variando toda la expresión (33) obtenemos:

$$\ddot{a}_\mu = \frac{\kappa}{2} (\eta_{\mu\rho} - \dot{a}_\mu \dot{a}_\rho) \sum_b m_b \int d\tau_b \left\{ \left[(\dot{a}_\mu \dot{b}_\mu)^2 - \frac{1}{2} \right] D_{,\rho}(a-b) - 2 \dot{b}_\rho (\dot{a}_\nu \dot{b}_\nu) \frac{d}{d\tau_a} D(a-b) \right\} \quad (34)$$

donde hemos puesto $\dot{a}_\mu \dot{a}_\mu = \dot{b}_\nu \dot{b}_\nu = 1$ y hemos tenido en cuenta que $\ddot{a}_\mu$ es de primer orden. Esta expresión (34) coincide con la dada en la literatura.[15,22]

<u>LAS ECUACIONES DE MOVIMIENTO EN SEGUNDO ORDEN Y SU ACCION DE FOKKER</u>

Si se quiere obtener las ecuaciones de movimiento del campo gravitatorio en segundo orden se puede proceder a hallar todos los términos de dicho orden en la expansión de las ecuaciones exactas en términos de potencias del parámetro κ. También puede desearse hallar dicha ecuación de segundo orden directamente por variación de una acción. Bergman y Newman[16] han mostrado que para ello basta variar apropiadamente los términos de determinado orden de la expansión correspondiente de la acción. En concreto, podemos considerar el próximo orden para la acción de nuestro sistema, que resulta ser

$$\overset{3}{S} = \int d^4x \Big\{ -2\, \overset{2}{h}_{\sigma\mu,\alpha}\, \overset{1}{h}_{\sigma\mu,\alpha} + \overset{2}{h}_{\mu\mu,\lambda}\, \overset{1}{h}_{\tau\tau,\lambda} - 2\, \overset{1}{h}_{\mu\nu}\, \overset{1}{h}_{\beta\mu,\alpha}\, \overset{1}{h}_{\alpha\nu,\beta} +$$

$$+ 2\, \overset{1}{h}_{\mu\nu}\, \overset{1}{h}_{\beta\mu,\alpha}\, \overset{1}{h}_{\beta\nu,\alpha} + \overset{1}{h}_{\mu\nu}\, \overset{1}{h}_{\alpha\beta,\mu}\, \overset{1}{h}_{\alpha\beta,\nu} + 2\, \overset{1}{h}_{\mu\nu}\, \overset{1}{h}_{\alpha\mu,\nu}\, \overset{1}{h}_{\beta\beta,\alpha} -$$

$$- \overset{1}{h}_{\mu\nu}\, \overset{1}{h}_{\mu\nu,\alpha}\, \overset{1}{h}_{\beta\beta,\alpha} - 4\, \overset{1}{h}_{\nu\kappa}\, \overset{1}{h}_{\kappa\beta,\alpha}\, \overset{1}{h}_{\alpha\beta,\nu} - \overset{1}{h}_{\kappa\kappa}\, \overset{1}{h}_{\mu\nu,\beta}\, \overset{1}{h}_{\beta\mu,\nu} +$$

$$+ \tfrac{1}{2}\, \overset{1}{h}_{\kappa\kappa}\, \overset{1}{h}_{\tau\mu,\alpha}\, \overset{1}{h}_{\tau\mu,\alpha} + \overset{1}{h}_{\kappa\kappa}\, \overset{1}{h}_{\mu\mu,\lambda}\, \overset{1}{h}_{\tau\tau,\lambda} + \overset{2}{h}_{\mu\nu}\, \overset{1}{T}{}^{\mu\nu} +$$

$$+ \frac{1}{2}\, \overset{1}{h}_{\mu\nu}\, \overset{1}{h}_{\kappa\lambda}\, \overset{1}{T}{}^{\mu\nu\kappa\lambda} \Big\} \qquad (35)$$

donde ya se ha simplificado la expresión mediante el uso de la condición de De Donder.

De acuerdo con Newman y Bergmann podemos recobrar a partir de (35) las ecuaciones de movimiento para el primer orden variando respecto de $\overset{2}{h}_{\mu\nu}$ y podemos hallar las del segundo orden variando respecto de $\overset{1}{h}_{\mu\nu}$. Pero antes queremos hacer la siguiente interesante observación: cuando substituyamos las soluciones de tanto $\overset{1}{h}_{\mu\nu}$ como $\overset{2}{h}_{\mu\nu}$ los términos que contienen $\overset{2}{h}_{\mu\nu}$ se cancelarán, por lo cual resulta posible hallar la acción de Fokker de este orden con sólo conocer la solución (29) para $\overset{1}{h}_{\mu\nu}$. En efecto,

$$\int d^4x \Big\{ -2\, \overset{2}{h}_{\tau\sigma,\alpha}\, \overset{1}{h}_{\tau\sigma,\alpha} + \overset{2}{h}_{\mu\mu,\lambda}\, \overset{1}{h}_{\tau\tau,\lambda} + \overset{2}{h}_{\mu\nu}\, \overset{1}{T}{}^{\mu\nu} \Big\} = \int d^4x \Big\{ 2\, \overset{2}{h}_{\tau\mu}\, \overset{1}{h}_{\tau\mu,\alpha\alpha} -$$

$$- \overset{2}{h}_{\mu\mu}\, \overset{1}{h}_{\tau\tau,\lambda\lambda} + \overset{2}{h}_{\mu\nu}\, \overset{1}{T}_{\mu\nu} \Big\} = 0$$

Procediendo a sustituir la solución (29) en los términos restantes resulta la siguiente expresión para el tercer orden de la acción de Fokker

$$S_F = \int d^4x \int d^4x' \int d^4x'' \Big\{ \tfrac{1}{8}\, \overset{1}{T}{}^{\mu\nu}(x)\, \overset{1}{T}{}^{\kappa\lambda}(x')\, \overset{1}{T}{}^{\mu\nu\kappa\lambda}(x'') - \tfrac{1}{8}\, \overset{1}{T}{}^{\mu\nu}(x)\, \overset{1}{T}{}^{\kappa\kappa}(x')\, \overset{1}{T}{}^{\mu\nu\rho\rho}(x'') +$$

$$+ \tfrac{1}{32}\, \overset{1}{T}{}^{\kappa\kappa}(x)\, \overset{1}{T}{}^{\lambda\lambda}(x')\, \overset{1}{T}{}^{\rho\rho\tau\tau}(x'') \Big\}\, D(x-x'')\, D(x'-x'') +$$

$$+ \int d^4x \int d^4x' \int d^4x'' \Big\{ \Big[\overset{1}{T}{}^{\rho\beta}(x)\, \overset{1}{T}{}^{\nu\rho}(x')\, \overset{1}{T}{}^{\alpha\nu}(x'') + \tfrac{1}{4}\, \overset{1}{T}{}^{\mu\nu}(x)\, \overset{1}{T}{}^{\beta\mu}(x')\, \overset{1}{T}{}^{\alpha\nu}(x'') - \tfrac{1}{8}\, \overset{1}{T}{}^{\alpha\beta}(x)\, \overset{1}{T}{}^{\mu\nu}(x')\, \overset{1}{T}{}^{\mu\nu}(x'') -$$

$$- \tfrac{1}{4}\, \overset{1}{T}{}^{\kappa\kappa}(x)\, \overset{1}{T}{}^{\beta\nu}(x')\, \overset{1}{T}{}^{\alpha\nu}(x'') - \tfrac{1}{8}\, \overset{1}{T}{}^{\beta\nu}(x)\, \overset{1}{T}{}^{\kappa\kappa}(x')\, \overset{1}{T}{}^{\alpha\nu}(x'') + \tfrac{1}{16}\, \overset{1}{T}{}^{\alpha\beta}(x)\, \overset{1}{T}{}^{\kappa\kappa}(x')\, \overset{1}{T}{}^{\rho\rho}(x'') \Big] \frac{\partial^2 Y(x,x',x'')}{\partial x'_\alpha\, \partial x''_\beta} +$$

$$+ \Big[\tfrac{1}{8}\, \overset{1}{T}{}^{\beta\nu}(x)\, \overset{1}{T}{}^{\kappa\kappa}(x')\, \overset{1}{T}{}^{\beta\nu}(x'') + \tfrac{1}{8}\, \overset{1}{T}{}^{\kappa\kappa}(x)\, \overset{1}{T}{}^{\mu\nu}(x')\, \overset{1}{T}{}^{\mu\nu}(x'') + \tfrac{1}{16}\, \overset{1}{T}{}^{\kappa\kappa}(x)\, \overset{1}{T}{}^{\lambda\lambda}(x')\, \overset{1}{T}{}^{\rho\rho}(x'') -$$

$$- \tfrac{1}{16}\, \overset{1}{T}{}^{\mu\nu}(x)\, \overset{1}{T}{}^{\beta\nu}(x')\, \overset{1}{T}{}^{\beta\mu}(x'') \Big] \frac{\partial^2 Y(x,x',x'')}{\partial x'_\alpha\, \partial x''_\alpha} \Big\} \qquad (37)$$

donde se ha introducido la función de Green generatriz[22]

$$Y(x',x'',x''') = \int d^4x\; D(x-x')\, D(x-x'')\, D(x-x''') \qquad (38)$$

Para ella se cumple

$$2\, \frac{\partial^2 Y}{\partial x'_\rho\, \partial x''_\rho} = D(x-x')\, D(x-x'') - D(x-x')\, D(x'-x'') - D(x-x'')\, D(x''-x) \qquad (39)$$

y es fácil convencerse de que la variación de esta expresión dará para el término de fuerza el resultado correcto. La ecuación de movimiento resulta ser

$$- \frac{2\, \ddot{a}^\alpha}{(\eta^{\alpha\rho} - \dot{a}^\rho \dot{a}^\alpha)} = \tfrac{1}{2}\, \overset{1}{k} \sum_b m_b \int d\tau_b \Big\{ \big[(\dot a \dot b)^2 - \tfrac{1}{2}\big] D_{,\rho}(a-b) - 2\, \dot b_\rho\, (\dot a \dot b) \frac{\partial}{\partial \tau_a} D(a-b) \Big\} +$$

$$+ \tfrac{1}{2}\, \overset{1}{k}{}^2 \sum m_a m_b \int d\tau_b \int d\tau_c \Big\{ \big[\tfrac{1}{2} (\dot a \dot b)^2 (\dot b \dot c)^2 - (\dot a \dot b)(\dot a \dot c)(\dot b \dot c) + \tfrac{1}{4} (\dot a \dot b)^2 + \tfrac{1}{4} (\dot b \dot c)^2 - \tfrac{1}{8} \big] D_{,\rho}(a-b)\, D(b-c) +$$

$$\Big[\dot b_\rho \big((\dot a \dot c)(\dot b \dot c) - \tfrac{1}{2} (\dot a \dot b) - (\dot a \dot b)(\dot b \dot c)^2 \big) + \dot c_\rho\, (\dot a \dot b)(\dot b \dot c) \Big] D(b-c) \frac{\partial}{\partial \tau_a} D(a-b) + \big[(\dot a \dot b)^2 - \tfrac{1}{2}\big]\, \dot c_\rho\, \dot c^\sigma \cdot$$

$$\cdot\, D_{,\sigma}(a-b)\, D(a-c) + \big[\tfrac{1}{2} (\dot a \dot c)^2 - (\dot a \dot b)(\dot a \dot c)(\dot b \dot c) \big] D_{,\rho}(a-b)\, D(a-c) + \big[\dot b_\rho (\dot a \dot c) - \dot c_\rho (\dot a \dot b) \big] (\dot b \dot c) \cdot$$

$$\cdot\, \delta(a-c)\frac{\partial}{\partial \tau_a}\, \delta(a-b) + \Bigg\{\bigg[\Big[\big(\tfrac{1}{2}-(\dot a\dot b)^2\big]\frac{\partial}{\partial a_\rho} + 2\,\dot b_\rho(\dot a\dot b)\frac{\partial}{\partial \tau_a}\Big]\dot c^\lambda \dot c^\sigma + \Big[(\dot a\dot b)(\dot a\dot c)\frac{\partial}{\partial a_\rho} - 2\,\dot b_\rho(\dot a\dot c)\frac{\partial}{\partial \tau_a}\Big]\cdot$$

$$\dot b^\lambda \dot c^\sigma + \frac{1}{2}\Big[(\dot b\dot c)^2-\tfrac{1}{2}\Big]\dot a^\lambda \dot a^\sigma\frac{\partial}{\partial a^\rho} + 2\,(\dot a\dot c)(\dot b\dot c)\,\dot b^\lambda \dot a^\sigma\frac{\partial}{\partial a^\rho} + 2\,\dot b_\rho(\dot b\dot c)\,\dot a^\lambda \dot a^\sigma\frac{\partial}{\partial \tau_a}\bigg]\frac{\partial^2 Y}{\partial b^\sigma \partial c^\lambda} +$$

$$\Big[2(\dot a\dot c)(\dot b\dot c)\,\dot b^\lambda - \Big[(\dot b\dot c)^2-\tfrac{1}{2}\Big]\dot a^\lambda\Big]\frac{\partial^2 Y}{\partial \tau_a\,\partial b^\rho\,\partial c^\lambda}\Bigg\} \qquad (40)$$

coincidiendo con la expresión ya encontrada por Plebanski y Bertotti.[22] Esta ecuación de movimiento fué derivada por ellos suponiendo la ley geodésica para el movimiento de las singularidades.

Ya de (1) y (3) era de esperar que las trayectorias definidas por la ecuación (40) sean geodésicas del espacio-tiempo. Como verificación permítasenos hallar la ecuación de movimiento usual a partir de nuestra acción hasta el tercer orden:

$$\overset{1+2+3}{S} = \overset{2+3}{S}_G + \overset{1+2}{h}_{\mu\nu}\,\overset{1}{T}{}^{\mu\nu} + \frac{1}{2}\,\overset{1}{h}_{\mu\nu}\,\overset{1}{h}_{\kappa\lambda}\,\overset{1}{T}{}^{\mu\nu\kappa\lambda} + \sum_a \overset{1}{k}\int d\tau_a\,(\dot a^\mu \dot a_\mu)^{1/2}\, m_a \qquad (41)$$

Para hallar las ecuaciones de movimiento, teniendo en cuenta (11) y (12) calculamos

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial a_\rho} = \frac{1}{2}\,\overset{1+2}{h}_{\mu\nu,\rho}\,\frac{\dot a^\mu \dot a^\nu}{(\dot a_\sigma \dot a^\sigma)^{1/2}} - \frac{1}{4}\,\overset{1}{h}_{\mu\nu,\rho}\,\overset{1}{h}_{\kappa\lambda}\,\frac{\dot a^\mu \dot a^\nu \dot a^\kappa \dot a^\lambda}{(\dot a_\sigma \dot a^\sigma)^{3/2}} =$$

$$= \frac{1}{2}\,h_{\mu\nu,\rho}\,\dot a^\mu \dot a^\nu F + O(k^3) \qquad (42)$$

y
$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot a_\rho} = \frac{\dot a^\rho}{(\dot a_\sigma \dot a^\sigma)^{1/2}} + \overset{1+2}{h}_{\mu\rho}\,\frac{\dot a^\mu}{(\dot a_\sigma \dot a^\sigma)^{1/2}} - \frac{1}{2}\,\overset{1+2}{h}_{\mu\nu}\,\frac{\dot a^\mu \dot a^\nu \dot a^\rho}{(\dot a_\sigma \dot a^\sigma)^{3/2}} - \frac{1}{2}\,\overset{1}{h}_{\mu\rho}\,\overset{1}{h}_{\kappa\lambda}\,\frac{\dot a^\mu \dot a^\kappa \dot a^\lambda}{(\dot a_\sigma \dot a^\sigma)^{3/2}} +$$

$$+ \frac{3}{8}\,\overset{1}{h}_{\mu\nu}\,\overset{1}{h}_{\kappa\lambda}\,\frac{\dot a^\mu \dot a^\nu \dot a^\kappa \dot a^\lambda \dot a^\rho}{(\dot a_\sigma \dot a^\sigma)^{5/2}} = \Big[\dot a^\rho + \overset{1+2}{h}_{\mu\rho}\,\dot a^\mu\Big]F + O(k^3)$$

(43)

donde se ha definido

$$F \equiv \frac{1}{(\dot a_\sigma \dot a^\sigma)^{1/2}}\left[1-\frac{1}{2}\overset{1+2}{h}_{\mu\nu}\frac{\dot a^\mu \dot a^\nu}{(\dot a_\sigma \dot a^\sigma)}+\frac{3}{2}\overset{1}{h}_{\mu\nu}\overset{1}{h}_{\kappa\lambda}\frac{\dot a^\mu \dot a^\nu \dot a^\kappa \dot a^\lambda}{(\dot a_\sigma \dot a^\sigma)^2}\right] \qquad (44)$$

Ahora podemos elegir el parámetro arbitrario S de tal manera que se satisfaga [2]

$$\frac{d}{ds}F = 0 \qquad (45)$$

de manera que tendremos

$$\frac{d}{ds}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot a^\rho} = \left[\ddot a^\rho + \overset{1}{h}_{\mu\rho}\ddot a^\mu + \overset{1+2}{h}_{\mu\rho,\nu}\dot a^\mu \dot a^\nu\right]F + O(k^3) \qquad (46)$$

De (43) y (46) resultan las ecuaciones de movimiento

$$F\left[\ddot a^\rho + \overset{1}{h}_{\mu\rho}\ddot a^\mu + \overset{1+2}{h}_{\mu\rho,\nu}\dot a^\mu \dot a^\nu - \frac{1}{2}\overset{1+2}{h}_{\mu\nu,\rho}\dot a^\mu \dot a^\nu\right] = 0 \qquad (47)$$

o sea

$$\ddot a^\mu(\delta_{\mu\rho} + \overset{1}{h}_{\mu\rho}) + \frac{1}{2}\dot a^\mu \dot a^\nu(2\overset{1+2}{h}_{\mu\rho,\nu} - \overset{1+2}{h}_{\mu\nu,\rho}) = 0 \qquad (48)$$

Podemos resolver la (48) para $\ddot a^\alpha$ multiplicándola por $(\delta_{\rho\alpha} - \overset{1}{h}_{\alpha\rho})$ con lo que se obtiene

$$\ddot a^\alpha + \frac{1}{2}\dot a^\mu \dot a^\nu\left[(2\overset{1+2}{h}_{\nu\rho,\mu} - \overset{1+2}{h}_{\nu\mu,\rho}) - h_\rho{}^\lambda(2\overset{1}{h}_{\nu\lambda,\mu} - \overset{1}{h}_{\nu\mu,\lambda})\right] + O(k^3) \qquad (49)$$

que es la aproximación de segundo orden a la ecuación de la geodésica

$$\frac{d^2 a^\alpha}{ds^2} + \Gamma^\alpha_{\mu\nu}\frac{da^\mu}{ds}\frac{da^\nu}{ds} = 0 \qquad (50)$$

LAS INTEGRALES SUPERFICIALES PARA LA ACCION DEL CAMPO GRAVITATORIO

Hemos considerado muy someramente esta cuestión para la aproximación lineal y la hemos dejado de lado en la segunda aproximación. Esto último para no aumentar la complejidad de las expresiones, ya de por sí demasiado largas. Ahora las consideraremos aparte y haremos la interesante observación de que la situación se simplifica más de lo esperado.

Consideremos en primer lugar términos del tipo $\ell_{\mu\nu}\,\ell_{\tau\mu,\alpha}\,\ell_{\alpha\nu,\tau}$ etc. Toda integración por partes efectuadas en ellos o en sus expresiones substituídas dará lugar a integrales superficiales que se anulan en el límite para una solución, avanzada, retardada o simétrica de los campos, puesto que cada término se comporta como $\frac{1}{r}$. Por ello, para establecer la validez de nuestra expresión (37) como buena acción de Fokker será necesario tener en cuenta sólo los términos provenientes de la integración por partes en (36) y los hechos previamente a (35) al aplicar la condición de De Donder. Agrupando todas las integrales superficiales que no se anulan en el límite y obtenidas al variar la acción antes de aplicarle ninguna condición de gauge, encontraremos que corresponden al término de tercer orden de la expresión

$$\oint_{\Sigma}^{\alpha} d^3 s \; \delta \overset{1+2}{\ell}_{\tau\mu} \overset{1+2}{F}_{\tau\mu\alpha} \underset{\lim r \to \infty}{\Longrightarrow} 0 \,, \qquad (51)$$

de manera que resultarán de esta acción en tercer orden condiciones de contorno que involucrarán a $\overset{2}{F}_{\tau\mu\alpha}$ una vez tenidas en cuenta las que afectaban a $\overset{1}{F}_{\tau\mu\alpha}$ en el orden anterior.

En general, puede repetirse este argumento para los órdenes superiores y se puede ver fácilmente que las condiciones de contorno se originarán de integraciones por partes en los términos cuadráticos en los $\overset{i}{\ell}_{\mu\nu}$ y que ellos corresponden al desarrollo en serie de

$$\oint_{\Sigma}^{\alpha} d^3 s \; \delta g_{\tau\mu} F_{\tau\mu\alpha} \underset{\lim r \to \infty}{\Longrightarrow} 0 \quad ; \quad F_{\tau\mu\alpha} = \sum_i \overset{i}{F}_{\tau\mu\alpha} \qquad (52)$$

que llevan finalmente al establecimiento para $F_{\tau\mu\alpha}$ de relaciones similares a las obtenidas para el tensor $F_{\mu\nu}$ en el Capítulo I. No obstante el interés que presenta esta discusión, así como la consideración detallada del problema de radiación gravitatoria serán dejadas de lado por escapar al marco de este trabajo.

Es inmediato generalizar a la aproximación lineal el procedimiento usado en el capítulo I para obtener el principio de Fokker para potenciales simétricos o la expresión para el frenado por radiación para potenciales retardados. Todo ello se hará, por supuesto, a partir de la acción buena para potenciales simétricos:

$$S^{B} = \int d^4x \left\{ 2 \overset{1}{h}_{\tau\mu,\alpha} \overset{1}{h}_{\alpha\mu,\tau} - \overset{1}{h}_{\tau\mu,\alpha} \overset{1}{h}_{\tau\mu,\alpha} - 2 \overset{1}{h}_{\lambda\mu,\mu} \overset{1}{h}_{\tau\tau,\lambda} \right\} -$$

$$- \oint_{\Sigma}^{\alpha} d^3s \; \overset{1}{h}_{\mu\tau} \overset{1}{F}_{\mu\tau\dot{\alpha}} \qquad (53)$$

En el próximo orden, se sustraerá de la acción la integral superficial

$$\frac{1}{2} \oint_{\Sigma}^{\alpha} d^3S \left\{ \overset{2}{h}_{\mu\tau} \overset{1}{F}_{\mu\tau\dot{\alpha}} + \overset{1}{h}_{\mu\tau} \overset{2}{F}_{\mu\tau\dot{\alpha}} \right\}$$

Para llegar finalmente a una acción buena para potenciales simétricos, como puede verificarse en forma análoga a los casos anteriores

CONCLUSIONES

Hemos establecido la acción de Fokker hasta el segundo orden de aproximación en el campo gravitatorio en interacción con un sistema material. En particular las ecuaciones de movimiento dan para las trayectorias las geodésicas de la variedad en ese orden de aproximación. No se ha hecho ninguna restricción para la magnitud de las velocidades y los resultados son formalmente Lorentz covariantes como expresión de que el procedimiento de aproximación es para movimiento rápido.

La expresión para el primer orden es bastante manejable y compacta. No así la del próximo orden que es una expresión compleja que probablemente se resistirá a la interpretación física. No obstante, un notable subproducto de nuestro cálculo es la sencilla expresión $F_{\mu\tau\dot{\alpha}}$ que debe jugar un rol importante en la descripción de la radiación gravitatoria y su frenado para todos los órdenes, de acuerdo con la discusión que sólo hemos llevado a cabo sistemáticamente para el caso electromagnético en el Capítulo I.

Cap. IV - EL GAUGE DE RADIACION PARA EL CAMPO GRAVITATORIO EN PRIMERA APROXIMACION

Uno de los problemas fundamentales de la dinámica de toda teoría covariante es la determinación de todos los verdaderos observables y de su expresión explícita en términos de las vatiables usuales de la teoría. Los verdaderos observebles[1] son aquellas variables dinámicas que son independientes de toda elección de gauge o sistema de coordenadas y que bastan para determinar unívocamente el problema de Cauchy de la teoría.

La acción del campo electromagnético en el gauge de radiación se caracteriza por estar expresada sólo en términos de las componentes transversales del campo A_r que son invariantes ante una transformación de gauge. Las otras componentes del potencial han desaparecido o intervienen sólo en términos de interacción instantánea. Dichas dos componentes transversas A_r^T son gauge invariantes y determinan el problema de Cauchy de la teoría, siendo los dos verdaderos observables de la misma.

En el caso del campo gravitatorio se hace importante la búsqueda de dichos observables verdaderos, no sólo para la interpretación de la teoría, o las posibilidades de cuantificación subsecuentemente a su reducción a la forma hamiltoniana, sino por la tentadora reducción que ella involucra en el número de variables dinámicas, que en este caso se reduce de 10 a 2.

Los esfuerzos por hallar expresiones explícitas para dichos dos observables han sido vanos en el caso general y sólo han dado resultado en la primera aproximación, es decir, en la teoría lineal. Las componentes gauge invariantes del tensor métrico son en esa aproximación $\overset{1}{h}{}^{TT}_{rs}$, la parte transversa de traza nula de la parte espacial del tensor métrico,[2] esto es las componentes que satisfacen por definición

$$\overset{1}{h}{}^{TT}_{rs,s} \equiv 0 \quad , \quad \overset{1}{h}{}^{TT}_{rr} \equiv 0 \quad , \quad r,s = 1,2,3 \qquad (1)$$

LA ACCION DE FOKKER PARA EL CAMPO GRAVITATORIO EN PRIMERA APROXIMACION Y EN EL GAUGE DE RADIACION

Tal como lo hemos hecho en el capítulo II para el campo electromagnético, podemos seguir dos caminos para hallar la acción de Fokker correspondiente al campo gravitatorio en primera aproximación y en el gauge de radiación. Podemos proceder a una simple substitución de las soluciones correspondientes en la acción buena usual o bien podemos seguir al camino de más abajo, por el cual deseamos mostrar que:

La parte de la acción de Fokker debida a la interacción gravitatoria de un sistema material queda determinada por el requerimiento de covariancia Lorentz formal, y por estar dada la parte gauge invariante de dicha interacción por

$$\int d^4x\, d^4x'\; T_{rs}^{TT}(x)\, D(x-x')\, T_{rs}^{TT}(x') \qquad (2)$$

con $T_{\mu\nu,\nu} = 0$ (3)

Para mostrarlo bastará evaluar (2) y para ello comenzaremos por dar la descomposición de todo tensor simétrico[21]

$$T_{rs} = T_{rs}^{T} - t_{s,r} - t_{r,s} - \tau_{,rs} \qquad (4)$$

con $T^{T}_{rs,s} \equiv 0$ y $t_{r,r} + \tau_{,rr} = 0$ (5)

De (4) y (5) resulta

$$T_{rs,s} = \dot{T}_{r0} = t_{r,ss} \;;\; \dot{T}_{r0} \equiv T_{r0,0} \qquad (6)$$

de donde tenemos una solución para t_r:

$$t_r(x) = \int d^3x' \frac{\dot{T}_{r0}(\underline{x}',t)}{-4\pi|\underline{x}-\underline{x}'|} \equiv \dot{\tau}_{r0} \qquad (7)$$

En (7) ha quedado implícitamente definido el símbolo τ_{r0} que satisface

$$\tau_{r0,ss} = T_{r0} \qquad (8)$$

A su vez para τ tenemos que

$$\tau_{,rr} = -t_{r,r} = -\nabla_r \int d^3x' \frac{\dot{T}_{ro}(\underline{x}',t)}{-4\pi|\underline{x}-\underline{x}'|} = \int d^3x \frac{\ddot{T}_{oo}(\underline{x}',t)}{-4\pi|\underline{x}-\underline{x}'|} \equiv \ddot{\tau}_{oo} \qquad (9)$$

Por otro lado la parte de traza nula del tensor T^T_{rs} es[21]

$$T_{rs}^{TT} = T^T_{rs} - \frac{1}{2}\left(\delta_{rs} T^T_{mm} - \frac{1}{\nabla^2} T^T_{mm,rs}\right), \qquad (10)$$

donde $\frac{1}{\nabla^2}$ es el operador inverso del operador laplaciano. Según nos lo hemos propuesto calcularemos la expresión (2)

$$\int d^4x \int d^4x' \, T^{TT}_{rs} T'^{TT}_{rs} D(x-x') = \int d^4x \int d^4x' \Big[\Big(T_{rs}T'_{rs} - 2t_{r,s}t'_{r,s} + \tau_{,rr}\tau'_{ss} -$$

$$- \frac{1}{2}\Big(T_{mm}T'_{nn} + 2\tau_{,mm}T'_{nn} + \tau_{,mm}\tau'_{,nn}\Big)\Big] D(x-x') , \qquad (11)$$

donde hemos usado (4) y (10) y hemos dejado de lado varias integrales superficiales bajo el supuesto de que o bien tienden a cero o bien su variación es nula de acuerdo con las condiciones de contorno y las discusiones de los capítulos anteriores. Esto mismo haremos en lo que sigue, para dar finalmente más adelante una somera discusión de las integrales típicas que aparecen en cada integración por partes. Procedemos así a evaluar el segundo término de la (11)

$$-2\int d^4x \int d^4x' \, t_{r,s} t'_{r,s} \, D(x-x') = -2\int d^4x \int d^4x' \, \nabla_s \dot{\tau}_{ro} \nabla'_s \dot{\tau}'_{ro} \, D(x-x') =$$

$$= 2\int d^4x \int d^4x' \, \nabla_s \tau_{ro} \nabla_s \tau_{ro} \frac{\partial^2}{\partial t^2} D(x-x') . \qquad (12)$$

Recordando ahora que

$$-\nabla^2 D(x-x') + \frac{\partial^2}{\partial t^2} D(x-x') = \delta^4(x-x') \qquad (13)$$

resulta que la (12) puede escribirse

$$-2\int d^4y \int d^4y' \, t_{r,s} t'_{r,s} D(x-x') = 2\int d^4x \, \nabla_s \tau_{ro} \nabla'_s \tau_{ro} + 2\int d^4x \int d^4x' \nabla_s \tau_{ro} \nabla'_s \tau_{ro} \nabla^2 D =$$

$$= 2\int d^4x \int d^3x' \frac{T_{r0}(\underline{x},t)\, T_{r0}(\underline{x}',t)}{4\pi\,|\underline{x}-\underline{x}'|} - 2\int d^4x \int d^4x'\, T_{r0}\, T'_{r0}\, D(x-x') \qquad (14)$$

Calcularemos a continuación el tercer término de la (11)

$$\int d^4x \int d^4x'\, \tau_{,rr}\, \tau'_{,ss}\, D(x-x') = \int d^4x \int d^4x'\, \ddot{\tau}_{00}\, \ddot{\tau}'_{00}\, D(x-x') =$$

$$= \int d^4x \int d^4x'\, \dot{\tau}_{00}\, \dot{\tau}'_{00} \frac{\partial^2}{\partial t^2} D(x-x') = \int d^4x \int d^4x'\, \dot{\tau}_{00}\, \dot{\tau}'_{00} - \int d^4x \int d^4x'\, \dot{\tau}_{00}\, \dot{\tau}'_{00}\, \nabla^2 D(x-x') \qquad (15)$$

A su vez, el segundo término de la (15) es

$$-\int d^4x \int d^4x'\, \dot{\tau}_{00}\, \dot{\tau}'_{00}\, \nabla^2 D(x-x') = \int d^4x \int d^4x'\, \tau_{00}\, \tau'_{00}\, \nabla^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} D(x-x') =$$

$$= \int d^4x\, \nabla^2 \tau_{00}\, \tau'_{00} + \int d^4x \int d^4x'\, \nabla^2 \tau_{00}\, \nabla^2 \tau'_{00}\, D(x-x') \quad ; \qquad (16)$$

con lo cual la (15) resulta ser igual a

$$\int d^4x \int d^4x'\, \tau_{,rr}\, \tau'_{,ss}\, D(x-x') = -\int d^4x \int d^3x' \int d^3x'' \frac{\dot{T}_{00}(\underline{x}',t)\, \dot{T}_{00}(\underline{x}'',t)}{16\pi^2\, |\underline{x}-\underline{x}'|\,|\underline{x}-\underline{x}''|} -$$

$$- \int d^4x \int d^3x' \frac{T_{00}(x)\, T_{00}(\underline{x}',t)}{4\pi\,|\underline{x}-\underline{x}'|} + \int d^4x \int d^4x'\, T_{00}(x)\, T_{00}(x')\, D(x-x'). \qquad (17)$$

Finalmente evaluaremos el quinto término de la (11)

$$-\int d^4x \int d^4x'\, \ddot{\tau}_{00}\, T'_{rr}\, D(x-x') = \int d^4x \int d^4x'\, \tau_{00}\, T'_{rr} \frac{\partial^2}{\partial t^2} D(x-x') =$$

$$= -\int d^4x \int d^3x' \frac{T_{00}\, T'_{rr}}{4\pi\,|\underline{x}-\underline{x}'|} + \int d^4x \int d^4x'\, T_{00}\, T'_{rr}\, D(x-x'). \qquad (18)$$

Reemplazando estos resultados en la (11) resulta:

$$\int d^4x \int d^4x' \, T_{rs}^{TT} \, T_{rs}^{TT'} \, D(x-x') = \int d^4x \int d^4x' \Big[\left(T_{rs} T'_{rs} - 2 T_{r0} T'_{r0} + T_{00} T'_{00} \right) -$$

$$- \frac{1}{2} \left(T_{rr} T'_{ss} - 2 T_{00} T'_{rr} + T_{00} T'_{00} \right) \Big] + \int d^4x \int d^3x' \frac{1}{4\pi |\underline{x}-\underline{x}'|} \Big[2 T_{r0}(\underline{x},t) \, T_{r0}(\underline{x}',t) -$$

$$- T_{00}(\underline{x},t) \, T_{rr}(\underline{x}',t) - \frac{1}{2} T_{00}(\underline{x},t) \, T_{00}(\underline{x}',t) \Big] - \frac{1}{2} \int d^4x \int d^3x' \int d^3x'' \frac{\dot{T}_{00}(\underline{x}',t) \, \dot{T}_{00}(\underline{x}'',t)}{16\pi^2 |\underline{x}-\underline{x}'| |\underline{x}-\underline{x}''|} . \qquad (19)$$

Se hace ahora evidente que para obtener de la expresión gauge-invariante (11) una interacción formalmente Lorentz covariante será necesario restarle a dicha expresión (11) las dos últimas integrales del segundo miembro de (19) que representan interacciones instantáneas de tipo coulombiano, la primera y de tipo coulomb-coulombiano la segunda.[19,20] En efecto la parte de interacción de la acción de Fokker resulta ser entonces

$$\int d^4x \int d^4x' \, T_{rs}^{TT} \, T_{rs}^{TT'} \, D(x-x') - \int d^4x \int d^3x' \frac{1}{4\pi |\underline{x}-\underline{x}'|} \Big[2 T_{r0} T'_{r0} - T_{00} T'_{rr} - \frac{1}{2} T_{00} T'_{00} \Big] +$$

$$+ \int d^4x \int d^3x' \, d^3x'' \frac{\dot{T}'_{00} \, \dot{T}''_{00}}{16\pi^2 |\underline{x}-\underline{x}'| |\underline{x}-\underline{x}''|} = \int d^4x \int d^4x' \left(T_{\mu\nu} T'_{\mu\nu} - \frac{1}{2} T_{\kappa\kappa} T'_{\lambda\lambda} \right) D(x-x') \qquad (20)$$

que es justamente la expresión formalmente Lorentz covariante que hemos encontrado para la aproximación lineal en el campo gravitatorio en el capítulo III.

Hemos mostrado entonces como la interacción (20) queda determinada por el requerimiento de covariancia formal de Lorentz y por la expresión (2) para la parte gauge invariante de la interacción, suponiendo verificada la ecuación de continuidad (3). Queremos hacer aquí las siguientes observaciones:

1º) la relación $T_{\mu\nu,\nu} = 0$ se cumple sólo en orden cero en el campo gravitatorio, pero las correcciones a la misma sólo introducirán en (20) términos de orden superior. En general se verificará $T_{\mu\nu;\nu} = 0$ con la derivada covariante indicada por un punto y coma.

2º) La covariancia formal de Lorentz en un procedimiento por aproximaciones sucesivas refleja el hecho de que la métrica de orden cero es minkowskiana. Ello significa que se puede reemplazar el sistema de coordenadas original por todo otro derivado del mismo a partir de una transformación de Lorentz local, con lo cual todos los tensores de nuestras ecuaciones sufren la misma transformación. Como el resultado no debe cambiar se tiene entonces la covariancia formal de Lorentz de nuestras expresiones.

3º) Las transformaciones de gauge afectan tanto al tensor métrico como al $T_{\mu\nu}$. Es sabido que el grupo de gauge para la aproximación lineal es el de transformaciones de coordenadas del tipo

$$\bar{x}^{\mu} = x^{\mu} + \overset{1}{\xi}{}^{\mu}(x) \qquad (21)$$

en que $\overset{1}{\xi}_{\mu}(x)$ es una función arbitraria de las coordenadas, infinitésima de 1er orden en el parámetro de expansión. De aquí se deduce la fórmula para el tensor métrico transformado $\bar{g}_{\mu\nu}$ en la misma aproximación

$$\overset{0+1}{\bar{g}}_{\mu\nu} = \overset{0+1}{g}_{\mu\nu} + \overset{1}{\xi}{}^{\mu}_{,\nu} + \overset{1}{\xi}{}^{\nu}_{,\mu} \quad , \qquad (22)$$

de donde se sigue inmediatamente la invariancia de gauge de g^{T}_{ij}. Para el tensor $T_{\mu\nu}$ tenemos que en general

$$\overset{1}{\bar{T}}_{\mu\nu} = \overset{1}{T}_{\mu\nu} + 2\,\overset{1}{\xi}_{\nu,k}\,\overset{1}{T}_{k\nu} + O(\kappa^{3}) \quad ; \qquad (23)$$

la transformación inducirá correcciones de orden superior en nuestras expresiones. Es decir, a los efectos de la aproximación lineal, los $T_{\mu\nu}$ son gauge invariantes. De aquí concluímos que nuestra expresión "parte gauge invariante de la acción" para (2) debe ser tomada con cautela, en el sentido de que dicho criterio de invariancia no determina que sólo T^{TT}_{rs} aparezca en la misma.

4º) Sólo haremos aquí una somera referencia a las integrales superficiales que aparecen en el curso de nuestro cálculo. Si bien pueden ser dejadas de lado de satisfacerse las condiciones de contorno naturales o o las de absorción completa, puede ser interesante ponerlas en términos de $F_{\sigma\mu\kappa}$. En analogía con la situación en electromagnetismo.

resultarán ciertas condiciones para $F_{r\mu i}$, donde r indica la componente radial. Si se las supone válidas para soluciones radiativas, ella puede dar un criterio a comparar con otros ya establecidos,[21] lo cual contribuirá a ahondar en el significado de $F_{\mu\sigma\chi}$, el gauge de radiación y las soluciones radiativas en gravitación.

CONCLUSION FINAL

Hemos comenzado nuestra labor tratando de verificar una operación por demás sencilla a efectuarse en la acción usual para un campo en interacción con un sistema material: una simple substitución de las variables del campo por sus soluciones. Y nuestro camino nos ha deparado sorpresas que intuíamos al comenzarlo. Hemos debido contemplar con ojo crítico la usual descripción del sistema por una acción definida en un dominio no compacto. Como toda crítica a procedimientos clásicos bien establecidos ella es por necesidad un poco insegura y necesitamos del tiempo necesario para tomar perspectiva y convencernos de la corrección de nuestro punto de vista.

De todas maneras, la acción usual no es buena para describir la situación en la que la acción de Fokker se siente a sus anchas y viceversa. No es compatible con este último un campo libre de radiación, ni puede describir un movimiento generado por acciones retardadas si no se hacen suposiciones extras ad hoc sobre la naturaleza de todo el sistema. Pero todas estas limitaciones pueden estar muy bien cimentadas en consideraciones de orden físico. Después de todo, la elección de potenciales retardados en la solución es arbitraria y la estructura de un universo de absorción completa puede muy bien dar la explicación del papel que tienen en la determinación del movimiento de las cargas.

Asimismo, la misma formulación usual de campos no aparece a nuestros ojos desprovista de contradicciones. En realidad ninguna solución radiativa la hace estacionaria y no sabemos si existe una solución físicamente aceptable que cumpla con las condiciones naturales de contorno. Nuevamente la hipótesis de Feynman y Wheeler sobre el universo salvaría la situación aunque es temprano para decidir si es la única salida disponible. Hemos tratado de sumar una divergencia espacial a la acción sin agregar grados de libertad que describiesen la dinámica del sistema que suponemos absorbería la radiación. Son necesarias restricciones equivalentes al congelamiento de los grados de libertad del campo libre de radiación para comprobar que soluciones estrictamente calculadas a partir del movimiento de las cargas con potenciales simétricos hacen estacionaria a dicha acción completada.

Esta es equivalente a la acción de Fokker para la interacción electromagnética y el agregado de la integral superficial no tiene correlato alguno con ningún agregado físico al sistema de partículas. Desde este punto de vista, la acción usual era incompleta para describirlo.

No hemos podido hacer nada similar para potenciales retardados, salvo evaluar cuanto debe agregársele a la acción para hacerla estacionaria. Este requerimiento deja determinado el frenado de radiación y con ella, el campo de radiación superpuesto sobre el sistema con potenciales simétricos.

Hemos explotado nuestros hallazgos para el caso gravitatorio y recogido diversos frutos. A la evaluación de una acción de Fokker para el campo aproximado en segundo orden y movimientos rápidos relativistas, la discusión llevada sobre los mismos lineamientos que en electromagnetismo permite hallar un ente que sería el análogo al tensor campo electromagnético a los efectos de la discusión de todos los problemas relacionados con la radiación gravitatoria. Su expresión es sencilla y calculable a todos los órdenes.

Este ente no tiene un carácter tensorial bien definido en uno de sus índices y está relacionado con el momento canónicamente conjugado al tensor métrico. La divergencia aplicada a su último índice da como resultado el tensor de enrgía-impulso de la materia. La consideración detallada de sus propiedades geométricas, dinámicas y físicas ha quedado fuera del marco de este trabajo, pero nosotros confiamos que pueda ser un punto de partida para un enfoque del discutido problema, ya sea con una contribución nueva o abonando con otros argumentos en favor de alguno ya conocido.

Confiamos más en el programa arriba esbozado que en la discusión de las ecuaciones de movimiento del sistema. Las que obtuvimos en segundo orden son descorazonadamente complicadas y sólo las de primer orden son algo más compactas y manejables. Lo mismo puede decirse de las respectivas acciones de Fokker que obtuvimos sin mayores dificultades. A este respecto, y para la aproximación lineal, una técnica desarrollada puramente desde el punto de vista de la acción de Fokker, permite hallar directamente, en una operación y con gran economía de hipótesis, dos expresiones matemáticas distintas para la acción: una correspondiente a una elección para los campos del gauge de De Donder y la otra al gauge de radiación. Es curioso que en ningún momento deba apelarse al conocimiento de la acción o de las ecuaciones para el campo gravitatorio.

Sólo aparecen involucradas en las interacciones no instantáneas las partes transversa y de traza nula de las fuentes. Se interpreta este hecho como una prueba de que la interacción de las corrientes con el campo de radiación está mediada por la estructura de las fuentes. En efecto, las partes involucradas son arbitrarias por no estar restringidas pòr las ecuaciones de conservación, pero están acopladas a las partes longitudinales por el requerimiento de dar lugar a una estructura dada, por ejemplo un ente local en el modelo de singularidades puntuales.

Esperamos que este tipo de consideraciones pueda ser útil en el estudio del movimiento de singularidades y pueda agregarse al problema de su interacción con el campo de radiación. En este sentido, esperamos que el establecimiento de nuestra fórmula general para el gauge de radiación en la aproximación lineal sea también un primer paso fructífero.

Hemos soslayado o dejado abiertos más problemas de los que hemos resuelto. En nuestro descargo aduciremos que ellos son tributarios de las más serias cuestiones en la teoría clásica de campos y en especial de la relatividad generalizada. Quizás, el más serio, la naturaleza y la expresión explícita de los verdaderos observables de la teoría. Se han recogido algunos resultados, pero por sobre todo se ha establecido el firme deseo de proseguir en el futuro con la técnica de describir completamente a los sistemas mediante las respectivas acciones y no usar éstas como meros recursos formales para derivar las ecuaciones de movimiento. Y también de llevar la comparación de las distintas filosofías en la descripción de los mismos al nivel de las respectivas acciones, teniendo en cuenta toda la información que pueda extraerse de ellas.

Saul Schwimmer

AGRADECIMIENTOS

Debo agradecer en primer término al profesor J.L.Anderson por haberme sugerido este trabajo y por haberme guiado a través del mismo con sus críticas, sus consejos y con su aliento. También debo agradecer al profesor R.Schiller por haber despertado mi interés por el problema del movimiento de singularidades.

Agradesco al profesor C.Bollini por algunas conversaciones en las que he usufructuado de sus comentarios críticos. Asimismo vaya mi reconocimiento a los licenciados A.Kalnay y J.Rubinstein por varias estimulantes discusiones.

A una beca de la universidad de Buenos Aires le debo la posibilidad material de haberme trasladado al extranjero para compenetrarme con el estado actual de diversos problemas de la física moderna.

NOTAS BIBLIOGRAFICAS

(1) L.Landau y E.Lifshitz, The Classical Theory of Fields (Addison-Wesley Press, Cambridge, 1951)

(2) V.A.Fock, Theory of Space, Time and Gravitation

(3) K.Schwarzschild, Göttinger Nachrichten 128, 132 (1903)

(4) H.Tetrode, Zeits. f. Physik 10, 317 (1922)

(5) A.D.Fokker, Zeits. f. Physik, 58, 386 (1929)

(6) " " " Physica 9, 33 (1929) y 12, 145 (1932)

(7) A.Einstein, L.I.Infeld y B.Hoffmann, Ann. of Math., 39, 66 (1938)

(8) P.A.M. Dirac, Proc. Roy, Sco., A 167, 148 (1938)

(9) L.Infeld y P.R.Wallace, Phys.Rev. 57,797 (1940)

(10)R.P.Feynman y J.A.Wheeler, Rev.Mod.Phys. 21, 425 (1949)

(11)P.Havas, Phys.Rev. 74, 456 (1948)

(12)R.P.Feynman y J.A.Wheeler, Rev.Mod.Phys. 17, 157 (1945)

(13)P.G.Bergmann y J.H.M Brunings, Rev.Mod.Phys. 21, 480 (1949)

(14)P.Havas, Phys.Rev. 87, 309 (1952)

(15)" " " , " " 108, 1351 (1957)

NOTAS BIBLIOGRAFICAS (continuación)

(16) E.Newman y P.G.Bergmann, Rev. Mod. Phys. **29**, 443 (1957)

(17) J.L.Anderson , Phys. Rev. **110**, 1197 (1958)

(18) J.Plebanski y S. Bazanski, Acta Phys. Polon. **18**, 307 (1959)

(19) J.L.Anderson, Proc. of the Royaumont Conference

(20) J.L.Anderson y S.Schiminovich, Comunicación a la sesión de Nueva York de Enero de 1960 de la Am.Phys.Soc.

(21) R.Arnowitt, S.Deser y C.W. Misner, Energy and the Criteria for Radiation in General Relativity, preprint, Princeton.

(22) J.Plebanski y B.Bertotti, Nuovo Cimento **21** (1961)