Algunas observaciones sobre multiplicadores, y cuestiones conexas

Merlo, Juan Carlos

1961

Tesis presentada para obtener el grado de Doctor en Ciencias Matemáticas de la Universidad de Buenos Aires

UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales

Algunas observaciones sobre multiplicadores, y cuestiones conexas.

Juan Carlos Merlo

Resumen de la Tesis presentada para optar al título de Doctor en Ciencias Matemáticas

Año 1961

En la teoría de los núcleos singulares de convolución se estudia cuáles son las condiciones que debe satisfacer una sucesión funcional k_n para que se verifique la relación $k_n * f \rightarrow f$ para determinadas funciones f, y donde la convergencia se entiende en sentido puntual o en norma L^p. Es bien sabido que la teoría engloba como casos particulares a ciertos núcleos clásicos, importantes en las aplicaciones, como ser los núcleos de Dirichlet, Poisson, etc. Sin embargo, sólo se suelen dar condiciones suficientes para la convergencia, pero no necesarias.

En este trabajo prescindimos de la convergencia puntual, y damos condiciones necesarias y suficientes para la convergencia en norma, pero no sólo para los espacios L^p sino para los espacios de Sobolev L^p_ℓ, y además generalizando el problema para núcleos μ_n que sean medidas de Radon.

Daremos una idea del método seguido, prescindiendo de todo rigor. Si T_n es el operador definido mediante $T_n(f) = \mu_n * f$, bajo ciertas condiciones se cumple $\widehat{T_n f} = h_n \hat{f}$, donde $\hat{}$ indica la transformada de Fourier, y $h_n = \hat{\mu}_n$, lo cual muestra que T_n es un operador multiplicador.

El problema puede plantearse pues a grandes rasgos de esta manera: averiguar cuándo T_n está bien definido y es un operador continuo de L^p_ℓ en L^p_ℓ, y converge hacia el operador identidad.

Entonces se trata pues de un caso particular del problema siguiente: a) averiguar qué condiciones debe cumplir una función h para que sea un multiplicador de L^p_k en L^q_s; b) si $T_n = T(h_n)$ es el operador definido por el multiplicador h_n, averiguar cuándo la sucesión T_n converge fuertemente. De esta cuestión, que trasciende del problema primitivamente planteado, nos ocupamos también en el trabajo. Naturalmente, la parte a) ofrece muchas dificultades, pues se trata de un problema abierto aún para el caso de multiplicadores entre espacios L^p.

A continuación resumiremos brevemente el contenido del trabajo.

En § 3 tratamos el problema a). El principal resultado que obtenemos es un teorema que reduce el estudio de multiplicadores entre espacios de Sobolev al de los espacios de Lebesgue. Asimismo, agregamos una generalización referente a multiplicadores matriciales. Hacemos también algunas consideraciones referentes a multiplicadores entre espacios de Lebesgue.

En § 4 estudiamos la topología fuerte en los espacios de multiplicadores. En primer lugar demostramos la completidad de esos espacios. Luego estudiamos la caracterización de la convergencia. Lo logramos en algunos casos particulares para multiplicadores entre espacios de Lebesgue, y respecto a los de Sobolev, de la misma manera que en la sección anterior, reducimos el problema al de los espacios de Lebesgue.

En §5 aplicamos los resultados anteriores para resolver el problema de los núcleos singulares de convolución.

En §6 resolvemos el mismo problema para la convergencia en L^2 de núcleos generados por sistemas ortogonales -que en general no serán de convolución-, dando una condición necesaria y suficiente para la completidad de sistemas. El procedimiento seguido no utiliza la teoría de multiplicadores.

En las últimas secciones extendemos el problema al caso en el cual en lugar de la medida ordinaria de Lebesgue, se supone dada una medida de Radon cualquiera.

En §7 estudiamos la derivación respecto de la medida, para terminar definiendo los espacios de Sobolev correspondientes.

En §8 consideramos en primer lugar el problema de la determinación de una suma tal que la medida dada sea su medida de Haar, y con ella definimos la convolución. Esto permite introducir la definición de tranformada de Fourier, de manera que cumpla la propiedad multiplicativa. Los razonamientos han sido hechos para el caso unidimensional, agregando finalmente la generalización a varias dimensiones en algunos casos particulares.-

UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales

Algunas observaciones sobre multiplicadores, y cuestiones conexas.

Juan Carlos Merlo

Tesis presentada para optar al Título de

Doctor en Ciencias Matemáticas

Año 1961

En la redacción de este trabajo he sido dirigido y aconsejado por el prof. Dr. Mischa Cotlar, circunstancia esencial sin la cual no hubiera podido ser llevado a cabo. La idea del mismo ha sido originada por un problema sobre núcleos singulares, sugerido por el prof. Dr. Alberto González Domínguez. Por otra parte, la generalización de ciertos resultados referenctes a la convolución en varias dimensiones parece conducir a un interesante problema geométrico, respecto del cual he sido aconsejado por el prof. Dr. Luis A. Santaló, y confío en poder desarrollarlo en un trabajo posterior.

Tales razones comprometen ya mi reconocimiento y admiración a las personas mencionadas. Sin embargo, estas circunstancias aisladas no pueden dar una idea exacta de su influencia sobre mí, puesto que ésta se ha prolongado a través de toda mi carrera por medio de cursos, contacto personal, consejos, lo cual hace que mi agradecimiento se deba a razones más profundas que la sola redacción del presente trabajo.

Muchas otras personas del claustro de Matemáticas comprometen sin duda mi gratitud, entre las cuales no puedo pasar por alto a los prof. Dr. Manuel Sadosky y Dra. Cora R. de Sadosky, quienes entodo momento me han brindado orientación, aliento y ayuda.

§ 1. INTRODUCCION

En la teoría de los núcleos singulares de convolución se estudia cuáles son las condiciones que debe satisfacer una sucesión funcional k_n para que se verifique la relación $k_n * f \rightarrow f$ para determinadas funciones f, y donde la convergencia se entiende en sentido puntual o en norma L^p.

En este trabajo prescindiremos de la convergencia puntual, y daremos condiciones necesarias y suficientes para la convergencia en norma. Más aún, nos proponemos hacer esto no sólo para L^p sino para los espacios de Sobolev L^p_ℓ, y además generalizando el problema para núcleos μ_n que sean medidas de Radon.

El procedimiento seguido para resolver el problema así planteado trasciende al mismo, conduciendo así al tratamiento de otras cuestiones, de las cuales podemos dar ahora una rápida idea, sin rigor, resumiendo el contenido del trabajo.

Si T_n es el operador definido mediante $T_n f = \mu_n * f$, bajo ciertas condiciones se cumple $\widehat{T_n f} = h_n \hat{f}$ -donde ^ indica la transformación de Fourier, y $h_n = \hat{\mu}_n$- lo cual muestra que T_n es un operador multiplicador.(cf. § 2).

El problema puede plantearse pues a grandes rasgos de esta manera: averiguar cuándo T_n está bien definido y es un operador continuo de L^p_ℓ en L^p_ℓ, y converge hacia el operador identidad. Entonces se trata pues de un caso particular del problema siguiente: a) dada una función h, qué condiciones debe cumplir para que sea un multiplicador de L_s^p en L_s^q; b) si $T_n = T(h_n)$ es el correspondiete operador de h_n, averiguar cuando T_n converge fuertemente.

Naturalmente, el problema a) ofrece muchas dificultades y está sin resolver aún para el caso de multiplicadores de L^p en L^p. En el presente trabajo hacemos lo siguiente:

En § 3, tratamos el problema a), y reducimos el problema de los espacios de Sobolev al de los espacios L^p, agregando además algunas consideraciones acerca de estós últimos.

En § 4, estudiamos la topología fuerte en los espacios de multiplicadores, para resolver el problema b).

En § 5, aplicamos los resultados anteriores para resolver el problema de los núcleos singulares de convolución.

En § 6 resolvemos el mismo problema para la convergencia en L^2 de núcleos generados por sistemas ortogonales, en forma un tanto desligada de lo anterior, sin hacer uso de la teoría de multiplicadores.

En § 7 y § 8 consideramos medidas generales.

—o—

§ 2. NOTACIONES Y GENERALIDADES.

Encararemos el problema en el espacio euclídeo m-dimensional R_m.

x designa un punto de R_m: $x = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$, y $|x| = \left\{ \sum_{h=1}^{m} x_h^2 \right\}^{\frac{1}{2}}$.

Si a es una n-upla, será $[a] = \sum_{i=1}^{n} a_i$.

En x^λ, si x es un número, λ lo será también; si $x = (x_1, \ldots, x_m)$, entonces $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_m)$, y $x^\lambda = x_1^{\lambda_1} x_2^{\lambda_2} \ldots x_m^{\lambda_m}$. En particular:

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\lambda = \frac{\partial^{[\lambda]}}{\partial x_1^{\lambda_1} \ldots \partial x_m^{\lambda_m}}, \quad y \quad f^\lambda = \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\lambda f = \frac{\partial^\lambda f}{\partial x^\lambda}.$$

Si T es un operador de L^p en L^q, $\|T\|_{p,q}$ -o bien $\|T\|_p$ si p=q- designa su norma, que también escribiremos $\|T\|$ cuando no haya lugar a confusión.

(f,g) designa al producto escalar.

Si $1 \leq p \leq \infty$, p^* es el conjugado de p, es decir: $p^{-1} + p^{*-1} = 1$.

El símbolo * también designa al producto de convolución.

Recordamos que $f \in L^p_\ell$ $(1 \leq p < \infty,\ \ell = 0,1,2,\ldots)$ si y sólo si $f^k \in L^p$, $k = 0,1,2,\ldots,\ell$ (derivadas en el sentido de las distribuciones), y que L^p_ℓ puede ser normado mediante

$$\|f\|_{p,\ell} = \sum_{j=0}^{\ell} \left\| \left\{ \sum_{[\lambda]=j} |f^\lambda|^2 \right\}^{1/2} \right\|_p .$$

El símbolo $\xrightarrow{p,\ell}$ indica convergencia en norma L^p_ℓ; $\xrightarrow{p}$ convergencia en norma L^p.

Designaremos

$$\mathcal{F} f = \hat{f}(x) = \int_{R_m} e^{ix.t} f(t)\, dt,$$

donde $x.t = \sum_{h=1}^{m} x_h t_h$, a la transformada de Fourier de la función f definida en R_m. $\mathcal{F}$ es un operador bien definido en L^p $(1 \leq p \leq 2)$ y por consiguiente también en L^p_ℓ, para ℓ natural.

Si $1 \leq p,q \leq 2$, (L^p, L^q) es el conjunto de operadores multiplicadores de L^p en L^q, es decir: $T \in (L^p, L^q)$ si y sólo si $\|T\|_{p,q} < \infty$, y además existe una función h tal que para toda $f \in L^p$ se cumple $\hat{Tf} = h\,\hat{f}$. En tal caso se dice que h es un multiplicador de L^p en L^q, en símbolos: $h \in \{L^p, L^q\}$.

El operador Λ ("raíz cuadrada del laplaciano") está definido mediante

$$\hat{\Lambda f} = |x|\,\hat{f}, \tag{2.1}$$

y las propiedades siguientes son bien conocidas (cf.[2], pág. 908; ó [1], pág. 4 y 45 y sgtes.):

(2.2) <u>Si $1 \leq p < \infty$, $\ell \geq 1$, entonces Λ es acotado de L^p_ℓ en $L^p_{\ell-1}$</u>;

(2.3) <u>$\Lambda^2 = -\Delta$, donde Δ indica el laplaciano</u>;

(2.4) <u>Si $1 \leq p \leq 2$, $f \in L^p$, $g \in L^p$, $\hat{g} = |x|^s \hat{f}$, s natural, entonces $f \in L^p_s$ y $\Lambda^s f = g$.</u>

Utilizaremos luego un importante teorema que da una condición suficiente para que una función sea un multiplicador, demostrado originariamente por Marcinkiewicz, ([7]) para series de Fourier. La forma siguiente, para transformadas de Fourier, se debe a Mijlin (enunciado en [3], pág. 337).

(2.5) Teorema (Marcinkiewies-Mijlin). Sea h una función tal que:

a) h es continua en todo R_m;

b) $\dfrac{\partial^m h}{\partial x_1 \dots \partial x_m}$ existe en todo punto, y h tiene derivadas continuas;

c) $|x|^{[s]} h^s \in L^\infty$ para $0 \leq [s] \leq m$.

Entonces $h \in \{L^p, L^p\}$, para $1 < p < \infty$.

--o--

3. MULTIPLICADORES $\{L^p_\ell, L^q_s\}$.

Comenzaremos extendiendo, de manera obvia, la definición de multiplicador a los espacios de Sobolew. Recordemos que la transformación de Fourier está bien definida en esos espacios, si $1 \leq p,q \leq 2$.

(3.1) Definición. Sea $1 \leq p,q \leq 2$, $\ell, s = 0,1,2,\dots$ Un operador $T: L^p_\ell \to L^q_s$ se llama operador multiplicador de L^p_ℓ en L^q_s, en símbolos: $T \in (L^p_\ell, L^q_s)$, cuando es acotado y además existe una función h tal que para toda $f \in L^p_\ell$ se cumple:

$$\widehat{Tf} = h\,\hat{f}. \tag{3.2}$$

En tal caso, se dice que h es un multiplicador de L^p_ℓ en L^q_s, en símbolos: $h \in \{L^p_\ell, L^q_s\}$.

Antes de entrar a determinar estos espacios, es ne-

nester disponer de algunos resultados auxiliares. En primer lugar mostraremos que se puede aproximar a la función unidad mediante transformadas de L^1_ℓ, en el sentido siguiente:

(3.3) Lema. Sea ℓ un número natural. Existe una función $\phi \in L^1_\ell$ tal que para algún $\varepsilon > 0$ se cumple $\hat{\phi}(x) = 1$ para todo $|x| < \varepsilon$.

Basta tomar, por ejemplo:

$$\phi(x) = \prod_{i=1}^{m} \frac{\cos x_i - \cos 2x_i}{\pi x_i^2} ,$$

de donde resulta:

$$\hat{\phi}(x) = \prod_{i=1}^{m} Y(x_i),$$

con

$$Y(x_i) = \begin{cases} 1, & |x_i| \leq 1, \\ 2 - |x_i| , & 1 \leq |x_i| \leq 2, \\ 0, & |x_i| \geq 2. \end{cases}$$

El lema siguiente muestra que no es imprescindible imponer explícitamente la condición de acotación en la definición de multiplicador, y permitirá simplificar algunas demostraciones posteriores.

(3.4) Lema. Sea $1 \leq p,q \leq 2$; $\ell, s = 0,1,2,\ldots$ Si $T: L^p_\ell \to L^q_s$, y además existe una función h tal que para toda $f \in L^p_\ell$ es $\hat{Tf} = h\hat{f}$, entonces T es acotado, y por consiguiente es un operador multiplicador.

En virtud del teorema del gráfico cerrado, basta probar que T es un operador cerrado. Sea pues $f_n \xrightarrow{p\ell} f$ y

$\widehat{Tf_n} \xrightarrow{q.s.} \hat{g}$; hay que probar que $\hat{g} = \hat{hf}$. Por hipótesis es $\widehat{Tf_n} = h\,\hat{f}_n$, y además $f_n \xrightarrow{p} f$. Entonces existe una subsucesión -que por brevedad seguimos notando f_n- tal que $\hat{f}_n \to \hat{f}$ p.p., de donde $h\,\hat{f}_n \to h\,\hat{f}$ p.p. Análogamente resulta -para alguna subsucesión- $\widehat{Tf_n} \to \hat{g}$ p.p. En consecuencia $\hat{g} = h\,\hat{f}$ p.p., c.q.d.

El lema siguiente será imprescindible en lo que sigue.

(3.5) Lema. Sea ℓ natural y $1 < p \leq 2$. Toda $f \in L^p$ se puede escribir $f = f_o + \Lambda^{\ell} f_1$, con f_o, $f_1 \in L^p_{\ell}$ (La descomposición no es única).

Sea Φ una función que cumple las hipótesis del lema (3.3). Si definimos:

$$f_o = f * \Phi,$$

será $f_o \in L^p_{\ell}$ por el teorema de Young, y además $\hat{f}_o = \hat{f}\,\hat{\Phi}$. Poniendo:

$$F_1 = \frac{\hat{f}_1 - \hat{f}_o}{|x|^{\ell}} \;,$$

será $F_1(x) = 0$ si $|x| < \varepsilon$ y $|x|^{\ell} F_1 = \hat{g}$, con $g = f - f_o \in L^p$. Entonces:

$$\hat{f} = \hat{f}_o + |x|^{\ell} F_1.$$

Definimos la función α mediante $\alpha(x) = |x|^{-\ell}$ si $|x| > \varepsilon$, completándola en $|x| \leq \varepsilon$ de manera que cumpla las hipótesis del teorema (2.5), lo cual es obviamente factible.

La igualdad $|x|^{\ell} F_1 = \hat{g}$, $g \in L^p$, teniendo en cuenta que $\hat{g}(x) = 0$ si $|x| < \varepsilon$, podemos escribirla

$$F_1 = \alpha\, \hat{g}.$$

Entonces, por (2.5) concluímos que $F_1 = \hat{f}_1$, con $f_1 \in L^p$. Reemplazando:

$$\hat{f} = \hat{f}_0 + |x|^{\ell} \hat{f}_1.$$

En virtud de (2.4) resulta $f_1 \in L^p_{\ell}$; entonces

$$f = f_0 + \Lambda^{\ell} f_1,$$

y f_0 y f_1 cumplen los requisitos exigidos, o.q.d.

Observación. Si $p=2$, la demostración adquiere una gran simplificación conceptual, pues no es necesario usar (2.5). Además, como (2.5) no es válido para $p=1$, no sabemos si (3.5) se mantiene en este caso. Probablemente exista alguna demostración independiente de (2.5) y más sencilla.

Ahora estamos ya en condiciones de demostrar el resultado más importante de este parágrafo.

(3.6) Teorema. Sea $1 < p \leq 2$, $1 \leq q \leq 2$, y ℓ, s enteros no negativos. Para que $h \in \{L^p_{\ell}, L^q_s\}$, $s \geq \ell$, es necesario y suficiente que $|x|^{\alpha} h \in \{L^p, L^q\}$, para todo $\alpha = 0, 1, \ldots, s-\ell$. Para que $h \in \{L^p_{\ell}, L^q_s\}$, $s \leq \ell$, es necesario y suficiente que $h\,(1+|x|^{\ell-s})^{-1} \in \{L^p, L^q\}$. En el caso $p=1$, las condiciones son suficientes por lo menos.

<u>Observaciones</u>. En particular, si $p=q=2$, es bien sabido que $\{L^2,L^2\}=L^\infty$. Entonces la condición en el caso $s\geq \ell$ se puede reducir a $h\in\{L^2,L^2\}$, $|x|^{s-\ell}\, h\in\{L^2,L^2\}$. No sabemos si en los demás casos vale una simplificación análoga.

También resulta en particular que $\{L^p_\ell,L^q_\ell\}=\{L^p,L^q\}$, para todo ℓ natural, es decir: los espacios de Sobolev son invariantes respecto a los operadores multiplicadores; esta circunstancia ya es conocida (cf. [1], pág. 41).

El hecho de que si $p=1$ no sabemos si la condición es necesaria se debe, como resultará en el curso de la demostración, a que ignoramos si (3.5) es válido en este caso.

<u>Demostración de (3.6)</u>.

a) <u>Caso $s\geq\ell$; suficiencia</u>.

Sea $f\in L^p_\ell\subset L^p$. Como $h\in\{L^p,L^q\}$, existe $g\in L^q$ tal que

$$\hat{g}=h\,\hat{f}.$$

Además, $\widehat{\Lambda^\lambda f}=|x|^\lambda\hat{f}$, $0\leq\lambda\leq\ell$, y $\Lambda^\lambda f\in L^p_{\ell-\lambda}\subset L^p$, por (2.2). Reemplazando:

$$\hat{g}=|x|^{-\lambda}\,h\,\widehat{\Lambda^\lambda f},$$

de donde

$$|x|^\sigma\hat{g}=|x|^{\sigma-\lambda}\,h\,\widehat{\Lambda^\lambda f}.$$

Para $0 \leq \sigma - \lambda \leq s-\ell$, o sea $\lambda \leq \sigma \leq s-(\ell-\lambda)$, es $|x|^{\sigma-\lambda} h \in \{L^p, L^q\}$, por hipótesis. Variando λ de 0 a ℓ, σ puede tomar valores $0 \leq \sigma \leq s$. Entonces, como $\Lambda^\lambda f \in L^p$, existirá $g_\sigma \in L^q$ tal que

$$\hat{g}_\sigma = |x|^{\sigma-\lambda} h \, \widehat{\Lambda^\lambda f}.$$

Comparando: $\hat{g}_\sigma = |x|^\sigma \hat{g}$, $0 \leq \sigma \leq s$; entonces, por (2.4), resulta $\Lambda^\sigma g \in L^p_{\ell-\sigma}$, $g \in L^p_s$.

Aplicando el lema (3.4) resulta la tesis.

b) <u>Caso $s \geq \ell$; necesidad.</u>

Sea $h \in \{L^p_\ell, L^q_s\}$ y $f \in L^p$. Entonces $f = f_0 + \Lambda^\ell f_1$, con $f_0, f_1 \in L^p_\ell$, por (3.5). Si $0 \leq \alpha \leq s-\ell$, se tiene:

$$|x|^\alpha h \, \hat{f} = |x|^\alpha h \, \hat{f}_0 + |x|^{\ell+\alpha} h \, \hat{f}_1 = |x|^\alpha \hat{g}_0 + |x|^{\ell+\alpha} \hat{g}_1 =$$

$$= \widehat{\Lambda^\alpha g_0} + \widehat{\Lambda^{\ell+\alpha} g_1} = \hat{g},$$

con $g_0, g_1 \in L^q_s$ por hipótesis.

O sea, $|x|^\alpha h \, \hat{f} = \hat{g}$, con $g \in L^q$, puesto que $0 \leq \alpha \leq s-\ell \leq \leq s$, $0 \leq \ell+\alpha \leq s$, y por lo tanto:

$$\Lambda^\alpha g_0, \Lambda^{\ell+\alpha} g_1 \in L^q.$$

Aplicando (3.4) resulta la tesis.

c) <u>Caso $\ell > s$; suficiencia.</u>

Sea $f \in L^p_\ell$.

$$h\,\hat{f} = h(1+|x|^{\ell-s})^{-1}(\hat{f} + \widehat{\Lambda^{\ell-s}f}) = \hat{g}_0 + \hat{g}_1 = \hat{g},$$

con $g_0, g_1 \in L^q$, por ser $f, \Lambda^{\ell-s}f \in L^p$.

Sea $0 \leq \sigma \leq s$.

$$|x|^{\sigma}\hat{g} = |x|^{\sigma} h\,\hat{f} = h(1+|x|^{\ell-s})(\widehat{\Lambda^{\sigma}f} + \widehat{\Lambda^{\ell-(s-\sigma)}f}) =$$

$$= \hat{g}_{\sigma,0} + \hat{g}_{\sigma,1} = \hat{g}_{\sigma},$$

con $g_{\sigma,0}$, $g_{\sigma,1} \in L^q$ puesto que $0 \leq \sigma \leq s \leq \ell$, $0 \leq \ell-(s-\sigma) \leq \ell$, y por lo tanto $\Lambda^{\sigma}f, \Lambda^{\ell-(s-\sigma)}f \in L^p$.

Entonces $|x|^{\sigma}\hat{g} = \hat{g}_{\sigma}$, $0 \leq \sigma \leq s$. Por (2.4), resulta $\Lambda^{\sigma} g \in L^q$ y $g \in L^q_s$.

Aplicando (3.4) resulta la tesis.

d) <u>Caso $\ell > s$; necesidad</u>.

Sea $h \in \{L^p_{\ell}, L^q_s\}$ y $f \in L^p_{\ell}$. Entonces, por (3.5), $f = f_0 + \Lambda^{\ell} f_1$, con $f_0, f_1 \in L^p_{\ell}$. Por lo tanto:

$$h(1+|x|^{\ell-s})^{-1}\hat{f} = h(1+|x|^{\ell-s})^{-1}\hat{f}_0 + h\,|x|^{\ell}(1+|x|^{\ell-s})^{-1}\hat{f}_1 =$$

$$= (1+|x|^{\ell-s})^{-1}\hat{g}_0 + |x|^{\ell}(1+|x|^{\ell-s})^{-1}\hat{g}_1 =$$

$$= (1+|x|^{\ell-s})^{-1}\hat{g}_0 + |x|^{\ell-s}(1+|x|^{\ell-s})^{-1}\widehat{\Lambda^{s}g_1},$$

con $g_0, g_1 \in L^q_s$.

Pero por (2.5) es $(1+|x|^{\ell-s})^{-1}$, $|x|^{\ell-s}(1+|x|^{\ell-s})^{-1} \in \{L^q, L^q\}$, y entonces

$$h(1+|x|^{\ell-s})^{-1}\hat{f} = \hat{g},$$

con $g \in L^q$. Aplicando (3.4) resulta la tesis, c.q.d.

Como vemos, el problema de la determinación de los $\{L^p_\ell, L^q_s\}$ se reduce a determinar los $\{L^p, L^q\}$. En este aspecto, los siguientes resultados son conocidos.

(3.7) <u>Teorema.</u> <u>$h \in \{L^2, L^2\}$ si y sólo si $h \in L^\infty$, y en tal caso es</u> $\|T\|_{2,2} = \|h\|_\infty$.

(3.8) <u>Teorema.</u> $h \in \{L^1, L^1\}$ <u>si y sólo si h es la transformada de Fourier-Stieltjes de una medida regular finita μ</u> :

$$h(x) = \hat{\mu}(x) = \int_{R_m} e^{i\, x.t}\, d\mu(t),$$

<u>y se cumple</u> $\|T\|_{1,1} = \int_{R_m} |d\mu(t)|$.

(3.9) <u>Teorema.</u> <u>Si $2 > p > q$, $h \in \{L^p, L^q\}$ implica $h=0$ p.p.</u>

La demostración de (3.7) es sumamente sencilla. La de (3.8) puede verse, para $m=1$, en [5], pág. 569/70, Ch. XXI, Sec. 21.2. En cuanto a (3.9), ha sido demostrado recientemente por Hörmander (1).

Concluiremos esta sección con algunas observaciones sobre otros espacios $\{L^p, L^q\}$.

El caso en que $p > 2$ presenta el incoveniente de que la transformada de Fourier no está definida -salvo como distribución- en todo L^p. Si $1 \leq p < \infty$, designaremos L^p

(1): Según comunicación oral de A.P.Calderón al autor.

al subconjunto de L^p cuyas transformadas de Fourier son distribuciones que coinciden con funciones de L^{p^*}; es sabido que $\mathcal{L}^p$ es denso en L^p, y si $p \leq 2$ es $\mathcal{L}^p = L^p$.

Admitiremos la siguiente:

(3.10) Definición. Sea $1 \leq p,q < \infty$. Diremos que $h \in \{L^p, L^q\}$ si para toda $f \in \mathcal{L}^p$ es $\widehat{Tf} = h\,\hat{f}$, con $Tf \in \mathcal{L}^q$, y además T es acotado (por lo cual se extiende a todo L^p de manera única).

Si $p,q \leq 2$, esta definición se reduce a (3.1). Si $p > 2$ no vale el lema (3.4), y la condición de acotación de T hay que imponerla explícitamente.

(3.11) Teorema. Sea $r^{-1} = p^{-1} - q^{-1}$. Si $1 \leq p \leq 2$, $2 \leq q \leq \infty$, entonces $\{L^p, L^q\} \supset L^r$. Si $2 \leq p \leq q < \infty$, entonces $\{L^p, L^q\} \subset L^r$. En particular, $\{L^2, L^q\} = L^r$ para $2 \leq q < \infty$.

Introduciremos la notación auxiliar siguiente: $h \in \{L^p, L^q\}_0$ cuando se cumple (3.10) excepto eventualmente en lo que se refiere a la acotación de T.

Probaremos en primer lugar que si $2 \leq p \leq q < \infty$, entonces $\{L^p, L^q\}_0 \subset L^r$.

Sea $h \in \{L^p, L^q\}_0$ y $f \in \mathcal{L}^p$. Entonces $Tf = g \in L^q$ y $\hat{g} = h\,\hat{f}$. Como $\hat{g} \in L^{q^*}$ y $\mathcal{L}^{p^*} = L^{p^*}$, resulta

$$\int_{R_m} |h|^{q^*} F \, dx < \infty.$$

para toda función $F \in L^{p^*/q^*}$. Y como $(p^*/q^*)^* = r/q^*$, resulta la anterior afirmación.

Veremos ahora que si $1 \leq p \leq q$, $2 \leq q \leq \infty$, entonces $\{L^p, L^q\}_0 \supset L^r$.

Sea $h \in L^r$ y $f \in L^p$. Entonces un cálculo sencillo muestra que $G = h\hat{f} \in L^{q^*}$. Como $q \geq 2$, existirá $g \in L^q$ tal que $\hat{g} = G$, lo cual prueba lo que queríamos. Además, teniendo en cuenta (3.4) resulta que si además es $p \leq 2$, entonces $\{L^p, L^q\} \supset L^r$.

Por otra parte, también resulta inmediatamente que si $2 \leq p \leq q < \infty$, entonces $\{L^p, L^q\}_0 = L^r$.

La tesis está incluída en estas consideraciones, c.q.d.

El inconveniente principal que presenta la definición (3.10) es que la relación $\{L^p, L^q\} = \{L^{q^*}, L^{p^*}\}$ no se mantiene válida con ella. puesto que si así fuera, aplicándola a (3.11) resultaría $\{L^p, L^q\} \subset L^r$ cuando $1 < p, q \leq 2$, lo cual es falso, según puede demostrarse utilizando el ejemplo de los operadores potenciales ([3], págs. 71, 73, 111, 181).

Concluiremos este parágrafo considerando una extensión del concepto de multiplicador referente a k-uplas de funciones. Designaremos ${}^kL^p_\ell$ al conjunto de k-uplas de funciones $\{f_1, \ldots, f_k\}$ definidas en R_m y tales que $f_i \in L^p_\ell$, $i = 1, 2, \ldots, k$.

Un operador de ${}^kL^p_\ell$ en ${}^rL^q_s$ estará representado por una matriz de operadores de $r \times k$. Cada multiplicador $h \in$

(sigue en pág 14 bis)

$\left\{{}^{k}L^{p}_{\ell}, {}^{r}L^{q}_{s}\right\}$ transformará de manera acotada elementos de ${}^{k}L^{p}_{\ell}$ en elementos de ${}^{r}L^{q}_{s}$ -no hay dificultad en definir una norma en estos espacios- y vendrá dado por una matriz de funciones de $r_{x}k$:

$$h = \left\{h_{ij}\right\}$$

de manera que:

$$\hat{g}_i(x) = \sum_{j=1}^{k} h_{ij}(x)\, \hat{f}_j(x), \quad i=1,\ldots,r.$$

Bajo estas condiciones, la demostración del teorema (3.6) conserva su validez, cambiando la interpretación de las magnitudes que aparecen en él de manera obvia.

--o--

§4. CONVERGENCIA EN ESPACIOS DE MULTIPLICADORES.

Introduciremos la topología fuerte en los espacios de multiplicadores. Por tratarse de espacios vectoriales basta definir la convergencia a cero.

(4.1) Definición. Sea $T_n \in (L^p_\ell, L^q_s)$, $n=1,2,\ldots$ Se dice que $T_n \to 0$ (fuertemente) si para toda $f \in L^p_\ell$ se cumple $T_n f \xrightarrow{q,s} 0$. Si h_n es el multiplicador correspondiente a T_n, diremos ~~que~~ en tal caso que $h_n \to 0$ en $\{L^p_\ell, L^q_s\}$.

Es nuestro propósito caracterizar en forma simple esta topología para algunos de los espacios considerados en §3. Primeramente, demostraremos un resultado de tipo general.

(4.2) Teorema. Sea $1 \leq p,q \leq 2$; $\ell,s=0,1,2,\ldots$ Entonces $\{L^p_\ell, L^q_s\}$ es completo.

Sea h_n una sucesión fundamental. Es decir, para toda $f \in L^p_\ell$ es $\hat{g}_n - \hat{g}_m = (h_n - h_m)\hat{f}$ y $\|g_n - g_m\|_{q,s} \to 0$ cuando $n,m \to \infty$.

Puesto que L^q_s es completo, existe $g \in L^q_s$ tal que $g_n \xrightarrow{q,s} g$, de donde resulta:

$$\|\hat{g}_n - \hat{g}\|_{q^*,s} = \|h_n \hat{f} - \hat{g}\|_{q^*,s} \to 0.$$

Sea en particular $f_0 \in L^p_\ell$ una función tal que $\hat{f}_0(x) \neq 0$ p.p. x. Entonces definimos p.p.:

$$h = \hat{g}_0 / \hat{f}_0.$$

El teorema quedará demostrado, con $\lim_{n\to\infty} h_n = h$, en $\{L^p_\ell, L^q_s\}$, si probamos que para cualquier $f \in L^p_\ell$, definiendo

$$h_f = \begin{cases} \hat{g}/\hat{f}, & \hat{f}(x) \neq 0, \\ h, & \hat{f}(x) = 0, \end{cases}$$

resulta $h_f = h$ p.p. Basta considerar el caso $\hat{f}(x)\neq 0$.

Por definición se cumple:

$$h_n \hat{f}_o \xrightarrow{q^*} h\, \hat{f}_o,$$

de manera que existe una subsucesión n_i tal que

$$h_{n_i} \longrightarrow h \quad \text{p.p.}$$

Para toda $f \in L^p_\ell$ sabemos que $\|h_n \hat{f} - \hat{g}\|_{q^*} =$
$= \|h_n \hat{f} - h_f \hat{f}\|_{q^*} \longrightarrow 0$, de donde

$$h_{n_i} \hat{f} \xrightarrow{q^*} h_f \hat{f}.$$

Entonces existe una sub-subsucesión $n_{i\,j}$ tal que

$$h_{n_{i\,j}} \longrightarrow h_f \quad \text{p.p. } x \text{ tal que } \hat{f}(x)\neq 0.$$

Pero $h_{n_i} \longrightarrow h_o$ p.p., como ya vimos, de donde resulta $h_f = h_o$ p.p., c.q.d.

Un teorema de Dixmier (cf. [4], pág.) afirma que todo espacio de operadores fuertemente cerrado es débilmente cerrado. En consecuencia:

(4.3) <u>Corolario</u>. <u>Sea $1 \leq p, q \leq 2$; $\ell, s = 0,1,2,\ldots$ Entonces $\{L^p_\ell, L^q_s\}$ es débilmente cerrado</u>.

Daremos ahora algunos resultados auxiliares.

El lema siguiente es conocido.

(4.4) Lema. Sea $1\leq p\leq q\leq 2$. Si $T\in(L^p,L^p)$, entonces $T\in (L^q,L^q)$ y $\|T\|_{q,q}\leq\|T\|_{p,p}$.

Por ser T de tipo convolución, es acotado de L^{p^*} en L^{p^*}, y $\|T\|_{p^*,p^*}=\|T\|_{p,p}$. Aplicando el teorema de convexidad de Riesz resulta la desigualdad de la tesis. Además resulta $T\in(L^q,L^q)$, extendiéndolo por linealidad.

(4.5) Teorema. Sea $1\leq p\leq q\leq 2$. Si $T_n\to 0$ en (L^p,L^p), entonces $T_n\to 0$ en (L^q,L^q).

Por el teorema de Banach-Steinhaus, se tiene $\|T_n\|_p<A$, de donde, por (4.4), resulta $\|T_n\|_q<A$. Siendo la sucesión T_n acotada, basta probar que $T_nf\xrightarrow{q}0$ en un conjunto denso de L^q.

Escribiendo $q=tp+(1-t)2$ (para algún t) resulta

$$\|T_nf\|_q^q = \int_{R_m}|T_nf|^{tp}|T_nf|^{(1-t)2}dx \leq$$

$$\leq\left\{\int_{R_m}|T_nf|^p dx\right\}^t\left\{\int_{R_m}|T_nf|^2dx\right\}^{1-t}\leq\|T_nf\|_p^{tp}\,(A\,\|f\|_2)^{2(1-t)};$$

Como el primer factor converge a cero, resulta la tesis, c.q.d.

El lema siguiente es esencialmente conocido. Aquí le daremos una forma conveniente para nuestros propósitos, y sólo lo usaremos ulteriormente en el caso $p=2$.

(4.6) Lema. Sea $1\leq p<\infty$. Para que $h_nf\xrightarrow{p}0$, $n=1,2,\ldots$,

<u>para toda $f \in L^p$, es necesario y suficiente que:</u>

a) $\|h_n\|_\infty \leq M$;

b) $h_n \to 0$ <u>en medida sobre compactos.</u>

Supongamos que valen a) y b). Sea n_i cualquier sucesión que tiende a infinito. Por b), existirá una subsucesión n_{ik} tal que $h_{n_{ik}} \to 0$ p.p. (no provoca dificultades el hecho de que la convergencia en medida sea sobre compactos), y por lo tanto, para toda $f \in L^p$ será $h_{n_{ik}} \to 0$ p.p. Por a), la convergencia es mayorada; entonces:

$$h_{n_{ik}} f \xrightarrow{p} 0,$$

y como n_i era cualquier sucesión, resulta la tesis.

Recíprocamente, sea $h_n f \xrightarrow{p} 0$ para toda $f \in L^p$. Entonces $\|h_n f\|_p < M_f$, de donde resulta fácilmente que

$$\int_{R_m} |h_n|^p g \, dx < M_g$$

para toda $g \in L^1$. Aplicando Banach-Steinhaus, resulta a).

Eligiendo en particular a f función característica de un conjunto de medida finita, resulta b), c.q.d.

A continuación comenzaremos a caracterizar la topología fuerte.

(4.7) <u>Teorema.</u> $h_n \to 0$ <u>en</u> $\{L^2, L^2\}$ <u>si y sólo si:</u>

a) $\|h_n\|_\infty < M$;

b) $h_n \to 0$ <u>en medida sobre compactos.</u>

Si valen a) y b) resulta, por el teorema de Plancherel -llamando $\hat{g}_n = h_n \hat{f}$-:

$$\|g_n\|_2 = \|\hat{g}_n\|_2 = \|h_n \hat{f}\|_2 \to 0$$

para toda $f \in L^2$, que es la tesis.

Recíprocamente, si $h_n \to 0$ en $\{L^2, L^2\}$, por Plancherel será $\|h_n \hat{f}\|_2 \to 0$ para toda $f \in L^2$. Aplicando (4.6) y Plancherel resulta la tesis, o.q.d.

Puesto que no se conocen los espacios $\{L^p, L^p\}$, $1 < p < 2$, no cabe esperar una respuesta satisfactoria para caracterizar la topología. En el siguiente teorema la caracterización supone el conocimiento de la norma del operador multiplicador, lo cual hace que no sea de gran utilidad, excepto tal vez en el caso p=1, para el cual $\|T\|_1$ está dado en (3.8). Designaremos δ_a al múltiplo positivo de la función característica de $|x| < a$, tal que $\|\delta_a\|_1 = 1$.

(4.8) Teorema. Sea $1 \leq p < 2$, $T_n \in (L^p, L^p)$ y h_n los correspondientes multiplicadores. Para que $h_n \to 0$ en $\{L^p, L^p\}$ es necesario y suficiente que:

a) $\|T_n\|_p < A$;

b) $\|T_n \delta_a\|_p \to 0$ para todo $a > 0$.

Sea $h_n \to 0$ en $\{L^p, L^p\}$. La condición a) resulta por Banach-Steinhaus; b) es obvia.

Recíprocamente, si valen a) y b), en virtud de a) basta probar que $T_n f \xrightarrow{p} 0$ para toda f de un subconjunto denso, por ejemplo, el conjunto $\mathcal{C}_0$ de funciones continuas nulas fuera de un compacto. Pero toda $f\in\mathcal{C}_0$ se aproxima por funciones $g=\delta_a * f$. Entonces, teniendo en cuenta que $T_n(\delta_a * f)= T_n\delta_a * f$ -lo cual se prueba transformanto Fourier-, resulta:

$$\|T_n(\delta_a * f)\|_p = \|T_n\delta_a * f\|_p \leq \|T_n\delta_a\|_p \|f\|_1 ,$$

y como $\|f\|_1<\infty$, resulta la tesis en virtud de b), c.q.d.

En el caso $p=1$, la caracterización puede darse de una manera ligeramente distinta a la del teorema prededente. Para enunciarla, introduciremos previamente algunas definiciones.

(4.9) Definición. f_n converge débilmente hacia f en el infinito, si dados $\varepsilon>0$ y $E\subset R_m$, existe un $n_0=n_0(\varepsilon,E)$ tal que para todo $n>n_0$ se cumple:

$$\left|\int_{|x|>n_0}\left[f_n(x)-f(x)\right]\Omega_E(x)\,dx\right|<\varepsilon ,$$

donde Ω_E es la función característica de E.

(4.10) Definición. Las funciones f_n tienen integrales uniformemente pequeñas en el infinito, si para cada $\varepsilon>0$ existe un $n_0=n_0(\varepsilon)$ tal que para todo $n>n_0$ se cumple:

$$\int_{|x|>n_0}|f_n(x)|\,dx<\varepsilon .$$

Demostraremos ahora que:

(4.11) Teorema. Sea $T_n\in(L^1,L^1)$, y h_n los correspondiences multiplicadores. Para que $h_n \to 0$ en $\{L^1, L^1\}$, es necesario y suficiente que:

a) $\|T_n\|_1 < A$;

b) $h_n \to 0$ en medida sobre compactos;

c) $T_n \delta_a \to 0$ débilmente en el infinito.

Además, la condición c) puede reemplazarse por:

c_1) los $T_n \delta_a$ son uniformemente pequeños en el infinito, para todo $a > 0$.

La necesidad de a) resulta de Banach-Steinhaus; la de b) resulta de (4.5) y (4.7), y c) es obvio.

Ahora probaremos c_1) en base a a), b), c). Para ello basta ver que $T_n \delta_a \xrightarrow{1} 0$, para todo $a > 0$.

Un teorema de Vitali-Dunford-Pettis afirma que si una sucesión $g_n \in L^1$ verifica:

1) $\|g_n\|_1 < A$; 2) $\int_E g_n(x)dx$ converge para todo $E \subset R_m$; 3) g_n converge en medida sobre compactos; entonces g_n converge en L^1. Pero $T_n \delta_a$ cumple efectivamente estas condiciones.

Resta probar que a), b), c_1) implican $h_n \to 0$ en $\{L^1; L^1\}$, y para esto basta verificar (4.8).

En efecto, $T_n \delta_a$ converge en L^2, y en consecuencia en L^1 en todo compacto, y como fuera del compacto la integral de $T_n \delta_a$ es uniformemente pequeña, resulta que $T_n \delta_a$ converge en L^1, c.q.d.

Ahora consideraremos el caso de los espacios de Sobolev, y tal como hicimos en §3, reduciremos el problema a los espacios $\{L^p, L^q\}$.

(4.12) Teorema. Sea $1 < p \leq 2$, $1 \leq q \leq 2$; ℓ, s enteros no negativos. Para que $h_n \to 0$ en $\{L^p_\ell, L^q_s\}$, $s \geq \ell$, es necesario y suficiente que $|x|^\alpha h_n \to 0$ en $\{L^p_\ell, L^q\}$, para $\alpha = 0, 1, \ldots, s-\ell$. Para que $h_n \to 0$ en $\{L^p_\ell, L^q_s\}$, $s \leq \ell$, es necesario y suficiente que $h_n (1+|x|^{\ell - s})^{-1} \to 0$ en $\{L^p, L^q\}$. Si $p=1$, las condiciones son suficientes por lo menos.

a) Caso $s \geq \ell$; suficiencia.

Sea $f \in L^p_\ell$. Tenemos $\hat{g}_n = h_n \hat{f}$, con $g_n \in L^q_s$ y

$$\widehat{\Lambda^\sigma g_n} = |x|^{\sigma - \lambda} h_n \widehat{\Lambda^\lambda f}, \qquad 0 \leq \sigma \leq s, \quad 0 \leq \lambda \leq \ell.$$

Como $\Lambda^\lambda f \in L^p$, por hipótesis es $\Lambda^\sigma g_n \xrightarrow{q} 0$, de donde $g_n \xrightarrow{q,s} 0$.

b) Caso $s \geq \ell$; necesidad.

Si $f \in L^p$, será por (3.5) $f = f_0 + \Lambda^\ell f_1$, con $f_0, f_1 \in L^p_\ell$. Entonces:

$$|x|^\alpha h_n \hat{f} = |x|^\alpha h_n \hat{f}_0 + |x|^{\alpha + \ell} h_n \hat{f}_1 = |x|^\alpha \hat{g}_{0,n} + |x|^{\alpha+\ell} \hat{g}_{1,n} =$$

$$= \widehat{\Lambda^\alpha g_{0,n}} + \widehat{\Lambda^{\alpha+\ell} g_{1,n}} = \hat{G}_n,$$

con $g_{0,n}, g_{1,n} \in L^q_s$.

Como $0 \leq \alpha \leq s - \ell \leq s$, $0 \leq \alpha + \ell \leq s$, será $\Lambda^\alpha g_{0,n}, \Lambda^{\alpha+\ell} g_{1,n} \xrightarrow{q} 0$. O sea: $G_n \xrightarrow{q} 0$.

c) Caso $s \leq \ell$; suficiencia:

Sea $f\in L^p_\ell$. Tenemos $\hat{g}_n = h_n\hat{f}$ con $g_n \in L^q_s$. Sea $0\leq\sigma\leq s$. Entonces:

$$\widehat{\Lambda^\sigma g_n} = |x|^\alpha h_n\hat{f} = h_n(1+|x|^{\ell-s})^{-1}\,(\widehat{\Lambda^\sigma f} + \widehat{\Lambda^{\ell-(s-\sigma)}f}).$$

Como $\Lambda^\sigma f$, $\Lambda^{\ell-(s-\sigma)}f\in L^p$, puesto que $0\leq\sigma\leq s\leq\ell$ y $0\leq \ell-(s-\sigma)\leq\ell$, resulta $\Lambda^\sigma g_n \xrightarrow{q} 0$ por hipótesis, es decir: $g_n\xrightarrow{q,s} 0$.

d) <u>Caso $s\leq\ell$; necesidad.</u>

Si $f\in L^p$, será $f = f_0+\Lambda^\ell f_1$, con $f_0, f_1\in L^p_\ell$. Entonces:

$$h_n(1+|x|^{\ell-s})^{-1}\hat{f} = (1+|x|^{\ell-s})^{-1}h_n\hat{f}_0 + (1+|x|^{\ell-s})^{-1}|x|^\ell h_n\hat{f}_1 =$$

$$= (1+|x|^{\ell-s})^{-1}\hat{g}_{o,n} + (1+|x|^{\ell-s})^{-1}|x|^\ell\hat{g}_{1,n} =$$

$$= (1+|x|^{\ell-s})^{-1}\hat{g}_{o,n} + (1+|x|^{\ell-s})^{-1}|x|^{\ell-s}\widehat{\Lambda^s g_{1,n}},$$

con $g_{o,n}, g_{1,n}\rightarrow 0$ en L^q_s por hipótesis, y por consiguiente $g_{o,n}, \Lambda^s g_{1,n} \xrightarrow{q} 0$. Pero $(1+|x|^{\ell-s})^{-1}$ y $(1+|x|^{\ell-s})^{-1}|x|^{\ell-s}$ son de $\{L^q, L^q\}$ por (2.5), de donde resulta:

$$h_n(1+|x|^{\ell-s})^{-1}\hat{f} = \hat{G}_{o,n} + \hat{G}_{1,n} = \hat{G}_n,$$

con $G_n\xrightarrow{q} 0$, c.q.d.

Para terminar, señalemos que este teorema (4.12) conserva su validez, sin cambiar la demostración, para el caso de multiplicadores matriciales considerados al final del §3.

—o—

(sigue § 5)

§5. NUCLEOS SINGULARES EN L^p_ℓ:

Aplicaremos los resultados precedentes a la teoría de núcleos singulares. Designaremos con μ_n una sucesión de medidas de Radon, y daremos condiciones necesarias y suficientes para que para toda $f \in L^p_\ell$ se verifique $\mu_n * f \to f$ en la norma de L^p_ℓ. En particular, para μ_n medidas absolutamente continuas, obtendremos resultados para los núcleos singulares usuales.

Como en general μ_n no será de masa total finita, la expresión $f_n = \mu_n * f$ no tendrá sentido. Si en cambio designamos $\mu_{n,N}$ a la restricción de μ_n en la esfera de radio N, la expresión

$$f_{n,N} = T_{nN} f = \mu_{n,N} * f$$

estará bien definida, y es natural definir a f_n como el límite de $f_{n,N}$ en la norma del espacio correspondiente. En resumen, aceptaremos la siguiente

(5.1) Definición. Sea μ_n, n=1,2,... una sucesión de medidas de Redon. Diremos que μ_n aproxima a la distribución δ en L^p_ℓ, $1 \leq p < \infty$ cuando para toda $f \in L^p_\ell$ se cumple

$$\lim_{n\to\infty} \lim_{N\to\infty} \mu_{n,N} * f = f,$$

en la norma de L^p_ℓ.

Asimismo, puede tratarse el caso en que $f \in L^p_\ell$ y la convergencia se toma en otro L^q_s. Los casos no triviales sólo se presentan si p=q y $s \leq \ell$

Señalemos que siendo $\mu_{n,N}$ de masa total finita, existe su transformada de Fourier $\hat{\mu}_{n,N}$.

La conexión de la teoría de multiplicadores con la de núcleos singulares está expresada en la proposición siguiente.

(5.2) Lema. Sea $1 \leq p,q \leq 2$; ℓ,s enteros no negativos. Para que para toda $f \in L^p_\ell$ se cumpla

$$\lim_{n\to\infty} \lim_{N\to\infty} \mu_{n,N} * f = f$$

en la norma de L^q_s, es necesario y suficiente que:

$\lim_{n\to\infty} \lim_{N\to\infty} T_{nN} = I$ (=operador identidad) en (L^p_ℓ, L^q_s), es decir: $\lim_{n\to\infty} \lim_{N\to\infty} \hat{\mu}_{n,N} = 1$ en $\{L^p_\ell, L^q_s\}$.

En virtud de que $\hat{\mu}_{n,N} \in \{L^p_\ell, L^q_s\}$ implica $\hat{\mu}_n \in \{L^p_\ell, L^q_s\}$, por la completidad (4.2), el lema es obvio.

Entonces, si aplicamos (5.2) a cada resultado de §3 y §4, quedará resuelto el problema de los núcleos singulares en cada caso, que resumimos en el siguiente enunciado:

(5.3) Teorema.

1°) μ_n aproxima a δ en L^1 si y sólo si:

a) $\int_{R_m} |d\mu_n(t)| < A$ (ó $\|k_n\|_1 < A$ en el caso de continuidad absoluta);

b) $\mu_n * \delta_a \xrightarrow{1} \delta_a$, para todo $a > 0$.

2°) μ_n aproxima a δ en L^2 si y sólo si:

a) $\|\hat{\mu}_{n,N}\|_\infty < M$;

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \lim\limits_{N\to\infty} \hat{\mu}_{n,N} = 1$ en medida sobre compactos.

3°) μ_n aproxima a δ en L^2_s para funciones de L^2_ℓ $(\ell > s)$, si y sólo si:

a) $\|(\hat{\mu}_{n,N} - 1)(1+|x|^{\ell-s})^{-1}\|_\infty < M$;

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \lim\limits_{N\to\infty} \hat{\mu}_{n,N} = 1$ en medida sobre compactos.

4°) μ_n aproxima a δ en L^p_ℓ si y sólo si μ_n aproxima a δ en L^p.

Sólo consignamos los resultados que creemos de más fácil aplicación, pero podrían agregarse otros. La demostración de (5.3) es inmediata; tal vez lo único que convenga señalar es que en 1°) no aparecen los núcleos "cortados" $\mu_{n,N}$, porque la masa total debe ser finita. Insistimos en que las condiciones obtenidas no son sólo suficientes, sini también necesarias.

La aplicación de (5.3) a los núcleos singulares usuales k_n, donde $d\mu_n(t) = k_n(t)dt$, no ofrece dificultad. Así, 1°) expresa que k_n debe ser casi positivo y que debe aproximar en L^1 a las funciones δ_a. Respecto a 2°), es fácil ver que todos los núcleos casi positivos -y en particular los positivos: Poisson, Fejer, Weierstrass, Landau, etc.- verifican la condición respectiva, y aún otros núcleos que no son tales, como el de Dirichlet, que verifica la propiedad más débil $\left|\int_{a_n}^{b_n} k_n(t)\, dt\right| < A$, con A independiente de n. Sin embargo, otros núcleos del mismo tipo, como ser

$$k_n(t) = \left[1 - I_{\lambda/n}(t)\right] \frac{\cos nt}{|t|},$$

donde λ es la raíz (única) de

$$\int_{\lambda}^{\infty} \frac{\cos u}{u}\, du = 1,$$

no cumplen la condición, y por lo tanto no aproxima a δ en L^2. El mismo par de ejemplos -el de Dirichlet y el último núcleo-, siendo ambos de tipo Fejer ($k_n(t)= nh(nt)$), prueba que tampoco puede afirmarse nada en general para la convergencia en L^2 de ese tipo de núcleos. Consideraciones paralelas pueden hacerse para las demás afirmaciones del teorema.

--o--

§ 6. NUCLEOS GENERADOS POR SISTEMAS ORTOGONALES.

En esta sección nos apartaremos de la teoría de multiplicadores. Consideraremos núcleos singulares

$$k_n(x,t) = \sum_{h=0}^{n} \varphi_h(x)\, \overline{\varphi_h}(t)$$

generados por un sistema $\{\varphi_h(x)\}$, $h=0,1,2,\ldots$ ortonormal en una región E de R_m; tales núcleos, en general, no serán de convolución. Resolveremos el problema de la convergencia en $L^2(E)$, y como ésta equivale a la completidad del sistema $\{\varphi_h\}$, podemos expresar el resultado de la manera siguiente:

(6.1) Teorema. Para que el sistema ortonormal $\{\varphi_h\}$, $h=0, 1,2,\ldots$ sea completo en $L^2(E)$, $E\subset R_m$, es necesario y suficiente que para todo cubo $V_{a,b}=\{t;\ a_i<t<b_i;\ i=1,\ldots,n\}$,

$$\int_{V_{a,b}} k_n(x,t)\,dt$$

converja en medida hacia la función característica del cubo.

En particular, en lo que respecta a la suficiencia, basta pedir -por ejemplo, si $m=1$- que k_n sea un núcleo singular en el sentido usual:

$$\int_a^b k_n(x,t)dt \to 1$$

para todo $(a,b)\ni x$. Por ejemplo, como el núcleo de Dirichlet verifica obviamente esta condición, se obtiene una rápida demostración de la completidad del sistema trigonométrico.

Demostración de (6.1).

Puesto que la convergencia en L^2 implica convergencia en medida, la necesidad es inmediata.

Respecto a la suficiencia[1], observemos en primer lugar que como $\varphi_h\in L^2$, para toda $f\in L^2$ existe su aproximante f_n.

---

(1); Una observación del prof. J.P.Kahane ha permitido simplificar la demostración; ésa es la que consignamos aquí.

Basta probar, en virtud del teorema de Steklov, que la igualdad de Parseval se cumple en un conjunto denso de $L^2(E)$, por ejemplo, el constituído por las funciones escaleras. Una función tal se escribe:

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i \Omega_{V_i}(x),$$

donde λ_i= constantes, $\ell<\infty$ y Ω_{V_i} es la función característica de un cubo V_i.

En virtud de las hipótesis resulta inmediatamente que las aproximantes f_n de f convergen hacia ésta en medida, y por consiguiente existirá una subsucesión n_i tal que

$$f_{n_i} \to f \quad \text{p.p. } x \in E.$$

Aplicando el teorema de Fatou de paso al límite bajo el signo de integral a la sucesión $|f_{n_i}(x)|^2$, tenemos:

$$\|f\|_2^2 \leq \sup_{n_i} \|f_{n_i}\|_2^2 = \sup_{n_i} \left\| \sum_{j=0}^{n_i} \varphi_j(x) \ (f,\varphi_j) \right\|_2^2 =$$

$$= \sup_{n_i} \sum_{j=0}^{n_i} |(f,\varphi_j)|^2 = \sum_{j=0}^{\infty} |(f,\varphi_j)|^2.$$

En virtud de la desigualdad de Bessel queda excluído el signo $<$, y por lo tanto resulta la igualdad de Parseval, y con ella la tesis, c.q.d.

--o--

(sigue §7)

§7. ESPACIOS DE SOBOLEV CON MEDIDA CUALQUIERA.

Cabe preguntarse qué aspecto adoptarán los teoremas de multiplicadores en espacios de Sobolev cuando en lugar de la medida de Lebesgue se emplea alguna otra, como ser la discreta, o combinaciones de ambas. Para resolver este problema, por una parte habrá que modificar el concepto de convolución y transformación de Fourier, y por otra el de derivada y espacios de Sobolev.

Comenzaremos tratando el caso unidimensional de manera general, suponiendo dada en R_1 una medida de Radon μ positiva cualquiera, e imponiéndole condiciones restrictivas cuando hubiere necesidad. Puede pensarse que tal generalización carece de interés, por cuanto sólo involucra esencialmente la idea del cambio de variables $t \to \mu(t)$, pero esto es precisamente lo que ocurre en la definición de la integral de Stieltjes, de manera que podría suceder que el simple cambio ofrezca alternativas que merezcan la pena ser consideradas.

El primer lugar consideraremos el problema de la definición de los espacios de Sobolev, el cual está basado en la teoría de la derivación. Si bien se trata de una teoría esencialmente conocida, la encararemos aquí de una manera que se adapte a nuestros propósitos.

Sea pues μ una medida no negativa en la recta real R_1; designaremos $\mu\{E\}$ a la medida del conjunto $E \subset R_1$, y $\mu = \mu(t)$, $t \in R_1$, a la función de distribución de la medida, normalizada de manera que sea semicontinua a la derecha y nula en el origen:

$$\mu(t+0) = \mu(t), \quad \mu(0) = 0.$$

Consideraremos en R_1 la topología usual del orden; el símbolo $\rightarrow$ indicará convergencia en esa topología. También consideraremos la (seudo)métrica definida por la medida mediante

$$d[x,y] = |\mu(x) - \mu(y)|, \quad x,y \in R_1.$$

Llamaremos μ-clausura a la clausura respecto de esta métrica.

Designaremos $\mathcal{R}$ al soporte de μ; su complementario $\complement\mathcal{R}$, por ser abierto, estará constituído por una unión numerable de intervalos abiertos, que llamaremos intervalos contiguos. Evidentemente, $\complement\mathcal{R}$ tendrá medida nula.

Impondremos a la medida μ la condición restrictiva siguiente [(1)]: el conjunto de los puntos de acumulación (en la topología usual) del conjunto de saltos de $\mu(t)$, está constituído por puntos aislados.

Comenzaremos definiendo la noción de continuidad respecto de la medida μ, de manera que corresponda al concepto intuitivo de que a pequeñas variaciones de la medida

---

(1): Esta hipótesis será utilizada en la demostración de (7.4), y podría ser evitada modificándose el razonamiento correspondan pequeñas variaciones de la función. Exactamente:

(7.1) <u>Definición</u>. <u>Sea $t_0 \in R_1$</u>. <u>f se llama μ-continua en t_0 si para cada $\varepsilon > 0$, existe un entorno V_0 (usual) de t_0 y un $\delta > 0$ tales que:</u>

$$t_1 \in V_0,\ |\mu(t_1)-\mu(t_2)| < \delta\ , \ \underline{\text{implica}}\ |f(t_1)-f(t_2)| < \varepsilon\ .$$

En particular, toda función μ-continua será constante en cada intervalo contiguo de $b\mathcal{R}$.

(7.2) <u>Si f es μ-continua en un intervalo cerrado, es uniformemente μ-continua en él.</u>

Es una consecuencia del teorema de Heine-Borel.

Una definición más sencilla de μ-continuidad en t_0 hubiera podido darse por la relación $|\mu(t) - \mu(t_0)| < \delta$ implica $|f(t) - f(t_0)| < \varepsilon$; no la hemos adoptado porque en tal caso (7.2) no sería válido, como lo muestra el ejemplo siguiente:

$$\mu(t) = \begin{cases} t, & t \geq 0, \\ t-1, & t < 0. \end{cases} \qquad f(t) = \begin{cases} 0, & t \geq 0, \\ \operatorname{sen}(1/t), & t < 0. \end{cases}$$

Con la definición que hemos adoptado, si una función f es continua en t_0, existen $f(t_0+0)$ y $f(t_0-0)$ (este último no tendría por qué existir con la otra posible definición).

La definición de derivada puede darse de manera natural en el soporte de μ.

(7.3) <u>Definición.</u> <u>Sea $t_0 \in \mathcal{R}$. f se llama μ-derivable en t_0, si existe</u>

$$f'(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{\mu(t) - \mu(t_0)},$$

<u>cuando t varía fuera de la μ-clausura de t_0. En tal caso $f'(t_0)$ se llama μ-derivada de f en el punto t_0.</u>

(7.4) <u>Si f es μ-continua en R_1 y μ-derivable en $\mathcal{R}$ con μ-derivada idénticamente nula, entonces f es constante.</u>

Consideraremos en primer lugar el caso $\mathcal{L}\mathcal{R} = \emptyset$.

Si $\mu(t)$ es continua, la demostración se reduce a la usual. En efecto: en tal caso la μ-continuidad implica la continuidad (usual), y por lo tanto vale el teorema de Bolzano-Weierstrass y en consecuencia el de Rolle con μ-derivada. Aplicando este último a la función

$$f(x) + \frac{f(b)-f(a)}{\mu(b)-\mu(a)}\,\mu(x)$$

resulta el teorema del valor medio

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)\left[\mu(b) - \mu(a)\right],$$

de donde resulta la tesis.

Si $\mu(t)$ no es continua, el teorema será cierto en cada intervalo cerrado de continuidad. Además, si t_0 es un salto aisla do de μ, $f'(t_0) = 0$ implica $f(t_0-0) = f(t_0)$. Por lo tanto el teorema vale si el conjunto de saltos de $\mu(t)$ no tiene puntos de acumulación. Si t_0 es un punto de acumulación de saltos, será también $f(t_0-0) = f(t_0)$, en virtud de la μ-continuidad de f si t_0 es un punto de continuidad de μ, y por ser $f'(t_0) = 0$ si t_0 es un salto.

Pasemos ahora al caso general $C\mathcal{R} \neq \emptyset$. Basta probar que si $I= (a,b)$ es un intervalo contiguo de $C\mathcal{R}$, se cumple:

$$f(a-0)= f(a)= f(a+0)= f(b-0)= f(b)= f(b+0).$$

La primera igualdad se cumple por ser $f'(a)= 0$. La segunda y tercera por ser f constante en I en virtud de la μ-continuidad. Respecto a la cuarta, si $\mu(b-0)\neq\mu(b)$ se cumple por ser $f'(b)=0$, y si $\mu(b-0)=\mu(b)$ por ser f constante en la μ-clausura de I. Finalmente, también se cumple la quinta por ser f μ-continua.

(7.5) Si f es μ-continua en $\mathcal{R}$, y $F(t) = \int_a^t f(x)\, d\mu(x)$, entonces F es μ-continua en R_1, derivable en $\mathcal{R}$, y $F'(t)= f(t)$, $t\in\mathcal{R}$.

La μ-continuidad de F es evidente.

Sea $t_0\in\mathcal{R}$. Se tiene, con $\mu(t)\neq\mu(t_0)$:

$$\frac{F(t)- F(t_0)}{\mu(t)-\mu(t_0)} = \frac{\int_{t_0}^t f(x)\, d\mu(x)}{\mu(t)-\mu(t_0)} .$$

Si t_0 es un punto de continuidad de $\mu(t)$, la demostración es la usual; si es un salto, para $t > t_0$ se demuestra en la forma usual, y para $t < t_0$ el numerador converge, si $t \to t_0$, hacia $f(t_0)\left[\mu(t_0-0) - \mu(t_0)\right]$, y resulta la tesis.

(7.6) (Regla de Barrow) <u>Sea f μ-continua en $\mathcal{R}$; $F(t) = \int_a^t f(x)d\mu(x)$; y $P(t)$ una μ-primitiva de f (es decir: $P' = f$ en $\mathcal{R}$) μ-continua en R_1. Entonces:</u>

$$\int_a^b f(x)\, d\mu(x) = P(b) - P(a).$$

Por (7.5) es $F' = f$ en $\mathcal{R}$, y además F es μ-continua en R_1. En consecuencia $F - P$ es μ-derivable en $\mathcal{R}$ con derivada nula, y μ-continua en R_1. Entonces por (7.4) resulta $F(t) = P(t) + C$, y como $F(a) = 0$ resulta la tesis.

(7.7) <u>Definición</u>. <u>f se dirá μ-diferenciable en R_1 si es μ-continua en R_1 y tiene μ-derivada continua en $\mathcal{R}$</u>.

(7.8) <u>Si f es μ-diferenciable, entonces es integral de su μ-derivada:</u>

$$f(b) - f(a) = \int_a^b f'(x)d\mu(x).$$

<u>Recíprocamente, si f tiene μ-derivada continua y es integral de su μ-derivada, entonces es μ-diferenciable</u>.

La última parte es obvia, por (7.5) y por ser μ-continua la integral. La primera parte es consecuencia de (7.6), porque f cumple la condiciones impuestas a P.

(7.9) (Integración por partes) <u>Si f y g son μ-diferencia-</u>

bles y de soporte acotado, y $\mu(t)$ es continua, entonces

$$\int_{R_1} f'(x)g(x)d\mu(x) = -\int_{R_1} f(x)g'(x)d\mu(x).$$

Evidentemente, puede reemplazarse R_1 por $\mathcal{R}$. La tesis es consecuencia de (7.9) y de la fórmula de la μ-derivada de un producto:

$$[f(x)g(x)]' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x),$$

que resulta de la identidad

$$f(x+\Delta x)g(x+\Delta x) - f(x)g(x) =$$

$$= g(x)\,[f(x+\Delta x)- f(x)] + f(x+\Delta x)\,[g(x+\Delta x)- g(x)],$$

Si $\mu(t)$ no es continua, (7.9) debe ser modificado, pues en general $f(x+\Delta x)$ no convergerá hacia $f(x)$.

Ahora pasaremos a la definición de los espacios de Sobolev. Impondremos a la medida la condición restrictiva de que si su soporte es superiormente acotado, entonces su supremo no sea un punto de salto de $\mu(t)$.

Llamaremos $\mathcal{D}_\mu$ al conjunto de funciones indefinidamente μ-diferenciables y de soporte acotado. A tales funciones le es aplicable la fórmula de integración por partes y son acotadas.

Podríamos ahora introducir el concepto general de distribución, pero sólo nos hace falta considerar al caso de funciones localmente sumables. Si f es una función tal, y $\varphi \in \mathcal{D}_\mu$, definimos a la distribución asociada a f mediante:

$$(7.10) \qquad f(\varphi) = \int_{R_1} f(x)\,\varphi(x)\,d\mu(x).$$

Además, si $\mu(t)$ es continua, definimos la μ-derivada de f, como distribución, mediante:

$$(7.11) \qquad f'(\varphi) = -f(\varphi') = -\int_{R_1} f(x)\,\varphi'(x)\,d\mu(x),$$

que es consistente con (7.9).

En el caso en que $\mu(t)$ no sea continua, consideramos una sucesión de funciones $\mu_n(t)$ no decrecientes y convergente hacia $\mu(t)$ en todo punto. Sea además $\varphi_n \in \mathcal{D}_{\mu_n}$ y $\varphi_n \to \varphi \in \mathcal{D}_\mu$ en todo punto. Definimos entonces:

$$(7.12) \qquad f'(\varphi) = -\lim_{n\to\infty} \int_{R_1} f(x)\,D_n\varphi_n(x)\,d\mu_n(x) =$$

$$= -\lim_{n\to\infty} \int_{R_1} f(x)\,d_n\varphi_n(x),$$

donde $D_n\varphi_n$ es la μ_n-derivada de φ_n, siempre que el límite exista. En particular, si f es continua, el límite existe y vale

$$f'(x) = -\int_{R_1} f(x)\,d\varphi(x),$$

en virtud del segundo teorema de Helly. Si f es continua a trozos también existe el límite pues la integral se descompone en suma de intefrales con f continua. Esto es suficiente para nuestros propósitos de definir los espacios de Sobolev, pues las funciones que los constituyen deberán ser μ-continuas.

El espacio de Sobolev $L^p_l(\mu)$ será pues por definición el conjunto de funciones que, junto a sus l primeras derivadas en el sentido de las distribuciones, son funciones a potencia p sumables respecto de μ.

<u>Ejemplo</u>: recta discreta; $\mu(t)=[t]$ = parte entera de t.

Para cada n entero, la derivada es $f'(n)= f(n)- f(n-0)$. Las funciones difernciables son las constantes en cada intervalo semiabierto $[n,n+1)$, y en tal caso su derivada es $f'(n)= f(n)- f(n-1)$.

Hallaremos la derivada en el sentido de las distribuciones. Sea $\mu_n(t) \rightarrow [t]$, μ_n derivables, $\mu_n(k)= k$, k entero. Si $k-1< x< k$, será:

$$\varphi_n'(x) = \frac{d\varphi_n}{dx} \; \frac{1}{\frac{d\varphi_n}{dx}} .$$

Si f es diferenciable:

$$\int_{R_1} f(x)\varphi_n'(x)\, d\mu_n(x) = \int_{R_1} f(x) \frac{d\varphi_n}{dx}\, dx =$$

$$= \sum_{-\infty}^{\infty} \int_{k-1}^{k} f(x) \frac{d\varphi_n}{dx}\, dx = \sum_{-\infty}^{\infty} f(k-1) \int_{k-1}^{k} \frac{d\varphi_n}{dx}\, dx =$$

$$= \sum_{-\infty}^{\infty} f(k-1)\left[\varphi_n(k) - \varphi_n(k-1)\right] \to \sum_{-\infty}^{\infty} f(k-1)\left[\varphi(k) - \varphi(k-1)\right],$$

es decir:

$$\int_{R_1} f(x)\,\varphi_n'(x)\,d\mu_n(x) \to \int_{R_1} f(x-1)\,\varphi'(x)\,d\mu(x).$$

Este cálculo prueba que la fórmula de la derivación es consistente, pues si f es diferenciable se reduce a la fórmula de sumación de Abel:

$$\sum f'(k)\,\varphi(k) = - \sum f(k-1)\,\varphi'(k),$$

y muestra de paso que en general:

$$\lim_{n\to\infty} \int f(x)\,\varphi_n(x)\,d\mu_n(x) \neq \int f(x)\,\varphi(x)\,d\mu(x).$$

<u>Ejemplo</u>: $\mu(t) = t + [t]$.

$$f'(\varphi) = \int f'(t)\,\varphi(t)\,d\mu(t) =$$

$$= \sum_{-\infty}^{\infty}\left\{\int_k^{k+1} f'(t)\,\varphi(t)\,dt + \left[f(k+1) - f(k+1-0)\right]\varphi(k+1)\right\} =$$

$$= \sum_{-\infty}^{\infty}\left\{f(k+1-0)\,\varphi(k+1-0) - f(k)\,\varphi(k) - \int_k^{k+1} f(t)\,\varphi'(t)\,dt +\right.$$

$$\left. + f(k+1)\,\varphi(k+1) - f(k+1-0)\,\varphi(k+1)\right\} = \sum_{-\infty}^{\infty}\left\{-f(k+1-0)\left[\varphi(k+1) - \right.\right.$$

$$\left.\left.\varphi(k+1-0)\right] - f(k)\,\varphi(k) + f(k+1)\,\varphi(k+1) - \int_k^{k+1} f(t)\,\varphi(t)\,dt\right\} =$$

$$= \sum_{-\infty}^{\infty}\left\{- f(k+1-0)\,\varphi'(k+1) - \int_k^{k+1} f(t)\,\varphi'(t)\,dt\right\} =$$

$$= - \int f(t-0)\,\varphi'(t)\,d\mu(t).$$

--o--

§8. TRANSFORMACION DE FOURIER CON MEDIDA CUALQUIERA.

Encararemos ahora el problema de la definición de la transformación de Fourier en la recta real R_1 con la medida μ. La propiedad esencial que queremos mantener es que para $f \in L^1(\mu)$, los valores de la transformada f en cada punto sean funcionales lineales multiplicativas sobre $L^1(\mu)$. Esta afirmación tendrá sentido siempre que $L^1(\mu)$ sea un álgebra, y para ello es menester definir un producto de convolución. Para lograr esto, hay que conmenzar por encontrar una operación de grupo, que llamaremos suma (respecto de μ) o μ-suma, y simbolizaremos $\bullet$, tal que μ sea su correspondiente medida de Haar.

Consideraremos en primer lugar el caso en el cual la medida μ cumple las siguientes condiciones:

$$\left.\begin{array}{l} \text{a) } \mu(-\infty) = -\infty\ ;\ \mu(+\infty) = +\infty; \\ \text{b) } \mu(t) \text{ es estrictamente creciente;} \\ \text{c) } \mu(t) \text{ es continua.} \end{array}\right\} \quad (8.1)$$

Bajo estas condiciones, dados x,y R_1 cualesquiera, existe un único punto z R_1 que verifica $\mu(z)=\mu(x)+\mu(y)$.

(8.2) <u>Definición</u>. <u>z = x $\bullet$ y si y sólo si</u> $\mu(z)=\mu(x) +\mu(y)$.

No ofrece dificultades ver que con las condiciones impuestas sobre μ , $\bullet$ convierte a R_1 en un grupo conmutativo. Además μ es su medida de Haar, puesto que si (a,b) es un intervalo, y (a,b) $\bullet$ x su trasladado por x, se tiene:

$$\mu\{(a,b)\circ x\} = \mu\{(a\circ x, b\circ x)\} = \mu(b\circ x) - \mu(a\circ x) =$$

$$= \mu(b)+\mu(x)-\mu(a)-\mu(x) = \mu(b)-\mu(a) = \mu\{(a,b)\}.$$

La operación $\circ$ respeta también el orden (usual) del grupo, en el sentido siguiente:

$a \leq b$ implica $a\circ x \leq b\circ x$, para todo x.

Veremos ahora que en cierto sentido la definición adoptada es única.

(8.3) <u>La única operación de grupo ordenado (con el orden usual) de R_1, con unidad 0 y μ-invariante, es la definida en (8.2)</u>.

Designemos por el momento con $\circ$ a cualquier operación de grupo ordenado, con unidad 0 y μ-invariante. Para cada para $x,y \in R_1$, definimos p_y mediante:

$$p_y = \mu(x\circ y)-\mu(x).$$

La tesis quedará probada si mostramos que $p_y = \mu(y)$. Veremos ante todo que p_y no depende de x. Para ello, considerando un $x' \neq x$, definimos:

$$p'_y = \mu(x'\circ y)-\mu(x').$$

Entonces:

$$p_y - p'_y = [\mu(x\circ y) - \mu(x'\circ y)] - [\mu(x)-\mu(x')].$$

Como por hipótesis $\circ$ respeta el orden y es μ-invariante, los dos corchetes son iguales, y en consecuencia $p'_y =$ $= p_y$, es decir, p_y no depende de x. Entonces, haciendo $x=0$, puesto que $0\bullet y=y$ por hipótesis, resulta $p_y=\mu(y)$.

Obsérvese que es esencial pedir que $\bullet$ respete el orden, lo cual por otra parte es una exigencia natural. De lo contrario, pueden existir otras operaciones μ-invariantes. Por ejemplo, considerando el caso de la medida de Lebesgue, y aplicando el método de transición (cf. [8], pág.) del plano a la recta, la suma en la recta inducida por la suma usual del plano es μ-invariante pero no está dada por (8.2).

Ahora podemos definir la convolución. $x\bullet y=z$ significa $y\bullet z=x$.

(8.4) <u>Definición</u>. $f * g\ (x) = \int_{R_1} f(x\bullet t)g(t)d\mu(t).$

Por ser μ la medida de Haar correspondiente a $\bullet$, valen las propiedades usuales de la convolución (cf., por ej.: [6], pág. 120 y sgtes.). Además, en el sentido de las distribuciones, la convolución será:

$$f * g\ (\varphi) = f \otimes g\ (\varphi(x\bullet y)) = \iint f(x)g(y)\,\varphi(x\bullet y)\ d\mu(x)d\mu(y),$$

donde $\otimes$ simboliza al producto tensorial.

$L^1(\mu)$ es pues un álgebra de Banach. Sus funcionales lineales multiplicativas ϕ_x vendrán dadas por

$$\phi_x f = \hat{f}(x) = \int_{R_1} \alpha_x(t)\ f(t)\ d\mu(t),$$

donde $\alpha_x \in L^{\infty}$ y

$$\alpha_x(t_1 e t_2) = \alpha_x(t_1)\ \alpha_x(t_2). \tag{8.5}$$

La variable x individualiza cada ϕ_x, y $\hat{f}$ será por definición la transformada de Fourier de f.

Los caracteres α_x serán las soluciones acotadas de (8.5):

$$\alpha_x(t) = e^{ix\mu(t)},$$

donde identificamos el espacio de definición de las transformadas con la recta real.

La μ-derivada de los caracteres es

$$\alpha_x'(t) = ix\,\alpha_x(t),$$

de lo cual resulta que si $f \in L_1^1(\mu)$ se cumple:

$$\widehat{f'}(x) = -ix\,\hat{f}(x), \tag{8.6}$$

lo cual se prueba con una integración por partes si f es μ-diferenciable, y por un argumento de densidad en el caso general. Esta fórmula es esencial en la demostración de (3.6). Los teoremas de Hausdorff-Young y Plancherel mantienen su validez, así como la generalización de (8.6) para $L_1^p(\mu)$, $1 \leq p \leq 2$, y así también el teorema de Marcinkiewicz (2.5), que son elementos necesarios para el teorema (3.6).

El próximo paso que intentaremos llevar a cabo consiste en liberarnos de algunas de las condiciones restrictivas (8.1) impuestas a μ. Comencemos haciendo notar que si $\mu(t)$ tiene saltos y no es igual a un múltiplo de $[t]$, entonces no existe ninguna operación de grupo μ-invariante y que respete el orden. En efecto, supongamos por ejemplo que $\mu(t)$ tiene un salto s_0 en t_0, y sea E un conjunto de R_1 de medida menor que s_0; al trasladarlo, será imposible que "atraviese" t_0 sin cambiar su medida.

Por tales razones, para resolver el problema en el caso general, no podemos utilizar la operación de suma, de manera que hay que dar una definición directa de transformada de Fourier, o a lo sumo definir de alguna manera la convolución. Nosotros adoptaremos este último camino.

Sea pues μ una medida no negativa sujeta a la única restricción a) de (8.1), es decir: $\mu(-\infty)= -\infty$, $\mu(\infty)= =\infty$, de manera que $\mu(t)$ podrá tener saltos e intervalos de constancia.

Sea μ_n, n=1,2,... una sucesión de medidas no negativas cuyas funciones de distribución satisfacen las condiciones (8.1) y constituyen además una sucesión creciente: $\mu_n(t) \leq \mu_{n+1}(t)$, para todo n y $t \in R_1$. Supondremos también que μ_n converge hacia μ débilmente sobre las funciones μ-continuas, en el sentido siguiente: para toda función f μ-continua e integrable respecto de μ, se cumple:

$$\int f(t)d\mu_n(t) \to \int f(t)d\mu(t).$$

Podemos suponer además que $\mu_n(t) \to \mu(t-0)$.

Para cada una de las medidas μ_n está bien definida su suma mediante (8.2), que designaremos ahora $\underset{n}{\circ}$. Por consiguiente, la correspondiente convolución estará dada por:

$$f \underset{n}{*} g\,(x) = \int f(x \underset{n}{\circ} t)\; g(t)\; d\mu_n(t).$$

La convolución respecto de μ se definirá -en principio- para cada x mediante:

$$f * g\,(x) = \lim_{n\to\infty} f \underset{n}{*} g\,(x),$$

siempre que el límite exista.

Si logramos probar que el límite existe para un conjunto denso de funciones de $L^1(\mu)$, de manera que se verifique la desigualdad de Young, la operación de convolución se extenderá a todo $L^1(\mu)$, y este espacio quedará convertido en un álgebra de Banach.

Elegiremos como conjunto al de las funciones μ-continuas de soporte acotado que además sean constantes en algún semientormo a la derecha -que no dependa de cada función- de cada punto de discontinuidad de $\mu(t)$.

Podemos suponer que fuera de tales semientornos es $\mu_n(t) = \mu(t)$.

Bajo tales condiciones, si para cada función f definimos la función F mediante

$$F(\mu_n(t)) = f(t),$$

resultará F indepenciente de n.

Entonces:

$$f \underset{n}{*} g\ (x) = \int f(x \underset{n}{\ominus} t) g(t) d\mu_n(t) = \int F(\mu_n(x)-\mu_n(t)) G(\mu_n(t)) d\mu_n(t)$$

$$= \int F(\mu_n(x)-y)\ G(y)\ dy = F * G\ (\mu_n(x)),$$

donde la última convolución es la usual.

Haciendo $n \to \infty$, $\mu_n(x) \to \mu(x-0)$ en forma creciente, lo cual implica, para toda función F asociada a una f con las condiciones enunciadas, que

$$F(\mu_n(x)) \to F(\mu(x-0)).$$

Además, la convergencia es mayorada, y por lo tanto la convolución resulta bien definida, y viene expresada por

$$f * g\ (x) = \int F(\mu(x-0)-y)\ G(y)\ dy = F * G\ (\mu(x-0)).$$

Respecto a la norma en $L^1(\mu)$, se tiene:

$$\| f * g \| = \int | f * g\ (x) | d\mu(x) \leq$$

$$\leq \int |G(y)| dy \int |F(\mu(x-0)-y)| d\mu(x).$$

Impondremos a la medida μ la condición restrictiva siguiente:

Existe una constante K, que sólo depende de μ, tal que para toda F y todo y se cumple:

$$\int |F(\mu(x-0)-y)|\, d\mu(x) \leq K \|f\| \qquad (8.7)$$

En tal caso, teniendo en cuenta que

$$\int |G(y)|\, dy = \int |g(t)|\, d\mu_n(t) \rightarrow \|g\|,$$

resulta:

$$\|f * g\| \leq K \|f\| \|g\|,$$

y esta desigualdad permite extender la convolución a todo el espacio $L^1(\mu)$.

Introduciendo además la nueva medida

$$d\nu = K\, d\mu,$$

y designando con $|||\ |||$ a la norma en $L^1(\nu)$, se obtiene la desigualdad de Young:

$$|||f * g||| \leq |||f|||\cdot|||g||| ,$$

que convierte al espacio dado en un álgebra de Banach conmutativa. Nótese que la convolución se define respecto a la medida original μ.

Llegado a este punto, no ofrece dificultad la definición de la transformación de Fourier, tal como se hizo en el caso estudiado más arriba.

Aplicaremos las últimas consideraciones a un caso particular importante, y veremos cómo se puede simplificar allí la condición (8.7), lo cual servirá de paso para mostrar su sentido.

Sea μ la medida discreta concentrada en los puntos de abscisa entera, con masas $\mu\{k\} = s_k \geq 0$.

En este caso, si elegimos $\mu_n(k)=\mu(k-1)$, y si f y g son μ-continuas y de soporte acotado, entonces se cumple, para h entero:

$$f \underset{n}{*} g\ (h) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} g(k) \int_{\mu(h-1)-\mu(k)}^{\mu(h-1)-\mu(k-1)} F(y)\ dy,$$

independientemente de n, y además:

$$\| f * g \| = \sum_h |f * g(h)|\, s_h \leq \int |g(t)|\, d\mu_n(t) \sum_h |f(h \underset{n}{-} t)|\, s_h .$$

Pero para cada t y cada n, existe un $\ell = \ell_h = [h \underset{n}{-} t]$ tal que:

$$\sum_h |f(h \underset{n}{-} t)|\, s_h = \sum_h |f(\ell_h)|\, s_h = \sum_h |f(\ell_h)|\, s_{\ell_h} \frac{s_h}{s_{\ell_h}}.$$

Imponiendo la condición:

$$\sup_{h', h''} \frac{s_{h'}}{s_{h''}} < \infty , \qquad (8.8)$$

y teniendo en cuenta que en tal caso sólo puede aparecer repetido cada término $|f(\ell_h)|s_{\ell_h}$ un número finito de veces que depende solamente de μ, resulta:

$$\sum_h |f(h_n t)| s_h \leq K \|f\|,$$

de manera que obtenemos finalmente:

$$\|f * g\| \leq K \|f\| \|g\|.$$

Conviene observar que en el caso particular de la medida discreta ordinaria $-s_k=1$, para todo $k-$, la convolución se reduce a la usual:

$$f * g\ (h) = \sum_k f(h-k)\ g(k),$$

y además resulta $K=1$. La transformada de Fourier será la serie de Fourier ordinaria:

$$\hat{f}(x) = \sum_k e^{ixk} f(k).$$

Concluiermos extendiend algunos resultados a varias dimensiones, suponiendo que la medida sea producto de medidas lineales. Para simplificar, consideraremos el caso en que tales medidas lineales cumplan (8.1).

Sea pues $x=(x_1,\dots,x_m)$ un punto de R_m,

$$\Omega(x) = \mu_1(x_1)\dots\mu_m(x_m)$$

la función de distribución de la medida, y μ_h las medidas lineales.

La suma se define componente a componente:

$$z = x \bullet y, \text{ con } z=(z_1,\dots,z_m) = (x_1 \underset{1}{\bullet} y_1,\dots,x_m \underset{m}{\bullet} y_m),$$

donde $\underset{h}{\bullet}$ indica la suma respecto de μ_h.

Con la definición dada de suma, la medida Ω resulta invariante.

Los caracteres siguen verificando la relación:

$$\alpha_x(u \bullet v) = \alpha_x(u)\, \alpha_x(v),$$

con $u=(u_1,\dots,u_m)$, $v=(v_1,\dots,v_m)$, de manera que si identificamos el espacio de definición de la transformada con R_m: $x=(x_1,\dots,x_m)$, resulta:

$$\alpha_x(t) = e^{\,i \sum_1^m x_h \mu_h(t_h)},$$

y la transformada de Fourier será:

$$f(x) = \int_{R_m} e^{\,i \sum_1^m x_h \mu_h(t_h)}\, f(t)\, d\Omega(t),$$

y se verifica:

$$\hat{f}_{\mu_h} = -ix_h\, \hat{f},$$

donde f_{μ_h} indica la μ_h-derivada (parcial) de f.

--o--

Cotlar

Mischa Cotlar

BIBLIOGRAFIA

[1]. A.P. CALDERON, Integrales singulares y sus aplicaciones a ecuaciones diferenciales hiperbólicas (Cursos y seminarios de Matemática; F.C.E.y N.; Univ. de Buenos Aires; Fascículo 3; 1960).

[2]. A.P. CALDERON and A. ZYGMUND, Singular integral operators and differential equations (American Jour., vol. LXXIX, N°4, 1957; pág. 901-921).

[3]. M. COTLAR, Condiciones de continuidad de operadores potenciales y de Hilbert (Cursos y seminarios de Matemática; F.C.E.y N.; Univ. de Buenos Aires; Fascículo 2; 1959).

[4]. N. DUNFORD and J.T. SCHWARTZ, Linear Operators, Part. I: General Theory (Pure and applied mathematics, Volume VII, Interscience Publishers, Inc., New York).

[5]. E.HILLE and R.S. PHILLIPS, Functional analysis and semi-groups (American Math. Society, Colloquium publications, Volume XXXI, revised edition; 19..).

[6]. L.H. LOOMIS, An introduction to abstract harmonic analysis (D.V.Nostrand Co., Inc.; 1953).

[7]. J. MARCINKIEWICZ, Sur les multiplicateurs des séries de Fourier (Studia Mathematica, Vol. 8, 1939; pág. 78-91).

[8]. F.RIESZ et B.Sz.-NAGY, Leçons d'Analise Fonctionelle (Budapest, 1953).

--o--

INDICE

-o-