Generalización de la definición de diferencial en el sentido de Hadamard a las aplicaciones entre dos espacios vectoriales que topologicamente son espacios L en el sentido de Frechet-Kuratowski

Fernández Long de Foglio, Susana

1958

Tesis presentada para obtener el grado de Doctor en Ciencias Físico-Matemáticas de la Universidad de Buenos Aires

FCEFN-BA.
UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES
Facultad de Ciencias Exactas Físicas y Naturales

I-19-3

— Resumen —

Generalización de la definición de diferencial en el sentido de Hadamard a las aplicaciones entre dos espacios vectoriales que topologicamente son espacios L en el sentido de Frechet-Kuratowski.

Susana Fernández Long de Foglio

(Tesis para optar al título de doctora en Ciencias Fisicomatemáticas.) año 1958

La teoría de la diferencial, en el sentido de Hadamard para funciones numéricas de variable numérica, ha sido extendida a las aplicaciones entre dos espacios abstractos, primero por Frechet,(1) luego por Ky-Fan(2) y Balanzat(3) considerando espacios en los cuales la topología estaba definida por intermedio de una distancia.

Nos proponemos extender esta teoría al caso de las aplicaciones entre dos espacios vectoriales que son topológicamente espacios L (4) y, naturalmente, con la condición de continuidad de las operaciones vectoriales.

Definición 1: Una aplicación $x = g(\lambda)$ donde λ es un número real y x es un punto de un espacio L vectorial E, se dice diferenciable en el punto λ_0, si existe $g'(\lambda_0) \in E$ tal que

$$\frac{g(\lambda_0+\Delta\lambda) - g(\lambda_0)}{\Delta\lambda} = g'(\lambda_0) + \mu(\Delta\lambda)$$

con la condición que para toda sucesión $\Delta\lambda_n$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty} \Delta\lambda_n = 0$ se tenga $\lim\limits_{n\to\infty} \mu(\Delta\lambda_n) = \theta$

Definición 2 Una aplicación $y = f(x)$, donde x e y pertenecen respectivamente a dos espacios vectoriales E y F, es diferenciable en el punto x_0, si existe una aplicación lineal y continua (la diferencial en el punto x_0), $y = U(x)$ tal que cualquiera que sea la aplicación $x = g(\lambda)$, λ real, diferenciable en λ_0, con $x_0 = g(\lambda_0)$ la aplicación $\Phi(\lambda) = F[g(\lambda)]$ sea diferenciable y $\Phi'(\lambda_0) = U[g'(\lambda_0)]$

La diferencial es única y la diferencial de una combinación lineal es la combinación lineal de las diferenciales.

Tenemos los teoremas siguientes:

Teorema 1 Si en el espacio L vectorial E cada punto posee un sistema fundamental numerable de entornos, toda aplicación diferenciable de E en un espacio vectorial L cualquiera es continua.

En el caso general, donde E es un espacio L vectorial cualquiera,el teorema es falso. Para demostrarlo, hemos construido un espacio vectorial L cuyos puntos son las sucesiones de números reales (x_1 x_2 ... x_n ...),tal que todos los elementos, salvo un número finito, son nulos, El límite $X = \lim_{m\to\infty} X^m$, está definido por la doble condición

a) $\lim_{m\to\infty} x_n^m = x_n$

b) se pueden determinar los números n_o y h tal que para $n \geqslant n_o$ y m cualesquiera se tiene $|x_n^m| \leqslant h$.

Podemos construír en este espacio una función diferenciable no continua.En consecuencia agregaremos la condición de continuidad a la definición de diferencial.

Teorema2 Sean $y = f(x)$, $z = g(y)$ donde x , y , z pertenecen a tres espacios L vectoriales,dos aplicaciones diferenciales; $U(x)$ y $V(y)$ sus diferenciales respectivas. La aplicación $z = F(x) = g[f(x)]$ es diferenciable y su diferencial $W(x)$ es igual a $V[U(x)]$.

La teoría puede extenderse a las aplicaciones de muchas variables $y = f(x_1...x_n)$ considerando la aplicación $y = f(X)$ sonde X es un punto del espacio producto de n espacios de las variables $x_1...x_n$. Se tiene:

Teorema 3 Si $y = f(x_1...x_n)$ es diferenciable en el punto $(a_1...a_n)$ las aplicaciones $y = f_i(x_i) = f(a_1...x_i...a_n)$ son diferenciables en el punto $x_i = a_i$.

Llamaremos diferenciales parciales de f las diferenciales de las aplicadiones $f_i(x_i)$ y se tiene el resultado siguiente:

Teorema 4 La diferencial de una aplicación de varias variables es igual a la suma de todas sus diferenciales parciales, tanto en el caso en que las variables sean independientes como en el caso en que dependan de otras variables.

Nuestra definición comprende como caso particular las de Ky-Fan [2] y Balanzat [3].

(1) Journal de Mathematiques, Vol 16.(1937) 233-250

(2) Journal de Mathematiques Vol 21, (1942) 289-369

(3) Mathematicae Nothae Vol 9 (1949) 29-51

(4) Kuratowski-Topologie En estos espacios la condicion A puede no verificarse

(5) Portugaliae Mathematicae Vol 7 (1948) 59-72

Hernández.

M. Balanzat

INTRODUCCION

La extensión a los espacios abstractos de la diferencial, fué hecha por primera vez por Frechet (1), para las funciones entre dos espacios métricos, generalizando el concepto clásico de la diferencial de Stolz.

Más tarde Frechet (2) probó, que si se toma como base de partida el concepto de diferencial en el sentido de Hadamard, estos dos conceptos, iguales en el Análisis clásico, difieren cuando se consideran funciones definidas en espacios métricos.

El estudio completo de la teoría de la diferencial, en el sentido de Hadamard, para espacios métricos, fué hecha por Ky Fan en su tesis de la Sorbona (Ky Fan 1).

Ky Fan esbozó la teoría para espacios métricos afines. Este estudio fué completado por Balanzat (1) modificando la definición de Ky Fan para probar la continuidad de toda función diferenciable (*).

El tema de este trabajo es la extensión de la teoría de la diferencial a los espacios $\mathcal{L}$ vectoriales. Para estos espacios la definición en el sentido de Hadamard-Frechet, que se apoya fundamentalmente en la diferenciabilidad cuando la variable independiente es un número real, es la forma más natural de introducir dicho concepto.

Hemos considerado espacios $\mathcal{L}$ en el sentido de Frechet-Kuratowski (Kuratowski 1), por lo tanto, estos espacios no satisfacen todos los axiomas de los espacios topológicos en el sentido de Bourbaki, puesto que puede ser $\bar{A} \neq \bar{\bar{A}}$.

(*) Por otra parte, en el ejemplo que Ky Fan da en su tesis de una función diferenciable no contínua, la diferencial de la función que él define es lineal pero no contínua.

sea n

$$\left|\alpha_n^{(m)}\right| < h$$

(este número h es cualquiera, pero fijo para una sucesión dada)

Veamos que el espacio así definido es un espacio $\mathcal{L}$

La condición a) implica que si hay límite es único.

1°).- Supongamos que $P^{(m)} \to \Theta$ y tomemos $P^{(m_i)}$, es claro que $\lim\limits_{i\to\infty} \alpha_n^{(m_i)} = 0$ y para $m_i \geqslant m_0$ cualquiera que sea n

$$\left|\alpha_n^{(m_i)}\right| \leq h$$

2°).- Si $P^{(m)} = \Theta$, es claro que $\lim\limits_{m\to\infty} P^{(m)} = \Theta$

3°).- Supongamos que $P^{(m)} \not\to \Theta$, ello puede ser debido a dos motivos

α).- para algún n_0 $\lim\limits_{m\to\infty} \alpha_{n_0}^{m} \neq 0$

existe entonces una sub-sucesión parcial $\alpha_{n_0}^{m_i}$ tal que ninguna de sus sucesiones parciales converge hacia cero y es claro que entonces la sucesión P^{m_i} es tal que ninguna sub-sucesión parcial converge a Θ.

β).- No cumple b) es decir, no existen m_0 y h tales que para $m > m_0$ y cualquiera que sea n $\left|\alpha_n^{(m)}\right| < h$

Entonces tomando $m_0 = 1$ y $h = 1$, existe un $m \geqslant m_0$ y un n tal que $\left|\alpha_{n_1}^{m_1}\right| > 1$

Tomando luego m_1 como valor de m_0 y $h = 2$, existe un $m_2 > m_1$ y un n_2 tal que $\left|\alpha_{n_2}^{m_2}\right| > 2$;......y así sucesivamente.

Puedo así conseguir una sucesión de números $m_1, m_2, \ldots, m_r, \ldots$ tales que existe un n_r tal que

$$\left|\alpha_{n_r}^{m_r}\right| > r$$

m_1 y $\vec{h_1}$, y m_2 y h_2, tales que para $m > m_1 \; |\alpha_n^m| \leq h_1$

y para todo n ; para $m > m_2$ $|\beta_n^m| \leq h_2$ y todo n, luego tomando

$m > \text{máx}\,(m_1 \;\text{y}\; m_2)$

$$|\alpha_n^m + \beta_n^m| \leq h_1 + h_2 = h$$

luego la suma es contínua.

Veamos ahora el caso del <u>producto por un escalar</u>. Sean $P^m \to \Theta$ y $a_m \to a$. La primera, es una sucesión de vectores del espacio R^* y la segunda una sucesión de números reales con límite finito.

Para $m \geq m_0$ es $|\alpha_n^m| \leq h$ y todo n

para $m > m_1$ es $|a_m| \leq |a+1|$

para $m \geq \text{máx}\,(m_0, m_1)$ se tiene

$|a_m \alpha_n^m| \leq |a+1|\,|h|$ y todo n $\quad \therefore \lim\limits_{m \to \infty} a_m P^m = \Theta$

2º) Si $P^m \to P$ y $a_m \to 0$, para $m > m_0$ y todo n se tiene que

$|\alpha_n^m - \alpha_n| \leq h$

para $m > m_1$ $\quad \varepsilon > 0$

$|a_m| < \varepsilon$

El límite $P = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots\ldots, \alpha_j, \ldots\ldots)$ tiene $\alpha_n = 0$ para todo $n > n_0$ luego $|\alpha_n^m| \leq h$ para $m > m_0$ y $n > n_0$

$$|a_m \alpha_n^m| \leq \varepsilon h \quad \text{para } m > \text{máx}(m_0, m_1),\; n \geq n_0$$

Para $n \leq n_0$ y $m \geq \text{máx}(m_0, m_1)$ se verifica que

$|a_m \alpha_n^m| \leq \varepsilon h + \varepsilon\,|\text{máx}\; \alpha_n^m| \leq \varepsilon M$, M número finito

luego $|\varepsilon \alpha_n^m| < \delta = \varepsilon M$ para todo $n, m \geq \text{máx}\,(m_0, m_1)$

por lo tanto $\lim\,(a_m P^m) \to \Theta$ para $P^m \to P$, y, $a_m \to 0$

l.q.q.d.

Hemos así probado que el espacio R^* es $\mathcal{L}$ vectorial, con suma de vectores y producto por un escalar, contínuos.

En este espacio R^*, daremos ahora un ejemplo de una sucesión

Veamos ahora que $r.P^{m_r}$ tampoco converge a ningún vector V del espacio R^*

En efecto, si existiera algún vector $V = (v_1, v_2, \ldots) \in R^*$ y tal que $\lim r.P^{m_r} = V$ debería cumplirse que

$$\lim_{m \to \infty} (r.P^{m_r} - V) \quad 0$$

o lo que es lo mismo, deberían verificarse:

a) $\lim (r.\alpha_n^{m_r} - v_n) = 0$

b) Existen m_0 y h tales que para $m > m_0$ y cualquiera sea n

$$\left| r\,\alpha_n^{m_r} - v_n \right| < h$$

Como $v_n = 0$ para $n > n_0$ (cada vector de R sólo tiene un número finito de coordenadas no nulas), para r tal que $m_r > n_0$ se tendrá

$$(r.\alpha_{m_r}^{m_r} - v_{m_r}) = r - 0 = r$$

, por lo tanto no se cumple a). Es fácil ver que tampoco se cumple b) pues dado h cualquiera existirá siempre un $r > h$ tal que $\left| r.\alpha_{m_r}^{m_r} - v_{m_r} \right| = r > h$

por lo tanto la sucesión no converge a ningún vector V de R^*.

Es inmediato que ninguna sub-sucesión de $r.P^{m_r}$ tiene límite V, pues, por las mismas razones que anteriormente

$$\left| r_j\,\alpha_{m_{r_j}}^{m_{r_j}} - v_{m_{r_j}} \right| = r_j > h \quad \text{para} \quad m_{r_j} > n_0$$

y tal que $r_j > h$ (h número cualquiera, dado).

Formemos ahora la sucesión $t_j.P^{m_j}$ en donde

$t_1 < t_2 < \ldots$ sucesión creciente de números reales, cualesquiera.

$m_1 < m_2 < m_3 < \ldots\ldots$

sucesión creciente de números naturales, cualesquiera.

La sucesión $t_j.P^{m_j}$ no converge ni al vector nulo ni a ningún vector V del espacio R^*. En efecto, basta ver que cualesquiera sean los t_j, existirá siempre una sucesión de números naturales

$$[illegible]\ F'(\lambda_0)\ [illegible]$$

Ahora bien por la diferenciabilidad de $F(x)$ es [illegible]

$$F\left[g(\lambda)\right] - F\left[g(\lambda_0)\right] = U\left[g'(\lambda_0)\right] [illegible]$$

en donde $U(x)$ es la diferencial de $F(x)$ y Ω [illegible] cumple la condición:

$$\lim_{\lambda \to \lambda_0} \frac{\Omega}{\lambda - \lambda_0} = 0$$

Pero $F\left[g(\lambda)\right] = F(x_1^0, \ldots, x_{i-1}^0, x_i, x_{i+1}^0, \ldots, x_n^0) =$

$$= F_i^0 (h_i(\lambda))$$

$$F\left[g(\lambda_0)\right] = F_i^0\left[h_i(\lambda_0)\right]$$

y llamando:

$$U_i(x_i) = U(0, \ldots, 0, x_i, 0, \ldots, 0)$$

se puede poner:

$$F_i^0\left[h_i(\lambda)\right] - F_i^0\left[h_i(\lambda_0)\right] = U_i\left[h_i'(\lambda_0)\right] + \Omega$$

El teorema quedará demostrado si probamos que $U_i(x)$ es lineal y ello surge fácilmente de la linealidad de $U(x)$.

En efecto:

$$U_i(x_i) + U_i(t_i) = U(0, \ldots, 0, x_i, 0, \ldots, 0) + U(0, \ldots, 0, t_i, 0, \ldots, 0) =$$

$$= U(0, \ldots, 0, x_i + t_i, 0, \ldots, 0) = U_i(x_i + t_i)$$

luego $U_i(x_i)$ es distributiva.

Por otra parte si $x_i^n \to x_i$, como

$$(0, \ldots, 0, x_i^n, 0, \ldots, 0) \longrightarrow (0, \ldots, 0, x_i, 0, \ldots, 0)$$

y puesto que $U(x)$ es continua

$$\lim_{n \to \infty} U(0, \ldots, 0, x_i^n, 0, \ldots, 0) = U(0, \ldots, 0, x_i, 0, \ldots, 0)$$

y por consiguiente

$$\lim_{n \to \infty} U_i\left[x_i^n\right] = U_i\left[x_i\right]$$

[illegible] $U_i(x_i)$ [illegible] continua

en donde ... el
punto ...
dif...

... en el ...
que en todo punto ... Δx ... Δx ...
$dx = \delta_{\Delta x} x = \Delta x$

[redacted]

APÉNDICE

Relaciones con la diferencial definida en el caso de espacios métricos af...

Balanzat para el caso $x = \varepsilon(\lambda)$; λ número real $x \in X$

siendo X un espacio métrico afín,(ver Balanzat 1) utiliza la condición

$$(1) \quad \lim_{\lambda \to \lambda_0} \frac{(\omega, \theta)}{\lambda - \lambda_0} = 0$$

siendo (ω, θ) la distancia del vector ω al vector nulo,y plantea el problema si la condición (1) es equivalente a la

$$(2) \quad \lim_{\lambda \to \lambda_0} \left(\frac{\omega}{\lambda - \lambda_0}, \theta \right) = 0$$

La definición adoptada en este trabajo,equivale,en el caso particular tratado por Balanzat, a la condición (2).

Probaremos ahora que si se cumple (1) ,como consecuencia se verifica (2).

Balanzat,trabaja en espacios métricos afines,en el caso en que la distancia se conserva en toda traslación.Luego,si α y β son dos vectores del espacio:

$$(\alpha - \beta , \theta) = (\alpha , \beta)$$

por lo tanto:

$$(n\alpha , \theta) \leq (n\alpha , (n-1)\alpha) + \left[(n-1)\alpha , (n-2)\alpha \right] + \ldots$$
$$\ldots + (\alpha , \theta) = n(\alpha , \theta)$$

Para n entero cualquiera se cumple:

$$(3) \quad \left[\frac{\alpha}{1/n} , \theta \right] \leq \frac{(\alpha , \theta)}{1/n}$$

Probaremos que para $|\lambda| > 1/n$

$$\left(\frac{\omega(\lambda)}{\lambda} , \theta \right) \leq \left(\frac{\omega(\lambda)}{1/n} , \theta \right)$$

efecto como $\frac{1/n}{|\lambda|} = \gamma < 1$ existirán dos esferitas de radio

...

$\frac{1}{n} \in$ ... $\subset V_{(1/n)}$

$\frac{\omega(\lambda)}{\lambda}$ ... $\frac{\omega(\lambda)}{1/n}$

pues $\frac{\omega(\lambda)}{\lambda}$ ... además

están sobre la misma ...

$\frac{\omega(\lambda)}{\lambda}$ ... $\frac{\omega(\lambda)}{1/n}$

de (3) y (4) se ...

$$\left[\frac{\omega(\lambda)}{\lambda}, \theta\right] \leq \left[\frac{\omega(\lambda)}{1/n}, \theta\right] \leq \frac{(\omega(\lambda), \theta)}{1/n}$$

Supongamos ahora que ... $|\lambda| < \delta$

$\frac{(\omega(\lambda), \theta)}{\lambda} \leq \varepsilon_1$ ... $\frac{(\omega(\lambda), \theta)}{1/n} \leq \varepsilon_1$

$\frac{(\omega(\lambda), \theta)}{\lambda}$

$\frac{(\omega(\lambda), \theta)}{1/n}$

tomando $|\lambda| < \delta$

$(1/n) < \delta$

$\varepsilon_2 \cdot |\lambda|$ ... $\varepsilon_1 (1 + \varepsilon_2) = \varepsilon_1 + \varepsilon_1 \cdot \varepsilon_2 \leq \varepsilon$

luego, basta ... podemos encontrar ε_1 y ε_2

tal que

$$\left[\frac{\omega(\lambda)}{\lambda}, \theta\right] \leq \varepsilon$$

q.e.d.

Nuestra definición, tendrá en este caso la forma (1), pero con la condición :

$$(4) \qquad \lim_{\Delta\lambda \to 0} \frac{\omega(\Delta\lambda)}{\Delta\lambda} = \theta \in X$$

A) Si $x = g(\lambda)$ es diferenciable en $\lambda = \lambda_0$ en el sentido de Frech[illegible] lo es en el nuestro.

En efecto, debemos probar que se verifica (4), verificándose (3), es decir, habrá que probar que dado $V_1 \in \mathcal{V}(\theta)$, arbitrario, se cumpl[illegible]

$$\frac{\omega(\Delta\lambda)}{\Delta\lambda} \in V_1 \quad \text{para} \quad |\Delta\lambda| < \varepsilon$$

Para ello tomemos $V \in \mathcal{V}(\theta)$ en X, convenientemente en (3) para que se verifique:

$V \subset n . \varepsilon . V_1$ entonces, como

$$n . \omega(\Delta\lambda) \in V \subset n . \varepsilon . V_1$$

$$\omega(\Delta\lambda) \in \varepsilon . V_1$$

$$\frac{\omega(\Delta\lambda)}{\Delta\lambda} \in V_1 \qquad \text{l.q.q.d.}$$

B) Recíprocamente, si se verifica (4) se cumple (3).

En efecto, si se cumple (4) tenemos:

$$\frac{\omega(\Delta\lambda)}{\Delta\lambda} \xrightarrow[|\Delta\lambda| \to 0]{} \theta \in X$$

esto significa que dado $V_1 \in \mathcal{V}\theta$ en X, existe $\varepsilon > 0$ tal que para $|\Delta\lambda| < \varepsilon$

$$\frac{\omega(\Delta\lambda)}{\Delta\lambda} \in V_1$$

entonces, tomando V_1 de tal forma que verifique

$n . |\Delta\lambda| . V_1 \subset V$; dado V arbitrario

$$n . \omega(\Delta\lambda) \in V \quad \text{para} \left\{ |\Delta\lambda| < \varepsilon \quad |n . \Delta\lambda| < R \right.$$

es decir se cumple (3).

Por lo tanto en el caso $x = g(\lambda)$ λ número real, las dos defi[illegible] ciones, son equivalentes.

<u>Para el caso general</u>: Supongamos que $y = f(x)$ es diferenciable en el sentido de Frechet en x_0, entonces, para cualquier $x = g(\lambda)$ diferenciable en λ_0, siendo λ un número real, (caso en que la definición de Frechet y la nuestra son equivalentes) la función compuesta $F(\lambda) = f(g(\lambda))$ es diferenciable en el sentido de Frechet (por el teorema de las funciones compuestas), luego, si la función es diferen ciable según Frechet, como todas las $F(\lambda)$ posibles, para todas las $g(\lambda) = x$ diferenciables, resultan derivables $y = f(x)$ será diferenciable según nuestra definición.

La recíproca no se puede afirmar, pues del hecho de que $y = f(x)$ sea diferen ciable con nuestra definición, no se puede asegurar que se cumpla la condición (2).

Por otra parte Frechet ( ) ha dado un ejemplo, en los espacios vectoriales distanciados, de una función, diferenciable en el sentido de Hadamard (que nuestra definición generaliza) y no diferenciable en el sentido de Stolz.

Manuel Balanzat   Hernán Gómez

Matematica

KURATOWSK

XI FA