Interacción de partículas de spin 3/2 con el campo electromagnético

Munczek, Hermán Jaime

1958

Tesis presentada para obtener el grado de Doctor en Ciencias Físico-Matemáticas de la Universidad de Buenos Aires

RESUMEN

Como es sabido, si una partícula de spin 3/2 se representa por una función de onda ψ_μ ($\mu = 1, 2, 3, 4$) donde para cada valor de μ ψ_μ es un spinor de Dirac, deben cumplirse ciertas condiciones suplementarias que aseguren que ψ_μ sólo posee cuatro grados de libertad y por tanto brinda una representación irreducible de las partículas de spin 3/2.

En las formulaciones usuales esas condiciones suplementarias son, para la partícula libre,

$$\gamma^\mu \psi_\mu(x) = 0$$

$$p^\mu \psi_\mu(x) = 0 \qquad (1)$$

pero se modifican cuando hay interacción con el campo electromagnético; esto es consecuencia de que las ecuaciones (1) se derivan del Lagrangiano como ecuaciones del movimiento, y por lo tanto al modifiarse el Lagrangiano debido a la interacción se modifican también las ecuaciones que de él se derivan.

En este trabajo, se encaran las condiciones (1) como ecuaciones de vínculo que se cumplen en cualquier circunstancia. Por lo tanto se obtiene del Lagrangiano una sola ecuación del movimiento, que en el caso libre es análoga a la de Dirac

$$(\gamma \cdot p - m)\, \psi_\mu(x) = 0$$

De acuerdo con la hipótesis anunciada se obtiene luego una ecuación que describe la interacción de la partícula con el campo electromagnético, ésta es

$$(\gamma \cdot p - m)\, \psi_\mu(x) - e\, \Delta_\mu^\nu (\gamma \cdot A\, \psi_\nu(x)) = 0$$

donde Δ_μ^ν es un operador que cumple las condiciones (1), es decir

$$\gamma^\mu \Delta_\mu^\nu = 0 \qquad ; \qquad p^\mu \Delta_\mu^\nu = 0$$

La presencia de este operador permite que la ecuación sea compatible con las condiciones suplementarias.

Acontinmación se halla el momento magnético de estas partículas. Esto se hace pasando a una ecuación de segundo orden y buscando el límite no relativista de la misma cuando actúa un campo magnético débil, en este caso la ecuación para la partícula en reposo nos dice que el momento magnético es igual a un magnetón de Bohr, o sea que el factor giromagnético es igual a la inversa del spin. Este resultado coincide con el obtenido usando el formalismo común.

Luego se estudia la forma que tiene el método de Feynman en este caso; se encuentra que los elementos de matriz de los diversos procesos de interacción son formalmente los mismos que para spin 1/2, excepto que el propagador de Feynman aparece en esta teoría multiplicado por el operador de proyección Δ_{μ}^{ν} de modo que las condiciones suplementarias (1) se cumplen también en los estados intermedios.

En vista de lo que antecede se calcula, usando el formalismo de Feynman, la dispersión por un campo coulombiano, en primer orden, obteniéndose que la sección eficaz de dispersión es la de spin cero multiplicada por un factor angular que da la influencia del spin, este factor se reduce a 1 para ángulos pequeños o para bajas energías.

Finalmente se calcula la sección eficaz de dispersión de fotones (efecto Compton). La complejidad de los cálculos nos obliga a limitarnos a calcular los dos casos extremos:

Energía del fotón incidente mucho mayor que la energía en reposo de la partícula.

Energía del fotón incidente mucho menor que la energía en reposo de la partícula.

El resultado obtenido es interesante pues el caso de alta energía da una diferencia marcada comparado con un cálculo análogo efectuado por Mathews usando el formalismo corriente. Esta diferencia podrá servir para la comparación de las dos teorías con los eventuales datos experimentales.

V

INTERACCION DE PARTICULAS DE SPIN 3/2 CON EL CAMPO ELECTROMAGNETICO

Tesis presentada por Herman Jaime Munczek ante la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales de la Universidad Nacional de Buenos Aires para obtener el título de Doctor en Ciencias Físico Matemáticas.

BUENOS AIRES
Setiembre 1958

INTRODUCCION

El desarrollo de teorías que describan el comportamiento de partículas de spin superior, aparte de su interés puramente teórico, se ve fomentado actualmente por la existencia de nuevas partículas cuyos spines y momentos se desconocen.

La primera teoría fue desarrollada por Dirac[1] en el año 1936 como una extensión de la de spin 1/2, el trabajo de Dirac fue perfeccionado por Fierz y Pauli[2,3] y por Gupta[4]. Una representación conveniente de la teoría original de Dirac ha sido dada por Rarita y Schwinger[5] y su interacción con el campo electromagnético fue estudiada por Moldauer y Case[6].

Sucintamente, el formalismo de Rarita-Schwinger consiste en lo siguiente: la función de onda de una partícula de spin $n+1/2$ es $\psi^b_{\nu_1\nu_2\ldots\nu_m}$, donde b es un índice spinorial (b = 1,2,3,4) y los ν_i son índices tensoriales, además la función de onda es simétrica en los índices tensoriales y es de traza nula. Las ecuaciones que se cumplen en esta teoría son

$$(\mathrm{i}.1) \qquad (p - mc)\,\psi^b_{\nu_1\nu_2\ldots\nu_m} = 0 \qquad\qquad p = \gamma^\mu p_\mu$$

$$(\mathrm{i}.2) \qquad \gamma^\mu \psi^b_{\mu\nu_2\ldots\nu_m} = 0$$

de (i.1) y (i.2) se deduce

$$(\mathrm{i}.3) \qquad p^\mu \psi^b_{\mu\nu_2\ldots\nu_m} = 0$$

Las condiciones (i.2), (i.3), llamadas condiciones suplementarias, son las que aseguran (junto con las relativas a la simetría y a la nulidad de las trazas) que la función de onda representa partículas de spin único.

En la formulación lagrangiana de esta teoría caben dos posiciones; o bien se busca obtener las (i.1), (i.2) y (i.3) como ecuaciones del movimiento, o bien se consideran las (i.2) y (i.3) como condiciones de vínculo y se obtiene únicamente la (i.1) a partir del Lagrangiano.

En el primer caso, Moldauer y Case[6] han mostrado que el Lagrangiano no es único, sino que depende de un parámetro indeterminado; una objeción seria a este método ha sido hecha por Fradkin[7] quien ha mostrado que el método de Moldauer y Case no es aplicable para spin superior a 3/2. Se puede decir por tanto que con el primer enfoque sólo se pueden tratar actualmente las partículas de spin igual a 3/2.

El segundo enfoque ha sido aplicado por Bollini[8,9] al caso de partículas de masa nula y de masa distinta de cero, y no presenta las dificultades mencionadas precedentemente.

Los resultados que se obtienen con estos dos puntos de vista son esencialmente los mismos para el caso de la partícula libre, pero difieren cuando hay interacciones. Esto se evidencia en el hecho de que si consideramos a las condiciones suplementarias como ecuaciones del movimiento se verán necesariamente modificadas en presencia de interacciones, mientras que si las consideramos como ecuaciones de vínculo esas condiciones se deben mantener cualquiera sea la evolución del sistema. En este sentido es de señalar que jugarán un papel muy importante en el segundo método los operadores de proyección estudiados por Behrends y Fronsdal(10), estos operadores permiten seleccionar de una función arbitraria aquella parte que cumple las condiciones suplementarias.

En el presente trabajo aplicaremos el método de Bollini al estudio del comportamiento de partículas de spin 3/2 en interacción con el campo electromagnético.

En la parte I presentaremos la teoría de la partícula libre y estudiaremos las propiedades necesarias para tratar la interacción con el campo electromagnético.

En la parte II introduciremos la interacción y hallaremos el momento magnético, el resultado obtenido es que estas partículas poseen un momento magnético igual a un magnetón de Bohr, resultado coincidente con cálculos hechos usando el formalismo de Dirac, Fierz y Pauli(11).

En la parte III aplicaremos la teoría de Feynman al cálculo de la dispersión por un campo coulombiano, en primer orden.

Finalmente en la parte IV calcularemos la dispersión de Compton por estas partículas. Este cálculo tiene interés pues da un resultado marcadamente diferente al obtenido por Mathews(12) usando la ecuación de Gupta, y esta diferencia puede permitir la eventual comparación de las dos teorías con la experiencia.

I. TEORIA DE LA PARTICULA LIBRE

NOTACION.- En este trabajo usaremos la notación relativista análoga a la del libro de Bethe, Mesons and Fields, capítulos 2 y 3. Usaremos las coordenadas de espacio-tiempo reales

$$x^0 = ct, \quad x^1 = x, \quad x^2 = y, \quad x^3 = z.$$

El tensor métrico tendrá las siguientes componentes

$$g_{\mu\nu} \longrightarrow \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

Un vector contravariante V^μ es uno que se transforma como las coordenadas, uno covariante V_μ se tranforma como el gradiente, además están conectados por

$$V_\mu = g_{\mu\nu} V^\nu$$

$$V^\mu = g^{\mu\nu} V_\nu \qquad\qquad \delta^\nu_\sigma \longrightarrow I = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$g^{\mu\nu} g_{\mu\sigma} = \delta^\nu_\sigma$$

El producto escalar de dos vectores p_μ, x_μ, es

$$p\cdot x = p^\mu x_\mu = p_0 x^0 - p_1 x^1 - p_2 x^2 - p_3 x^3$$

Si introducimos $\quad p^\mu = (E/c, \vec{p})$

Tenemos $\quad p^\mu p_\mu = (mc)^2$

y para el pasaje de los operadores de la Mecánica Cuántica tenemos

$$p_\mu \longrightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial x^\mu} = i\hbar\, \partial_\mu$$

La ecuación de Klein-Gordon toma la forma entonces

$$\left[(i\hbar)^2 \partial_\mu \partial^\mu - (mc)^2\right]\psi \equiv \hbar^2\left[\Box + \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2\right]\psi = 0$$

$$\Box = \partial_\mu \partial^\mu$$

Introduciendo el campo electromagnético por su potencial

$$A^\mu = (\phi, \vec{A})$$

tendremos que cuando hay interacciones hay que hacer el reemplazo

$$p^\mu \longrightarrow p^\mu - \frac{e}{c} A^\mu$$

Las matrices γ^μ de Dirac cumplen las relaciones

$$\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2 g^{\mu\nu} I$$

donde I es la matriz unidad.

El conjugado hermitiano de γ^μ es

$$\gamma^{\mu +} = \gamma^0 \gamma^\mu \gamma^0 = \gamma^\mu g_{\mu\mu}$$ sin sumar sobre

Si A_μ es un vector denotaremos en general

$$A = \gamma \cdot A = \gamma^\mu A_\mu$$

La ecuación de Dirac será entonces

$$\left(- i \gamma^\mu \partial_\mu + \frac{mc}{\hbar} \right) \psi = 0$$

o bien

$$(p - mc) \psi = 0$$

REPRESENTACION DE UN VECTOR-SPINOR QUE CUMPLE LAS CONDICIONES SUPLEMENTARIAS.- En el formalismo de Barita-Schwinger una función de onda que representa a una partícula de spin 3/2 es $\psi_\mu(x)$ donde para cada valor de μ ψ_μ es un spinor de Dirac, esto quiere decir que en principio ψ_μ representa a una partícula que posee ocho grados de libertad, dos por cada spinor independiente; por lo tanto para que la representación sea irreducible el número de spinores independientes debe reducirse a dos, lo que dará a ψ_μ cuatro grados de libertad, siendo cuatro el número de valores de la proyección de spin en una dirección dada para la partícula en reposo. Esta reducción se obtiene imponiendo a ψ_μ las condiciones suplementarias[5]

$$p^\mu \psi_\mu = 0 \qquad \text{(I.1)}$$

$$\gamma^\mu \psi_\mu = 0 \qquad \text{(I.2)}$$

Es conveniente entonces expresar ψ_μ en términos de sus componentes independientes[9]. Veremos en lo que sigue que si ψ_μ cumple (I.1) y (I.2) se puede representar en la forma

$$\psi_\mu = D_\mu \psi^{(1)} + \Gamma_\mu \psi^{(2)} \qquad \text{(I.3)}$$

donde $\psi^{(1)}$ y $\psi^{(2)}$ son spinores comunes de Dirac y D_μ y Γ_μ son operadores que cumplen

$$p^\mu D_\mu = 0 \qquad p^\mu \Gamma_\mu = 0$$

$$\gamma^\mu D_\mu = 0 \qquad \gamma^\mu \Gamma_\mu = 0$$

además se cumple

$$p\Gamma_\mu = \Gamma_\mu p \qquad p D_\mu = D_\mu p \tag{I.4}$$

si definimos además

$$\tilde{D}^\mu = \gamma^0 D^{\mu +}\gamma^0$$

$$\tilde{\Gamma}^\mu = \gamma^0 \Gamma^{\mu +}\gamma^0$$

se cumple

$$\tilde{D}^\mu D_\mu = -1 \qquad \tilde{D}^\mu \Gamma_\mu = 0$$
$$\tilde{\Gamma}^\mu \Gamma_\mu = -1 \qquad \tilde{\Gamma}^\mu D_\mu = 0$$

y por lo tanto multiplicando la (I.3) por $\tilde{D}^\mu$ y por $\tilde{\Gamma}^\mu$, respectivamente, tendremos

$$\psi^{(1)} = -\tilde{D}^\mu \psi_\mu \qquad \psi^{(2)} = -\tilde{\Gamma}^\mu \psi_\mu \tag{I.5}$$

El operador de proyección Δ_μ^ν está definido por

$$\Delta_\mu^\nu = -(D_\mu \tilde{D}^\nu + \Gamma_\mu \tilde{\Gamma}^\nu)$$

por lo tanto tiene las propiedades

$$\begin{aligned} p\Delta_\mu^\nu &= \Delta_\mu^\nu p \\ \gamma^\mu \Delta_\mu^\nu &= 0 \\ p^\mu \Delta_\mu^\nu &= 0 \\ \Delta_\mu^\lambda \Delta_\lambda^\nu &= \Delta_\mu^\nu \\ \Delta_\mu^\mu &= 2 \end{aligned} \tag{I.6}$$

si ψ_μ es una función que cumple las condiciones suplementarias, entonces por la (I.3) y la (I.5) tendremos

$$\Delta_\mu^{\ \nu}\psi_\nu = \psi_\mu \tag{I.7}$$

La (I.6) y la (I.7) muestran que Δ_μ^ν es el análogo de la δ_μ^ν de Kronecker en el subespacio de las funciones ψ_μ que cumplen las condiciones suplementarias.

Una manera inmediata de obtener Δ_μ^ν es la siguiente: en el "plano" determinado por los vectores p_μ y γ_μ definimos un par de vectores unitarios ortogonales

$$a_\mu = p_\mu/\sqrt{+p^2} \qquad \tilde{a}_\mu a^\mu = 1 \quad , \quad \tilde{b}_\mu a^\mu = 0$$

$$b_\mu = (p_\mu - \gamma_\mu \gamma \cdot p)\frac{1}{\sqrt{3p^2}} \qquad \tilde{b}_\mu b_\mu = -1 \quad , \quad \tilde{a}_\mu b^\mu = 0$$

Como Γ_μ y D_μ son ortogonales al plano determinado por γ_μ y p_μ, entonces a_μ, b_μ, Γ_μ y D_μ forman un sistema completo de vectores, por tanto

$$M g_\mu^{\ \nu} = a_\mu \tilde{a}^\nu - b_\mu \tilde{b}^\nu - (\Gamma_\mu \tilde{\Gamma}^\nu + D_\mu \tilde{D}^\nu)$$

El valor de la matriz M se obtiene multiplicando a la ecuación precedente por $\gamma_\nu \gamma^\mu$ y resulta M = I.

Por lo tanto el operador de proyección vale

$$\Delta_\mu^{\ \nu} = g_\mu^{\ \nu} + a_\mu \tilde{a}^\nu - b_\mu \tilde{b}^\nu$$

$$= g_\mu^{\ \nu} - \frac{1}{3}\gamma_\mu \gamma^\nu - \frac{1}{3p^2}(p\gamma_\mu p^\nu + p_\mu \gamma^\nu p) \qquad \text{(I.8)}$$

Para obtener explícitamente Γ_μ y D_μ se procede de la siguiente manera:

Sea n_μ un cuadrivector temporal

$$n_\mu n^\mu = 1$$

entonces se pueden definir los cuadrivectores espaciales $\bar{p}_\mu$, α_μ, β_μ

$$\bar{p}_\mu = (p_\mu - n_\mu \not{p})/\sqrt{\not{p}^2 - p^2} \qquad \not{p} = n_\mu p^\mu$$

$$\bar{p}_\mu \bar{p}^\mu = -1 \qquad , \qquad n_\mu \bar{p}^\mu = 0$$

$$\begin{cases} \alpha_\mu \alpha^\mu = \beta_\mu \beta^\mu = -1 \\ \alpha_\mu \beta^\mu = 0 \\ p_\mu \alpha^\mu = p_\mu \beta^\mu = n_\mu \alpha^\mu = n_\mu \beta^\mu = 0 \end{cases}$$

por lo tanto se cumplirá

$$g_\mu^{\ \nu} = n_\mu n^\nu - \bar{p}_\mu \bar{p}^\nu - \alpha_\mu \alpha^\nu - \beta_\mu \beta^\nu$$

El significado de estos vectores se puede apreciar si elegimos

$$n_\mu = (1, 0, 0, 0)$$

entonces tendremos

$$\not{p} = E/c$$

$$\bar{p}_\mu = (0, p_1, p_2, p_3)/\sqrt{\bar{p}^2}$$

y α_μ y β_μ son vectores espaciales de polarización normales a $\vec{p}$.

También resultará conveniente destacar la parte transversal de $g_\mu^{\ \nu}$

$$d_\mu^{\ \nu} = -(\alpha_\mu \alpha^\nu + \beta_\mu \beta^\nu) = g_\mu^{\ \nu} - n_\mu n^\nu + \bar{p}_\mu \bar{p}^\nu$$

Ahora definiremos D_μ como

$$D_\mu = \left(A_\mu - \frac{1}{2} d_\mu^{\ \lambda} \gamma_\lambda \gamma \cdot A\right) \sqrt{-\frac{2}{3A^2}} \quad ; \quad A_\nu = \not{p} \bar{p}_\nu + n_\nu \sqrt{\not{p}^2 - p^2}$$

con esta definición se puede verificar que D_μ cumple

$$p_\mu D^\mu = 0$$

$$\gamma_\mu D^\mu = 0 \qquad\qquad \tilde{D}^\mu D_\mu = 1$$

Es fácil ver que una función ψ_μ que cumple las condiciones suplementarias cumple también

$$\tilde{D}^\mu \psi_\mu = -\sqrt{-\frac{3}{2}\frac{A^2}{\not{p}^2 - p^2}}\; n^\mu \psi_\mu$$

por tanto ψ_μ se puede expresar de la forma

$$\psi_\mu = \varphi_\mu - D_\mu \tilde{D}^\nu \psi_\nu = \varphi_\mu + D_\mu \psi^{(1)} \qquad \text{(I.9)}$$

donde φ_μ cumple también las condiciones suplementarias

$$p^\mu \varphi_\mu = 0 \qquad \text{(I.10a)}$$

$$\gamma^\mu \varphi_\mu = 0 \qquad \text{(I.10b)}$$

y además

$$n^\mu \varphi_\mu = 0 \qquad \text{(I.10c)}$$

De acuerdo con (I.10a) y (I.10c) φ_μ se puede expresar, como

$$\varphi_\mu = -(\alpha_\mu \alpha^\nu + \beta_\mu \beta^\nu)\varphi_\nu \qquad \text{(I.11)}$$

además por (I.10b) tenemos

$$\gamma^\mu \varphi_\mu = -(\gamma\cdot\alpha\, \alpha^\nu + \gamma\cdot\beta\, \beta^\nu)\varphi_\nu = 0$$

multiplicando por $\gamma\cdot\alpha$ y $\gamma\cdot\beta$ respectivamente tendremos

$$\alpha^\nu \varphi_\nu = \gamma\cdot\alpha\, \gamma\cdot\beta\, \beta^\nu \varphi_\nu$$

$$\beta^{\nu}\varphi_{\nu} = \gamma\cdot\beta\,\gamma\cdot\alpha\;\alpha^{\nu}\varphi_{\nu}$$

reemplazando en (I.11) tenemos

$$\varphi_{\mu} = -\left(\alpha_{\mu}\,\gamma\cdot\alpha\,\gamma\cdot\beta\,\beta^{\nu} + \beta_{\mu}\,\gamma\cdot\beta\,\gamma\cdot\alpha\,\alpha^{\nu}\right)\varphi_{\nu} \qquad \text{(I.12)}$$

sumando (I.11) y (I.12) tendremos

$$\begin{aligned}\varphi_{\mu} &= -\frac{1}{2}\left[\alpha_{\mu}\alpha^{\nu} + \beta_{\mu}\beta^{\nu} + \alpha_{\mu}\,\gamma\cdot\alpha\,\gamma\cdot\beta\,\beta^{\nu} + \beta_{\mu}\,\gamma\cdot\beta\,\gamma\cdot\alpha\,\alpha^{\nu}\right]\varphi_{\nu}\\ &= -\frac{1}{2}\left(\alpha_{\mu} - \gamma\cdot\alpha\,\gamma\cdot\beta\,\beta_{\mu}\right)\left(\alpha^{\nu} - \gamma\cdot\beta\,\gamma\cdot\alpha\,\beta^{\nu}\right)\varphi_{\nu}\\ &= -\Gamma_{\mu}\tilde{\Gamma}^{\nu}\varphi_{\nu}\end{aligned}$$

donde

$$\Gamma_{\mu} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\alpha_{\mu} - \gamma\cdot\alpha\,\gamma\cdot\beta\,\beta_{\mu}\right)$$

$$\tilde{\Gamma}^{\mu}\Gamma_{\mu} = -1$$

Vemos entonces que si ψ_{μ} cumple las condiciones suplementarias se puede escribir como

$$\psi_{\mu} = -\left(\Gamma_{\mu}\tilde{\Gamma}^{\nu} + D_{\mu}\tilde{D}^{\nu}\right)\psi_{\nu} = D_{\mu}\psi^{(1)} + \Gamma_{\mu}\psi^{(2)}$$

de acuerdo con (I.3), con lo cual hemos obtenido la representación de una función ψ_{μ}, que cumple las condiciones suplementarias, en términos de sus dos componentes independientes.

PROPIEDADES DE SPIN.- Para estudiar las propiedades del spin de ψ_{μ} es necesario considerar su comportamiento frente alas rotaciones infinitesimales de Lorentz (ver por ejemplo Umezawa[13]). En una de ellas

$$X_{\mu} \rightarrow X'_{\mu} = \left(g_{\mu}^{\ \nu} + \omega_{\mu}^{\ \nu}\right)X_{\nu}$$

$$\omega_{\mu\nu} = -\omega_{\nu\mu}$$

La función de onda se transformará correspondientemente

$$\psi_{\mu}(P) \rightarrow \psi'_{\mu}(P) = \left(g_{\mu}^{\ \nu} + \frac{i}{2}S_{\mu}^{\ \nu}{}_{,\rho\sigma}\,\omega^{\rho\sigma}\right)\psi_{\nu}(P) \qquad \text{(I.13)}$$

explícitamente tendremos

$$S_{\mu}^{\ \nu}{}_{,\rho\sigma} = g_{\mu}^{\ \nu}S_{\rho\sigma} - i\left(g_{\mu\rho}g_{\sigma}^{\ \nu} - g_{\mu\sigma}g_{\rho}^{\ \nu}\right)$$

con

$$S_{\rho\sigma} = -\frac{i}{4}\left(\gamma_{\rho}\gamma_{\sigma} - \gamma_{\sigma}\gamma_{\rho}\right)$$

La propiedad (I.13) y las que de ella se derivan permiten identificar a $S_{\mu,\rho\sigma}^{\ \nu}$ como el operador de spin (ver Umezawa[13]).

El significado físico de Γ_μ y D_μ se puede ver de la siguiente manera. Definimos el operador covariante

$$S_\mu^{\ \nu} = \frac{1}{2} n_\lambda \bar{p}_\tau S_{\mu,\rho\sigma}^{\ \nu} \epsilon^{\lambda\tau\rho\sigma}$$

$\epsilon^{\lambda\tau\rho\sigma}$ es el tensor de cuarto rango totalmente antisimétrico y tal que $\epsilon^{0123} = 1$.

Si $n_\lambda = (1,0,0,0)$, $S_\mu^{\ \nu}$ es la componente del vector de spin en la dirección del movimiento.

Por el hecho de ser $\epsilon^{\lambda\tau\rho\sigma}$ totalmente antisimétrico las expresiones tales como

$$n_\lambda n_\rho \epsilon^{\lambda\tau\rho\sigma} \quad y \quad \bar{p}_\tau p_\rho \epsilon^{\lambda\tau\rho\sigma} \qquad \text{(I.14)}$$

son nulas.

Para mayor comodidad separaremos a $S_\mu^{\ \nu}$ en dos partes

$$S_\mu^{\ \nu} = {}^{1/2}S_\mu^{\ \nu} + {}^{1}S_\mu^{\ \nu}$$

$${}^{1/2}S_\mu^{\ \nu} = g_\mu^{\ \nu} S_{\rho\sigma} \frac{1}{2} n_\lambda \bar{p}_\tau \epsilon^{\lambda\tau\rho\sigma}$$

$${}^{1}S_\mu^{\ \nu} = -\frac{i}{2} \left(g_{\mu\rho} g_\sigma^{\ \nu} - g_{\mu\sigma} g_\rho^{\ \nu} \right) n_\lambda \bar{p}_\tau \epsilon^{\lambda\tau\rho\sigma}$$

teniendo en cuenta la (I.14) y la

$$g_\mu^{\ \nu} = n_\mu n^\nu - \bar{p}_\mu \bar{p}^\nu - \alpha_\mu \alpha^\nu - \beta_\mu \beta^\nu$$

tendremos

$$\begin{aligned}
{}^{\frac{1}{2}}S_\mu^{\ \nu} &= -\frac{i}{4} g_\mu^{\ \nu} \gamma_\rho \gamma_\sigma n_\lambda \bar{p}_\tau \epsilon^{\lambda\tau\rho\sigma} \\
&= -\frac{i}{4} g_\mu^{\ \nu} (\gamma\cdot\alpha\,\alpha_\rho + \gamma\cdot\beta\,\beta_\rho)(\gamma\cdot\alpha\,\alpha_\sigma + \gamma\cdot\beta\,\beta_\sigma) n_\lambda \bar{p}_\tau \epsilon^{\lambda\tau\rho\sigma} \\
&= -\frac{i}{4} g_\mu^{\ \nu} \gamma\cdot\alpha\, \gamma\cdot\beta\, (\alpha_\rho \beta_\sigma - \beta_\rho \alpha_\sigma) n_\lambda \bar{p}_\tau \epsilon^{\lambda\tau\rho\sigma} \\
&= -\frac{i}{4} g_\mu^{\ \nu} \gamma\cdot\alpha\, \gamma\cdot\beta\, (-1-1) = \frac{i}{2} g_\mu^{\ \nu} \gamma\cdot\alpha\, \gamma\cdot\beta
\end{aligned}$$

o sea

$${}^{\frac{1}{2}}S_\mu^{\ \nu} = \frac{i}{2} \gamma\cdot\alpha\, \gamma\cdot\beta\, g_\mu^{\ \nu} = g_\mu^{\ \nu}\, {}^{1/2}S$$

Un cálculo sencillo, análogo al anterior, permite mostrar que

$$S_\mu^{\ \nu} D_\nu = D_\mu\, {}^{1/2}S$$

$$S_\mu^{\ \nu} \Gamma_\nu = 3 \Gamma_\mu\, {}^{1/2}S$$

Como la ecuación de autovalores para ${}^{1/2}S$ es

$$ {}^{1/2}S\,\varphi_{\pm} = \pm\frac{1}{2}\varphi_{\pm} $$

tendremos que

$$ S_{\mu}^{\ \nu}(D_{\nu}\varphi_{\pm}) = \pm\frac{1}{2}(D_{\mu}\varphi_{\pm}) $$

$$ S_{\mu}^{\ \nu}(\Gamma_{\nu}\varphi_{\pm}) = \pm\frac{3}{2}(\Gamma_{\mu}\varphi_{\pm}) \qquad \text{(I.15)} $$

Es decir, la componente del spin de una partícula libre en la dirección del movimiento puede tener los valores $\pm 1/2$, $\pm 3/2$, según que la partícula esté representada por alguna de las autofunciones de $S_{\mu}^{\ \nu}$ indicadas en la fórmula (I.15).

SUMAS SOBRE SPINES.- Sea u^i, un sitema completo de soluciones de la ecuación de Dirac para un valor dado de p:

$$ (p - mc)\,u^i = 0 $$

i va desde 1 hasta 4 siendo u^1 y u^2 las soluciones normalizadas correspondientes a enrgía positiva y u^3, u^4 las correspondientes a energía negativa. Como es sabido (ver por ejemplo, Bethe, Mesons and Fields) si se desea sumar sobre los estados de energía positiva en una expresión tal como $u^i(p)\,\bar{u}^i(p)$ tenemos

$$ \sum_{i=1}^{2} u^i\bar{u}^i = \sum_{i=1}^{4}\Lambda_+(p)\,\epsilon^i u^i\bar{u}^i = \Lambda_+(p) = \frac{1}{2m}(p+m) $$

$$ \epsilon^i = 1 \quad si \quad i = 1,2 \quad ; \quad \epsilon^i = -1 \quad si \quad i = 3,4 $$

En el caso de spin 3/2, como Γ_{μ} y D_{μ} conmutan con p se puede obtener un sistema completo de soluciones normalizadas de la ecuación

$$ (p - mc)\,\omega_{\mu}^{i} = 0 $$

en la forma

$$ \omega_{\mu}^{i} = \sqrt{-1}\,D_{\mu}u^i \qquad (i = 1,2,3,4) $$

$$ \omega_{\mu}^{i} = \sqrt{-1}\,\Gamma_{\mu}u^{i-4} \qquad (i = 5,6,7,8) \qquad \text{(I.16)} $$

además tenemos

$$ \bar{\omega}_{\mu}^{i} = \sqrt{-1}\,\bar{u}^i\tilde{D}_{\mu} \quad y \quad \bar{\omega}_{\mu}^{i} = \sqrt{-1}\,\bar{u}^{i-4}\tilde{\Gamma}_{\mu} $$

por lo tanto, las sumas sobre spines darán

$$ \sum_{E>0}\omega_{\mu}^{i}(p)\,\bar{\omega}^{i\nu}(p) = -\left(D_{\mu}\tilde{D}^{\nu} + \Gamma_{\mu}\tilde{\Gamma}^{\nu}\right)\sum_{i=1}^{4}\Lambda_+(p)\,\epsilon^i u^i\bar{u}^i $$

$$ = \Delta_{\mu}^{\ \nu}(p)\,\Lambda_+(p) = \Lambda_+(p)\,\Delta_{\mu}^{\ \nu}(p) $$

en acuerdo con un resultado de Behrends y Frensdal[10].

Si tenemos un elemento de matriz

$$M = \bar{\psi}_F^{\mu}(p')\, Q_{\mu}^{\nu}\, \psi_{i\nu}(p)$$

su conjugado hermitiano será

$$M^+ = \bar{\psi}_{i\rho}(p)\left(\gamma^0 Q_{\sigma}^{+\rho}\gamma^0\right)\psi_F^{\sigma}(p')$$

$$= \bar{\psi}_i^{\rho}(p)\left(\gamma^0 Q_{\alpha}^{+\lambda}\gamma^0 g_{\rho\lambda}\, g^{\sigma\alpha}\right)\psi_{F\sigma}(p')$$

$$= \bar{\psi}_i^{\rho}(p)\ \bar{Q}_{\rho}^{\sigma}\ \psi_{F\sigma}(p')$$

por lo tanto el cuadrado del módulo de M será

$$|M|^2 = M^+M = \bar{\psi}_i^{\rho}(p)\, \bar{Q}_{\rho}^{\sigma}\, \psi_{F\sigma}(p')\, \bar{\psi}_F^{\mu}(p')\, Q_{\mu}^{\nu}\, \psi_{\nu i}(p)$$

Si no se tiene interés en los spines tendremos:

sumando sobre los spines finales

$$\sum_{S.F.} |M|^2 = \bar{\psi}_i^{\rho}(p)\, \bar{Q}_{\rho}^{\sigma}\, \Lambda_+(p')\, \Delta_{\sigma}^{\mu}(p')\, Q_{\mu}^{\nu}\, \psi_{\nu i}(p)$$

y promediando sobre los spines iniciales

$$\frac{1}{4}\sum_{S.F.}\sum_{S.i.} |M|^2 = \frac{1}{4}\, \mathrm{Traza}\left(\bar{Q}_{\rho}^{\sigma}\, \Lambda_+(p')\, \Delta_{\sigma}^{\mu}(p')\, Q_{\mu}^{\nu}\, \Lambda_+(p)\, \Delta_{\nu}^{\rho}(p)\right)$$

II. INTERACCION CON EL CAMPO ELECTROMAGNETICO

Como es sabido en el formalismo lagrangiano las ecuaciones de movimiento se obtienen exigiendo que la integral de acción

$$I = \int L(\psi, \partial_\mu \psi)\, d^4x$$

sea un extremo para variaciones arbitrarias de ψ, esto conduce a las ecuaciones de movimiento

$$\frac{\partial L}{\partial \psi} - \partial_\mu \frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu \psi)} = 0$$

Para partículas de spin 1/2 el Lagrangiano es

$$L = \bar{\psi}(p - m)\psi \qquad \text{(II.1)}$$

donde hemos puesto $\hbar = c = 1$, es decir que usaremos el sistema de "unidades naturales", en este sistema la masa tiene las dimensiones de la inversa de una longitud.

Para partículas de spin 3/2 usaremos el mismo Lagrangiano (II.1) es decir,

$$L = \bar{\psi}^{\mu}(p - m)\psi_\mu$$

La integral de acción en función de las componentes independientes de $\bar{\psi}^{\mu}$ será por (I.3)

$$I = \int (\bar{\psi}^{(1)} \underleftarrow{\tilde{D}}^{\mu} + \bar{\psi}^{(2)} \underleftarrow{\tilde{\Gamma}}^{\mu})(p - m)\psi_\mu\, d^4x \qquad \text{(II.2)}$$

la flecha bajo los operadores $\tilde{D}^{\mu}$ y $\tilde{\Gamma}^{\mu}$ significa que operan a la izquierda.

Se puede demostrar(9), apelando a la forma explícita de los operadores y a la representación de Fourier de las funciones, que en (II.2) $\tilde{D}^{\mu}$ y $\tilde{\Gamma}^{\mu}$ pueden actuar indiferentemente a izquierda o a derecha.

Podemos poner entonces, teniendo en cuenta (I.4) y (I.5),

$$I = -\int \bar{\psi}^{(1)}(p - m)\psi^{(1)}\, d^4x - \int \bar{\psi}^{(2)}(p - m)\psi^{(2)}\, d^4x$$

Esta forma de la integral de acción permite variar directamente las componentes independientes de $\bar{\psi}_\mu$, de modo que tendremos las ecuaciones del movimiento

$$(p - m)\psi^{(1)} = 0$$

$$(p - m)\psi^{(2)} = 0$$

Multiplicando la primera por D_μ, la segunda por Γ_μ y sumando obtenemos la ecuación de la partícula libre

$$(p-m)\,\psi_\mu = 0$$

Como vemos, con este formalismo se obtienen las mismas ecuaciones para el caso de la partícula libre que con el formalismo de Rarita-Schwinger, sin embargo el Lagrangiano (II.1) es mucho más sencillo que el de Rarita-Schwinger(6), y lo que es más satisfactorio aún, es el mismo para spin 3/2 que para spin 1/2.

INTERACCION CON EL CAMPO ELECTROMAGNETICO.- Para introducir la interacción haremos en (II.2) la sustitución usual

$$p^\mu \rightarrow p^\mu - \frac{e}{c} A^\mu$$

donde A^μ es el potencial del campo eletromagnético.

Como Γ_μ y D_μ no conmutan en general con A^ν la integral de acción será ahora

$$I = -\int \bar{\psi}^{(1)}[(p-m)\psi^{(1)} + e\tilde{D}^\mu(A\psi_\mu)]\,d^4x$$
$$-\int \bar{\psi}^{(2)}[(p-m)\psi^{(2)} + e\tilde{\Gamma}^\mu(A\psi_\mu)]\,d^4x$$

y las ecuaciones del movimiento que se obtienen al variar las componentes independientes son

$$(p-m)\,\psi^{(1)} + e\tilde{D}^\mu(A\psi_\mu) = 0$$
$$(p-m)\,\psi^{(2)} + e\tilde{\Gamma}^\mu(A\psi_\mu) = 0$$

multiplicando por D_ν y Γ_ν respectivamente y sumando tendremos

$$(p-m)\,\psi_\nu - e\,\Delta_\nu^\mu(A\psi_\mu) = 0 \qquad \text{(II.3)}$$

que es la ecuación que debe cumplir, según este formalismo, una partícula de spin 3/2 en interacción con el campo electromagnético. La presencia del operador de proyección Δ_ν^μ en el término de interacción asegura la compatibilidad de la ecuación (II.3) con las condiciones suplementarias (I.1) y (I.2).

MOMENTO MAGNETICO.- Para poner en evidencia el momento magnético es conveniente pasar a la ecuación de segundo orden. Para ello multiplicamos a la (II.3) por la izquierda con el operador

$$(p+m)\, g_\lambda^{\ \nu} - e\,\Delta_\lambda^{\ \nu} A$$

obteniendo

$$(p^2-m^2)\,\psi_\lambda - e\,\Delta_\lambda^{\ \mu}[(pA+Ap)\,\psi_\mu] + e^2\,\Delta_\lambda^{\ \nu}[A\,\Delta_\nu^{\ \mu}(A\,\psi_\mu)] = 0 \qquad \text{(II.4)}$$

debido a las propiedades de las matrices γ tenemos

$$pA+Ap = A\cdot p + \tfrac{1}{2}\sigma^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$$

$$\sigma^{\mu\nu} = -\tfrac{i}{2}(\gamma^\mu\gamma^\nu - \gamma^\nu\gamma^\mu)$$

$$F_{\mu\nu} = \partial_\nu A_\mu - \partial_\mu A_\nu$$

La (II.4) es entonces

$$(p^2-m^2)\,\psi_\lambda - e\,\Delta_\lambda^{\ \mu}(A\cdot p + \tfrac{1}{2}\sigma^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta})\,\psi_\mu + e^2\,\Delta_\lambda^{\ \nu}[A\,\Delta_\nu^{\ \mu}(A\,\psi_\mu)] = 0 \qquad \text{(II.5)}$$

Cuando la velocidad de la partícula tiende a cero tenemos $\vec{p}\,\psi_\mu = 0$ lo que implica, debido a la condición suplementaria $p^\mu\psi_\mu = 0$ que la componente ψ_0 es nula. Denotando entonces con índices latinos las componentes desde 1 hasta 3 y despreciando los términos de orden e^2 la (II.5) toma la forma

$$(E^2-m^2)\,\psi_i - 2e\,\Delta_i^{\ J}\,\vec{\sigma}\cdot\vec{H}\,\psi_J = 0$$

Suponiendo que hay un campo magnético constante y siendo $\vec{\sigma}$ el vector de spin 1/2. $(\sigma^\ell = -\tfrac{i}{2}\gamma^J\gamma^k)$

Poniendo $E^2-m^2 \cong 2m(E-m) = 2mE'$ tenemos

$$E'\,\psi_i = \frac{e}{m}\left(g_i^{\ J} - \tfrac{1}{3}\gamma_i\gamma^J\right)\vec{\sigma}\cdot\vec{H}\,\psi_J \qquad \text{(II.6)}$$

Llevaremos la ecuación (II.6) a una forma más conveniente que pondrá en evidencia la interacción del spin con el campo magnético. Como $\vec{\sigma}\cdot\vec{H} = \sigma_1 H_1 + \sigma_2 H_2 + \sigma_3 H_3$ consideremos el término

$$\gamma_i\gamma^J\sigma^3 = -\tfrac{i}{2}\gamma_i(2g^{J1}\gamma^2 - 2g^{J2}\gamma^1 + \gamma^1\gamma^2\gamma^J)$$

$$= -\tfrac{i}{2}(g_i^{\ 1}\gamma_1 + g_i^{\ 2}\gamma_2 + g_i^{\ 3}\gamma_3)(2g^{J1}\gamma^2 - 2g^{J2}\gamma^1 + \gamma^1\gamma^2\gamma^J) \qquad \text{(II.7)}$$

Teniendo en cuenta que la expresión anterior se aplica a una función ψ_J que cumple la condición suplementaria $\gamma^J\psi_J = 0$ y además la

$$\gamma^3\gamma^2\gamma^1\gamma^J\psi_J \equiv -\gamma^3\gamma^2\psi_1 + \gamma^3\gamma^1\psi_2 - \gamma^2\gamma^1\psi_3 = 0$$

se tiene desarrollando el producto (II.7)

$$\gamma_i \gamma^J \sigma^3 = -i \gamma^1 \gamma^2 g_i{}^J - i \left(g_{i2} g_1{}^J - g_2{}^J g_{i1} \right)$$

por tanto se tendrá

$$\left(g_i{}^J - \frac{1}{3} \gamma_i \gamma^J \right) \sigma^3 \psi_J = \frac{1}{3} \left(\sigma^3 g_i{}^J + i \left(g_{i3} g_1{}^J - g_2{}^J g_{i1} \right) \right) \psi_J$$

$$= \frac{1}{3} \Sigma_{i,3}^J \psi_J$$

Análogamente se puede hacer para σ^1 y σ^2, de ese modo la (II.6) tomará la forma

$$E' \psi_i = \frac{e}{2m} \left(\frac{2}{3} \right) \vec{\Sigma}_i^J \cdot \vec{H} \psi_J$$

siendo $\vec{\Sigma}_i^J$ el operador vectorial de spin 3/2.

Como anticipáramos en la introducción el factor giro magnético es igual a 1/s siendo s el valor máximo de la proyección del spin, es decir las partículas tienen un momento magnético igual a un magnetón de Bohr.

El mismo resultado ha sido obtenido por Moldauer y Case[6] usando el formalismo de Rarita-Schwinger, y anteriormente por Belinfante[11] usando el formalismo de Dirac, Fierz y Pauli.

III. APLICACION DE LA TEORIA DE FEYNMAN. DISPERSION POR UN CAMPO COULOMBIANO

La teoría de Feynman[14, 15, 16] para resolver la ecuación de Dirac es fácilmente aplicable a la ecuación (II.3). Como veremos la única modificación en el cálculo de los elementos de matriz de los procesos de interacción con el campo electromagnético consiste en que en vez del propagador P de Feynman tendremos que usar el propagador $\Delta_\mu^\nu P$, donde la presencia del operador de proyección asegura que en todos los estados intermedios se cumplen las condiciones suplementarias.

Según Feynman, $K(2,1)$ es una función (núcleo) tal que

$$\psi(2) = \int K(2,1)\gamma^0 \psi(1)\, d^3x_1$$

donde 1 como argumento de ψ o de K significa el punto de coordenadas x_1, y_1, z_1, t_1. Además se cumple

$$(i\nabla - m)\psi = 0 \qquad\qquad \nabla = \gamma^\mu \partial_\mu$$

$$(i\nabla_2 - m) K(2,1) = i\,\delta^4(2,1) \tag{III.1a}$$

el subíndice 2 en ∇_2 significa que opera sobre las variables 2, y

$$\delta^4(2,1) = \delta(x_2 - x_1)\,\delta(y_2 - y_1)\,\delta(z_2 - z_1)\,\delta(t_2 - t_1)$$

donde $\delta(x)$ es la función de Dirac.

Pasando a la representación de Fourier, como

$$\delta^4(2,1) = \frac{1}{(2\pi)^4}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ip\cdot(x_2 - x_1)}\, d^4p$$

se obtiene fácilmente

$$K(2,1) = \frac{i}{(2\pi)^4}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\not p + m}{p^2 - (m - i\delta)^2}\, e^{-ip\cdot(x_2 - x_1)}\, d^4p$$

donde el agregado del infinitésimo $-i\delta$ a la masa incorpora a K la condición de que para $t_2 > t_1$ sólo contenga energías positivas y para $t_2 < t_1$ sólo contenga enrgías negativas.

En el caso de spin 3/2, el núcleo propagador debe ser un tensor de segundo rango tal que

$$\psi_\mu(2) = \int K_\mu{}^\nu(2,1)\gamma^0 \psi_\nu(1)\, d^3x_1$$

Se podría pensar que la ecuación que cumple $K_\mu{}^\nu$ es

$$(i\nabla_2 - m) K_\mu{}^\nu(2,1) = i\,\delta^4(2,1)\, g_\mu{}^\nu \tag{III.1b}$$

en analogía con la (III.1a), pero para que $\psi_\mu(2)$ cumpla las condiciones suplementarias también debe cumplirlas $K_\mu^{\nu}(2,1)$

$$p_2^{\mu} K_\mu^{\nu}(2,1) = 0$$

$$\gamma^{\mu} K_\mu^{\nu}(2,1) = 0 \qquad \text{(III.2)}$$

Estas condiciones son incompatibles con la ecuación (III.1b), en cambio si multiplicamos a dicha ecuación por el operador $\Delta_\lambda^{\mu}(2)$ a la izquierda tendremos

$$(i\nabla_2 - m)\, K_\mu^{\nu}(2,1) = i\,\Delta_\mu^{\nu}(2)\,\delta^4(2,1) \qquad \text{(III.1c)}$$

Esta ecuación sí es compatible con las condiciones (III.2), y por lo tanto será la ecuación que usaremos para definir el propagador de las partículas de spin 3/2.

De la ecuación (III.1c) tendremos, si pasamos a la representación de Fourier

$$K_\mu^{\nu}(2,1) = \frac{i}{(2\pi)^4}\int_{-\infty}^{\infty} \Delta_\mu^{\nu}(p)\,\frac{p+m}{p^2-(m-i\delta)^2}\, e^{-ip\cdot(x_2-x_1)}\, d^4p$$

Si hay interacción con el campo electromagnético, la (III.1c) toma la forma

$$(i\nabla_2 - m)\, K_\mu^{A\,\nu}(2,1) - e\,\Delta_\mu^{\lambda}(2)\left(A\, K_\lambda^{A\,\nu}(2,1)\right) = i\,\Delta_\mu^{\nu}(2)\,\delta^4(2,1) \qquad \text{(III.3)}$$

La ecuación anterior es equivalente a la ecuación integral

$$K_\mu^{A\,\nu}(2,1) = K_\mu^{\nu}(2,1) - ie\int K_\mu^{\lambda}(2,3)\,A(3)\,K_\lambda^{A\,\nu}(3,1)\, d^4x_3 \qquad \text{(III.4)}$$

donde $K_\mu^{\lambda}(2,1)$ satisface la (III.1c).

La equivalencia de (III.3) y (III.4) se prueba aplicando a (III.4) el operador $(i\nabla_2 - m)$ y teniendo en cuenta la (III.1c).

Desarrollando en serie de Neumann a $K_\mu^{A\,\nu}$ tendremos

$$K_\mu^{A\,\nu}(2,1) = K_\mu^{\nu}(2,1) - ie\int K_\mu^{\lambda}(2,3)\,A(3)\,K_\lambda^{\nu}(3,1)\, d^4x_3$$
$$+(-ie)^2\iint K_\mu^{\lambda}(2,3)\,A(3)\,K_\lambda^{\rho}(3,4)\,A(4)\,K_\rho^{\nu}(4,1)\, d^4x_3\, d^4x_4 \qquad \text{(III.5)}$$

Si se busca la amplitud de transición desde un estado inicial $\psi_\nu(1)$ a un estado final $\varphi_\mu(2)$, $(t_2 > t_1)$ ésta es

$$M = \int \varphi^{\mu +}(2)\, K_\mu^{A\nu}(2,1)\,\gamma^0\,\psi_\nu(1)\, d^3x_2\, d^3x_1$$

En primera aproximación tendremos usando el desarrollo (III.5)

(III.6a)

Como ψ_ν y φ_μ son estados libres tendremos

$$\int K_\lambda^\nu(3,1)\,\gamma^0\,\psi_\nu(1)\,d^3x_1 = \psi_\lambda(3)$$

$$\int \varphi^{\mu+}(2)\,K_\mu^\lambda(2,3)\,d^3x_2 = \bar{\varphi}^\lambda(3)$$

por tanto la (III.6a) se reduce a

$$M_1 = -ie\int \bar{\varphi}^\lambda(3)\,A(3)\,\psi_\lambda(3)\,d^4x_3 \qquad \text{(III.6b)}$$

Para el elemento de matriz de segundo orden tendremos análogamente

$$M_2 = (-ie)^2\int \bar{\varphi}^\lambda(3)\,A(3)\,K_\lambda^\rho(3,4)\,A(4)\,\psi_\rho(4)\,d^4x_3\,d^4x_4$$

Como se ve de todo lo que antecede los cálculos para partículas de spin 3/2 se pueden efectuar usando las mismas expresiones formales que para spin 1/2, pero teniendo en cuenta los índices de los propagadores y de las funciones.

DISPERSION POR UN POTENCIAL COULOMBIANO.- Aplicaremos ahora los resultados anteriores para calcular, en primer orden, la sección eficaz de dispersión por un campo $A_\mu = (Ze/r,0,0,0)$, siendo Ze la carga colocada en el origen de coordenadas espaciales. Usaremos las unidades Gaussianas no racionalizadas tales que $\nabla^2 V = -4\pi Ze\,\delta(r)$ y $\alpha = e^2/\hbar c = 1/137$.

Si el estado inicial es el de una partícula libre de impulso $\vec{p}_1$ y energía E_1, y el estado final es el de una partícula libre de impulso $\vec{p}_2$ y enrgía E_2 , las funciones de onda respectivas serán

$$\psi_\mu(x) = \omega_\mu(\vec{p}_1)\,e^{-ip_1\cdot x} \quad ; \; \bar{\varphi}^\mu(x) = \bar{\omega}^\mu(\vec{p}_2)\,e^{ip_2\cdot x}$$

donde $\omega_\mu(\vec{p})$ es un spinor de los usados en (I.16). Si además

$$A_\mu(x) = \int a_\mu(k)\,e^{-ik\cdot x}\,d^4k$$

el elemento de matriz M_1 (ecuación (III.6b)) toma la forma

$$M_1 = (-ie)(2\pi)^4\int \bar{\omega}^\mu(\vec{p}_2)\,a(k)\,\omega_\mu(\vec{p}_1)\,\delta^4(p_2-k-p_1)\,d^4k$$

En nuestro caso

$$a(k) = \gamma^\mu a_\mu(k) = \frac{1}{(2\pi)^4}\int e^{ik\cdot x} A(x)\, d^4x$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^3}\, \delta(k_0)\, \gamma^0 \int e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}}\, V(r)\, d^3x$$

$$= \frac{Ze}{2\pi^2}\, \frac{1}{\vec{k}^2}\, \delta(k_0)\, \gamma^0$$

Reemplazando en M_1 e integrando tendremos

$$M_1 = -i\, 8\pi^2 Z\, e^2\, \frac{\delta(E_1-E_2)}{|\vec{p}_1-\vec{p}_2|^2} \left[\bar{\omega}^\mu(\vec{p}_2)\, \gamma^0\, \omega_\mu(\vec{p}_1)\right]$$

$$= C\, M \qquad ; \quad M = \left[\bar{\omega}^\mu(\vec{p}_2)\, \gamma^0\, \omega_\mu(\vec{p}_1)\right]$$

La probabilidad de transición está dada por el cuadrado del módulo de M_1, o sea

$$M_1^+ M_1 = |M_1|^2 = |C|^2 M^+ M$$

donde

$$|C|^2 = \left(\frac{8\pi^2 Z e^2}{|\vec{p}_1-\vec{p}_2|^2}\right)^2 \delta(E_1-E_2)\, \delta(0)$$

Como es usual interpretamos a $\delta(0)$ como $\quad \delta(0) = \lim_{T\to\infty} \frac{T}{2\pi}$

donde T es el tiempo durante el cual se efectúa la interacción, por consiguiente la probabilidad de transición por unidad de tiempo $\omega_{12} = \frac{1}{T}|M_1|^2$ es

$$\omega_{12} = \frac{1}{2\pi}\, \delta(E_1-E_2) \left[\frac{8\pi^2 Z e^2}{|\vec{p}_1-\vec{p}_2|^2}\right]^2 M^+ M \qquad \text{(III.7)}$$

Si no interesan los spines de los estados inicial y final debemos premediar y sumar sobre los mismos, respectivamente. De acuerdo con los resultados de la sección I tendremos

$$\frac{1}{4}\sum_{sp.i}\sum_{sp.f.} M^+ M = \frac{1}{4}\, Traza\left(\gamma^0 \Delta_\mu^\nu(p_2)\Lambda_+(p_2)\gamma^0\Delta_\nu^\mu(p_1)\Lambda_+(p_1)\right)$$

Dado que $\Delta_\mu^\nu(p)$ conmuta con $\Lambda_+(p)$ y que Traza(ab) = Traza (ba) se tiene

$$\frac{1}{4}\sum_{sp.}\sum_{sp.} M^+ M = \frac{1}{4}\, Traza\left(\Delta_\nu^\mu(p_1)\gamma^0\Delta_\mu^\nu(p_2)\, \Lambda_+(p_2)\gamma^0\Lambda_+(p_1)\right) \qquad \text{(III.8)}$$

El término $\Delta_\nu^\mu(p_1)\gamma^0\Delta_\mu^\nu(p_2)$ es, en principio, bastante complicado si se tiene en cuenta la forma explícita del operador de proyección (fórmula (I.8)). Después de un cálculo algo laborioso, por ello lo expondremos a continuación de este parágrafo, se obtiene

$$\Delta_\nu^\mu(p_1)\gamma^0\Delta_\mu^\nu(p_2) = \frac{2}{3}\gamma^0 + \frac{4E}{9m^2}\,(p_1+p_2) + \frac{4}{9m^4}\,\gamma^0 (p_1 p_2)^2 \qquad \text{(III.9)}$$

La (III.8) es entonces

$$\frac{1}{4}\sum_{sp.}\sum_{sp.} M^+M = \frac{1}{4}\left(\frac{2}{3}+\frac{4}{9m^4}(p_1\cdot p_2)^2\right) Tr\left(\gamma^0\Lambda_+(p_2)\gamma^0\Lambda_+(p_1)\right)$$
$$+\frac{1}{9}\frac{E}{m^2} Tr\left((p_1+p_2)\Lambda_+(p_2)\gamma^0\Lambda_+(p_1)\right) \qquad \text{(III.10)}$$

Calcularemos ahora separadamente las trazas de los dos sumandos de la (III.10), tendremos

$$T_1 = Tr\left(\gamma^0\Lambda_+(p_2)\gamma^0\Lambda_+(p_1)\right) = \frac{1}{4m^2} Tr\left(\gamma^0(p_2+m)\gamma^0(p_1+m)\right)$$

Desarrollando el producto y recordando que la traza de un número impar de matrices es nula

$$T_1 = \frac{1}{4m^2} Tr(\gamma^0 p_2\gamma^0 p_1) + \frac{1}{4} Tr(I)$$
$$= \frac{1}{4m^2} Tr\left(2p_2^0\gamma^0 p_1 - p_2\gamma^0\gamma^0 p_1\right) + 1$$
$$= \frac{1}{4m^2} 8p_2^0 p_1^0 - \frac{1}{4m^2} 4 p_2 p_1 + 1$$
$$= \frac{2E^2}{m^2} - \frac{E^2}{m^2} + \frac{\vec{p}_2\,\vec{p}_1}{m^2} + 1 = \frac{E^2+m^2}{m^2} + \frac{\vec{p}^{\,2}}{m^2}\cos\theta$$

Donde hemos puesto, dado que $\vec{p}_1$ y $\vec{p}_2$ tienen igual módulo $|\vec{p}|$, $\vec{p}_1\vec{p}_2 = \vec{p}^{\,2}\cos\theta$, siendo θ el ángulo que forman $\vec{p}_1$ y $\vec{p}_2$. Como $\vec{p}^{\,2} = E^2 - m^2 = m^2\frac{V^2}{1-V^2}$ tendremos

$$T_1 = \frac{E^2}{m^2}\left[1+\frac{m^2}{E^2}+\frac{\vec{p}^{\,2}}{E^2}\cos\theta\right]$$

Recordando que $\frac{m^2}{E^2} = 1-V^2$ y $\frac{p^2}{E^2} = V^2$ resulta finalmente

$$T_1 = 2\frac{E^2}{m^2}\left(1 - V^2\operatorname{sen}^2\frac{\theta}{2}\right) \qquad \text{(III.11)}$$

Calculemos ahora la traza del segundo sumando

$$T_2 = Tr\left((p_1+p_2)\Lambda_+(p_2)\gamma^0\Lambda_+(p_1)\right)$$
$$= \frac{1}{4m^2} Tr\left((p_1+m)(p_1+p_2)(p_2+m)\gamma^0\right)$$
$$= \frac{1}{4m^2} 2m\, Tr\left((p_1+m)(p_2+m)\gamma^0\right)$$
$$= \frac{1}{2m} Tr\left((p_1\gamma^0)m + (p_2\gamma^0)m\right) = 4E \qquad \text{(III.12)}$$

Con los resultados (III.11) y (III.12) se tiene

$$\frac{1}{4}\sum_{sp.}\sum_{sp.} M^{\dagger}M = \frac{E^2}{m^2}\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{9m^4}(p_1 p_2)^2\right)\left(1-v^2 sen^2\frac{\theta}{2}\right)+\frac{4}{9}\frac{E^2}{m^2}$$

$$= \frac{E^2}{m^2}\left[\frac{4}{9}+\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{9}\left(\frac{1-v^2\cos\theta}{1-v^2}\right)^2\right)\left(1-v^2 sen^2\frac{\theta}{2}\right)\right]$$

Para obtener de (III.7) la sección eficaz diferencial de dispersión, todavía debemos, además de sumar sobre los spines, dividir por el flujo de partículas incidentes e integrar en un intervalo de energías alrededor de la final teniendo en cuenta la densidad de estados.

La normalización que hemos elegido en la parte I implica, como se ve fácilmente de la ecuación de la partícula libre, que hay una partícula por volumen m/E, por tanto el flujo incidente es $|\vec{v}E/m| = |\vec{p}/m|$ De este modo tenemos

$$d\sigma = \frac{1}{2\pi}\left|\frac{m}{\vec{p}}\right|\rho_F(E)\left[\frac{8\pi^2 Z e^2}{|\vec{p}_1-\vec{p}_2|^2}\right]^2\frac{E^2}{m^2}\left[\frac{4}{9}+\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{9}\left(\frac{1-v^2\cos\theta}{1-v^2}\right)^2\right)\left(1-v^2 sen^2\frac{\theta}{2}\right)\right]$$

$\rho_F(E)$ es ala densidad de estados finales por unidad de energía y vale (ver Bethe)

$$\rho_F(E) = \frac{m|\vec{p}|}{(2\pi)^3}\, d\Omega$$

Entonces tendremos como resultado final que la sección eficaz de dispersión de partículas de spin 3/2 por un campo coulombiano vale

$$\boxed{\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{Z^2 e^4}{4\vec{p}^2 v^2 sen^4\frac{\theta}{2}}\left\{\frac{4}{9}+\left[\frac{1}{3}+\frac{2}{9}\left(\frac{1-v^2\cos\theta}{1-v^2}\right)^2\right]\left(1-v^2 sen^2\frac{\theta}{2}\right)\right\} \qquad \text{(III.13)}}$$

El factor de la parte entre llaves es la sección eficaz para spin cero, es decir que la parte entre llaves da la influencia del spin. Es de notar que dicha parte se reduce a 1 para velocidades muy pequeñas o para ángulos muy pequeños.

CALCULO DE LA EXPRESION (III.9).- Recordemos que el operador de proyección tiene la forma

$$\Delta_\mu^{\ \nu}(p) = g_\mu^{\ \nu} - \frac{1}{3}\gamma_\mu\gamma^\nu - \frac{1}{3p^2}\left(p\gamma_\mu p^\nu + \gamma^\nu p_\mu p\right)$$

recordemos también que

$$\gamma_\mu \Delta_\mu^{\ \nu} = 0 \quad ; \quad \Delta_\mu^{\ \mu} = 2$$

$$\gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu = 2g^{\mu\nu}$$

será entonces

$$\Delta^{\mu}_{\nu}(p_1)\gamma^0\Delta_{\mu}^{\nu}(p_2)=\left[\left(g^{\mu}_{\nu}-\frac{1}{3}\gamma_\nu\gamma^\mu-\frac{1}{3m^2}(p_1\gamma_\nu p_1^\mu+p_{1\nu}\gamma^\mu p_1)\right)\gamma^0\Delta^{\nu}_{\mu}(p_2)\right]$$

Calculando separadamente los diversos sumandos del paréntesis se obtendrá:

Primer sumando (III.14)

$$g^{\mu}_{\nu}\gamma^0\Delta^{\nu}_{\mu}(p_2)=2\gamma^0$$

Segundo sumando

$$-\frac{1}{3}\gamma_\nu\gamma^\mu\gamma^0\Delta^{\nu}_{\mu}(p_2)=-\frac{2}{3}\gamma_\nu\Delta^{0\nu}(p_2)$$

$$=-\frac{2}{3}\left[\gamma^0-\frac{1}{3}(2g^0_\nu-\gamma^0\gamma_\nu)\gamma^\nu-\frac{1}{3m^2}(m^2\gamma^0+4Ep_2)\right]$$

$$=-\frac{2}{3}\left(\frac{4}{3}\gamma^0-\frac{4}{3m^2}Ep_2\right) \qquad \text{(III.15)}$$

Tercer sumando

$$-\frac{1}{3m^2}p_1\gamma_\nu p_1^\mu\gamma^0\Delta^{\nu}_{\mu}(p_2)=-\frac{1}{3m^2}p_1\gamma_\nu\gamma^0\left(p_1^\nu-\frac{1}{3}p_1\gamma^\nu-\frac{1}{3m^2}(p_2p_1p_2^\nu+p_1\cdot p_2\gamma^\nu p_2)\right)$$

$$=-\frac{2}{3m^2}\left(p_1\left(p_1^0-\frac{1}{3}p_1\gamma^0-\frac{1}{3m^2}(p_2p_1E+p_1p_2\gamma^0p_2\right)\right)$$

$$+\frac{1}{3m^2}p_1\gamma^0\left(p_1-\frac{1}{3}\gamma_\nu p_1\gamma^\nu-\frac{1}{3m^2}(m^2p_1+4p_1\cdot p_2\,p_2)\right)$$

$$=-\frac{2}{3m^2}\left(p_1E-\frac{m^2}{3}\gamma^0-\frac{2E}{3m^2}p_1\cdot p_2\,p_1+\frac{E}{3}p_2-\frac{1}{3m^2}p_1\cdot p_2\,p_1\gamma^0p_2\right)$$

$$+\frac{2E}{3m^2}\left(p_1-\frac{2}{3}p_1+\frac{4}{3}p_1-\frac{1}{3}p_1-\frac{4}{3m^2}p_1\cdot p_2\,p_2\right)-\frac{1}{3m^2}\gamma^0\left(\frac{4}{3}m^2-\frac{4p_1\cdot p_2}{3m^2}p_1p_2\right)$$

$$=\frac{2}{9}\gamma^0+\frac{4E}{9m^4}p_1\cdot p_2\,p_1-\frac{2E}{9m^2}p_2+\frac{2}{9m^4}p_1\cdot p_2\,p_1\gamma^0p_2+\frac{2E}{9m^2}p_1$$

$$-\frac{8E}{9m^4}p_1\cdot p_2\,p_2-\frac{4}{9}\gamma^0+\frac{4}{9m^4}p_1\cdot p_2\,(2Ep_2-p_1\gamma^0p_2)$$

$$=-\frac{2}{9}\gamma^0+\frac{4E}{9m^4}p_1\cdot p_2\,p_1+\frac{2E}{9m^2}(p_1-p_2)-\frac{2}{9m^4}p_1\cdot p_2\,p_1\gamma^0p_2$$

(III.16)

Cuarto sumando

$$-\frac{1}{3m^2}\gamma^\mu p_1\gamma^0p_{1\nu}\Delta^{\nu}_{\mu}(p_2)=-\frac{2}{3m^2}\left(\gamma^0p_1^\mu p_{1\nu}-p_1g^{\mu0}p_{1\nu}\right)\Delta^{\nu}_{\mu}(p_2)$$

$$=-\frac{2}{3m^2}\gamma^0\left(m^2-\frac{1}{3}m^2-\frac{1}{3m^2}(p_2p_1p_1\cdot p_2+p_1\cdot p_2\,p_1p_2)\right)$$

$$+\frac{2}{3m^2}p_1\left(E-\frac{1}{3}\gamma^0p_1-\frac{1}{3m^2}(p_2\gamma^0p_1\cdot p_2+E\,p_1p_2)\right)$$

$$=-\frac{2}{3m^2}\gamma^0\left(\frac{2m^2}{3}-\frac{2p_1\cdot p_2}{3m^2}\right)^2+\frac{2}{3m^2}\left(\frac{1}{3}E(p_1-p_2)+\frac{m^2}{3}\gamma^0-\frac{p_1p_2}{3m^2}p_1p_2\gamma^0\right) \qquad \text{(III.17)}$$

Finalmente, sumando las ecuaciones (III.14,15,16,17) se tendrá

$$\Delta^{\mu}_{\nu}(p_1)\,\gamma^0\,\Delta^{\nu}_{\mu}(p_2) = \left(\frac{2}{3} + \frac{4}{9m^4}(p_1\cdot p_2)^2\right)\gamma^0 + \frac{4E}{9m^2}(p_1+p_2)$$

que es la ecuación (III.9).

IV. DISPERSION DE FOTONES POR PARTICULAS DE SPIN 3/2

Como hemos visto en la parte III la única modificación que hay que tener en cuenta cuando se consideran los elementos de matriz correspondientes a los diversos diagramas de Feynman, es que el propagador debe cumplir las condiciones suplementarias. Por lo tanto para considerar la dispersión de Compton usaremos las expresiones ya conocidas para spin 1/2 (Bethe, Mesons and Fields, 19e) teniendo en cuenta lo expresado anteriormente.

En el efecto Compton una partícula de impulso $p_{1\mu}$ y spin s_1 absorbe un fotón de impulso $k_{1\mu}$ y polarización $\epsilon_{1\nu}$ y emite un fotón de impulso $k_{2\mu}$ y polarización $\epsilon_{2\nu}$ pasando a un estado de impulso $p_{2\mu}$ y spin s_2. Como el orden de los procesos de emisión y absorción se puede invertir, se tendrán dos elementos de matriz. El elemento de matriz total será la suma de los dos, y por lo tanto será

$$T = \delta^4(p_2+k_2-p_1-k_1)\frac{r_0}{2\pi i}\frac{m^2}{\sqrt{E_1E_2\omega_1\omega_2}}\Big[\bar{w}^{\mu}(\vec{p}_2)\Big\{\epsilon_2\,\Delta_{\mu}^{\nu}(p_1+k_1)\frac{p_1+k_1+m}{(p_1+k_1)^2-m^2}\epsilon_1$$
$$+\epsilon_1\,\Delta_{\mu}^{\nu}(p_1-k_2)\frac{p_1-k_2+m}{(p_1-k_2)^2-m^2}\epsilon_2\Big\}w_{\nu}(\vec{p}_1)\Big] \qquad \text{(IV.1)}$$

Como vemos la partícula se propaga en los estados intermedios de tal modo que se cumplen las condiciones suplementarias. En la (IV.1), es $r_0=\frac{e^2}{4\pi}$, y no hemos puesto explícitamente el índice de polarización de los fotones.

Recordemos que

$$p_1^2=p_2^2=m^2$$
$$k_1^2=k_2^2=0$$
$$k_1\cdot\epsilon_1=k_2\cdot\epsilon_2=0$$

Entonces tendremos

$$(p_1+k_1)^2-m^2=2p_1\cdot k_1=2K_1$$
$$(p_1-k_2)^2-m^2=-2p_1\cdot k_2=-2K_2 \qquad \text{(IV.2)}$$

La (IV.1) se simplificará mucho si usamos el sistema de coordenadas en el cual la partícula está inicialmente en reposo, es decir,

$$p_{1\mu}=(m,0,0,0)$$

Además tomaremos los vectores de polarización puramente espaciales. Por tanto

$$p_1 \epsilon_1 = \epsilon_1 p_1$$
$$p_1 \epsilon_2 = \epsilon_2 p_1$$

Tendremos entonces, por ser ω_ν una solución de la ecuación de la partícula libre

$$(p_1 + m)\epsilon_1 \omega_\nu(\vec{p}_1) = -\epsilon_1 (p_1 - m)\omega_\nu(\vec{p}_1) = 0 \qquad \text{(IV.3)}$$

Teniendo en cuenta las (IV.2) y (IV.3) la (IV.1) será

$$T = \delta^4(p_2 + k_2 - p_1 - k_1)\, \frac{r_0}{2\pi i}\, \frac{m^2}{\sqrt{\omega_1 \omega_2 E_1 E_2}}$$
$$\times\, \bar{\omega}^\mu(\vec{p}_2)\left[\epsilon_2 \Delta^\nu_\mu (p_1 + k_1)\, k_1 \epsilon_1 \frac{1}{2K_1} + \epsilon_1 \Delta^\nu_\mu(p_1 - k_2)\, k_2 \epsilon_2 \frac{1}{2K_2}\right]\omega_\nu(\vec{p}_1)$$
$$= \delta^4(p_2 + k_2 - p_1 - k_1)\, C M \quad ; \quad C = \frac{r_0}{2\pi i}\frac{m^2}{\sqrt{E_1 E_2 \omega_1 \omega_2}} \qquad \text{(IV.4)}$$

La probabilidad de transición es el cuadrado del módulo de T

$$T^+ T = \delta^4(0)\,\delta^4(p_2 + k_2 - p_1 - k_1)\, |C|^2 M^+ M$$

Interpretando $\delta^4(0) = \lim_{V,\tau\to\infty} (2\pi)^{-4} V\tau$ donde V es el volumen donde ocurre el proceso y τ es el tiempo durante el cual se produce la dispersión, tendremos la probabilidad de transición por unidad de volumen y de tiempo

$$\lim_{V,\tau\to\infty} \frac{T^+ T}{V\tau} = \frac{1}{(2\pi)^4}\,\delta^4(p_2 + k_2 - p_1 - k_1)\,|C|^2 M^+ M \qquad \text{(IV.5)}$$

Consideremos ahora el término M^+M, si no nos interesan el spin inicial ni el final de la partícula tendremos que hacer el promedio y la suma sobre los spines respectivamente. De acuerdo con los resultados de la parteI tendremos

$$\frac{1}{4}\sum_{sp}\sum_{sp} M^+ M = \frac{1}{4}\,\text{Traza}\Big[\Big(\frac{1}{2K_1}\epsilon_1 k_1 \bar{\Delta}^\sigma_\rho(p_1 + k_1)\epsilon_2 + \frac{1}{2K_2}\epsilon_2 k_2 \bar{\Delta}^\sigma_\rho(p_1 - k_2)\epsilon_1\Big)$$
$$\times\, \Lambda_+(p_2)\Delta^\mu_\sigma(p_2)\Big(\frac{1}{2K_1}\epsilon_2 \Delta^\nu_\mu(p_1 + k_1) k_1 \epsilon_1 + \frac{1}{2K_2}\epsilon_1 \Delta^\nu_\mu(p_1 - k_2) k_2 \epsilon_2\Big)\Lambda_+(p_1)\Delta^\rho_\nu(p_1)\Big]$$
$$\bar{\Delta}^\sigma_\rho = \gamma^0 \Delta^{\lambda +}_\alpha \gamma^0 g_{\rho\lambda} g^{\alpha\sigma} \qquad \text{(IV.6)}$$

O también

$$\frac{1}{4}\sum_{sp.}\sum_{sp.} M^+ M = \frac{1}{4}(F_{11} + F_{12} + F_{21} + F_{22})$$

donde los F son

$$F_{11} = \frac{1}{4K_1^2} Tr\left(\epsilon_1 k_1 \Delta^\sigma_\rho(p_1+k_1)\epsilon_2 \Lambda_+(p_2)\Delta^\mu_\sigma(p_2)\epsilon_2 \Delta^\nu_\mu(p_1+k_1) k_1\epsilon_1\Lambda_+(p_1)\Delta^\rho_\nu(p_1)\right)$$

$$F_{12} = \frac{1}{4K_1K_2} Tr\left(\epsilon_1 k_1 \Delta^\sigma_\rho(p_1+k_1)\epsilon_2 \Lambda_+(p_2)\Delta^\mu_\sigma(p_2)\epsilon_1 \Delta^\nu_\mu(p_1-k_2) k_2\epsilon_2\Lambda_+(p_1)\Delta^\rho_\nu(p_1)\right)$$

$$F_{21} = \frac{1}{4K_1K_2} Tr\left(\epsilon_2 k_2 \Delta^\sigma(p_1-k_2)\epsilon_1 \Lambda_+(p_2)\Delta^\mu_\sigma(p_2)\epsilon_2 \Delta^\nu_\mu(p_1+k_1) k_1\epsilon_1\Lambda_+(p_1)\Delta^\rho_\nu(p_1)\right)$$

$$F_{22} = \frac{1}{4K_2^2} Tr\left(\epsilon_2 k_2 \Delta^\sigma_\rho(p_1-k_2)\epsilon_1 \Lambda_+(p_2)\Delta^\mu_\sigma(p_2)\epsilon_1 \Delta^\nu_\mu(p_1-k_2) k_2\epsilon_2\Lambda_+(p_1)\Delta^\rho_\nu(p_1)\right)$$

Es de notar que haciendo las sustituciones

$$\begin{aligned} \epsilon_1 &\longleftrightarrow \epsilon_2 \\ k_1 &\longleftrightarrow -k_2 \end{aligned} \qquad \text{(IV.7)}$$

F_{11} se convierte en F_{22}, y F_{12} en F_{21}. Por lo tanto será suficiente calcular F_{11} y F_{12} y luego hacer las sustituciones (IV.7) para obtener F_{22} y F_{21}.

Si recordamos la forma del operador de proyección (ecuación (I.8)) vemos que las expresiones F son bastante complicadas; un primer paso para simplificarlas consiste en aprovechar las condiciones suplementarias que cumple la función de onda. Para ello es conveniente volver a la expresión (IV.4), consideremos el primer sumando

$$\bar{\omega}^\mu(\vec{p}_2)\epsilon_2 \Delta^\nu_\mu(p_1+k_1) k_1\epsilon_1 \omega_\nu(\vec{p}_1) =$$

$$= \bar{\omega}^\mu(\vec{p}_2)\epsilon_2 \left(g^\nu_\mu - \frac{1}{3}\gamma_\mu\gamma^\nu - \frac{1}{3(p_1+k_1)^2}\left[(p_1+k_1)\gamma_\mu(p_1^\nu+k_1^\nu)+(p_{1\mu}+k_{1\mu})\gamma^\nu(p_1+k_1)\right]\right) \times k_1\epsilon_1\omega_\nu(\vec{p}_1)$$

$$= \bar{\omega}^\mu(\vec{p}_2)\epsilon_2 \left(g^\nu_\mu - \frac{1}{3}\gamma_\mu\gamma^\nu - \frac{1}{3(p_1+k_1)^2}\left[4(p_{1\mu}+k_{1\mu})(p_1^\nu+k_1^\nu) - \gamma_\mu(p_1+k_1)(p_1^\nu+k_1^\nu) - (p_{1\mu}+k_{1\mu})(p_1+k_1)\gamma^\nu\right]\right) \times k_1\epsilon_1\omega_\nu(\vec{p}_1) \qquad \text{(IV.8)}$$

Recordemos que

$$\begin{aligned} p_1^\nu\omega_\nu(\vec{p}_1) &= 0 \qquad \gamma^\nu\omega_\nu = 0 \\ p_{2\mu}\bar{\omega}^\mu(\vec{p}_2) &= 0 \qquad \bar{\omega}^\mu\gamma_\mu = 0 \\ \gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu &= 2g^{\mu\nu} \end{aligned} \qquad \text{(IV.9)}$$

Además por la conservación del impulso-enrgía

$$p_{2\mu} + k_{2\mu} = p_{1\mu} + k_{1\mu} \qquad \text{(IV.10)}$$

Calculemos ahora las modificaciones que se pueden hacer en los sumandos de (IV.8). Tendremos usando las (IV.9)

$$-\frac{1}{3}\bar{\omega}^\mu(\vec{p}_2)\epsilon_2\gamma_\mu\gamma^\nu k_1\epsilon_1\omega_\nu(\vec{p}_1) = -\frac{4}{3}\bar{\omega}^\mu(\vec{p}_2)\epsilon_{2\mu}(k_1^\nu\epsilon_1 - k_1\epsilon_1^\nu)\omega_\nu(\vec{p}_1)$$

usando (IV.9) y (IV.10)

$$-\frac{4}{3(p_1+k_1)^2}\bar{\omega}^{\mu}\epsilon_2(p_{1\mu}+k_{1\mu})(p_1^{\nu}+k_1^{\nu})k_1\epsilon_1\omega_{\nu}=-\frac{4}{3(p_1+k_1)^2}\bar{\omega}^{\mu}\epsilon_2 k_{2\mu}k_1^{\nu}k_1\epsilon_1\omega_{\nu}$$

usando que $k_1^2=0$ y la (IV.9)

$$\frac{1}{3(p_1+k_1)^2}\bar{\omega}^{\mu}\epsilon_2\gamma_{\mu}(p_1+k_1)(p_1^{\nu}+k_1^{\nu})k_1\epsilon_1\omega_{\nu}=\frac{2}{3(p_1+k_1)^2}\bar{\omega}^{\mu}\epsilon_{2\mu}p_1k_1k_1^{\nu}\epsilon_1\omega_{\nu}$$

análogamente

$$\frac{1}{3(p_1+k_1)^2}\bar{\omega}^{\mu}\epsilon_2(p_{1\mu}+k_{1\mu})(p_1+k_1)\gamma^{\nu}k_1\epsilon_1\omega_{\nu}=$$

$$=\frac{2}{3(p_1+k_1)^2}\bar{\omega}^{\mu}k_{2\mu}\epsilon_2(p_1+k_1)(k_1^{\nu}\epsilon_1-k_1\epsilon_1^{\nu})\omega_{\nu}$$

Los resultados anteriores introducidos en la (IV.8) permiten que tome una forma más accesible al cálculo, esta forma será

$$\frac{1}{K_1}\bar{\omega}^{\mu}(\vec{p}_2)\epsilon_2\Delta_{\mu}^{\nu}(p_1+k_1)k_1\epsilon_1\omega_{\nu}(\vec{p}_1)=\frac{1}{K_1}\bar{\omega}^{\mu}(\vec{p}_2)\Big[g_{\mu}^{\nu}\epsilon_2k_1\epsilon_1-\frac{4}{3}\epsilon_{2\mu}(k_1^{\nu}\epsilon_1-k_1\epsilon_1^{\nu})$$

$$-\frac{2}{3(p_1+k_1)^2}\left(\epsilon_2k_1\epsilon_1k_{2\mu}k_1^{\nu}-\epsilon_{2\mu}k_1^{\nu}p_1k_1\epsilon_1-k_{2\mu}k_1^{\nu}\epsilon_2p_1\epsilon_1+k_{2\mu}\epsilon_1^{\nu}\epsilon_2p_1k_1\right)\Big]\omega_{\nu}(\vec{p}_1)$$

El segundo sumando de la (IV.4) se obtiene haciendo en el resultado anterior las sustituciones (IV.7) obteniéndose

$$\frac{1}{K_2}\bar{\omega}^{\mu}(\vec{p}_2)\epsilon_1\Delta_{\mu}^{\nu}(p_1-k_2)k_2\epsilon_2\omega_{\nu}(\vec{p}_1)=\frac{1}{K_2}\bar{\omega}^{\mu}(\vec{p}_2)\Big[g_{\mu}^{\nu}\epsilon_1k_2\epsilon_2-\frac{4}{3}\epsilon_{1\mu}(k_2^{\nu}\epsilon_2-k_2\epsilon_2^{\nu})$$

$$-\frac{2}{3(p_1-k_2)^2}\left(k_{1\mu}k_2^{\nu}\epsilon_1k_2\epsilon_2+\epsilon_{1\mu}k_2^{\nu}p_1k_2\epsilon_2+k_{1\mu}k_2^{\nu}\epsilon_1p_1\epsilon_2-k_{1\mu}\epsilon_2^{\nu}\epsilon_1p_1k_2\right)\Big]\omega_{\nu}(\vec{p}_1)$$

Con estos resultados los F serán ahora

$$F_{11}=\frac{1}{4K_1^2}\,\mathrm{Traza}\Big\{\Big[\epsilon_1k_1\epsilon_2g_{\mu}^{\nu}-\frac{4}{3}(k_{1\mu}\epsilon_1-k_1\epsilon_{1\mu})\epsilon_2^{\nu}-\frac{2}{3(p_1+k_1)^2}(\epsilon_1k_1\epsilon_2k_{1\mu}k_2^{\nu}$$
$$-\epsilon_1k_1p_1k_{1\mu}\epsilon_2^{\nu}-\epsilon_1p_1\epsilon_2k_{1\mu}k_2^{\nu}+k_1p_1\epsilon_2\epsilon_{1\mu}k_2^{\nu})\Big]\Lambda_+(p_2)\Delta_{\nu}^{\lambda}(p_2)\times$$
$$\times\Big[\epsilon_2k_1\epsilon_1g_{\lambda}^{\sigma}-\frac{4}{3}\epsilon_{2\lambda}(k_1^{\sigma}\epsilon_1-k_1\epsilon_1^{\sigma})-\frac{2}{3(p_1+k_1)^2}(\epsilon_2k_1\epsilon_1k_{2\lambda}k_1^{\sigma}-p_1k_1\epsilon_1\epsilon_{2\lambda}k_1^{\sigma}$$
$$-\epsilon_2p_1\epsilon_1k_{2\lambda}k_1^{\sigma}+\epsilon_2p_1k_1k_{2\lambda}\epsilon_1^{\sigma})\Big]\Lambda_+(p_1)\Delta_{\sigma}^{\mu}(p_1)\Big\}\qquad\text{(IV.11)}$$

$$F_{12}=\frac{1}{4K_1K_2}\,\mathrm{Traza}\Big\{\Big[\epsilon_1k_1\epsilon_2g_{\mu}^{\nu}-\frac{4}{3}(k_{1\mu}\epsilon_1-k_1\epsilon_{1\mu})\epsilon_2^{\nu}-\frac{2}{3(p_1+k_1)^2}(\epsilon_1k_1\epsilon_2k_{1\mu}k_2^{\nu}$$
$$-\epsilon_1k_1p_1k_{1\mu}\epsilon_2^{\nu}-\epsilon_1p_1\epsilon_2k_{1\mu}k_2^{\nu}+k_1p_1\epsilon_2\epsilon_{1\mu}k_2^{\nu})\Big]\Lambda_+(p_2)\Delta_{\nu}^{\lambda}(p_2)\times$$
$$\times\Big[\epsilon_1k_2\epsilon_2g_{\lambda}^{\sigma}-\frac{4}{3}\epsilon_{1\lambda}(k_2^{\sigma}\epsilon_2-k_2\epsilon_2^{\sigma})-\frac{2}{3(p_1-k_2)^2}(\epsilon_1k_2\epsilon_2k_{1\lambda}k_2^{\sigma}+p_1k_2\epsilon_2\epsilon_{1\lambda}k_2^{\sigma}$$
$$+\epsilon_1p_1\epsilon_2k_{1\lambda}k_2^{\sigma}-\epsilon_1p_1k_2k_{1\lambda}\epsilon_2^{\sigma})\Big]\Lambda_+(p_1)\Delta_{\sigma}^{\mu}(p_1)\Big\}\qquad\text{(IV.12)}$$

El cálculo completo de F_{11} y F_{12}, válido para cualquier energía del fotón incidente, resulta una tarea prohibitiva por la cantidad muy grande de términos que intervienen, por tanto nos hemos limitado a cálcular los dos casos extremos:

Energía del fotón incidente mucho mayor que la energía en reposo de la partícula.

Energía del fotón incidente mucho menor que la energía en reposo de la partícula.

La consideración de estos dos casos resultará suficiente para la comparación con otras teorías (ver, por ej, Mathews(12)) y con los eventuales datos experimentales, que muy probablemente provendrán de fenómenos de alta energía.

EFECTO COMPTON PARA ALTAS ENERGIAS.- Recordemos que la relación entre las energías del fotón emergente y del incidente es

$$\omega_2 = m\,\omega_1 / (m + \omega_1 (1 - \cos\theta))$$

Por lo tanto cuando $\omega_1 \gg m$ cabe distinguir dos casos

$$A) \qquad 1 - \cos\theta \sim m/\omega_1$$

$$B) \qquad 1 - \cos\theta \gg m/\omega_1$$

usaremos la notación $\sim$ significando "del orden de" y la notación $\simeq$ significando "aproximadamente igual".

En el caso A tendremos $\qquad \omega_2 \sim \omega_1 \gg m$

En el caso B tendremos $\qquad \omega_2 \simeq m$

CASO A.- De acuerdo con lo que hemos dicho calcularemos solamente las componentes de F_{11} y F_{12} de mayor orden en ω_1. A este efecto debe tenerse en cuenta que, como $p_2 = p_1 + k_1 - k_2$, entonces $p_2 \sim \omega_1$, además, como se verá más adelante un término del tipo $k_2 \cdot \epsilon_1$ o $k_1 \cdot \epsilon_2$ es del orden $\omega_1^{1/2}$. Después de varios ensayos hemos llegado a la conclusión de que, aunque aparentemente los términos de orden mayor en F_{11} y F_{12} son $\sim \omega_1^5$, el orden máximo que se obtiene es $\sim \omega_1^2$. El cálculo efectivo es muy engorroso y no tiene interés reproducirlo completamente aquí, de todos modos mostraremos un cálculo como ejemplo.

Llamaremos T_{ij} a la traza del término i del primer corchete de F_{11} (ecuación (IV.11)) por el término j del segundo corchete, así será

$$T_{11} = \mathrm{Traza}\left(\epsilon_1 k_1 \epsilon_2 g_\mu^\nu \Lambda_+(p_2) \Delta_\nu^\lambda(p_2) \epsilon_2 k_1 \epsilon_1 g_\lambda^\sigma \Lambda_+(p_1) \Delta_\sigma^\mu(p_1)\right)$$

De acuerdo con lo que hemos dicho respecto del orden, debemos retener, al calcular la traza T_{11}, hasta los términos de orden ω_1^4 (puesto que para obtener F_{11} a partir de $\sum_{i,j} T_{ij}$ todavía hay que dividir a éste por un término de orden ω_1^2).

Como en T_{11} intervienen dos matrices k_1 y $\Lambda_+(p_2)$ y $\Delta_\nu^\lambda(p_2) \sim p_2 p_2$, el orden máximo aparente de T_{11} será ω_1^5. Resultará conveniente expresar $\Lambda_+(p_2)\,\Delta_\nu^\lambda(p_2)$ en la forma

$$\Lambda_+(p_2)\Delta_\nu^\lambda(p_2) = \frac{1}{3\mu^3} p_2\, p_{2\nu}\, p_2^\lambda - \frac{1}{6\mu^2}(p_2\gamma_\nu p_2^\lambda + p_{2\nu}\gamma^\lambda p_2) + (\sim p_2)$$

Tendremos entonces

$$T_{11} = -\frac{1}{3\mu^2} Tr\left(\epsilon_1 k_1 \epsilon_2 \left[p_2\, p_{2\mu}\, p_2^\lambda \frac{1}{\mu} + \frac{1}{2}(p_2\gamma_\mu p_2^\lambda + p_{2\mu}\gamma^\lambda p_2)\right]\epsilon_2 k_1 \epsilon_1 \Lambda_+(p_1)\Delta_\lambda^\mu(p_1)\right)$$

donde hemos despreciado términos de orden aparente $< \omega_1^4$

Si ponemos $T_{11} = T_{11}^1 + T_{11}^2$ se tendrá

$$T_{11}^1 = -\frac{1}{3\mu^3} Tr\left(\epsilon_1 k_1 \epsilon_2 p_2 \epsilon_2 k_1 \epsilon_1 \Lambda_+(p_1) p_{2\mu} p_2^\lambda \Delta_\lambda^\mu(p_1)\right)$$

$$= \frac{2}{9\mu^5}(p_1\cdot p_2)^2\, Tr\left(\epsilon_1 k_1 \epsilon_2 p_2 \epsilon_2 k_1 \epsilon_1 \frac{p_1+\mu}{2\mu}\right)$$

donde hemos usado $p_{2\mu} p_2^\lambda \Delta_\lambda^\mu(p_1) = -\frac{2}{3\mu^2}(p_1\cdot p_2)^2$, resultado fácilmente verificable. Como la traza de un número impar de matrices es nula

$$T_{11}^1 = \frac{1}{9\mu^6}(p_1\cdot p_2)^2\, Tr\left(\epsilon_1 k_1 \epsilon_2 p_2 \epsilon_2 k_1 \epsilon_1 p_1\right)$$

Usando ahora que $k_1\epsilon_1 = -\epsilon_1 k_1$, que $k_1 p_1 = 2K_1 - p_1 k_1$, que $k_1 k_1 = k_1^2 = 0$, y que $\epsilon_1\epsilon_1 = \epsilon_1^2 = -1$, tenemos

$$T_{11}^1 = \frac{1}{9\mu^6}(p_1\cdot p_2)^2\, 2K_1\, Tr\left(k_1 \epsilon_2 p_2 \epsilon_2\right)$$

$$= \frac{1}{9\mu^6}(p_1\cdot p_2)^2\, 2K_1 \cdot 4(2\, k_1\cdot\epsilon_2\, p_2\cdot\epsilon_2 + K_2)$$

como

$$p_2\cdot\epsilon_2 = p_1\cdot\epsilon_2 + k_1\cdot\epsilon_2 - k_2\cdot\epsilon_2 = k_1\cdot\epsilon_2$$

tendremos finalmente

$$T_{11}^1 = \frac{8}{9\mu^6} K_1 (p_1\cdot p_2)^2\left[2(k_1\cdot\epsilon_2)^2 + K_2\right]$$

Consideremos ahora el término

$$T_{11}^2 = -\frac{1}{6\mu^2} Tr\left(\epsilon_1 k_1 \epsilon_2 (p_2\gamma_\mu p_2^\lambda + p_{2\mu}\gamma^\lambda p_2)\epsilon_2 k_1 \epsilon_1 \Lambda_+(p_1)\Delta_\lambda^\mu(p_1)\right)$$

cuyo orden aparente es $\sim\omega_1^4$. Usando las propiedades de conmutación de las matrices γ^μ y las condiciones suplementarias $\gamma^\mu\Delta_\mu^\lambda = \Delta_\mu^\lambda\gamma_\lambda = 0$ será

$$T_{11}^{2} = -\frac{2}{6m^2} Tr\,(\epsilon_1 k_1 \epsilon_2 p_2 p_2^{\lambda}(\epsilon_{2\mu} k_1 \epsilon_1 - \epsilon_2 k_{1,\mu}\epsilon_1 + \epsilon_2 k_1 \epsilon_{1\mu})\Delta_{\lambda}^{\mu}(p_1)\Lambda_+(p_1))$$

$$-\frac{2}{6m^2} Tr\,((\epsilon_1^{\lambda} k_1 \epsilon_2 - \epsilon_1 k_1^{\lambda}\epsilon_2 + \epsilon_1 k_1 \epsilon_2^{\lambda}) p_{2\mu} p_2 \epsilon_2 k_1 \epsilon_1 \Lambda_+(p_1)\Delta_{\lambda}^{\mu}(p_1))$$

Es relativamente fácil ver que la evaluación de cualquiera de los sumandos de T_{11}^{2} , cuyo orden aparente es ω_1^{4}, rebajará el orden inicial; por ejemplo, el primer sumando será

$$-\frac{1}{3m^2} Tr\,(\epsilon_1 k_1 \epsilon_2 p_2 k_1 \epsilon_1 p_2^{\lambda}\epsilon_{2\mu}\Delta_{\lambda}^{\mu}(p_1)\Lambda_+(p_1)) =$$

$$= -\frac{2}{3m^2} Tr\,(\epsilon_1 (k_1\cdot\epsilon_2\, p_2 - k_1\cdot p_2\,\epsilon_2) k_1 \epsilon_1 p_2^{\lambda}\epsilon_{2\mu}\Delta_{\lambda}^{\mu}(p_1)\Lambda_+(p_1)) \sim \leq \omega_1^{3+\frac{1}{2}}$$

Es decir T_{11}^{2} no contribuye, en el orden considerado, al elemento T_{11}.

De este modo, usando las abreviaturas

$$P = p_1\cdot p_2 \quad ; \quad e_1 = k_2\cdot\epsilon_1 \quad ; \quad e_2 = k_1\cdot\epsilon_2 \quad ; \quad e_{12} = \epsilon_1\cdot\epsilon_2$$

tendremos que las trazas correspondientes a F_{11}

$$T_{11} = \frac{16}{9m^6} K_1 P^2 (e_2^2 + \frac{K_2}{2}) \quad ; \quad T_{12} = T_{21} = -\frac{16}{27m^6} e_2^2 P K_1 (P + K_1)$$

$$T_{13} = T_{31} = -\frac{16}{27m^6} P K_1^2 (e_2^2 + \frac{K_2}{2}) \quad ; \quad T_{14} = T_{41} = \frac{8}{27m^6} e_2^2 P K_1 (P + K_1)$$

$$T_{22} = \frac{64}{81m^6} K_1^2 e_2^2 P \quad ; \quad T_{23} = T_{32} = \frac{16}{81m^6} K_1^2 e_2^2 (P + K_1)$$

$$T_{24} = T_{42} = -\frac{32}{81m^6} K_1^2 e_2^2 P \quad ; \quad T_{33} = \frac{16}{81m^6} (e_2^2 + \frac{K_2}{2})$$

$$T_{34} = T_{43} = -\frac{8}{81m^6} e_2^2 (P + K_1) \; ; \; T_{44} = \frac{16}{81m^6} K_1^2 e_2^2 P$$

$$T_{i5} = T_{i6} = T_{5i} = T_{6i} = 0 \qquad i = 1, \ldots, 6$$

De la misma manera las trazas correspondientes a F_{12} serán

$$T_{11} = \frac{8P^2}{9m^6}\left[e_1^2 K_1 - e_2^2 K_2 + K_1 K_2 (2e_{12}^2 - 1)\right) = \frac{8P^2}{9m^6} A$$

$$T_{12} = -2T_{14} = -\frac{16}{27m^6} P K_1 K_2 (2e_1 e_2 e_{12} - e_1^2) \; ; \; T_{13} = \frac{8PK_2}{27m^6} A \; ;$$

$$T_{21} = -2T_{41} = -\frac{16P}{27m^6} K_1 K_2 (2e_1 e_2 e_{12} - e_2^2) \; ; \; T_{22} = 4T_{44} = \frac{64}{81m^6} P K_1 K_2 e_1 e_2 e_{12}$$

$$T_{23} = -2T_{43} = -\frac{16}{81m^6} K_1 K_2^2 (2e_1 e_2 e_{12} - e_2^2) \; ; \; T_{24} = T_{42} = -\frac{32}{81m^6} P K_1 K_2 e_1 e_2 e_{12}$$

$$T_{31} = -\frac{8}{27m^6} P K_1 A \; ; \; T_{32} = -\frac{8K_1K_2}{81m^6} A \; ; \; T_{32} = -2T_{34} = \frac{16K_2}{81m^6} K_1^2 (2e_1 e_2 e_{12} - e_1^2)$$

$$T_{i5} = T_{i6} = T_{5i} = T_{6i} = 0 \qquad , \; i = 1, \ldots, 6.$$

En consecuencia, de acuerdo con los resultados anteriores, tendremos

$$F_{11}=\frac{1}{4K_1^2}\sum_{i,j}^{6}T_{ij}=\frac{4}{81m^6}\left[e_2^2\left(6\frac{K_2^2}{K_1}+K_1-5K_2\right)+\frac{K_2}{2}\left(4K_1+\frac{9K_2^2}{K_1}-12K_2\right)\right] \quad \text{(IV.13)}$$

$$F_{12}=\frac{1}{4K_1K_2}\sum_{i,j}^{6}T_{ij}=\frac{2}{81m^6}\Big[\frac{e_1^2}{K_2}(6K_1^2+3K_2^2-11K_1K_2)-\frac{e_2^2}{K_1}(6K_2^2+3K_1^2-11K_1K_2) + (6P^2-K_1K_2)(2e_{12}^2-1)-8Pe_1e_2e_{12}\Big] \quad \text{(IV.14)}$$

De acuerdo con lo dicho anteriormente si hacemos las sustituciones (IV.7) en (IV.13) obtendremos F_{22}, y haciendo las sustituciones en (IV.14) obtendremos F_{21}

$$F_{22}=\frac{4}{81m^6}\left[-e_1^2\left(6\frac{K_1^2}{K_2}+K_2-5K_1\right)+\frac{K_1}{2}\left(4K_2+9\frac{K_1^2}{K_2}-12K_1\right)\right] \quad \text{(IV.15)}$$

$$F_{21}=F_{12} \quad \text{(IV.16)}$$

Tendremos finalmente de acuerdo con los resultados (IV.13,14,15,16) que el cuadrado del módulo de M independientemente de los spines inicial y final vale

$$\frac{1}{4}\sum_{sp.i.}\sum_{sp.f.}M^{+}M=\frac{1}{4}\sum_{i,j}^{2}F_{ij}=\frac{1}{81m^6}\Big[e_1^2(2K_2-6K_1)-e_2^2(2K_1-6K_2) + (6P^2-K_1K_2)(2e_{12}^2-1)-8Pe_1e_2e_{12}+\frac{9}{2}\left(\frac{K_2^3}{K_1}+\frac{K_1^3}{K_2}\right)-6(K_1^2+K_2^2)+4K_1K_2\Big] \quad \text{(IV.17)}$$

La fórmula (IV.17) depende de las polarizaciones de los fotones, si éstas no nos interesan debemos promediar sobre las polarizaciones del fotón inicial y sumar sobre las polarizaciones del fotón final. Para ello recordemos que hemos elegido los vectores de polarización puramente espaciales, entonces

$$\sum_{\lambda=1}^{2}\epsilon_{1i}^{\lambda}\epsilon_{1j}^{\lambda}=\delta_{ij}-\frac{k_{1i}k_{1j}}{\omega_1^2} \quad ; \quad \sum_{\lambda=1}^{2}\epsilon_{2i}^{\lambda}\epsilon_{2j}^{\lambda}=\delta_{ij}-\frac{k_{2i}k_{2j}}{\omega_2^2}$$

Por tanto tendremos

$$\frac{1}{2}\sum_{p.i.}\sum_{p.f.}e_1^2=\sum_{\lambda=1}^{2}\epsilon_{1i}^{\lambda}k_{2i}\epsilon_{1j}^{\lambda}k_{2j}=\left(\delta_{ij}-\frac{k_{1i}k_{1j}}{\omega_1^2}\right)k_{2i}k_{2j}$$

$$=\vec{k}_2^{\,2}-\frac{(\vec{k}_1\cdot\vec{k}_2)^2}{\omega_1^2}=\omega_2^2(1-\cos^2\theta)$$

De la misma manera se encuentra

$$\frac{1}{2}\sum_{p.i.}\sum_{p.f.}e_2^2=\omega_1^2(1-\cos^2\theta) \quad ; \quad \frac{1}{2}\sum_{p.i.}\sum_{p.f.}e_1e_2e_{12}=-\frac{1}{2}\omega_1\omega_2\cos\theta(1-\cos^2\theta)$$

$$\frac{1}{2}\sum_{p.i.}\sum_{p.f.}e_{12}^2=\frac{1}{2}(1+\cos^2\theta) \quad ; \quad \frac{1}{2}\sum_{p.i.}\sum_{p.f.}(2e_{12}^2-1)=\cos^2\theta-1$$

Los términos independientes de los vectores de polarización quedan multiplicados por 2 al efectuar la suma y promedio sobre las polarizaciones.

Para el caso que nos ocupa es conveniente introducir la cantidad

$$R = 1 + \frac{\omega_1}{m}(1-\cos\theta)$$

de modo que tendremos $R = \frac{\omega_1}{\omega_2}$; además, como estamos considerando el caso

$$1-\cos\theta \sim \frac{m}{\omega_1} \ll 1$$

podemos escribir, salvo infinitésimos de orden superior en $\frac{m}{\omega_1}$

$$(1-\cos^2\theta) = (1+\cos\theta)(1-\cos\theta) = 2(1-\cos\theta) = 2(R-1)\frac{m}{\omega_1}$$

Como habíamos señalado previamente, se ve que para el caso que estamos considerando los términos del tipo e_1^4 y e_2^2 no son del orden de ω_1^2 sino del orden de ω_1 .

De acuerdo con estos resultados si efectuamos las sumas y promedios sobre las polarizaciones en la (IV.17) se tendrá

$$\frac{1}{2}\frac{1}{4}\sum_{pol.}\sum_{sp.} M^+M = \frac{\omega_1^2}{81 m^4} R^{-3}\left[5+12R-32R^2+12R^3+5R^4\right] \tag{IV.18}$$

De acuerdo con la (IV.5), la probabilidad de transición por unidad de volumen y de tiempo, independientemente de las polarizaciones y de los spines iniciales y finales será

$$\frac{1}{(2\pi)^6} r_0^2 \frac{m^2}{\omega_1\omega_2 E_1 E_2} \times \frac{1}{8}\sum_{sp}\sum_{pol} M^+M \tag{IV.19}$$

Para obtener de la (IV.19) la sección eficaz definida usualmente hay que reducirla a densidad unitaria de partículas y fotones incidentes, considerar la densidad del grupo de estados finales y dividirla por el flujo incidente de fotones y por el número de partículas dispersantes por unidad de volumen; todo ello es un procedimiento "standard" y no lo reproduciremos aquí (ver Bethe, Mesons and Fields, 19e). El resultado es que la sección eficaz diferencial de dispersión de fotones de energía inicial ω_1 a un estado de energía ω_2 y de impulso comprendido en un ángulo sólido $d\Omega$, vale

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = r_0^2\left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)^2 m^2 \times \frac{1}{8}\sum_{sp}\sum_{pol} M^+M \tag{IV.20}$$

Es decir, que tendremos de acuerdo con la (IV.18)

$$\boxed{\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{r_0^2}{81}\left(\frac{\omega_1}{m}\right)^2 R^{-5}\left[5+12R-32R^2+12R^3+5R^4\right]} \tag{IV.21}$$

CASO B.- En este caso tenemos que $\omega_2 \sim m$; por lo tanto algunos de los elementos T_{ij} que habíamos calculado en el caso anterior verán su orden de magnitud disminuido, mientras que otros lo verán aumentado pues ahora $e_2^2 \sim \omega_1^2$. Por lo tanto, ahora tendremos que los términos de mayor orden son $\sim \omega_1^3$ y valen

Para F_{11}

$$T_{11} = \frac{16}{9m^6} K_1^3 e_2^2 = \frac{16}{9} B \quad ; \quad T_{12} = T_{21} = -\frac{32}{27} B \; ; \; T_{44} = \frac{16}{81} B$$

$$T_{13} = T_{31} = -\frac{16}{27} B \quad ; \quad T_{14} = T_{41} = \frac{16}{27} B \; ; \quad T_{22} = \frac{64}{81} B$$

$$T_{23} = T_{32} = \frac{32}{81} B \quad ; \quad T_{24} = T_{42} = -\frac{32}{81} B \; ; \; T_{33} = \frac{16}{81} B$$

$$T_{34} = T_{43} = -\frac{16}{81} B$$

Para F_{12}

$$T_{11} = \frac{-8}{9m^6} K_1^2 K_2 e_2^2 \quad ; \quad T_{21} = \frac{16}{27m^6} K_1^2 K_2 e_2^2$$

$$T_{31} = \frac{-16 K_1^2 K_2 e_2^2}{27m^6(m^2-2K_2)} \quad ; \quad T_{41} = \frac{16 K_1^2 K_2 e_2^2}{27m^6(m^2-2K_2)}$$

Para F_{21}

$$T_{11} = \frac{-8}{9m^6} K_1^2 K_2 e_2^2 \quad ; \quad T_{12} = \frac{16}{27m^6} K_1^2 K_2 e_2^2$$

$$T_{13} = \frac{-16 K_1^2 K_2 e_2^2}{27m^6(m^2-2K_2)} \quad ; \quad T_{14} = \frac{16 K_1^2 K_2 e_2^2}{27m^6(m^2-2K_2)}$$

Para F_{22}

$$T_{11} = \frac{8}{9m^6} K_1^3 K_2$$

Nótese que los términos T_{31} y T_{41} de F_{12} , y T_{13} y T_{14} de F_{21} divergen para $m^2 - 2K_2 = 0$, es decir para $1 - \frac{2}{1-\cos\theta} \simeq 0$, $\cos\theta \simeq -1$; sin embargo al sumarse para dar F_{12} y F_{21} esos términos divergentes se compensan, es decir, en el orden máximo considerado en este cálculo la sección eficaz será finita.

De acuerdo con los resultados anteriores las expresiones para los F_{ij} serán

$$F_{11} = \frac{4}{81m^6} K_1 e_2^2 \qquad F_{22} = \frac{4}{18m^6} \frac{K_1^3}{K_2}$$

$$F_{12} = -\frac{4}{54m^6} K_1 e_2^2 \qquad F_{21} = -\frac{4}{54m^6} K_1 e_2^2$$

Por tanto tendremos

$$\frac{1}{4} \sum_{sp.i} \sum_{sp.f} M^+ M = \frac{1}{4} \sum_{ij} F_{ij} = \frac{1}{81m^6} \left[-2 e_2^2 K_1 + \frac{9}{2} \frac{K_1^3}{K_2} \right]$$

Si no nos interesan las polarizaciones de los fotones se tiene

$$\frac{1}{8}\sum_{sp.}\sum_{pol.} M^+ M = \frac{\omega_1^3}{81 m^5}(1-\cos\theta)(9-2(1+\cos\theta))$$

Por lo tanto, de acuerdo con la ecuación (IV.20) la sección eficaz será

$$\boxed{\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{r_0^2}{162}\,\frac{\omega_1}{m}\left(4+5\operatorname{cosec}^2\frac{\theta}{2}\right)} \qquad \text{(IV.22)}$$

EFECTO COMPTON, ENERGIA DEL FOTON INCIDENTE MUCHO MENOR QUE LA ENERGIA EN REPOSO DE LA PARTICULA.- Dado que en este caso $\omega_1 << m$, entonces será $\omega_2 \simeq \omega_1$ o sea $K_2 = K_1$, es decir, tendremos dispersión elástica de fotones; entonces calcularemos las expresiones F_{ij} conservando solamente la potencia más baja en ω_1, será por tanto

$$F_{11} = \frac{1}{4K_1^2}\,Tr\Big[\left(\epsilon_1 k_1 \epsilon_2\, g_\mu^\nu - \frac{4}{3}(k_{1\mu}\epsilon_1 - k_1\epsilon_{1\mu})\epsilon_2^\nu\right)\Lambda_+(p_1)\,\Delta_\nu^\lambda(p_1)$$
$$\times\left(\epsilon_2 k_1 \epsilon_1\, g_\lambda^\sigma - \frac{4}{3}(k_1^\sigma\epsilon_1 - k_1\epsilon_1^\sigma)\epsilon_{2\lambda}\right)\Lambda_+(p_1)\,\Delta_\sigma^\mu(p_1)\Big]$$

$$F_{12} = \frac{1}{4K_1^2}\,Tr\Big[\left(\epsilon_1 k_1 \epsilon_2\, g_\mu^\nu - \frac{4}{3}(k_{1\mu}\epsilon_1 - k_1\epsilon_{1\mu})\epsilon_2^\nu\right)\Lambda_+(p_1)\,\Delta_\nu^\lambda(p_1)$$
$$\times\left(\epsilon_1 k_2 \epsilon_2\, g_\lambda^\sigma - \frac{4}{3}(k_2^\sigma\epsilon_2 - k_2\epsilon_2^\sigma)\epsilon_{1\lambda}\right)\Lambda_+(p_1)\,\Delta_\nu^\lambda(p_1)\Big]$$

Para el cálculo de las trazas es conveniente agrupar términos de F_{11} y F_{12}, por ejemplo:

$$T_{11}(F_{11}) + T_{11}(F_{12}) = Tr\left(\epsilon_1 k_1 \epsilon_2\,\Delta_\mu^\lambda\,\Lambda_+\,(\epsilon_2 k_1 \epsilon_1 + \epsilon_1 k_2 \epsilon_2)\,\Lambda_+\,\Delta_\lambda^\mu\right)$$

tendremos por otra parte

$$\Lambda_+(p_1)(\epsilon_2 k_1 \epsilon_1 + \epsilon_1 k_2 \epsilon_2)\Lambda_+(p_1) = \frac{1}{4m^2}(p_1+m)(\epsilon_2 k_1\epsilon_1 + \epsilon_1 k_2 \epsilon_2)(p_1+m)$$

$$= -\frac{1}{4m^2}\left(\epsilon_2\epsilon_1(p_1+m)2K_1 + \epsilon_1\epsilon_2(p_1+m)2K_2\right)$$

$$= -\frac{K_1}{2m^2}\left(\epsilon_2\epsilon_1(p_1+m) + \epsilon_1\epsilon_2(p_1+m)\right) = -\frac{K_1}{m}\,2e_{12}\,\Lambda_+(p_1)$$

Entonces será

$$T_{11}(F_{11}) + T_{11}(F_{12}) = -\frac{2K_1}{m}\,e_{12}\,Tr\left(\epsilon_1 k_1 \epsilon_2\,\Delta_\mu^\lambda\Delta_\lambda^\mu\Lambda_+\right) = -\frac{4K_1 e_{12}}{m}\,Tr(\epsilon_1 k_1 \epsilon_2 \ldots)$$

$$= -\frac{2K_1 e_{12}}{m^2}\,Tr(\epsilon_1 k_1 \epsilon_2 p_1) = \frac{8K_1^2 e_{12}^2}{m^2} \qquad \text{(IV.23)}$$

En forma análoga tendremos

$$T_{12}(F_{11})+T_{12}(F_{12}) = -\frac{32}{9m^2}K_1^2 e_{12}^2 \qquad \text{(IV.24)}$$

$$T_{21}(F_{11})+T_{21}(F_{12}) = -\frac{32}{9m^2}K_1^2 e_{12}^2 \qquad \text{(IV.25)}$$

$$T_{22}(F_{11})+T_{22}(F_{12}) = 5\frac{32}{81m^2}K_1^2 e_{12}^2 + 3\frac{32}{81m^2}K_1^2 \qquad \text{(IV.26)}$$

Sumando (IV.23, 24, 25, 26) tendremos

$$F_{11}+F_{12} = \frac{1}{4}\sum T_{ij}(F_{11})+\frac{1}{4}\sum T_{ij}(F_{12}) = \frac{1}{81m^2}(58e_{12}^2+24)$$

Haciendo las sustituciones (IV.7), se obtiene

$$F_{22}+F_{21} = F_{11}+F_{12}$$

De modo que

$$\frac{1}{4}\sum_{sp.} M^+M = \frac{1}{81m^2}(29e_{12}^2+12)$$

Si se hace la suma y promedio sobre las polarizaciones se tiene

$$\frac{1}{8}\sum_{pol.}\sum_{sp.} M^+M = \frac{1}{81m^2}\left(\frac{29}{2}(1+\cos^2\theta)+24\right) \qquad \text{(IV.27)}$$

De acuerdo con la ecuación (IV.20) y la(IV.27) la sección eficaz de dispersión de fotones de baja energía será

$$\boxed{\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{r_0^2}{162}\left[48+29(1+\cos^2\theta)\right]} \qquad \text{(IV.28)}$$

EFECTO COMPTON, DISCUSION DE RESULTADOS.- Los resultados que hemos obtenido para la dispersión de fotones de muy alta energía son

Caso A) $$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{r_0^2}{81}\left(\frac{\omega_1}{m}\right)^2 R^{-5}\left[5+12R-32R^2+12R^3+5R^4\right] \qquad \text{(IV.21)}$$

Caso B) $$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{r_0^2}{162}\frac{\omega_1}{m}\left[4+5\,\mathrm{cosec}^2\frac{\theta}{2}\right] \qquad \text{(IV.22)}$$

Los resultados correspondientes obtenidos por Mathews[12] usando el formalismo de Gupta son los siguientes

Caso A) $$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{4}{81}r_0^2\left(\frac{\omega_1}{m}\right)^4 R^{-5}(R^2+1)$$

Caso B) $\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{r_0^2}{162} \frac{\omega_1}{m} \left[9 \operatorname{cosec}^2 \frac{\theta}{2} + 9 \operatorname{cosec}^4 \frac{\theta}{2} + \operatorname{cosec}^6 \frac{\theta}{2} \right]$

En el caso A la diferencia en el orden de magnitud de los dos resultados es muy notoria, la sección eficaz calculada por Mathews crece mucho más rápidamente con la energía del fotón incidente. En el caso B el orden de magnitud es el mismo.

Esta diferencia se puede explicar de la siguiente manera: en el propagador que usamos en nuestro formalismo figura el operador de proyección, en el cual los términos que dependen de k_1 o k_2 aparecen divididos por potencias de ω_1, de tal modo que el orden de magnitud del operador es $\sim \omega_1$. En cambio, en el formalismo de Rarita-Schwinger el propagador contiene un operador que se reduce al de proyección cuando la partícula es libre, pero en el cual los términos que dependen de k_1 o k_2 aparecen divididos por m^2 de tal modo que el orden de magnitud de dicho operador es $\sim \omega_1^2$.

En el caso B, que el orden de magnitud sea el mismo se puede explicar observando que los T_{ij} que contribuyen a la sección eficaz son justamente los provenientes de aquellos términos del operador de proyección que no dependen de ω_1.

La diferencia fundamental que se evidencia en el caso A permitirá eventualmente, en el caso de que se obtengan datos experimentales, decidir cuál de los dos formalismos es el más adecuado para la descripción de las propiedades de las partículas de spin 3/2.

AGRADECIMIENTO.- Agradezco al Dr. Carlos G. Bollini por haberme sugerido la realización de este trabajo y por la ayuda que me ha prestado para su ejecución.

BIBLIOGRAFIA

(1) P.A.M.Dirac, Proc.Roy.Soc. (London) A155, 447 (1936).

(2) M.Fierz, Helv. Phys. Acta 12, 3 (1939).

(3) W.Pauli y M.Fierz, Helv. Phys. Acta 12, 297 (1939).

(4) S.N.Gupta, Phys. Rev. 95, 1334 (1954).

(5) W.Rarita y J.Schwinger, Phys. Rev. 60, 61 (1941).

(6) P.A.Moldauer y K.M.Case, Phys. Rev. 102, 279 (1956).

(7) E.S.Fradkin, Soviet Physics, JETP, 5, 1203 (1957).

(8) C.G.Bollini, Nuovo Cimento, VII, 39 (1958).

(9) C.G.Bollini, comunicación personal.

(10) Behrends y Fronsdal, Phys. Rev. 106, 345 (1957).

(11) F.J.Belinfante, Phys. Rev. 92, 997 (1953).

(12) J.Mathews, Phys. Rev. 102, 270 (1956).

(13) H.Umezawa, Quantum Field Theory.

(14) R.P.Feynman, Phys. Rev. 76, 749 (1949).

(15) R.P.Feynman, Phys. Rev. 76, 769 (1949).

(16) H.A.Bethe, S.S.Schweber y F. de Hoffmann, Mesons and Fields.