Sobre una generalización de los operadores potenciales de tipo Riemann-Liouville

Panzone, Rafael

1958

Tesis presentada para obtener el grado de Doctor en Ciencias Matemáticas de la Universidad de Buenos Aires

Resumen de la tesis presentada a la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales de Buenos Aires para optar al título de Dr. en Ciencias Matemáticas.

SOBRE UNA GENERALIZACION DE LOS OPERADORES POTENCIALES DE TIPO RIEMANN-LIOUVILLE.

Rafael Panzone.

1958

~~RESUMEN~~

I N T R O D U C C I Ó N

Una parte de la tesis, la más interesante, está prácticamente concentrada en los párrafos 1.6 a 2.10. Ella se basa esencialmente en un trabajo en el que colaboramos con el Dr. Mischa Cotlar y que está por aparecer en la Revista Matemática Cuyana, y que es la continuación "natural" del artículo [1], en el cuál Cotlar unifica las teorías ergódica y de la transformada de Hilbert.

Si decimos que un operador es de tipo (p,q) cuando $\|Tf\|_q \leq c \cdot \|f\|_p$ y de semitipo (p,q) si $D(Tf,\lambda) =$ medida $\{x;\ |Tf| > \lambda\} \leq \left(\frac{c\,\|f\|_p}{\lambda}\right)^q$ con c independiente de f, $\lambda > 0$, sabemos que para $\left(\frac{1}{p},\frac{1}{q}\right) \in \Delta = \{(x,y);\ x \geq y,\ 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1\}$ = triángulo contenido en el cuadrado unitario del plano, vale el teorema de Marcinkiewicz: T de semitipo (p_1,q_1), (p_2, q_2) implica T de tipo (p,q), en el caso que $\left(\frac{1}{p_i},\frac{1}{q_i}\right) \in \Delta$ y $\left(\frac{1}{p},\frac{1}{q}\right) \in$ interior del segmento que une estos puntos. De 1.6 a 1.10 lo que se hace es destacar una nueva propiedad de los operadores funcionales, la de ser seudotipo* $(p,r;\alpha)$ más débil que la de ser tipo y se prueba el teorema 1.8: Si $\alpha(p,r,s,q) = \alpha$ (función conocida de la cuaterna) y T es de seudotipo* (p,r,α) y semitipo (s,q) entonces T es de semitipo (p,r), siempre que $\left(\frac{1}{p},\frac{1}{2}\right)$ y $\left(\frac{1}{s},\frac{1}{q}\right) \in \Delta$, (lo que por el T de Marcinkiewicz implicará el tipo en los puntos interiores del segmento que los une).

Se define a continuación otra propiedad, la de ser seudotipo $(p,r;\alpha)$, más manejable que el seudotipo* probándose el teorema 1.9: bajo ciertas condiciones impuestas a p y α, T de seudotipo (p,r,α) implica T de seudotipo* (p,r,α).

Ya en el capítulo II, el objetivo es encontrar pares (p,q) donde el operador $\int_{E^n} f(t)\,K_{n\gamma k}(x-t)\,dt$ sea de tipo o semitipo (p,q). Ese operador que llamaremos $H_{n\gamma k} f = f * K_{n\gamma k}$ está definido por la convolución de f con cierto núcleo, el cuál se obtiene por la expresión:

$$K_{n\gamma k}(x) = \sum_{i=-\infty}^{i=+\infty} 2^{(\gamma-n)i} \cdot K(2^{-i}x)$$

y donde K es una función que cumple ciertas condiciones.

Esas condiciones son tales que la función definida por $K(z) = |z|$ si $1 < |z| \leq 2$ y 0 en caso contrario, es admisible; luego en este caso $K_{n\gamma n}(z) = |z|^{\gamma-n}$ ... $H_{n\gamma n}$ cuando $0 < \gamma < n$ es el operador potencial ordinario.

En realidad aquí usamos condiciones más restrictivas que las usadas en el tra bajo mencionado y los núcleos que aparecen no son esencialmente distintos a los definidos por $|z|^{\gamma-n}$. El hecho es que concentramos nuestra atención, no tanto en la generalidad de K como en el estudio de los casos cuando x y t pertenecen a subespacios distintos de un mismo espacio euclídeo. Así a expensas de K recogemos comodamente una serie de resultados, de cuya historia no nos ocupamos, pues se hace en el trabajo citado.

$$H_{n\gamma k}f(x) = \int_{E^n} f(t)\, K_{n\gamma k}(x-t)\, dt$$ debe entenderse así:

Sea E^n el espacio en el cual se integra y que contiene al soporte de f, o sea $t \in E^n$, E^k el espacio donde varía la x y que puede coincidir con E^n, contenerlo o estar contenido según que $k = n$, $k > n$, $k < n$ respectivamente; $K_{n\gamma k}(z)$ entonces tendrá su soporte en $E^{\sup(k,n)}$ así que los subíndices del núcleo dicen: n = dimensión del espacio de integración, γ = valor que caracteriza a $K_{n\gamma k}$ según la definición de este último y k la dimensión del espacio que contiene al soporte de la transformada.

Entonces se prueba el teorema siguiente dado por la proposición 1 de 2.10:

Sean n,k naturales, E^n, E^k espacios euclídeos tales que $E^{\inf(n,k)} \subset E^{\sup(n,k)}$, (uno es subespacio del otro), $K_{n\gamma k}$ con soporte en $E^{\sup(n,k)}$, $0 < \gamma < \sup(n,k)$,

$$H_{n\gamma k}f(x) = f * K_{n\gamma k} = \int_{E^n} f(t)\, K_{n\gamma k}(x-t)\, dt, \ t \in E^n, x \in E^k.$$

Entonces $H_{n\gamma k}$ es un operador de tipo (p,q) con $\frac{1}{p} - \frac{k}{n}\frac{1}{q} = \frac{\gamma}{n}$ (1) si $\left(\frac{1}{p}, \frac{1}{q}\right) \in$ interior de Δ y de semitipo $\left(1, \frac{k}{n-\gamma}\right)$ si $\frac{k}{n-\gamma} > 1$.

(La última condición equivale a que la recta (1) corte el lado $\{1\} \times [0,1]$ del cuadrado unitario Q).

La marcha de la demostración es la siguiente:

Se prueba primero el caso $k = n$ y es aquí donde se usa el teorema 1.9; este caso se demuestra en forma distinta a la conocida, figurando entre las ideas y métodos que conforman la prueba , entre otros, algunos de los que ya aparecieron en [1]. Se pasa luego al caso $k<n$ por reducción de éste al anterior siguiendo los moldes de un artificio ya usado en [8], por fin se llega al caso $k>n$, el cual se reduce al inmediato precedente.

Se tienen ahora todos los elementos para considerar el caso cuando $E^n \cap E^k \neq E^{\inf(n,k)}$, ya que hasta ahora esa intersección era ó E^n, ó E^k según que $n\leq k$ ó $k\leq n$ respectivamente.

Obtenemos así el teorema 2.10:

Sean E^n, E^k, E^t subespacios de E^{n+k-t} de manera que

$$E^n \cap E^k = E^t, \quad E^{n+k-t} = E^{k-t} \times E^t \times E^{n-t} \qquad \text{con}$$

$0\leq t\leq \inf(n,k)$. Sea H el operador definido por

$$\int_{E^n} f(y) K_{n\gamma k}(x-y)\, dy = H f(x) \qquad \text{con } x\in E^k, y\in E^n \text{ donde,}$$

$$K_{n\gamma k}(z) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} 2^{(\gamma-n)i} K(z\, 2^{-i})$$ y γ es tal que si $t<n$ entonces $0<\gamma<n$ y si $t=n$ entonces $0<\gamma<k$. Luego H es de tipo (p,q) con $\frac{1}{p}-\frac{k}{n}\frac{1}{q}=\frac{\gamma}{n}$, $\frac{n}{\gamma}>p>1$, y de semitipo $\left(1, \frac{k}{n-\gamma}\right)$, si $\frac{k}{n-\gamma}>1$.

Otro artículo en colaboración con M. Cotlar y por aparecer en el Acta Mathematica trata problemas en relación con los citados, aunque con el objetivo fundamental de generalizar un teorema de [1].

Se considera todavía en el capítulo II, una transformación de la forma: $$\int_{E^n} f(\sigma_t P) K_{n\gamma n}(t)\, dt = L_{n\gamma} f(P)$$
donde $t\in E^n$, $K_{n\gamma n}(t)$ es el núcleo ya definido con soporte en E^n, P varíe en un espacio de medida general $\Omega = \{\mathcal{B}, \mu\}$ y $\{\sigma_t\}$ es un grupo de transformaciones: $\sigma_t\cdot\sigma_s P = \sigma_s\cdot\sigma_t P = \sigma_{s+t}P$, $\sigma_0 P = P$

A este caso se le llama ergódico y se prueba el teorema 2.14 que dice que bajo ciertas condiciones impuestas al grupo, $L_{n\gamma}$ es un operador de tipo (p,q) y semitipo $\left(1, \frac{n}{n-\gamma}\right)$ con $\frac{1}{p}-\frac{1}{q}=\frac{\gamma}{n}$, $1<p<\frac{n}{\gamma}$.

O sea, se obtiene el mismo resultado logrado para $P = x\in E^n$, y $\sigma_z P = x-z$.

En 2.15 se dan unos ejemplos que echan cierta luz al grado en el cual las fuertes condiciones impuestas a $\{\sigma_t\}$ son esenciales.

Completan el capítulo II los teoremas de 2.11 sobre ciertos operadores convolución, de estos un caso particular puede ser usado para probar en forma muy breve que el potencial ordinario: $\int_{E^n} f(t)\cdot|x-t|^{\gamma-n}dt$ es de tipo (p,q) con $\frac{1}{p}-\frac{1}{q}=\frac{\gamma}{n}, 1<p<n/\gamma$, por reducción del caso $n>1$ al caso $n=1$, si este se supone conocido. De esa manera lo hace Du Plessis en [9], aunque con ayuda de ese teorema nada puede decirse del caso $p=1$, del cual un resultado de Zygmund afirma que allí es de semitipo $\left(1,\frac{n}{n-\gamma}\right)$.

El teorema en cuestión dice:

Sea $K_{n_i\gamma_i k_i}$ un núcleo con dominio $E^{\sup(k_i,n_i)}$, $i=1,2,\dots,N$.
La función $L(x_1,\dots,x_N)=\prod_{i=1}^{N} K_{n_i\gamma_i k_i}(x_i)$ tiene dominio $\prod^{n} E^{\sup(n_i,k_i)}$

La transformación $Hf(z_1,\dots,z_N)=\int_{E^{n_1}}\cdots\int_{E^{n_N}} f(t_1\cdots t_N)\prod_{i=1}^{N} K_{n_i\gamma_i k_i}(z_i-t_i)dt_i$ donde $t_i\in E^{n_i}$, $z_i\in E^{k_i}$, $(t_1,\dots,t_N)\in\prod_{i=1}^{N} E^{n_i}$, $(z_1\dots z_N)\in\prod E^{k_i}$ transforme funciones de dominio $\prod E^{n_i}$ en fs. de dominio $\prod E^{k_i}$ ambos incluídos en $E^{\sup(n_i,k_i)}$.
Si para todo i, $\left(\frac{1}{p},\frac{1}{q}\right)$ satisface a $\frac{1}{p}-\frac{k_i}{n_i}\frac{1}{q}=\frac{\gamma_i}{n_i}$, $p>1$, $q<\infty$, entonces H es de tipo (p,q).

Completan el capítulo I una breve demostración de la fórmula espectral: $\int_X |h|^r d\mu = r\int_0^\infty \lambda^{r-1} D(|h|,\lambda)\,d\lambda$ y un teorema de interpolación que dice precisamente:

Sea T un operador semilineal $\left(|T(\lambda_1 f_1+\lambda_2 f_2)|\leq |\lambda_1 Tf_1(x)|+|\lambda_2 Tf_2(x)|\right)$ de semitipo(p_i, q_i), $i=1,2$ donde $\left(\frac{1}{p_i},\frac{1}{q_i}\right)\in Q'=$ cuadrado unitario — — lados superior e inferior, entonces T es de semitipo (p,q), para $\left(\frac{1}{p},\frac{1}{q}\right)\in$ segmentos que une $\left(\frac{1}{p_i},\frac{1}{q_i}\right)$.

Como la propiedad de ser tipo (p,q) implica la de semitipo (p,q) en el caso que $\left(\frac{1}{p_i},\frac{1}{q_i}\right)\in Q'\cap\Delta$, $i=1,2$, el resultado es una consecuencia del teorema de Marcinkiewicz, aunque éste nada dice que sucede fuera de Δ y su extensión a todo Q es problema abierto.

El capítulo III y final, contiene una extensión de (p,p) a (p,r) del"método del operador maximal"., tal como aparece en [1]. El método culmina en un teorema del cual se usa lo siguiente:

Sea $\{H_N\}$ una sucesión de operadores lineales con ciertas propiedades y sea Mf el operador maximal definido por:

$$Mf(P)=\sup_N |H_N f(P)|$$

si M es de semitipo (p,r) en $D_p=$ conjunto denso del L^p, y $\{H_N f\}$ converge puntualmente (en casi todo punto) sobre las funciones de D_p entonces $\{H_N f\}$ converge puntualmente en todo el L^p.

La demostración es la misma que aparece en el artículo citado, y se usa este resultado para el caso: $H_N(z)=\varphi_N(z).K_{n\gamma K}(z)$ donde $\varphi_N(z)$ es la función característica de la esfera de radio N, pues estos H_N y su operador maximal verifican la tesis. Así concluímos que: Para $1\leq p< n/\gamma$, $\frac{n-K}{\gamma}<p$,
$$\int_{E^n} f(t)\,\varphi_N(x-t)\,K_{n\gamma K}(x-t)\,dt=\int_{E^n} f(t)\sum_{-N}^{N} K\left((x-t)\,2^{-i}\right).2^{(\gamma-n)i}\,dt,$$
converge en casi todo punto a: $\int_{E^n} f(t)\,K_{n\gamma K}(x-t)\,dt$.

El resultado en el estado actual de la exposición, nos parece realmente interesante cuando $p=1$.

En los párrafos 3.7 a 3.13 se estudia el siguiente problema: ¿Cómo es el conjunto de los puntos en los cuales $H^f_{n\gamma K}$ es finita? Decimos que un conjunto $S\subset E^n$ es de β-capacidad positiva si y sólo si existe una distribución de probabilidad μ concentrada en S tal que $\sup_{t\in E^n}\int_{E^n}\frac{d\mu(x)}{|x-t|^{n-\beta}}<\infty$. Si el supremo es infinito para toda μ en S diremos que la capacidad de S es cero.

Podemos así probar el siguiente teorema:

Sea $f\in L^p$, $0<p\gamma<n$, $F(x)=\int_{E^n} f(y).|x-y|^{\gamma-n}dy$, $x\in E^K$, $y\in E^n$ $K\lesseqgtr n$ y el de dimensión menor subespacio del otro.

Si $1\leq p\leq 2$ entonces $F(x)$ es finita en todas partes excepto posiblemente en un conjunto de $E^{\inf(n,K)}$ de $(\inf(n,K)-\gamma p)$-capacidad nula.

Si $2<p<\infty$ entonces $F(x)$ es finita en todas partes excepto posiblemente en un conjunto de $E^{\inf(n,K)}$ de $(\inf(n,K)-\Delta.\gamma.p)$-capacidad nula, para todo Δ tal que $0<\Delta<1$.

El caso $k=n$ fué probado en [9] y aquí nos ocupamos del $k<n$ y $k>n$. El primero por reducción al $k=n$, y el segundo por reducción al $k<n$.

Por fin, en la pag. 51 se dá un teorema que es la generalización del precedente cuando: $E^n\cap E^K\neq E^{\inf(n,K)}$.

Terminamos el capítulo con cuatro teoremas que citamos a continuación vinculados a las condiciones de Lipschitz, todos fueron demostrados para el caso de la transformada de Riemann-Liouville por Hardy y Littlewood en [10]. Cuando $K=n=1$ los teoremas siguen valiendo y los dos primeros aparecen ya en [9]; aquí sólo modificamos la demostración del teorema 1.

Los dos últimos se demuestran análogamente a, como lo hacen Hardy y Littlewood con las alteraciones inherentes al cambio de dimensión. Supongamos vb. en estos resultados que: $K_{n\gamma K}(z) = |z|^{\gamma-n}$.

Se dice que $f \in Lip\,\beta,\ 0<\beta$, f de dominio E^n, si para todo x y todo h es $|f(x+h)-f(x)| \leq k\,|h|^{\beta}$ con k indep. de h y x y que pertenece a $lip\,\beta$ si $|f(x+h)-f(x)| = o(|h|^{\beta})$.

Teorema 1. Si $0<\gamma<1$, $f \in L^1 \cap Lip\,\beta\,(E^n),\ 0<\beta$ entonces $H_{n\gamma K} f \in Lip\,1(E^n)$.

Teorema 2. Si $q>1$, $f \in L^q$, $1+\frac{n}{q} > \gamma > \frac{n}{q}$ es $H_{n\gamma n} f \in lip(\gamma - \frac{n}{q})$.

Teorema 3. Sea $p \geqslant 1$, $0<\gamma<1$, $f \in L^p(E^n)$, T= esfera centrada en el origen, o todo el espacio, entonces:

$$\int_T |H f(x) - H f(x-h)|^p dx = O(|h|^{p\gamma}).$$

Teorema 4. Sea $p \geqslant 1$, $k \geqslant 0$, $\gamma>0$, $k+\gamma<1$, $f \in L^p$, T= esfera o todo el espacio, $\int_T |f(x) - f(x-h)|^p dx = O(|h|^{pk})$, entonces:

$$\int_T |H_{n\gamma n} f(x) - H_{n\gamma n} f(x-h)|^p dx = O(|h|^{p(k+\gamma)})$$

(En el teorema 4 puede reemplazarse o por O).

Finalizamos esta introducción con nuestro profundo agradecimiento al Dr. Mischa Cotlar por su aliento y dirección en la realización del presente trabajo.

Agosto de 1958 R. P.

SOBRE UNA GENERALIZACION DE LOS OPERADORES POTENCIALES DE TIPO RIEMANN-LIOUVILLE.

Rafael Panzone

1958.

Tesis presentada a la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales de Buenos Aires para optar al título de Dr. en Ciencias Matemáticas.

CAPITULO 1

En esta capitulo trataremos operadores generales y nos detendremos en aquellos que poseen ciertas propiedades como ser : tipo ,semitipo ,seudotipo,etc. Algunos resultados seran luego usados en los capitulos siguientes.

1.1. Salvo especificacion en contrario las funciones que aparezcan tendran por dominio un espacio abstracto en el cual hay definido un anillo de subconjuntos(los conjuntos medibles) y una medida sobre sus elementos.(Usamos la nomenclatura de 5).

El rango de esas funciones sera el cuerpo real o el complejo.

Un operador se dira lineal si dadas f(x),g(x),y los elementos del cuerpo en cuestion verifica

y semilineal si

Asi,todo operador lineal es semilineal.Un operador semilineal se dira de tipo (p,r) si su dominio es por lo menos el espacio L^p,de las funciones p-integrables ,su rango el de las funciones medibles y es tal que para toda f de su dominio

con M independiente de f. Aqui

Al minimo M con esa propiedad lo designamos con

Siempre trataremos los casos ;podemos representar estos operadores en el cuadrado del plano asignandole como representante el punto

Llamaremos el triangulo limitado por la diagonal principal el eje de absoisas y el segmento

En 1926,(ver 2),Marcel Riesz demostro el siguiente

Teorema de convexidad. Sea T un operador lineal de tipo (p ,q) y (p ,q) con dominio funciones a variable real o compleja y (p ,q) tal que

si estan en entonces T es de tipo (p,) con

El teorema asi expresado no es cierto si los puntos representativos estan en , aunque vale si operamos sobre la clase de las funciones medibles a valores complejos.Tenemos entonces el

Teorema de convexidad de Riesz-Thorin. Sea T un operador semilineal de tipo (p ,q), (p ,q) definido sobre funciones a valores complejos y (p ,q) tal que si entonces T es tipo con norma

Esta version es tomada de 3 . En 4 se generaliza este teorema

1.2. Llamaremos ~~Del~~ E(g,) al conjunto de los puntos donde g y

D(g,) E(g,) , esta ultima sera denominada distribucion de g.

Consideraremos siempre . Se verifican facilmente las propiedades

1) D(g,) es no creciente en

2) Si en casi todo t, entonces en cada

3) Si en casi todo t, m,n, ctes. entonces

Dada f(t) definimos

representara siempre a la funcion caracteristica del conjunto F

osea, y 0 en caso cotrrio .

Tambien en general trabajaremos con espacios de medida -finita,

Lema. Si es un espacio de medida, el semieje real positivo

r 0, entonces vale la formula espectral

Demostracion.

1.3. Por definicion un operador es de ~~de~~ semitipo(p,r) si existe M independiente de f y tal que:

Al minimo M ue satisface esas desigualdades lo llamaremos

seminorma de T ,(p,r).

De la definicion de obtenemos la desigualdad de Tchebichev

y de esta inmediatamente la prposicion

si un operador es de tipo (p,r) entonces es de semitipo (p,r) y

La condicion de ser de semitipo esta ligada a la de tipo sobre conjuntos de medida finita, como expresa la equivalencia siguiente:

Convenimos, semitipo tipo

Teorema. T es de semitipo (p,q) si y solo si para todo

existe tal que para todo y toda f se tiene

tambien equivale a que exista un en esas condiciones .

Sea T semilineal definido en funciones reales o complejas, de semitipo $(p_0, q_0), (p_1, q_1)$ con

Si entonces existe K(t) independiente de f tal que ; dicho de otra manera, si T es de semitipo P_0, P_1 con entonces T es de semitipo P para todo P en el segmento que une P_0 con P_1.

K es acotado uniformemente si

t .

Para su demostracion puede verse 6 .

La restriccion $q_0 \quad q_1$ es esencial como muestra el ejemplo siguiente. Antes observemos que para todo operador semilineal, si es de semitipo o, tipo para funciones de norma uno, lo es para toda funcion y sin cambiar semánorma o norma. En efecto, veamoslo en el caso de semitipo. Toda funcion de L^p puede ponerse como donde g es de norma uno. Luego entonces si

resulta

Veamos el ejemplo. Sea T el operador definido en funciones de dominio y como :

Ti es semilineal y su funcion de distribucion :

Supongamos , luego , entonces T es de semitipo (1,2). De la desigualdad de Hölder resulta para , entonces por la observacion precedente es: y T es de semitipo (p,2) para todo p .

Como f(x) para f de norma no es 2-integrable, resulta que no es de tipo para ningun (p,2), .

1.3. Queda abierto el problema de si existe una extension del teorema de Marcinkiewicz a todo . De todas maneras el ejemplo anterior nos asegura que la restriccion subsistira.

<u>**Teorema.**</u> Sea T un operador de semitipo sobre funciones de rango complejo y donde

Si segmento que une P_0 P_1 entonces T es semitipo P.

(O sea que el problema citado tiene respuesta afirmativa si nos limitamos a interpolar semitipos en casi todo .)

1.6. En lo que resta del capitulo consideraremos operadores definidos sobre las funciones simples (las que toman un numero finito de valores no nulos y son de soprte acotado de medida finita) de un espacio euclideo, E^n, con valores funcionales de otro espacio euclideo, E^k. Indicaremos el soporte de la funcion f como

y con para los t en el soporte de f.

Convendremos en designar por al operador maximal de Hardy-Littlewood, definido por

donde Q(t) es un cubo conteniendo el punto t.

Como se sabe este operador es de semitipo (1,1) y de tipo (p,p) para

.

Tambien sera utilizado en lo suvesivo el siguiente

<u>Lema de cubrimientos</u>. Si S E^n es un conjunto acotado y si a cada punto x S esta asignado un cubo n-dimensional Q(x) con centro en x y lados paralelos a los ejes ,entonces es posible seleccuonar una subfamilia finita de modo tal que:

1)Los Q_i cubren S,es decir

2)Todo punto del espacio pertenece a losumo a 4^n cubos Q_i.

3) Los cubos $_i$ (cubo con el mismo centro x_i y lado igual a, del lado de Q_i) son disjuntos dos a dos.

4) Existe un sistema de conjuntos medibles E_i,i 1,2,...,n,tales que

y

Las demostraciones de los teoremas enunciados en este parrafo pueden verse en 1 articulos 3 y 1 respectivamente.

1.7. A cada terna (E,f,) donde E es un subconjunto de E^n,f una funcion simple , un numero positivo ,asociaremos una familia de funciones medibles

Una funcion pertenece a si y solo si

1)

2)

3)

donde es una cte. fija independiente de f,h,E y C es una cte.independiente de f,h,E,y .

Sea .Diremos que el operador que transforma funciones de dominio T^n en funciones de dominio T^k es de seudotipo* $(p,r;\lambda)$ si existe tal que para toda f es posible encontrar φ,F,h tales que

a)

b)

c)

d)

con M y N ctes. independientes de f.

De la definicion resulta que todo operador de (p,r) es de seudotipo* $(p,r;\lambda)$ para todo , basta hacer

Demostraremos a continuacion unos lemas, los cuales seran usados para probar una generalizacion del teorema de M. Riesz.

<u>Lema 1.</u> Sea Tf un operador semilineal (ver 1.6) tal que para toda f con vale

Entonces tambien para toda f en esas condiciones y todo vale :

Demostracion. Basta modificar la f en un conjunto muy pequeño de su soporte haciendo tomar ala modificada, f', el valor en P y fuera de P hacer f f'.

Asi resulta tal que

Como es λ (ver 1.1),

si aplicamos (1) a los dos ultimos sumandos y hacemos , resulta y obtenemos la tesis.

<u>Lema 2.</u> Si Tf es semilineal y verifica la condicion (1) y si T es de semitipo (s,q) con

entonces es de semitipo (p,r).

(la hipotesis del lema dice que pertenecen a siendo angulo entre y el eje de las abscisas y el angulo entre y dicho eje

y T es de semitipo en).

1.8. Veamos ahora la generalizacion mencionada en 1.7.

Teorema. Sea T semilineal, de seudotipo*(p,r;) y de semitipo(s,q)

con

Entonces Tf es de semitipo (p,r) . (Luego por el teorema de Marcinkiewicz-Zygmund (1.4) es de tipo ~~(p,r)~~ R para todo punto P interior al segmento P P). La condicion dice que lo

En realidad no se usara este teorema sino parte del siguiente corolario :

Sea T semilineal de seudotipo*(1,r;) donde y tal que T es de semitipo (s,q) con

Entonces T es de semitipo (1,r)(1,r).

(La diferencia con caso del teorema anterior esta en que cuando ,lo que equivale a ,desaparece la condicion 3) del seudotipo* (1.7))

Demostracion. Basta considerar el caso

De (1) teorema anterior tenemos

Pero y como

resulta pues

de donde ;el resto sigue igual.

Nota. Observese que en el teorema no se uso la condicion sobre el conjunto Y de la definicion de seudotipo*, que recien aparece en el corolario.

1.9. Diremos que un cubo q es un soporte cubico de la funcion elemental (simple) f, si f(x) para

A cada par (q,f) asignaremos una familia de funciones W(q,f), definida asi: h(x) pertenece a W(q,f) si y solo si

1) h(x) es nula en

2) donde C es una cte. independiente de q y f .

3) Diremos que el operador T que actua de ^{n} a S^k es de seudotipo (p,r;) si para toda f elemental y para todo soporte cubico q de f, existe una h y un cjto. tales que

Por comodidad escribiremos a veces la desigualdad precedente como o bien, si queremos agregar la dimension de los espacios dominio de f y

Si un operador es de seudotipo (p,r;r) diremos simplemente que es seudotipo (p,r), o bien, de seudotipo P

<u>Teorema.</u> Si y Tf es de seudotipo (1,r;) entonces Tf es seudotipo*(1,r;).

Demostracion.

Teorema. Sea , T un operador semilineal que actua de T^n en T^k, . Si T es de semitipo (c,q) y seudotipo $(1,r;\alpha)$ entonces es de semitipo $(1,r)$ y de tipo P para todo punto P interior al segmento P P

(y las condiciones del teorema equivalen a que).

Demostracion. Por el teorema 1.9, T es de seudotipo* $(1,r;\alpha)$ y por el corolario de 1.8 de semitipo $(1,r)$; y por el teorema de Marcinkiewicz de tipo en todo punto intermedio.

1.11. En el ultimo teorema si en vez de funciones con soporte en cualquier parte del espacio, trataramos fs. con soporte incluido en alguna esfera, obtendriamos el mismo resultado.

Veamos con un ejemplo que el teorema citado exige condicionar el angulo , aunque no sabemos si las hipotesis son excesivas.

CAPITULO II

En este capitulo iniciaremos el tratamiento de una generalizacion de los operadores potenciales ; ademas, seran estudiados sin restriccion de las dimensiones de los espacios , esto es, como operadores definidos sobre funciones de dominio E^n a funciones de dominio E^k , $k \leq n$; se considerara tambien un caso ergodico .

Sin embargo, no saldremos en el capitulo , de un teorema fundamental para esas transformaciones , el que dice que son de tipo en un cierto segmento de q y de semitipo en uno de sus extremos.

2.1. Con la obligacion de formalizar despues, podemos decir que los operadores a estudiar son de la forma :

siendo K(z) una funcion "generadora" del nucleo ; por brevedad diremos que a veces que K es el generador de y la generacion se entendera como dada por (2).

Salta a la vista la semejanza de (1) con el operador potencial ordinario

Designaremos con los puntos del espacio euclideo n-dimensional, ,identificaremos a veces el punto x con el vector Ox, de modo que si escribiremos

designara el conjunto de las funciones medibles f(x) definidas en E^n y tales que

Si escribiremos

2.2. Consideraremos solo dos clases de generadores, las cuales son desde el punto de vista de los metodos empleados algo restringidas, pero cuyo uso hace mas simples las hipotesis y mas comodas las demostraciones.

Damos preferencia a la exhibicion de metodos que a la consecucion de resultados generales.

Diremos que un generador K pertenece ala clase A si y solo si

a) K es medible y

b) K(x) 0 si

c) para todo h

De st estas condiciones se deduce que K $L^1(E^n)$ $L(E^n)$.

K se dira que pertenece a la clase B si y solo si verifica a'),b), y c).

a') K medible y

Entonces A B .

La clase A contiene al generador : K(x) si el cual engendra a nucleo que da origen al operador potencial ordinario:

2.3. Dado el generador K(x) designaremos provisoriamente como J(x) a sobreentendiendo que el operador convolucion es de E^n en E^n y que J ha sido obtenida de por eliminacion de sumandos .

Designaremos con a la transformada de Fourier de f

Las funciones f y g que aparezcan pueden suponerse elementales . Mas adelante nos desembarazaremos de esta restriccion.

Lema 1. Si y K es de la clase A entonces existe una constante independiente de u y N tal que

Demostración.

Lema 2. Si ,k A entonces $f^{\wedge} J$ es un operador de tipo (p,p^{*}) con

Demostracion. Para toda funcion $g(x)$ definida en T^{n} se tiene las siguientes desigualdades de Hausdorff-Young y Hardy-Littlewood - Paley respectivamente .

Nota. C no depende de N.

24.

2.4. Como en realidad se usara entre 0 y n es necesario extender el lema 2 precedente ,y eso se logra en el siguiente :

Lema. Si n, K A entonces f →J es un operador de tipo (p,p^*) con an/n p.

Demostracion.

2.5. En este parrafo el objetivo es demostrar que $f \to \hat{k}$ es de semitipo en cierto punto de Q que varia con .

Si llamamos diagonal principal de Q a $\lambda = Y$ y secundaria a entonces el Lema anterior dice que el operador $f \to \hat{h}$ sobre el espacio de las funciones elementales es de tipo P para todo punto comun a la diagonal secundaria y el interior de .

Veremos a continuacion que es de semitipo R donde

R rectu paralela y por debajo de la diagonal principal.

Entonces, el teorema de Marcinkiewicz nos asegurara que sobre el subespacio mencionado, el operador es de tipo para todo S, en el segmento que une R con $P = (p,p^*)$.

En realidad lo que haremos sera probar que el operador es de seudotipo R y nos remitiremos al teorema 1.10.

__Teorema.__ El operador es de tipo (p,q) y semitipo (1,) donde

para todo (0,n).

Demostracion.

[illegible] $(\lambda - \dot{x})$ [illegible] $= 0$ (x)

$* \; [\text{illegible}] = \int [\text{illegible}]$

[illegible] $\| \leq m^{1/2}$ [illegible] $\lambda - t > [\text{illegible}]$

[illegible] $(\ell - \dot{x}) = 0$

[illegible]

[illegible] $\frac{1}{2T}$ [illegible]

[illegible]

$= c \sum [\text{illegible}] \frac{1}{2T}$ [illegible]

2.6. Hemos visto que en lo que al tipo(p,r) se refiere tiene esa propiedad para los que satisfacen (1) y están por encima de la diagonal secundaria.

Veamos que lo mismo es cierto para los que se encuentran por debajo de ella y satisfacen (1).

Teorema. Sea A. El operador

es de tipo (p,q) y de semitipo

donde

Dem.)

2.7. Es hora ya de desprenderse de la limitacion : f clase de las funciones elementales y N

Logramos así que el teorema 2.6 valga para toda f medible donde J sera reemplazada por

Eliminemos: f es elemental.

Para toda existe una sucesion de funciones elementales tales que para casi todo x, y

Como para cada N es una funcion acotada y nula fuera de un compacto es cualquiera sea

Luego poniendo tendremos

Luego para todo x. Ademas como los teoremas valen para funciones elementales

Luego es una sucesion fundamental de y converge en a una funcion que debe coincidir con en casi todo x.

Por tanto

En el caso de semitipo. si existe tal que en todo punto x ,y luego

entonces

Si f no es positiva basta observar que

Eliminamos N.

Como : resulta que

tiende en forma no decreciente a

para N ,luego

Sabemos que

con C independiente de N,como se ve de las demostraciones precedentes ; 2.3,2.4,2.5,2.6, luego

Como resulta que,

Para el caso de semitipo como

implica ,y el mismo argumento prueba la

onal. Logramos así el Teorema :

Teorema. Sea ... y ... f clase de las funciones medibles.

El operador

es de tipo (p, ...

y semitipo (1, ...).

Nota. ... y una fórmula conocida del análisis resulta que el operador potencial ordinario es de tipo (p,q) si y sólo si existe c independiente de f y g tal que

2.2. Cuando de f ... consideramos su restricción al subespacio ... o sea cuando hacemos ... dimensión de ... escribiremos

Teorema. Sea ... definido en ... n , ...

H ... C ... es un operador de tipo (p,q) donde

(...) interior de y semitipo (1, ...) cuando

Dem.)

2.9. En este parrafo estudiaremos el caso $k \neq n$.

es un operador donde la f tiene dominio T^n, la integracion se efectua en T^n pero x varia en T^k. E^n, esto es, T^n es un ~~operador~~ Subespacio de T^k. Para $k < n$ reduciamos el caso al $k = n$, y ahora, el caso $k > n$ lo reduciremos al $k < n$.

Teorema. Sea $K = A$, definido en T^k, $k > n$, $E^k \supset E^n$; es un operador de tipo (p,q) interior de , y de semitipo (1,).

Dem.)

En este caso se prueba que es un operador de seudotipo $(1,r;\ )$ con

La demostración es del todo análoga a la dada en 2.5.

Ahora es un cubo n-dimensional incluído en E^n y se toma

donde ' es el cubo k-dimensional de E^k con igual ~~lado~~ centro 0 y con igual lado 1 que .

Será entonces

El resto de la demostración es igual a la del teorema 2.5 , reemplazando el conjunto por y teniendo en cuenta que ahora

Recien se utiliza la parte del teorema 1.9. A continuación se puede razonar como en 2.7 y se tiene el teorema.

2,10. Como dado K B es K A ,por ser de y los teoremas 2.7,2.9,2.8, obtenemos la siguiente proposición.

Proposición 1. Sean n,k naturales , E^n, E^k, espacios euclídeos tales que (o sea uno es subespacio del otro) K B generador de dominio ,o. n

Entonces es un operador de tipo (p,q) con si interior de en la topología natural del plano y de semitipo si

Trataremos ahora de ampliar el resultado de esta proposición. Consideraremos el problema : para cuales pares es el operador de tipo (p,q) si E^n y E^k tienen común un espacio de dimensión menor a inf(n,k)? Vale la

Proposición 2. Sea E^n E^k E^t u v 0 t n 0 t k E^k x (u,y) (v,y) ; E^n (u,z) (v,z) 0 n Sea K un generador de la clase B definido en $E^{k-t}\times E^{t}\times E^{n-t}$ (y,u,z) y H la transformación dada por

Entonces H es de tipo (p,q) con 1 p y de semitipo

Reuniendo las proposiciones (1) y (2) tenemos el :

Teorema. Sean T^n, E^k, E^t subespacios de $T^{n\,k\,t}$ de manera que T^n, E^k, E^t, $E^{n\,k\,t}$ = $E^{k\,t}$ x E^t x $E^{n\,t}$ con $0 < t <$ inf(n,k) .

Sea H el operador definido por

con $x \in T^n$, $y \in E^n$

donde K es un generador de la clase **B** definido en $T^{n\,k\,t}$

y [illegible] es tal que si $t < n$ entonces $0 < [illegible] < n$ y si $t \geq n$ entonces $0 < [illegible] < k$.

Luego H es de tipo (p,q) con

y de semitipo (1, [illegible]).

2.11. **Teorema.** Sea $K^i(x_i)$, i=1,2,...,N, un generador de dominio T^{n_i} = x_i [illegible] t_i que pertenece a la clase **B** .

La funcion $L(x_1,x_2,\dots,x_N)$ = [illegible] $K^i(x_i)$ tiene dominio T^{n_i}

y

es una funcion definida en el mismo espacio.

Si [illegible] entonces H es un operador de tipo (p,q)

con

Dem.)

$$J = \int \cdots \int |g(x) \cdots (x)| \, |K^{(1)}(x - \cdots)| \, dx_1 = $$ [illegible]

$= \cdots$ [illegible] $\|_p$ [illegible]

$|(g, \cdots)|$ [illegible]

$$\int \cdots \int_{x_N} [illegible] \int \cdots \int [illegible] \prod_{i=2}^{N} |K^{(i)}(x - \cdots)| \, dx_2 \cdots dx_N$$

$$\int [illegible] |K^{(x_2 - \cdots)}| [illegible] =$$

[illegible]

$\|_p \leq$ [illegible] $)|^p dx_1 \, dx_2$

[illegible]

$|(\cdots)| \leq C$ [illegible]

[illegible] $(x)|^p = C$ [illegible]

[illegible]

K [illegible] $= |(x_1 - \cdots) - (\cdots - x_N)|^{1-N} \leq$

$\leq |x_1 - \cdots|^{\frac{\cdots}{N} - 1} \cdots |\cdots - x_N|^{\frac{\cdots}{N} - 1}$ [illegible]

[illegible] $\frac{\cdots}{N}$ [illegible] $+ \left[\frac{\cdots}{N}\right]$

[illegible]

Teorema. Sea K^{i}_{Ni} $k_{N_i}(x_i)$, $i = 1,2,\ldots,N$, un nucleo con dominio en T y que pertenece a la clase B.

La funcion $L(x_1,\ldots,x_N)$ tiene dominio

La transformacion

y donde

transforma funciones f de dominio en funciones de dominio ambos incluidos en

si para todo i satisface a

entonces H es un operador de tipo(p,q).

2.12. En los parrafos finales se estudiara el que llamaremos caso ergodico de los operadores potenciales.

Sea un espacio de medida. Para cada t T^{n} es dada una transformacion de en de manera tal que en conjunto constituyen un grupo medible ,o sea, que satisfacen a:

1)

2) Si f(P) es una funcion medible en P formando la funcion de dos variables f(P,t) = f(P) definida en esta nueva f funcion es medible en (P,t) respecto la medida producto en (medida de Lebesgue x μ).

Diremos que el grupo,es isonormado si y solo si dado q 1, existen A_q, B_q ,mayores que 0 y tales que para toda f L^q

para casi todo S

Teorema. Un grupo es isonormado si y solo si existen C_1 y C_2 ,mayores que 0, tales que para todo conjunto E salvo medida nula en es

Demostracion. Que la condicion es necesaria se ve al considerar el caso q 1. Veamos que es suficiente .

Basta hacerlo para funciones acotadas pues las no acotadas son limites de una sucesion numerable de aquellas. Si consideramos las sumas de Lebesgue de las integrales en cuestion y si los n son naturales y los m enteros y E_{mn} tenemos

2.13. Se dice que un grupo es isomedible si cada τ es isomedible o sea ,para todo $\tau \in X$, $E \in \mathcal{B}$, el conjunto $\tau E = \{\tau P, P \in E\}$ es tambien medible y $\mu(E) = \mu(\tau E)$.

Así, resulta que todo grupo medible, isomedible, es ~~isonormado~~ isointegrable, o sea tal que

Diremos que un grupo medible es casi isomedible si existe una constante C tal que para todo τ y $E \in \mathcal{B}$ resulta

$$|\mu(E) - \mu(\tau E)| \leq C\,\mu(E)$$

Tenemos asi el teorema :

Si un grupo medible es isonormado entonces es casi isomedible.

Demostracion.

2.14. Teorema. Sea $0 <$, n, K B ,

donde es un grupo medible, isonormado, de transformaciones de en y con t ^{n} ,

Entonces es un operador de tipo (p,q) y semitipo (1,)

con

Dem.)

2.15. Veamos unos ejemplos muy simples.

1) Sea (con un solos punto) ,

De obtenemos si

O sea, no se verifica que es de tipo (p,q), pero tampoco existe

un numero C_2 tal que

faltando así ala segunda parte de la condicion de l teorema 2.12.

2) Sea

si entonces

si su transformada por el nucleo sera :

analogamente luego:

con M independiente de f, como se ve fijando λ y haciendo .

En este caso tampoco se verifica la tesis del teorema 2.14, a aunque tambien aquí queda sin cumplir una ~~parte~~ parte de la condicion del teorema 2.12, la primera, esto es, no existe un numero $C_1 > 0$ tal

que para casi todo S

como se ve poniendo

CAPITULO III

En este capítulo trataremos el problema de la convergencia puntual de los operadores mencionados ,y luego adaptaremos algunos resultados,en relación a las condiciones de Lipschitz y a la capacidad.

3,1. El motivo primario es probar que las funciones tienden a f en cada punto,cuando $N \to$ y f es cualquiera.

Lo haremos con una ligera extension del metodo del operador maximal que aparece en el 4 articulo de 1 ,si bien en el caso que nos interesa ahora el resultado es trivial y de demostracion inmediata.

La demostracion de la extension resulta de una adaptacion obvia de la dada en el articulo citado y nos interesan pues podría usarse para núcleos no tan comodos de manipular como los que aquí aparecen. La potencia del metodo tambien es exibida allí cuando el nucleo de convolucion es o sea,cuando la transformada es la de Hilbert.

Sea D_p un conjunto denso en el $L^p(X,$ $)$.

Para N 1,2,...,sea H_N una sucesion de operadores definidos en el L^p a valores funciones de dominio $(Y,$ $)$. Eventualmente esta familia de operadores puede tener alguna de las siguientes propiedades:

A) Para cada N ,$H_N f$ esta definida en toda f L^p y $H_N f(P)$ es finita en casi todo P

B) Si f_n L^p y entonces para cada N existe una subsucesion n_i tal que;

cuando n_i y en casi todo P.

C) Dada f D_p para casi todo punto P X existe el limite (finito) para N

Llamaremos opmrador maximal asociado a la ~~funcion~~ familia H .luego,si los son medibles asi lo sera y ademas siempre .

Diremos que un operador T es de casi tipo $(p,r;G)$ si para toda f L^p ,

en casi todo (respecto medida de Lebesgue) y donde para casi todo punto

Asi, un operador de semitipo (p,q) es de casi tipo $(p,q;G)$ donde

3.2. Teorema. Sea $\{M_n\}$ una sucesión de operadores semilineales con las propiedades A y B.

Si M es el operador maximal asociado a $\{M_n\}$ entonces M es de tipo (p,r), semitipo (p,r), casitipo $(p,r;G)$ en D_p implica respectivamente M es de tipo(p,r), semitipo (p,r), casitipo $(p,r;G)$ en L_p.

Dem.)

3.3. <u>Teorema.</u> Sea $H_N f$ una sucesion de operadores lineales con las propiedades A,B,C, y M de casi tipo en D_p .
Si $H_N f$ converge puntualmente(en casi todo punto),casi uniformemente o en medida sobre las funciones pertenecientes a D_p entonces $H_N f$ converge puntualmente ,casi uniformemente o en medida en todo el L^p.

Demostración.

3.4. En este parrafo a titulo de ilustracion aplicaremos los teoremas generales probados en el capitulo presente a la sucesion N natural, donde, como siempre :

Proposicion 1. Sea K B, entonces :

A) Para cada N , H^N f ES UN OPERADOR LINEAL definido en toda f L^p y H^N f es finita en todo x.

B) Dada entonces en todo punto y para toda N.

C) converge puntualmente en todo punto para toda funcion de D (clase de las funciones elementales)

Demostracion. Las tres propiedades son de facil demostracion . Veamos C. es finita en todo x si f D ,pues las funciones elementales son de soporte acotado y en el,origen es integrable.Como para N es resulta :

Proposicion 2. Sea M el operador maximal de H^N en la clase de las funciones ~~elementales~~ resulta M de tipo (p,q) con y semitipo

Dem.) En efecto donde es el operador del nucleo con generador K' K'.Como tiene las propiedades citadas y acota puntualmente a Mf resulta la tesis.

Entonces de las proposiciones 1 y 2 y el teorema 3.3 resulta que $H_N f$ converge en casi todo punto a H f para toda $f \in L^p$ con $1 \leq p$.

3.5. Sea

Supongamos que K es continua en casi todo punto. Veamos que $H_N f$ es continua en todo punto x_0.

En el caso general pertenece a la primera clase de Baire, si K es continua en casi todo punto.

Esto ultimo puede verse tambien probando que la transformada de funciones características es continua, pasando luego a funciones elementales y despues a funciones medibles en general.

3.6. Cabe preguntarse si cuando $\to$ es cierto que

la respuesta es afirmativa y la demostracion simple.

Teorema. Sea K B y $\to$ i naturales

Si $f \in L^p$ entonces existe un I tal que para $i > I$ esta definida y en casi todo punto x,

Dem.) Las rectas de representacion de los H tienden a la de H, luego, por ser semiabierto el conjunto de los p de la hipotesis, desde un I en adelante los puntos estan en y los H estan definidas.

3.8. Trataremos ahora problemas en los que aparece el concepto de capacidad. Definiremos ese concepto respecto nucleos cualesquiera de la siguiente manera :

El conjunto S es de <u>capacidad positiva respecto N(x)</u> , $x - T^n$ si y solo si existe una distribucion μ concentrada en S tal que

$$V(\mu) = \dots < \infty$$

si ese supremo es infinito para toda μ concentrada en S diremos que la capacidad de S respecto N es cero.

Es facil entonces demostrar la sigiente

<u>Proposicion 1.</u> Si $M(x) \geq N(x)$ en $S_1 \subset S$ y $M(x) \geq$ cte. en $S - S_1$ entonces si S es de capacidad positiva respecto N tambien lo es respecto M y si es de capacidad cero respecto M tambien lo es respecto N.

Es inmediata la <u>proposicion 2.</u>

Si $f - L^1$ entonces $F(x) = \dots$ es finita en todo punto exepto posiblemente en un conjunto de capacidad cero respecto N.

Dem.)

Nos limitar mos a los nucleos K y diremos en estos casos capacidad positiva, a la capacidad positiva respecto K

Como No podra en general afirmarse que la capacidad cero respecto implique la capacidad cero respecto

Sin e mbargo para el generador K dado valen las siguientes propiedades de facil demostracion (cf. proposicion 1) :

Si y B es de capacidad cero entonces es de capacidad cero.

Si y B es de capacidad positiva entonces es de capacidad positiva.

Proposicion 4.

Si A B y A es de capacidad positiva entonces B es de cap acida positiva.

Si A $\subset$ B y B es de capacidad cero entonces A es de capacidad cero.

Dada A_n ,cada A_n de capacidad nula, entonces A A_n es de capacidad nula.

3.8. Respecto a los resultados de este parrafo y los del siguiente vease 9 .

En este probaremos dos lemas que seran usados en 3.10, en la demostracion de un teorema el cual nos dice como es el conjunto donde es finita.

Lema 1. Sea K -B con la propiedad que si K(x) $\neq 0$ entonces K(x) $>$ b >0

Sea 2 $<$ p $<\infty$ y >0 de manera que > 1 >0.

Entonces en todo conjunto acotado A

donde

con distribucion de probabilidad concentrada en S.

Dem.)

Lema 2. Sea $K \in B$ con la propiedad que si $K(x) \neq 0$ entonces $K(x) \geq b > 0$ para todo x. suponemos tambien que

(1)

para todo par x,y. Si $2 \geq p \geq 1$ entonces

Demostracion.

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible] $= \frac{\cdot}{2}$ [illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

Note 2: [illegible]

Teorema. Sea K ... y que verifica :

a) $K(x) \neq 0$ implica $K(x) > b > 0$

b) $0 < \ldots < n$ ... $x, y \in \ldots^n$ implica

independiente de x e y

entonces :

I) Si $1 < p \leq 2$, $0 < \ldots < n$, $f \in L^p$ entonces ... es finita en todas partes excepto en un conjunto de $(n-\ldots)$ capacidad cero respecto $K^{\ldots} K$.

II) Si $2 < p < \infty$, $0 < \ldots < n$, $f \in L^p$, entonces ... es finita en todo punto excepto posiblemente en un conjunto de ... capacidad ~~positiva~~ cero respecto $K \ldots K$ para todo ...

(Los cambios a hacer cuando se quiten las condiciones a) y b) son obvios segun se desprende de las notas 1 y 2/)

Dem.)

De la proposicion 3 de 3.8 y el teorema 3.10 obtenemos el

__Corolario:__ En las condiciones del teorema 3.9 , si $1 \leq p < \lambda$, $f \in L^p$ entonces $f_{r/p}$ es finita en todo punto excepto posiblemente en un conjunto de β capacidad nula, para todo $\beta > n-\delta$.

$\boxed{3.10}$ El problema es ahora tratar los casos en que la transformada tiene dominio distinto a la del transformando.

Eso lo haremos en este y los dos parrafos siguientes.

Por razones de comodidad nos limitaremos a los nucleos ordinarios, los cambios o agregados en las hipotesis, ha hacerse para el caso general son obvios.

Podemos expresar el teorema demostrado en 3.9, de la siguiente manera :

$1 \leq p \leq 2$, $0 < \alpha p < n$, $f \in L^p$ $\Rightarrow$ [illegible] es finita en todas partes excepto eventualmente en un cjto. de $(n - p\alpha)$ capacidad nula.

$2 < p < \infty$, $0 < \alpha p < n$, $f \in L^p$ $\Rightarrow$ f [illegible] es finita en todas partes excepto en un cjto. de $(n - [illegible] p)$ capacidad nula, para todo $0 <$ [illegible]

Veamos el <u>teorema</u>:

Sea $k < n$, $0 < \alpha p < n$, $f \in L^p$, [illegible] $= n - k$.

entonces $H_{\alpha k}$ f es no finita eventualmente en un conjunto de [illegible] capacidad cero de τ^k cuando $1 \leq p \leq 2$ y de [illegible] capacidad cero de τ^k para todo [illegible] cuando $2 < p < \infty$.

Demostracion.

3.11. Consideremos el caso $k > n$. La transformacion es entonces de la forma :

Si $0 < \alpha < n$

Luego

Cuando $x_2 \neq 0$ la ultima integral es finita pues

y cuando $X_2 = 0$ caemos en el caso $k = n$ pues

Aplicando el teorema 3.9 obtenemos la parte $p > 1$ del teorema siguiente; la parte $p = 1$ resulta directamente de

Teorema.

$1 \leq p \leq 2$, $0 < \alpha < n \Rightarrow$ es no finita eventualmte

$f \in L^p$ en un cjto. de T^n de $(n - \alpha p)$ - capacidad nula respecto al nucleo ordinario en ese espacio.

$2 < p < \infty$, $0 < \alpha < n \Rightarrow$ es no finita eventualmente en un conjunto de T^n de

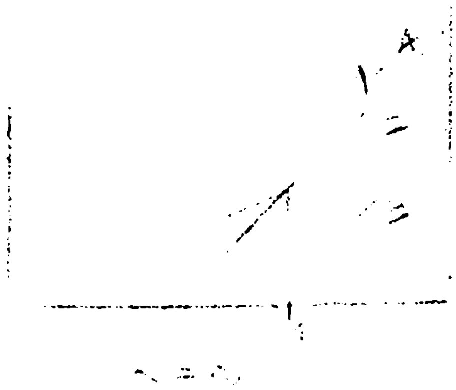
$f \in L^p$ $(n - \alpha p)$ capacida d nula para todo y respecto al nucleo ordinario.

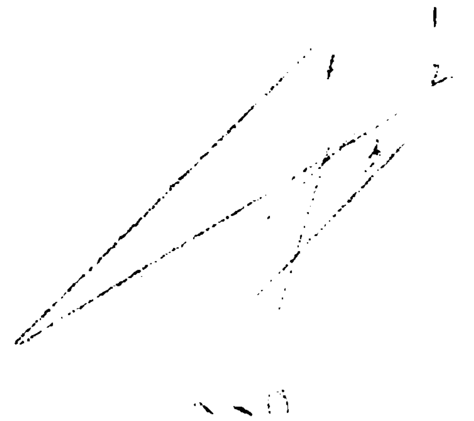
Nota 1. Vale la pena recordar que si un conjunto de T^n, $E^n \subset E^k$, es de capacidad nula respecto T^n y el nucleo entonces es de capacidad nula respecto T^k y

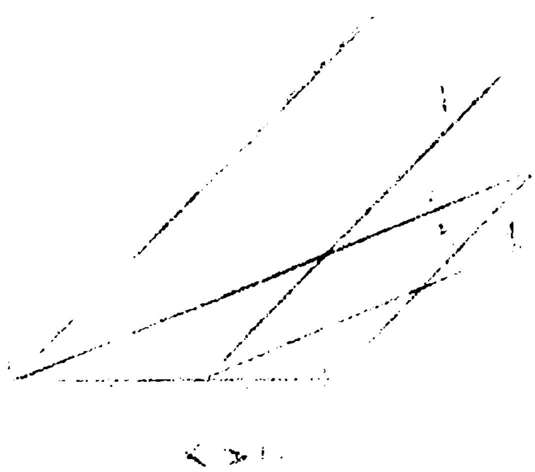
Nota 2. En el caso $k > n$, no consideraremos los valores de α tales que pues para estos valores pueden aparecer conjuntos de medida positiva en T^n donde la funcion se hace infinita, vb.: poniendo $f(t)$ = funcion caracteristica de la esfera unitaria.

3.12. Resumamos los resultados de 3.9, 3.10, 3.11, los graficos nos evitan establecer las relaciones mutuas entre μ, q, α.

Ademas supongamos todo para el nucleo ordinario.







Proposición.

Sea $f \in L^p$, $0 < \ldots < n$.

Si $1 < p < 2$ entonces $F(x)$ es finita en todas partes excepto posiblemente en un conjunto incluido en ... de ... capacidad nula.

Si $2 < p < \ldots$, entonces $F(x)$ es finita en todas partes excepto posiblemente en un cjto. incluido en ... de ... capacidad cero para todo

(Ver proposicion 3 de 3.B)

Faltaría considerar el caso en que $0 < t < \inf(n,k)$, T^n, E^k E^t E^{n+t} k

$E = T^{k-t} \times E^t \times E^{n-t}$.

Cuando $t = 0$ redujimos en 3.le este caso a aquel en el cual

$T^n \cap E^k = E^{\inf(n,k)}$.

Cuando $k = 0$ lo redujimos a una transformacion de T^t a E^k.

Podemos entonces resumir los resultados de la proposicion precedente y los que se desprenden de la observacion en el siguiente

Teorema.

Sea $f \in L^p$, $0 < \delta < n$, $F(x) = \int f(y) |x-y|^{\delta - n} dy$, $x \in T^k$, $y \in E^n$

$E^k \cap E^n = E^t$ cada uno incluido en $T^k \times E^{n-t} = E^{k-t} \times E^t \times E^{n-t}$

$\delta p - \delta p - n - t$, $p > \delta p$ $n - \inf(n,k)$.

Si $1 \leq p \leq 2$ entonces $F(x)$ es finita en todas partes excepto posiblemente en un conjunto de $T^{\inf(n,k)}$ si $t = 0$ y de T^t si $t \neq 0$ de $(n - \delta p)$ capacidad nula si $t = 0$ y $(n - \delta p)$ cap. nula si $t \neq 0$ respecto al nucleo potencial ordinario.

Si $2 < p < \infty$ entonces $F(x)$ finita en todo punto excepto posiblemente en un cjto. de $T^{\inf(n,k)}$ si $t = 0$, ó de T^t si $t \neq 0$ de $(n - \varepsilon p)$ capacidad nula con respecto al nucleo ordinario del espacio en cuestion y donde $0 < \varepsilon < \delta$ si $t = 0$, $0 < \varepsilon < \delta$ si $t \neq 0$.

3.13. Terminaremos el capítulo con algunos teoremas vinculados a las condiciones de Lipschitz.

Diremos que la funcion f de dominio T^n pertenece a la clase Lip α (T^n), $f \in$ Lip α, $\alpha > 0$, si para todo x, y todo h es $|f(x+h) - f(x)| \leq K|h|^{\alpha}$ con K independiente de h y x.

Teorema. Sea $h \in$ B, $0 < \alpha \leq 1$,

si $f \in L^1(T^n)$ $\cap$ Lip α (T^n), $0 < \ldots$ entonces $h * f \in$ Lip 1(T^n).

Demostración.

3.14. Teorema. Sea X = B y supongamos exista un generador R(t) tal que para todo h con h verifica :

con C independiente de h y t.

Entonces si

(Se dice que una funcion f pertenece a L si verifica

).

Dem.)

Nota 1. La hipotesis hecha en este teorema sobre los nucleos es verificada por el nucleo como lo prueba la desigualdad siguiente facil de verificar :

Nota 2. La condicion puede reemplazarse por sin cambios esenciales en la demostracion.

3.15. Llamaremos $S(a,R)$ esfera con centro a y radio R; $A(a,R_1,R_2) = S(a,R_2) - S(a,R_1)$ = anillo de radios R_1 y R_2, $R_1 < R_2$; $S'(a,R) = E^n - S(a,R)$; $A'(a,R_1,R_2) = E^n - A(a,R_1,R_2)$.

Teorema. Hipotesis) $p \geq 1$, $0 < \gamma < 1$, $f \in L^p(E^n)$

T = esfera con centro en el origen, o, todo el espacio; $K \in \underline{B}$ con

a) existen R y C tales que para $|h| < 1/2$, $|h| < |\sigma|/2$ o

Tesis) Llamando

$$|K_{n\gamma n}(\sigma-h) - K_{n\gamma n}(\sigma)| \leq M \cdot |h|^{\gamma} R_{n\gamma-1,n}(\sigma)$$

$$Hf(x) = \int f(t) K_{n\gamma n}(x-t)\, dt$$

resulta :

$$\int_T |Hf(x) - Hf(x-h)|^p dx = O(|h|^{p\gamma}).$$

Nota 1. La condicion pedida al nucleo es verificada por el nucleo ordinario . Respecto este y el siguiente teorema cf. [10]

[3.16] **Teorema.**

Hipotesis) $p \geq 1$; $k \geq 0$; $\gamma > 0$; $k - \gamma <$; $f \in L^p$; K generador de la clase B con las propiedad:

Existe un generador $R \in A$ y una cte. C independiente de h y t tales que si $|h| < 1/6$, $|h| \leq |t/2|$ entonces:

Sea T una esfera con centro en el origen, o todo el espacio .

Ademas supongamos :

Tesis)

(Puede reemplazarse O por o en el teorema.).

Demostracion.)

[illegible]

Rafael [illegible]

INDICE BIBLIOGRAFICO

1 M.Cotlar. A unified theory of Hilbert transforms and ergodic theorems. Revista Matematica Cuyana, vol.1, 1955, fasc.2, pags. 40-167.

2 M.Riesz. Sur les maximes des formes billineaires et sur les fonctionelles lineaires. Acta Matematica, vol.49, 1926, 465/97

3 Calderon and Zygmund. A note on the interpolation of sublinear operations. ~~Trans. of Amer. Math. Soc., vol.8~~ American Journal of Mtem., LXXVIII, N 2, 1956

4 E. Stein . Interpolation of linear operators. Trans. of Amer. Math. Soc., vol.83, number 2, 1956.

5 P.R. Halmos. Measure theory. Van Nostrand.

6 A. Zygmund. On a theorem of Marcinkiewicz concerning interpolations of operations. Journal de Mathem. Pures et Appl., tome XXXV, fasc. 3, 1956.

7 Calderon-Zygmund. On the existence of certains singular integrals. Acta Math. 88, 1956.

8

9 R. Du Plessis. Some theorems about the Riesz fractional integrals Trans. of Amer. Math. Soc. , vol.80. N 1, 1955, 124/35

10. Hardy and Littlewood . Some proprties of fractionals integrals Mat. Zeit. , vol.27, 1928, 565/606.