Sobre geometría intrínseca de curvas hiperesféricas

Aiub, Alberto

1955

Tesis presentada para obtener el grado de Doctor en Ciencias Físico-Matemáticas de la Universidad de Buenos Aires

SOBRE GEOMETRIA INTRINSECA DE CURVAS HIPERESFERICAS

Tesis para optar al título de Doctor en Ciencias Fisicomatemáticas

(Orientación Matemáticas)

Resumen

El objeto que nos proponemos en el presente trabajo es generalizar al espacio euclidiano de n dimensiones, las conocidas ecuaciones intrínsecas de la circunferencia y de las curvas que se apoyan sobre la esfera.

Para ello, hemos expuesto en "B.-" de "I.- Introducción" del primer capítulo uno de los métodos conocidos, elegido para fundamentar la generalización. Debemos hacer notar que la primera parte de la Introducción, es una reducción nuestra, del caso antedicho al plano. Esta reducción es trivial en sí, pero necesaria del punto de vista de demostrar que la ley de formación de las expresiones buscadas, resulta lógica desde el menor número de dimensiones del espacio compatible con nuestro problema.

A partir de esta introducción, el trabajo es de investigación propiamente personal, pues si bien en la segunda parte del capítulo 1, en que se determinan las ecuaciones para las curvas contenidas en las tri y tetradimensionales y la correspondiente generalización a la m-esfera, se utilizan las conocidas fórmulas de Frenet para el hiperespacio, hemos preferido deducirlas de acuerdo con el modelo señalado al comienzo.

Con el objeto de comprobar el método anterior, en el segundo capítulo -para la determinación de las ecuaciones paramétricas de las curvas- hemos debido generalizar, para los espacios de mayores dimensiones que el ordinario, los desarrollos canónicos en el entorno de un punto. Las ecuaciones obtenidas finalmente, corroboran en un todo las deducidas en la primera parte.

En el capítulo siguiente, hemos introducido como variables los ángu

los que forma el radio de la esfera en la cual está contenida la curva, con los ejes intrínsecos de la misma en cada punto. De esta manera hemos conseguido expresar las proyecciones del radio sobre los ejes en función de dichos ángulos y, por último, dar las ecuaciones intrínsecas de las curvas mediante las nuevas variables, ecuaciones que hemos denominado intrínseco-polares.

Por medio del aparato matemático hallado, estudiamos en el Capítulo 4, la familia de las curvas hiperesféricas cuyas curvaturas son constantes, no nulas. En este caso, no nos hemos limitado a dar las ecuaciones intrínsecas, sino también las expresiones cartesianas de las citadas curvas que pasan por el origen de coordenadas.

En el capítulo siguiente damos una brevísima referencia a los otros casos que pueden plantearse con respecto a la constancia de las curvaturas, restringiéndonos sólo a la flexión y a la torsión.

Por último, mediante las fórmulas halladas para la esfera ordinaria, se determinan las ecuaciones paramétricas generales de la hélice y de la curva cuyo producto de curvaturas es constante.

A. Dle

Alberto Aiub

SOBRE

GEOMETRIA INTRINSECA

DE

CURVAS HIPERESFERICAS

Tesis para optar al título de Doctor en Ciencias Físicomatemáticas

(Orientación Matemáticas)

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales

Universidad de Buenos Aires

1955

RESUMEN

El objeto que nos proponemos en el presente trabajo es generalizar al espacio euclidiano de n dimensiones, las conocidas ecuaciones intrínsecas de la circunferencia y de las curvas que se apoyan sobre la esfera.

Para ello, hemos expuesto en "B.-" de "I.- Introducción" del primer capítulo uno de los métodos conocidos, elegido para fundamentar la generalización. Debemos hacer notar que la primera parte de la Introducción, es una reducción nuestra, del caso antedicho al plano. Esta reducción es trivial en sí, pero necesaria del punto de vista de demostrar que la ley de formación de las expresiones buscadas, resulta lógica desde el menor número de dimensiones del espacio compatible con nuestro problema.

A partir de esta introducción, el trabajo es de investigación propiamente personal, pues si bien en la segunda parte del capítulo 1, en que se determinan las ecuaciones para las curvas contenidas en las tri y tetradimensionales y la correspondiente generalización a la n-esfera, se utilizan las conocidas fórmulas de Frenet para el hiperespacio, hemos preferido deducirlas de acuerdo con el modelo señalado al comienzo.

Con el objeto de comprobar el método anterior, en el segundo capítulo -para la determinación de las ecuaciones paramétricas de las curvas- hemos debido generalizar, para los espacios de mayores dimensiones que el ordinario, los desarrollos canónicos en el entorno de un punto. Las ecuaciones obtenidas finalmente, corroboran en un todo las deducidas en la primera parte.

En el capítulo siguiente, hemos introducido como variables los ángulos que forma el radio de la esfera en la cual está contenida la curva, con los ejes intrínsecos de la misma en cada punto. De esta manera hemos conseguido expresar las proyecciones del radio sobre los ejes en función de dichos ángulos y, por último, dar las ecuaciones intrín-

secas de las curvas mediante las nuevas variables, ecuaciones que hemos denominado intrínseco-polares.

Por medio del aparato matemático hallado, estudiamos en el Capítulo 4, la familia de las curvas hiperesféricas cuyas curvaturas son constantes, no nulas. En este caso, no nos hemos limitado a dar las ecuaciones intrínsecas, sino también las expresiones cartesianas de las citadas curvas que pasan por el origen de coordenadas.

En el capítulo siguiente damos una brevísima referencia a los otros casos que pueden plantearse con respecto a la constancia de las curvaturas, restringiéndonos sólo a la flexión y a la torsión.

Por último, mediante las fórmulas halladas para la esfera ordinaria, se determinan las ecuaciones paramétricas generales de la hélice y de la curva cuyo producto de curvaturas es constante.

AGRADECIMIENTO

Me es muy grato dejar constancia de mi sincero agradecimiento a los señores Profesores Dr. Luis A. Santaló y Dr. Elías A. De Cesare, padrino de tesis.

Al Dr. Santaló por las primeras y valiosas sugestiones en la iniciación del trabajo y al Dr. De Cesare por las útiles indicaciones finales, que han hecho posible la terminación del presente estudio.

SOBRE GEOMETRÍA INTRÍNSECA DE CURVAS HIPERESFÉRICAS

Página

ANTECEDENTES DEL PROBLEMA *

Notables innovaciones de método -seguido hasta aquel momento por la geometría diferencial- se encuentran en *Lezioni di geometria intrinseca* (Napoli, 1896) de E. Cesàro, en las cuales recoge y coordina las fórmulas fundamentales para el análisis intrínseco.

A esa obra, se le unen las siguientes notas del autor:

I numeri di Grassmann in geometria intrinseca (Lincei Rend.,V,3,1894)

Formole per l'analisi intrinseca delle superficie e delle loro deformazioni infinitesime (Napoli Rend., III, 7, 1901)

Sulle deformazioni infinitesime delle superficie (Id.)

Per l'analisi intrinseca delle superficie rotonde (Id., 9, 1903)

Sulla rappresentazione intrinseca delle superficie (Napoli, Atti II, 12, 1903)

Per l'analisi intrinseca delle figure tracciate sopra una superficie (Napoli Rend., III, 11, 1905)

Sulle immagini delle geodetiche nella rappresentazione piana delle superficie (Napoli Rend., III, 11, 1905)

Por otra parte, los elegantes procedimientos que Cesàro aplicó en su *Geometria intrinseca* a las figuras del espacio ordinario, vienen adaptados, por él mismo, a los espacios superiores, especialmente en sus trabajos:

Geometria intrinseca negli spazi di curvatura costante (Lincei Rend., V, 13, 1904)

Nuova teoria intrinseca degli spazi curvi (Lincei Mem., V, 5, 1905)

El procedimiento expuesto por Cesàro para el estudio infinitesimal de los entes geométricos, fué y es aplicado por numerosos autores, de los cuales hemos seleccionado los más recientes en la Bibliografía.

---

* *Loria, Gino*.- Il passato e il presente delle principali teorie geometriche.- 4a. edición.- Cedam, 1931.

Capítulo 1.-

PRIMER METODO PARA LA DETERMINACION DE LAS ECUACIONES INTRINSECAS

I.- INTRODUCCION

A.- Circunferencias o Curvas Homoesféricas

a) Ejes principales o intrínsecos.- Dada una curva en función del arco, en el espacio bidimensional

(1.1) $$\vec{x}_i = \vec{x}_i(s) \qquad i = 1, 2.$$

el elemento de arco está dado por

$$ds = \sqrt{d\vec{x}_i^2}$$

de donde resulta

(1.2) $$\sum_{i=1}^{2}\left(\frac{d\vec{x}_i}{ds}\right)^2 = \left(\frac{d\vec{x}}{ds}\right)^2 = \vec{x}'^2 = 1$$

El vector de módulo unitario o versor que tiene la dirección de la tangente, llamado vector tangente es

(1.3) $$\vec{n}_0 = \frac{d\vec{x}}{ds} = \vec{x}'$$

Derivando (1.2) respecto al arco, resulta teniendo en cuenta (1.3)

(1.4) $$\vec{n}_0 . \vec{n}_0' = 0$$

es decir, el vector $\vec{n}_0'$ es perpendicular a la tangente, pues su producto escalar es nulo. El vector de módulo unidad que tiene esta dirección se llama vector normal principal, luego

(1.5) $$\vec{n}_1 = \frac{\vec{x}''}{\sqrt{\vec{x}''^2}} = \frac{\vec{n}_0'}{\sqrt{\vec{n}_0'^2}}$$

Los dos vectores $\vec{n}_0$, $\vec{n}_1$ constituyen los ejes principales o intrínsecos unidos a cada punto de la curva.

b) Curvatura de flexión o primera curvatura.- Se llama curvatura de flexión o primera curvatura de la curva en el punto considerado y se la toma siempre positiva, al siguiente producto escalar:

$$k_1 = \vec{n}_0' \, \vec{n}_1$$

Derivando la expresión

$$\vec{n}_0 \, \vec{n}_1 = 0$$

resulta

(1.6) $$k_1 = \vec{n}_0' \vec{n}_1 = - \vec{n}_0 \vec{n}_1'$$

Multiplicando escalarmente (1.5) por $\vec{n}_1$ y teniendo en cuenta la definición de curvatura (1.6), resulta

$$k_1 = \sqrt{\vec{x}''^2} = \sqrt{\vec{n}_0'^2}$$

la que nos dice que, la curvatura de flexión es igual al módulo del vector $\vec{n}_0'$.

El recíproco de la curvatura de flexión es, por definición, el <u>radio de curvatura de flexión</u> o <u>radio de primera curvatura</u>

(1.7) $$r_1 = \frac{1}{k_1}$$

Mediante estas definiciones, (1.5) se puede escribir

(1.5') $$\vec{n}_1 = r_1 \vec{x}'' = r_1 \vec{n}_0'$$

La interpretación geométrica de la curvatura es la siguiente: si por un punto O se toman los dos vectores unitarios tangentes a la curva en los puntos $\vec{x}(s)$ y $\vec{x}(s + \Delta s)$, el ángulo que forman entre sí, es

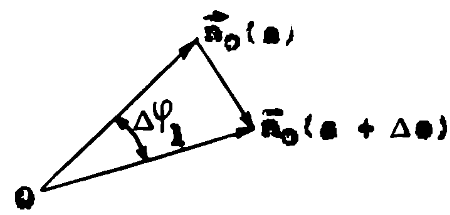

Fig. 1

$$\Delta\varphi_1 = |\vec{n}_0(s + \Delta s) - \vec{n}_0(s)| = |\vec{n}_0'(s)|\, \Delta s + \ldots$$

pero siendo

$$|\vec{n}_0'| = k_1$$

resulta

$$\lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta\varphi_1}{\Delta s} = \frac{d\varphi_1}{ds} = k_1$$

o sea, la curvatura en el punto $\vec{x}(s)$ es igual al límite del cociente del ángulo de las tangentes en $\vec{x}(s)$ y $\vec{x}(s + \Delta s)$ y Δs, cuando Δs tiende a cero.

c) <u>Fórmulas de Frenet para el plano</u>.- Las fórmulas de Frenet dan las componentes de los vectores derivados $\vec{n}_0'$ y $\vec{n}_1'$ respecto de los ejes principales.

De (1.5') resulta

$$\vec{n}_0' = k_1 \vec{n}_1$$

Para hallar $\vec{n}_1'$ se pone

$$\vec{n}_1' = \alpha_0 \vec{n}_0 + \alpha_1 \vec{n}_1$$

donde las α_i son coeficientes indeterminados. Para encontrar los valores correspondientes, se multiplican escalarmente ambos miembros de la anterior por $\vec{n}_0$ y teniendo en cuenta (1.6), resulta

$$\alpha_0 = - k_1$$

Multiplicando por $\vec{n}_1$ y por la derivada de

$$\vec{n}_1^2 = 1$$

se tiene

$$\alpha_1 = 0$$

Luego

$$\vec{n}_1' = - k_1 \vec{n}_0$$

Las fórmulas de Frenet para el plano, resultan entonces

(1.8) $$\begin{aligned} \vec{n}_0' &= k_1 \vec{n}_1 \\ \vec{n}_1' &= - k_1 \vec{n}_0 \end{aligned}$$

d) <u>Círculo osculador</u>.- Si $\vec{X}_i$ es el centro de una circunferencia de radio R_1 que pasa por el punto $\vec{x}_i(s)$ de la curva (1.1), debe cumplirse

(1.9) $$(\vec{x}_i - \vec{X}_i)^2 = R_1^2 \qquad i = 1, 2.$$

Para que esta circunferencia tenga un contacto de 2º orden con la curva en el punto $\vec{x}_i(s)$ es necesario que en él, la circunferencia y la curva tengan, además, del mismo valor de $\vec{x}_i$, los mismos valores de $\vec{x}_i'$ y $\vec{x}_i''$. Luego deben valer las igualdades que se obtienen derivando dos veces (1.9)

$$(\vec{x}_i - \vec{X}_i)\, \vec{x}_i' = 0$$

$$(\vec{x}_i - \vec{X}_i)\, \vec{x}_i'' + \vec{x}_i'^2 = 0$$

Las derivadas sucesivas $\vec{x}_i', \vec{x}_i'', \ldots$ teniendo en cuenta las fórmulas de Frenet (1.8), resultan:

$$
(1.10)\qquad
\begin{aligned}
\vec{x}_1' &= \vec{n}_0\\
\vec{x}_1'' &= k_1\,\vec{n}_1\\
\vec{x}_1''' &= -\,k_1^2\,\vec{n}_0 + k_1'\,\vec{n}_1\\
\vec{x}_1^{IV} &= -\,3\,k_1\,k_1'\,\vec{n}_0 + (k_1'' - k_1^3)\,\vec{n}_1\\
\vec{x}_1^{V} &= (k_1^4 - 3\,k_1'^2 - 4\,k_1\,k_1'')\,\vec{n}_0 + (k_1''' - 6\,k_1^2\,k_1')\,\vec{n}_1
\end{aligned}
$$

. . . .

. . . .

y así sucesivamente, se podrían calcular todas las derivadas de $\vec{x}_1$, a partir de k_1 y sus derivadas.

Sustituyendo los valores correspondientes de (1.10) en las anteriores, resulta

$$
(1.11)\qquad
\begin{aligned}
(\vec{x}_1 - \vec{X}_1)\,\vec{n}_0 &= 0\\
(\vec{x}_1 - \vec{X}_1)\,\vec{n}_1 &= -\frac{1}{k_1} = -\,r_1
\end{aligned}
$$

Estas ecuaciones dan las proyecciones de $(\vec{x}_1 - \vec{X}_1)$ sobre los ejes $\vec{n}_0$, $\vec{n}_1$; por lo tanto el centro de la circunferencia con un contacto de 2º orden, o sea, el centro del <u>círculo osculador</u> de la curva es

$$(1.12)\qquad \vec{X}_1 = \vec{x}_1 + r_1\,\vec{n}_1$$

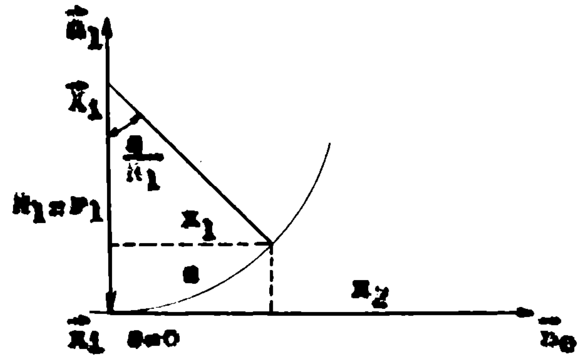

Fig. 2

Y el radio del círculo osculador, resulta

$$(1.13)\qquad (\vec{x}_1 - \vec{X}_1)^2 = R_1^2 = r_1^2 \quad \therefore \quad R_1 = r_1$$

e) <u>Ecuación intrínseca de las circunferencias</u>.- El lugar geométrico de los centros de los círculos osculadores a una curva, está dado por (1.12) donde todos los términos son funciones del arco <u>s</u>.

La dirección de la tangente a este lugar geométrico es la del vector

$$\vec{X}_1' = \vec{x}_1' + r_1'\,\vec{n}_1 + r_1\,\vec{n}_1'$$

que aplicando las fórmulas de Frenet (1.8), se reduce a

(1.14) $$\vec{X}_1' = r_1' \hat{n}_1$$

es decir: <u>es paralela a la normal principal de la curva</u>.

Si la curva es una <u>circunferencia</u>, el punto $\vec{X}_1$ es fijo y por lo tanto debe ser

$$\vec{X}_1' = 0$$

o sea, por (1.14)

(1.15) $$r_1' = 0$$

Recíprocamente, si (1.15) se cumple, el centro $\vec{X}_1$ será un punto fijo y el radio del círculo osculador será también constante, pues de (1.13)

(1.15') $$(R_1^2)' = 2\, r_1\, r_1'$$

que es cero si se cumple (1.15).

Luego: <u>la condición necesaria y suficiente para que una curva sea una circunferencia, es que la derivada de su radio de curvatura con respecto al arco, se anule</u>.

La (1.15) se llama la <u>ecuación intrínseca o natural</u> de las circunferencias, puesto que no depende del sistema de coordenadas.

Ella es equivalente a

$$r_1 = R_1 = \text{constante}$$

por (1.15).

B.- Curvas Esféricas o Biesféricas

a) Triedro principal o intrínseco de Frenet.- Dada una curva en el espacio ordinario

(1.16) $$\vec{x}_i = \vec{x}_i(s) \qquad i = 1, 2, 3.$$

se define el vector tangente por

(1.17) $$\vec{n}_0 = \vec{x}'$$

el vector normal principal por

(1.18) $$\vec{n}_1 = r_1 \, \vec{x}'' = r_1 \, \vec{n}_0'$$

y se toma un nuevo vector perpendicular a los anteriores, de módulo unitario, mediante el siguiente producto vectorial

(1.19) $$\vec{n}_2 = \vec{n}_0 \times \vec{n}_1$$

que se llama vector binormal. Su dirección es la de la binormal a la curva en el punto considerado.

Estos tres vectores forman el triedro principal o intrínseco de Frenet unido a cada punto de la curva.

b) Curvatura de torsión o segunda curvatura.- Se llama curvatura de torsión o segunda curvatura, al siguiente producto escalar, tomado con el signo correspondiente

$$k_2 = \vec{n}_1' \, \vec{n}_2$$

Derivando

$$\vec{n}_1 \, \vec{n}_2 = 0$$

resulta

(1.20) $$k_2 = \vec{n}_1' \, \vec{n}_2 = - \vec{n}_1 \, \vec{n}_2'$$

El recíproco es, por definición, el radio de curvatura de torsión o radio de segunda curvatura

(1.21) $$r_2 = \frac{1}{k_2}$$

Su interpretación geométrica es la siguiente: si por un punto O se toman los dos vectores unitarios binormales a la curva en los puntos $\vec{x}(s)$ y $\vec{x}(s + \Delta s)$, el ángulo que forman entre sí, es

$$\Delta\varphi_2 = \left|\vec{n}_2(s + \Delta s) - \vec{n}_2(s)\right| = \left|\vec{n}_2'(s)\right| \Delta s + \dots$$

De (1.20)

$$|\vec{n}_2'| = k_2$$

luego

$$\lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta\varphi_2}{\Delta s} = \frac{d\varphi_2}{ds} = k_2$$

o sea, el valor absoluto de la torsión en el punto $\vec{x}(s)$ es igual al límite del cociente del ángulo formado por las binormales en $\vec{x}(s)$ y $\vec{x}(s + \Delta s)$ y Δs, cuando Δs tiende a cero.

e) Fórmulas de Frenet.- El vector derivado $\vec{n}_0'$ respecto del triedro de Frenet está dado directamente por (1.18)

$$\vec{n}_0' = k_1 \vec{n}_1$$

Para hallar $\vec{n}_1'$ se pone

$$\vec{n}_1' = \alpha_0 \vec{n}_0 + \alpha_1 \vec{n}_1 + \alpha_2 \vec{n}_2$$

siendo α_i coeficientes indeterminados.

Multiplicando escalarmente ambos miembros por $\vec{n}_0$, se deduce derivando $\vec{n}_1 \vec{n}_0 = 0$ y por (1.18)

$$\alpha_0 = -k_1$$

multiplicando por $\vec{n}_1$ y por la derivada de $\vec{n}_1^2 = 1$, se tiene

$$\alpha_1 = 0$$

multiplicando por $\vec{n}_2$ y por (1.20)

$$\alpha_2 = k_2$$

Por tanto, queda

$$\vec{n}_1' = -k_1 \vec{n}_0 + k_2 \vec{n}_2$$

Poniendo análogamente

$$\vec{n}_2' = \beta_0 \vec{n}_0 + \beta_1 \vec{n}_1 + \beta_2 \vec{n}_2$$

y multiplicando por $\vec{n}_0$, por la derivada de $\vec{n}_2 \vec{n}_0 = 0$ y teniendo en cuenta la expresión de $\vec{n}_0'$

$$\beta_0 = 0$$

multiplicando por $\vec{n}_1$ y por (1.20)

$$\beta_1 = -k_2$$

por último, multiplicando por $\vec{n}_2$ y por la derivada de $\vec{n}_2^2 = 1$, se tiene

$$\beta_2 = 0$$

por lo tanto

$$\vec{n}_2' = -k_2\,\vec{n}_1$$

Luego, las fórmulas de Frenet para el espacio de 3 dimensiones, son:

$$(1.22)\qquad \begin{aligned} \vec{n}_0' &= \qquad\qquad k_1\,\vec{n}_1 \\ \vec{n}_1' &= -k_1\,\vec{n}_0 + k_2\,\vec{n}_2 \\ \vec{n}_2' &= -k_2\,\vec{n}_1 \end{aligned}$$

d) <u>Esfera osculatriz</u>.- Si $\vec{X}_i$ es el centro de una esfera de radio R_2 que pasa por el punto $\vec{x}_i(s)$ de la curva (1.16), debe cumplirse

$$(1.23)\qquad (\vec{x}_i - \vec{X}_i)^2 = R_2^2 \qquad i = 1, 2, 3.$$

Para que esta esfera tenga un contacto de 3er. orden con la curva en el punto $\vec{x}_i(s)$ es necesario que en él, la esfera y la curva tengan los mismos valores de $\vec{x}_i'$, $\vec{x}_i''$ y $\vec{x}_i'''$. Luego deben valer las igualdades que se obtienen derivando 3 veces (1.23)

$$(\vec{x}_i - \vec{X}_i)\,\vec{x}_i' = 0$$

$$(\vec{x}_i - \vec{X}_i)\,\vec{x}_i'' + \vec{x}_i'^2 = 0$$

$$(\vec{x}_i - \vec{X}_i)\,\vec{x}_i''' + 3\,\vec{x}_i'\,\vec{x}_i'' = 0$$

Las derivadas sucesivas $\vec{x}_i'$, $\vec{x}_i''$, $\vec{x}_i'''$, ... teniendo en cuenta las fórmulas de Frenet (1.22), resultan:

$$(1.24)\qquad \begin{aligned} \vec{x}_i' &= \vec{n}_0 \\ \vec{x}_i'' &= k_1\vec{n}_1 \\ \vec{x}_i''' &= -k_1^2\vec{n}_0 + k_1'\vec{n}_1 + k_1k_2\vec{n}_2 \\ \vec{x}_i^{IV} &= -3k_1k_1'\vec{n}_0 + (k_1'' - k_1^3 - k_1k_2^2)\vec{n}_1 + (2k_1'k_2 + k_1k_2')\vec{n}_2 \\ \vec{x}_i^{V} &= (k_1^4 - 3k_1'^2 - 4k_1k_1'' + k_1^2k_2^2)\vec{n}_0 + (k_1''' - 6k_1^2k_1' - 3k_1'k_2^2 - 3k_1k_2k_2')\vec{n}_1 + \\ &\qquad + (3k_1''k_2 - k_1^3k_2 - k_1k_2^3 + 3k_1'k_2' + k_1k_2'')\vec{n}_2 \end{aligned}$$

. . . .
. . . .

y así se podrían calcular todas las derivadas de $\vec{x}_1$ a partir de k_1, k_2 y sus derivadas.

Reemplazando los valores correspondientes de (1.24) en las anteriores, y además, la primera y segunda en la tercera, se obtienen las proyecciones de $(\vec{x}_1 - \vec{X}_1)$ sobre los ejes:

$$
(1.25) \qquad
\begin{aligned}
(\vec{x}_1 - \vec{X}_1)\,\vec{n}_0 &= 0 \\
(\vec{x}_1 - \vec{X}_1)\,\vec{n}_1 &= -\frac{1}{k_1} = -r_1 \\
(\vec{x}_1 - \vec{X}_1)\,\vec{n}_2 &= \frac{k_1'}{k_1^2\,k_2} = -r_1'\,r_2
\end{aligned}
$$

Luego el centro de la esfera con un contacto de 3er. orden, o sea, la <u>esfera osculatriz</u> de la curva está dado por

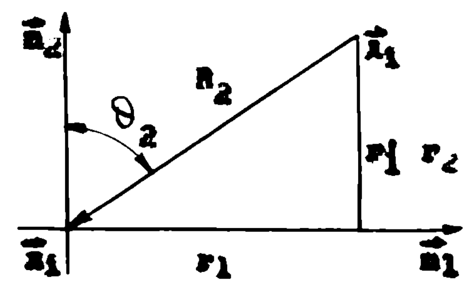

Fig. 3

(1.26) $\qquad \vec{X}_1 = \vec{x}_1 + r_1\,\vec{n}_1 + r_1'\,r_2\,\vec{n}_2$

El radio de la esfera osculatriz es

(1.27) $\qquad R_2^2 = (\vec{x}_1 - \vec{X}_1)^2 = r_1^2 + (r_1'\,r_2)^2$

De (1.26) se deduce que el círculo osculador es la sección de la esfera osculatriz con el plano osculador $(\vec{n}_0, \vec{n}_1)$.

e) <u>Ecuación intrínseca de las curvas esféricas</u>.- El lugar geométrico de los centros de las esferas osculatrices a una curva, está dado por (1.26) donde todos los términos son funciones de <u>s</u>. La dirección de la tangente a este lugar geométrico es la del vector

$$\vec{X}_1' = \vec{x}_1' + r_1'\,\vec{n}_1 + r_1\,\vec{n}_1' + (r_1'\,r_2)'\,\vec{n}_2 + r_1'\,r_2\,\vec{n}_2'$$

que aplicando las fórmulas de Frenet y simplificando queda

(1.28) $\qquad \vec{X}_1' = \left[(r_1'\,r_2)' + r_1\,k_2\right]\vec{n}_2$

es decir: <u>es paralela a la binormal de la curva</u>.

Si la curva es <u>esférica</u>, o sea, está contenida en la superficie de una esfera, el punto $\vec{X}_1$ es fijo y por lo tanto debe ser

$$\vec{X}_1' = 0$$

(1.29) $$(r_1' r_2)' + r_1 k_2 = 0$$

Recíprocamente, si (1.29) se cumple, el centro $\bar{X}_1$ será un punto fijo y además el radio R_2 de la esfera osculatriz será también constante, pues según (1.27)

(1.29') $$(R_2^2)' = 2\left(r_1 r_1' + r_1' r_2 (r_1' r_2)'\right) = 2 r_1' r_2 \left(r_1 k_2 + (r_1' r_2)'\right)$$

que es igual a cero si se cumple (1.29).

Luego: <u>la condición necesaria y suficiente para que una curva sea esférica, es que sus curvaturas estén relacionadas por la ecuación (1.29)</u>.

La (1.29) es llamada la <u>ecuación intrínseca</u> <u>o</u> <u>natural</u> de las curvas esféricas y, por (1.27), es equivalente a

$$r_1^2 + (r_1' r_2)^2 = R_2^2 = \text{constante}$$

II.- CURVAS HIPERESFERICAS

A.- Curvas triesféricas

a) Tetraedro principal o intrínseco.- Dada una curva en el espacio euclidiano de 4 dimensiones

$$(1.30) \qquad \vec{x}_i = \vec{x}_i(s) \qquad i = 1, 2, 3, 4.$$

definimos los vectores tangente y normal principal, respectivamente, por

$$\vec{n}_0 = \vec{x}'$$

$$\vec{n}_1 = r_1\, \vec{x}'' = r_1\, \vec{n}_0'$$

y llamamos flexión a

$$(1.31) \qquad k_1 = \vec{n}_0'\, \vec{n}_1 = - \vec{n}_0\, \vec{n}_1'$$

En el espacio de 3 dimensiones determinado por $\vec{x}'$, $\vec{x}''$, $\vec{x}'''$, tenemos el vector binormal por

$$\vec{n}_2 = \vec{n}_0 \times \vec{n}_1$$

y llamamos torsión a

$$(1.32) \qquad k_2 = \vec{n}_1'\, \vec{n}_2 = - \vec{n}_1\, \vec{n}_2'$$

Tomamos, ahora, un cuarto vector que llamaremos trinormal $\vec{n}_3$, perpendicular a los anteriores y de módulo unidad.

Estas dos condiciones se expresan, mediante la relación

$$\vec{n}_i\, \vec{n}_j = \delta_i^j \qquad i, j = 0, 1, 2, 3.$$

donde δ_i^j es el delta de Kronecker.

Se trata, ahora, de cuadrivectores o tetravectores a los que, por comodidad, seguiremos llamando, simplemente, vectores y para los cuales, se define el productoescalar por

$$\vec{a}\, \vec{b} = \sum_{i=1}^{4} a_i\, b_i$$

b) Tercera curvatura.- Introducimos ahora la siguiente definición: se llama tercera curvatura de la curva en un punto, al siguiente producto escalar

$$(1.33) \qquad k_3 = \vec{n}_2'\, \vec{n}_3 = - \vec{n}_2\, \vec{n}_3'$$

Y, el recíproco, lo definimos como <u>radio de tercera curvatura</u>

$$r_3 = \frac{1}{k_3}$$

La interpretación geométrica de la tercera curvatura es análoga a las anteriores: si por un punto O, tomamos los dos vectores trinormales a la curva, en los puntos $\vec{x}(s)$ y $\vec{x}(s + \Delta s)$, el ángulo que forman entre sí, es

$$\Delta\varphi_3 = |\vec{n}_3(s + \Delta s) - \vec{n}_3(s)| = |\vec{n}_3'(s)|\,\Delta s + \ldots$$

De (1.33)

$$|\vec{n}_3'| = k_3$$

luego

$$\lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta\varphi_3}{\Delta s} = \frac{d\varphi_3}{ds} = k_3$$

o sea, el valor absoluto de la tercera curvatura en el punto $\vec{x}(s)$, es igual al límite del cociente, entre el ángulo de las trinormales en $\vec{x}(s)$ y $\vec{x}(s + \Delta s)$, y Δs, cuando Δs tiende a cero.

e) <u>Generalización de las fórmulas de Frenet a los espacios de 4 dimensiones</u>.- De (1.31) se obtiene

$$\vec{n}_0' = k_1\,\vec{n}_1$$

Para obtener $\vec{n}_1'$ hacemos

$$\vec{n}_1' = \alpha_0\,\vec{n}_0 + \alpha_1\,\vec{n}_1 + \alpha_2\,\vec{n}_2 + \alpha_3\,\vec{n}_3$$

Multiplicando escalarmente ambos miembros por $\vec{n}_0$ y de (1.31), resulta

$$\alpha_0 = -k_1,$$

multiplicando por $\vec{n}_1$ y teniendo en cuenta la derivada de $\vec{n}_1^2 = 1$, se obtiene

$$\alpha_1 = 0,$$

multiplicando por $\vec{n}_2$ y de (1.32)

$$\alpha_2 = k_2,$$

multiplicando por $\vec{n}_3$, por la derivada de $\vec{n}_1\vec{n}_3 = 0$ y de (1.33)

$$\alpha_3 = 0$$

por tanto, queda

$$\vec{n}'_1 = -k_1\,\vec{n}_0 + k_2\,\vec{n}_2$$

Para obtener $\vec{n}'_2$ hacemos análogamente

$$\vec{n}'_2 = \beta_0\,\vec{n}_0 + \beta_1\,\vec{n}_1 + \beta_2\,\vec{n}_2 + \beta_3\,\vec{n}_3$$

y multiplicamos por cada uno de los vectores del 2º miembro, sucesivamente.

Por la derivada de $\vec{n}_2\,\vec{n}_0 = 0$ y la expresión obtenida de $\vec{n}'_0$

$$\beta_0 = 0$$

De (1.32)

$$\beta_1 = -k_2$$

Por la derivada de $\vec{n}_2^{\,2} = 1$

$$\beta_2 = 0$$

De (1.33)

$$\beta_3 = k_3$$

Por tanto

$$\vec{n}'_2 = -k_2\,\vec{n}_1 + k_3\,\vec{n}_3$$

De (1.33)

$$\vec{n}'_3 = -k_3\,\vec{n}_2$$

Luego, las fórmulas de Frenet para los espacios de 4 dimensiones, resultan

$$
\begin{aligned}
\vec{n}'_0 &= \phantom{-k_1\,\vec{n}_0 +{}} k_1\,\vec{n}_1 \\
\vec{n}'_1 &= -k_1\,\vec{n}_0 + k_2\,\vec{n}_2 \\
\vec{n}'_2 &= -k_2\,\vec{n}_1 + k_3\,\vec{n}_3 \\
\vec{n}'_3 &= -k_3\,\vec{n}_2
\end{aligned}
\qquad (1.34)
$$

d) <u>3-esfera osculatriz</u>.- Si $\bar{X}_i$ es el centro de una 3-esfera de radio R_3 que pasa por el punto $\vec{x}_i(s)$ de la curva (1.30), debe cumplirse

(1.35) $$(\vec{x}_i - \bar{X}_i)^2 = R_3^2 \qquad i = 1, 2, 3, 4.$$

Deseamos ahora que ésta tenga un contacto de 4º orden con la curva, para lo cual deben valer las igualdades que se obtienen derivando 4 veces (1.35)

$$(\vec{x}_1 - \vec{X}_1)\,\vec{x}_1' = 0$$

$$(\vec{x}_1 - \vec{X}_1)\,\vec{x}_1'' + \vec{x}_1'^2 = 0$$

$$(\vec{x}_1 - \vec{X}_1)\,\vec{x}_1''' + 3\,\vec{x}_1'\,\vec{x}_1'' = 0$$

$$(\vec{x}_1 - \vec{X}_1)\,\vec{x}_1^{IV} + 4\,\vec{x}_1'\,\vec{x}_1''' + 3\,\vec{x}_1''^2 = 0$$

Las derivadas sucesivas $\vec{x}_1'$, $\vec{x}_1''$, $\vec{x}_1'''$, ... teniendo en cuenta las nuevas fórmulas de Frenet (1.34), resultan:

$$\vec{x}_1' = \vec{n}_0$$

$$\vec{x}_1'' = k_1\vec{n}_1$$

$$\vec{x}_1''' = -k_1^2\vec{n}_0 + k_1'\vec{n}_1 + k_1k_2\vec{n}_2$$

$$\vec{x}_1^{IV} = -3k_1k_1'\vec{n}_0 + (k_1'' - k_1^3 - k_1k_2^2)\vec{n}_1 + (2k_1'k_2 + k_1k_2')\vec{n}_2 + k_1k_2k_3\vec{n}_3$$

$$\begin{aligned}(1.36)\quad \vec{x}_1^{V} &= (k_1^4 - 3k_1'^2 - 4k_1k_1'' + k_1^2k_2^2)\vec{n}_0 + (k_1''' - 6k_1^2k_1' - 3k_1'k_2^2 - 3k_1k_2k_2')\vec{n}_1 + \\ &+ (3k_1''k_2 - k_1^3k_2 - k_1k_2^3 + 3k_1'k_2' + k_1k_2'' - k_1k_2k_3^2)\vec{n}_2 + \\ &+ (3k_1'k_2k_3 + 2k_1k_2'k_3 + k_1k_2k_3')\vec{n}_3\end{aligned}$$

. . . .
. . . .

Sustituyendo los valores correspondientes en las anteriores, resultan fácilmente las dos primeras expresiones siguientes. Reemplazando, además, los dos valores así obtenidos en la 3a. y luego, éstos en la 4a., resulta finalmente

$$(\vec{x}_1 - \vec{X}_1)\vec{n}_0 = 0$$

$$(\vec{x}_1 - \vec{X}_1)\vec{n}_1 = -\frac{1}{k_1} = -r_1$$

$$(1.37)\quad (\vec{x}_1 - \vec{X}_1)\vec{n}_2 = \frac{k_1'}{k_1^2k_2} = -r_1'r_2$$

$$(\vec{x}_1 - \vec{X}_1)\vec{n}_3 = -\frac{k_2}{k_1k_3} + \frac{k_1''}{k_1^2k_2k_3} - 2\frac{k_1'^2}{k_1^3k_2k_3} - \frac{k_1'k_2'}{k_1^2k_2^2k_3} =$$

$$= -(r_1'r_2)'r_3 - r_1k_2r_3$$

Estas son las proyecciones del radio de la 3-esfera sobre los ejes, por tanto el centro de la 3-esfera con un contacto de 4.º orden o sea la <u>3-esfera osculatriz</u> de la curva es

(1.38) $\vec{X}_1 = \vec{x}_1 + r_1 \vec{n}_1 + r_1' r_2 \vec{n}_2 + \left[(r_1' r_2)' r_3 + r_1 k_2 r_3\right]\vec{n}_3$

Y el radio de la 3-esfera es

(1.39) $R_3^2 = (\vec{x}_1 - \vec{X}_1)^2 = r_1^2 + (r_1' r_2)^2 + \left[(r_1' r_2)' r_3 + r_1 k_2 r_3\right]^2$

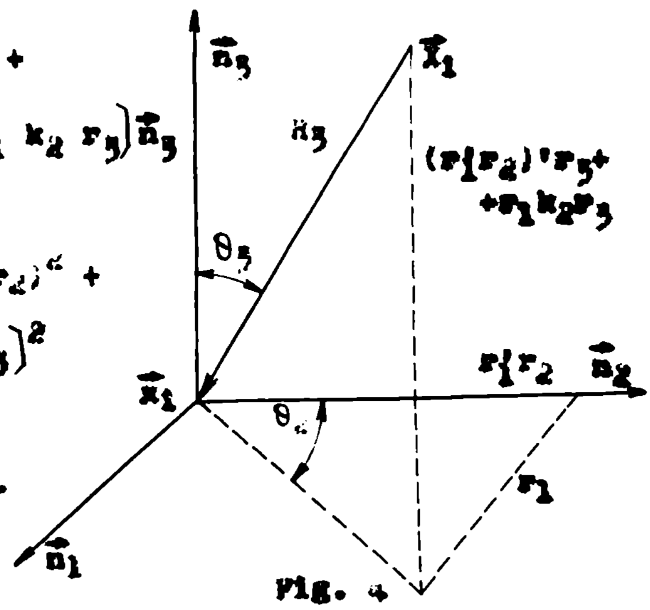

Fig. 4

De (1.38) se deduce que la esfera osculatriz es la sección de la 3-esfera osculatriz con el espacio de 3 dimensiones ($\vec{n}_0, \vec{n}_1, \vec{n}_2$).

e) <u>Ecuación intrínseca de las curvas triesféricas</u>.- La dirección de la tangente del lugar geométrico de los centros de las 3-esferas osculatrices es la del vector $\vec{X}_1'$ que se deduce de (1.38)

$$\vec{X}_1' = \vec{x}_1' + r_1' \vec{n}_1 + r_1 \vec{n}_1' + (r_1' r_2)' \vec{n}_2 + r_1' r_2 \vec{n}_2' + \left[(r_1' r_2)' r_3 + r_1 k_2 r_3\right]' \vec{n}_3 + \left[(r_1' r_2)' r_3 + r_1 k_2 r_3\right] \vec{n}_3'$$

que, aplicando las fórmulas generalizadas de Frenet (1.34) y simplificando, queda

(1.40) $\vec{X}_1' = \left\{\left[(r_1' r_2)' r_3 + r_1 k_2 r_3\right]' + r_1' r_2 k_3\right\} \vec{n}_3$

es decir: <u>es paralela a la trinormal de la curva</u>.

Si la curva es <u>triesférica</u>, o sea está contenida en el espacio tridimensional de la 3-esfera, el punto $\vec{X}_1$ es fijo y por lo tanto

$$\vec{X}_1' = 0$$

o

(1.41) $\left[(r_1' r_2)' r_3 - r_1 k_2 r_3\right]' + r_1' r_2 k_3 = 0$

Recíprocamente, si (1.41) se cumple, el centro $\vec{X}_1$ será fijo y el radio de la 3-esfera osculatriz constante, pues de (1.39) luego de derivar y sacar $2 r_1' r_2$ factor común de los dos primeros términos del segundo miembro y finalmente r_3, queda

(1.41') $(R_3^2)' = 2r_3\left[(r_1r_2)' - r_1k_2\right]\left\{\left[(r_1r_2)'r_3 - r_1k_2r_3\right]' - r_1r_2k_3\right\}$

que es igual a cero si se cumple (1.41).

Entonces tenemos que: <u>la condición necesaria y suficiente para que una curva sea triesférica es que sus curvaturas estén relacionadas por la ecuación (1.41)</u>.

La (1.41) es la <u>ecuación intrínseca o natural</u> de las curvas triesféricas y, por (1.39), es equivalente a

$$r_1^2 + (r_1' r_2)^2 + \left[(r_1' r_2)' r_3 + r_1 k_2 r_3\right]^2 = R^2 = \text{constante}$$

B.- Curvas tetraesféricas

a) Pentaedro principal o intrínseco.- Dada una curva en el espacio euclidiano de 5 dimensiones

$$\vec{x}_i = \vec{x}_i(s) \qquad i = 1, 2, \dots, 5. \tag{1.42}$$

definimos los vectores tangente y normal principal por

$$\vec{n}_0 = \vec{x}'$$

$$\vec{n}_1 = r_1 \vec{x}'' = r_1 \vec{n}_0'$$

y llamamos flexión a

$$k_1 = \vec{n}_0' \vec{n}_1 = - \vec{n}_0 \vec{n}_1' \tag{1.43}$$

En el espacio de 3 dimensiones determinado por $\vec{x}'$, $\vec{x}''$, $\vec{x}'''$, tomamos el vector binormal por

$$\vec{n}_2 = \vec{n}_0 \times \vec{n}_1$$

y llamamos torsión a

$$k_2 = \vec{n}_1' \vec{n}_2 = - \vec{n}_1 \vec{n}_2' \tag{1.44}$$

En el espacio de 4 dimensiones determinado por $\vec{x}'$, $\vec{x}''$, $\vec{x}'''$, $\vec{x}^{IV}$, tomamos el vector trinormal $\vec{n}_3$ de módulo unitario y perpendicular a los anteriores y llamamos tercera curvatura a

$$k_3 = \vec{n}_2' \vec{n}_3 = - \vec{n}_2 \vec{n}_3' \tag{1.45}$$

Tomamos ahora un quinto vector que llamaremos vector tetranormal $\vec{n}_4$ unitario y perpendicular a los anteriores.

Es decir, la condición de ortogonalidad del sistema base de referencia, se expresa por

$$\vec{n}_i \vec{n}_j = \delta_i^j \qquad i, j = 0, 1, \dots, 4.$$

El producto escalar se define análogamente

$$\vec{a}\,\vec{b} = \sum_{i=1}^{5} a_i b_i$$

b) Cuarta curvatura.- Llamamos cuarta curvatura de la curva en un punto, al siguiente producto escalar

$$k_4 = \vec{n}_3' \vec{n}_4 = - \vec{n}_3 \vec{n}_4' \tag{1.46}$$

y radio de cuarta curvatura a

$$r_4 = \frac{1}{k_4}$$

c) <u>Generalización de las fórmulas de Frenet a los espacios de 5 dimensiones</u>.- De (1.43) se obtiene

$$\vec{n}_0' = k_1 \vec{n}_1$$

Procediendo análogamente, expresamos los vectores derivados en función de los del pentaedro principal multiplicados por coeficientes indeterminados. Multiplicando, luego, sucesivamente por cada uno de éstos, teniendo en cuenta las derivadas de los productos de los vectores principales entre sí y por las expresiones de las curvaturas, resultan las fórmulas de Frenet para estos espacios:

$$(1.47)\qquad \begin{aligned} \vec{n}_0' &= \phantom{- k_1 \vec{n}_0 +{}} k_1 \vec{n}_1 \\ \vec{n}_1' &= - k_1 \vec{n}_0 + k_2 \vec{n}_2 \\ \vec{n}_2' &= - k_2 \vec{n}_1 + k_3 \vec{n}_3 \\ \vec{n}_3' &= - k_3 \vec{n}_2 + k_4 \vec{n}_4 \\ \vec{n}_4' &= - k_4 \vec{n}_3 . \end{aligned}$$

d) <u>4-esfera osculatriz</u>.- $\vec{X}_i$ es ahora el centro de una 4-esfera de radio R_4 que pasa por el punto $\vec{x}_i(s)$ de la curva (1.42), luego

$$(1.48)\qquad (\vec{x}_i - \vec{X}_i)^2 = R_4^2 \qquad i = 1, 2, \dots , 5.$$

Para que el contacto sea de 5º orden, deben cumplirse

$$\begin{aligned} (\vec{x}_i - \vec{X}_i)\, \vec{x}_i' &= 0 \\ (\vec{x}_i - \vec{X}_i)\, \vec{x}_i'' + \vec{x}_i'^2 &= 0 \\ (\vec{x}_i - \vec{X}_i)\, \vec{x}_i''' + 3\, \vec{x}_i'\, \vec{x}_i'' &= 0 \\ (\vec{x}_i - \vec{X}_i)\, \vec{x}_i^{IV} + 4\, \vec{x}_i'\, \vec{x}_i''' + 3\, \vec{x}_i''^2 &= 0 \\ (\vec{x}_i - \vec{X}_i)\, \vec{x}_i^{V} + 5\, \vec{x}_i'\, \vec{x}_i^{IV} + 10\, \vec{x}_i''\, \vec{x}_i''' &= 0 \end{aligned}$$

Las derivadas sucesivas, teniendo en cuenta (1.47), resultan:

$$\vec{x}_1' = \vec{n}_0$$

$$\vec{x}_1'' = k_1\vec{n}_1$$

$$\vec{x}_1''' = -k_1^2\vec{n}_0 + k_1'\vec{n}_1 + k_1k_2\vec{n}_2$$

$$\vec{x}_1^{IV} = -3k_1k_1'\vec{n}_0 + (k_1'' - k_1^3 - k_1k_2^2)\vec{n}_1 + (2k_1'k_2 + k_1k_2')\vec{n}_2 + k_1k_2k_3\vec{n}_3$$

(1.49) $$\vec{x}_1^{V} = (k_1^4 - 3k_1'^2 - 4k_1k_1'' + k_1^2k_2^2)\vec{n}_0 + (k_1''' - 6k_1^2k_1' - 3k_1'k_2^2 - 3k_1k_2k_2')\vec{n}_1 +$$
$$+ (3k_1''k_2 - k_1^3k_2 - k_1k_2^3 + 3k_1'k_2' + k_1k_2'' - k_1k_2k_3^2)\vec{n}_2 +$$
$$+ (3k_1'k_2k_3 + 2k_1k_2'k_3 + k_1k_2k_3')\vec{n}_3 + k_1k_2k_3k_4\vec{n}_4$$

. . . .
. . . .

Sustituyendo los valores correspondientes de (1.49) en las anteriores y operando, se obtienen las proyecciones del radio de la 4-esfera sobre los ejes:

$$(\vec{x}_1 - \vec{X}_1)\vec{n}_0 = 0$$

$$(\vec{x}_1 - \vec{X}_1)\vec{n}_1 = -\frac{1}{k_1} = -r_1$$

$$(\vec{x}_1 - \vec{X}_1)\vec{n}_2 = \frac{k_1'}{k_1^2k_2} = -r_1'r_2$$

$$(\vec{x}_1 - \vec{X}_1)\vec{n}_3 = -\frac{k_2}{k_1k_3} + \frac{k_1''}{k_1^2k_2k_3} - \frac{2k_1'^2}{k_1^3k_2k_3} - \frac{k_1'k_2'}{k_1^2k_2^2k_3} =$$

(1.50) $$= -(r_1'r_2)'r_3 - r_1k_2r_3$$

$$(\vec{x}_1 - \vec{X}_1)\vec{n}_4 = \frac{k_1'k_3}{k_1^2k_2k_4} - \frac{k_2'}{k_1k_3k_4} + \frac{k_1'k_2}{k_1^2k_3k_4} + \frac{k_2k_3'}{k_1k_3^2k_4} + \frac{k_1'''}{k_1^2k_2k_3k_4} -$$
$$- \frac{6k_1'k_1''}{k_1^3k_2k_3k_4} - \frac{2k_1''k_2'}{k_1^2k_2^2k_3k_4} - \frac{k_1''k_3'}{k_1^2k_2k_3^2k_4} + \frac{6k_1'^3}{k_1^4k_2k_3k_4} +$$
$$+ \frac{4k_1'^2k_2'}{k_1^3k_2^2k_3k_4} + \frac{2k_1'^2k_3'}{k_1^3k_2k_3^2k_4} - \frac{k_1'k_2''}{k_1^2k_2^2k_3k_4} + \frac{2k_1'k_2'^2}{k_1^2k_2^3k_3k_4} +$$
$$+ \frac{k_1'k_2'k_3'}{k_1^2k_2^2k_3^2k_4} = -\left[(r_1'r_2)'r_3 + r_1k_2r_3\right]'r_4 - r_1'r_2k_3r_4$$

Luego el centro de la <u>4-esfera osculatriz</u> está dado por

(1.51) $$\vec{X}_1 = \vec{x}_1 + r_1\vec{n}_1 + r_1'r_2\vec{n}_2 + \left[(r_1'r_2)'r_3 + r_1k_2r_3\right]\vec{n}_3 +$$
$$+ \left\{\left[(r_1'r_2)'r_3 + r_1k_2r_3\right]'r_4 + r_1'r_2k_3r_4\right\}\vec{n}_4$$

Y el radio por

(1.52) $$R_4^2=(\vec{X}_1-\vec{Y}_1)^2=r_1'^2+(r_1'r_2)^2+\left[(r_1'r_2)'r_3+r_1k_2r_3\right]^2+ + \left\{\left[(r_1'r_2)'r_3+r_1k_2r_3\right]'r_4+r_1'r_2k_3r_4\right\}^2$$

e) <u>Ecuación intrínseca de las curvas tetraesféricas</u>.- El vector derivado $\vec{Y}_1'$ que se deduce de (1.51), nos da la dirección de la tangente al lugar de los centros de estas 4-esferas, al cual aplicando las (1.47) y simplificando, resulta finalmente

(1.53)
$$\vec{Y}_1'= \left(\left\{\left[(r_1'r_2)'r_3+r_1k_2r_3\right]'r_4+r_1'r_2k_3r_4\right\}'+(r_1'r_2)'r_3k_4+r_1k_2r_3k_4\right)\vec{n}_4$$

es decir: <u>es paralela a la tetranormal de la curva</u>.

Ahora bien, si la curva es <u>tetraesférica</u>, o sea está contenida en el espacio tetradimensional de una 4-esfera, el punto $\vec{Y}_1$ es fijo y se tiene por lo tanto

(1.54) $$\left\{\left[(r_1'r_2)'r_3+r_1k_2r_3\right]'r_4+r_1'r_2k_3r_4\right\}'+(r_1'r_2)'r_3k_4+r_1k_2r_3k_4=0$$

También se cumple la recíproca. Si (1.54) se satisface el centro de la 4-esfera es fijo y el radio de la misma constante, ya que derivando (1.52) y en el segundo miembro, sacando primeramente $2\,r_1'\,r_2$ factor común de los dos primeros términos y luego $2\left((r_1'\,r_2)'+r_1k_2\right)$ también de los dos primeros términos, después r_3 de los mismos y, por último, r_4 de toda la expresión, queda

(1.54') $$(R_4^2)'=2r_4\left\{\left[(r_1'r_2)'r_3+r_1k_2r_3\right]'+r_1'r_2k_3\right\}\cdot \cdot\left(\left\{\left[(r_1'r_2)'r_3+r_1k_2r_3\right]'r_4+r_1'r_2k_3r_4\right\}'+(r_1'r_2)'r_3k_4+r_1k_2r_3k_4\right)$$

que es cero, si se cumple (1.54).

Entonces: <u>la condición necesaria y suficiente para que una curva sea tetraesférica, es que sus curvaturas estén relacionadas por la ecuación (1.54)</u>.

La (1.54) es la <u>ecuación intrínseca o natural</u> de las curvas tetraesféricas y ella es equivalente a (1.52) tomando el radio de la tetraesfera R_4 constante.

tro de la hiperesfera está situado en la intersección de todos los hi perplanos normales a la curva y expresando el contacto en función de la potencia de un punto de la curva a la hiperesfera.

G.- Curvas m-esféricas

a) (m + 1)-edro principal o intrínseco.- Dada una curva en el espacio euclidiano de m + 1 dimensiones

(1.55) $$\vec{x}_i = \vec{x}_i(s) \qquad i = 1, 2, \ldots , m + 1.$$

se deben definir m + 1 vectores unitarios y perpendiculares entre sí

$\vec{n}_0$ tangente

$\vec{n}_1$ normal principal

$\vec{n}_2$ binormal

. . . .

$\vec{n}_m$ m-normal

con la condición de ortogonalidad

$$\vec{n}_i \vec{n}_j = \delta_i^j \qquad i, j = 0, 1, 2, \ldots , m.$$

El producto escalar de los m-vectores de este espacio, se define por

$$\vec{a}\,\vec{b} = \sum_{i=1}^{m+1} a_i b_i$$

b) m curvaturas.- Es necesario definir ahora m curvaturas

(1.56)
$$\begin{aligned}
k_1 &= \frac{1}{r_1} = \vec{n}_0' \vec{n}_1 = - \vec{n}_0 \vec{n}_1' \\
k_2 &= \frac{1}{r_2} = \vec{n}_1' \vec{n}_2 = - \vec{n}_1 \vec{n}_2' \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
k_m &= \frac{1}{r_m} = \vec{n}_{m-1}' \vec{n}_m = - \vec{n}_{m-1} \vec{n}_m'
\end{aligned}$$

c) Generalización de las fórmulas de Frenet a los espacios de m + 1 dimensiones.- En estos espacios las fórmulas de Frenet resultan

(1.57)
$$\begin{aligned}
\vec{n}_0' &= \qquad\qquad\qquad k_1 \vec{n}_1 \\
\vec{n}_1' &= - k_1 \vec{n}_0 + k_2 \vec{n}_2 \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\vec{n}_{m-1}' &= - k_{m-1} \vec{n}_{m-2} + k_m \vec{n}_m \\
\vec{n}_m' &= - k_m \vec{n}_{m-1}
\end{aligned}$$

d) <u>m-esfera osculatriz</u>.- Si llamamos

$$
\begin{aligned}
& e_1 = 1 \\
& e_2 = r_1' = (e_1 r_1)' \\
& e_3 = (r_1' r_2)' + r_1 k_2 = (e_2 r_2)' + e_1 r_1 k_2 \\
(1.58) \quad & e_4 = \left[(r_1' r_2)' r_3 + r_1 k_2 r_3\right]' + r_1' r_2 k_3 = (e_3 r_3)' + e_2 r_2 k_3 \\
& e_5 = \left\{\left[(r_1' r_2)' r_3 + r_1 k_2 r_3\right]' r_4 + r_1' r_2 k_3 r_4\right\}' + (r_1' r_2)' r_3 k_4 + r_1 k_2 r_3 k_4 = \\
& \qquad = (e_4 r_4)' + e_3 r_3 k_4 \\
& \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot
\end{aligned}
$$

$$(1.59) \quad e_{m+1} = (e_m r_m)' + e_{m-1} r_{m-1} k_m$$

observamos que las (1.50) se pueden escribir

$$
\begin{aligned}
(\vec{x}_1 - \vec{X}_1)\, \vec{n}_0 &= 0 \\
(\vec{x}_1 - \vec{X}_1)\, \vec{n}_1 &= -\, e_1\, r_1 \\
(\vec{x}_1 - \vec{X}_1)\, \vec{n}_2 &= -\, e_2\, r_2 \\
(\vec{x}_1 - \vec{X}_1)\, \vec{n}_3 &= -\, e_3\, r_3 \\
(\vec{x}_1 - \vec{X}_1)\, \vec{n}_4 &= -\, e_4\, r_4
\end{aligned}
$$

Luego, la (1.51)

$$\vec{X}_1 = \vec{x}_1 + e_1\, r_1\, \vec{n}_1 + e_2\, r_2\, \vec{n}_2 + e_3\, r_3\, \vec{n}_3 + e_4\, r_4\, \vec{n}_4$$

y (1.52), por

$$R_4^2 = (e_1\, r_1)^2 + (e_2\, r_2)^2 + (e_3\, r_3)^2 + (e_4\, r_4)^2$$

Luego, si $\vec{X}_1$ es el centro de una m-esfera de radio R_m que pasa por el punto $\vec{x}_1(s)$ de la curva (1.55), es

$$(1.60) \qquad (\vec{x}_1 - \vec{X}_1)^2 = R_m^2 \qquad i = 1, 2, \ldots, m+1.$$

y para que esta m-esfera tenga un contacto de (m + 1)-ésimo orden con la curva en el punto $\vec{x}_1(s)$, o sea, para que ésta sea la m-esfera osculatriz de la curva, las proyecciones de $(\vec{x}_1 - \vec{X}_1)$ sobre los ejes deben ser

$$
(1.61) \qquad
\begin{aligned}
(\vec{x}_1 - \vec{X}_1)\, \vec{n}_0 &= 0 \\
(\vec{x}_1 - \vec{X}_1)\, \vec{n}_1 &= -\, e_1\, r_1 \\
\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\
(\vec{x}_1 - \vec{X}_1)\, \vec{n}_m &= -\, e_m\, r_m
\end{aligned}
$$

Por tanto, el centro de la m-esfera osculatriz está dado por

(1.62) $$\bar{X}_1 = \bar{x}_1 + \sum_{j=1}^{m} e_j\, r_j\, \bar{n}_j$$

y el radio por

(1.63) $$R_m^2 = (\bar{x}_1 - \bar{X}_1)^2 = \sum_{j=1}^{m} (e_j\, r_j)^2$$

e) Ecuación intrínseca de las curvas m-esféricas.- La dirección de la tangente al lugar geométrico de los centros de la m-esfera osculatriz, por las (1.58), es

para $m = 1$ (1.14) $\bar{X}_1' = e_2\, \bar{n}_1$

$m = 2$ (1.28) $\bar{X}_1' = e_3\, \bar{n}_2$

$m = 3$ (1.40) $\bar{X}_1' = e_4\, \bar{n}_3$

$m = 4$ (1.53) $\bar{X}_1' = e_5\, \bar{n}_4$

en general, para la m-esfera, sumergida en un espacio euclidiano de $m + 1$ dimensiones, tendremos

(1.64) $$\bar{X}_1' = e_{m+1}\, \bar{n}_m$$

es decir, paralela a la m-normal de la curva.

Luego, la ecuación intrínseca de las curvas m-esféricas, es por (1.58)

para $m = 1$ (1.15) $e_2 = 0 \;\therefore\; (e_1\, r_1)' = 0$

$m = 2$ (1.29) $e_3 = 0 \;\therefore\; (e_2\, r_2)' + e_1\, r_1\, k_2 = 0$

$m = 3$ (1.41) $e_4 = 0 \;\therefore\; (e_3\, r_3)' + e_2\, r_2\, k_3 = 0$

$m = 4$ (1.54) $e_5 = 0 \;\therefore\; (e_4\, r_4)' + e_3\, r_3\, k_4 = 0$

y, en general, para m

$$e_{m+1} = 0$$

o sea, en función de las e correspondientes a espacios de 1 y 2 dimensiones menos

(1.65) $$(e_m\, r_m)' + e_{m-1}\, r_{m-1}\, k_m = 0$$

Observemos, por último, que al derivar las expresiones que nos dan el radio de la m-esfera, obtenemos para $m = 1$ (1.15') $(R_1^2)' = 2\, r_1\, e_1\, e_2$

" $m = 2$ (1.29') $(R_2^2)' = 2\, r_2\, e_2\, e_3$

$m = 3$ (1.41') $(R_3^2)' = 2\, r_3\, e_3\, e_4$

$m = 4$ (1.54') $(R_4^2)' = 2\, r_4\, e_4\, e_5$

que son nulas, si se cumplen las ecuaciones intrínsecas respectivas. Luego, en general, para m

$$(R_m^2)' = 2\, r_m\, e_m\, e_{m+1} \tag{1.66}$$

Como aplicación de las leyes de recurrencia encontradas, vamos a calcular los valores correspondientes para una curva pentaesférica, es decir, una curva contenida en una 5-esfera, la cual, a su vez, está sumergida en un espacio euclidiano de 6 dimensiones. La ecuación intrínseca, será

$$e_6 = 0$$

que, por (1.65) es

$$(e_5\, r_5)' + e_4\, r_4\, k_5 = 0$$

y, reemplazando por los valores ya hallados (1.58), resulta

$$\left(\left\{\left[(r_1' r_2)' r_3 + r_1 k_2 r_3\right]' r_4 + r_1' r_2 k_3 r_4\right\}' r_5 + (r_1' r_2)' r_3 k_4 r_5 + r_1 k_2 r_3 k_4 r_5\right)' + \\ + \left[(r_1' r_2)' r_3 + r_1 k_2 r_3\right]' r_4 k_5 + r_1' r_2 k_3 r_4 k_5 = 0 \tag{1.67}$$

Considerando el radio R_5 de la pentaesfera constante, ésta es equivalente, por (1.65), a

$$R_5^2 = r_1^2 + (r_1' r_2)^2 + \left[(r_1' r_2)' r_3 + r_1 k_2 r_3\right]^2 + \left\{\left[(r_1' r_2)' r_3 + r_1 k_2 r_3\right]' r_4 + r_1' r_2 k_3 r_4\right\}^2 + \\ + \left(\left\{\left[(r_1' r_2)' r_3 + r_1 k_2 r_3\right]' r_4 + r_1' r_2 k_3 r_4\right\}' r_5 + (r_1' r_2)' r_3 k_4 r_5 + r_1 k_2 r_3 k_4 r_5\right)^2 \tag{1.68}$$

Y el centro de la 5-esfera, por (1.62):

$$\vec{X}_1 = \vec{x}_1 + r_1 \vec{n}_1 + r_1' r_2 \vec{n}_2 + \left[(r_1' r_2)' r_3 + r_1 k_2 r_3\right] \vec{n}_3 + \\ + \left\{\left[(r_1' r_2)' r_3 + r_1 k_2 r_3\right]' r_4 + r_1' r_2 k_3 r_4\right\} \vec{n}_4 + \\ + \left(\left\{\left[(r_1' r_2)' r_3 + r_1 k_2 r_3\right]' r_4 + r_1' r_2 k_3 r_4\right\}' r_5 + (r_1' r_2)' r_3 k_4 r_5 + r_1 k_2 r_3 k_4 r_5\right) \vec{n}_5 \tag{1.69}$$

Capítulo 2.-

OTRO METODO PARA LA DETERMINACION DE LAS ECUACIONES INTRINSECAS

Como comprobación del método anterior, veremos cómo se pueden obtener las mismas ecuaciones anteriores por otro camino. Sólo haremos ésto en algunos casos, para no hacer innecesariamente largo el presente capítulo.

A.- Circunferencias o Curvas Homoesféricas

a) Desarrollo canónico en el entorno de un punto.- En un entorno del punto s = 0, el desarrollo de Taylor de las coordenadas $\vec{x}_1(s)$ de cualquier punto sobre la curva

$$(2.1) \qquad \vec{x}_1(s) = \vec{x}_1(0) + s\,\vec{x}_1'(0) + \frac{s^2}{2!}\vec{x}_1''(0) + \frac{s^3}{3!}\vec{x}_1'''(0) + \dots$$

En (1.10) ya hemos calculado las derivadas sucesivas de la ecuación de una curva plana, mediante las correspondientes fórmulas de Frenet. Sustituyendo (1.10) en (2.1) y tomando como ejes coordenados a los ejes principales $\vec{n}_0$, $\vec{n}_1$, las ecuaciones paramétricas de la curva, en un entorno del origen s = 0, serán

$$x_1 = \vec{x}_1(s).\vec{n}_0 = s - \frac{s^3}{3!}k_1^2 - \frac{s^4}{8}k_1 k_1' + \frac{s^5}{5!}(k_1^4 - 3\,k_1'^2 - 4\,k_1 k_1'') + \dots$$

(2.2)

$$x_2 = \vec{x}_1(s).\vec{n}_1 = \frac{s^2}{2}k_1 + \frac{s^3}{3!}k_1' + \frac{s^4}{4!}(k_1'' - k_1^3) + \frac{s^5}{5!}(k_1''' - 6k_1^2 k_1') + \dots$$

donde k_1 y sus derivadas, son los valores que toman en el origen s=0.

b) Círculo osculador.- Si X_1, X_2 es el centro de una circunferencia que pasa por el punto s = 0 de la curva (2.2), debe ser

$$(2.3) \qquad (X_1 - x_1)^2 + (X_2 - x_2)^2 - R_1^2 = 0$$

luego, sustituyendo los valores de x_1, x_2 dados por (2.2) en (2.3), desarrollando, simplificando y ordenando con respecto a s, se obtiene

$$(2.4) \qquad -2X_1 s + (1 - k_1 X_2)\,s^2 + \left(\frac{k_1^2}{3}X_1 - \frac{k_1'}{3}X_2\right)s^3 + \dots = 0$$

Para que (2.3) sea el círculo osculador de (2.2) en el origen s = 0, el contacto debe ser de 2º orden, luego deben valer las igualdades que se obtienen derivando 2 veces (2.4). Debe tenerse presente que aquí, la variable es el arco s; k_1 y sus derivadas, son los valores fijos que toman en el punto s = 0. Luego

$$-2 X_1 = 0$$

$$2 (1 - k_1 X_2) = 0$$

de donde se deduce

$$X_1 = 0 \qquad (2.5)$$

$$X_2 = \frac{1}{k_1} = r_1$$

que son las coordenadas del centro del círculo osculador (1.12).

Como el contacto se realiza en s = 0, (2.3) y (2.5) dan el radio del círculo osculador

$$R_1 = r_1 \qquad (2.6)$$

c) Ecuación intrínseca de las circunferencias.- Agregando a las dos ecuaciones (2.5) la que resulta de derivar una vez más (2.4)

$$2 (k_1^2 X_1 - k_1' X_2) = 0$$

a condición de considerar a k_1 como nueva incógnita a determinar, el contacto de (2.2) y del círculo osculador será de 3er. orden. Reemplazando en ésta los valores de X_1 y X_2 de (2.5), resulta

$$k_1' = 0 \quad \therefore$$

$$r_1' = 0 \quad \therefore \qquad (2.7)$$

$$r_1 = \text{constante}$$

luego por (2.6)

$$r_1 = R_1 = \text{constante} \qquad (2.8)$$

es decir, si se cumple (2.7) la curva en un entorno del punto s = 0 es una circunferencia.

Esto es equivalente a considerar a s = 0 como raíz de 4º orden de (2.4), entonces los coeficientes de s, s^2 y s^3 se deben anular. En este caso, la curva (2.2) y la circunferencia (2.3) tienen 4 puntos comunes confundidos en el punto de contacto s = 0.

Podemos ahora enunciar el siguiente teorema: si una curva plana tiene en todo punto un contacto de 3er. orden, al menos, con una circunferencia; la curva es una circunferencia, es decir, el contacto de ambas es de orden infinito.

B.- Curvas esféricas o biesféricas

a) Desarrollo canónico en el entorno de un punto.- Para el caso de una curva en el espacio ordinario, sustituímos las derivadas sucesivas obtenidas en (1.24) en el desarrollo de Taylor (2.1) y tomando como triedro coordenado al triedro principal $\hat{n}_0$, $\hat{n}_1$, $\hat{n}_2$, las ecuaciones paramétricas de la curva, en un entorno del origen $s = 0$, serán: *

$$x_1 = \vec{x}_1(s)\cdot\hat{n}_0 = s - \frac{s^3}{3!}k_1^2 - \frac{s^4}{8}k_1k_1' + \frac{s^5}{5!}(k_1^4 - 3k_1'^2 - 4k_1k_1'' + k_1^2k_2^2) + \cdots$$

$$x_2 = \vec{x}_1(s)\cdot\hat{n}_1 = \frac{s^2}{2}k_1 + \frac{s^3}{3!}k_1' + \frac{s^4}{4!}(k_1'' - k_1^3 - k_1k_2^2) + \frac{s^5}{5!}(k_1''' - 6k_1^2k_1' - 3k_1'k_2^2 - 3k_1k_2k_2') + \cdots \qquad (2.9)$$

$$x_3 = \vec{x}_1(s)\cdot\hat{n}_2 = \frac{s^3}{3!}k_1k_2 + \frac{s^4}{4!}(2k_1'k_2 + k_1k_2') + \frac{s^5}{5!}(3k_1''k_2 - k_1^3k_2 - k_1k_2^3 + 3k_1'k_2' + k_1k_2'') + \cdots$$

donde k_1 y k_2 se entienden tomadas en el origen $s = 0$.

b) Esfera osculatriz.- Si X_1, X_2, X_3 es el centro de una esfera que pasa por el punto $s = 0$ de la curva (2.9), debe cumplirse

$$(X_1 - x_1)^2 + (X_2 - x_2)^2 + (X_3 - x_3)^2 - R_2^2 = 0 \qquad (2.10)$$

sustituyendo (2.9) en (2.10), desarrollando, simplificando y ordenando con respecto a s, resulta

$$-2X_1 s + (1 - k_1X_2)s^2 + \left(\frac{k_1^2}{3}X_1 - \frac{k_1'}{3}X_2 - \frac{k_1k_2}{3}X_3\right)s^3 + \left(\frac{k_1k_1'}{4}X_1 - \frac{k_1^2}{12} - \frac{k_1''}{12}X_2 + \frac{k_1^3}{12}X_2 + \frac{k_1k_2^2}{12}X_2 - \frac{k_1'k_2}{6}X_3 - \frac{k_1k_2'}{12}X_3\right)s^4 + \cdots = 0 \qquad (2.11)$$

Las coordenadas del centro de la esfera osculatriz, se determinan derivando 3 veces la (2.11) y resultan para $s = 0$:

$$-2X_1 = 0$$

$$2(1 - k_1X_2) = 0$$

$$2(k_1^2X_1 - k_1'X_2 - k_1k_2X_3) = 0$$

---

* Este desarrollo puede verse en Eisenhart, L. P.: An introduction to differential geometry.- Princeton, 1940.- p. 26.

de donde se deduce

$$X_1 = 0$$

(2.12)
$$X_2 = \frac{1}{k_1} = r_1$$

$$X_3 = -\frac{k_1'}{k_1^2\, k_2} = r_1'\, r_2$$

Teniendo en cuenta que el contacto se realiza en el punto $s = 0$, las (2.10) y (2.12) nos dan el radio de la esfera osculatriz

(2.13)
$$R_2^2 = r_1^2 + (r_1'\, r_2)^2$$

e) Ecuación intrínseca de las curvas esféricas.- La 4a. derivada de la expresión (2.11) nos suministra la condición que deben cumplir las curvaturas para que el contacto sea de 4º orden en $s = 0$, y resulta

$$4(3k_1k_1'X_1 - k_1^2 - k_1''X_2 + k_1^3X_2 + k_1k_2^2X_2 - 2k_1'k_2X_3 - k_1k_2'X_3) = 0$$

sustituyendo aquí los valores dados por (2.12), se tiene

$$k_2^2 - \frac{k_1''}{k_1} + \frac{2\, k_1'^2}{k_1^2} + \frac{k_1'\, k_2'}{k_1\, k_2} = 0$$

y operando, resulta finalmente

(2.14)
$$(r_1'\, r_2)' + r_1\, k_2 = 0$$

pero ya hemos visto (1.29'), que si (2.14) se cumple el radio R_2 de la esfera osculatriz es constante, luego la curva en un entorno del punto $s = 0$ está contenida en una superficie esférica, o sea, la curva es esférica en $s = 0$.

Esto es equivalente a considerar a $s = 0$ como raíz de 5º orden de (2.11), entonces los coeficientes de s, s^2, s^3 y s^4 deben ser nulos. Esto nos dice que, la curva (2.9) y la esfera (2.10) tienen 5 puntos comunes confundidos en el punto de contacto $s = 0$.

Luego podemos enunciar el siguiente teorema: si una curva tiene en todo punto un contacto de 4º orden, al menos, con una esfera: la curva es esférica, es decir, el contacto es de orden infinito.

C.- Curvas triesféricas

a) Desarrollo canónico en el entorno de un punto.- Sustituímos ahora las fórmulas correspondientes a este caso (1.36) en (2.1) y tomamos como tetraedre coordenado al tetraedro principal. Las ecuaciones paramétricas de la curva serán:

$$x_1 = s - \frac{s^3 k_1^2}{3!} - \frac{s^4 k_1 k_1'}{8} + \frac{s^5}{5!}(k_1^4 - 3k_1'^2 - 4k_1 k_1'' + k_1^2 k_2^2) + \cdots$$

$$x_2 = \frac{s^2 k_1}{2} + \frac{s^3 k_1'}{3!} + \frac{s^4}{4!}(k_1'' - k_1^3 - k_1 k_2^2) + \frac{s^5}{5!}(k_1''' - 6k_1^2 k_1' - 3k_1' k_2^2 - 3k_1 k_2 k_2') + \cdots$$

(2.15)

$$x_3 = \frac{s^3}{3!} k_1 k_2 + \frac{s^4}{4!}(2k_1' k_2 + k_1 k_2') + \frac{s^5}{5!}(3k_1'' k_2 - k_1^3 k_2 - k_1 k_2^3 + 3k_1' k_2' + k_1 k_2'' - k_1 k_2 k_3^2) + \cdots$$

$$x_4 = \frac{s^4}{4!} k_1 k_2 k_3 + \frac{s^5}{5!}(3k_1' k_2 k_3 + 2k_1 k_2' k_3 + k_1 k_2 k_3') + \cdots$$

donde, como siempre, k_1, k_2, k_3 son los valores que toman en el origen $s = 0$.

b) 3-esfera osculatriz.- Tomamos una 3-esfera, cuyo centro X_1, X_2, X_3, X_4 y que pasa por el punto $s = 0$, es decir

$$(2.16) \quad (X_1 - x_1)^2 + (X_2 - x_2)^2 + (X_3 - x_3)^2 + (X_4 - x_4)^2 - R_3^2 = 0$$

sustituyendo en ésta los valores dados por (2.15) y operando, resulta

$$-2X_1 s + (1 - k_1 X_2) s^2 + \left(\frac{k_1^2}{3} X_1 - \frac{k_1'}{3} X_2 - \frac{k_1 k_2}{3} X_3\right) s^3 +$$

$$+ \left(\frac{k_1 k_1'}{4} X_1 - \frac{k_1^2}{12} - \frac{k_1''}{12} X_2 + \frac{k_1^3}{12} X_2 + \frac{k_1 k_2^2}{12} X_2 - \frac{k_1' k_2}{6} X_3 - \frac{k_1 k_2'}{12} X_3 - \frac{k_1 k_2 k_3}{12} X_4\right) s^4 +$$

$$(2.17) \quad + \left(-\frac{k_1^4}{60} X_1 - \frac{k_1^2 k_2^2}{60} X_1 + \frac{k_1 k_1''}{15} X_1 + \frac{k_1'^2}{20} X_1 - \frac{k_1 k_1'}{12} - \frac{k_1'''}{60} X_2 + \frac{k_1^2 k_1'}{10} X_2 +\right.$$

$$+ \frac{k_1' k_2^2}{20} X_2 + \frac{k_1 k_2 k_2'}{20} X_2 - \frac{k_1 k_2''}{60} X_3 - \frac{k_1' k_2'}{20} X_3 - \frac{k_1'' k_2}{20} X_3 + \frac{k_1^3 k_2}{60} X_3 + \frac{k_1 k_2^3}{60} X_3 +$$

$$\left. + \frac{k_1 k_2 k_3^2}{60} X_3 - \frac{k_1' k_2 k_3}{20} X_4 - \frac{k_1 k_2' k_3}{30} X_4 - \frac{k_1 k_2 k_3'}{60} X_4\right) s^5 + \cdots = 0$$

Las 4 primeras derivadas de (2.17), para $s = 0$, nos dan las coordenadas del centro de la 3-esfera osculatriz de la curva (2.15) en ese punto:

$$-\alpha X_1 = 0$$

$$\alpha(1-k_1X_2) = 0$$

$$\alpha(k_1^2X_1-k_1'X_2-k_1k_2X_3) = 0$$

$$\alpha(-k_1^2+3k_1k_1'X_1-k_1''X_2+k_1^3X_2+k_1k_2^2X_2-2k_1'k_2X_3-k_1k_2'X_3-k_1k_2k_3X_4) = 0$$

de donde

$$X_1 = 0$$

$$X_2 = \frac{1}{k_1} = r_1$$

(2.18) $$X_3 = -\frac{k_1'}{k_1^2k_2} = r_1'r_2$$

$$X_4 = \frac{k_2}{k_1k_3} - \frac{k_1''}{k_1^2k_2k_3} + \frac{2k_1'^2}{k_1^3k_2k_3} + \frac{k_1'k_2'}{k_1^2k_2^2k_3} = (r_1'r_2)'r_3+r_1k_2r_3$$

que se obtienen sustituyendo los valores de X_1 y X_2 dados por las dos primeras en la tercera y X_1, X_2, X_3, a su vez, en la cuarta.

Como el punto de contacto es $s = 0$, las (2.16) y (2.18) nos dan el radio de la 3-esfera osculatriz

(2.19) $$R_3^2 = r_1^2 + (r_1'r_2)^2 + \left((r_1'r_2)'r_3 + r_1k_2r_3\right)^2$$

e) Ecuación intrínseca de las curvas hiperesféricas.- La 5a. derivada de (2.17) nos da la condición que deben cumplir las curvaturas, para que el contacto sea de 5º orden en el punto $s = 0$, y por tanto

$$\alpha(-3k_1k_1'-k_1^4X_1-k_1^2k_2^2X_1+4k_1k_1''X_1+3k_1'^2X_1-k_1'''X_2+6k_1^2k_1'X_2+3k_1'k_2^2X_2+$$
$$+3k_1k_2k_2'X_2-k_1k_2''X_3-3k_1'k_2'X_3-3k_1''k_2X_3+k_1^3k_2X_3+k_1k_2^3X_3+k_1k_2k_3^2X_3-$$
$$-3k_1'k_2k_3X_4-2k_1k_2'k_3X_4-k_1k_2k_3'X_4) = 0$$

Sustituyendo en ésta, las (2.18)

$$k_2k_2' - \frac{k_1'k_2^2}{k_1} - \frac{k_2^2k_3'}{k_3} - \frac{k_1'''}{k_1} + \frac{6k_1'k_1''}{k_1^2} + \frac{3k_1''k_2'}{k_1k_2} + \frac{k_1''k_3'}{k_1k_3} - \frac{6k_1'^3}{k_1^3} - \frac{4k_1'^2k_2'}{k_1^2k_2} -$$
$$- \frac{2k_1'^2k_3'}{k_1^2k_3} + \frac{k_1'k_2''}{k_1k_2} - \frac{2k_1'k_2'^2}{k_1k_2^2} - \frac{k_1'k_2'k_3'}{k_1k_2k_3} - \frac{k_1'k_3^2}{k_1} = 0$$

dividiendo por k_1 k_2 k_3 y operando, resulta finalmente

$$\left[(r_1' r_2)' r_3 + r_1 k_2 r_3\right]' + r_1' r_2 k_3 = 0 \tag{2.20}$$

y hemos visto (1.41'), que si (2.20) se cumple, el radio R_3 de la 3-esfera osculatriz es constante, luego la curva en un entorno del punto $s = 0$, está contenida en el espacio de 3 dimensiones de una 3-esfera, es decir, la curva es triesférica en $s = 0$.

Lo dicho equivale a considerar a $s = 0$ como raíz de 6º orden de (2.17), luego los coeficientes de s, s^2, ... , s^5 deben ser nulos; o sea, la curva (2.15) y la 3-esfera (2.16) tienen 6 puntos comunes confundidos en el punto de contacto $s = 0$.

Luego tenemos el teorema: <u>si una curva del espacio de 4 dimensiones tiene, en todo punto un contacto de 5º orden, al menos, con una tri-esfera; la curva es triesférica, es decir, el contacto es de orden infinito</u>.

D.- Curvas tetraesféricas

a) Desarrollo canónico en el entorno de un punto.- Nos limitaremos en este caso, a dar sólo el desarrollo canónico, puesto que el procedimiento a seguir, para llegar a la ecuación intrínseca, es el mismo que para los casos anteriores.

Sustituímos para esto (1.49) en (2.1) y tomamos como pentaedro coordenado al principal, las ecuaciones paramétricas de la curva, en un entorno del origen s = 0, serán

(2.21)

$$x_1 = s - \frac{s^3}{3!}k_1^2 - \frac{s^4}{8}k_1k_1' + \frac{s^5}{5!}(k_1^4 - 3k_1'^2 - 4k_1k_1'' + k_1^2k_2^2) + \cdots$$

$$x_2 = \frac{s^2}{2}k_1 + \frac{s^3}{3!}k_1' + \frac{s^4}{4!}(k_1'' - k_1^3 - k_1k_2^2) + \frac{s^5}{5!}(k_1''' - 6k_1^2k_1' - 3k_1'k_2^2 - 3k_1k_2k_2') + \cdots$$

$$x_3 = \frac{s^3}{3!}k_1k_2 + \frac{s^4}{4!}(2k_1'k_2 + k_1k_2') + \frac{s^5}{5!}(3k_1''k_2 - k_1^3k_2 - k_1k_2^3 + 3k_1'k_2' + k_1k_2'' - k_1k_2k_3^2) + \cdots$$

$$x_4 = \frac{s^4}{4!}k_1k_2k_3 + \frac{s^5}{5!}(3k_1'k_2k_3 + 2k_1k_2'k_3 + k_1k_2k_3') + \cdots$$

$$x_5 = \frac{s^5}{5!}k_1k_2k_3k_4 + \cdots$$

donde k_1, k_2, k_3, k_4 se entienden tomadas en el origen s = 0.

Capítulo 3.-

ECUACIONES INTRINSECO-POLARES

A.- Curvas esféricas o biesféricas

Si llamamos θ_2 el ángulo que forma el radio R_2 con la binormal de la curva en el punto $\vec{x}_1$ (Fig. 3, p. 10), el centro de la esfera está dado en coordenadas polares por

$$(3.1) \qquad \vec{X}_1 = \vec{x}_1 + R_2 (\operatorname{sen}\theta_2\, \vec{n}_1 + \cos\theta_2\, \vec{n}_2)$$

Ahora bien, si la curva es esférica el centro de la esfera es un punto fijo y el radio es constante, por lo tanto, derivando (3.1) se tiene

$$(1-R_2 k_1 \operatorname{sen}\theta_2)\vec{n}_0 + R_2\cos\theta_2(\theta_2' - k_2)\vec{n}_1 + R_2\operatorname{sen}\theta_2(k_2-\theta_2')\vec{n}_2 = 0$$

Como estos vectores son perpendiculares entre sí, para que su suma sea nula, deben ser nulos cada uno de ellos. Luego, el primer paréntesis da

$$(3.2) \qquad r_1 = R_2 \operatorname{sen}\theta_2$$

pero R_2 es el radio de curvatura de la sección plana normal en la dirección de la tangente, o sea, cuando la normal a la superficie coincide con la normal principal y θ_2 es el complemento del ángulo que forma $(\vec{x}_1 - \vec{X}_1)$ con $\vec{n}_1$, luego (3.2) nos dice que: el centro de curvatura, en un punto de una sección oblicua, es la proyección sobre su plano, del centro de curvatura de la sección normal que tiene la misma tangente, es decir, el conocido teorema de Meusnier.

Derivando (3.2), se ve que la componente de $\vec{n}_1$, es

$$r_1' - R_2\, k_2 \cos\theta_2 = 0$$

$$(3.3) \qquad r_1'\, r_2 = R_2 \cos\theta_2$$

Las (3.2) y (3.3) comprueban por (1.26) la (3.1) y satisfacen (1.27).

Derivando (3.3) y sumándole el producto de (3.2) por k_2, se tiene el último término

$$(r_1'\, r_2)' + r_1\, k_2 = -R_2\,\theta_2' \operatorname{sen}\theta_2 + R_2\, k_2 \operatorname{sen}\theta_2 = 0$$

De donde se deduce: para que la curva sea esférica se debe cumplir

(3.4) $$\vartheta_2' = k_2$$

luego, por definición geométrica de torsión, resulta

$$d\vartheta_2 = d\varphi_2$$

es decir, la diferencia de los ángulos de dos binormales de la curva, con las normales a la superficie esférica, en $\vec{x}(s)$ y $\vec{x}(s + \Delta s)$, es igual al ángulo que forman las binormales entre sí, para $\Delta s \to 0$.

De la cual

$$\vartheta_2 = \varphi_2 + \text{constante}$$

que, con una conveniente elección de la binormal de origen

(3.5) $$\vartheta_2 = \varphi_2$$

Por ésta, (3.4) queda

(3.6) $$r_1 = R_2 \operatorname{sen} \varphi_2$$

o sea, el radio de flexión en un punto de la curva esférica, es igual al producto del radio de la esfera por el seno del ángulo de torsión respectivo.[*]

Para las curvas monoesféricas, o sea para las circunferencias, el ángulo de torsión se mantiene constantemente igual a $\pi/2$ y (3.6) se reduce a (1.15).

---

[*] Loria llega a la (3.6), sustituyendo en (1.27), r_2 por su valor en función del ángulo de torsión, relación que, luego de simplificar, resulta

$$r_1^2 + \left(\frac{dr_1}{d\varphi_2}\right)^2 = R_2^2$$

derivando respecto a φ_2

$$r_1 + \frac{d^2 r_1}{d\varphi_2^2} = 0$$

La integral general de esta ecuación diferencial lineal a coeficientes constantes, es

$$r_1 = e_1 \cos \varphi_2 + e_2 \operatorname{sen} \varphi_2$$

pero las constantes e_1 y e_2 no son arbitrarias entre sí, sino que deben cumplir la primera, luego sustituyendo en la misma

$$e_1^2 + e_2^2 = R_2^2$$

relación que permite hacer

$$e_1 = R_2 \operatorname{sen} \alpha \qquad , \qquad e_2 = R_2 \cos \alpha$$

siendo α una nueva constante, entonces

$$r_1 = R_2 \operatorname{sen} (\varphi_2 + \alpha)$$

eligiendo convenientemente el plano osculador de origen, $\alpha = 0$.

<u>Loria, Gino</u>.- Curve sghembe speciali.- Bologna, 1925.- Volume Secondo, p. 34 y ss.

B.- Curvas triesféricas

Llamamos ahora ϑ_2 al ángulo que forma la proyección de $(\vec{x}_1 - \vec{X}_1)$ sobre el plano $\vec{n}_1, \vec{n}_2$ con el eje $\vec{n}_2$ y ϑ_3 al ángulo de $(\vec{x}_1 - \vec{X}_1)$ con $\vec{n}_3$ (Fig. 4, p. 16). Tenemos entonces

(3.7) $\vec{X}_1 = \vec{x}_1 + R_3\,(\mathrm{sen}\,\vartheta_2\ \mathrm{sen}\,\vartheta_3\ \vec{n}_1 + \cos\vartheta_2\ \mathrm{sen}\,\vartheta_3\ \vec{n}_2 + \cos\vartheta_3\ \vec{n}_3)$

Como antes: si la curva es triesférica el centro de la triesfera es un punto fijo y el radio es constante, por lo cual, derivando (3.7) resulta

$$(1-R_3k_1\mathrm{sen}\vartheta_2\mathrm{sen}\vartheta_3)\vec{n}_0+R_3(\vartheta_2'\cos\vartheta_2\mathrm{sen}\vartheta_3+\vartheta_3'\mathrm{sen}\vartheta_2\cos\vartheta_3-k_2\cos\vartheta_2\mathrm{sen}\vartheta_3)\vec{n}_1+$$

$$+R_3(-\vartheta_2'\mathrm{sen}\vartheta_2\mathrm{sen}\vartheta_3+\vartheta_3'\cos\vartheta_2\cos\vartheta_3+k_2\mathrm{sen}\vartheta_2\mathrm{sen}\vartheta_3-k_3\cos\vartheta_3)\vec{n}_2+$$

$$+R_3(-\vartheta_3'\mathrm{sen}\vartheta_3+k_3\cos\vartheta_2\mathrm{sen}\vartheta_3)\vec{n}_3=0$$

El primer paréntesis nos da, teniendo en cuenta que deben ser nulos

(3.8) $$r_1 = R_3\ \mathrm{sen}\,\vartheta_2\ \mathrm{sen}\,\vartheta_3$$

Derivando (3.8), observamos que la componente de $\vec{n}_1$, es

(3.8') $$r_1' - R_3\ k_2\ \cos\vartheta_2\ \mathrm{sen}\,\vartheta_3 = 0 \qquad \therefore$$

(3.9) $$r_1'\ r_2 = R_3\ \cos\vartheta_2\ \mathrm{sen}\,\vartheta_3$$

Derivando ahora (3.9) y sumándole el producto de (3.8) por k_2, resulta la componente según $\vec{n}_2$:

$$(r_1'\ r_2)' + r_1\ k_2 - R_3\ k_3\ \cos\vartheta_3 = 0$$

(3.10) $$(r_1'\ r_2)'\ r_3 + r_1\ k_2\ r_3 = R_3\ \cos\vartheta_3$$

Las (3.8), (3.9) y (3.10) comprueban por (1.38) la (3.7) y satisfacen (1.39).

Derivando (3.10) y sumándole el producto de r_1' (3.8') por $r_2\ k_3$, se obtiene la componente según la trinormal

$$\left[(r_1'r_2)'r_3+r_1k_2r_3\right]'+r_1'r_2k_3=-R_3\vartheta_3'\mathrm{sen}\vartheta_3+R_3k_3\cos\vartheta_2\mathrm{sen}\vartheta_3=0$$

luego: para que la curva sea triesférica se debe cumplir

(3.11) $$\vartheta_3' = k_3\ \cos\vartheta_2$$

Cuando $\vartheta_3 \equiv \pi/2$, estas expresiones nos dan las establecidas anteriormente para las curvas esféricas.

C.- Curvas tetraesféricas

Para el centro de la tetraesfera, ponemos

(3.12)

$$\vec{X}_1=\vec{x}_1+R_4(\operatorname{sen}\vartheta_2\operatorname{sen}\vartheta_3\operatorname{sen}\vartheta_4\vec{n}_1+\cos\vartheta_2\operatorname{sen}\vartheta_3\operatorname{sen}\vartheta_4\vec{n}_2+\cos\vartheta_3\operatorname{sen}\vartheta_4\vec{n}_3+\cos\vartheta_4\vec{n}_4)$$

y procediendo igual, se tiene

$$(1-R_4k_1\operatorname{sen}\vartheta_2\operatorname{sen}\vartheta_3\operatorname{sen}\vartheta_4)\vec{n}_0+$$

$$+R_4(\vartheta_2'\cos\vartheta_2\operatorname{sen}\vartheta_3\operatorname{sen}\vartheta_4+\vartheta_3'\operatorname{sen}\vartheta_2\cos\vartheta_3\operatorname{sen}\vartheta_4+\vartheta_4'\operatorname{sen}\vartheta_2\operatorname{sen}\vartheta_3\cos\vartheta_4-$$

$$-k_2\cos\vartheta_2\operatorname{sen}\vartheta_3\operatorname{sen}\vartheta_4)\vec{n}_1+$$

$$+R_4(-\vartheta_2'\operatorname{sen}\vartheta_2\operatorname{sen}\vartheta_3\operatorname{sen}\vartheta_4+\vartheta_3'\cos\vartheta_2\cos\vartheta_3\operatorname{sen}\vartheta_4+\vartheta_4'\cos\vartheta_2\operatorname{sen}\vartheta_3\cos\vartheta_4+$$

$$+k_2\operatorname{sen}\vartheta_2\operatorname{sen}\vartheta_3\operatorname{sen}\vartheta_4-k_3\cos\vartheta_3\operatorname{sen}\vartheta_4)\vec{n}_2+$$

$$+R_4(-\vartheta_3'\operatorname{sen}\vartheta_3\operatorname{sen}\vartheta_4+\vartheta_4'\cos\vartheta_3\cos\vartheta_4+k_3\cos\vartheta_2\operatorname{sen}\vartheta_3\operatorname{sen}\vartheta_4-k_4\cos\vartheta_4)\vec{n}_3+$$

$$+R_4(-\vartheta_4'\operatorname{sen}\vartheta_4+k_4\cos\vartheta_3\operatorname{sen}\vartheta_4)\vec{n}_4=0$$

Luego

(3.13) $$r_1=R_4\operatorname{sen}\vartheta_2\operatorname{sen}\vartheta_3\operatorname{sen}\vartheta_4$$

Derivando (3.13), vemos que la componente de $\vec{n}_1$ es

(3.13') $$r_1'-R_4k_2\cos\vartheta_2\operatorname{sen}\vartheta_3\operatorname{sen}\vartheta_4=0$$

(3.14) $$r_1'r_2=R_4\cos\vartheta_2\operatorname{sen}\vartheta_3\operatorname{sen}\vartheta_4$$

Derivando (3.14) y sumándole el producto de (3.13) por k_2; la componente según $\vec{n}_2$ resulta

(3.14') $$(r_1'r_2)'+r_1k_2-R_4k_3\cos\vartheta_3\operatorname{sen}\vartheta_4=0$$

(3.15) $$(r_1'r_2)'r_3+r_1k_2r_3=R_4\cos\vartheta_3\operatorname{sen}\vartheta_4$$

Derivando (3.15) y sumándole el producto de r_1' (3.13') por r_2k_3; la componente de $\vec{n}_3$ es igual a

$$\left[(r_1'r_2)'r_3+r_1k_2r_3\right]'+r_1'r_2k_3-R_4k_4\cos\vartheta_4=0 \quad \therefore$$

(3.16) $$\left[(r_1'r_2)'r_3+r_1k_2r_3\right]'r_4+r_1'r_2k_3r_4=R_4\cos\vartheta_4$$

Las (3.13), (3.14), (3.15) y (3.16) comprueban, mediante (1.51), la (3.12) y satisfacen (1.52).

Para $\vartheta_4=\pi/2$, obtenemos el caso anterior.

Si derivamos (3.16) y le sumamos el producto de $(r_1' r_2)' + r_1 k_2$ (3.14') por $r_3 k_4$; se tiene la componente según la tetranormal

$$\left\{\left[(r_1' r_2)' r_3 + r_1 k_2 r_3\right]' r_4 + r_1' r_2 k_3 r_4\right\}' + (r_1' r_2)' r_3 k_4 + r_1 k_2 r_3 k_4 =$$

$$= -R_4 \theta_4' \operatorname{sen}\theta_4 + R_4 k_4 \cos\theta_3 \operatorname{sen}\theta_4 = 0$$

por tanto: para que la curva sea tetraesférica se debe cumplir

(3.17) $$\theta_4' = k_4 \cos \theta_3$$

D.- Curvas m-esféricas

El centro de la m-esfera de radio R_m, está dado por

$$\vec{\lambda}_1 = \vec{x}_1 + R_m(\operatorname{sen}\vartheta_2 \operatorname{sen}\vartheta_3 \ldots \operatorname{sen}\vartheta_m \vec{n}_1 + \cos\vartheta_2 \operatorname{sen}\vartheta_3 \ldots \operatorname{sen}\vartheta_m \vec{n}_2 + \ldots$$
$$\ldots + \cos\vartheta_{m-1} \operatorname{sen}\vartheta_m \vec{n}_{m-1} + \cos\vartheta_m \vec{n}_m) \tag{3.18}$$

donde $\vec{x}_1$ es el vector posición de un punto de la curva m-esférica; $\vartheta_2, \vartheta_3, \ldots, \vartheta_m$ son los ángulos que determinan la dirección de la normal en el punto $\vec{x}_1$ a la m-esfera, o sea la dirección de R_m, con respecto al $(m + 1)$-edro de referencia, unido al punto $\vec{x}_1$.

El radio de flexión, resulta función del radio R_m de la m-esfera y de los senos de los ángulos $\vartheta_2, \vartheta_3, \ldots, \vartheta_m$.

$$r_1 = R_m \operatorname{sen}\vartheta_2 \operatorname{sen}\vartheta_3 \ldots \operatorname{sen}\vartheta_m \tag{3.19}$$

Teniendo en cuenta los resultados obtenidos y las (1.58) podemos poner

$$\begin{aligned}
e_1 r_1 &= R_m \operatorname{sen}\vartheta_2 \operatorname{sen}\vartheta_3 \ldots \operatorname{sen}\vartheta_m \\
e_2 r_2 &= R_m \cos\vartheta_2 \operatorname{sen}\vartheta_3 \ldots \operatorname{sen}\vartheta_m \\
e_3 r_3 &= \qquad R_m \cos\vartheta_3 \ldots \operatorname{sen}\vartheta_m \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
e_m r_m &= \qquad\qquad R_m \cos\vartheta_m
\end{aligned} \tag{3.20}$$

y para que la curva sea m-esférica, se debe cumplir

$$\vartheta_m' = k_m \cos\vartheta_{m-1} \tag{3.21}$$

Capítulo 4.-

m-CIRCUNFERENCIAS

Dentro de las curvas esféricas, veremos ahora el caso de la familia de las curvas de curvaturas constantes no nulas, a las que llamaremos m-circunferencias.

Con la ayuda de las fórmulas ya obtenidas, se pueden dar fácilmente sus expresiones y la fórmula general de estas curvas.

1.- ECUACIONES INTRINSECAS

a) Espacios E_2.- La circunferencia o monocircunferencia constituye la primera curva de la familia. El centro y la ecuación intrínseca, considerando el radio constante, están dados por (1.12) y (1.15)

(4.1) $$\vec{X}_1 = \vec{x}_1 + r_1 \vec{n}_1$$

(4.2) $$R_1^2 = r_1^2$$

b) Espacios E_3.- Tomando las curvaturas constantes en (1.26) y (1.27), volvemos a obtener las anteriores

(4.3) $$\vec{X}_1 = \vec{x}_1 + r_1 \vec{n}_1$$

(4.4) $$R_2^2 = r_1^2$$

Además (1.29) nos indica que, para este caso, es

(4.5) $$k_2 = 0$$

es decir: no existen curvas esféricas, cuyas dos curvaturas sean constantes, ninguna nula; o sea, no existen bicircunferencias.

Igualando componentes de (4.3) y (3.1), se obtiene

$$R_2 \operatorname{sen} \theta_2 = r_1$$

$$R_2 \cos \theta_2 = 0$$

de donde

(4.6) $$\cos \theta_2 = 0 \quad \therefore \quad \theta_2 = 2n\pi + \pi/2 \qquad (n \text{ número entero})$$

La primera, que cumple con la (3.2), vuelve a dar la (4.4), y las (4.5) y (4.6) satisfacen (3.4)

c) Espacios E_4.- De (1.38) y (1.39), se deduce

(4.7) $$\vec{X}_1 = \vec{x}_1 + r_1 \vec{n}_1 + r_1 k_2 r_3 \vec{n}_3$$

(4.8) $$R_3^2 = r_1^2 + (r_1 k_2 r_3)^2$$

La (4.8) es la ecuación intrínseca de las *tricircunferencias*, que coincide con la dada por Borůvka.*

Igualando componentes de (4.7) y (3.7), se tiene

$$R_3 \operatorname{sen}\theta_2 \operatorname{sen}\theta_3 = r_1$$

$$R_3 \cos\theta_2 \operatorname{sen}\theta_3 = 0$$

$$R_3 \cos\theta_3 = r_1 k_2 r_3$$

de donde

(4.9) $$\cos\theta_2 = 0$$

luego

$$R_3 \operatorname{sen}\theta_3 = r_1$$

$$R_3 \cos\theta_3 = r_1 k_2 r_3$$

y como las curvaturas y el radio de la triesfera son constantes, resulta

(4.10) $$\theta_3 = \text{const.}$$

Las (4.9) y (4.10) satisfacen la (3.11).

De éstas, resulta

(4.11) $$\vec{X}_1 = \vec{x}_1 + R_3 (\vec{n}_1 \operatorname{sen}\theta_3 + \vec{n}_3 \cos\theta_3)$$

d) *Espacios* E_5.- Haciendo las curvaturas constantes en (1.51) y (1.52) volvemos a obtener

(4.12) $$\vec{X}_1 = \vec{x}_1 + r_1 \vec{n}_1 + r_1 k_2 r_3 \vec{n}_3$$

(4.13) $$R_4^2 = r_1^2 + (r_1 k_2 r_3)^2$$

La (1.54) nos da

(4.14) $$k_4 = 0$$

o sea: *no existen curvas tetraesféricas, cuyas cuatro curvaturas sean constantes, ninguna nula*; es decir, *no existen tetracircunferencias*.

---

* *Borůvka, O.*- Sur les hypercirconférences et certaines surfaces paraboliques dans l'espace euclidien à quatre dimensions.- Publications de la Faculté des Sciences de l'Université Masaryk.- Nº 146.- Brno, 1931.

Igualando componentes de (4.12) y (3.12), resulta

$$R_4 \operatorname{sen} \vartheta_2 \operatorname{sen} \vartheta_3 \operatorname{sen} \vartheta_4 = r_1$$

$$R_4 \cos \vartheta_2 \operatorname{sen} \vartheta_3 \operatorname{sen} \vartheta_4 = 0$$

$$R_4 \cos \vartheta_3 \operatorname{sen} \vartheta_4 = r_1 k_2 r_3$$

$$R_4 \cos \vartheta_4 = 0$$

de donde

(4.15) $$\cos \vartheta_2 \equiv \cos \vartheta_4 \equiv 0$$

luego

$$R_4 \operatorname{sen} \vartheta_3 = r_1$$

$$R_4 \cos \vartheta_3 = r_1 k_2 r_3$$

y como las curvaturas y el radio de la tetraesfera son constantes

(4.16) $$\vartheta_3 = \text{const.}$$

Las (4.14) y (4.15) satisfacen (3.17).

e) <u>Espacios E_6</u>.- De las fórmulas (1.68) y (1.69), se tiene

(4.17) $$\vec{X}_1 = \vec{x}_1 + r_1 \vec{n}_1 + r_1 k_2 r_3 \vec{n}_3 + r_1 k_2 r_3 k_4 r_5 \vec{n}_5$$

(4.18) $$R_5^2 = r_1^2 + (r_1 k_2 r_3)^2 + (r_1 k_2 r_3 k_4 r_5)^2$$

ésta última es la ecuación intrínseca de las <u>pentacircunferencias</u>.

Igualando componentes de (4.17) con la correspondiente ecuación intrínseco-polar, resulta

$$R_5 \operatorname{sen} \vartheta_2 \operatorname{sen} \vartheta_3 \operatorname{sen} \vartheta_4 \operatorname{sen} \vartheta_5 = r_1$$

$$R_5 \cos \vartheta_2 \operatorname{sen} \vartheta_3 \operatorname{sen} \vartheta_4 \operatorname{sen} \vartheta_5 = 0$$

$$R_5 \cos \vartheta_3 \operatorname{sen} \vartheta_4 \operatorname{sen} \vartheta_5 = r_1 k_2 r_3$$

$$R_5 \cos \vartheta_4 \operatorname{sen} \vartheta_5 = 0$$

$$R_5 \cos \vartheta_5 = r_1 k_2 r_3 k_4 r_5$$

de donde

(4.19) $$\cos \vartheta_2 \equiv \cos \vartheta_4 \equiv 0$$

luego

$$R_5 \operatorname{sen} \vartheta_3 \operatorname{sen} \vartheta_5 = r_1$$

$$R_5 \cos \vartheta_3 \operatorname{sen} \vartheta_5 = r_1 k_2 r_3$$

$$R_5 \cos \vartheta_5 = r_1 k_2 r_3 k_4 r_5$$

(4.20) θ_3 = const. θ_5 = const.

f) Espacios E_{2p}.- Para un espacio de un número par de dimensiones, se tendrá

(4.21) $\vec{X}_1 = \vec{x}_1 + r_1 \vec{n}_1 + r_1 k_2 r_3 \vec{n}_3 + \ldots + r_1 k_2 \ldots r_{2p-1} \vec{n}_{2p-1}$

(4.22) $R^2_{2p-1} = r_1^2 + (r_1 k_2 r_3)^2 + \ldots + (r_1 k_2 \ldots r_{2p-1})^2$

Como las proyecciones sobre $\vec{n}_0$ y los ejes de subíndice par son nulas, serán

(4.23) $\cos \theta_2 = \cos \theta_4 = \ldots = \cos \theta_{2p-2} = 0$

(4.24) θ_3 = const. , θ_5 = const. , ... , θ_{2p-1} = const.

y

(4.25)

$\vec{X}_1 = \vec{x}_1 + R_{2p-1}(\vec{n}_1 \operatorname{sen}\theta_3 \ldots \operatorname{sen}\theta_{2p-1} + \vec{n}_3 \cos\theta_3 \ldots \operatorname{sen}\theta_{2p-1} + \ldots + \vec{n}_{2p-1}\cos\theta_{2p-1})$

Las (4.23) y (4.24) cumplen la (3.21), en la que m = 2 p - 1.

La (4.22) es la ecuación intrínseca de las <u>(2 p - 1)-circunferencias</u>.

g) <u>Espacios</u> E_{2p+1}.- Para éstos volveríamos a obtener

(4.26) $\vec{X}_1 = \vec{x}_1 + r_1 \vec{n}_1 + r_1 k_2 r_3 \vec{n}_3 + \ldots + r_1 k_2 \ldots r_{2p-1} \vec{n}_{2p-1}$

(4.27) $R^2_{2p} = r_1^2 + (r_1 k_2 r_3)^2 + \ldots + (r_1 k_2 \ldots r_{2p-1})^2$

y

(4.28) $k_{2p} = 0$

es decir, <u>no existen curvas 2 p-esféricas, cuyas 2 p curvaturas sean constantes, ninguna nula</u>; o sea, <u>no existen 2 p-circunferencias</u>.

Además

(4.29) $\cos \theta_2 = \cos \theta_4 = \ldots = \cos \theta_{2p} = 0$

Las (4.28) y (4.29) cumplen la (3.21), en la que m = 2 p.

Estos resultados están de acuerdo con el teorema de Brunel[x] que dice: una curva en un espacio de m dimensiones, cuyas curvaturas son todas constantes, es una hélice o una curva esférica, según que m sea

---

x <u>Cesàro</u>, E.- Vorlesungen über natürliche geometrie.- Leipzig, 1901.- p. 295 y ss.

impar o par.

De los resultados obtenidos podemos enunciar el siguiente teorema general: <u>el centro de la m-esfera en la cual está contenida la m-circunferencia, se halla situado en el subespacio determinado por los ejes intrínsecos de subíndice impar de la curva y el radio de la m-esfera en todo punto de la m-circunferencia, forma ángulos constantes con dichos ejes.</u>

II.- ECUACIONES CARTESIANAS

a) <u>Espacios E_2</u>.- Teniendo en cuenta que las curvaturas son constantes, las (1.10) se reducen a

$$\begin{aligned}
\vec{x}_1' &= \vec{n}_0\\
\vec{x}_1'' &= k_1\,\vec{n}_1\\
\vec{x}_1''' &= -\,k_1^2\,\vec{n}_0\\
\vec{x}_1^{iv} &= -\,k_1^3\,\vec{n}_1\\
\vec{x}_1^{v} &= k_1^4\,\vec{n}_0\\
&\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}$$

Y, en general

$$\left.\begin{aligned}
\vec{x}_1^{(2p)} &= (-1)^{p+1}\,k_1^{2p-1}\,\vec{n}_1\\
\vec{x}_1^{(2p+1)} &= (-1)^{p}\,k_1^{2p}\,\vec{n}_0
\end{aligned}\right\}\quad p = 0,\,1,\,2,\,\ldots$$

En este caso, del desarrollo de Taylor en un entorno del punto $s = 0$ (2.1), resultan

$$(4.30)\qquad \begin{aligned}
x_1 &= s - \frac{s^3}{3!}\,k_1^2 + \frac{s^5}{5!}\,k_1^4 - \cdots + (-1)^p\,\frac{s^{2p+1}}{(2p+1)!}\,k_1^{2p} + \cdots\\
x_2 &= \frac{s^2}{2}\,k_1 - \frac{s^4}{4!}\,k_1^3 + \frac{s^6}{6!}\,k_1^5 - \cdots + (-1)^{p+1}\,\frac{s^{2p}}{(2p)!}\,k_1^{2p-1} + \cdots
\end{aligned}$$

Derivando la primera de las (4.30) y sacando factor común k_1 a partir del segundo término y procediendo de igual manera con la segunda, con k_1 de toda la expresión, obtenemos

$$x_1' = 1 - k_1\left(\frac{s^2}{2}\,k_1 - \frac{s^4}{4!}\,k_1^3 + \frac{s^6}{6!}\,k_1^5 - \cdots + (-1)^{p+1}\,\frac{s^{2p}}{(2p)!}\,k_1^{2p-1} + \cdots\right)$$

$$x_2' = k_1\left(s - \frac{s^3}{3!}\,k_1^2 + \frac{s^5}{5!}\,k_1^4 - \cdots + (-1)^p\,\frac{s^{2p+1}}{(2p+1)!}\,k_1^{2p} + \cdots\right)$$

de donde

$$x_1' = 1 - k_1 x_2 \qquad (4.31)$$
$$x_2' = k_1 x_1$$

De (1.2):

$$(1 - k_1 x_2)^2 + (k_1 x_1)^2 = 1$$

$$k_1^2 x_1^2 + k_1^2 x_2^2 - 2 k_1 x_2 = 0 \qquad (4.32)$$

La (4.32) es la <u>ecuación cartesiana de una circunferencia</u> que pasa por el origen de coordenadas.

Traslado los ejes

$$x_1 = \xi_1 \qquad\qquad x_2 = \xi_2 + \frac{1}{k_1}$$

obtenemos

$$k_1^2 \xi_1^2 + k_1^2 \xi_2^2 = 1 \qquad (4.32')$$

b) <u>Espacios E_4</u>.- Las derivadas sucesivas (1.36), se reducen a

$$\vec{x}_1' = \vec{n}_0$$
$$\vec{x}_1'' = k_1 \vec{n}_1$$
$$\vec{x}_1''' = -k_1^2 \vec{n}_0 + k_1 k_2 \vec{n}_2$$
$$\vec{x}_1^{IV} = -k_1 (k_1^2 + k_2^2) \vec{n}_1 + k_1 k_2 k_3 \vec{n}_3$$
$$\vec{x}_1^{V} = k_1^2 (k_1^2 + k_2^2) \vec{n}_0 - k_1 k_2 (k_1^2 + k_2^2 + k_3^2) \vec{n}_2$$
$$\vec{x}_1^{VI} = k_1 \left[k_1^2 (k_1^2 + k_2^2) + k_2^2 (k_1^2 + k_2^2 + k_3^2) \right] \vec{n}_1 - k_1 k_2 k_3 (k_1^2 + k_2^2 + k_3^2) \vec{n}_3$$

. . . .

Podemos escribir las anteriores de la siguiente manera:

$$\vec{x}_1' = k_1^2 a_0 \vec{n}_0 - k_1 k_2 a_1 \vec{n}_2$$
$$\vec{x}_1'' = k_1 a_2 \vec{n}_1 - k_1 k_2 k_3 a_1 \vec{n}_3$$
$$\vec{x}_1''' = - k_1^2 a_2 \vec{n}_0 + k_1 k_2 a_3 \vec{n}_2$$
$$\vec{x}_1^{IV} = - k_1 a_4 \vec{n}_1 + k_1 k_2 k_3 a_3 \vec{n}_3$$

. . . .

Y, en general

$$\vec{x}_1^{(2p)} = (-1)^{p+1} k_1 a_{2p} \vec{n}_1 + (-1)^p k_1 k_2 k_3 a_{2p-1} \vec{n}_3$$
$$\vec{x}_1^{(2p+1)} = (-1)^p k_1^2 a_{2p} \vec{n}_0 + (-1)^{p+1} k_1 k_2 a_{2p+1} \vec{n}_2 \qquad p=0,1,2,\ldots$$

Las constantes introducidas están dadas por

$$
(4.33) \qquad
\begin{aligned}
a_{2p} &= k_1^2\, a_{2p-2} + k_2^2\, a_{2p-1} \\
a_{2p+1} &= \quad a_{2p} \quad + k_3^2\, a_{2p-1}
\end{aligned}
\qquad p = 0,\ 1,\ 2,\ \dots
$$

y considerando

$$
a_{-2} = \frac{k_2^2 + k_3}{k_1^4\, k_3} \quad , \qquad a_{-1} = -\frac{1}{k_1^2\, k_3}
$$

De donde resultan

$$
a_0 = \frac{1}{k_1^2}\ ,\ a_1 = 0\ ,\ a_2 = a_3 = 1\ ,\ \dots
$$

El desarrollo en el entorno de $s = 0$, nos da las siguientes ecuaciones paramétricas

$$
\begin{aligned}
x_1 &= s - \frac{s^3}{3!}k_1^2 a_2 + \frac{s^5}{5!}k_1^2 a_4 - \dots + (-1)^p \frac{s^{2p+1}}{(2p+1)!}k_1^2 a_{2p} + \dots \\
x_2 &= \frac{s^2}{2}k_1 a_2 - \frac{s^4}{4!}k_1 a_4 + \frac{s^6}{6!}k_1 a_6 - \dots + (-1)^{p+1}\frac{s^{2p}}{(2p)!}k_1 a_{2p} + \dots \\
(4.34)\qquad x_3 &= \frac{s^3}{3!}k_1 k_2 a_3 - \frac{s^5}{5!}k_1 k_2 a_5 + \frac{s^7}{7!}k_1 k_2 a_7 - \dots + (-1)^{p+1}\frac{s^{2p+1}}{(2p+1)!}k_1 k_2 a_{2p+1} + \dots \\
x_4 &= \frac{s^4}{4!}k_1 k_2 k_3 a_3 - \frac{s^6}{6!}k_1 k_2 k_3 a_5 + \frac{s^8}{8!}k_1 k_2 k_3 a_7 - \dots + (-1)^p \frac{s^{2p}}{(2p)!}k_1 k_2 k_3 a_{2p-1} + \dots
\end{aligned}
$$

Derivando éstas, obtenemos

$$
x_1' = 1 - k_1\left(\frac{s^2}{2}k_1 a_2 - \frac{s^4}{4!}k_1 a_4 + \frac{s^6}{6!}k_1 a_6 - \dots + (-1)^{p+1}\frac{s^{2p}}{(2p)!}k_1 a_{2p} + \dots\right)
$$

$$
x_2' = k_1\left[s a_2 - \frac{s^3}{3!}a_4 + \frac{s^5}{5!}a_6 - \dots + (-1)^p \frac{s^{2p+1}}{(2p+1)!}a_{2p+2} + \dots\right]
$$

Expresando las a por la primera de las (4.33), se tiene para x_2'

$$
\begin{aligned}
x_2' &= k_1\left[s - \frac{s^3}{3!}(k_1^2 a_2 + k_2^2 a_3) + \frac{s^5}{5!}(k_1^2 a_4 + k_2^2 a_5) - \dots + (-1)^p \frac{s^{2p+1}}{(2p+1)!}(k_1^2 a_{2p} + k_2^2 a_{2p+1}) \dots\right] = \\
&= k_1\left[s - \frac{s^3}{3!}k_1^2 a_2 + \frac{s^5}{5!}k_1^2 a_4 - \dots + (-1)^p \frac{s^{2p+1}}{(2p+1)!}k_1^2 a_{2p} + \dots\right] - \\
&\quad - k_2\left[\frac{s^3}{3!}k_1 k_2 a_3 - \frac{s^5}{5!}k_1 k_2 a_5 + \frac{s^7}{7!}k_1 k_2 a_7 - \dots + (-1)^{p+1}\frac{s^{2p+1}}{(2p+1)!}k_1 k_2 a_{2p+1} + \dots\right]
\end{aligned}
$$

$$
x_3' = k_2\left[\frac{s^2}{2}k_1 a_3 - \frac{s^4}{4!}k_1 a_5 + \frac{s^6}{6!}k_1 a_7 - \dots + (-1)^{p+1}\frac{s^{2p}}{(2p)!}k_1 a_{2p+1} + \dots\right]
$$

De la segunda de las (4.33), se tiene

$$
\begin{aligned}
x_3' &= k_2\left[\frac{s^2}{2}k_1 a_2 - \frac{s^4}{4!}k_1(a_4 + k_3^2 a_3) + \frac{s^6}{6!}k_1(a_6 + k_3^2 a_5) - \dots\right. \\
&\qquad \left.\dots + (-1)^{p+1}\frac{s^{2p}}{(2p)!}k_1(a_{2p} + k_3^2 a_{2p-1}) + \dots\right] = \\
&= k_2\left[\frac{s^2}{2}k_1 a_2 - \frac{s^4}{4!}k_1 a_4 + \frac{s^6}{6!}k_1 a_6 - \dots + (-1)^{p+1}\frac{s^{2p}}{(2p)!}k_1 a_{2p} + \dots\right] +
\end{aligned}
$$

$$-k_3\left(\frac{s^4}{4!}k_1k_2k_3a_3 - \frac{s^6}{6!}k_1k_2k_3a_5 + \frac{s^8}{8!}k_1k_2k_3a_7 - \dots + (-1)^p\frac{s^{2p}}{(2p)!}k_1k_2k_3a_{2p-1}+\dots\right)$$

$$x_4' = k_3\left(\frac{s^3}{3!}k_1k_2a_3 - \frac{s^5}{5!}k_1k_2a_5 + \frac{s^7}{7!}k_1k_2a_7 - \dots + (-1)^{p+1}\frac{s^{2p+1}}{(2p+1)!}k_1k_2a_{2p+1}+\dots\right)$$

Hemos obtenido, por lo tanto

$$(4.35)\qquad \begin{aligned} x_1' &= 1 - k_1\,x_2 \\ x_2' &= k_1\,x_1 - k_2\,x_3 \\ x_3' &= k_2\,x_2 - k_3\,x_4 \\ x_4' &= k_3\,x_3 \end{aligned}$$

y de (1.2), se tiene

$$(1 - k_1\,x_2)^2 + (k_1\,x_1 - k_2\,x_3)^2 + (k_2\,x_2 - k_3\,x_4)^2 + (k_3\,x_3)^2 = 1 \;.\dot{.}\;.$$

$$(4.36)\quad k_1^2x_1^2+(k_1^2+k_2^2)x_2^2+(k_2^2+k_3^2)x_3^2+k_3^2x_4^2-2k_1k_2x_1x_3-2k_2k_3x_2x_4-2k_1x_2=0$$

La (4.36) es la <u>ecuación cartesiana de una tricircunferencia</u> que pa sa por el origen de coordenadas.

Con la traslación de ejes dada por

$$x_1 = \xi_1 \;,\; x_2 = \xi_2 + \frac{1}{k_1} \;,\; x_3 = \xi_3 \;,\; x_4 = \xi_4 + \frac{k_2}{k_1\,k_3}$$

es decir, llevando el origen de coordenadas al centro de la triesfe - ra, en la cual está contenida la tricircunferencia, obtenemos la ex - presión

$$(4.36')\quad k_1^2\xi_1^2+(k_1^2+k_2^2)\xi_2^2+(k_2^2+k_3^2)\xi_3^2+k_3^2\xi_4^2-2k_1k_2\xi_1\xi_3-2k_2k_3\xi_2\xi_4=1$$

e) <u>Espacios E_6</u>.- Procediendo de igual manera, tenemos que las deri- vadas sucesivas de la curva en este espacio, suponiendo las curvatu - ras constantes, resultan

$$\vec{x}_1' = \vec{n}_0$$

$$\vec{x}_1'' = k_1\vec{n}_1$$

$$\vec{x}_1''' = -k_1^2\vec{n}_0 + k_1k_2\vec{n}_2$$

$$\vec{x}_1^{IV} = -k_1(k_1^2+k_2^2)\vec{n}_1 + k_1k_2k_3\vec{n}_3$$

$$\vec{x}_1^{V} = k_1^2(k_1^2+k_2^2)\vec{n}_0 - k_1k_2(k_1^2+k_2^2+k_3^2)\vec{n}_2 + k_1k_2k_3k_4\vec{n}_4$$

$$\vec{x}_1' = k_1^2 a_0\, \vec{n}_0 - k_1 k_2\, a_1\, \vec{n}_2 + k_1 k_2 k_3 k_4\, b_0\, \vec{n}_4$$

$$\vec{x}_1'' = k_1 a_2\, \vec{n}_1 - k_1 k_2 k_3 b_1\, \vec{n}_3 + k_1 k_2 k_3 k_4 k_5 b_0\, \vec{n}_5$$

$$\vec{x}_1''' = -k_1^2 a_2\, \vec{n}_0 + k_1 k_2\, a_3\, \vec{n}_2 - k_1 k_2 k_3 k_4\, b_2\, \vec{n}_4$$

$$\vec{x}_1^{iv} = -k_1 a_4\, \vec{n}_1 + k_1 k_2 k_3 b_3\, \vec{n}_3 - k_1 k_2 k_3 k_4 k_5 b_2\, \vec{n}_5$$

. . . .

$$\vec{x}_1^{(2p)} = (-1)^{p+1} k_1 a_{2p} \vec{n}_1 + (-1)^p\, k_1 k_2 k_3 b_{2p-1} \vec{n}_3 + (-1)^{p+1} k_1 k_2 k_3 k_4 k_5 b_{2p-2} \vec{n}_5$$

$$\vec{x}_1^{(2p+1)} = (-1)^p\, k_1^2 a_{2p} \vec{n}_0 + (-1)^{p+1} k_1 k_2\, a_{2p+1} \vec{n}_2 + (-1)^p\, k_1 k_2 k_3 k_4\, b_{2p}\, \vec{n}_4$$

para $p = 0, 1, 2, \ldots$

Las constantes introducidas están dadas por las relaciones

$$\begin{aligned} a_{2p} &= k_1^2\, a_{2p-2} + k_2^2\, a_{2p-1} \\ a_{2p+1} &= a_{2p} + k_3^2\, b_{2p-1} \\ b_{2p+1} &= a_{2p+1} + k_4^2\, b_{2p} \\ b_{2p} &= b_{2p-1} + k_5^2\, b_{2p-2} \end{aligned} \qquad p = 0, 1, 2, \ldots \tag{4.37}$$

y considerando que

$$a_{-2} = \frac{1}{k_1^4}\ ,\ a_{-1} = 0\ ,\ b_{-1} = -\frac{1}{k_1^2\, k_3^2}\ ,\ b_{-2} = \frac{1}{k_1^2\, k_3^2\, k_5^2}$$

De esta manera, resultan los valores

$$a_0 = \frac{1}{k_1^2}\ ,\ b_0 = a_1 = b_1 = b_2 = 0\ ,\ a_2 = a_3 = b_3 = b_4 = 1\ ,\ \ldots$$

El desarrollo en el entorno de $s = 0$, de las siguientes ecuaciones paramétricas

$$x_1 = s - \frac{s^3}{3!}k_1^2 a_2 + \frac{s^5}{5!}k_1^2 a_4 - \cdots + (-1)^p \frac{s^{2p+1}}{(2p+1)!} k_1^2 a_{2p} + \cdots$$

$$x_2 = \frac{s^2}{2}k_1 a_2 - \frac{s^4}{4!}k_1 a_4 + \frac{s^6}{6!}k_1 a_6 - \cdots + (-1)^{p+1} \frac{s^{2p}}{(2p)!} k_1 a_{2p} + \cdots$$

$$x_3 = \frac{s^3}{3!}k_1 k_2 a_3 - \frac{s^5}{5!}k_1 k_2 a_5 + \frac{s^7}{7!}k_1 k_2 a_7 - \cdots + (-1)^{p+1} \frac{s^{2p+1}}{(2p+1)!} k_1 k_2 a_{2p+1} + \cdots$$

$$x_4 = \frac{s^4}{4!}k_1 k_2 k_3 b_3 - \frac{s^6}{6!}k_1 k_2 k_3 b_5 + \frac{s^8}{8!}k_1 k_2 k_3 b_7 - \cdots + (-1)^p \frac{s^{2p}}{(2p)!} k_1 k_2 k_3 b_{2p-1} + \cdots$$

(4.38)

$$x_5 = \frac{s^5}{5!}k_1 k_2 k_3 k_4 b_4 - \frac{s^7}{7!}k_1 k_2 k_3 k_4 b_6 + \frac{s^9}{9!}k_1 k_2 k_3 k_4 b_8 - \cdots$$

$$\cdots + (-1)^p \frac{s^{2p+1}}{(2p+1)!} k_1 k_2 k_3 k_4 b_{2p} + \cdots$$

Derivando, tenemos

$$x_1' = 1-k_1\left[\frac{s^2}{2}k_1a_2 - \frac{s^4}{4!}k_1a_4 + \frac{s^6}{6!}k_1a_6 - \cdots + (-1)^{p+1}\frac{s^{2p}}{(2p)!}k_1a_{2p} + \cdots\right] = 1-k_1x_2$$

$$x_2' = sk_1 - \frac{s^3}{3!}k_1(k_1^2a_2+k_2^2a_3) + \frac{s^5}{5!}k_1(k_1^2a_4+k_2^2a_5) - \cdots$$
$$\cdots + (-1)^p\frac{s^{2p+1}}{(2p+1)!}k_1(k_1^2a_{2p}+k_2^2a_{2p+1}) + \cdots = k_1x_1-k_2x_3$$

$$x_3' = \frac{s^2}{2}k_1k_2a_2 - \frac{s^4}{4!}k_1k_2(a_4+k_3^2b_3) + \frac{s^6}{6!}k_1k_2(a_6+k_3^2b_5) - \cdots$$
$$\cdots + (-1)^{p+1}\frac{s^{2p}}{(2p)!}k_1k_2(a_{2p}+k_3^2b_{2p-1}) + \cdots = k_2x_2-k_3x_4$$

$$x_4' = \frac{s^3}{3!}k_1k_2k_3a_3 - \frac{s^5}{5!}k_1k_2k_3(a_5+k_4^2b_4) + \frac{s^7}{7!}k_1k_2k_3(a_7+k_4^2b_6) - \cdots$$
$$\cdots + (-1)^{p+1}\frac{s^{2p+1}}{(2p+1)!}k_1k_2k_3(a_{2p+1}-k_4^2b_{2p}) + \cdots = k_3x_3-k_4x_5$$

$$x_5' = \frac{s^4}{4!}k_1k_2k_3k_4b_3 - \frac{s^6}{6!}k_1k_2k_3k_4(b_5+k_5^2b_4) + \frac{s^8}{8!}k_1k_2k_3k_4(b_7+k_5^2b_6) - \cdots$$
$$\cdots + (-1)^p\frac{s^{2p}}{(2p)!}k_1k_2k_3k_4(b_{2p-1}+k_5^2b_{2p-2}) + \cdots = k_4x_4-k_5x_6$$

$$x_6' = k_5\left[\frac{s^5}{5!}k_1k_2k_3k_4b_4 - \frac{s^7}{7!}k_1k_2k_3k_4b_6 + \frac{s^9}{9!}k_1k_2k_3k_4b_8 - \cdots\right.$$
$$\left.\cdots + (-1)^p\frac{s^{2p+1}}{(2p+1)!}k_1k_2k_3k_4b_{2p} + \cdots\right] = k_5x_5$$

Al resultado que hemos obtenido

$$(4.59)\qquad \begin{aligned} x_1' &= 1 - k_1x_2 \\ x_2' &= k_1x_1 - k_2x_3 \\ x_3' &= k_2x_2 - k_3x_4 \\ x_4' &= k_3x_3 - k_4x_5 \\ x_5' &= k_4x_4 - k_5x_6 \\ x_6' &= k_5x_5 \end{aligned}$$

le aplicamos (1.2):

$$(1-k_1x_2)^2+(k_1x_1-k_2x_3)^2+(k_2x_2-k_3x_4)^2+(k_3x_3-k_4x_5)^2+(k_4x_4-k_5x_6)^2+(k_5x_5)^2 = 1$$

$$(4.60)\qquad \therefore\ k_1^2x_1^2+(k_1^2+k_2^2)x_2^2+(k_2^2+k_3^2)x_3^2+(k_3^2+k_4^2)x_4^2+(k_4^2+k_5^2)x_5^2+k_5^2x_6^2-$$
$$-2k_1k_2x_1x_3-2k_2k_3x_2x_4-2k_3k_4x_3x_5-2k_4k_5x_4x_6-2k_1x_2=0$$

La (4.60) es la <u>ecuación cartesiana de una pentacircunferencia</u> que pasa por el origen de coordenadas.

Con el cambio de ejes

$$x_1=\xi_1\ ,\quad x_2=\xi_2+\frac{1}{k_1}\ ,\quad x_3=\xi_3\ ,\quad x_4=\xi_4+\frac{k_2}{k_1k_3}\ ,\quad x_5=\xi_5\ ,\quad x_6=\xi_6+\frac{k_2k_4}{k_1k_3k_5}$$

obtenemos

$$\begin{aligned}&k_1^2\xi_1^2+(k_1^2+k_2^2)\xi_2^2+(k_2^2+k_3^2)\xi_3^2+(k_3^2+k_4^2)\xi_4^2+(k_4^2+k_5^2)\xi_5^2+k_5^2\xi_6^2-\\ &-2k_1k_2\xi_1\xi_3-2k_2k_3\xi_2\xi_4-2k_3k_4\xi_3\xi_5-2k_4k_5\xi_4\xi_6=1\end{aligned}\qquad (4.40')$$

d) <u>Espacios E_{2p}</u>.- De acuerdo con las expresiones deducidas, podemos inferir que para estos espacios, se encontrará

$$\begin{aligned}x'_1&=1-k_1x_2\\ x'_2&=k_1x_1-k_2x_3\\ x'_3&=k_2x_2-k_3x_4\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\\ x'_{2p-1}&=k_{2p-2}x_{2p-2}-k_{2p-1}x_{2p}\\ x'_{2p}&=k_{2p-1}x_{2p-1}\end{aligned}\qquad (4.41)$$

con lo que la <u>ecuación cartesiana de la (2p-1)-circunferencia</u> que pasa por el origen, será

$$\begin{aligned}&k_1^2x_1^2+(k_1^2+k_2^2)x_2^2+(k_2^2+k_3^2)x_3^2+\dots+(k_{2p-2}^2+k_{2p-1}^2)x_{2p-1}^2+k_{2p-1}^2x_{2p}^2-\\ &-2k_1k_2x_1x_3-2k_2k_3x_2x_4-\dots-2k_{2p-2}k_{2p-1}x_{2p-2}x_{2p}-2k_1x_2=0\end{aligned}\qquad (4.42)$$

y con el origen de coordenadas en el centro de la (2p-1)-esfera

$$\begin{aligned}&k_1^2\xi_1^2+(k_1^2+k_2^2)\xi_2^2+(k_2^2+k_3^2)\xi_3^2+\dots+(k_{2p-2}^2+k_{2p-1}^2)\xi_{2p-1}^2+k_{2p-1}^2\xi_{2p}^2-\\ &-2k_1k_2\xi_1\xi_3-2k_2k_3\xi_2\xi_4-\dots-2k_{2p-2}k_{2p-1}\xi_{2p-2}\xi_{2p}=1\end{aligned}\qquad (4.42')$$

Capítulo 5.-

CURVAS n-ESFERICAS A FLEXION Y A TORSION CONSTANTE

Mediante las ecuaciones intrínsecas generales, el tratamiento de casos particulares, como el de las curvas esféricas a flexión o a torsión constante, es sumamente sencillo, por lo cual sólo haremos una ligera referencia al respecto.

I.- CURVAS DE MONGE

Las curvas a flexión constante se denominan también curvas de Monge. En el plano la única curva de Monge es la circunferencia. Para el espacio ordinario, las curvas esféricas de Monge son, asimismo, circunferencias.

En el espacio tetradimensional, tenemos por (1.38)

$$\vec{X}_1 = \vec{x}_1 + r_1 \vec{n}_1 + r_1 k_2 r_3 \vec{n}_3 \tag{5.1}$$

y por (1.39)

$$(k_2 r_3)^2 = (k_1 R_3)^2 - 1 \tag{5.2}$$

estas expresiones son formalmente iguales a las de las tricircunferencias, pero debe tenerse presente que aquí, sólo es constante la flexión k_1.

La (5.2) pone en evidencia una interesante propiedad de las curvas triesféricas: <u>si la flexión es constante, también es constante la relación entre la torsión y la tercera curvatura</u>.

Este resultado se comprueba mediante la (1.41), que se reduce a

$$(k_2 r_3)' = 0 \tag{5.3}$$

Para el espacio de 5 dimensiones, de (1.51), se obtiene

$$\vec{X}_1 = \vec{x}_1 + r_1 \vec{n}_1 + r_1 k_2 r_3 \vec{n}_3 + r_1 (k_2 r_3)' r_4 \vec{n}_4 \tag{5.4}$$

y de (1.52)

$$(k_2 r_3)^2 + \left((k_2 r_3)' r_4\right)^2 = (k_1 R_4)^2 - 1 \tag{5.5}$$

$$\left((k_2 r_3)' r_4\right)' + k_2 r_3 k_4 = 0 \tag{5.6}$$

De esta manera, pueden tratarse los espacios de mayor número de dimensiones.

fera en un punto de la curva, es perpendicular al plano rectificante de la curva en dicho punto.

II.- CURVAS A TORSION CONSTANTE.

Para el espacio de tres dimensiones, de la ecuación general de las curvas esféricas (1.27), se obtiene

$$k_2 = \frac{r_1'}{\sqrt{R_2^2 - r_1^2}}$$

luego

$$\int_\Gamma k_2 \, ds = \int \frac{dr_1}{\sqrt{R_2^2 - r_1^2}}$$

haciendo el cambio de variables, definido por (3.2), se deduce

(5.7) $$\int_\Gamma k_2 \, ds = \vartheta_2 = \text{arc sen} \frac{r_1}{R_2}$$

de donde

$$\oint_\Gamma k_2 \, ds = 0$$

que es la conocida propiedad de que la integral curvilínea de la torsión a lo largo de una curva esférica cerrada y sin puntos dobles, es nula.

Ahora bien, si la torsión es una constante, no nula, se tiene de (5.7)

(5.8) $$r_1 = R_2 \, \text{sen} \, (k_2 \, s)$$

que satisface la ecuación general (1.27), luego (5.8) es la expresión de las curvas esféricas a torsión constante.

Teniendo en cuenta (3.4), resulta

$$\Delta \vartheta_2 = k_2 \, \Delta s$$

es decir, el ángulo que forma la normal a la superficie esférica con la binormal de la curva, es proporcional al arco de la curva desde un punto tomado como origen.

En el espacio de 4 dimensiones, de (1.39) se tiene

$$R_3^2 = r_1^2 + (r_1' \, r_2)^2 + r_3^2 \, (r_1' \, r_2 + r_1 \, k_2)^2$$

y podrían darse así, las expresiones correspondientes para otras curvaturas y otros espacios.

Capítulo 6.-

CASOS PARTICULARES DE CURVAS ESFERICAS

Mediante el empleo de las fórmulas halladas, vamos a tratar algunos casos particulares de curvas que se apoyan sobre la esfera ordinaria.

a) Hélice.- La condición necesaria y suficiente para que una curva sea una hélice o de igual pendiente, es que se cumpla en todo punto de la misma la relación

(6.1) $\qquad \dfrac{k_1}{k_2} = \text{const.} \qquad\qquad \dfrac{r_2}{r_1} = e$

Reemplazando r_1 y r_2 por sus valores dados por (5.2) y (5.4), se tiene

$$\frac{ds}{e\,R_2} = \operatorname{sen}\vartheta_2\, d\vartheta_2$$

integrando entre 0 y s, y despejando ϑ_2

$$\vartheta_2 = \operatorname{arc\,cos}\left(-\frac{s}{e\,R_2}\right)$$

derivando respecto a ϑ_2

$$1 = \frac{r_2}{\sqrt{e^2\,R_2^2 - s^2}}$$

de donde

(6.2)
$$r_2 = \sqrt{e^2\,R_2^2 - s^2}$$
$$r_1 = \frac{1}{e}\sqrt{e^2\,R_2^2 - s^2}$$

expresiones que cumplen (6.1) y satisfacen la ecuación general (1.27) (x).

Supongamos que la razón de las curvaturas, sea una cierta función del parámetro s, es decir

---

(x) Blaschke ha deducido estas ecuaciones en forma directa, tomando

$$e = \operatorname{tg}\alpha$$

siendo α el ángulo constante, formado por la tangente en cualquier punto de la curva, con una dirección fija del espacio. Se tiene

$$r_2 = r_1\operatorname{tg}\alpha$$

sustituído este valor en la ecuación general (1.27), resulta

$$\frac{r_1\,dr_1}{\sqrt{R_2^2 - r_1^2}}\operatorname{tg}\alpha = ds$$

integrando entre s = 0 y s

$$s = -\operatorname{tg}\alpha\sqrt{R_2^2 - r_1^2}$$

y finalmente

$$r_1 = \sqrt{R_2^2 - s^2\operatorname{ctg}^2\alpha}$$

Blaschke, W.- Vorlesungen über differentialgeometrie.- Berlin, 1930.-

$$\frac{r_1}{r_2} = f(s) \tag{6.3}$$

Reemplazando en ésta los radios de curvatura por (3.2) y (3.4) e integrando, se tiene

$$- R_2 \cos \vartheta_2 = \int f(s)\, ds$$

designando por $F(s)$ una primitiva de $f(s)$ y despejando ϑ_2,

$$\vartheta_2 = \operatorname{arc} \cos \left(- \frac{F(s)}{R_2} \right)$$

derivando respecto a ϑ_2

$$1 = \frac{r_2 \, f(s)}{\sqrt{R_2^2 - F(s)^2}}$$

luego

$$r_2 = \frac{1}{f(s)} \sqrt{R_2^2 - F(s)^2}$$
$$r_1 = \sqrt{R_2^2 - F(s)^2} \tag{6.4}$$

Las (6.4), que cumplen (1.27), comprenden como caso particular a (6.2), pues si tomamos en (6.3) $1/c$ en lugar de $f(s)$, la primitiva es

$$F(s) = s/c$$

tomando nula la constante de integración y las (6.4) se reducen a (6.2).

Por ejemplo, si $f(s)$ es una función lineal del arco

$$f(s) = 2\, c_1\, s + c_2$$

resulta

$$F(s) = c_1\, s^2 + c_2\, s + c_3$$

y sustituídos estos valores en (6.4), se tiene

$$r_1 = \sqrt{R_2^2 - (c_1\, s^2 + c_2\, s + c_3)^2}$$
$$r_2 = \frac{\sqrt{R_2^2 - (c_1\, s^2 + c_2\, s + c_3)^2}}{2\, c_1\, s + c_2}$$

b) <u>Curva de Loria</u>.- Llamaremos así a la curva caracterizada por

$$r_1\, r_2 = \text{const.} \tag{6.5}$$

Procediendo análogamente, se tiene

$$\frac{R_2}{c}\, ds = \frac{d\vartheta_2}{\operatorname{sen}^2 \vartheta_2}$$

integrando entre $s = 0$ y s

$$\frac{R_2\, s}{c} = \lg \operatorname{tg} \frac{\vartheta_2}{2}$$

despejando ϑ_2

$$\vartheta_2 = 2 \operatorname{arc\,tg} e^{R_2 s/c}$$

derivando respecto a ϑ_2

$$1 = 2\,\frac{\frac{R_2}{c}\, r_2\, e^{R_2 s/c}}{1 + e^{2R_2 s/c}}$$

y finalmente, por (6.5)

$$r_2 = \frac{c}{R_2}\,\frac{e^{R_2 s/c} + e^{-R_2 s/c}}{2}$$

(6.6)

$$r_1 = R_2\,\frac{2}{e^{R_2 s/c} + e^{-R_2 s/c}}$$

o, en funciones hiperbólicas

$$r_2 = \frac{c}{R_2} \operatorname{ch} \frac{R_2\, s}{c}$$

(6.6')

$$r_1 = \frac{2}{\operatorname{ch} \frac{R_2\, s}{c}}$$

las que cumplen (1.27).

Se observa, al margen, que la expresión de r_2 es formalmente la ecuación de una catenaria de base el arco s, eje de simetría r_2 y ordenada del vértice c/R_2.

Como en el caso de la hélice, podemos generalizar este resultado. Si

(6.7) $\qquad k_1\, k_2 = f(s) \qquad\qquad \frac{1}{r_1\, r_2} = f(s)$

resulta, luego de reemplazar e integrar

$$\int f(s)\, ds = \frac{1}{R_2} \lg \operatorname{tg} \frac{\vartheta_2}{2}$$

designando por $F(s)$ una primitiva de $f(s)$

$$\vartheta_2 = 2 \operatorname{arc\,tg} e^{R_2 F(s)}$$

derivando respecto a ϑ_2

$$r_2 = \frac{1}{R_2\, f(s)}\,\frac{e^{R_2 F(s)} + e^{-R_2 F(s)}}{2} = \frac{\operatorname{ch}\left[R_2\, F(s)\right]}{R_2\, f(s)}$$

(6.8)

$$r_1 = R_2\,\frac{2}{e^{R_2 F(s)} + e^{-R_2 F(s)}} = \frac{R_2}{\operatorname{ch}\left[R_2\, F(s)\right]}$$

BIBLIOGRAFIA

Nádeník, Zbyněk.- Les courbes de Bertrand dans l'espace a cinq dimensions.- Čehoslovack. Mat. Ž. 2 (77), 57 - 87 (1952).

Grane, Louis C.- A necessary and sufficient condition that a curve lie on a hyperquadric.- Proc. Amer. Math. Soc. 2, 607 - 612 (1951).

Borace, O.- Su di una particolare curva di cui siano assegnate la curvatura e la torsione in funzione dell'arco.- Rend. Accad. Sci. Fis. Mat. Napoli (4) 14 (1946 - 47) 155 - 160 (1948).

Saban, Giacomo.- Sulle curve sghembe in uno Sn.- Univ. Roma. Ist. Naz. Alta Mat. Rend. Mat. e Appl. (5) 9, 309 - 341 (1950).

Avakumović, Vojislav G.- Über geschlossene Kurven auf der Kugel.- Srpska Akad. Nauka. Zbornik Radova, Knj. 7, Matematički Inst., Knj. 1, 101 - 108 (1951).

Pylarinos, O.- Sur une relation entre les courbes sphériques et les courbes de Bertrand.- Bull. Sci. Math. (2) 75, 91 - 96 (1951).

E A De Cesare

Profesor Dr. Elías A. De Cesare

Aiub

Alberto Aiub