Biblioteca Digital
F C E N - U B A

BIBLIOTECA CENTRAL LUIS F LELOIR
BIBLIOTECA CENTRAL LELOIR
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES UBA

Tesis de Posgrado

Espectroscopios - beta Tipo Kofoed - Hansen : Optica electrónica

Mallmann, Carlos Alberto

1954

Tesis presentada para obtener el grado de Doctor en Ciencias Físico-Matemáticas de la Universidad de Buenos Aires

Este documento forma parte de la colección de tesis doctorales y de maestría de la Biblioteca Central Dr. Luis Federico Leloir, disponible en digital.bl.fcen.uba.ar. Su utilización debe ser acompañada por la cita bibliográfica con reconocimiento de la fuente.

This document is part of the doctoral theses collection of the Central Library Dr. Luis Federico Leloir, available in digital.bl.fcen.uba.ar. It should be used accompanied by the corresponding citation acknowledging the source.

Cita tipo APA:
Mallmann, Carlos Alberto. (1954). Espectroscopios - beta Tipo Kofoed - Hansen : Optica electrónica. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad de Buenos Aires.
http://digital.bl.fcen.uba.ar/Download/Tesis/Tesis_0790_Mallmann.pdf

Cita tipo Chicago:
Mallmann, Carlos Alberto. "Espectroscopios - beta Tipo Kofoed - Hansen : Optica electrónica". Tesis de Doctor. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad de Buenos Aires. 1954.
http://digital.bl.fcen.uba.ar/Download/Tesis/Tesis_0790_Mallmann.pdf

EXACTAS UBA
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales

UBA
Universidad de Buenos Aires

Dirección: Biblioteca Central Dr. Luis F. Leloir, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Universidad de Buenos Aires. Intendente Güiraldes 2160 - C1428EGA - Tel. (++54 +11) 4789-9293

Contacto: digital@bl.fcen.uba.ar

FCEN-BA.

ESPECTROSCOPIO -BETA DEL TIPO DE KOFOED-HANSEN

OPTICA ELECTRONICA

RESUMEN

por Carlos Alberto Mallmann.

Res. de Tesis 790

R 790

FCEFN-BA.

ESPECTROSCOPIO- BETA DEL TIPO DE KOFOED-HANSEN[1]

OPTICA ELECTRONICA.

RESUMEN

por Carlos Alberto Mallmann.

Comparando las propiedades de otros tipos de espectroscopios beta con este, se llega a la conclusión que es el único que no tiene una relación entre poder colector y resolución del tipo de

$$\frac{\Omega}{4\pi} \simeq \frac{\Delta p}{p}$$

Esta propiedad y el hecho que Kofoed-Hansen et.al.[1] solo tratan un caso particular de este tipo de espectrómetro, nos indujo a desarrollar completamente la teoría de éstos.-

Las ecuaciones del movimiento las tomamos del trabajo de H.O.W.Richardson[2], sobre trayectorias de partículas cargadas en campos magnéticos dados por

$$H_z = H_r = 0 \quad y \quad H_\phi = A/r \quad .$$

Luego resolvemos las ecuaciones para $p_\phi = 0$ siguiendo a Kofoed-Hansen et.al.[1], é introduciendo el parámetro n que permite estudiar el caso en que la partícula describe varios bucles. A diferencia de Kofoed-Hansen et.al.[1] consideramos el enfoque para una curva límite de incidencia cualquiera. La formación de imágen también la calculamos para el caso general y en una forma que creemos es más correcta que la dada en[1]. Logramos integrar en primera aproximación la ecuación del movimiento según ϕ para $p_\phi \neq 0$ cosa que H.O.W.Richardson[2] hace mediante una integración numérica y Kofoed-Hansen et.al.[1] no hacen.-

Damos la fórmula general para la dispersión, el poder resolutor de base y el poder colector.

F.C.E.F.N.-B.A.

Agregamos una serie de gráficos que permiten darse una idea de la influencia de los distintos parámetros.-

Lo anterior es la teoría de un instrumento ideal sin campos magnéticos dispersos, etc.

Hacemos un análisis de las posibles imperfecciones siguiendo en esto a O.B.Nielsen(3).-

B I B L I O G R A F I A

(1) O.Kofoed-Hansen, J.Lindhard y O.B.Nielsen
Kgl.Danske.Vid.Sel.Mat.Fys.Medd. 25, Nº 16 (1950)

(2) H.O.W.Richardson -Proc.Phys.Soc. 59 , 792 (1947)

ESPECTROSCOPIOS- BETA. TIPO KOFOED- HANSEN.

OPTICA ELECTRONICA.

por

Carlos Alberto Mallmann

Tesis 790

Tesis 790

FCFFN-RA.

§1. INTRODUCCION.

En los últimos años han sido propuestas una serie de formas distintas de diseñar espectroscopios beta. Resúmenes excelentes de su teoría y propiedades han sido dadas por E.Persico y C.Geoffrion [1]; N.F.Vester [2] y O.B.Nielsen [3]. El análisis de las técnicas experimentales empleadas en ellos ha sido dado por C.Sharp Cook [4].-

Del análisis de los diferentes tipos existentes se deduce que en todos ellos el ancho de línea es aproximadamente igual a la transmisión [5] $\frac{\Delta p}{p} \simeq \frac{\Omega}{4\pi}$ dentro de un factor 2 ó 3.-

Para las experiencias en física nuclear es fundamental mejorar esta relación. Kofoed -Hansen et. al.[6] propusieron un nuevo tipo de espectroscopio que permite realizarlo. En un modelo de este obtuvieron una resolución del 2% y una transmisión del 12%.[2]-

La óptica electrónica dada por Kofoed-Hansen, et. al., trata un caso muy particular de todos los posibles. Es por esta causa y por ciertas dificultades que encontré en el tratamiento dado por ellos, que creo necesario desarrollar en todo detalle la óptica de este tipo de instrumento.-

§2. CAMPO MAGNETICO.

En el tipo de espectrómetro beta considerado, las componentes del campo magnético $\vec{H}$ referido a un sistema de coordenadas cilíndricas (z; r; ϕ) son

$$H_z = 0 \;; \quad H_r = 0 \;; \quad H_\phi = A/r \qquad (1)$$

si se supone que en la superficie límite del toro seccionado, cuyo eje de simetría cilíndrica es z , el campo magnético pasa en forma discontinua del valor A/r a cero. Esto equivale a despreciar las lineas de fuerza dispersas cuya influencia analizaremos en el § 12.-

El campo magnético es nulo fuera del toro y varía según A/r en el interior, cualquiera sea la forma de la sección, según un plano $\phi = c^{te}$.

§ 3. VECTOR POTENCIAL MAGNETICO .

El vector potencial magnético $\vec{A}$ cumple la relación

$$\operatorname{rot} \vec{A} = \vec{H} \qquad (2)$$

Expresando esta condición en coordenadas cilíndricas y suponiendo $A_z = A_z(r)$; $A_r = o$; $A_\phi = o$; resulta

$$A_z(r) = A \ln r/b \qquad (3)$$

donde b es una constante arbitraria.

El vector potencial magnético así deducido, se puede utilizar sólo en el interior del toro y no en la superficie límite del mismo.-

§ 4. ECUACIONES TRIDIMENSIONALES DE LAS TRAYECTORIAS DE PARTICULAS CARGADAS.

H.O.W.Richardson (8) estudió detalladamente las ecuaciones tridimensionales de las trayectorias de partículas cargadas en este campo magnético. Se dan a continuación los resultados obtenidos en dicho trabajo necesarios para el estudio de nuestro caso particular. -

El Lagrangiano relativista para una partícula de masa en reposo m_0 y carga e , en unidades electromagnéticas, moviéndose con velocidad $\vec{v}$ en un campo magnético de vector potencial magnético A , es

$$L = m_0 c^2 \left(1 - \sqrt{1-\beta^2}\right) + e\,(\vec{v} \cdot \vec{A}) \qquad (4)$$

donde c = velocidad de la luz, y $\beta = \frac{v}{c}$.

$v^2 = \dot{z}^2 + \dot{r}^2 + r^2 \dot{\phi}^2$ es una constante del movimiento, porque la fuerza de Lorentz es perpendicular a la velocidad (energía constante).

Reemplazando (3) en (4) resulta

$$L = m_0 c^2 \left(1 - \sqrt{1-\beta^2}\right) + e A \dot{z} \ln r/b \qquad (5)$$

De las ecuaciones de Lagrange se deduce

$$\dot{z} = \frac{Ae}{m} \ln r/a \qquad (6)$$

si $r=a$ cuando $\dot{z}=0$ y $m = m_0/\sqrt{1-\beta^2}$

$$\ddot{r} = -\frac{Ae}{m}\cdot\frac{\dot{z}}{r} + p_\phi^2/m^2 r^3 \qquad (7)$$

y

$$p_\phi = c^{te}. \qquad (8)$$

Introduciendo (6) en (7) é integrando se obtiene

$$\dot{r} = v\sqrt{1-\left(\frac{a_0}{r}\right)^2-\left(\frac{\ln r/a}{K}\right)^2} \qquad (9)$$

donde

$$K = -\frac{mv}{Ae} = -\frac{p}{Ae} = -\frac{(B\rho)}{A} \qquad (10)$$

y

$$a_0 = p_\phi/p \qquad (11)$$

Se define ahora el ángulo ψ por

$$\dot{z}/v = \cos\psi \qquad (12)$$

que es el ángulo que forma el vector velocidad $\vec{v}$, con el eje de las z positivas. Se obtiene entonces

$$z = aK\int \frac{\cos\psi\, e^{-K\cos\psi}}{\sqrt{1-\left(\frac{a_0}{a}\right)^2\frac{e^{2K\cos\psi}}{\operatorname{sen}^2\psi}}}\,d\psi + z_0 \qquad (13)$$

$$r = a.e^{-K\cos\psi} \qquad (14)$$

$$\phi = \frac{a_0 K}{a}\int \frac{e^{K\cos\psi}}{\sqrt{1-\left(\frac{a_0}{a}\right)^2\frac{e^{2K\cos\psi}}{\operatorname{sen}^2\psi}}}\,d\psi + \phi_0 \qquad (15)$$

Estas son las ecuaciones encontradas por H.O.W.Richardson[8], pag. 794.-

§ 5. TRAYECTORIAS PARA PARTICULAS CON $p_\phi = 0$

Para partículas con $p_\phi = 0$ de (11) se deduce que $a_0 = 0$ Introduciendo esta en (15) se obtiene

$$\phi = \phi_0 \qquad (16)$$

es decir, que la trayectoria es plana.-

Reemplazando $a_0 = 0$ en (13) se obtiene una ecuación que junto con la (14) son las ecuaciones paramétricas de la trayectoria plana

$$r = a\, e^{-K\cos\psi} \qquad (14)$$

$$z = aK\int \cos\psi\, e^{-K\cos\psi} d\psi + z_0 \qquad (17)$$

Siguiendo a Kofoed-Hansen, et al [6], estas se transforman en

$$r = a\, e^{-K\cos\psi} \qquad (18\ a)$$

$$z = aK\, U(K;\psi) + z_0 \qquad (18\ b)$$

si se supone que $z = z_0$ para $\psi = \pi$ y se designa por $U(K;\psi)$ a

$$U(K;\psi) = \int_\pi^\psi \cos\psi\, e^{-K\cos\psi} d\psi \qquad (19)$$

La función $U(K;\psi)$ se puede obtener mediante un desarrolo en serie de funciones de Bessel [6]

$$U(K;\psi) = -iJ_1(iK)(\pi-\psi) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}(i)^{n-1}\left[J_{n-1}(iK) - J_{n+1}(iK)\right]\operatorname{sen} n\psi \qquad (20)$$

A partir de este desarrollo es fácil deducir que el movimiento es periódico en la dirección del eje z.

Efectivamente $$z(\psi+2\pi) - z(\psi) = 2\pi a K i J_1(iK) \qquad (21)$$

es el período, puesto que para puntos sobre el eje z distantes en éste valor, se repiten los mismos valores de r

$$r(\psi+2\pi) - r(\psi) = 0 \tag{22}$$

Considerando sólo $0 \leq \psi \leq 2\pi$ las ecuaciones de las trayectorias se pueden escribir

$$r = a e^{-k\cos\psi} \tag{23 a}$$

$$z = a k \left[U(k;\psi) + 2\pi n i J_1(ik) \right] + z_0 \tag{23 b}$$

donde al variar n de a una unidad se van describiendo sucesivamente los distintos bucles de una misma trayectoria.

Cuando n toma los valores

$$\ldots; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; \ldots \tag{24}$$

es $z = z_0$ para $\psi = \pi$ y $n = 0$

y cuando toma los valores

$$\ldots; -\frac{5}{2}; -\frac{3}{2}; -\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{3}{2}; \frac{5}{2}; \ldots \tag{25}$$

es $z = z_0$ para $\psi = 0$ y $n = 1/2$

Los puntos característicos de estas trayectorias se dan en la tabla (1) y se pueden observar en la figura (2 a) y (2 b) que representan trayectorias cuyas constantes características son $k = 0{,}6$ $z_0 = \Delta z_0$; $a = 1$; $n = \ldots; -1; 0; 1; \ldots$ y $k = 0{,}6$ $z_0 = \Delta z_0$; $a = 1$; $n = \ldots; -\frac{3}{2}; -\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{3}{2}; \ldots$ respectivamente.

ψ	z	r
0	$2\pi(n-1/2)\,aK\,iJ_1(iK)+z_0$	$r_{min}=a e^{-K}$
$\pi/2$	$aK\left[U(K;\frac{\pi}{2})+2\pi n\,iJ_1(iK)\right]+z_0$	a
π	$2\pi n\,aK\,iJ_1(iK)+z_0$	$r_{max}=a e^{K}$
$3\pi/2$	$aK\left[U(K;\frac{3\pi}{2})+2\pi n\,iJ_1(iK)\right]+z_0$	a
2π	$2\pi(n+1/2)\,aK\,iJ_1(iK)+z_0$	$r_{min}=a e^{-K}$

TABLA 1

Puntos característicos de las trayectorias planas

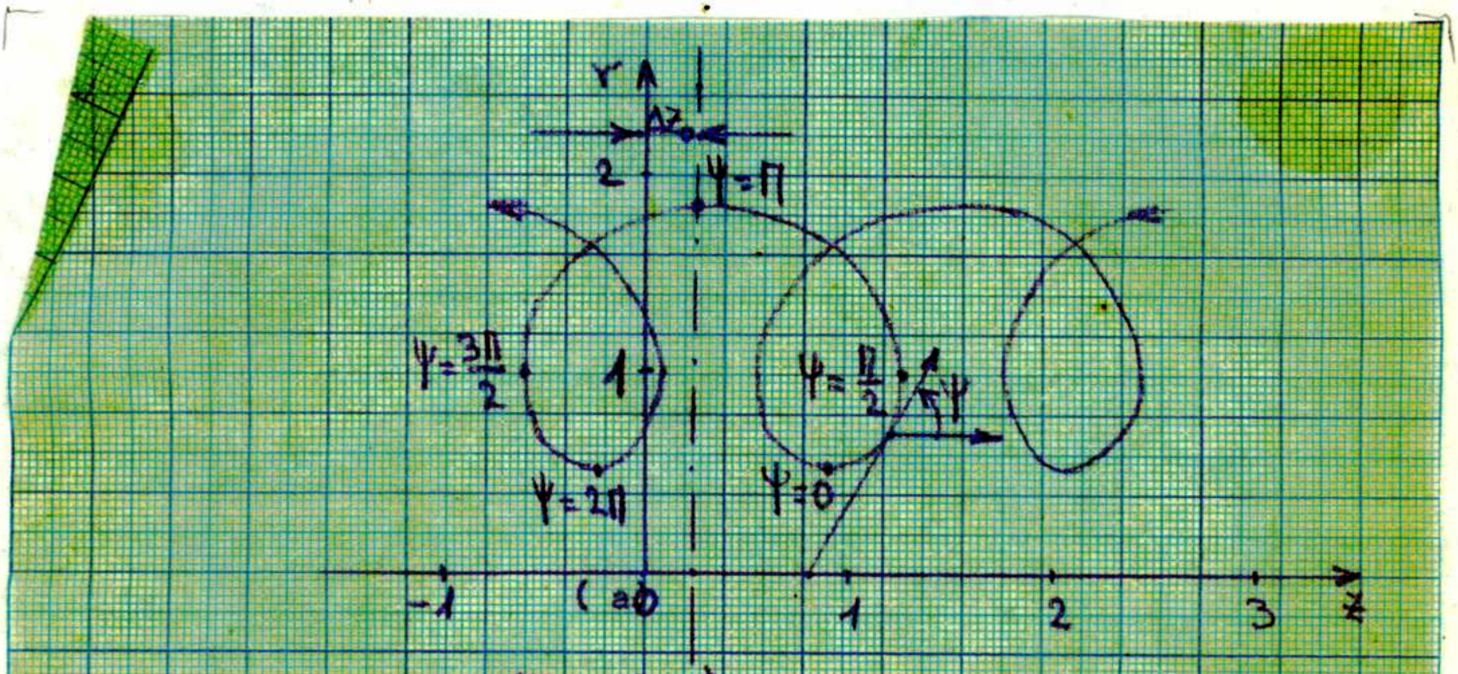


Fig 2 a)

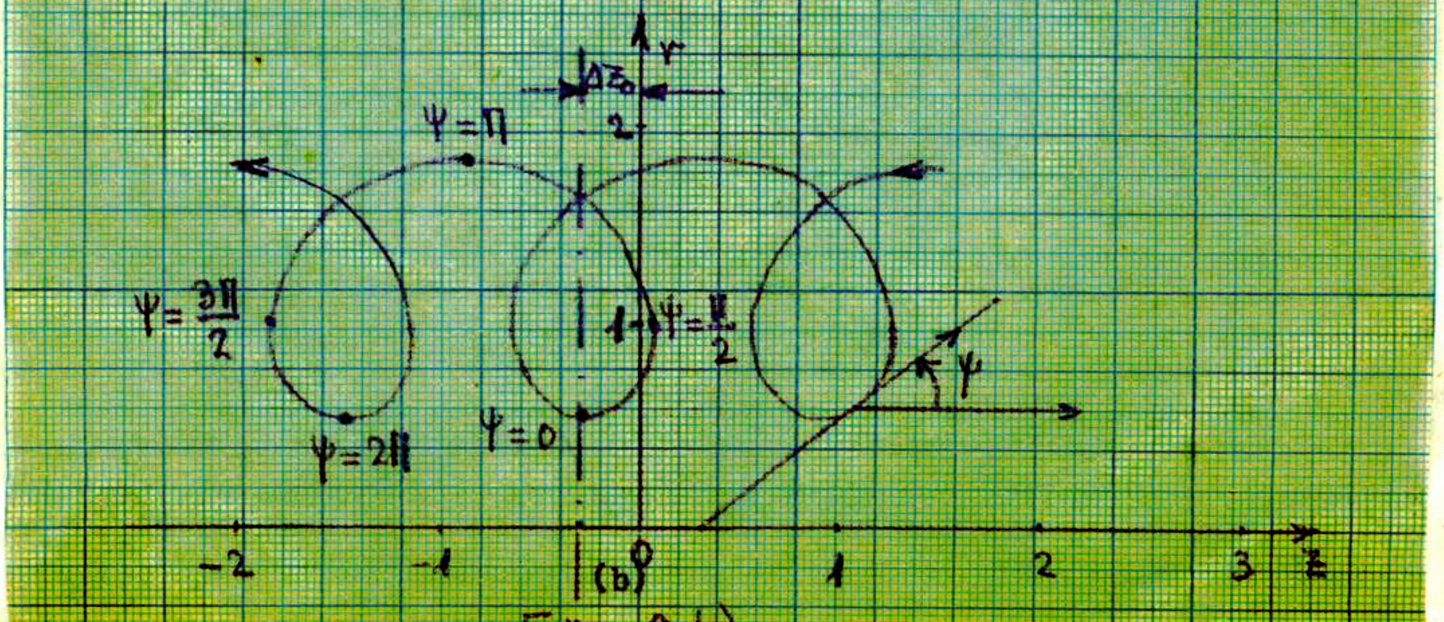


Fig 2b)

Fig. 2. a) Trayectoria con $K=0,6$; $z_0=\Delta z_0$; $a=1$; $n=\dots, -1; 0; 1; \dots$

b) " " $K=0,6$; $z_0=\Delta z_0$; $a=1$; $n=\dots; -1/2; 1/2; \dots$

De las (23) se deduce que:

I) para distintos valores de a, dejando K y z_0 constantes se obtiene una familia de trayectorias homeomorfas respecto del punto $(z_0; 0)$ de escala $\underline{a}$.

En efecto

$$\frac{r_1}{r_2}=\frac{a_1}{a_2} \quad ; \quad \frac{z_1}{z_2}=\frac{a_1}{a_2} \tag{26}$$

A esta familia la llamaremos simétrica por que sus trayectorias tienen como eje de simetría a la recta. $z=z_0$

II) variando z_0 en Δz_0 y dejando K y a constantes toda la trayectoria se desplaza paralelamente al eje z en Δz_0.

III) al variar K y dejar a y z_0 constantes varía la forma de la trayectoria.

La familia monoparamétrica mas general de trayectorias de igual forma ($K=c^{te}$) está dada por

$$r=a\,e^{-K\cos\varphi} \tag{27 a}$$

$$z=aK\left[U(K;\varphi)+2\pi n i J_1(iK)\right]+z_0(a) \tag{27 b}$$

donde z_0 varia en función de a. A ésta la llamaremos asimétrica por no gozar de las propiedades de simetría de la familia con K; z_0 constantes y a variable.-

Las familias con K constantes son las mas importantes puesto que corresponden al caso de un cierto campo magnético actuando sobre partículas de igual impulso pero distintas condiciones iniciales. Son éstas las que interesa enfocar.

Por esta razón, en lo que sigue se considera K constante.

§ 6. FAMILIA DE TRAYECTORIAS PARA PARTICULAS MONOENERGETICAS EMITIDAS POR UNA FUENTE PUNTUAL UBICADA EN (z_s , 0).

La sección arbitraria del toro cuyos segmentos forman las piezas polares del electroimán, con planos $\phi = c^{te}$ determina en ellos la zona en que el campo magnético varía según A/r y la zona en que es nulo.

Toda partícula emitida por la fuente puntual ubicada en (z_s , 0) describirá una trayectoria rectilínea hasta entrar al campo magnético.

Si la curva límite de la sección del toro (ver Fig.3) se da en función del parámetro ψ_s por

$$r_{ls} = z_s f_s(\psi_s) \qquad (28\ a)$$

$$z_{ls} = z_s \left[1 + f_s(\psi_s) \operatorname{ctg} \psi_s\right] \qquad (28\ b)$$

el punto de incidencia al campo magnético de una partícula cuyo ángulo de emisión es ψ_s , será $(r_{ls} ; z_{ls})$. Como además estas partículas tienen $p_\phi = 0$ la trayectoria dentro del campo magnético continuará siendo plana y estará dada por las (23), tomando en cuenta el punto y el ángulo bajo el cual entran al campo magnético.

Estas dos condiciones determinan las trayectorias de las partículas. En efecto, para ellas se debe cumplir

(29 a) $$z_s f_s(\psi_s) = a e^{-K \cos \psi_s}$$

(29 b) $$z_s \left[1 + f_s(\psi_s) \operatorname{ctg} \psi_s\right] = aK\left[U(K; \psi_s) + 2\pi n_s i J_1(iK)\right] + z_0$$

De (29 a) se deduce que

$$a(\psi_s) = z_s f_s(\psi_s) e^{K \cos \psi_s} \qquad (30)$$

y de (29 b) con (30) que

(31) $$z_0(\psi_s) = z_s \left\{1 + f_s(\psi_s) \operatorname{ctg} \psi_s - f_s(\psi_s) \cancel{\operatorname{ctg}}\, e^{K\cos\psi_s} K\left[U(K; \psi_s) + 2\pi n_s i J_1(iK)\right]\right\}$$

Reemplazando (30) y (31) en las (23) se obtienen las ecuaciones de las trayectorias

$$r = z_s f_s(\psi_s) e^{-K(\cos\psi - \cos\psi_s)} \tag{32 a}$$

$$z = z_s \left\{ 1 + f_s(\psi_s) \operatorname{ctg} \psi_s + K f_s(\psi_s) e^{K\cos\psi_s} \left[U(K;\psi) - U(K;\psi_s) + 2\pi(n-n_s) i J_1(iK) \right] \right\} \tag{32 b}$$

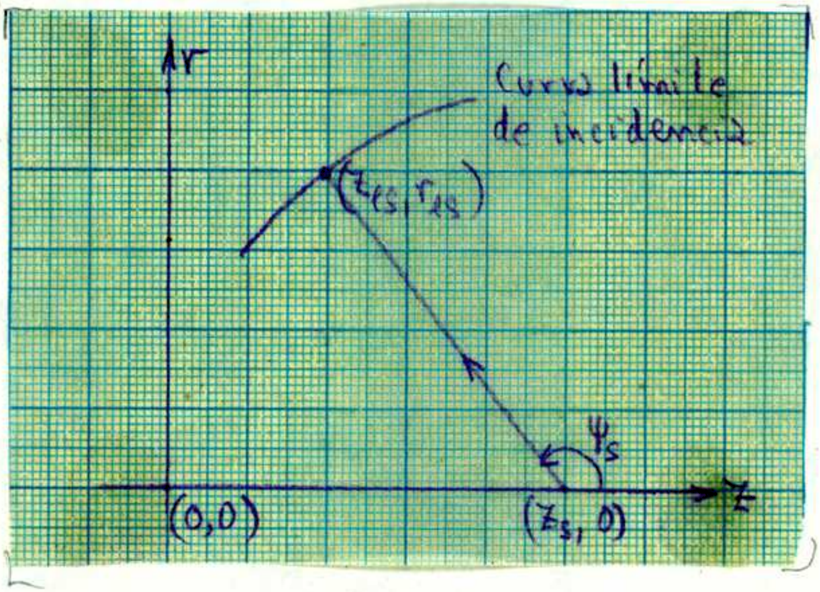


FIG. 3

Curva límite de incidencia.

Las(32) dan, para K constante (energía de las partículas y campo magnetico constantes) y distintos valores de ψ_s (diferentes ángulos de emisión) una familia de trayectorias que en general es asimétrica. Solo en el caso particular en que $z_0(\psi_s) = b_1 = c^{te}$. y por lo tanto que

$$f_s(\psi_s) = \frac{z_s - b_1}{z_s} \cdot \frac{1}{K e^{K\cos\psi_s}\left[U(K;\psi_s) + 2\pi n_s i J_1(iK)\right] - \operatorname{ctg}\psi_s} \qquad (33)$$

la familia de trayectorias resulta simétrica.

§ 7. ENFOQUE.

Las partículas describirán las trayectorias dadas por las (32) hasta que emergan del campo magnético. Fuera de él, las trayectorias son rectilíneas y tangentes a las trayectorias (32) en los puntos de emergencia.-

Para que haya enfoque todos los rayos emergents deben de pasar por el foco (z_f ; 0), es decir, que la curva límite del campo magnético debe ser el lugar geométrico de los puntos de tangencia de las tangentes a las (32) trazadas desde (z_f; 0). Nótese que la curva límite del campo magnético en los planos $\phi = c^{\underline{te}}$ no queda definida solo por (r_{ls} ; z_{ls}).

Si se llama ψ_f al ángulo entre la partícula emergente y el eje de las z positivas (ver Fig.4) la

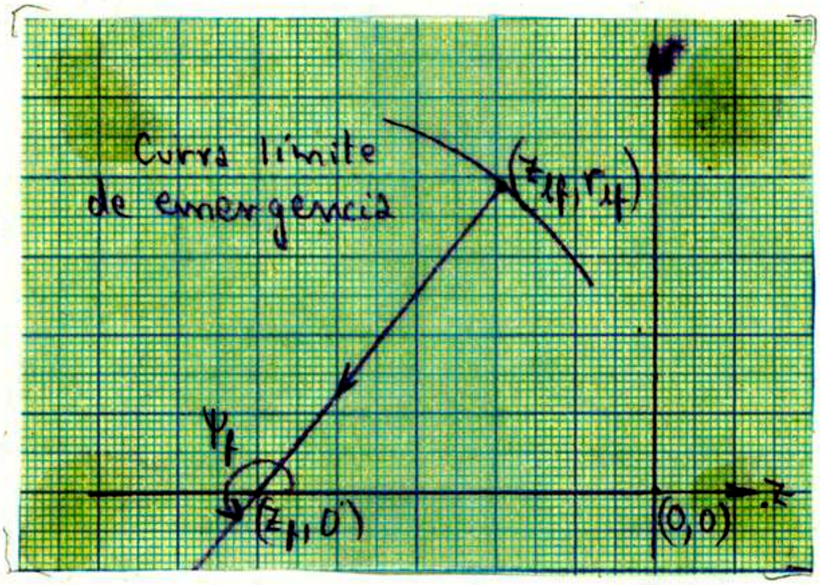


FIG. 4

Curva límite de emergencia (arbitraria) .

Condición anterior permite representar a la curva límite de emergencia en función del parámetro ψ_f por

$$r_{lf} = z_f\, f_f(\psi_f) \qquad (34\,a)$$

$$z_{lf} = z_f \left[1 + f_f(\psi_f)\, \mathrm{ctg}\, \psi_f \right] \qquad (34\,b)$$

y exige que

$$z_f f_f(\psi_f) = z_s f_s(\psi_s)\, e^{-K(\cos\psi_f - \cos\psi_s)} \qquad \text{(35 a)}$$

$$z_f\left[1 + f_f(\psi_f)\,\mathrm{ctg}\,\psi_f\right] = z_s\Big\{1 + f_s(\psi_s)\,\mathrm{ctg}\,\psi_s + K f_s(\psi_s)\, e^{K\cos\psi_s}\Big[U(K;\psi_f) - U(K;\psi_s) + 2\pi(n_f - n_s)\cdot i J_1(iK)\Big]\Big\} \qquad \text{(35 b)}$$

De las (35) se deduce la siguiente relación implícita entre ψ_s y ψ_f.

$$\mathrm{ctg}\,\psi_f\, e^{-K\cos\psi_f} - K U(K;\psi_f) - K 2\pi n_f\, i J_1(iK) =$$

$$= \mathrm{ctg}\,\psi_s\, e^{-K\cos\psi_s} - K U(K;\psi_s) - 2\pi n_s K\, i J_1(iK) + \frac{z_s - z_f}{z_s}\cdot\frac{e^{-K\cos\psi_s}}{f_s(\psi_s)} \qquad \text{(36)}$$

que según como sea la expresión de f_s permite dar en forma explícita

$$\psi_f = \psi_f(\psi_s) \qquad \text{(37)}$$

o calcularla en forma númerica.

En ambos casos se logra obtener la curva límite de emergencia (r_{lf} ; z_{lf}) mediante las (35).

~~Las~~ La curva límite de la sección del toro queda completada con:

I) La trayectoria dentro del campo magnético de las partículas cuyo ángulo de emisión, ψ_s, es el mínimo de las consideradas.

II) La trayectoria dentro del campo magnético de las partículas cuyo ángulo de emision, ψ_s, es el máximo de las consideradas.

En la figura (5) se dan las curvas límites de incidencia y emergencia para el caso en que: $z_s = -z_f = 1$; $f_s = \mathrm{sen}\,\psi_s$; $n_s = n_f = 0$; $\pi/2 \leq \psi_s \leq \pi$ y $K = 0{,}4;\ 0{,}55;\ 0{,}57;\ 0{,}6$ y 1.

~~FIG. 5~~

~~Curvas límites para~~

Además se puede demostrar a partir de las (36) y (33) y suponiendo $z_s = -z_f$; $n_s = -n_f$ que $\psi_s = -\psi_f$ resultando un espectrómetro completamente simétrico.

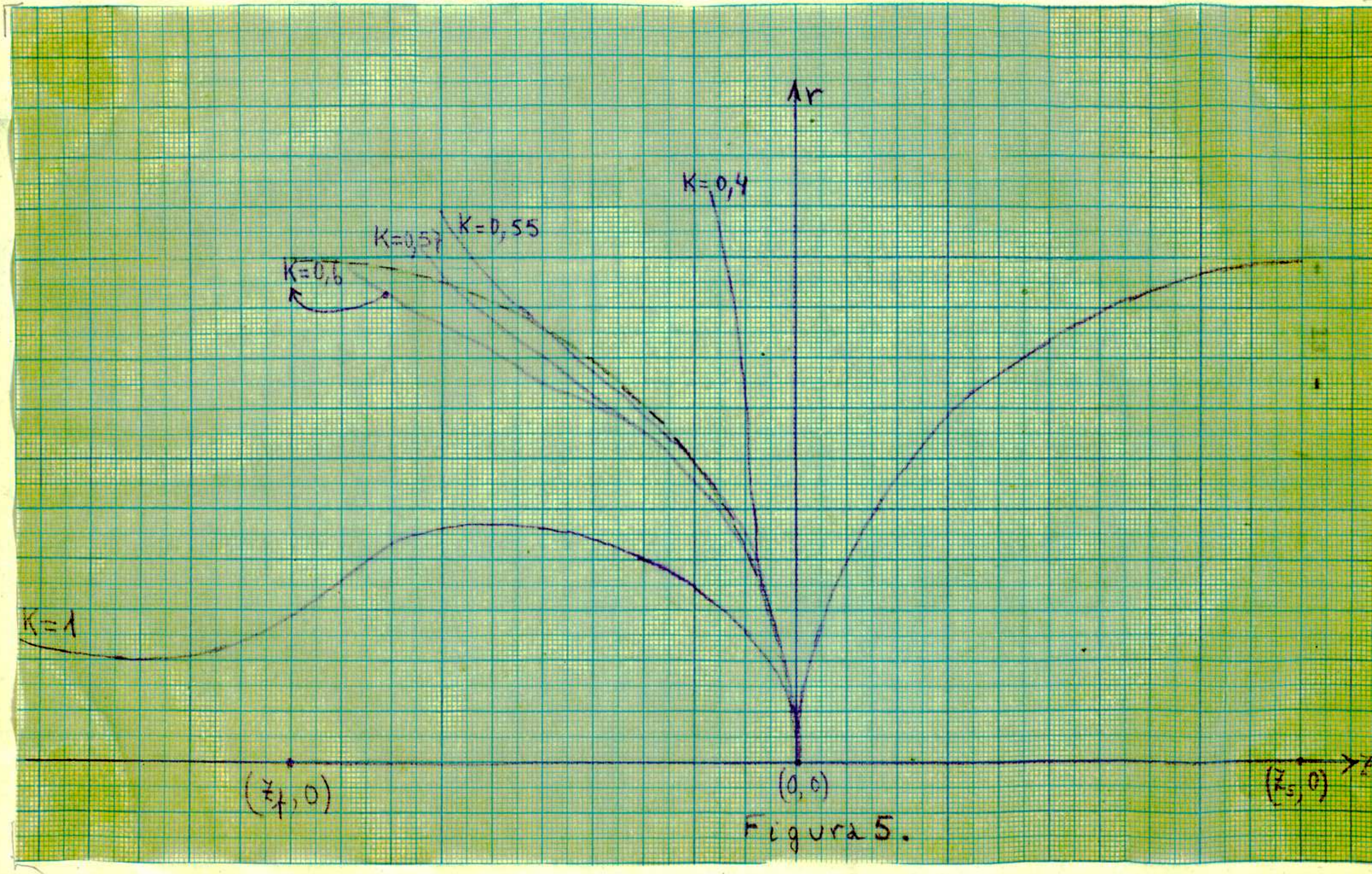


Figura 5.

§ 8. FORMACION DE IMAGEN.

Se ha visto que la imágen de una fuente puntual (z_s, 0) es el punto (z_f ; 0)

Falta ahora averiguar cual es la imágen de una fuente de dimensiones finitas. Para ello se dividen en dos grupos los rayos emitidos por ellà:

a) los que tienen $p_\phi = 0$
b) los que tienen $p_\phi \neq 0$

Los del grupo a), son los emitidos en un plano $\phi = c^{te}$
En éste consideramos como puntos de emisión a los:

I) ($z_s + \delta z_s$; 0) y
II) (z_s ; δr)

puesto que conocida la imágen de estos, es fácil hallar la de un punto genérico ($z_s + \delta z_s$; δr) como veremos mas adelante.-

a) I) La partícula emitida en ($z_s + \delta z_s$; 0) que entra al campo magnético en ($z_{\ell s}$; $r_{\ell s}$) forma un ángulo $\psi_s + \delta \psi_s$ con el eje de las z positivas, siendo

$$\delta \psi_s = \frac{\operatorname{sen}^2 \psi_s}{z_f \, f_f(\psi_f)} e^{-K(\cos\psi_f - \cos\psi_s)} \delta z_s \qquad (38)$$

(ver fig. 6.)

Estas condiciones determinan la trayectoria posterior de la partícula . Siendo los δr y δz en primera aproximación y respecto de la trayectoria " media" , en un punto de parámetro $\psi_f + \delta \psi_f$

$$\delta r = z_f \, f_f(\psi_f) K(\operatorname{sen}\psi_f \, \delta\psi_f - \operatorname{sen}\psi_s \, \delta\psi_s) \qquad (39\ a)$$

$$\delta z = z_f \, f_f(\psi_f) K\left\{\cos\psi_f \, \delta\psi_f - e^{K\cos\psi_f}\left[K \operatorname{sen}\psi_s F + \cos\psi_s e^{-K\cos\psi_s}\right]\delta\psi_s\right\} \qquad (39\ b)$$

con

$$F = U(K;\psi_f) - U(K;\psi_s) + 2\pi(n_f - n_s)\, i J_1(iK) \qquad (39\ c)$$

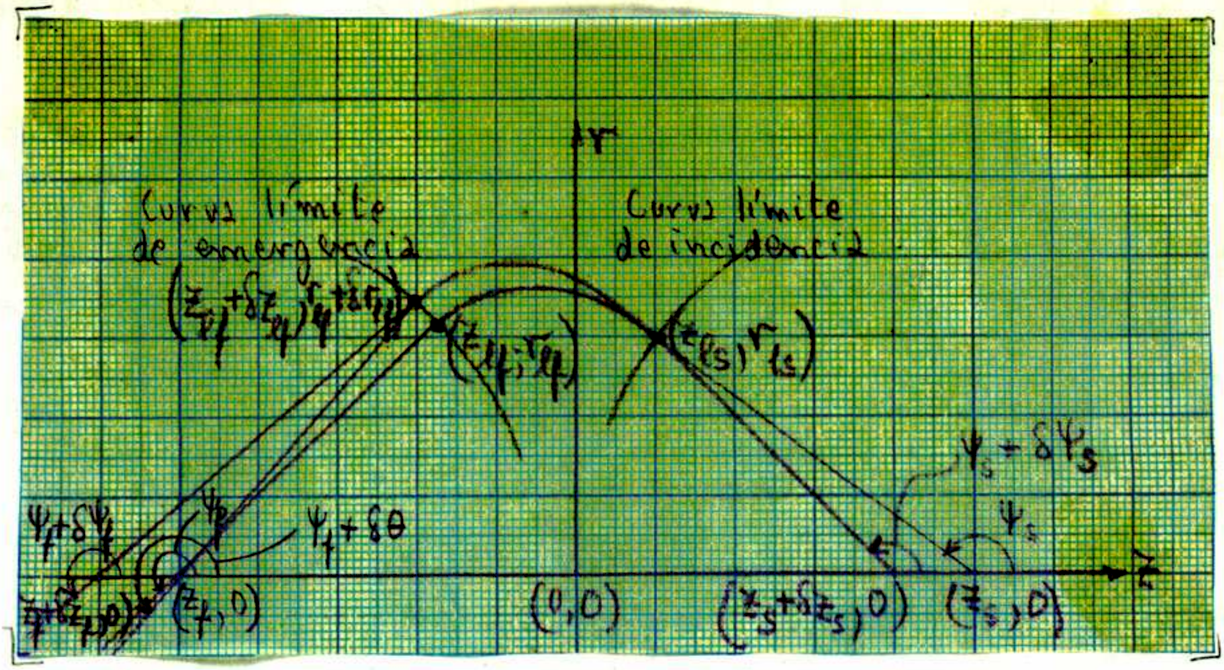


FIG. 6

Trayectoria de una partícula emitida en el plano r , z por el punto ($z_s + \delta z_s$; 0) . Las curvas límites y trayectorias, no corresponden a un caso real.

Si este punto está sobre la curva límite de emergencia además de pertenecer a la trayectoria " variada", se deberá cumplir

$$\delta r = z_f \, f_f'(\psi_f) \, \delta\theta \qquad (40\ a)$$

$$\delta z = z_f \left[f_f'(\psi_f) \operatorname{ctg} \psi_f - \frac{f_f(\psi_f)}{\operatorname{sen}^2 \psi_f} \right] \delta\theta \qquad (40\ b)$$

donde $$f_f'(\psi_f) = \frac{d f_f(\psi_f)}{d \psi_f}$$

A partir de las (39) y (40) se puede obtener $\delta\psi_f = \delta\psi_f(\delta z_s)$ **y** $\delta\theta = \delta\theta(\delta z_s)$ **que reemplazadas en**

$$\delta z_f = \frac{z_f \, f_f(\psi_f)}{\operatorname{sen}^2 \psi_f} (\delta\psi_f - \delta\theta) \qquad (41)$$

dan, teniendo en cuenta la (36)

$$\delta z_f = \frac{\operatorname{sen} \psi_s}{\operatorname{sen} \psi_f} \cdot \frac{1}{\psi_f'} \cdot \delta z_s \qquad (42)$$

donde $$\psi_f' = \frac{d \psi_f}{d \psi_s}$$

a) II) La partícula emitida en (z_s ;δr) que entra al campo magnético en (z_{ls} ; r_{ls}) forma un ángulo $\Psi_s + \delta\Psi_s$ con el eje de las z positivas, siendo

$$\delta\Psi_s = -\frac{\operatorname{sen}\Psi_s \cos\Psi_s}{z_f f_f(\Psi_f)} e^{-K(\cos\Psi_f - \cos\Psi_s)} \delta r \qquad (43)$$

Con esta expresión para $\delta\Psi_s$ y aplicando los mismos resultados obtenidos en a)I), se llega a:

$$\delta z_f = -\frac{\cos\Psi_s}{\operatorname{sen}\Psi_f} \cdot \frac{1}{\Psi_f'} \delta r \qquad (44)$$

Faltaría ahora conocer la imágen de un punto genérico ($z_s + \delta z_s$; δr) Con las suposiciones hechas, es fácil comprender, que la partícula que entra al campo magnético en (z_{ls} ; r_{ls}) cortará al eje de las z del lado del foco en ($z_f + \delta z_f$; 0) donde

$$\delta z_f = \frac{1}{\operatorname{sen}\Psi_f \, \Psi_f'} (\operatorname{sen}\Psi_s \, \delta z_s - \cos\Psi_s \, \delta r) \qquad (45)$$

Los del grupo b) , son los que no han sido emitidos en un plano $\phi = \phi_s = c^{te}$. Entrarán al campo magnético en un punto (z_{ls}; r_{ls}) perteneciente a la curva límite de incidencia de un cierto plano ϕ_s .
(Plano r_1, z en la Fig. 7).

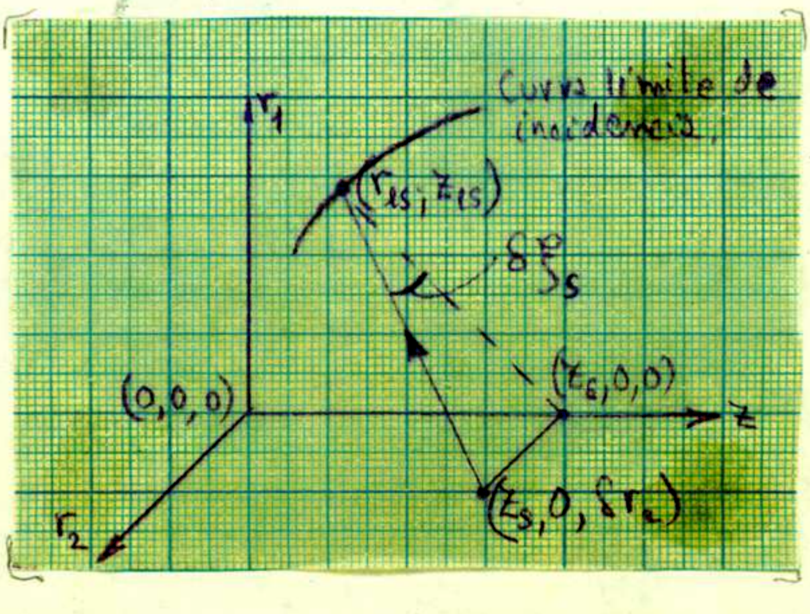


FIG. 7

Caso de partícula con $p_\phi \neq 0$

Si el punto emisor es (z_s ; 0 ; δr_2) la trayectoria formará en primera aproximación un ángulo $\delta\xi_s$ con el plano ϕ_s

$$\delta\xi_s = \frac{\operatorname{sen}\Psi_s}{z_s\, f_s(\Psi_s)}\,\delta r_2 \tag{46}$$

y un ángulo Ψ_s con el eje de las z positivas. De ésto se deduce que:

$$\delta a_0 = r_{ls}\operatorname{sen}\delta\xi_s = r_{ls}\,\delta\xi_s = \operatorname{sen}\Psi_s\,\delta r_2 \tag{47}$$

De la (14) se deduce que el movimiento radial es el mismo.- Desarrollando la (13) en potencias de δa_0 a partir del punto $a_0 = 0$ se demuestra que el movimiento según el eje z es, en primera aproximación, también el mismo. Esto significa que todo lo anterior es aplicable también a éste caso.-

La diferencia entre ambos, se revela al desarrollar en serie la (15) en potencias de δa_0 alrededor del punto $a_0 = 0$. En ~~primera~~ segunda aproximación es entonces

$$\phi = K\,V(K;\Psi)\,\frac{\delta a_0}{a} + \phi_0 \tag{48}$$

donde

$$V(K;\Psi) = \int_{\Pi}^{\Psi} e^{K\cos\Psi}\,d\Psi = J_0(iK)(\Psi-\Pi) + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n}(-i)^n J_n(iK)\operatorname{sen} n\Psi \tag{49}$$

Estas nos dicen que el movimiento es periódico según ϕ y que el período es

$$\phi(\Psi+2\Pi) - \phi(\Psi) = 2\Pi K J_0(iK)\,\frac{\delta a_0}{a} \tag{50}$$

Tomando en cuenta la (50) y las condiciones iniciales de la partícula, se puede afirmar que

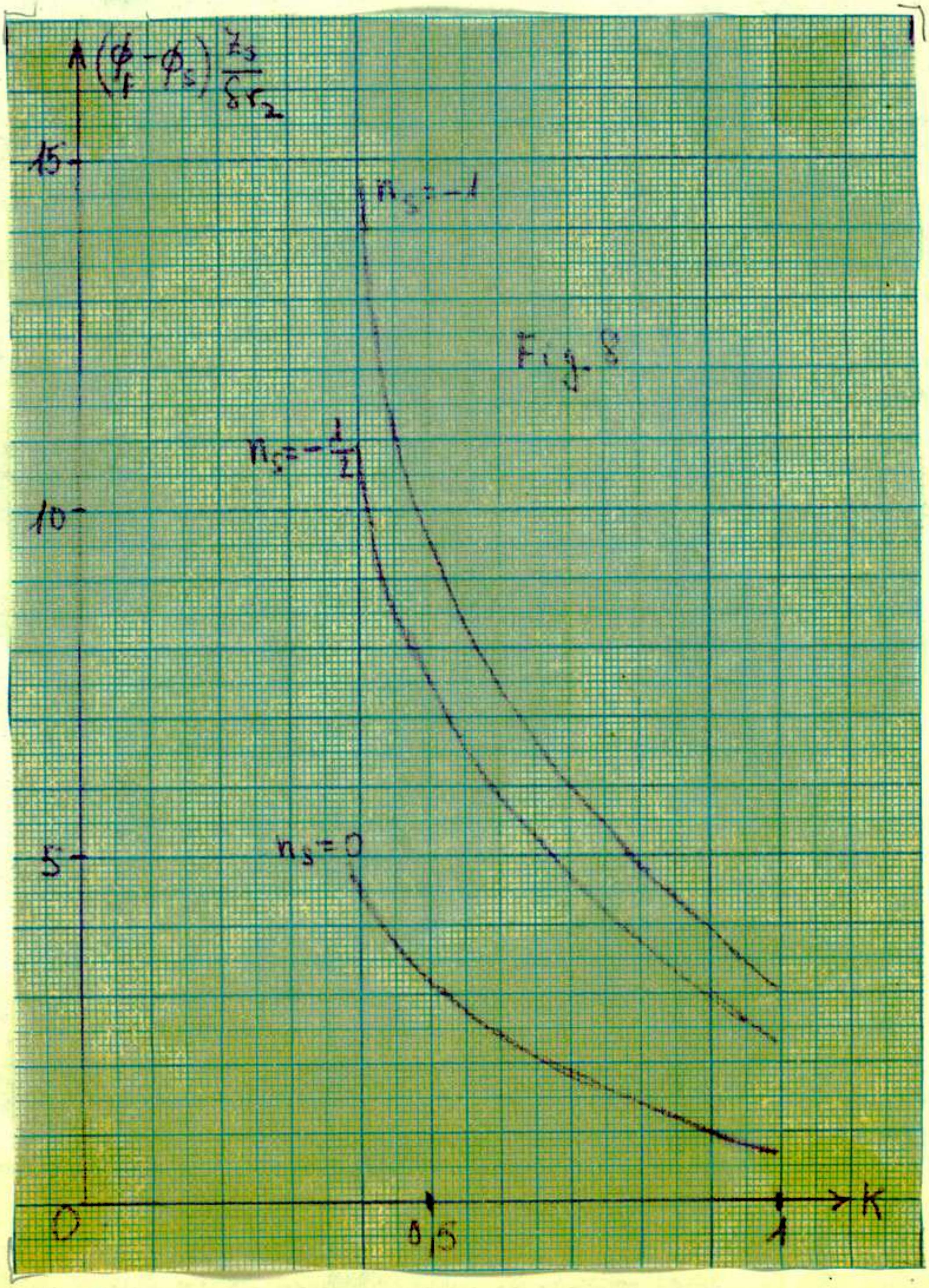
$$\phi = \left[V(K;\Psi) - V(K;\Psi_s) + 2\Pi(n-n_s)J_0(iK)\right]\frac{\operatorname{sen}\Psi_s}{f_s(\Psi_s)}\,e^{-K\cos\Psi_s}\,\frac{\delta r_2}{z_s} + \phi_s \tag{51}$$

y por lo tanto que

$$\phi_f - \phi_s = \left[V(K;\psi_f) - V(K;\psi_s) + 2\pi(n_f - n_s) J_0(iK) \right] \frac{\operatorname{sen}\psi_s}{f_s(\psi_s)} e^{-K\cos\psi_s} \frac{\delta r_2}{z_s} \qquad (52)$$

donde ϕ_f, es el plano ϕ en que esta trayectoria corta a la curva límite de emergencia, n_f y n_s tienen el mismo significado que en las (35) .-

En la Fig.8 se da $\frac{(\phi_f - \phi_s) z_s}{\delta r_2}$ en función de K y n_s para espectrómetros simétricos y $\psi_s = \pi/2$



Además podemos afirmar, a partir de la (8) que

$$\delta r_{2f} = \frac{\operatorname{sen} \psi_s}{\operatorname{sen} \psi_f} \cdot \delta r_2 \qquad (53)$$

donde δr_{2f} es la distancia entre el punto de intersección de la trayectoria con el plano $z_1 r_2$ y el eje z .-

De las (53) y (42) se deduce que el único caso con formación de imágen y magnificación 1 es el de los espectrómetros completamente simétricos. ($\psi_s = -\psi_f$; $z_s = -z_f$; $n_s = -n_f$).-

§9) DISPERSION.-

Se han considerado hasta ahora partículas cargadas monoenergéticas de una cierta energía E .

Interesa ahora conocer la imágen de partículas emitidas en (z_s ; 0) cuya energía es la anterior incrementada en δE . Para éstas la constante K tiene el valor $K + \delta K$.

Las trayectorias de estas partículas recién al entrar al campo magnético se diferencian de las consideradas en los § 6 y 7.- Cortarán a la curva límite de salida en un punto ($z_{lf} + \Delta z_{lf}$; $r_{lf} + \Delta r_{lf}$) formando un ángulo $\psi_f + \delta \psi_f$ con el eje de las z positivas. (Ver figura 9)

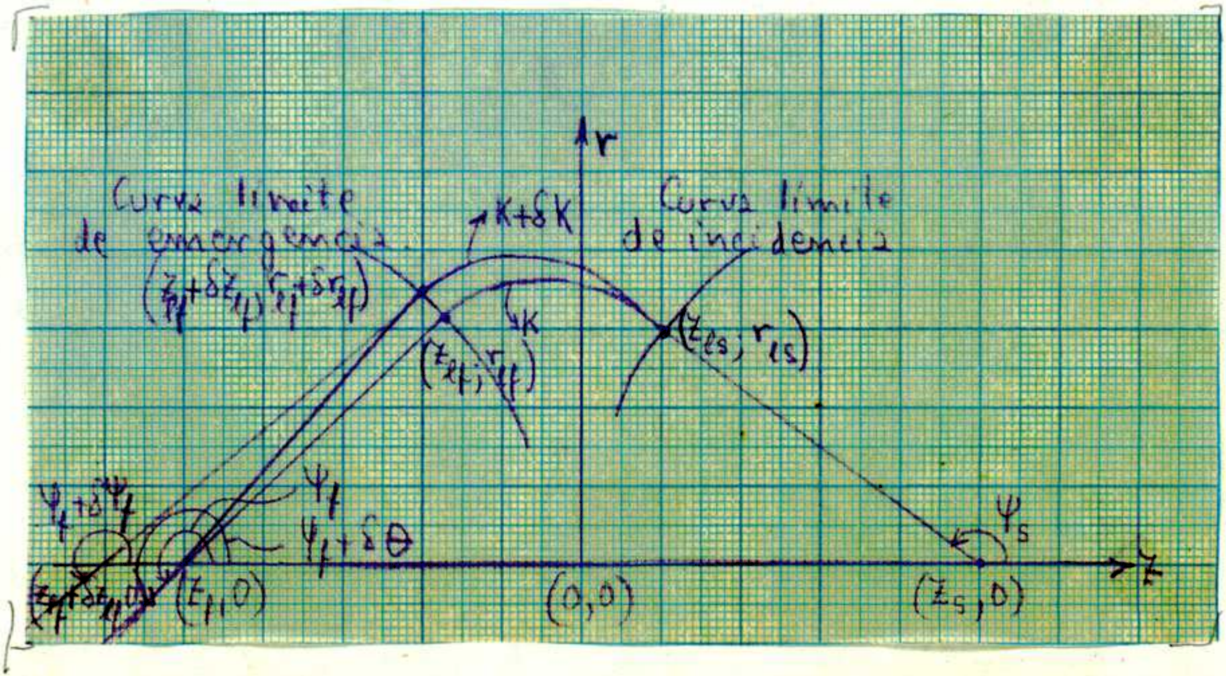


FIG. 9

Trayectoria de una partícula emitida en el plano z , r por el punto (z_s , 0) y cuyo valor de K es $K+\delta K$. Las trayectorias y curvas límites no corresponden a un caso real.-

Δz_{lf} y Δr_{lf} se pueden expresar como incrementos tomados sobre la curva límite de emergencia (34) y como incrementos sobre la trayectoria variada ($K+\delta K$). Igualando estas expresiones se obtienen $\delta\psi_f$ (δK) y $\delta\theta$(δK) que teniendo en cuenta las (41) y (36) nos dan

$$\delta z_f = G(\psi_s; \psi_f; n_s; n_f; K; \psi_f')(z_f - z_s)\frac{\delta K}{K} \qquad (54)$$

donde

$$G = \frac{e^{-K\cos\psi_f}}{F_3}\left\{\left(\frac{e^{-K\cos\psi_s}}{F_3 \operatorname{sen}^2\psi_s . \psi_f'} - \frac{e^{-K\cos\psi_f}}{F_3 \operatorname{sen}^2\psi_f}\right)\left[\cos\psi_f(\cos\psi_s - \cos\psi_f) - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \operatorname{sen}\psi_f\, e^{K\cos\psi_f}\left(F(1+K\cos\psi_s) + K\frac{\partial F}{\partial K}\right)\right] - \frac{\cos\psi_s - \cos\psi_f}{\operatorname{sen}\psi_f}\right\} \qquad (55)$$

con

$$F_3 = \operatorname{ctg}\psi_s\, e^{-K\cos\psi_s} - \operatorname{ctg}\psi_f\, e^{-K\cos\psi_f} + KF \qquad (56)$$

Se puede afirmar por lo tanto que la dispersión γ es

$$\gamma = \frac{\delta z_f}{\delta p} = G\,\frac{z_f - z_s}{p} = G.\,\frac{z_f - z_s}{e\,(B\rho)} \qquad (57)$$

En el caso simétrico G se reduce á

$$G = 2\,\frac{e^{-K\cos\psi_s}}{F_3^2 \operatorname{sen}\psi_s}\left[F(1+K\cos\psi_s) + K\frac{\partial F}{\partial K}\right]\frac{\delta K}{K} \qquad (58)$$

con

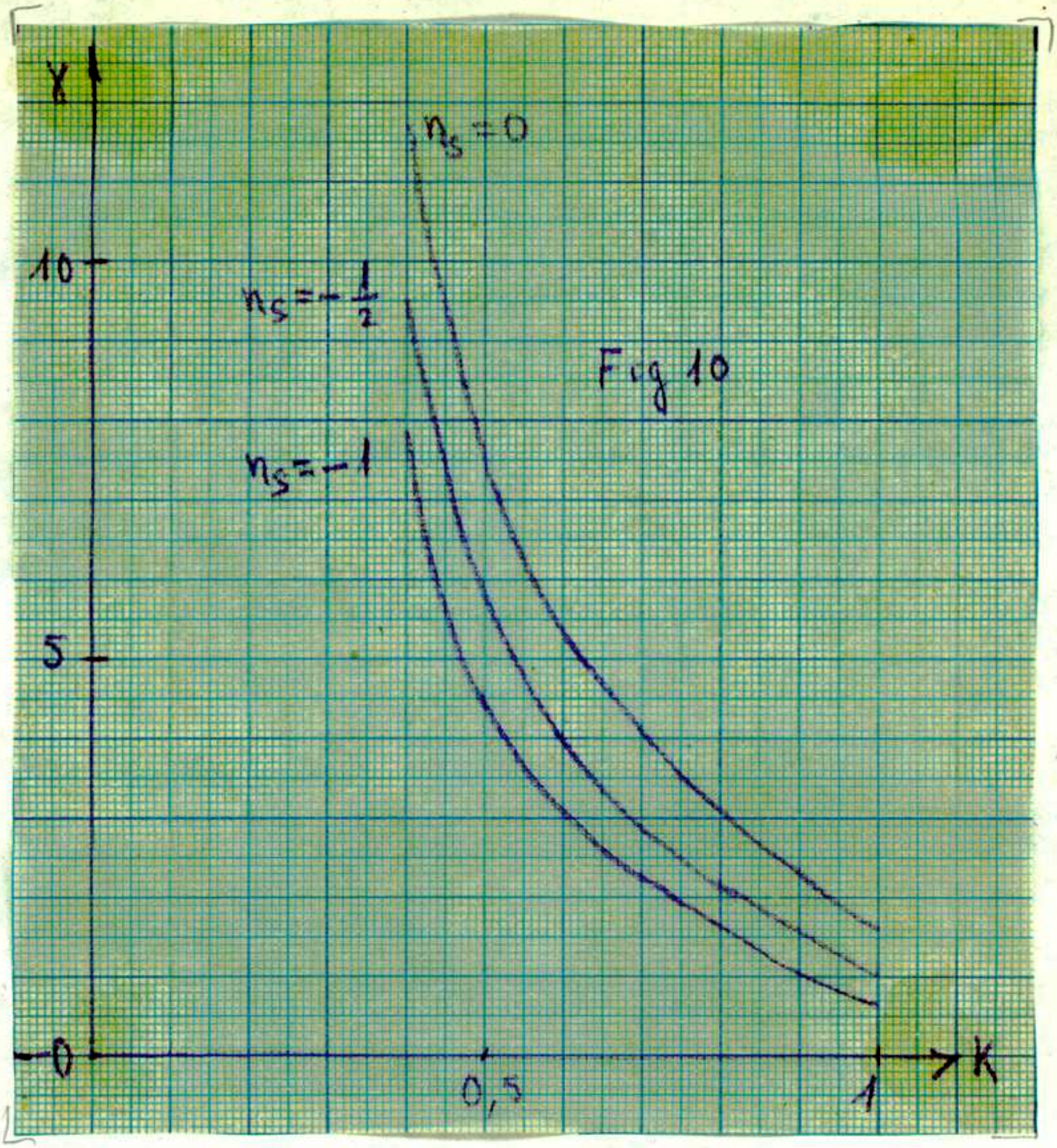
$$F_3 = 2\operatorname{ctg}\psi_s\, e^{-K\cos\psi_s} + KF \qquad (59)$$

y

$$F = U(K; -\psi_s) - U(K; \psi_s) - 4\pi n_s i J_1(iK) \qquad (60)$$

En la figura (10) damos los valores de γ en función de K y n_s

para los espectómetros simétricos.



§ 10 PODER RESOLUTOR DE BASE.

En lo que sigue se supone que la ventana del detector es igual a la imágen de la sustancia radioctiva (x) , es decir, que según el eje z tiene una longitud

$$2\delta z_f = 2\,\frac{\operatorname{sen}\psi_s}{\operatorname{sen}\psi_f}\cdot\frac{1}{\psi_f'}\left(\delta z_s - \operatorname{ctg}\psi_s\,\delta r\right) \qquad (61)$$

(donde δr se toma sobre el plano bisector del entrehierro considerado), y según el eje r_2 (perpendicular al plano bisector del entrehierro considerado)

$$2\delta r_{2f} = 2\,\frac{\operatorname{sen}\psi_s}{\operatorname{sen}\psi_f}\,\delta r_2 \qquad (62)$$

(x) Este no es el tamaño óptimo de la ventana.-

El ancho de la base del perfil de línea resulta ser entonces

$$\Delta\rho = \frac{4\,\delta z_f}{\gamma} \tag{63}$$

y por lo tanto el poder resolutor de base es

$$P = \frac{\rho}{\Delta\rho} = \frac{G\,(z_f - z_s)}{4\,\frac{\operatorname{sen}\psi_s}{\operatorname{sen}\psi_f}\,\frac{1}{\psi_f'}\,(\delta z_s - \operatorname{ctg}\psi_s\,\delta r)} \tag{64}$$

Observemos que P es una función de ψ_s.

Para el caso simétrico es

$$P = G\,\frac{z_s}{2(\operatorname{ctg}\psi_s\,\delta r - \delta z_s)} \tag{65}$$

§ 11-PODER COLECTOR.

Para una fuente puntual en (z_s ; 0) el poder colector está dado por

$$\omega_0 = \frac{\Omega}{4\pi} = \frac{n\,\varphi}{4\pi}\left[\cos(\psi_{s\,min}) - \cos\psi_{s\,max}\right] \tag{66}$$

donde

n es el número de entrehierros.

φ es la abertura angular de los mismos.

$\psi_{s\,min}$ es el menor de los ángulos de emisión considerados.

$\psi_{s\,max}$ es el mayor de los ángulos de emisión considerados.

Para una fuente de dimensiones finitas hay que considerar las pérdidas por partículas que tienen $\rho_\phi \neq 0$ y chocan contra las caras de las piezas polares.-

El ángulo sólido subtendido por una fuente puntual colocada en (z_s ; 0 ; δr_2) es

$$\omega_{\delta r_2} = \omega_0 - \frac{\delta r_2}{z_s}\int_{\psi_{s\,min}}^{\psi_{s\,max}}\left[V(K;\psi_f) - V(K;\psi_s) + 2\pi(n_f - n_s)J_0(iK)\right]\frac{\operatorname{sen}^2\psi_s}{f_s(\psi_s)}\,e^{-K\cos\psi_s}\,d\psi_s$$

En la Fig.8 se puede apreciar la influencia de éste factor.

§ 12 - INFLUENCIA DE LAS LINEAS DE FUERZA DISPERSAS.

Se han considerado hasta ahora las propiedades de un espectrómetro ideal.- En la realidad, el campo magnético no pasa en forma discontínua del valor A/r a cero, ni tampoco A es una constante en el interior.-

Estas imperfecciones tienen dos tipos de influencias (3)

1º) - Desviaciones angulares según ψ

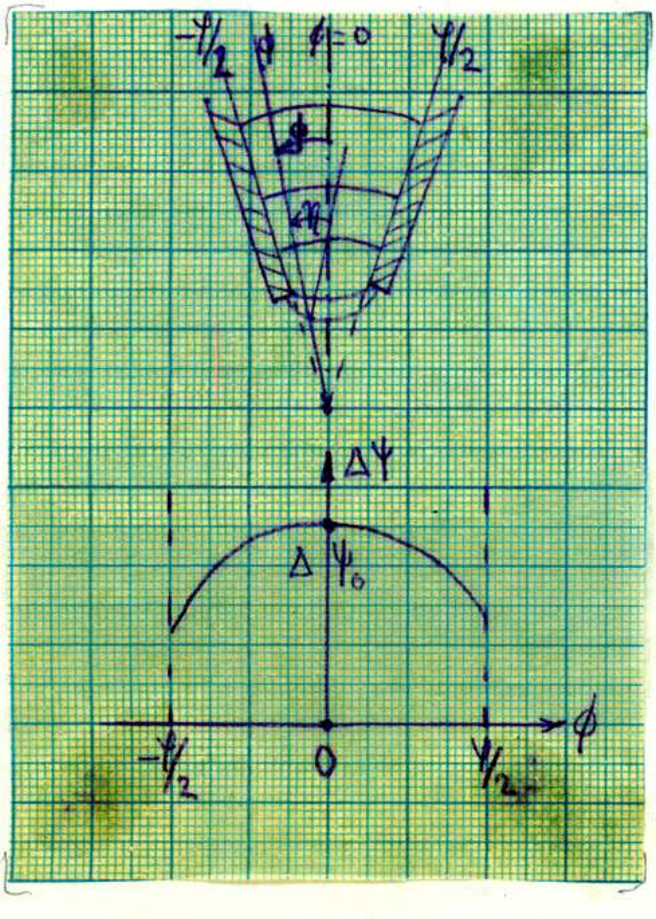
2º) - " " " ϕ

Las primeras se producen por dos causas,

a) CAMPO DISPERSO (Fig. 11a)

En el plano $\phi = 0$ la trayectoria será desviada en $\Delta\psi_0$ por el campo disperso.-

En cambio las trayectorias de una partícula en el plano $\phi = c^{te}$ será desviada en cada punto en lo anterior por $\cos\eta$.- En primera aproximación η es en cada punto proporcional a ψ y por lo tanto, la desviación total proporcional a ψ^2. Esta se representa en forma cualitativa en la Fig. 11b).-



b) CAMPO PRINCIPAL.

El campo del electroimán es más intenso cerca de las piezas polares, que en el centro del entrehierro.-

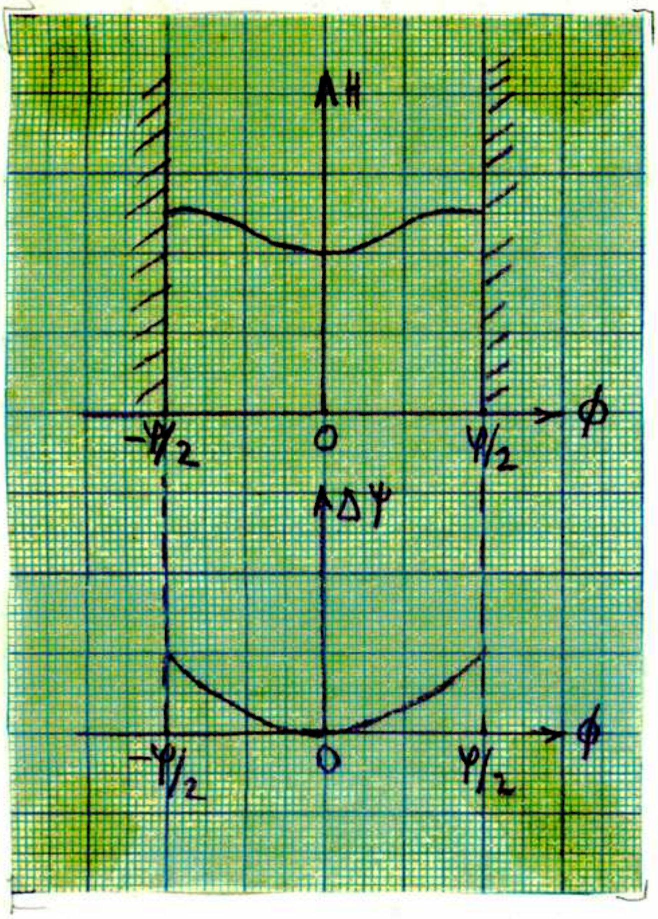


Fig. 12a)

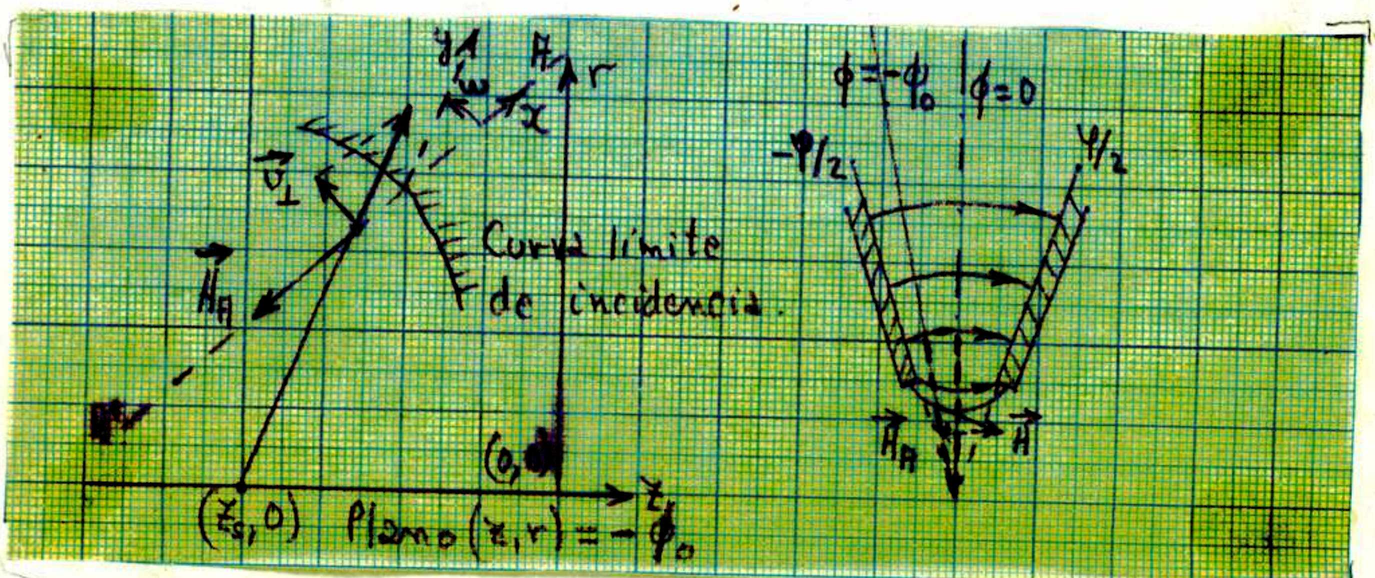
Esto implica que para $\phi = 0$ la desviación será mínima y que para los otros valores de la desviación será mayor y variará según ϕ^2

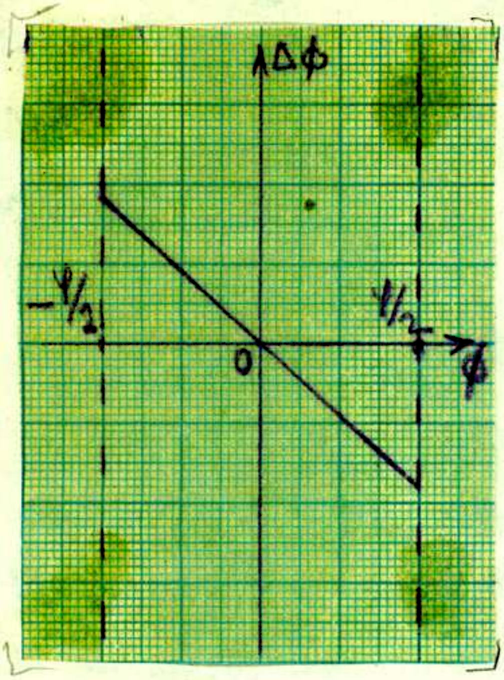
Fig. 12b)

El $\Delta\Psi$ será nulo para el ángulo $\phi = 0$ puesto que allí se considera que el campo es el teórico deseado.-

Interesante es observar que los dos efectos son de sentido opuesto. Ambos se disminuyen construyendo espectrómetros con Ψ pequeño.-

Las desviaciones angulares según ϕ son producidas por el campo disperso.- La velociada $\vec{v}$ tiene





c) Variación de $\Delta\phi$ con ϕ para un ω positivo y constante.

una componente perpendicular a AA' que es $v_\perp = v \operatorname{sen} \omega$

Sobre ella actúa H_A siendo la desviación $\Delta\phi$ proporcional a

$$v \operatorname{sen} \omega \int H_A \, dy = v \operatorname{tg} \omega \int H_A \, dx$$

suponiendo que la desviación según ψ es pequeña en el campo disperso.

Pero $\int H_A \, dx = -\phi_0 A_R K_0$ integrando sobre el circuito punteado Fig. 13b).

Luego en primera aproximación es

$$\Delta\phi \simeq -\omega \phi$$

Esto indica que los espectrómetros hay que diseñarlos con ψ pequeño y $\omega = 0$. En caso de no poder lograrse $\omega = 0$ deberá hacerse lo posible de hacer $\omega > 0$. Se tendrá así una lente convergente. Ver Fig. 13c).-

B I B L I O G R A F I A

(1) E.Persico y C.Geoffrion, Rev.Sc.Inst.21, 945 (1950)

(2)(7) N.F.Verster Progress in Nudesr Physics. 2 , 1 (1952)

(3) O.B.Nielsen.Tésis inédita.Instituto de Física Teórica.- Copenhaguen.

(4) C.Sharp Cook.Nucleonics. 11 , Nº 12, 28 (1953), 12, Nº1 (1954)

(5) M.Deutsch. Physica.18 , Nº 12,1037 (1952)

(6) O.Kofoed-Hansen,J.Lindhard y O.B.Nielsen Kgl.Danske.Vid.Sel.Mat.Fys.Medd. 25,Nº16 (1950)

(7) H.O.W.Richarson, Proc. Phys.Soc.59, 792 (1947)