

Tesis de Posgrado

Equilibrio de ciertos fenómenos no lineales

Amati, Daniel M.

1952

Tesis presentada para obtener el grado de Doctor en Ciencias Físico-Matemáticas de la Universidad de Buenos Aires

Este documento forma parte de la colección de tesis doctorales y de maestría de la Biblioteca Central Dr. Luis Federico Leloir, disponible en digital.bl.fcen.uba.ar. Su utilización debe ser acompañada por la cita bibliográfica con reconocimiento de la fuente.

This document is part of the doctoral theses collection of the Central Library Dr. Luis Federico Leloir, available in digital.bl.fcen.uba.ar. It should be used accompanied by the corresponding citation acknowledging the source.

Cita tipo APA:

Amati, Daniel M.. (1952). Equilibrio de ciertos fenómenos no lineales. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad de Buenos Aires.
http://digital.bl.fcen.uba.ar/Download/Tesis/Tesis_0734_Amati.pdf

Cita tipo Chicago:

Amati, Daniel M.. "Equilibrio de ciertos fenómenos no lineales". Tesis de Doctor. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad de Buenos Aires. 1952.
http://digital.bl.fcen.uba.ar/Download/Tesis/Tesis_0734_Amati.pdf

Daniel M. Amati

"Equilibrio de ciertos fenómenos no-lineales"

Resumen de la Tesis presentada para optar al Título de Doctor en Ciencias.
Físicomatemáticas.

Tratamos en este trabajo de resolver e interpretar fenómenos físicos vinculados a ecuaciones diferenciales no-lineales del tipo

$$L \ddot{y} + \dot{y} + \frac{w_0^2}{\omega^2} y = U_0 \cos \tau \quad (1)$$

y estudiar en especial el fenómeno de ferresonancia, proveniente de un circuito L.C.R. serie, cuya bobina con núcleo de hierro determina el término no lineal de la correspondiente ecuación diferencial. En este caso se ha utilizado una fórmula empírica dada por Dreifuss (x), para representar la curva de imantación del material ferromagnético.

Se buscan soluciones periódicas de (1) y del mismo período de la ~~excitación~~ excitación; lo que en el ~~caso eléctrico~~ caso eléctrico implica hallar la intensidad de la corriente en el régimen.

Se hallan soluciones para amplias zonas de variación de los parámetros (especialmente en el caso de la ferresonancia), y en ellas se cumple que los coeficientes de las armónicas superiores resultan pequeñas (de cuadrado despreciable) frente al coeficiente de la armónica fundamental del desarrollo en serie de Fourier de dichas soluciones. Así también se han estudiado, aunque con menor detalle, las zonas de preponderancia de las armónicas superiores. En particular estos resultados ~~confirman~~ confirman que para valores no altos de la no-linealidad del fenómeno de ferresonancia, son ciertos los resultados hallados por Zenneck y Schunck (xx).

Razón capital del interés de estos estudios, es que admiten abordar problemas fuertemente no lineales, cosa que no permiten la mayoría de los métodos de la moderna mecánica no-lineal, por dedicarse ellos casi exclusivamente a los llamados fenómenos cuasi-lineales.

Daniel M. Amati

(x) Dreifuss, Archiv für Elektrotechnik 2,1913.

(xx) Zenneck y Schunck, Jahrbuch für drahtlose Telegraphie, 19,1922.

T. 734

TESIS: 734

Universidad Nacional de Buenos Aires

Facultad de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales

"EQUILIBRIO DE CIERTOS FENOMENOS NO LINEALES"

por Daniel M. Amati

Tesis para optar al título de Doctor en Ciencias Físico-Matemáticas

Padrino de tesis: Dr. Ricardo Gans

Buenos Aires, 1952.

Tesis 734

A mis Padres

A mi hermano

Agradezco al Dr. Ricardo Gans su constante y valiosa dirección científica.

Quedo también agradecido a mi amigo Alberto Sirlin por su continuo interés y frecuentes sugerencias.

Expreso mi agradecimiento al Dr. J.C.Vignaux por haber facilitado la impresión de esta tesis en el Instituto Radiotécnico.

Indice

	<u>Pág.</u>
§1. Planteamiento del problema	1
§2. Algunas ideas sobre problemas no lineales	4
§3. La fórmula de Dreifuss	6
§4. El estudio de Zenneck y Schunck	8
§5. Discusión de la curva característica	10
§6. Influencia de las armónicas; estudio de la resonancia de la armónica fundamental	15
§7. Generalización para $\delta \neq 0$	29
§8. Resonancia de las armónicas superiores	33
§9. Nuevo método para la resonancia de la armónica fundamental	42
§10. a) Resumen de los resultados del §6	61
b) Resumen de los resultados del §9	63
c) Correlaciones de ambos estudios y principales consecuencias obtenidas	65
§11. Algunas observaciones sobre las zonas de resonancia	74
Apéndices	77

1. Planteamiento del Problema

El problema que nos ocupa, tema de este trabajo, es un problema típico de mecánica no lineal (o vibraciones no lineales), surgido de un hecho experimental concreto que vamos a tratar de explicar; y extendible, por lo menos en muchas de sus partes, a problemas físicos análogos.

Sea el de fig. 1 un circuito que consta de una bobina con núcleo de hierro, una capacidad C, y una resistencia R en serie, alimentada por una fuerza electromotriz alterna y sinusoidal $U = U_0 \cos \omega t$.

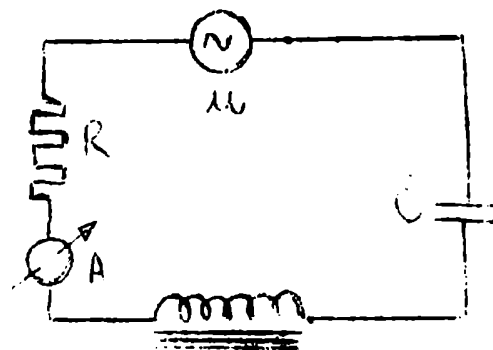


Fig. 1

Sea A la lectura de un amperímetro, insertado en el circuito, que mide la corriente eficaz, vale decir $A = \sqrt{I^2}$.

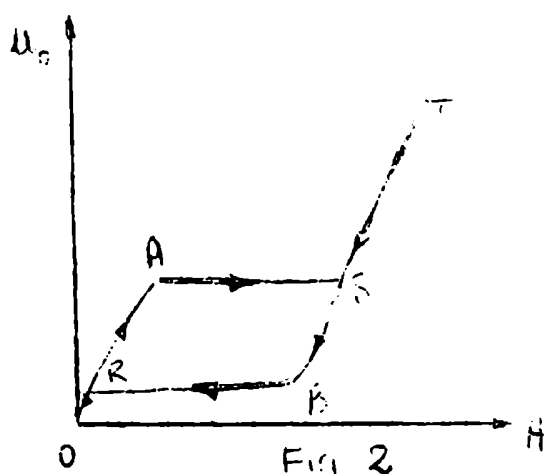


Fig. 2

La curva experimental de $A = A(U_0)$ obtenida es del tipo de fig. 2; vale decir: al aumentar U_0 , partiendo de $U_0=0$, la corriente va de 0 a A, salta luego hasta S y sigue creciendo luego hacia T. Si ahora hacemos decrecer U_0 , la curva recorre el tramo TSB, luego se produce el salto BR para seguir luego decreciendo hasta 0.

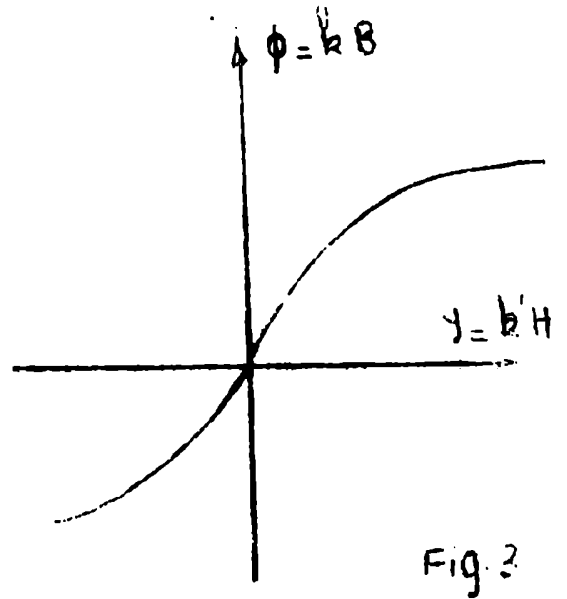
La no linealidad de la curva y los saltos son debidos, como veremos, al núcleo de hierro de la bobina. Trataremos en este trabajo de hallar teóricamente la intensidad de la corriente del circuito mencionado y tratar de explicar con los resultados obtenidos, la curva experimental esbozada en fig. 2.

La ecuación general que rige nuestro fenómeno es:

$$(1) \quad \frac{d\phi}{dt} + RI + \frac{1}{\omega C} \frac{dI}{dt} = U_0 \cos \omega t$$

donde nuestra incógnita es $I = I(t)$, la intensidad susodicha, mientras que ϕ significa el flujo magnético. Sin el núcleo de hierro de la bobina obtendríamos $\frac{d\phi}{dt} = L \frac{dI}{dt}$ donde $L = \frac{d\phi}{dI}$ sería una constante, la self-inducción de la bobina. En este caso

(1) sería una ecuación diferencial lineal cuya solución es conocida. En nuestro caso, debido al núcleo, la curva correspondientes nos muestra que B y H o sea ϕ e \mathcal{H} no están relacionados por una forma lineal; sino que, despreciando la histéresis, la curva que relaciona ϕ con \mathcal{H} es una función impar de del tipo de la de fig.3, así que $\frac{d\phi}{d\mathcal{H}} = \chi(\mathcal{H})$ es función par de \mathcal{H} .
Llamando $\chi(0) = L_0$; $\chi(\mathcal{H}) = L_0 \psi(\mathcal{H})$ resulta $\psi(0) = 1$



$$(2) \quad \frac{d\phi}{d\mathcal{H}} = L_0 \psi(\mathcal{H})$$

Utilizando (2) la (1) queda

$$(3) \quad L_0 \psi(\mathcal{H}) \frac{d\mathcal{H}}{dt} + R \mathcal{H} + \frac{1}{\omega C} \int \mathcal{H} dt = U_0 \cos \omega t$$

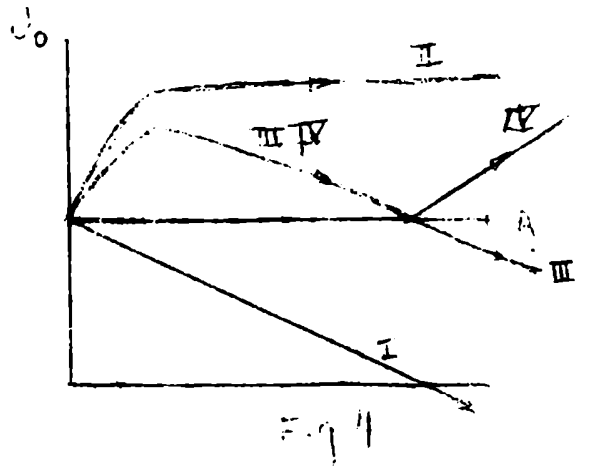
introduciendo $\tau = \omega t$ e $\mathcal{H} = \frac{d\mathcal{H}}{d\tau}$, dividiendo (3) por $L_0 \omega$ y definiendo $\begin{cases} \delta = R/L_0 \omega \\ \omega_0^2 = 1/L_0 C \end{cases}$

obtenemos

$$(4) \quad \psi(\mathcal{H}) \mathcal{H} + \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \int \mathcal{H} d\tau = \frac{U_0}{L_0 \omega} \cos \tau$$

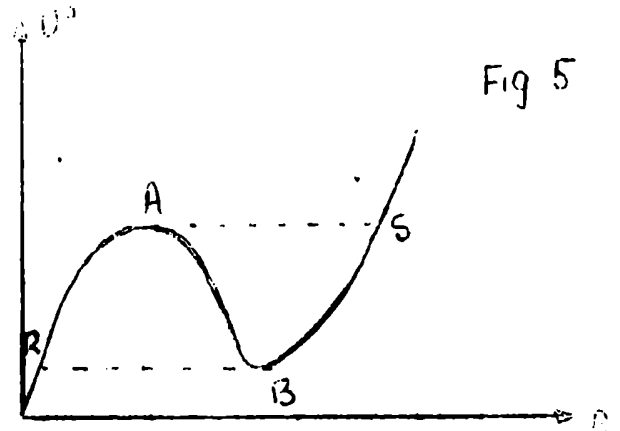
Hay una manera intuitiva aunque no rigurosa de entrever el andamiento de la curva, solución del problema eléctrico mencionado, extendiendo razonamientos que se hacen en problemas lineales de corriente atenuada^(x).

Estos razonamientos son: la impedancia capacitativa me originaría una curva del tipo de la I de fig. 4; la impedancia inductiva una del tipo II debido a la imantación del hierro. Ambas me darían la curva III que reflejada sobre el eje de las abscisas (por medir módulos con el amperímetro) originaría la IV. Esta curva se modifica todavía debi-



(x) Para extensión de estos métodos gráficos ver E. Piccaluga, op. cit. [7] [9]

do a la resistencia y por consiguiente resultará una curva del tipo de la de fig. 5. A partir de ésta, la curva experimental se explicaría diciendo: a partir de $U_0=0$ el punto representati-



vo recorre la curva hasta el punto A, al seguir aumentando U_0 el punto salta hasta S donde vuelve a encontrar la curva "teórica" para seguir luego recorriéndola al seguir aumentando U_0 . Volviendo por la curva o sea haciendo decrecer U_0 pasaría algo análogo, el punto la recorrería hasta B donde saltaría a R, para recorrer luego la curva hasta el origen.

Parece entonces posible dividir en dos partes el problema propuesto, la primera, que llamaremos de equilibrio o de régimen, tratará de hallar la solución de (4) y mediante ella la curva teórica $A=A(U_0)$, que como veremos se ajustará en líneas generales a la esbozada en fig: 5; la segunda parte que llamremos de estabilidad tratará de explicar porque no se puede realizar el tramo AB.

En este trabajo trataremos solamente la primera de las dos partes citadas; en cuanto a la segunda parte se encontrará un detenido estudio en la tesis de Alberto Sirlin. Los resultados allí obtenidos confirman la inestabilidad del tramo descendente (AB) de la curva de equilibrio.

Para generalizar nuestros estudios nos desprenderemos en lo posible del mencionado problema eléctrico y trataremos de extenderlos a todo fenómeno físico gobernado por la (4); en muchos capítulos de este trabajo obtendremos resultados para dicha ecuación con pocas imposiciones sobre la función $\psi(\eta)$; en otros capítulos, dadas las dificultades del cálculo, nos limitaremos a una función empírica que analizaremos en su debido lugar.

§ 2. Algunas ideas sobre problemas no lineales

Desde Poincaré muchos son los esfuerzos hechos tanto por los matemáticos como por los físicos y técnicos para esclarecer el enmarañado campo de la mecánica no lineal, o sea de aquellos fenómenos regidos por ecuaciones diferenciales no lineales.

El andamiaje matemático de estos problemas es bastante escaso y faltan aquí resultados y teoremas fundamentales, como por ejemplo los de unicidad de las soluciones. El estudio matemático de las ecuaciones diferenciales no lineales parece extraordinariamente difícil y en dicha dificultad gravita sin duda la falta de pilares tan importantes como el principio de superposición y el de regularidad de las soluciones.

Por ello todos los métodos de solución de estos problemas son métodos aproximados.

Aun así, la mayor parte de los esfuerzos han sido dedicados a los problemas quasi lineales, caso restringido de la mecánica no lineal. Esos problemas se caracterizan por figurar el elemento no lineal en la ecuación diferencial correspondiente, afectado por un factor ξ pequeño, de tal manera que el problema no se aleja mucho de un problema lineal, correspondiente a hacer $\xi = 0$. Un caso típico es la ecuación $\ddot{x} + \omega^2 x = \xi f(t, x, \dot{x})$ para ξ suficientemente pequeño^(x).

Este no es el caso en nuestro estudio, ya que queremos poder llegar a fuertes no linealidades; no nos será por lo tanto posible abordar el problema con los métodos de la mecánica quasi lineal.

Se puede también ver, que en la bibliografía pertinente, la mayor parte de los trabajos son dedicados a problemas homogéneos, pero por no tener a nuestra disposición el principio de superposición, dichos estudios no pueden servirnos.

Como es lógico hay estudios detenidos sobre algunos tipos especiales de ecuaciones no lineales (p.ej. la de Van der Pool,

(x) Ver p.ej. Kryloff y Bogoliuboff, op.cit. [3].

y la de Liénard^(x)).

Modernamente se utilizan además métodos topológicos para abordar estos problemas, pero nosotros consideraremos solamente métodos analíticos.

Finalmente diremos que el problema eléctrico esbozado en el § 1 figura en particular en ciertas obras, que lo abordan a su vez en distintas maneras. No obstante, todas ellas usan para las fórmulas que ligan B y H, fórmulas empíricas de tipo potencial, p.ej. $\phi = L_0 \dot{I} - b \dot{I}^3 \quad \delta \quad \dot{I} = aB - cB^3 + dB^5$, formas que entrañan inconvenientes por el pequeño ámbito de validez y por la enorme dificultad que hay al considerar un número no muy limitado de términos^(xx), no pudiéndose extender los estudios anteriores al agregar nuevos términos.

(x) Ver Sansone, op.cit. [7], Vol. II, Cap. XII.

(xx) Ya para $\dot{I} = aB - cB^3 + dB^5$ el trabajo es muy difícil (Ver Keller, op.cit. [1], pág. 274) y sólo es posible conseguir ciertas consideraciones sobre los resultados.

§3. La fórmula de Dreifuss

Dreifuss^(x) indicó la fórmula

$$(1) \quad B = H + K \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{H}{H_0}$$

como aproximación de la curva de imantación. K y H₀ son constantes del material.

Comparando (1) con la fórmula

$$B = H + 4\pi M$$

donde M es la imantación, se obtiene $K = 2 M_\infty$

donde $M_\infty = \left(\frac{B-H}{4\pi} \right)_{H \rightarrow \infty}$ representa el valor de la imantación en la saturación.

Para $H = H_0$

$$\left(\frac{B-H}{4\pi} \right)_{H=H_0} = \frac{M_\infty}{2}$$

vale decir para $H = H_0$ se obtiene la mitad de la saturación.

H₀ mide pues la dureza magnética del material ferromagnético.

Por el gran valor de M_∞ podemos simplificar la (1) aun más suprimiendo H en el segundo miembro. Esto queda en general justificado, menos para valores muy grandes de H (en la saturación) que prácticamente no interesan.

Por consiguiente podemos reemplazar (1) por

$$(2) \quad B = 2 M_\infty \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{H}{H_0}$$

de manera que

$$(3) \quad \frac{dB}{dH} = \frac{2 M_\infty}{H_0} \frac{1}{1 + \frac{H^2}{H_0^2}}$$

de donde resulta que

$$(4) \quad \mu_0 = \left(\frac{dB}{dH} \right)_{H=0} = \frac{2 M_\infty}{H_0}$$

es la permeabilidad inicial. Con $\phi = N \sigma B$;

$$(5) \quad H = \frac{l \pi N^2}{l} \sigma$$

siendo N el número de espiras de la bobina, σ el área, l la longitud media del núcleo de la misma, la (3) se transforma en:

$$\frac{d\phi}{d\sigma} = \frac{l \pi N^2 \sigma \mu_0}{l} \frac{1}{1 + \frac{H^2}{H_0^2}} = \frac{L_0}{1 + \frac{H^2}{H_0^2}}$$

(x) Dreifuss: Archiv für Elektrotechnik, 2, 1913.

siendo L_0 la self-inducción de la bobina para corrientes muy débiles, si reemplazamos la constante de material H_0 por otra \mathcal{H}_0 definida por
$$H_0 = \frac{4\pi N \mathcal{H}_0}{l}$$

obtenemos

$$(6) \quad \frac{d\phi}{d\mathcal{H}} = L_0 \psi(\mathcal{H}) \quad \text{siendo} \quad \psi(\mathcal{H}) = \frac{1}{1 + \mathcal{H}^2/\mathcal{H}_0^2} \quad (7)$$

La relación de Dreifuss tiene la ventaja de prestarse muy bien para cálculos analíticos, pero en muchos casos en que no la necesitaremos, operaremos con la función general $\psi(\mathcal{H})$ de la (6).

Para tener una idea de la "no linealidad" del problema en función de \mathcal{H} , pondremos

$$(8) \quad \gamma = \phi / \phi_\infty$$

relación que nos daría una especie de porcentaje de no linealidad. Siendo $\phi = L_0 \mathcal{H}_0 \arctg \mathcal{H} / \mathcal{H}_0$, $\phi_\infty = L_0 \mathcal{H}_0 \frac{\pi}{2}$

$$(9) \quad \gamma = \frac{2\phi}{\pi L_0 \mathcal{H}_0} = \frac{2}{\pi} \arctg \mathcal{H} / \mathcal{H}_0$$

En la table figura $\gamma = \phi / \phi_\infty$ en función de $\mathcal{H} / \mathcal{H}_0$

$\mathcal{H} / \mathcal{H}_0$	$\gamma = \phi / \phi_\infty$
0	0,000
0,5	0,294
0,75	0,409
1	0,500
2	0,706
3	0,794
5	0,874
∞	1,000

§ 4. El estudio de Zenneck y Schunck

Zenneck y Schunck^(x) integraron la ecuación

$$(1) \quad \psi(\tau) \dot{y} + \delta \cdot y + \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \int y d\tau = \frac{U_0}{L_0 \omega} \cos \tau$$

ensayando

$$(2) \quad y = \sum_1^{\infty} (C_n \cos n\tau + S_n \sin n\tau)$$

con lo cual suponían que la solución del problema era periódica^(xx)

Supusieron además que cerca de la resonancia de la oscilación fundamental, zona de particular interés, era posible limitarse al primer término de (2), teniendo con ello

$$(3) \quad y = C_1 \cos(\tau + \alpha) = C_1 \cos \psi$$

Reemplazando la (3) en (1) resulta

$$- \psi(C_1 \cos \psi) C_1 \sin \psi + \delta C_1 \cos \psi + \frac{\omega_0^2}{\omega^2} C_1 \sin \psi = \frac{U_0}{L_0 \omega} \cos(\psi - \alpha)$$

El sentido de aproximación de esta ecuación cerca de la resonancia es según Zenneck y Schunck, que se reemplaza el primer término del primer miembro por la armónica fundamental de su desarrollo en serie de Fourier, vale decir

$$(4) \quad q_1(C_1) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \psi(C_1 \cos \psi) \sin^2 \psi d\psi$$

de modo que resulta

$$(5) \quad C_1 \left[-q_1(C_1) \sin \psi + \delta \cos \psi + \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \sin \psi \right] = \frac{U_0}{L_0 \omega} \cos(\psi - \alpha)$$

igualando los factores de $\sin \psi$ y $\cos \psi$ respectivamente se obtiene

$$(6) \quad \begin{cases} C_1 \left(-q_1(C_1) + \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \right) = \frac{U_0}{L_0 \omega} \sin \alpha \\ C_1 \delta = \frac{U_0}{L_0 \omega} \cos \alpha \end{cases}$$

de manera que resulta

$$(8) \quad \cot \alpha = - \frac{\delta}{q_1(C_1) - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}}$$

(x) Zenneck y Schunck, Jahrbuch für Drahtlose Telegraphie, 19, 1922.

(xx) Y del mismo período de la f.e.m.

y

$$(9) \quad c_1 \sqrt{(q_1(\omega) - \frac{\omega_0^2}{\omega^2})^2 + \delta^2} = \frac{U_0}{L_0 \omega}$$

ecuaciones que nos determinan c_1 y α .

Los susodichos autores han operado con la relación de Dreifuss

$$\psi(y) = \frac{1}{1+y^2/y_0^2} = \frac{1}{1+y^2 \cos^2 \varphi}$$

donde y significa $y = \omega/\omega_0$.

La ecuación (4) resulta

$$(10) \quad q_1(y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \psi(y \cos \varphi) \sin^2 \varphi d\varphi = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin^2 \varphi d\varphi}{1+y^2 \cos^2 \varphi} \quad (\text{Ver } \text{Apéndice 1}) = \frac{2}{\pi} [\sqrt{1+y^2} - 1]$$

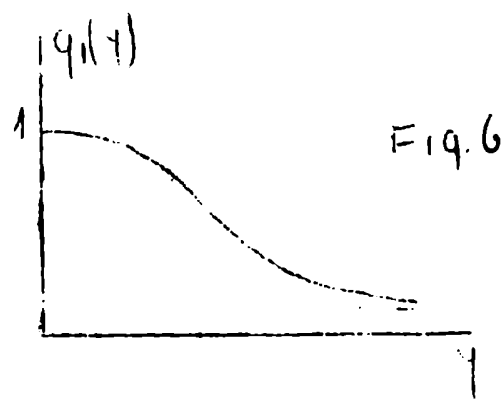
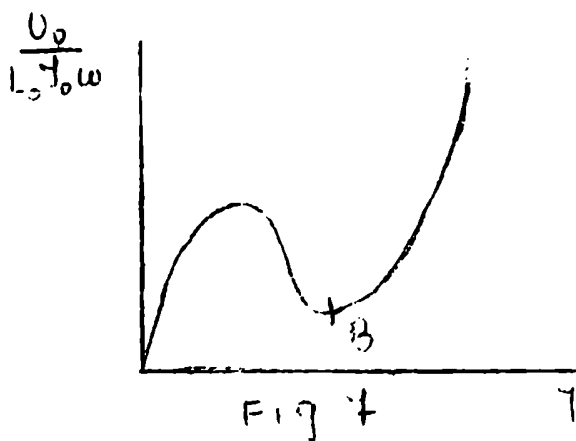
$q_1(y)$ resulta una función monótona del tipo de la representada en fig.

6.

Por otra parte la función $c_1 = c_1(\omega/\omega_0)$ dada por (9) se reduce a

$$(9') \quad y \sqrt{(q_1(y) - \frac{\omega_0^2}{\omega^2})^2 + \delta^2} = \frac{U_0}{L_0 \omega}$$

donde $q_1 = q_1(y)$ está dado por (10). La ecuación (9') da una característica del tipo de fig. 7.



$$L_0 \omega \sqrt{(q_1(y) - \frac{\omega_0^2}{\omega^2})^2 + \delta^2}$$

vendría a representarnos aquí el valor de la impedancia del sistema; impedancia dependiente de la amplitud de la intensidad y .

El valor mínimo de aquella impedancia es R y es adquirida cuando :

$$(11) \quad q_1(y) = \frac{\omega_0^2}{\omega^2}$$

valor de y que para $\delta = 0$ nos caracteriza el punto B de la fig. 7, punto de resonancia del sistema. Vemos entonces que para determinados valores de ω y ω_0 la resonancia tiene lugar para un determinado valor de la amplitud y ; éste es el fenómeno típico de la ferresonancia.

§ 5. Discusión de la curva característica

Sin hacer uso ahora de la función de Dreifuss, discutiremos la característica de la solución $c_1 = c_1(U_0)$ dado en el § anterior.

Habíamos definido

$$(1) \quad q_1(\gamma) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \psi(\gamma \cos \varphi) \operatorname{sen}^2 \varphi \, d\varphi$$

$$(2) \quad p_1(\gamma) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \psi(\gamma \cos \varphi) \cos^2 \varphi \, d\varphi$$

utilizando la variable adimensional $\gamma = c_1 / U_0$

Se puede demostrar (ap. 2) la relación

$$(3) \quad p_1(\gamma) = q_1(\gamma) + \gamma \frac{dq_1}{d\gamma}$$

Estudiaremos ante todo la derivada de la curva

$$(4) \quad \frac{U_0}{L_0 \gamma_0 \omega} = \gamma \sqrt{\left(q_1(\gamma) - \frac{\omega_0^2}{\omega^2} p_1 \right) + \delta^2}$$

Derivando

$$\frac{d}{d\gamma} \left(\frac{U_0}{L_0 \gamma_0 \omega} \right) = \frac{\gamma \left(q_1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2} p_1 \right) \frac{dq_1}{d\gamma}}{\sqrt{\left(q_1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2} p_1 \right)^2 + \delta^2}} = \frac{\left(q_1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2} p_1 \right) \frac{dq_1}{d\gamma}}{\sqrt{\left(q_1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2} p_1 \right)^2 + \delta^2}}$$

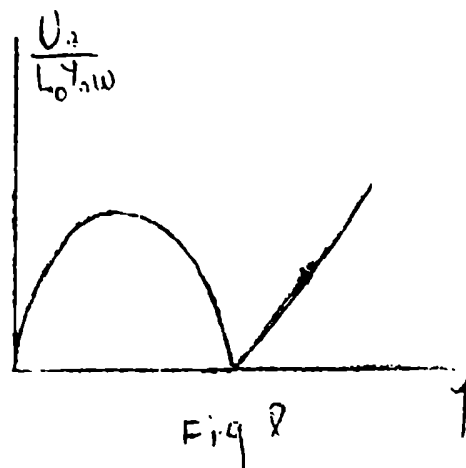
y mediante (3)

$$(5) \quad \frac{d}{d\gamma} \left(\frac{U_0}{L_0 \gamma_0 \omega} \right) = \frac{\left(q_1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2} p_1 \right) \left(p_1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2} q_1 \right) + \delta^2}{\sqrt{\left(q_1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2} p_1 \right)^2 + \delta^2}}$$

Para $\delta = 0$ resulta $\frac{d}{d\gamma} \left(\frac{U_0}{L_0 \gamma_0 \omega} \right) = \pm \left(p_1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2} q_1 \right)$ (6)

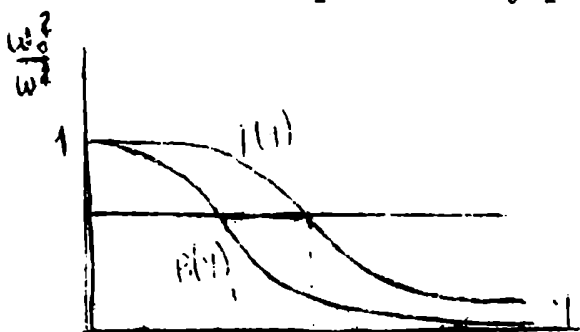
donde vale el signo $\left\{ \begin{array}{l} \text{superior} \\ \text{inferior} \end{array} \right\}$ para $q_1 \gtrless \frac{\omega_0^2}{\omega^2}$

de manera que la característica tiene la forma de la fig. 8, vale decir una degeneración de la curva real (fig. 8). La ecuación (5) nos muestra que para δ suficientemente pequeño la derivada tiene dos ceros que estarán dados



aproximadamente por $q_1(y) = \frac{\omega_0^2}{\omega^2}$ y $p_1(y) = \frac{\omega_0^2}{\omega^2}$ cuando $\delta \rightarrow 0$.

Si suponemos muy pequeño al δ^2 hay una manera gráfica



sencilla de ubicar las partes ascendentes y descendentes de la curva característica: se representan en un gráfico $q_1 = q_1(y)$ y $p_1 = p_1(y)$ y se traza la recta $\frac{\omega_0^2}{\omega^2} = cte$ dada por los parámetros del problema.

Valores de y para los cuales la curva $U_0 = U_0(y)$ es descendente

Para $\delta = 0$ la curva característica es descendente para aquellos valores de y abscisas de puntos de la recta $\frac{\omega_0^2}{\omega^2} = cte$ contenidos en el segmento de dicha recta comprendido entre las curvas $p = p(y)$ y $q = q(y)$ (fig. 9). Para $\delta > 0$ la parte descendente estará dada por la abscisa de ciertos puntos (no todos) de los contenidos en el antedicho segmento:

En el caso de la función de Dreifuss se obtiene (ap. mat. 1)

$$(7) \quad q_1(y) = f(y) = \frac{\sum [\sqrt{1+y^2} - 1]}{y^2}$$

y

$$(8) \quad p_1(y) = \frac{f(y)}{\sqrt{1+y^2}}$$

En este caso $p_1(y)$ y $q_1(y)$ son funciones monótonas decrecientes y $p_1(y) < q_1(y)$ para todo valor de y , tendiendo ambas asintóticamente a 0. Tanto en este caso como en general, por ser $\psi(0) = -1$, $p_1(0) = q_1(0) = 1$.

Los razonamientos anteriores nos muestran inmediatamente en el caso de Dreifuss que no hay partes descendentes en la curva característica para $\frac{\omega_0^2}{\omega^2} \geq 1$, y que en el caso $\frac{\omega_0^2}{\omega^2} < 1$ dichas partes se alejan del origen para valores decrecientes de $\frac{\omega_0^2}{\omega^2}$, pero se alejan de modo que dichas zonas son cada vez más amplias.

Trataremos ahora de hallar para el caso de Dreifuss un valor δ^* tal que para todo $\delta > \delta^*$ no haya parte descendente en la curva característica para cualquier valor de $\frac{\omega_0^2}{\omega^2}$. Hallaremos el mínimo de la expresión

$$(9) \quad \left(q_1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \right) \left(p_1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \right) = \left(f(y) - \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \right) \left(\frac{f(y)}{\sqrt{1+y^2}} - \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \right) = E \left(f, \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \right)$$

como función de dos variables: $f(y)$ y (ω_0^2/ω^2) . Para ello conviene decir que $f(y)$ cumple la igualdad

$$(10) \quad f(y) \sqrt{1+y^2} = 2 - f(y)$$

como se puede verificar rápidamente reemplazando $f(y)$ por su valor dado en (7). De (10)

$$(11) \quad \frac{f(y)}{\sqrt{1+y^2}} = \frac{2-f}{2-f}$$

reemplazando en (9)

$$(9') \quad E\left(f, \frac{\omega_0^2}{\omega^2}\right) = \left(f - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}\right) \left(\frac{f^2}{2-f} - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}\right)$$

cuyo valor mínimo estará dado por los valores f^* y $(\frac{\omega_0^2}{\omega^2})^{*2}$ que cumplen:

$$(12) \quad \begin{cases} \frac{\partial E}{\partial f} = \left(\frac{f^{*2}}{2-f^*} - \frac{\omega_0^{*2}}{\omega^2}\right) + \left(f^* - \frac{\omega_0^*}{\omega^2}\right) \left(\frac{(2-f^*)2f^* + f^{*2}}{(2-f^*)^2} - 1\right) = 0 \\ \frac{\partial E}{\partial \frac{\omega_0^2}{\omega^2}} = -\left(f^* - \frac{\omega_0^{*2}}{\omega^2}\right) - \left(\frac{f^{*2}}{2-f^*} - \frac{\omega_0^*}{\omega^2}\right) = 0 \end{cases}$$

Reemplazando la segunda de (12) en la primera:

$$(13) \quad \left(f^* - \frac{\omega_0^{*2}}{\omega^2}\right) \left(\frac{(2-f^*)2f^* + f^{*2}}{(2-f^*)^2} - 1\right) = 0$$

ecuación cuyas raíces son $f^* = \frac{\omega_0^{*2}}{\omega^2}$; $f^* = 2 + \sqrt{2}$; $f^* = 2 - \sqrt{2}$

Evidentemente $f^* = \frac{\omega_0^{*2}}{\omega^2}$ no puede darnos un máximo ya que nos anula el valor de $E(f, \omega_0^2/\omega^2)$; la raíz $f^* = 2 + \sqrt{2}$ queda también descartada por ser mayor que 1, luego

$$(14) \quad f^* = 2 - \sqrt{2} = 0,586$$

Por la segunda ecuación de (12)

$$(15) \quad \frac{\omega_0^{*2}}{\omega^2} = \frac{1}{2} \left(f^* + \frac{f^{*2}}{2-f^*}\right) = \frac{f^*}{2-f^*} = 0,414$$

luego reemplazando (14) y (15) en (9') resulta

$$(16) \quad E^* = E\left(f^*, \frac{\omega_0^{*2}}{\omega^2}\right) = -f^{*2} = -0,0294$$

ya que debido a que el mínimo de E es $-0,0294$ para $f^* > 0,0294$ $E + f^*$ y por lo tanto tanto la derivada a la curva característica será siempre positiva no habiendo partes descendentes. Esta es en el fondo la causa por la cual en el futuro de nuestro estudio, nos

restringiremos en general a pequeños valores de δ ya que si esto no sucediera, no habría partes descendentes en la curva característica y es de nuestro particular interés estudiar el fenómeno cuando existan esas "anomalías".

Por otra parte, en el fenómeno de ferresonancia es un hecho experimentalmente comprobado que la parte descendente desaparece para un valor suficientemente elevado de la resistencia.

Cunningham (op.cit. [5]) se ocupa del circuito ferresonante basándose en fórmulas empíricas de tipo potencial, estudiando tanto teóricamente como experimentalmente las curvas $U_{L_0} = U_0(\omega)$ donde U_{L_0} es el módulo de la tensión entre los bornes de la bobina.

Según los resultados del § 4 tendríamos

$$(18) \quad U_L = \frac{d\phi}{dt} = L_0 \psi(\beta) \dot{i} = -L_0 \int_0^\beta \psi(\gamma \cos^2 \theta) \omega \gamma \sin \theta \, d\theta$$

Considerando como antes el primer término del desarrollo en serie de Fourier de $\psi \sin \theta$

$$(19) \quad U_L = -L_0 \int_0^\beta \omega \gamma q_1(\gamma) \sin \theta \, d\theta = U_{L_0} \sin \theta$$

donde

$$(20) \quad U_{L_0} = -L_0 \int_0^\beta \omega \gamma q_1(\gamma) \, d\gamma$$

(20) nos da entonces $U_{L_0} = U_{L_0}(\gamma)$, si deseamos obtener $U_{L_0} = U_{L_0}(\omega)$ usando a U_0 como parámetro, tendremos que considerar la (20) y la (4) que nos liga y con U_0 y ω

Para resumir: Zenneck y Schunck calculan teóricamente la característica $U = U(\beta)$ del circuito ferresonante limitándose a la armónica fundamental de la intensidad, limitación que según ellos es lícita para zonas cercanas al punto de resonancia de la oscilación fundamental^(x). Ellos realizaron además experiencias^(xx) que concordaban con los resultados obtenidos, con excepción de la parte descendente de la curva sobre la cual no hacen razonamientos sino simplemente dicen que esa parte no es realizable.

(x) Punto definido como mínimo de la curva $U_0 = U_0(c_1)$.

(xx) Conviene decir: para valores de $\frac{\omega_0^2}{\omega^2}$ cercanos a 1, p. ej.

$$\frac{\omega_0^2}{\omega^2} = 0.9$$

Nuestra tarea en lo que sigue será tratar de resolver el problema sin limitarnos al ensayo $\Psi = c_1 \cos \psi$ de Zenneck y Schunck, consideraremos para ello las armónicas superiores de la intensidad y trataremos de ensanchar en lo posible las zonas de validez de las fórmulas que obtengamos.

Debido a la falta de linealidad, no es posible decir a priori que pese a tener la solución buscada otras armónicas, la armónica fundamental obedecerá a las conclusiones de este párrafo; como veremos luego habrá influencias de las otras armónicas sobre la primera, no necesariamente despreciables.

El resto del trabajo nos mostrará que el resultado buscado tendrá otras armónicas además de la primera, pero lograremos probar, no obstante ello, (610) que para una amplia gama de valores de los parámetros, el resultado de Zenneck y Schunck da con una buena aproximación el coeficiente de la armónica fundamental del resultado obtenido.

Por otra parte, y aunque haya que dejar de lado el ensayo de Zenneck y Schunck, la idea de una predominancia de la armónica fundamental que puede considerarse generalización de la idea de Zenneck y Schunck resultará muy fecunda y habrá de ser nuestra llave de entrada al estudio subsiguiente. En estos temas no es posible proceder con absoluta generalidad, hay que "ceder" en ciertos puntos para poder obtener resultados; estos son los puntos que a menudo diferencian las teorías y las hacen más o menos afortunadas, según aquellas concesiones sean más o menos acertadas. Ese punto, en el cual nosotros haremos hincapié, será justamente la idea de la preponderancia de la armónica fundamental, idea de Zenneck y Schunck, ampliada y modificada según convendrá a nosotros, de modo que sin restringirnos demasiado el campo, nos proporcione el camino para proseguir.

§6. Influencia de las armónicas, estudio de la resonancia de la armónica fundamental

Retomaremos la ecuación

$$(1) \quad \psi(\tau) \ddot{y} + \delta \dot{y} + \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \int y d\tau = \frac{U_0}{L_0 \omega} \cos \tau$$

Para la integración de esta ecuación haremos el ensayo

$$(2) \quad y = \sum_0^{\infty} a_\nu \cos \nu \tau + b_\nu \sin \nu \tau$$

vale decir, el desarrollo de y en una serie de Fourier^(x).

Pondremos $\varphi = \tau + \alpha$ de modo que resulte

$$(3) \quad y = c_0 + c_1 \cos \varphi + \sum_2^{\infty} (c_\nu \cos \nu \varphi + s_\nu \sin \nu \varphi)$$

ensayo que se reduce al de Zenneck y Schunck (4) para $c_\nu = s_\nu = 0$ para $\nu \geq 2$.

Haremos ahora la suposición

$$(4) \quad c_\nu / c_1 \ll 1, \quad s_\nu / c_1 \ll 1 \quad \nu \geq 2$$

de manera que despreciaremos sus cuadrados y productos frente a 1. Utilizaremos esta suposición en el cálculo y al obtener c_ν y s_ν en función de los parámetros, diremos haber encontrado una solución del problema para aquellos valores de los parámetros para los cuales c_ν y s_ν cumplan dicha suposición.

Consideraremos ahora que podemos escribir

$$(3') \quad y = c_0 + c_1 \cos \varphi + \sum_2^N (c_\nu \cos \nu \varphi + s_\nu \sin \nu \varphi) \quad \underline{c_0 = 0}$$

o sea que podremos considerar un número finito de armónicas aunque tan grande como se quiera. Pondremos además $y = y_1 + y_2$,

donde

$$(4) \quad y_1 = c_1 \cos \varphi \quad y_2 = c_0 + \sum_{\nu=2}^N (c_\nu \cos \nu \varphi + s_\nu \sin \nu \varphi)$$

luego por considerar y_2^2 despreciable frente a términos del orden de la unidad:

$$\psi(y) = \psi(y_1 + y_2) = \psi(y_1) + y_2 \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right)_{y=y_1} = \psi(y_1) + y_2 \frac{\partial \psi(y_1)}{\partial y_1}$$

Reemplazando en la (1)

$$\left[\psi(y_1) + y_2 \frac{\partial \psi(y_1)}{\partial y_1} \right] \ddot{y}_1 + \delta (\dot{y}_1 + \dot{y}_2) + \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \int y_1 d\tau = \frac{U_0}{L_0 \omega} \cos(\varphi - \alpha)$$

(x) Esto implica suponer y periódica y del mismo período de la f.e.m. Ver ap. matem. 3. \checkmark

pero

$$L\psi(t) + y_2 \frac{\partial \psi(t)}{\partial t_1} \Big|_{[y_1 + y_2]} = \psi(t_1) \dot{t}_1 + \psi(t_1) \dot{t}_2 + y_2 \dot{t}_1 \frac{\partial \psi(t)}{\partial t_1} =$$

$$= \psi(t_1) \dot{t}_1 + \frac{d}{dt} (\psi(t_1) y_2)$$

Reemplazando en la anterior:

$$(4) \psi(t_1) \dot{t}_1 + \frac{d}{dt} (\psi(t_1) L) + \delta \psi + \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \int \delta t = \frac{U_0}{L \omega} \cos(\theta - \alpha)$$

De (4) obtenemos:

$$(1) y_1 = c_1 \cos \theta, \quad \dot{t}_1 = -c_1 \sin \theta, \quad \int \dot{t}_1 dt = \int \dot{t}_1 d\theta = c_1 \sin \theta$$

$$(2) t_2 = c_0 + \sum_{\nu}^N (c_{\nu} \cos \nu \theta + s_{\nu} \sin \nu \theta)$$

$$\dot{t}_2 = \sum_{\nu}^N \nu (s_{\nu} \cos \nu \theta - c_{\nu} \sin \nu \theta)$$

$$\int \dot{t}_2 dt = \int \dot{t}_2 d\theta = \sum_{\nu}^N (c_0 \theta + \frac{c_{\nu}}{\nu} \sin \nu \theta - \frac{s_{\nu}}{\nu} \cos \nu \theta)$$

Considerando que derivar respecto a t equivale a derivar respecto a θ y considerando las (7), la ecuación (5) puede escribirse:

$$(8) \left\{ \begin{aligned} & -c_1 \dot{t}_1 \sin \theta + \frac{d}{dt} \left(\psi \sum_{\nu}^N (c_0 + c_{\nu} \cos \nu \theta + s_{\nu} \sin \nu \theta) + \right. \\ & \left. + \delta \sum_{\nu}^N (c_{\nu} \cos \nu \theta + s_{\nu} \sin \nu \theta) + \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \sum_{\nu}^N (c_0 \theta + \frac{c_{\nu}}{\nu} \sin \nu \theta - \frac{s_{\nu}}{\nu} \cos \nu \theta) \right) \\ & = \frac{U_0}{L \omega} \cos(\theta - \alpha) \end{aligned} \right.$$

De (8) se puede colegir fácilmente $c_0 = 0$: integremos (8) entre

$-\pi$ y π :

$$-c_1 \int_{-\pi}^{\pi} \psi(c_1 \cos \theta) \sin \theta d\theta = 0 \text{ por ser } \psi(c_1 \cos \theta) \text{ par en } \theta$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{d}{dt} \left[\psi(c_1 \cos \theta) \sum_{\nu}^N (c_0 + c_{\nu} \cos \nu \theta + s_{\nu} \sin \nu \theta) \right] d\theta = \int_{-\pi}^{\pi} \psi(c_1 \cos \theta) \sum_{\nu}^N (c_0 + c_{\nu} \cos \nu \theta + s_{\nu} \sin \nu \theta) d\theta = 0$$

por ser periódica de período 2π el término encerrado entre corchetes.

$$\delta \int_{-\pi}^{\pi} \left(\sum_{\nu}^N c_{\nu} \cos \nu \theta + s_{\nu} \sin \nu \theta \right) d\theta = \delta c_0 \theta \Big|_{-\pi}^{\pi} = 2\pi \delta c_0$$

$$\frac{\omega_0^2}{\omega^2} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\sum_{\nu}^N \omega \nu \theta + \frac{c_{\nu}}{\nu} \sin \nu \theta - \frac{s_{\nu}}{\nu} \cos \nu \theta \right) d\theta = \frac{1}{2} \frac{\omega_0^2}{\omega^2} c_0 \theta^2 \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0$$

Siendo por otro lado $\frac{U_0}{L_0 \omega} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(\varphi - \alpha) d\varphi = 0$

la (8) se reduce a $2\pi \delta c_0 = 0 \Rightarrow c_0 = 0$.

Con ello la (8) se reduce a:

$$(8') \quad -c_1 \psi(c_1 \cos \varphi) \sin \varphi + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \psi(c_1 \cos \varphi) \sum_{v=2}^N (c_v \cos v \varphi + s_v \sin v \varphi) + \\ + \delta \sum_{v=1}^N (c_v \cos v \varphi + s_v \sin v \varphi) + \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \sum_{v=1}^N \left(\frac{c_v}{v} \sin v \varphi - \frac{s_v}{v} \cos v \varphi \right) = \\ = \frac{U_0}{L_0 \omega} \cos(\varphi - \alpha)$$

Llamando

$$(9) \quad \begin{cases} A_{mm}(c) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \psi(\varphi) \cos m \varphi \cos m \varphi d\varphi \\ B_{mm}(c) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \psi(\varphi) \sin m \varphi \sin m \varphi d\varphi \end{cases}$$

y considerando que por ser $\varphi_1 = c_1 \cos \varphi$ par en φ , $\psi(\varphi_1)$ es también par en φ y por lo tanto

$$\int_{-\pi}^{\pi} \psi(\varphi) \sin m \varphi \cos m \varphi d\varphi = 0$$

tendremos los siguientes desarrollos de Fourier:

$$(10) \quad \begin{cases} \psi(\varphi) \sin v \varphi = \sum_{\mu=0}^{\infty} B_{v\mu}(c) \sin \mu \varphi \\ \psi(\varphi) \cos v \varphi = \sum_{\mu=0}^{\infty} A_{v\mu}(c) \cos \mu \varphi \end{cases}$$

Considerando que

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} \sum_{v=2}^N (c_v \psi \cos v \varphi + s_v \psi \sin v \varphi) = \frac{1}{\pi} \sum_{v=2}^{\infty} \sum_{\mu=0}^{\infty} (c_v A_{v\mu}(c) \mu \varphi + s_v B_{v\mu}(c) \mu \varphi) \\ = \sum_{v=2}^{\infty} \sum_{\mu=0}^{\infty} (-\mu c_v A_{v\mu} \sin \mu \varphi + \mu s_v B_{v\mu} \cos \mu \varphi)$$

la ecuación (8), teniendo en cuenta las (10) puede escribirse:

$$(11) \quad -c_1 \sum_{\mu=0}^{\infty} B_{1\mu} \sin \mu \varphi + \sum_{v=2}^{\infty} \sum_{\mu=0}^{\infty} (-\mu c_v A_{v\mu} \sin \mu \varphi + \mu s_v B_{v\mu} \cos \mu \varphi) \\ + \delta \sum_{v=1}^N (c_v \cos v \varphi + s_v \sin v \varphi) + \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \sum_{v=1}^N \left(\frac{c_v}{v} \sin v \varphi - \frac{s_v}{v} \cos v \varphi \right) = \\ = \frac{U_0}{L_0 \omega} \cos(\varphi - \alpha) = \frac{U_0}{L_0 \omega} \cos \varphi \cos \alpha + \frac{U_0}{L_0 \omega} \sin \varphi \sin \alpha$$

Para que se cumpla esta ecuación, es necesario y suficiente que se igualen los coeficientes de $\sin i \varphi$ y $\cos i \varphi$ ($i=0,1,\dots$), escribiendo el sistema de infinitas ecuaciones que así obtenemos:

$$\begin{array}{l}
 \sin \varphi \Rightarrow -C_1 B_{11} - \sum_{\nu=2}^N C_\nu A_{\nu 1} + C_1 \frac{\omega_0^2}{\omega^2} = \frac{U_0}{L_0 \omega} \sin \alpha \\
 \cos \varphi \Rightarrow \sum_{\nu=1}^N S_\nu B_{\nu 1} + C_1 \delta = \frac{U_0}{L_0 \omega} \cos \alpha \\
 \sin 2\varphi \Rightarrow -C_1 B_{12} - 2 \sum_{\nu=2}^N C_\nu A_{\nu 2} + \delta S_2 + \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \frac{C_2}{2} = 0 \\
 \cos 2\varphi \Rightarrow 2 \sum_{\nu=2}^N S_\nu B_{\nu 2} + \delta C_2 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \frac{S_2}{2} = 0 \\
 \vdots \\
 (12) \begin{array}{l}
 \sin m\varphi \Rightarrow -C_1 B_{1m} - m \sum_{\nu=2}^N C_\nu A_{\nu m} + \delta S_m + \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \frac{C_m}{2} = 0 \\
 \cos m\varphi \Rightarrow m \sum_{\nu=2}^N S_\nu B_{\nu m} + \delta C_m - \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \frac{S_m}{2} = 0 \\
 \vdots \\
 \cos N\varphi \Rightarrow N \sum_{\nu=2}^N S_\nu B_{\nu N} + \delta C_N - \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \frac{S_N}{2} = 0 \\
 \sin N\varphi \Rightarrow C_1 B_{1N} - N \sum_{\nu=2}^N C_\nu A_{\nu N} + \delta S_N + \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \frac{C_N}{2} = 0
 \end{array} \quad m \leq N \\
 \hline
 \begin{array}{l}
 \sin i\varphi \Rightarrow -C_1 B_{1i} - i \sum_{\nu=2}^N C_\nu A_{\nu i} = 0 \\
 \cos i\varphi \Rightarrow i \sum_{\nu=2}^N S_\nu B_{\nu i} = 0
 \end{array} \quad i > N
 \end{array}$$

Este es un sistema no homogéneo de infinitas ecuaciones con 2N incógnitas (las c_ν y s_ν y α); esta disimetría proviene de haber considerado solamente las N primeras armónicas de J . Pero si el ensayo hecho hubiera sido acertado, la solución dada por 2N ecuaciones cualesquiera (con tal que sean independientes) del sistema (12) tendrían que cumplir las restantes ecuaciones. Pero como hemos supuesto que N es suficientemente grande como para poder no considerar las armónicas de orden superior a N sin error considerable, trataremos de resolver el sistema de 2N ecuaciones con 2N incógnitas proveniente de los coeficientes de $\sin i\varphi$ y $\cos i\varphi$ ($i = 1, 2, \dots, N$) o sea de

$$(13) \left\{ \begin{array}{l}
 -C_1 B_{1i} - \sum_{\nu=2}^N C_\nu A_{\nu i} + C_1 \frac{\omega_0^2}{\omega^2} = \frac{U_0}{L_0 \omega} \omega^i \alpha \\
 \sum_{\nu=2}^N S_\nu B_{\nu i} + C_1 \delta = \frac{U_0}{L_0 \omega} \sin \alpha \\
 -C_1 B_{1m} - m \sum_{\nu=2}^N C_\nu A_{\nu m} + \delta S_m + \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \frac{C_m}{2} = 0 \\
 m \sum_{\nu=2}^N S_\nu B_{\nu m} + \delta C_m - \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \frac{S_m}{2} = 0
 \end{array} \right. \quad m = 2, 3, \dots, N$$

y trataremos a posteriori de comprobar las restantes ecuaciones de (12). Se ve que si hubiéramos tenido derecho a poner.

$$\Psi \cos \nu \varphi = \sum_0^N A_{\nu\mu} \cos \mu \varphi \qquad \Psi \operatorname{sen} \nu \varphi = \sum_0^N B_{\nu\mu} \operatorname{sen} \mu \varphi$$

o sea, a considerar nulas (o despreciables) las $A_{\nu\mu}$ y $B_{\nu\mu}$ para $\mu > N$ (para todo $\nu \leq N$), se habrían cumplido idénticamente las ecuaciones provenientes de $\cos i\varphi$ y de $\operatorname{sen} i\varphi$ para $i > N$.

Se puede demostrar

$$(14) \qquad A_{2m, 2m+1} = B_{2m, 2m+1} = 0$$

luego en las ecuaciones (13) determinadas por valores pares de n figuran como únicas incógnitas $c_2, s_2, c_4, s_4, \dots$ hasta c_N, s_N si N es par, o hasta c_{N-1}, s_{N-1} si N es impar; en el primer caso habría en esas ecuaciones N incógnitas, en el segundo caso $N-1$. Por otra parte, los valores pares de n nos determinan un sistema de N ecuaciones si N es par y de $N-1$ en caso contrario. Luego en ambos casos tendríamos para n par un sistema homogéneo con el mismo número de ecuaciones que de incógnitas (N en un caso, $N-1$ en el otro). Por ello, salvo en casos muy especiales (funciones Ψ tales que sus coeficientes de Fourier anulen el determinante de los coeficientes de (13)) podremos decir que

$$(15) \qquad c_2 = c_4 = \dots = c_{2i} = s_2 = s_4 = \dots = s_{2i} \equiv 0 \qquad 2i \leq N$$

Considerando las (14) y (15) el sistema (13) quedará reducido a

$$(16) \left\{ \begin{array}{l} -c_1 B_{1,1} - \sum_{i=1}^m c_{2i+1} A_{2i+1,1} + c_1 \frac{\omega_0^2}{\omega^2} = \frac{U_0}{L_0 \omega} \cos \alpha \\ \sum_{i=1}^m s_{2i+1} B_{2i+1,1} + c_1 \delta = \frac{U_0}{L_0 \omega} \operatorname{sen} \alpha \\ \vdots \\ -c_1 B_{1,2j+1} - (2j+1) \sum_{i=1}^m c_{2i+1} A_{2i+1,2j+1} + \delta s_{2j+1} + \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \frac{c_{2j+1}}{2j+1} = 0 \\ (2j+1) \sum_{i=1}^m s_{2i+1} B_{2i+1,2j+1} + \delta c_{2j+1} - \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \frac{s_{2j+1}}{2j+1} = 0 \end{array} \right.$$

donde $j = 1, 2, \dots, m$ y donde m está dado por $N/2$ si N es par y $N-1/2$ si N es impar. (16) es así un sistema de m ecuaciones con m incógnitas. Si además suponemos δ pequeño, podremos obtener otra propiedad: ya que si $\delta \approx 0$ las ecuaciones pares de (16) me determinan

el sistema

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_1^m S_{2i+1} B_{2i+1,1} - \frac{U_0}{L_0 \omega} \text{sen} \alpha = 0 \\ (2j+1) \sum_1^m S_{2i+1} B_{2i+1,2j+1} - \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \frac{S_{2j+1}}{2j+1} = 0 \quad j=1 \dots m \\ \vdots \end{array} \right.$$

que es un sistema de $\frac{m}{2}$ ecuaciones con $\frac{m}{2}$ incógnitas. Podemos decir

$$\text{sen} \alpha = S_3 = \dots = S_{2j+1} = 0$$

En el caso que $\delta \neq 0$ pero de todos modos pequeño, podremos decir:

$$(17) \quad \text{sen} \alpha = S_3 = \dots = S_{2j+1} = O(\delta)$$

El sistema (16) es todavía bastante difícil de estudiar, así que haremos un estudio de él para el caso límite $\delta=0$ en cuyo caso el sistema se convierte en

$$(18) \left\{ \begin{array}{l} c_1 \left(\frac{\omega_0^2}{\omega^2} - B_{1,1} \right) - c_3 A_{1,3} - \dots - c_{2m+1} A_{1,2m+1} = \frac{U_0}{L_0 \omega} \\ -c_1 B_{1,3} - c_3 (3A_{3,3} - \frac{\omega_0^2}{3\omega^2}) - c_5 A_{3,5} = 0 \\ \vdots \\ -c_1 B_{1,2j+1} - (2j+1)c_3 A_{2j+1,3} - \dots - c_{2j+1} [(2j+1) A_{2j+1,2j+1} - \frac{1}{2j+1} \frac{\omega_0^2}{\omega^2}] - \dots = 0 \end{array} \right. \quad j=1 \dots m$$

Teóricamente de (18) podríamos hallar $c_y = c_y(U_0)$ y con ello resolver definitivamente el problema, pero (18) no es un sistema algebraico común ya que una de la incógnitas (c_1) figura en manera arbitraria (que depende sólo de ψ) en los coeficientes de las otras y de sí misma (los $A_{\mu\nu}$ y $B_{\mu\nu}$)^(x).

Lo que será factible es hallar aproximadamente $\frac{U_0}{L_0 \omega} = f(c_1)$ o sea la función inversa de $c_1 = c_1 \left(\frac{U_0}{L_0 \omega} \right)$

Para comprobar la hipótesis de la pequeñez de los c_y ($y \geq 2$) tendríamos que hallar éstos en función de U_0 para cada función ψ y comparándolos con $c_1(U_0)$, hallar para qué valores de U_0 (que lógicamente dependerán de los parámetros ω_0, ω, L_0) efectivamente la hipótesis se cumple; tendremos entonces en $f = \sum c_y \omega^y \psi$ una solución de (1) para el ámbito susodicho.

(x) El sistema es no lineal respecto a c_1 pero lineal respecto a c_3, c_5, \dots .

Si llamamos zona de resonancia de una determinada armónica valores tales de U_0 para los cuales los coeficientes de Fourier de las otras armónicas son despreciables (o de cuadrado despreciable) frente al coeficiente de la armónica considerada, los razonamientos y resultados antedichos nos darían el ámbito en el cual podremos considerar que hay resonancia de la armónica fundamental.

Para estudiar $c_{2j+1} = c_{2j+1}(c_1)$ consideremos el sistema de ecuaciones obtenido de (18) al no considerar la primera ecuación, sistema que, si consideramos a c_1 no como incógnita sino como variable, es un sistema de $m-1$ ecuaciones con $m-1$ incógnitas inhomogéneo y lineal. Será el

$$\begin{cases} -c_3/c_1 \left[3A_{33} - \frac{\omega_0^2}{3\omega^2} \right] - 3c_5/c_1 A_{35} - 3c_7/c_1 A_{37} & = B_{13} \\ \vdots & \vdots \\ -(2j+1) \frac{c_3}{c_1} A_{2j+1,3} - c_{2j+1}/c_1 \left[(2j+1)A_{2j+1,2j+1} - \frac{1}{2j+1} \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \right] & = B_{1,2j+1} \end{cases}$$

$j = 1, 2, \dots, m$

Este sistema evidentemente nos determina unívocamente $\frac{c_{2j+1}}{c_1} = \frac{c_{2j+1}}{c_1}(c_1)$ claro está que para conocer exactamente estas funciones, habría que resolver rigurosamente (19), cosa prácticamente imposible si es que no se quiere imponer limitaciones estrictas sobre m . El hacer estas limitaciones arruinaría mucho la generalidad que estamos exigiendo a este estudio, ya que para verificar que dichas limitaciones son correctas, habría que volver a hacer el estudio sin hacerlas, con lo que caeríamos nuevamente en la dificultad mencionada.

Resolveremos (19) por el método de Cramer, y para poder evaluar los determinantes, impondremos condiciones restrictivas a los elementos de los mismos. Esto no significa que es imposible hallar métodos de resolución que no impliquen restricción alguna, o exijan restricciones menores de las que nosotros hemos de necesitar.

Dividiendo la ecuación de orden j de (19) por $2j + 1$, el determinante de los coeficientes (Δ_1) será:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} A_{33} - \left(\frac{1}{3} \frac{\omega_0^2}{\omega^2}\right)^2 & A_{35} & A_{37} & \dots & A_{3,2j+1} \\ A_{35} & A_{55} - \left(\frac{1}{5} \frac{\omega_0^2}{\omega^2}\right)^2 & A_{57} & \dots & A_{5,2j+1} \\ A_{37} & A_{57} & A_{77} - \left(\frac{1}{7} \frac{\omega_0^2}{\omega^2}\right)^2 & \dots & A_{7,2j+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{3,2j+1} & A_{5,2j+1} & A_{7,2j+1} & \dots & A_{2j+1,2j+1} - \left(\frac{1}{2j+1} \frac{\omega_0^2}{\omega^2}\right)^2 \end{vmatrix}$$

pudiéndose escribir si δ_{ij} es el símbolo de Kronecker

$$(21) \Delta_1 = \left| A_{2i+1, 2j+1} - \left(\frac{1}{2i+1} \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2 \delta_{ij} \right|$$

determinante simétrico dada la simetría de los A_{ij} y B_{ij} respecto a i y j .

Para c_3/c_1 obtendríamos de (19):

$$c_3/c_1 = \frac{\begin{vmatrix} \frac{B_{13}}{3} & A_{35} & A_{3, 2j+1} & \dots \\ \frac{B_{15}}{5} & A_{55} - \left(\frac{1}{5} \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2 & A_{5, 2j+1} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{B_{1, 2j+1}}{2j+1} & A_{5, 2j+1} & A_{2j+1, 2j+1} - \left(\frac{1}{2j+1} \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2 & \dots \end{vmatrix}}{\Delta_1}$$

Aun así el problema es demasiado general; impondremos ahora a la función ψ algunas limitaciones (ver apend. 4) que nos permitirán demostrar:

$$A_{\mu\nu} = \frac{p+q}{2} \left[\left(\frac{p-q}{p+q} \right)^{\frac{\mu+\nu}{2}} + \left(\frac{p-q}{p+q} \right)^{\frac{\mu-\nu}{2}} \right]$$

$$(22) B_{\mu\nu} = \frac{p+q}{2} \left[\left(\frac{p-q}{p+q} \right)^{\frac{\mu-\nu}{2}} - \left(\frac{p-q}{p+q} \right)^{\frac{\mu+\nu}{2}} \right]$$

y por lo tanto

$$A_{\mu\mu} = \frac{p+q}{2} \left[1 + \left(\frac{p-q}{p+q} \right)^\mu \right] \quad B_{\mu\mu} = \frac{p+q}{2} \left[1 - \left(\frac{p-q}{p+q} \right)^\mu \right]$$

donde

$$p = A_{11} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \psi(c, \cos \varphi) \cos^2 \varphi \, d\varphi$$

y

$$q = B_{11} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \psi(c, \cos \varphi) \sin^2 \varphi \, d\varphi$$

Las limitaciones hechas sobre ψ dejan todavía mucha generalidad al problema; es además inmediato ver que la función de Dreifuss según la cual

$$\psi(\cos \varphi) = \frac{1}{1 + \gamma^2 \cos^2 \varphi}$$

cumple las restricciones impuestas, y por lo tanto para ella valen las (22).

Para la función de Dreifuss, sin despreciar el H frente al $K \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{H}{H_0}$ resulta: $\psi = \frac{L_1}{L_0} + \frac{1}{1 + \gamma^2 \cos^2 \varphi}$; no valen las (22) como se puede observar, pero los $A_{\mu\nu}$ y $B_{\mu\nu}$ correspondientes se hallan inmediatamente a partir de los correspondientes a la función de Dreifuss simplificada, sumándoles $\frac{L_1}{L_0} \delta_{\mu\nu}$

Es evidente que $p = p(c_1)$ y $q = q(c_1)$ son iguales para $c_1=0$ ya que en ese caso $\psi(\gamma) = \psi(c_1 \cos \psi)$ deja de ser función de ψ . $\therefore p(0) = q(0) = \psi(0) = 1$. Si consideramos ahora continua a $\psi(\gamma)$ (y por lo tanto continuas $p(c_1)$ y $q(c_1)$) habrá un ámbito de valores de c_1 , que seguramente contendrá al $c_1 = 0$ para el cual podremos considerar $\frac{p-q}{p+q}$ pequeño, por ejemplo de cuadrado despreciable frente a la $\frac{p+q}{p+q}$ unidad ^(x).

Como es lógico la forma y la extensión de dicho ámbito dependerá exclusivamente de la función ψ utilizada, y se podrá calcular en cada caso.

Llamaremos ahora zona de influencia de la armónica j al ámbito de valores de c_1 para los cuales

$$(23) \quad |A_{ij}(c_1) - \frac{1}{i} \left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2| > 1 \quad \text{para todo } i \neq j$$

Veremos que los puntos de la zona de influencia de la armónica fundamental (primera restricción) que además cumplan la suposición

$$(24) \quad \left(\frac{p-q}{p+q}\right)^2 \ll 1$$

(segunda restricción) serán puntos de la zona de resonancia de dicha armónica.

A partir de (20) y (21) y con las dos restricciones susodichas se puede demostrar

$$(25) \quad \frac{c_3}{c_1} = -\frac{B_{13}}{3A_{33} - \frac{1}{3}\frac{\omega_0^2}{\omega^2}} = -q \left(\frac{p-q}{p+q}\right) \frac{1}{3A_{33} - \frac{1}{3}\frac{\omega_0^2}{\omega^2}}$$

Como nos muestra (25) c_3/c_1 puede considerarse de cuadrado despreciable, para los valores de c_1 que cumplen las dos restricciones antes mencionadas (siempre que no sea $q \gg 1$)

En el caso de Dreifuss donde $\psi = \frac{1}{1+\gamma/\gamma_0^2}$ se obtiene

$$q = f(c_1) = \frac{2}{c_1^2} (\sqrt{1+c_1^2} - 1) \quad ; \quad p = \frac{f(c_1)}{\sqrt{1+c_1^2}}$$

de donde

$$\left(\frac{p-q}{p+q}\right) = (f-1) \quad \left(\frac{p+q}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{1+c_1^2}}$$

(x) Como veremos ahora, tendremos que imponer esa condición para poder evaluar los determinantes, sin ella la evaluación de los mismos sería prácticamente inabordable.

y por lo tanto

$$(22) \begin{cases} A_{\mu\nu} = \frac{1}{\sqrt{1+c_1^2}} \left[(f-1)^{\frac{\mu-\nu}{2}} + (f-1)^{\frac{\mu+\nu}{2}} \right]; & B_{\mu\nu} = \frac{1}{\sqrt{1+c_1^2}} \left[(f-1)^{\frac{\mu-\nu}{2}} - (f-1)^{\frac{\mu+\nu}{2}} \right] \\ A_{\mu\mu} = \frac{1}{\sqrt{1+c_1^2}} \left[1 + (f-1)^\mu \right] & B_{\mu\mu} = \frac{1}{\sqrt{1+c_1^2}} \left[1 - (f-1)^\mu \right] \end{cases}$$

La (23) nos dará

$$(25') \quad \frac{c_3}{c_1} = \frac{f(1-f)}{3A_{33} - \frac{1}{3} \frac{\omega_0^2}{\omega^2}}$$

Por la forma de f , $f(1-f)$ es una función de c_1 cuyo máximo vale 0,25, vale decir que $f(1-f)$ puede considerarse de cuadrado despreciable frente a 1. Luego (25') nos dice que c_3/c_1 en el caso de Dreifuss aun sería de cuadrado despreciable sin la restricción $(1-f)^2 \ll 1$. De todos modos esa restricción no puede, por ahora, ser suprimida por haber sido utilizada en el cálculo (evaluación de los determinantes). Para c_{2n+1}/c_1 se obtiene una forma bastante más complicada (caso ψ cualquiera con tal que cumpla (22)) cuya obtención y evaluación dejamos para el apéndice 5. Resulta, siempre con las dos restricciones (23) y (24):

$$(26) \quad \frac{c_{2m+1}}{c_1} = \frac{B_{1,2m+1}}{(2m+1)A_{2m+1,2m+1} - \frac{1}{2m+1} \frac{\omega_0^2}{\omega^2}} + \frac{(-1)^m B_{13} \prod_{i=1}^{m-1} A_{2i+1,2i+3}}{3 \prod_{i=1}^m \left[A_{2i+1,2i+1} - \left(\frac{\omega_0}{(2i+1)\omega} \right)^2 \right]} + \frac{B_{1,2m-1} A_{2m-1,2m+1}}{2m-1} \frac{1}{\left[A_{2m-1,2m-1} - \left(\frac{1}{2m-1} \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2 \right] \left[A_{2m+1,2m+1} - \left(\frac{1}{2m+1} \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2 \right]}$$

En el apéndice resulta que en general $\left(\frac{c_{2n+1}}{c_1} \right)^2 \ll 1$ para la zona restringida por (23) y (24), (además se pide que no sea $p \gg 1$ o $q \gg 1$) y que en el caso de Dreifuss se obtendría $\left(\frac{c_{2n+1}}{c_1} \right)^2 \ll 1$ aun sin usar en la evaluación de (26), la segunda restricción ($(1-f)^2 \ll 1$)

Estudiaremos ahora la función $c_1 = C_1 \left(\frac{U_2}{\omega_0 \omega} \right)$. De (18) obtenemos

$$(30) \quad C_1 = \begin{vmatrix} \pm \frac{U_2}{\omega_0 \omega} & A_{13} & A_{15} & \dots & A_{1,2i+1} \\ 0 & A_{33} - \left(\frac{1}{3} \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2 & A_{35} & \dots & A_{3,2i+1} \\ 0 & A_{35} & A_{55} - \left(\frac{1}{5} \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2 & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & A_{3,2i+1} & A_{5,2i+1} & \dots & A_{2i+1,2i+1} - \left(\frac{1}{2i+1} \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2 \\ \hline B_{11} - \frac{\omega_0^2}{\omega^2} & A_{13} & \dots & \dots & A_{1,2i+1} \\ B_{33} & A_{33} - \frac{1}{3} \left(\frac{\omega_0}{\omega} \right)^2 & \dots & \dots & A_{3,2i+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ B_{1,2i+1} & B_{3,2i+1} & \dots & \dots & A_{2i+1,2i+1} - \left(\frac{1}{2i+1} \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2 \end{vmatrix}$$

Considerando el valor absoluto

$$(31) \quad |C_1| = \left| \frac{U_0}{L_0 \omega} \frac{\Delta_1}{\Delta} \right|$$

donde Δ es el determinante que figura en el denominador de (30), y Δ_1 está dado por (21).

Haciendo las mismas restricciones anteriores que nos han permitido llegar a (25) se puede obtener

$$(32) \quad \Delta = \left[\left(B_{11} - \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \right) \left(A_{33} - \left(\frac{1}{3} \frac{\omega_0^2}{\omega} \right) - A_{13} \frac{B_{13}}{3} \right) \right] \prod_{i=2}^m \left(A_{2i+1, 2i+1} - \left(\frac{1}{2i+1} \frac{\omega_0^2}{\omega} \right) \right)$$

y la (32) nos daría:

$$\frac{U_0}{L_0 \omega} = c_1 \left| \left(B_{11} - \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \right) - \frac{A_{13} B_{13}/3}{A_{33} - \left(\frac{1}{3} \frac{\omega_0^2}{\omega} \right)^2} \right|$$

$$(33) \quad \frac{U_0}{L_0 \omega} = c_1 \left| q - \frac{\omega_0^2}{\omega^2} - \frac{\frac{pq}{3} \left(\frac{p-q}{p+q} \right)^2}{A_{33} - \left(\frac{1}{3} \frac{\omega_0^2}{\omega} \right)^2} \right|$$

y como con la aproximación dicha

$$\left(\left(\frac{p-q}{p+q} \right)^2 \ll 1 \right) \quad A_{33} = \frac{p+q}{2}$$

$$(33') \quad \frac{U_0}{L_0 \omega} = c_1 \left| q - \frac{\omega_0^2}{\omega^2} - \frac{\frac{pq}{3} \left(\frac{p-q}{p+q} \right)^2}{\frac{p+q}{2} - \left(\frac{1}{3} \frac{\omega_0^2}{\omega} \right)^2} \right|$$

Una manera más gráfica de escribir (33) es

$$(34) \quad c_1 = \frac{\frac{U_0}{L_0 \omega}}{\left| Q_1 \left(c_1, \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \right) - \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \right|}$$

donde

$$(35) \quad Q_1 \left(c_1, \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \right) = q - \left\{ \frac{pq \left(\frac{p-q}{p+q} \right)^2}{3A_{33} - \frac{1}{3} \frac{\omega_0^2}{\omega^2}} \right\}$$

De este modo, comprobada la hipótesis $\left(\frac{c_{2n+1}}{c_1} \right)^2 \ll 1$ obtenemos para una solución del tipo $I = \sum_{\nu} c_{\nu} \omega_{\nu}^{\nu} e^{\nu t}$ siempre que los parámetros sean tales que se satisfagan las dos desigualdades restrictivas (23) y (24). Los coeficientes c_{ν} están dados por (33) para $\nu=1$, (25) para $\nu=3$, (26) para $\nu=2n+1$ ($n \geq 1$) y (15) para $\nu=2n$.

Notemos que si en (35) despreciamos $\frac{pq \left(\frac{p-q}{p+q} \right)^2}{3A_{33} - \frac{1}{3} \frac{\omega_0^2}{\omega^2}}$ frente a q , obtenemos el resultado

$$(36) \quad c_1 = \frac{\frac{U_0}{L_0 \omega}}{\left| q - \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \right|}$$

obtenido en el § anterior para el caso $\delta = 0$ (resultado de Zenneck y Schunck).

Por la desigualdad $\left(\frac{p-q}{p+q}\right)^2 \ll 1$ este desprecio sería lícito, los que nos llevaría a la conclusión que en la zona restringida por (23) y (24) la solución de Zenneck-Schunck representaría bastante acertadamente el valor del coeficiente de la armónica fundamental de la solución total hallada $\gamma = \sum C_\nu \cos \nu \varphi$.

En el caso de la función de Dreifuss, la (35) resulta

$$(35') \quad Q_1\left(r, \frac{\omega_0^2}{\omega^2}\right) = f \cdot \frac{f^2 (1-f)^2}{3A_{33} - \frac{1}{3} \frac{\omega_0^2}{\omega^2}} = f \cdot \frac{f^3 (1-f)^2}{(2-f) \left(3A_{33} - \frac{1}{3} \frac{\omega_0^2}{\omega^2}\right)}$$

el desprecio ahora necesario para llegar al resultado de Zenneck es de $\frac{f^3 (1-f)^2}{(2-f) \left(3A_{33} - \frac{1}{3} \frac{\omega_0^2}{\omega^2}\right)}$ frente a f , o lo que es equivalente

$$\frac{f^2 (1-f)^2}{3A_{33} - \frac{1}{3} \frac{\omega_0^2}{\omega^2}}$$

frente a 1, desprecio siempre lícito

para la zona de influencia de la armónica fundamental (zona definida por (23) solamente), dada la particular forma de f .

En el § 10 veremos porqué es interesante poder prescindir de la restricción $\left(\frac{p-q}{p+q}\right)^2 \ll 1$ en el caso de Dreifuss, para la discusión de las fórmulas obtenidas. Allí lograremos llegar a ellas sin esa suposición, queremos entonces que tanto ellas como todas las conclusiones que se desprenden, valgan para toda la zona de influencia de la armónica fundamental sin restringirnos a puntos cercanos al origen.

El término entre llaves de (35) (aunque pequeño) vendría a resultar como una influencia de la tercera armónica sobre la fundamental^(x). Habría entonces especie de influencias, interacciones entre las varias armónicas de γ . Estas "interacciones" entre las distintas armónicas son sumamente lógicas desde un punto de vista matemático, debido a la no-linealidad de nuestro problema.

Hemos visto que dos fueron las restricciones esenciales que tuvimos que imponer para poder llegar a resultados interpretables. La primera fué la necesidad de limitarnos a zonas de influencia de

(x) Ver § 10.

la armónica fundamental (23). Esta restricción es bastante justificable desde un punto de vista físico, ya que dicha zona vendría a representarnos (por lo menos en el caso de Dreifuss, según veremos en el § 10) la zona de resonancia de la armónica fundamental. Debido a la no linealidad, es admisible que haya zonas de resonancia de otras armónicas y evidente que en ellas no valdrá el estudio de este párrafo; así que ya intuitivamente se podrá predecir que se ha encontrado una restricción que limitara el campo de validez del estudio.

La segunda restricción hecha (24) fué necesaria para poder evaluar los determinantes, y es una restricción bastante más molesta que la anterior desde un punto de vista físico, ya que si el punto B está suficientemente alejado del origen, (24) no admitiría la validez del estudio en él, cosa poco lógica ya que el sentido físico de resonancia, parecería más bien estar ligado a la posición del punto B que a la cercanía del origen.

La falta de sentido físico de la segunda restricción se afirmará al estudiar la resonancia de las armónicas superiores, ya que mientras la primera suposición caracterizada por (23) se mantiene de modo análogo para toda armónica, la segunda se vuelve cada vez más restrictiva, limitando cada vez más el campo de validez del estudio.

Por todo esto, no parecerá demasiado aventurado decir que mientras la primera restricción tendrá "derechos inobjetable", física y matemáticamente, la segunda fué hecha únicamente para poder evaluar los determinantes, pero que (en un cálculo numérico por ejemplo) podríamos por lo menos teóricamente llegar a evaluar el sistema sin necesidad de aquella hipótesis, en cuyo caso se obtendrían los resultados anteriormente hallados.

Esta sugerencia se confirmará de manera sumamente satisfactoria en el estudio que haremos en los §§ 9 y 10 de este trabajo, en los cuales abordando el problema desde un mismo punto de vista físico, pero variando un poquito el matemático, se obtienen resultados que prescinden de dicha restricción.

Quedaría así establecida la equivalencia de las zonas de influencia y las de resonancia.

Cabe decir todavía que si el aparato de medición (amperímetro) mide el valor eficaz de nuestra solución (intensidad de la corriente), tendríamos

$$I_{ef} = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} I^2 dt} = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} (\sum c_n \cos n\psi)^2 dt} = c_1$$

eliminañdose bajo la raíz los cuadrados de las armónicas superiores por la hipótesis (ya comprobada en ciertas zonas) de la pequeñez de aquellas. Valdría decir que la curva experimental $I_{ef} = I_{ef}(U_{ef})$ vendría a equivaler a la curva $c_1 = c_1(U_0)$.

Si consideramos la función de Dreifuss sin despreciar el H , tendremos que en el a_1 solamente los términos diagonales van a quedar modificados y obtendríamos

$$(35'') \quad Q_{12} = \left| f - \frac{\frac{f^2(1-f)^2}{\sqrt{14G^4}}}{3A_{33} - \frac{\omega_0^2}{3\omega^2} + \frac{L_1}{L_0}} + \frac{L_1}{L_0} \right|$$

no obteniendo ninguna modificación importante en la evaluación de los c_{2n+1}/c_1 , quedando p.ej.

$$(23') \quad \frac{c_3}{c_1} = - \frac{B_{13}}{3 \frac{L_1}{L_0} + 3A_{33} - \frac{1}{3} \frac{\omega_0^2}{\omega^2}}$$

quedando en general afectos los $A_{\mu\mu}$ y $B_{\mu\mu}$ por un término aditivo L_1/L_0 .

Veamos que significa en el caso de Dreifuss la restricción $(1-f)^2 \ll 1$: si admitimos $0,1 \ll 1$ (error de un 10%) tendremos que deberá ser $y \leq y^*$ donde $y^* \approx 1,6$. La tabla del § 3 puede darnos una idea de la no linealidad admitida por la anterior desigualdad.

§ 7. Generalización para $\delta \neq 0$

Trataremos ahora de encontrar una solución de (1) sin hacer $\delta = 0$. Si para ello quisiéramos partir de (16) pág. 19, nos hallaríamos en dificultades por figurar expresiones trigonométricas de α , que complican el sistema algebraico.

Para más comodidad introduciremos $\theta = \omega t + \frac{\pi}{2}$ de tal modo que la (1) se convierta en la

$$(11) \quad \psi \frac{dy}{d\theta} + \delta y + \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \int y d\theta = \frac{U_0}{L\omega} \text{sen } \theta$$

Ensayaremos ahora

$$(36) \quad y = y_1 + y_2 = c_1 \cos \theta + s_1 \text{sen } \theta + \sum_{\nu=2}^m (c_\nu \cos \nu \theta + s_\nu \text{sen } \nu \theta)$$

donde $y_1 = c_1 \cos \theta$ e $y_2 = s_1 \text{sen } \theta + \sum_{\nu=2}^m (c_\nu \cos \nu \theta + s_\nu \text{sen } \nu \theta)$ y consideraremos $s_1, s_2, c_2, s_3, c_3, \dots, s_m, c_m$ de cuadrado despreciable frente a c_1 .

El suponer s_1 de cuadrado despreciable es justificable intuitivamente para δ pequeño ya que antes la primera armónica de la intensidad era $y \cos(\omega t + \alpha)$ donde $\cos \alpha = 0(\delta)$, pero ahora tendremos que obtener $y \cos(\omega t + \alpha) = c_1 \cos \theta + s_1 \text{sen } \theta$ \therefore $y \cos \omega t \cos \alpha - y \text{sen } \omega t \text{sen } \alpha = -c_1 \text{sen } \omega t + s_1 \cos \omega t$ $s_1 = y \cos \alpha = 0(\delta)$. Este razonamiento debe lógicamente ser comprobado a posteriori, pero para ello hemos introducido $\theta = \omega t + \pi/2$ en vez de $\zeta = \omega t$ ya que en caso contrario tendríamos que haber supuesto c_1 de cuadrado despreciable frente a s_1 para obtener un resultado que afirme las hipótesis hechas, cosa lógicamente análoga, pero hemos querido mantener una conformidad en el método y nomenclaturas.

Con procedimientos exactamente análogos a los del § anterior se llega a la ecuación equivalente de la (11):

$$\begin{aligned} & -c_1 \sum_{\mu=0}^{\infty} B_{\nu\mu} \text{sen } \mu \theta + \sum_{\nu=2}^N \sum_{\mu=0}^{\infty} (-\mu c_\nu A_{\nu\mu} \text{sen } \mu \theta) + \\ & + \sum_{\nu=1}^N \sum_{\mu=0}^{\infty} (\mu s_\nu B_{\nu\mu} \cos \mu \theta) + \delta \sum_{\nu=1}^N (c_\nu \cos \nu \theta + s_\nu \text{sen } \nu \theta) + \\ & + \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \sum_{\nu=1}^N \left(\frac{c_\nu}{\nu} \text{sen } \nu \theta - \frac{s_\nu}{\nu} \cos \nu \theta \right) = \frac{U_0}{L\omega} \text{sen } \theta \end{aligned}$$

Igualando a 0 los coeficientes de $\cos \mu \theta$ y $\sin \mu \theta$ y haciendo las mismas consideraciones del § anterior respecto a las ecuaciones que provienen de $\cos i\theta$ y $\sin i\theta$ para $i > N$ obtenemos el sistema:

$$\begin{aligned}
 \sin \theta &\Rightarrow -c_1 B_{11} - \sum_{v=2}^N c_v A_{v1} + \delta S_1 + \frac{\omega_0^2}{\omega^2} c_1 = \frac{U_0}{L_0 \omega} \\
 \cos \theta &\Rightarrow \sum_{v=1}^N s_v B_{v1} + \delta c_1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2} s_1 = 0 \\
 \sin 2\theta &\Rightarrow -c_1 B_{12} - 2 \sum_{v=2}^N c_v A_{v2} + \delta S_2 + \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \frac{c_2}{2} = 0 \\
 \cos 2\theta &\Rightarrow 2 \sum_{v=1}^N s_v B_{v2} + \delta c_2 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \frac{s_2}{2} = 0 \\
 &\vdots \\
 \sin m\theta &\Rightarrow -c_1 B_{1m} - m \sum_{v=2}^N c_v A_{vm} + \delta S_m + \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \frac{c_m}{m} = 0 \\
 \cos m\theta &\Rightarrow m \sum_{v=1}^N s_v B_{vm} + \delta c_m - \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \frac{s_m}{m} = 0
 \end{aligned}$$

de $2N$ ecuaciones con $2N$ incógnitas.

Considerando como antes las igualdades

$$(14) \quad A_{2i, 2j+1} = B_{i, 2j+1} = 0$$

las ecuaciones provenientes de senos y cosenos pares nos vuelven a dar un sistema cuadrado y homogéneo en las c_{2i} y s_{2i} , luego obtenemos nuevamente la (15), o sea

$$(15) \quad c_2 = c_4 = \dots = c_{2i} = \dots = s_2 = s_4 = \dots = s_{2i} = 0$$

para $i \leq N$.

Considerando (15) el sistema (38) se reduce al

$$\begin{aligned}
 \sin \theta &\Rightarrow c_1 \left(B_{11} - \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \right) - \delta S_1 + c_3 A_{13} + \dots = \frac{U_0}{L_0 \omega} \\
 \cos \theta &\Rightarrow c_1 \delta + s_1 \left(B_{11} - \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \right) + s_3 B_{13} + \dots = 0 \\
 \sin 3\theta &\Rightarrow c_1 B_{13} + c_3 \left(3A_{33} - \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \right) - \delta S_3 + \dots = 0 \\
 \cos 3\theta &\Rightarrow 3s_1 B_{13} + \delta c_3 + s_3 \left(3B_{33} - \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \right) + \dots = 0 \\
 &\vdots \\
 \sin 2i+1\theta &\Rightarrow c_1 B_{1, 2i+1} + (2i+1) A_{3, 2i+1} + c_{2i+1} \left((2i+1) A_{2i+1, 2i+1} - \frac{\omega_0^2}{(2i+1)\omega^2} \right) - \delta S_{2i+1} \\
 \cos 2i+1\theta &\Rightarrow (2i+1) s_1 B_{1, 2i+1} + (2i+1) s_3 B_{3, 2i+1} + s_{2i+1} \left((2i+1) B_{2i+1, 2i+1} - \frac{\omega_0^2}{(2i+1)\omega^2} \right) + \delta c_{2i+1} = 0
 \end{aligned}$$

donde $i = 1, 2, \dots, m$ y donde m está dado por $N/2$ si N es par y $N-1/2$ si N es impar; (39) es así un sistema de m ecuaciones con m incógnitas.

el determinante de los coeficientes será:

$\sin \theta$	$B_{11} - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}$	S_1 $-\delta$	C_3 A_{13}	S_3 0	C_{2i+1} $A_{1,2i+1}$	S_{2i+1} $0 \dots$
$\cos \theta$	δ	$B_{11} - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}$	0	B_{13}	0	$B_{1,2i+1} \dots$
$\sin 3\theta$	$\frac{B_{13}}{3}$	0	$A_{33} - \left(\frac{1}{3}\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2$	$-\delta/3$	$A_{3,2i+1}$	0
$\cos 3\theta$	0	B_{13}	$\delta/3$	$B_{33} - \left(\frac{1}{3}\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2$	0	$B_{3,2i+1} \dots$
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
$\sin(2i+1)\theta$	$\frac{B_{1,2i+1}}{2i+1}$	0	$A_{3,2i+1}$	0	$A_{2i+1,2i+1} - \left(\frac{\omega_0}{(2i+1)\omega}\right)^2$	$-\frac{\delta}{2i+1}$
$\cos(2i+1)\theta$	0	$B_{1,2i+1}$	0	$B_{3,2i+1}$	$\frac{\delta}{2i+1}$	$B_{2i+1,2i+1} - \left(\frac{\omega_0}{(2i+1)\omega}\right)^2$
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots

$i \leq m$

Salta a la vista la disimetría de este determinante, donde la primera columna desentona con el resto de la estructura: por figurar las B, en vez de las A, cosa que pasa en todas las demás columnas impares, y por figurar sus términos divididos por el número de orden de las respectivas filas. Esta diferencia de configuración puede ser intuitivamente justificada recordando la "preferencia" esencial que se ha dado a c_1 frente a los restantes coeficientes de Fourier de la intensidad J . Nuevamente podemos evaluar los determinantes sin mayores dificultades, siempre que los valores de los parámetros sean tales que se cumplan

$$(23) \quad iA_{ii} - \frac{\omega_0^2}{\omega^2} > L, \text{ para todo } i \neq 1 \text{ y}$$

$$(24) \quad \left(\frac{p-q}{p+q}\right)^2 \ll 1$$

Con estas condiciones se obtiene

$$\Delta = \left(\prod_{i=2}^m \left[A_{2i+1,2i+1} - \left(\frac{\omega_0}{(2i+1)\omega}\right)^2 \right] \left[B_{2i+1,2i+1} - \left(\frac{\omega_0}{(2i+1)\omega}\right)^2 \right] \right)$$

$$(41) \quad \left\{ (B_{11} - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}) (A_{33} - (\frac{\omega_0}{3\omega})^2) (B_{33} - (\frac{\omega_0}{3\omega})^2) + (A_{33} - (\frac{\omega_0}{3\omega})^2) (B_{33} - (\frac{\omega_0}{3\omega})^2) \delta^2 - (B_{33} - (\frac{\omega_0}{3\omega})^2) (B_{11} - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}) \frac{A_{13} B_{13}}{3} - (B_{11} - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}) (A_{33} - (\frac{\omega_0}{3\omega})^2) B_{13}^2 \right\}$$

Para hallar (41) hemos además supuesto δ^2 despreciable frente a $m^2 (A_{nn} - (\frac{1}{\pi} \frac{\omega_0^2}{\omega^2})^2) (B_{nn} - (\frac{1}{\pi} \frac{\omega_0^2}{\omega^2})^2)$.

Si Δ_1 es el menor complementario del término que figura en la primera fila y primera columna de (40) tendremos

$$(42) \Delta_1 = \prod_{i=2}^m \left[A_{2i+1, 2i+1} - \left(\frac{\omega_0}{(2i+1)\omega} \right)^2 \right] \left[B_{2i+1, 2i+1} - \left(\frac{\omega_0}{(2i+1)\omega} \right)^2 \right] \left\{ A_{33} - \frac{1}{9} \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \right\} \left\{ B_{33} - \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \right\} - B_{13}^2$$

y si Δ_2 es el menor complementario que corresponde al término de la primera fila y segunda columna tendremos

$$(43) \Delta_2 = \prod_{i=1}^m \left(A_{2i+1, 2i+1} - \left(\frac{\omega_0}{(2i+1)\omega} \right)^2 \right) \left(B_{2i+1, 2i+1} - \left(\frac{\omega_0}{(2i+1)\omega} \right)^2 \right) \delta$$

por otro lado de (39) se ve que

$$(44) \quad c_1 = \frac{U_0}{L_0 \omega} \frac{\Delta_1}{\Delta}$$

$$(45) \quad s_1 = -\frac{U_0}{L_0 \omega} \frac{\Delta_2}{\Delta}$$

Se vuelve a ver aquí que en primera aproximación obtenemos nuevamente las fórmulas de Zenneck para la primera armónica de J , ya que si despreciamos los dos últimos términos de la llave de (41)^(x) frente a los dos primeros y el segundo de la llave de (42)^(x) frente al primero, obtenemos

$$c_1 = \frac{U_0}{L_0 \omega} \frac{B_{11} - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}}{(B_{11} - \frac{\omega_0^2}{\omega^2})^2 + \delta^2}$$

$$y \quad s_1 = \frac{U_0}{L_0 \omega} \frac{\delta}{(B_{11} - \frac{\omega_0^2}{\omega^2})^2 + \delta^2}$$

si componemos, o sea hacemos

$$s_1 \sin \theta + c_1 \cos \theta = y \sin (\omega t + \alpha) = y \sin (\theta + \alpha - \pi/2) = -y \cos (\theta + \alpha)$$

donde
$$\gamma = \sqrt{c_1^2 + s_1^2} ; \quad \operatorname{tg} \alpha = -\frac{s_1}{c_1}$$

obtenemos
$$\gamma = \frac{U_0}{L_0 \omega} \frac{1}{\sqrt{(B_{11} - \frac{\omega_0^2}{\omega^2})^2 + \delta^2}} ; \quad \operatorname{tg} \alpha = -\frac{\delta}{B_{11} - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}}$$

Lógicamente el error introducido al no considerar los términos para obtener estas ecuaciones dependerá de la función ψ y estará sujeto aproximadamente a las mismas discusiones hechas en el párrafo anterior.

(x) Ambos términos despreciados contienen factores del orden de $\left(\frac{L_0}{R_0} \right)^2$

§ 8 Resonancia de las armónicas superiores

Este párrafo forma un cuerpo relativamente separado del resto del trabajo, y es más bien un esbozo del estudio de la resonancia de las armónicas superiores. El cálculo aquí utilizado y los resultados obtenidos son poco rigurosos, no habiendo sido mayormente profundizados.

Hemos visto en los párrafos anteriores que cuando intentábamos extender los resultados fuera de la zona restringida por (23), (24) del § 6, tropezábamos con la dificultad esencial de que nuestra hipótesis $s_\nu, c_\nu \ll c_1$ ($\nu > 1$) no se cumplía. Parece pues natural, si queremos estudiar la solución de nuestra ecuación fuera de la zona de influencia de la primera armónica (por ejemplo en la de la armónica n) cambiar el ensayo y poner para seguir un camino estrictamente análogo al último método seguido en el párrafo anterior,

$$(1) \quad \psi \dot{y} + \delta y + \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \int y d\theta = \frac{U_0}{L_0 \omega} \sin \theta$$

con el ensayo
$$y = \sum_1^N c_\nu \cos \nu \theta + s_\nu \sin \nu \theta$$

donde esta vez haremos $y_1 = c_n \cos n\theta$, o sea que supondremos los c_ν y s_ν de cuadrado despreciable frente a c_n .

En modo idéntico al desarrollado en el párrafo anterior

$$(3) \quad \psi(y) = \psi(y_1) + y_2 \left(\frac{\partial \psi(y_1)}{\partial y_1} \right)$$

por la susodicha hipótesis, luego la (1) se convierte en

$$\left(\psi(y_1) + y_2 \frac{\partial \psi(y_1)}{\partial y_1} \right) (\dot{y}_1 + \dot{y}_2) + \delta (y_1 + y_2) + \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \int (y_1 + y_2) d\theta = \frac{U_0}{L_0 \omega} \sin \theta$$

tendremos la

$$(4) \quad \psi(y_1) \dot{y}_1 + \frac{d}{d\theta} (\psi(y_1) y_2) + \delta (y_1 + y_2) + \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \int (y_1 + y_2) d\theta = \frac{U_0}{L_0 \omega} \sin \theta$$

pero considerando que según nuestro ensayo

$$\dot{y}_1 = -n c_n \sin n\theta, \quad \int y_1 d\theta = \frac{c_1}{n} \sin n\theta$$

$$(5) \quad \dot{y}_2 = \sum_{\nu=1}^{n-1, n+1} (-\nu c_\nu \sin \nu \theta) + \sum_1^N (\nu s_\nu \cos \nu \theta);$$

$$\int y_2 d\theta = \sum_{\nu=1}^{n-1, n+1} \left(\frac{c_\nu}{\nu} \sin \nu \theta \right) + \sum_1^N \left(\frac{s_\nu}{\nu} \cos \nu \theta \right)$$

reemplazando en (4) tendremos

$$\begin{aligned}
 & -m c_n \psi \sin n \theta + \frac{d}{d\theta} \left(\psi \sum_{1, n+1}^{m-1, N} c_v \cos v \theta + \sum_1^N s_v \sin v \theta \right) + \\
 b) & + \delta \sum_1^N (c_v \cos v \theta + s_v \sin v \theta) + \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \sum_1^N \left(\frac{c_v}{v} \sin v \theta - \frac{s_v}{v} \cos v \theta \right) = \\
 & = \frac{U_0}{L_0 \omega} \sin \theta
 \end{aligned}$$

Poniendo como antes

$$(7) \quad \psi \sin v \theta = \sum_1^{\infty} Q_{\nu \mu} \sin \mu \theta, \quad \psi \cos v \theta = \sum_0^{\infty} P_{\nu \mu} \cos \mu \theta$$

donde

$$(8) \quad \begin{cases} Q_{m n}(c_n) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \psi(\theta) \sin m \theta \sin n \theta d\theta \\ P_{m n}(c_n) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \psi(\theta) \cos m \theta \sin n \theta d\theta \end{cases}$$

tendremos

$$\begin{aligned}
 & -m c_n \sum_1^{\infty} Q_{\nu \mu} \sin \mu \theta + \frac{d}{d\theta} \sum_{\mu=0}^{\infty} \left(\sum_{1, \mu+1}^{m-1, N} c_v \cos v \theta + \sum_1^N s_v \cos v \theta \right) + \\
 & + \delta \sum_1^N (c_v \cos v \theta + s_v \sin v \theta) + \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \sum_1^N \left(\frac{c_v}{v} \sin v \theta - \frac{s_v}{v} \cos v \theta \right) = \\
 i) & = -m c_n \sum_1^{\infty} Q_{\nu \mu} \sin \mu \theta + \sum_{\mu=0}^{\infty} \left(\sum_{1, \mu+1}^{m-1, N} -c_v P_{\nu \mu} \mu \sin \mu \theta + \sum_1^N s_v Q_{\nu \mu} \right. \\
 & \left. \cos \mu \theta \right) + \delta \sum_1^N (c_v \cos v \theta + s_v \sin v \theta) + \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \sum_1^N \left(\frac{c_v}{v} \sin v \theta + \frac{s_v}{v} \cos v \theta \right) \\
 & = \frac{U_0}{L_0 \omega} \sin \theta
 \end{aligned}$$

Separando los coeficientes de $\cos i\theta$ y $\sin i\theta$ y considerando como antes el sistema proveniente de hacer $1 \leq i \leq N$ con los mismos comentarios del párrafo anterior respecto a las ecuaciones no consideradas, obtendremos el siguiente sistema:

$$\begin{aligned}
 \sin \theta & \Rightarrow -m c_n Q_{1 n} - \sum_{1, n+1}^{m-1, N} c_v P_{v 1} + \delta s_1 + \frac{\omega_0^2}{\omega^2} c_1 = \frac{U_0}{L_0 \omega} \\
 \cos \theta & \Rightarrow \sum_1^N s_v Q_{v 1} + \delta c_1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2} s_1 = 0 \\
 \sin 2\theta & \Rightarrow -m c_n Q_{2 m} - 2 \sum_{1, m+1}^{m-1, N} c_v P_{v 2} + \delta s_2 + \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \frac{c_2}{2} = 0 \\
 (10) \quad \cos 2\theta & \Rightarrow 2 \sum_1^N s_v Q_{v 2} + \delta c_2 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \frac{s_2}{2} = 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sin i\theta &\Rightarrow -m c_n Q_{n-1} \sum_{1, m+1}^{n-1, N} c_{\nu} P_{\nu i} + \delta c_i + \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \frac{c_i}{i} = 0 \\ \cos i\theta &\Rightarrow i \sum_1^N s_{\nu} Q_{\nu i} + \delta c_i - \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \frac{s_i}{i} = 0 \end{aligned}$$

donde $2 \leq i \leq N$

Ahora debido a que $\cos \nu \theta$ es una función par o impar de $\cos \theta$ según que ν sea par o impar, $\psi(\cos n\theta)$ por ser por hipótesis par en $\cos n\theta$ resultará por ende par en $\cos \theta$ para cualquier n . Luego podremos decir:

$$Q_{2i, 2j+1} = P_{2i, 2j+1} = 0$$

Las ecuaciones de (10) provenientes de senos y cosenos pares me dan

$$(11) \quad \boxed{c_{2i} = s_{2i} = 0}$$

por ser un sistema homogéneo de N ecuaciones con N incógnitas.

Si n fuera par obtendríamos $c_n=0$ y como se ve rápidamente de (10) tendríamos todos los coeficientes de Fourier nulos menos los de la primera armónica. Esto lógicamente contradiría la hipótesis hecha sobre la preponderancia de c_n frente a los otros coeficientes, luego sabríamos que el ensayo hecho con n par no nos daría resultado alguno que no tuviera contradicciones con el método usado para hallarlo, o sea, no hay resonancia de armónicas pares.

En el caso de n impar, obtendríamos el sistema:

$$\begin{aligned} \sin \theta &\Rightarrow c_1 \left(P_{11} - \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \right) - \delta s_1 + c_3 P_{13} + \dots + m c_n Q_{1n} = \frac{U_0}{L_0 \omega} \\ \cos \theta &\Rightarrow \delta c_1 + s_1 \left(Q_{11} - \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \right) + s_3 Q_{13} + \dots + s_n Q_{1n} = 0 \\ \sin 3\theta &\Rightarrow c_1 P_{31} + c_3 \left(P_{33} - \frac{\omega_0^2}{3\omega^2} \right) - \frac{\delta}{3} s_3 + c_5 P_{35} + \dots + \frac{m}{3} c_n Q_{3n} = 0 \\ \cos 3\theta &\Rightarrow s_1 Q_{13} + \frac{\delta}{3} c_3 + s_3 \left(Q_{33} - \left(\frac{1}{3} \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \right) \right) + s_5 Q_{35} + \dots + s_n Q_{3n} = 0 \\ \sin m\theta &\Rightarrow c_1 P_{m1} + c_3 P_{m3} + \dots + c_n \left(P_{mn} - \frac{\omega_0^2}{m\omega^2} \right) - \frac{\delta}{m} s_n = 0 \\ \cos m\theta &\Rightarrow s_1 Q_{m1} + s_3 Q_{m3} + \dots + c_n \frac{\delta}{m} + s_n \left(Q_{mn} - \frac{\omega_0^2}{m\omega^2} \right) = 0 \\ \sin i\theta &\Rightarrow c_1 P_{i1} + c_3 P_{i3} + \dots + c_n \frac{m}{i} Q_{in} + c_i \left(P_{ii} - \frac{\omega_0^2}{i\omega^2} \right) - \frac{\delta}{i} s_i = 0 \\ \cos i\theta &\Rightarrow s_1 Q_{i1} + s_3 Q_{i3} + \dots + s_n Q_{in} + s_i \left(Q_{ii} - \frac{\omega_0^2}{i\omega^2} \right) + \frac{\delta}{i} c_i = 0 \end{aligned}$$

$i = 3, 5 \quad m = 2, m+2 \quad N$

sistema inhomogéneo de N ecuaciones con N incógnitas.

La matriz de los coeficientes del sistema (12) considerando las c y s como incógnitas y las P y Q como coeficientes, aunque estos últimos sean funciones de c_n , o sea de una incógnita, será:

	C_1	S_1	C_3	S_3	C_{n-2}	S_{n-2}	C_n	S_n	C_{n+2}	S_{n+2}	
1) 0	$P_{11} - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}$	$-\delta$	P_{13}	0	\dots	$P_{1, n-2}$	0	$m Q_{1n}$	0	$P_{1, n+2}$	0
1) 0	δ	$Q_{11} - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}$	0	Q_{13}	\dots	0	$Q_{1, n-2}$	0	Q_{1n}	0	$Q_{1, n+2}$
3) 0	P_{31}	0	$P_{33} \left(\frac{\omega_0}{3\omega}\right)^2$	$-\frac{\delta}{3}$	\dots	$P_{3, n-2}$	0	$\frac{n}{3} Q_{3n}$	0	$P_{3, n+2}$	0
3) 0	0	Q_{13}	$\frac{\delta}{3}$	$Q_{33} \left(\frac{1}{3} \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2$	\dots	0	$Q_{3, n-2}$	0	Q_{3n}	0	$Q_{3, n+2}$
	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
1-2) 0	$P_{n-2,1}$	0	$P_{n-2,3}$	0	$P_{n-2, n-2} \left(\frac{\omega_0}{(n-2)\omega}\right)^2$	$-\frac{\delta}{n-2}$	$\frac{n-2}{n} P_{n-2, n}$	0	$P_{n-2, n+2}$	0	0
1-2) 0	0	$Q_{n-2,1}$	0	$Q_{n-2,3}$	\dots	$\frac{\delta}{n-2}$	$Q_{n-2, n-2} \left(\frac{\omega_0}{(n-2)\omega}\right)^2$	0	$Q_{n-2, n}$	0	$Q_{n-2, n+2}$
n) 0	$P_{n,1}$	0	$P_{n,3}$	0	$P_{n-2, n}$	0	$Q_{nn} - \left(\frac{\omega_0}{n\omega}\right)^2$	$-\frac{\delta}{n}$	$P_{n, n+2}$	0	0
1) 0	0	$Q_{n,1}$	0	Q_{n-3}	\dots	0	$Q_{n, n-2}$	$\frac{\delta}{n}$	$Q_{nn} \left(\frac{\omega_0}{n\omega}\right)^2$	0	$Q_{n, n+2}$
1-2) 0	$P_{n+2,1}$	0	$P_{n+2,3}$	0	$P_{n+2, n-2}$	0	$\frac{n+2}{2} Q_{n+2, n}$	0	$P_{n+2, n+2} \left(\frac{\omega_0}{(n+2)\omega}\right)^2$	$-\frac{\delta}{n+2}$	0
2) 0	0	$Q_{n+2,1}$	0	$Q_{n+2,3}$	\dots	0	$Q_{n+2, n-2}$	0	$Q_{n+2, n}$	$\frac{\delta}{n+2}$	$Q_{n+2, n+2} \left(\frac{\omega_0}{(n+2)\omega}\right)^2$
	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots

El determinante Δ de esta matriz se reduce al (40) del párrafo anterior, si hacemos $n=1$.

Si llamamos Δ^C al menor complementario en la matriz (13) del elemento de la primera fila y de la $2i-1$ ésima columna, y Δ^S al del elemento de la primera fila y de la $2i$ ésima columna, tendríamos

$$(14) \quad c_i = \frac{U_0}{L_0 \omega} \frac{\Delta^C}{\Delta} \quad s_i = \frac{-U_0}{L_0 \omega} \frac{\Delta^S}{\Delta}$$

En (13) se ve que para el ámbito de valores de los parámetros para los cuales se verifiquen las restricciones:

$$(15) \quad \mu P_{\mu\mu} - \frac{\omega_0^2}{\mu\omega^2} > 1 ; \quad \mu Q_{\mu\mu} - \frac{\omega_0^2}{\mu\omega^2} > 1 \quad \text{para } \mu \neq n$$

(relaciones que nos definen lo que llamamos en el § 6 zona de influencia de la armónica n), y

(16) $P_{\mu\nu}$ y $Q_{\mu\nu}$ de cuadrados y productos despreciables frente a 1 para $\mu \neq \nu$, y si además suponemos δ tan pequeño de modo que se pueda considerar (17) δ^2 despreciable frente a la unidad, tendremos

$$(18) \quad \Delta = \prod_{i=1}^{m-4} \prod_{m+i}^N (P_{ii} - \frac{\omega_0^2}{i\omega^2})(Q_{ii} - \frac{\omega_0^2}{i\omega^2}) \left\{ \prod_{m-2}^{n+2} (P_{jj} - \frac{\omega_0^2}{j\omega^2})(Q_{jj} - \frac{\omega_0^2}{j\omega^2}) \right. \\ \left. [(Q_{mm} - \frac{\omega_0^2}{m\omega^2})^2 + \frac{\delta^2}{m^2}] - (P_{n-2, n-2} - \frac{\omega_0^2}{(n-2)\omega^2})(Q_{n-2, n-2} - \frac{\omega_0^2}{(n-2)\omega^2}) \right. \\ \left. (Q_{mm} - \frac{\omega_0^2}{m\omega^2})^2 [Q_{m, m+2} (P_{m+2, m+2} - \frac{\omega_0^2}{(m+2)\omega^2}) + Q_{m, m+2} P_{m, m+2} \frac{(m+2)}{m}] \right. \\ \left. (Q_{m+2, m+2} - \frac{\omega_0^2}{(m+2)\omega^2})^2 - (P_{m+2, m+2} - \frac{\omega_0^2}{(m+2)\omega^2})(Q_{m+2, m+2} - \frac{\omega_0^2}{(m+2)\omega^2}) \right. \\ \left. (Q_{mm} - \frac{\omega_0^2}{m\omega^2})^2 [Q_{m, m-2} (P_{m-2, m-2} - \frac{\omega_0^2}{(m-2)\omega^2}) + Q_{m, m-2} P_{m, m-2} \frac{(m-2)}{m}] \right. \\ \left. - \frac{\omega_0^2}{(m-2)\omega^2} \right\}$$

Estudiaremos el Δ_m^c :

$$(19) \quad \Delta_m^c = \begin{vmatrix} \delta & Q_{11} - \frac{\omega_0^2}{\omega^2} & 0 & & Q_{13} & & 0 & Q_{1, m-2} & Q_{1, m} & 0 \dots \\ P_{31} & 0 & P_{33} - \frac{\omega_0^2}{3\omega^2} & & -\delta/3 & & P_{3, m-2} & 0 & 0 & P_{3, m+2} \\ 0 & Q_{13} & \delta/3 & & Q_{33} - \frac{\omega_0^2}{3\omega^2} & & 0 & Q_{3, m-2} & Q_{3, m} & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ P_{m-2, 1} & 0 & P_{m-2, 3} & & -P_{m-2, m-2} - \frac{\omega_0^2}{(m-2)\omega^2} & & -\frac{\delta}{m-2} & 0 & P_{m-2, m} \\ 0 & Q_{m-2, 1} & 0 & & \frac{\delta}{m-2} & & Q_{m-2, m-2} - \frac{\omega_0^2}{(m-2)\omega^2} & Q_{m-2, m} & 0 \\ P_{m, 1} & 0 & P_{m, 3} & & P_{m-2, m} & 0 & -\frac{\delta}{m} & P_{m, m+2} \\ 0 & Q_{m, 1} & 0 & & 0 & & Q_{m-2, m} & Q_{m, m} - \frac{\omega_0^2}{\omega^2} & 0 \\ P_{m+2, 1} & 0 & P_{m+2, 3} & & -P_{m-2, m+2} & 0 & 0 & P_{m+2, m+2} - \frac{\omega_0^2}{(m+2)\omega^2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{vmatrix}$$

Este determinante es más complicado que los anteriores y para evaluarlo tendremos que proceder en manera más burda de como se ha hecho en párrafos precedentes.

En el desarrollo de Δ_n^c hay dos términos que saltan a la vista como mayores y que vienen a equivaler para $n = 1$ a los que se han utilizado para hallar las fórmulas de Zenneck. Pondremos entonces

$$(20) \Delta_m^c \approx \prod_1^N (Q_{11} - \frac{\omega_0}{\omega})^2 \prod_{m+2}^N (P_{11} - \frac{\omega_0}{\omega})^2 \prod_3^{m-2} P_{1,2} + P_{1,m} \prod_1^N (Q_{11} - \frac{\omega_0}{\omega})^2$$

Utilizando solamente el primer término de Δ (cosa también hecha para $n = 1$ para hallar las fórmulas de Zenneck) obtenemos

$$(21) C_m = \frac{U_0 Q_{mm} - (\frac{\omega_0}{n\omega})^2}{L_0 \omega \left[Q_{mm} - (\frac{\omega_0}{n\omega})^2 + \frac{\delta^2}{n^2} \right]} \left\{ \prod_1^{m-2} \frac{P_{1,i+2}}{(P_{11} - \frac{\omega_0}{\omega})^2 + (\frac{P_{1,m}}{P_{11} - \frac{\omega_0}{\omega^2}})} \right\}$$

Si consideramos que para $n = 1$, los dos términos de Δ_n^c se confunden ya que representan el mismo desarrollo y que $P_{1,n}$ habría que considerarlo como $P_{11} - \frac{\omega_0}{\omega^2}$ y no como P_{11} (cosa que se visualiza fácilmente en el determinante) obtendríamos las fórmulas de Zenneck para c_1 a las que llegamos en el párrafo anterior.

Para $\delta = 0$

$$(22) C_m = \frac{U_0}{L_0 \omega} \frac{\left\{ \prod_1^{m-2} \frac{P_{1,i+2}}{P_{11} - (\frac{\omega_0}{\omega})^2} + \frac{P_{1,m}}{(P_{11} - \omega_0^2/\omega^2)} \right\}}{Q_{mm} - (\frac{\omega_0}{n\omega})^2}$$

En (19) se ve que por las restricciones hechas, el numerador es sumamente pequeño, luego en puntos no próximos a $Q_{nn} = (\frac{\omega_0}{n\omega})^2$ tendremos que c_n es muy pequeño.

Lógicamente para que este resultado tenga sentido, $\frac{\omega_0}{\omega}$ debe ser tal que el punto $Q_{nn} = (\frac{\omega_0}{n\omega})^2$ se halle comprendido en la zona en la cual se cumplen las restricciones impuestas.

Conviene hacer notar sin embargo, que para las funciones Ψ para las cuales habíamos obtenido las (22) en el § 6, obtendríamos con este ensayo (ver ap. 6 :) si ^(*)

$$(23) \left\{ \begin{aligned} P_{\mu\nu} &= \frac{p+q}{2} \left[\left(\frac{p-q}{p+q} \right)^{\frac{\mu+\nu}{2m}} + \left(\frac{p-q}{p+q} \right)^{\frac{\mu-\nu}{2m}} \right] \cdot P_{\mu\mu} = \frac{p+q}{2} \left[1 + \left(\frac{p-q}{p+q} \right)^{\frac{\mu}{m}} \right] \\ Q_{\mu\nu} &= \frac{p+q}{2} \left[\left(\frac{p-q}{p+q} \right)^{\frac{\mu-\nu}{2m}} - \left(\frac{p-q}{p+q} \right)^{\frac{\mu+\nu}{2m}} \right] \cdot Q_{\mu\mu} = \frac{p+q}{2} \left[1 - \left(\frac{p-q}{p+q} \right)^{\frac{\mu}{m}} \right] \end{aligned} \right.$$

$$(*) p = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Psi(c_m \cos \theta) \cos^2 \theta d\theta; \quad q = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Psi(c_m \cos \theta) \sin^2 \theta d\theta$$

y el decir $P_{\mu\nu}$ y $Q_{\mu\nu}$ de cuadrados y productos despreciables frente a 1 equivale a groso modo a decir $\left(\frac{k-g}{p+q}\right)^{|k-y|}$ despreciable frente a 1, cosa que lógicamente se cumple para un intervalo tanto más restringido alrededor del origen cuanto más grande sea n . Eso quita casi totalmente el sentido práctico a la zona resultante, pero cabe el caso que para otras funciones ψ que no cumplan las (23) se obtengan las $P_{\mu\nu}$ y $Q_{\mu\nu}$ con las condiciones susodichas.

Se ha tratado para la función de Dreifuss que cumple las (23) hacer estudios para valores grandes de la intensidad, pero se llegaron a hacer solamente ciertas consideraciones con muy poco rigor teórico que mostraban una resonancia, pero eso era solamente factible para valores de $\frac{m}{N}$ no muy pequeños frente a 1, cosa sumamente molesta y de poca trascendencia ya que para que estos estudios tengan sentido, es menester poder suponer el N tan grande como se quiera, para ello es conveniente o mejor dicho necesario que en los resultados y consideraciones finales no figura en absoluto el N o que figure en forma tal que para un N suficientemente grande el término en el cual figure deje de interesar; de modo que a menos de los problemas de convergencia que quedarán pendientes, se podría considerar $N \rightarrow \infty$

Nos falta verificar una hipótesis importante, y es que c_i/c_n y s_i/s_n son de cuadrado despreciable frente a 1.

Los s_n son $O(\frac{1}{n})$, luego no nos preocuparemos de ellos. Tendremos con el desarrollo análogo al hecho para Δ_m^C

$$(24) \Delta_m^C = \frac{N}{1} (Q_{j_1} - (\frac{\omega_0}{j\omega})^2) (Q_{m-m} - (\frac{\omega_0}{m\omega})^2) \prod_{j=2, n+2}^{m-2} (1 - (\frac{\omega_0}{j\omega})^2) \prod_{j=1}^{j-2} P_{j, j+2}$$

$$+ P_{1,1} \prod_{j=1}^N (Q_{j, j} - (\frac{\omega_0}{j\omega})^2) (Q_{n-m} - (\frac{\omega_0}{n\omega})^2) \prod_{j=3, 1+2, n+2}^{j-2, n-2, N} (P_{j, j} - (\frac{\omega_0}{j\omega})^2) \quad i < m$$

$$(25) \frac{c_i}{c_m} = \frac{\Delta_m^C}{\Delta_n^C} = (Q_{m-m} - (\frac{\omega_0}{m\omega})^2) \frac{\prod_{j=2}^{m-2} (P_{j, j} - (\frac{\omega_0}{j\omega})^2) \left[P_{1,1} \prod_{j=2}^{j-2} (P_{j, j} - (\frac{\omega_0}{j\omega})^2) + \prod_{j=1}^{j-2} P_{j, j+2} \right]}{\left[P_{1,1} \prod_{j=2}^{j-2} (P_{j, j} - (\frac{\omega_0}{j\omega})^2) + \prod_{j=1}^{j-2} P_{j, j+2} \right]}$$

Si ψ fuera tal que estaría acertado el considerar sólo los primeros términos en (17) y (20), obtendríamos

$$(25') \quad \frac{c_i}{c_m} = \frac{\Delta_m^C}{\Delta_n^C} = (Q_{m-m} - (\frac{\omega_0}{m\omega})^2) \prod_{j=2}^{m-2} (P_{j, j} - (\frac{\omega_0}{j\omega})^2) / \prod_{j=2}^{m-2} P_{j, j+2}$$

y si consideráramos solamente los segundos

$$(25'') \cdot \frac{c_i}{c_n} = \left(Q_{nn} - \left(\frac{\omega_0}{\omega} \right)^2 \right) \frac{P_{i1}}{P_{im}} \frac{1}{\left(P_{ii} - \left(\frac{\omega_0}{\omega} \right)^2 \right)}$$

(24), (25), (25') y (25'') son para valores de i tal que $i < n$; para $i > n$ se obtendrían otras fórmulas. En vez de la (25') tendríamos la

$$(26) \quad \frac{c_i}{c_n} = \frac{\frac{i-2}{m+2} P_{j,i+2} \frac{m+2}{n} Q_{m+2,m}}{\frac{i+2}{m+2} \left(P_{jj} - \left(\frac{\omega_0}{\omega} \right)^2 \right)}$$

y la (25'') no cambiaría.

La (25) nos muestra que $c_i/c_n = 0$ para $i < n$ y para $Q_{nn} = \left(\frac{\omega_0}{\omega} \right)^2$ o sea para el punto de resonancia. Pero la (25') y la (25'') muestran con más evidencia que para puntos no sumamente cercanos al punto de resonancia (para $i < n$) c_i/c_n crece muy rápidamente. Para $i > n$, $c_i/c_n \neq 0$ para $Q_{nn} = \left(\frac{\omega_0}{\omega} \right)^2$, y está dado en ese punto por la (22') que muestra que por las suposiciones hechas, c_i/c_n es efectivamente de cuadrado despreciable (esta vez aún para puntos no tan cercanos al punto de resonancia, pero siempre dentro de la zona de validez de nuestras hipótesis).

En resumen hemos demostrado: Para el ámbito de valores de los parámetros para los cuales se cumplen las restricciones (15), (16) y (17) hay una zona de resonancia de la armónica n en un entorno del punto $Q_{nn} = \left(\frac{\omega_0}{\omega} \right)^2$ en el cual c_n está dado por (21) ó (22) y las restantes armónicas por las (25) para $i < n$ y sus correspondientes para $i > n$. El ancho del entorno de validez de nuestras soluciones está dado por el ámbito de validez de las antedichas restricciones y por la condición que las (25) y (26) sean de cuadrado despreciable. Esto lógicamente dependerá de la forma de ψ .

Puede extenderse ahora la crítica hecha al estudiar la resonancia de la armónica fundamental, sobre el sentido físico de las restricciones utilizadas.

El sentido físico de la primera, vale de cir de aquella que nos impone hallarnos en la zona de influencia de la armónica cuya resonancia estamos estudiando, es fácilmente accesible. Es lógico suponer que el estudio hecho no valga en cualquier lado, sino que haya algo característico de la armónica considerado que nos "defina" la zona de validez.

La segunda restricción, vale decir la pequeñez de $P_{\mu\nu}$ y $Q_{\mu\nu}$ es impuesta por el cálculo para poder sacar resultados interpretables. En el caso que la función Ψ permita utilizar las fórmulas (23) para $P_{\mu\nu}$ y $Q_{\mu\nu}$ vemos que esta suposición es tanto más restrictiva cuanto mayor sea n .

Cabería, como antes, preguntarse ¿ es esta una restricción con sentido físico o es solamente una necesidad para facilitar el cálculo ? Esta pregunta va a ser contestada para la resonancia de la armónica fundamental en el caso de la función de Dreifuss, y creemos por lo menos que utilizando el método del próximo parágrafo, para la resonancia de las armónicas superiores, se podría evitar dicha restricción en el estudio de esas resonancias.

§ 9. Nuevo método para la resonancia de la armónica fundamental

Si dividimos ambos miembros de la ecuación diferencial

$$(1) \quad \psi \dot{y} + \delta y + \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \int y d\tau = \frac{U_0}{L_0 \omega} \cos \omega t$$

por ψ y llamamos $\phi(y) = \frac{1}{\psi(y)}$ obtenemos la ecuación equivalente

$$(2) \quad \dot{y} + \delta \phi y + \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \phi \int y d\tau = \frac{\phi U_0}{L_0 \omega} \cos \omega t$$

A primera vista esta ecuación parece más complicada que la anterior por aparecer la función ϕ que hace no lineal al problema en varios términos de la ecuación. En efecto, la resolución de (2) en general resulta más engorrosa, pero en este caso, al utilizar la función de Dreifuss, en cuyo caso ϕ tiene un desarrollo de Fourier sumamente simple, se despeja sumamente el problema. No obstante esto, comenzaremos a estudiar el problema con funciones ϕ generales, y lo haremos hasta donde creamos no demasiado engorroso hacerlo, dejando señalado luego el camino a seguir si se quiere utilizar otra función ϕ que no provenga de la de Dreifuss.

Utilizaremos por ahora un método exactamente análogo al utilizado en el § 6.

Como entonces, consideramos un argumento $\psi = \omega t + \alpha$ que nos permita agrupar los términos de $\cos \omega t$ y $\sin \omega t$ de la solución periódica que busquemos en un término en $\cos(\omega t + \alpha)$. Escribiremos entonces

$$(3) \quad y = c_1 \cos \psi + \sum_2^N (c_\nu \cos \nu \psi + s_\nu \sin \nu \psi) = y_1 + y_2$$

$$\text{donde } y_1 = c_1 \cos \psi \quad y_2 = \sum_2^N (c_\nu \cos \nu \psi + s_\nu \sin \nu \psi)$$

Supondremos nuevamente a los c_ν y s_ν ($\nu \geq 2$) de cuadrados y dobles productos despreciables.

Como antes tendremos nuevamente

$$(4) \quad \phi(y) = \phi(y_1 + y_2) = \phi(y_1) + \frac{d\phi(y_1)}{dy_1} y_2 \dots$$

reemplazando en (2):

$$(5) \quad \dot{y}_1 + \dot{y}_2 + \delta \left(\phi(y_1) + \frac{d\phi(y_1)}{dy_1} y_2 \right) (y_1 + y_2) + \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \left(\phi(y_1) + \frac{d\phi(y_1)}{dy_1} y_2 \right) \int (y_1 + y_2) d\tau = \frac{U_0}{L_0 \omega} \left(\phi(y_1) + \frac{d\phi(y_1)}{dy_1} y_2 \right) \cos \tau$$

y con el desprecio susodicho:

$$(6) \dot{y}_1 + \dot{y}_2 + \delta \phi(y_1)(y_1 + y_2) + \delta y_1 y_1 \frac{d\phi(y_1)}{dy_1} + \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \phi(y_1)(y_1 + y_2) d\tau + \frac{\omega_0^2}{\omega^2} y_2 \frac{d\phi(y_1)}{dy_1} (y_1 d\tau = \frac{V_0}{L_0 \omega} (\phi(y_1) + y_2 \frac{d\phi(y_1)}{dy_1}) \cos(\varphi - \alpha)$$

Reemplazando (3) y sus derivadas

$$(7) - \sum_1^N (-v c_v \sin v \varphi) + v s_v \cos v \varphi + \delta \phi(y_1) \sum_1^N (c_v \cos v \varphi + s_v \sin v \varphi) + \delta \frac{d\phi(y_1)}{dy_1} c_1 \cos \varphi \sum_2^N (c_v \cos v \varphi + s_v \sin v \varphi) + \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \phi(y_1) \sum_1^N (\frac{c_v}{v} \sin v \varphi - \frac{s_v}{v} \cos v \varphi) + \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \frac{d\phi(y_1)}{dy_1} c_1 \sin \varphi \sum_2^N (c_v \cos v \varphi + s_v \sin v \varphi) = \frac{V_0}{L_0 \omega} \phi(y_1) (\cos \varphi \cos \alpha + \sin \varphi \sin \alpha) + \frac{V_0}{L_0 \omega} \frac{d\phi(y_1)}{dy_1} \sum_2^N (c_v \cos v \varphi + s_v \sin v \varphi) (\cos \varphi \cos \alpha + \sin \varphi \sin \alpha)$$

(Como es lógico en (7) y subsiguientes debe sobreentenderse $s_1=0$).

Considerando que $c_1 = c_1 \cos$

$$y \frac{d\phi(y_1)}{dy_1} = \frac{d\phi(y_1)}{dc_1} \frac{\partial c_1}{\partial y_1} = \frac{\partial \phi(y_1)}{\partial c_1} \frac{1}{\cos \varphi}$$

$$\frac{d\phi(y_1)}{dy_1} = \frac{\partial \phi(y_1)}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial y_1} = -\frac{\partial \phi}{\partial \varphi} \frac{1}{c_1 \sin \varphi} \dots$$

$$(8) \boxed{\frac{\partial \phi(y_1)}{\partial y_1} \cos \varphi = \frac{\partial \phi}{\partial c_1}; \quad \frac{\partial \phi(y_1)}{\partial y_1} \sin \varphi = -\frac{1}{c_1} \frac{\partial \phi}{\partial \varphi}}$$

Reemplazando (8) en (7) obtenemos

$$(9) - \sum_1^N (-v c_v \sin v \varphi + v s_v \cos v \varphi) + \delta \phi(y_1) \sum_1^N (c_v \cos v \varphi + s_v \sin v \varphi) + \delta c_1 \frac{\partial \phi}{\partial c_1} \sum_2^N c_v \cos v \varphi + s_v \sin v \varphi + \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \phi \sum_1^N (\frac{c_v}{v} \sin v \varphi - \frac{s_v}{v} \cos v \varphi) - \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \frac{\partial \phi}{\partial \varphi} \sum_2^N (c_v \cos v \varphi + s_v \sin v \varphi) = \frac{V_0}{L_0 \omega} \phi (\cos \varphi \cos \alpha + \sin \varphi \sin \alpha) + \frac{V_0}{L_0 \omega} \cos \alpha \frac{\partial \phi}{\partial c_1} \sum_2^N (c_v \cos v \varphi + s_v \sin v \varphi) - \frac{V_0}{L_0 \omega} \frac{\sin \alpha}{c_1} \frac{\partial \phi}{\partial \varphi} \sum_2^N (c_v \cos v \varphi + s_v \sin v \varphi)$$

Llamando

$$(10) \begin{cases} P_{mn}(c_1) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \phi(\gamma_1) \cos m\varphi \cos n\varphi d\varphi \\ Q_{mn}(c_1) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \phi(\gamma_1) \operatorname{sen} m\varphi \operatorname{sen} n\varphi d\varphi \end{cases}$$

y volviendo a suponer $\phi(\gamma)$ par en γ y por lo tanto $\phi(\gamma_1)$ par en φ y además periódica de período 2π , tendremos los siguientes desarrollos en serie de Fourier:

$$(11) \phi(\gamma_1) \cos \nu\varphi = \sum_0^{\infty} P_{\nu\mu}(c_1) \cos \mu\varphi; \quad \phi(\gamma_1) \operatorname{sen} \nu\varphi = \sum_0^{\infty} Q_{\nu\mu}(c_1) \operatorname{sen} \mu\varphi$$

además siendo $\phi(\gamma_1)$ par en φ ; $\partial\phi/\partial\varphi$ será impar en φ , luego siempre admitiendo los desarrollos en serie de Fourier, pondremos

$$\frac{\partial\phi}{\partial\varphi} \cos \nu\varphi = \sum_0^{\infty} \left(\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\partial\phi}{\partial\varphi} \cos \nu\varphi \operatorname{sen} \mu\varphi d\varphi \right) \operatorname{sen} \mu\varphi$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial\varphi} \operatorname{sen} \nu\varphi = \sum_0^{\infty} \left(\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\partial\phi}{\partial\varphi} \operatorname{sen} \nu\varphi \cos \mu\varphi d\varphi \right) \cos \mu\varphi$$

pero integrando por partes:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\partial\phi}{\partial\varphi} \cos \nu\varphi \operatorname{sen} \mu\varphi d\varphi = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \phi (\nu \operatorname{sen} \nu\varphi \operatorname{sen} \mu\varphi - \mu \cos \nu\varphi$$

$$\cos \mu\varphi) d\varphi = \nu Q_{\nu\mu} - \mu P_{\nu\mu} \dots$$

$$(12) \begin{cases} \frac{\partial\phi}{\partial\varphi} \cos \nu\varphi = \sum_{\mu=0}^{\infty} (\nu Q_{\nu\mu} - \mu P_{\nu\mu}) \operatorname{sen} \mu\varphi \\ \frac{\partial\phi}{\partial\varphi} \operatorname{sen} \nu\varphi = \sum_{\mu=0}^{\infty} (\mu Q_{\mu\nu} - \nu P_{\mu\nu}) \cos \mu\varphi \end{cases}$$

Por otra parte indicando como $P'_{mn} = \frac{dP_{mn}(c_1)}{dc_1}$, $Q'_{mn} = \frac{dQ_{mn}(c_1)}{dc_1}$

$$(13) \begin{cases} \frac{\partial\phi}{\partial c_1} \cos \nu\varphi = \frac{\partial}{\partial c_1} (\phi \cos \nu\varphi) = \sum_0^{\infty} P'_{\nu\mu} \cos \mu\varphi; \\ \frac{\partial\phi}{\partial c_1} \operatorname{sen} \nu\varphi = \sum_0^{\infty} Q'_{\nu\mu} \operatorname{sen} \mu\varphi \end{cases}$$

Reemplazando (11), (12) y (13) en (9) obtenemos:

$$\begin{aligned}
 & -\sum_1^N i - \nu c_\nu \sin \nu \psi + \nu s_\nu \cos \nu \psi) + \delta \sum_{\nu=1}^N \sum_{\mu=0}^{\infty} k P_{\nu\mu} \cos \mu \psi + s_\nu Q_{\nu\mu} \sin \mu \psi) + \\
 & + \delta c_1 \sum_{\nu=2}^N \sum_{\mu=0}^{\infty} (c_\nu P'_{\nu\mu} \cos \mu \psi + s_\nu Q'_{\nu\mu} \sin \mu \psi) + \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \sum_1^N \sum_0^{\infty} \left(-\frac{s_\nu}{\nu} P_{\nu\mu} \cos \mu \psi + \right. \\
 & + \frac{c_\nu}{\nu} Q_{\nu\mu} \sin \mu \psi) - \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \sum_2^N \sum_0^{\infty} [c_\nu (\nu Q_{\nu\mu} - \mu P_{\nu\mu}) \sin \mu \psi + s_\nu (\mu Q_{\nu\mu} - \\
 (14) & - \nu P_{\nu\mu}) \cos \mu \psi] = \frac{U_0}{L_0 \omega} \cos \alpha \sum_0^{\infty} P_{1\mu} \cos \mu \psi + \frac{U_0}{L_0 \omega} \sin \alpha \sum_0^{\infty} Q_{1\mu} \sin \mu \psi - \\
 & + \frac{U_0}{L_0 \omega} \cos \alpha \sum_{\nu=2}^N \sum_0^{\infty} (c_\nu P'_{\nu\mu} \cos \mu \psi + s_\nu Q'_{\nu\mu} \sin \mu \psi) - \frac{U_0}{L_0 \omega} \frac{\sin \alpha}{c_1} \sum_2^N \sum_0^{\infty} \\
 & (c_\nu (\nu Q_{\nu\mu} - \mu P_{\nu\mu}) \sin \mu \psi + s_\nu (\mu Q_{\nu\mu} - \nu P_{\nu\mu}) \cos \mu \psi)
 \end{aligned}$$

Separando los coeficientes de $\sin i \psi$, y $\cos i \psi$ para $i=1, \dots$ obtendremos un sistema de infinitas ecuaciones con $2N$ incógnitas (α, c_i, s_i).

Considerando solamente las ecuaciones provenientes de $i=1, 2, \dots, N$ obtendremos un sistema de $2N$ ecuaciones con $2N$ incógnitas que trataremos de resolver. Son factibles iguales discusiones y razonamientos, sobre el hecho de no considerar las otras ecuaciones, que los hechos en el § 6.

Nuestro sistema será entonces:

$$\begin{aligned}
 \sin \psi & \Rightarrow -c_1 + \delta \sum_1^N s_\nu Q_{\nu 1} + \delta c_1 \sum_2^N s_\nu Q'_{\nu 1} + \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \sum_1^N \frac{c_\nu}{\nu} Q_{\nu 1} - \\
 & - \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \sum_2^N c_\nu (\nu Q_{\nu 1} - P_{\nu 1}) = \frac{U_0}{L_0 \omega} Q_{11} \sin \alpha + \frac{U_0}{L_0 \omega} \cos \alpha \sum_2^N s_\nu \\
 & Q'_{\nu 1} - \frac{U_0}{L_0 \omega c_1} \sin \alpha \sum_2^N c_\nu (Q_{\nu 1} - \nu P_{\nu 1}) \\
 \cos \psi & \Rightarrow \delta \sum_1^N c_\nu P_{\nu 1} + \delta c_1 \sum_2^N c_\nu P'_{\nu 1} + \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \sum_1^N \frac{s_\nu}{\nu} (P_{01} - P_{\nu 1}) - \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \sum_2^N s_\nu \\
 (15) & (Q_{\nu 1} - \nu P_{\nu 1}) = \frac{U_0}{L_0 \omega} \cos \alpha P_{11} + \frac{U_0}{L_0 \omega} \sin \alpha \sum_2^N c_\nu P'_{\nu 1} - \frac{U_0}{L_0 \omega} \sin \alpha \\
 & \sum_2^N s_\nu (\nu Q_{\nu 1} - P_{\nu 1}) \\
 & \vdots \\
 \sin m \psi & \Rightarrow -m c_m + \delta \sum_1^N s_\nu Q_{\nu m} + \delta c_1 \sum_2^N s_\nu Q'_{\nu m} + \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \sum_1^N \frac{c_\nu}{\nu} Q_{\nu m} - \\
 & - \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \sum_2^N c_\nu (\nu Q_{\nu m} - m P_{\nu m}) = \frac{U_0}{L_0 \omega} \sin \alpha Q_{1m} + \frac{U_0}{L_0 \omega} \cos \alpha
 \end{aligned}$$

$$\sum_{\nu}^N S_{\nu} Q'_{\nu m} - \frac{U_0}{L_0 \omega} \frac{\delta \cos \alpha}{C_1} \sum_{\nu}^N C_{\nu} (\nu Q_{\nu m} - m P_{\nu m})$$

$$\cos m \varphi \Rightarrow m S_m + \delta \sum_{\nu}^N C_{\nu} P_{\nu m} + \delta C_1 \sum_{\nu}^N C_{\nu} P'_{\nu m} + \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \sum_{\nu}^N \frac{S_{\nu}}{\nu} (F_{0m} - P_{\nu m}) -$$

$$- \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \sum_{\nu}^N S_{\nu} (m Q_{\nu m} - \nu P_{\nu m}) = \frac{U_0}{L_0 \omega} \cos \alpha P_{1m} + U_0 \omega \delta \alpha \sum_{\nu}^N C_{\nu} P'_{\nu m}$$

$$- \frac{U_0}{L_0 \omega} \frac{\delta \cos \alpha}{C_1} \sum_{\nu}^N S_{\nu} (m Q_{\nu m} - \nu P_{\nu m})$$

Por la paridad de $Q(y)$ se tiene:

$$(16) \quad P_{2i, 2j+1} = Q_{2i, 2j+1} = 0$$

Las ecuaciones provenientes de senos y cosenos pares de (15) se convierten en un sistema homogéneo de N ecuaciones con N incógnitas; la s_{ν} y c_{ν} para ν pares, luego volvemos a obtener

$$(17) \quad c_{2i} = s_{2i} = 0$$

Este resultado era de esperar, ya que las soluciones exactas de (1) (2) deben forzosamente coincidir por ser (1) y (2) esencialmente idénticas. Como el resultado que la solución de (1) carece de armónicas pares era exacto, este mismo resultado deberá aparecer también como exacto en la solución de (2), y efectivamente eso es lo que afirma (17). En cambio, es de esperar que los resultados aproximados coincidan sólo aproximadamente.

En (15) se ve fácilmente que si $\delta = 0$ las ecuaciones provenientes de los cosenos impares son satisfechas si

$$s_{2i+1} = \cos \alpha = 0 \quad (i = 0, 1, \dots)$$

Si suponemos δ pequeño aunque no nulo, podremos decir

$$(18) \quad s_{2i+1} = \cos \alpha = 0(\delta)$$

El sistema (15) para el caso particular $\delta = 0$ se transforma en

$$-C_1 + \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \sum_{\nu}^N \frac{C_{\nu}}{\nu} Q_{\nu 1} - \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \sum_{\nu}^N C_{\nu} (\nu Q_{\nu 1} - P_{\nu 1}) = \pm \frac{U_0}{L_0 \omega} (Q_{11} - \sum_{\nu}^N \frac{C_{\nu}}{2 C_1} (\nu Q_{\nu 1} - P_{\nu 1}))$$

$$(16') \quad -3C_3 + \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \sum_{\nu}^N \frac{C_{\nu}}{\nu} Q_{\nu 3} - \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \sum_{\nu}^N C_{\nu} (\nu Q_{\nu 3} - 3P_{\nu 3}) = \pm \frac{U_0}{L_0 \omega} (Q_{13} - \sum_{\nu}^N \frac{C_{\nu}}{2 C_1} (\nu Q_{\nu 3} - 3P_{\nu 3}))$$

$$-m(m + \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \sum_{\nu}^N \frac{C_{\nu}}{\nu} Q_{\nu m} - \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \sum_{\nu}^N C_{\nu} (\nu Q_{\nu m} - m P_{\nu m})) = \pm \frac{U_0}{L_0 \omega} (Q_{1m} - \sum_{\nu}^N \frac{C_{\nu}}{2 C_1} (\nu Q_{\nu m} - m P_{\nu m}))$$

Estudiaremos como se reducen los $Q_{\mu\nu}$ y $P_{\mu\nu}$ en el caso de usar la función de Dreifuss.

$$\psi(y) = \frac{1}{1+y^2/y_0^2} \quad \therefore \phi(y) = 1 + y^2/y_0^2$$

Si introducimos ahora la incógnita adimensional y en reemplazo de y/y_0 tendremos la misma ecuación diferencial (2) donde en vez de U_0 deberá figurar U_0/y_0 y donde $\psi(y) = \frac{1}{1+y^2}$ $\therefore \phi(y) = 1 + y^2$

De esta manera los c_i de este párrafo serán adimensionales y corresponderán a los $y_i = c_i/y_0$ de los anteriores.

$$\phi(y_1) = 1 + y_1^2 \cos^2 \psi$$

luego

$$\phi(y_1) = 1 + c_1^2 \left(\frac{1 + \cos 2\psi}{2} \right) = 1 + \frac{c_1^2}{2} + \frac{c_1^2}{2} \cos 2\psi$$

$$P_{mn} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \phi(y_1) \cos m\psi \cos n\psi d\psi = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \phi(y_1) [\cos(m+n)\psi + \cos(m-n)\psi] d\psi$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(1 + \frac{c_1^2}{2} + \frac{c_1^2}{2} \cos 2\psi \right) (\cos(m+n)\psi + \cos(m-n)\psi) d\psi$$

Siendo m y n enteros positivos y $\delta_{mn} = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ 1 & m = n \end{cases}$

$$P_{mn} = \left(1 + \frac{c_1^2}{2} \right) \delta_{mn} + \frac{c_1^2}{4} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos 2\psi \cos(m+n)\psi d\psi +$$

$$+ \frac{c_1^2}{4} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos 2\psi \cos(m-n)\psi d\psi$$

luego obtenemos

$$(17) \quad P_{mn} \begin{cases} = 1 + \frac{c_1^2}{2} & \text{si } m = n \neq 1 \\ = 1 + \frac{3c_1^2}{4} & \text{si } m = n = 1 \\ = \frac{c_1^2}{4} & \text{si } |m-n| = 2 \\ = 0 & \text{en caso contrario o sea si } m=n \\ & \text{y } |m-n| \neq 2 \end{cases}$$

De igual manera

$$Q_{mn} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \phi(y_1) \sin m\psi \sin n\psi d\psi = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \phi(y_1) [\cos(m-n)\psi -$$

$$- \cos(m+n)\psi] d\psi = \left(1 + \frac{c_1^2}{2} \right) \delta_{mn} + \frac{c_1^2}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos 2\psi \cos(m-n)\psi d\psi -$$

$$- \frac{c_1^2}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos 2\psi \cos(m+n)\psi d\psi \quad \therefore$$

$$(17') \quad Q_{m,n} \begin{cases} = 1 + \frac{c_1^2}{2} & \text{si } m = n \neq 1 \\ = 1 + \frac{c_1^2}{4} & \text{si } m = n = 1 \\ = \frac{c_1^2}{4} & \text{si } |m - n| = 2 \\ \neq 0 & \text{en caso contrario, o sea si } m \neq n \text{ y } |m - n| \neq 2 \end{cases}$$

Si para mayor comodidad llamamos $Q = 1 + \frac{c_1^2}{4}$; $A = 1 + \frac{c_1^2}{2}$; $B = \frac{c_1^2}{4}$ considerando (17) y (17') el sistema (16) se nos convertirá en el

$$(18) \begin{aligned} -c_1 \left(1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2} Q \right) - c_3 \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \frac{5}{3} B &= + \frac{U_0}{J_0 L_0 \omega} \left(Q - 2 \frac{c_3}{c_1} B \right) \\ c_1 \frac{\omega_0^2}{\omega^2} B - c_3 \left(3 - \frac{1}{3} \frac{\omega_0^2}{\omega^2} A \right) - c_5 \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \frac{9}{5} B &= + \frac{U_0}{J_0 L_0 \omega} \left(B - 2 \frac{c_5}{c_1} B \right) \\ c_3 \left(\frac{7}{3} B \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \right) - c_5 \left(5 - \frac{1}{5} \frac{\omega_0^2}{\omega^2} A \right) - c_7 \frac{13}{7} B \frac{\omega_0^2}{\omega^2} &= + \frac{U_0}{J_0 L_0 \omega} \frac{2B}{c_1} (c_3 - c_7) \\ \vdots & \vdots \\ c_{m-2} \left(\frac{2m-3}{m-2} B \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \right) - c_m \left(m - \frac{1}{m} \frac{\omega_0^2}{\omega^2} A \right) - c_{m+2} \frac{2m+3}{m+2} \frac{\omega_0^2}{\omega^2} B &= + \frac{U_0}{J_0 L_0 \omega} \frac{2B}{c_1} \\ \vdots & \vdots \\ & (c_{m-2} - c_{m+2}) \end{aligned}$$

Es interesante observar que en la ecuación de (18) de orden i , además de figurar la incógnita c_1 que está representada en los coeficientes $A, B, Q, \text{etc.}$, figuran solamente las incógnitas c_{i-2}, c_i y c_{i+2} ; ésta es una gran ventaja sobre el tipo de ecuaciones que se obtenían en los anteriores parágrafos donde en cada ecuación se hallaban todas las incógnitas, si deseamos resolver (18) por métodos de iteración o por recambios sucesivos de soluciones de una incógnita en función de otra. Además si demostráramos que aproximadamente se puede obtener una solución satisfactoria usando solamente un número determinado de ecuaciones, esta solución no dependería en absoluto del número de armónicas consideradas^(x) ya que las ecuaciones consideradas no quedarían afectadas al introducir más armónicas.

En los parágrafos anteriores tratamos de evaluar los sistemas equivalentes a (18) considerando a $Q(c_1), B(c_1), \text{etc}$ como coeficientes, con lo que aquellos sistemas resultaban algebraicos y lineales, obteniendo luego el resultado por el método de Cramer. Eso era casi imprescindible por la forma complicada que tenían las P_{mn} y Q_{mn} como funciones de c_1 .

(x) Con tal que éste sea mayor que el número de orden de la última ecuación considerada para obtener el resultado aproximado.

En este caso podríamos seguir el mismo método, pero por su facilidad convendrá antes reemplazar en (18) A, B y Q por sus valores en función de c_1 , con lo cual obtendremos un sistema algebraico no lineal cuyos coeficientes serán ahora parámetros que no dependen de las incógnitas:

Este sistema será, llamando $V_0 = V_0 / L_0 \omega$:

$$\begin{aligned}
 & -c_1 \left(1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \left(1 + \frac{c_1^2}{4} \right) \right) - c_3 \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \frac{5}{12} c_1^2 = V_0 \left(1 + \frac{c_1^2}{4} - \frac{c_3 c_4}{2} \right) \\
 & \frac{c_1^3}{4} \frac{\omega_0^2}{\omega^2} - c_3 \left(3 - \frac{1}{3} \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \left(1 + \frac{c_1^2}{2} \right) \right) - c_5 \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \frac{9}{20} c_1^2 = V_0 \left(\frac{c_1^2}{4} - \frac{c_1 c_5}{2} \right) \\
 (19) \quad & \frac{7}{12} c_3 c_1^2 \frac{\omega_0^2}{\omega^2} - c_5 \left(5 - \frac{1}{5} \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \left(1 + \frac{c_1^2}{2} \right) \right) - c_7 \frac{17}{28} \frac{\omega_0^2}{\omega^2} c_1^2 = V_0 \frac{c_1}{2} (c_3 - c_7) \\
 & \vdots \\
 & \frac{2m-3}{m-2} c_{m-2} \frac{c_1^2}{4} \frac{\omega_0^2}{\omega^2} - c_m \left(m - \frac{1}{m} \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \left(1 + \frac{c_1^2}{2} \right) \right) - c_{m+2} \frac{2m+3}{m+2} \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \frac{c_1^2}{4} \\
 & = V_0 \frac{c_1}{2} (c_{m-2} - c_{m+2}) \\
 & \vdots
 \end{aligned}$$

Nuestro objeto será ahora obtener de (19) c_i en función de los parámetros $\frac{\omega_0^2}{\omega^2}$ y V_0 y establecer en que ámbito de esos parámetros las correspondientes soluciones verifican las hipótesis supuestas, o sea que las c_ν para $\nu \geq 2$ son de cuadrado y dobles productos despreciables frente a c_1 .

Intuitivamente y también en forma rigurosa en las fórmulas puede comprenderse que para ciertos valores de los parámetros la influencia de una determinada armónica será preponderante frente a las demás; como es lógico si esa armónica no es la primera, nuestras hipótesis no se cumplen.

Como obviamente nuestro método de estudio se reduce a zonas de resonancia de la primera armónica, tendremos que restringirnos a lo que hemos llamado zona de influencia de la primera armónica que en este caso está dada por los valores de $\frac{\omega_0^2}{\omega^2}$ y de c_1 que cumplan que

$$2i+1 - \frac{\omega_0^2}{(2i+1)\omega^2} \left(1 + \frac{c_1^2}{4} \right) \quad (i \geq 1)$$

no sean pequeños, o sea por ejemplo, no menores de la unidad^(x).

x) Se ve que dicha restricción equivale a decir $3 - \frac{\omega_0^2}{3\omega^2} \left(1 + \frac{c_1^2}{4} \right) > 1$

Esta es una restricción lógica debida al método, pero en el estudio detallado del § 6 hemos visto que esta restricción no era suficiente para obtener resultados interpretables, o sea con nuestra manera de proceder obteníamos resultados que eran verídicos sólo en ciertas partes de la zona de influencia de la primera armónica.

Es posible, sin embargo, que usando otros métodos de solución de los sistemas de ecuaciones planteados en el § 6 o aun con los mismos métodos pero evaluando los determinantes con procedimientos más sutiles se obtengan otros resultados o eventualmente los mismos, que sean justificables en zonas más amplias que las anteriores.

Como en los párrafos anteriores no se entreveía fácilmente otra forma de atacar las ecuaciones, nos hemos abocado a este método que en el caso de Dreifuss es sumamente accesible. Es una gran ventaja que no figuren puntos suspensivos en cada ecuación de (19).

La primera ecuación de (19) nos dá (tomando los signos de arriba frente al $\frac{U_0}{L_0 \omega}$)

$$(20) \quad -V_0 = \frac{C_1 \left[\left(1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \left(1 + \frac{C_1^2}{4} \right) + C_3 C_1 \frac{5}{12} \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \right) \right]}{1 + \frac{C_1^2}{4} - \frac{C_3 C_1}{2}}$$

Desarrollando en serie de Taylor y no considerando los cuadrados de c

$$(21) \quad \frac{1}{1 + \frac{C_1^2}{4} - \frac{C_3 C_1}{2}} = \frac{1}{1 + \frac{C_1^2}{4}} + \frac{C_3 C_1}{2 \left(1 + \frac{C_1^2}{4} \right)^2}$$

$$-\frac{U_0}{L_0 \omega} = C_1 \left[1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \left(1 + \frac{C_1^2}{4} \right) + C_3 C_1 \frac{5}{12} \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \right] \left[\frac{1}{1 + \frac{C_1^2}{4}} + \frac{C_3 C_1}{2 \left(1 + \frac{C_1^2}{4} \right)^2} \right]$$

$$= \frac{C_1}{1 + \frac{C_1^2}{4}} \left[1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \left(1 + \frac{C_1^2}{4} \right) + \frac{C_3 C_1}{2 \left(1 + \frac{C_1^2}{4} \right)} \left\{ 1 - \frac{1}{6} \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \left(1 + \frac{C_1^2}{4} \right) \right\} \right]$$

Esto se puede escribir

$$(22) \quad |c| = \frac{V_0}{|Q + \omega_0^2 / \omega^2|}$$

donde ahora

$$(23) \quad Q = \frac{1 + \frac{C_1 C_3}{2 \left(1 + \frac{C_1^2}{4} \right)} \left\{ 1 - \frac{1}{6} \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \left(1 + \frac{C_1^2}{4} \right) \right\}}{1 + \frac{C_1^2}{4}}$$

$$= 1 / \left(1 + \frac{C_1^2}{4} - \frac{C_1 C_3}{2} \left\{ 1 - \frac{1}{6} \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \left(1 + \frac{C_1^2}{4} \right) \right\} \right)$$

Verificación para el punto de resonancia

Como es evidente si se pone $\frac{\omega_0^2}{\omega^2} = 1 / \left(1 + \frac{C_1^2}{4} - \frac{5}{12} C_1 C_3 \right)$ relación que es satisfecha por el punto de resonancia ya que, la primera ecuación de (19) dá $U_0 = 0$, se ve que (23) nos dá

$$Q = \frac{1}{1 + \frac{C_1^2}{4} - \frac{C_1 C_3}{2} \left\{ 1 - \frac{1}{6} \frac{(1 + \frac{C_1^2}{4})}{1 + \frac{C_1^2}{4} - \frac{5}{12} C_1 C_3} \right\}} = \frac{1}{1 + \frac{C_1^2}{4} - \frac{C_1 C_3}{2} \left\{ 1 - \frac{1}{6} \left(1 + \frac{5}{12} \frac{C_1 C_3}{1 + \frac{C_1^2}{4}} \right) \right\}}$$

$$= \frac{1}{1 + \frac{C_1^2}{4} - \frac{5}{12} C_1 C_3 + \frac{5}{(12)^2} \frac{(C_1 C_3)^2}{1 + \frac{C_1^2}{4}}} = \frac{1}{1 + \frac{C_1^2}{4} - \frac{5}{12} C_1 C_3} = \frac{\omega_0^2}{\omega^2}$$

resultado efectivamente esperado para el punto de resonancia.

En (23) si consideráramos $\frac{1}{6} \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \left(1 + \frac{C_1^2}{4} \right) \ll 1$ cosa justificable para varios puntos de la zona de influencia de la primera armónica, obtendríamos

$$(24) \quad Q = \frac{1 + \frac{C_1 C_3}{2} \frac{1}{1 + \frac{C_1^2}{4}}}{1 + \frac{C_1^2}{4}} = \frac{1}{1 + \frac{C_1^2}{4} - \frac{C_1 C_3}{2}}$$

La fórmula (22) es la que ahora vendrá a substituir a la fórmula de Zenneck, ella es rigurosa, a menos del desprecio de los otros términos del desarrollo de Taylor de $\frac{1}{1 + \frac{C_1^2}{4} - \frac{C_1 C_3}{2}}$ aparte de los considerados, y no depende del número de armónicas consideradas. Lo que depende de aquel número y lo que va a ser el objeto de los estudios ulteriores es el $c_3 = c_3(c_1)$ que aparece en (23) o (24).

Vamos a tratar de hallar c_3 en función de c_1 y de ω_0^2/ω^2 y veremos si se cumple la hipótesis de que c_3/c_1 era de cuadrado despreciable frente a 1. Como hemos dicho, impondremos la restricción

$$(24') \quad K = 3 - \frac{1}{3} \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \left(1 + \frac{C_1^2}{4} \right)^2 > 1$$

que limita la zona de nuestro estudio. Que la desigualdad anterior defina la zona de resonancia de la primera armónica, estrictamente hablando se comprobará sólo en el resultado. No obstante (24') es sugestiva aun a priori por ser análoga a una de las desigualdades que necesitábamos en el § 6, para obtener resultados que verificaran las hipótesis hechas.

Comenzaremos suponiendo $c_5 = 0$ o sea suponiendo que hemos sólo considerado las 3 primeras armónicas del desarrollo de \mathcal{J} . Multiplicando la primera ecuación de (19) por $c_1^2/4$ y restándole la segunda multiplicada por $\left(1 + \frac{C_1^2}{4} - \frac{C_1 C_3}{2} \right)$ tendremos:

$$\frac{C_1^3}{4} \left[1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \left(1 + \frac{C_1^2}{4} - \frac{5}{12} C_1 C_3 \right) + \frac{C_1^3}{4} \frac{\omega_0^2}{\omega^2} - C_3 K \right] \left(1 + \frac{C_1^2}{4} - \frac{C_1 C_3}{2} \right) = 0$$

$$\frac{C_1^3}{4} \left(1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \left(1 + \frac{C_1^2}{4} \right) \right) + \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \frac{C_1^4}{4} \frac{5}{12} C_3 + \frac{C_1^3}{4} \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \left(1 + \frac{C_1^2}{4} \right) - C_3 \left[K \left(1 + \frac{C_1^2}{4} \right) + \frac{C_1^4}{8} \frac{\omega_0^2}{\omega^2} + C_1 K \frac{C_3^2}{2} \right] = 0$$

$$\therefore c_3 \left[K \left(1 + \frac{c_1^2}{4} \right) + \frac{c_1^4}{8} \frac{\omega_0^2}{\omega^2} - \frac{c_1^4}{16} \frac{5}{18} \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \right] = c_3 \left[K \left(1 + \frac{c_1^2}{4} \right) + \frac{1}{12} \frac{c_1^4}{4} \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \right]$$

$$= \frac{c_1^3}{4} - \frac{c_1^3 \omega_0^2}{4 \omega^2} \left(1 + \frac{c_1^2}{4} \right) + \frac{c_1^3 \omega_0^2}{4 \omega^2} \left(1 + \frac{c_1^2}{4} \right) - c_1 K \frac{c_3^2}{8}$$

Despreciando Kc_3^2 frente a $c_1^2/2$:

$$(25) \quad \frac{c_3}{c_1} = \frac{c_1^2/4}{K \left(1 + \frac{c_1^2}{4} \right) + \frac{1}{12} \frac{c_1^4}{4} \frac{\omega_0^2}{\omega^2}}$$

Si reemplazamos K por su valor

$$(26) \quad \frac{c_3}{c_1} = \frac{c_1^2/4}{3 \left(1 + \frac{c_1^2}{4} \right) - \frac{1}{3} \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \left(1 + \frac{3}{4} c_1^2 + \frac{1}{16} c_1^4 \right)}$$

La fórmula (25) nos da una primera acotación pues según ella

$$(27) \quad \frac{c_3}{c_1} < \frac{c_1^2/4}{K \left(1 + \frac{c_1^2}{4} \right)}$$

Si como hemos dicho imponemos a $\frac{\omega_0^2}{\omega^2}$ valores tales que hagan mantener a K mayor que un cierto número (por ejemplo 1 ó 2), nuestra cota resultará cero para $c_1 = 0$, crecerá paulatinamente con c_1 hasta tender a $1/K$ para $c_1 \rightarrow \infty$.

Por ejemplo tomando $K=2$ (27) nos da para $c_1=1$, $c_3/c_1 < 0,1$; para $c_1=2$, $c_3/c_1 = 0,25$; para $c_1 \rightarrow \infty$, $c_3/c_1 < 0,5$. Tomando $K=1$, $c_3/c_1 < 1/5$ para $c_1=1$; en los dos primeros casos y en el último podemos considerar admisible el desprecio de $\left(\frac{c_3}{c_1} \right)^2$ frente a 1.

Lógicamente se obtendrá una cota más afinada considerando el término $\frac{1}{12} \frac{c_1^4}{4} \frac{\omega_0^2}{\omega^2}$ del denominador de (25), claro está que es engorroso tratarlo por figurar en el $\frac{\omega_0^2}{\omega^2}$. Poniendo por ejemplo $\frac{\omega_0^2}{\omega^2} = \frac{1}{1 + \frac{c_1^2}{4}}$ lo que nos acerca al punto de resonancia, obtenemos

$$\frac{c_3}{c_1} = \frac{c_1^2/4}{3 \left(1 + \frac{c_1^2}{4} \right) - \frac{1}{3} \frac{\left(1 + \frac{3}{4} c_1^2 + \frac{1}{16} c_1^4 \right)}{\left(1 + \frac{c_1^2}{4} \right)}}$$

que en el peor de los casos o sea para $c_1 \rightarrow \infty$ vale $3/8 = 0,375$.

Si nos interesara como con la relación c_3/c_1 en el punto de resonancia tendríamos que reemplazar $\frac{\omega_0^2}{\omega^2}$ por $\frac{1}{1 + \frac{c_1^2}{4} - \frac{5}{12} c_1 c_3}$

De (26) obtenemos

$$\frac{c_3}{c_1} \left[3 \left(1 + \frac{c_1^2}{4} \right) - \frac{1}{3} \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \left(1 + \frac{3}{4} c_1^2 + \frac{1}{16} c_1^4 \right) \right] = \frac{c_1^2}{4}$$

Reemplazando $\frac{\omega_0^2}{\omega^2} = \frac{1}{1 + \frac{c_1^2}{4} - \frac{5}{12} c_1 c_3}$

$$\frac{c_3}{c_1} \left[3 \left(1 + \frac{c_1^2}{4} \right) - \frac{1}{3} \frac{\left(1 + \frac{3}{4} c_1^2 + \frac{1}{16} c_1^4 \right)}{1 + \frac{c_1^2}{4} - \frac{5}{12} c_1 c_3} \right] = \frac{c_1^2}{4} \therefore$$

$$\frac{c_3}{c_1} \left[3 \left(1 + \frac{c_1^2}{4} \right) \left(1 + \frac{c_1^2}{4} - \frac{5}{12} c_1 c_3 \right) - \frac{1}{3} \left(1 + \frac{3}{4} c_1^2 + \frac{1}{16} c_1^4 \right) \right] = \frac{c_1^2}{4} \left(1 + \frac{c_1^2}{4} - \frac{5}{12} c_1 c_3 \right)$$

despreciando el termino en c_3^2 :

$$\frac{c_3}{c_1} \left[3 \left(1 + \frac{c_1^2}{4} \right)^2 + \frac{c_1^4}{4} \frac{5}{12} - \frac{1}{3} \left(1 + \frac{3}{4} c_1^2 + \frac{1}{16} c_1^4 \right) \right]$$

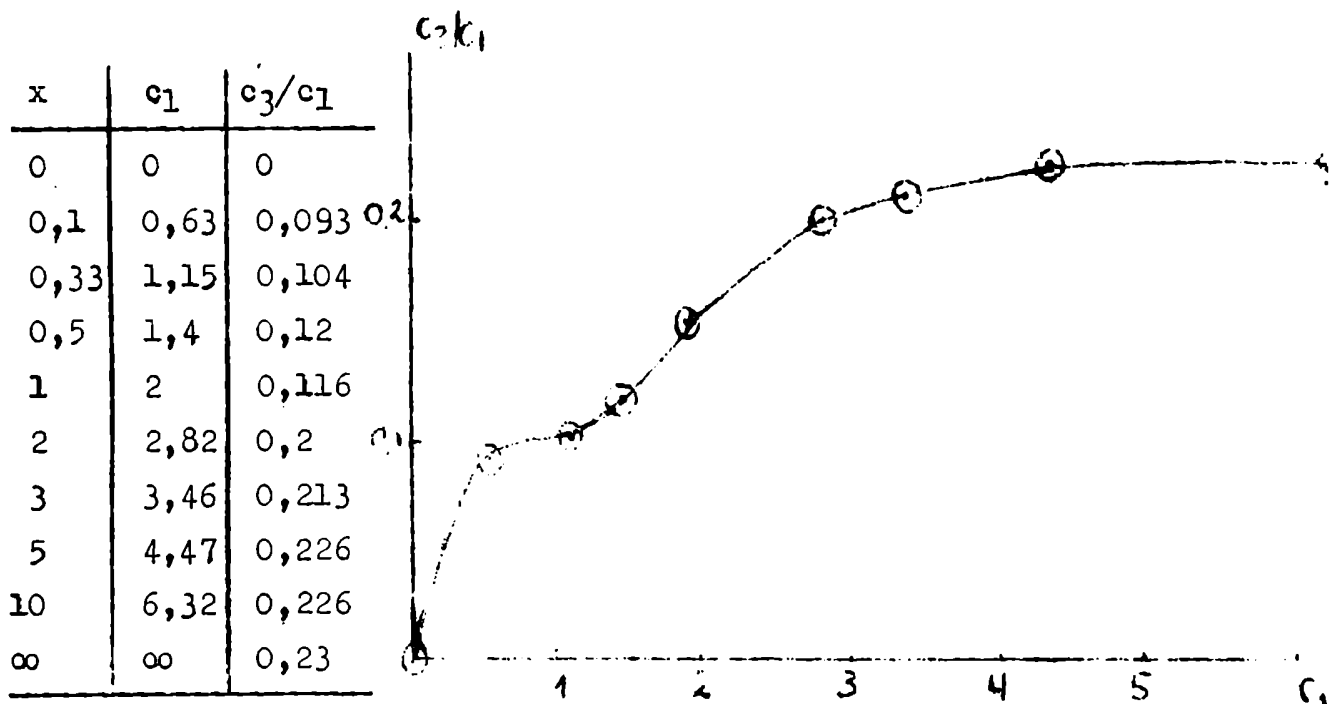
$$= \frac{c_3}{c_1} \left[3 \left(1 + \frac{c_1^2}{4} \right)^2 + \frac{1}{5} \left(-1 - \frac{3}{4} c_1^2 + \frac{1}{4} c_1^4 \right) \right] = \frac{c_1^2}{4} \left(1 + \frac{c_1^2}{4} \right)$$

$$(27) \quad \frac{c_3}{c_1 \omega^2} = \frac{c_1^2/4}{3 \left(1 + \frac{c_1^2}{4} \right) + \frac{1}{3} - \frac{1 - \frac{3}{4} c_1^2 + \frac{1}{4} c_1^4}{1 + \frac{c_1^2}{4}}}$$

Escribiendo $x = c_1^2/4$ tendríamos

$$(27') \quad \frac{c_3}{c_1 \omega^2} = \frac{x}{3(1+x) + \frac{4x^2 - 3x - 1}{3(1+x)}}$$

función que podríamos representar en una curva.



El gráfico muestra que la relación c_3/c_1 en el punto de resonancia (mínimo de la curva característica del fenómeno) es pequeña en cualquier lugar se halle dicho punto. Vimos que en general, para c_1

la relación c_3/c_1 no era muy pequeña (aunque tampoco se volvía de demasiado grande), pero si hacemos $c_1 \rightarrow \infty$ y con él el punto de resonancia

cia ($\omega_0^2/\omega^2 \rightarrow 0$) entonces c_3/c_1 se mantiene pequeño. Esto es relativamente importante ya que lo que especialmente nos interesa a nosotros son puntos cercanos a la resonancia misma.

Podremos ahora hallar rápidamente la condición de resonancia

$$\frac{1}{1+x - \frac{5}{12} c_3 c_1} = \frac{1}{1+x - \frac{5}{3} x \frac{c_3}{c_1 \text{res}}} = \frac{\omega_0^2}{\omega^2}$$

explícitamente en función de x , o sea dado el ω_0^2/ω^2 hallar una relación entre x_{res} (o sea el valor de x en el punto de resonancia) y o también: dado un valor de x hallar el ω_0^2/ω^2 tal que en ese punto x haya resonancia (x).

Reemplazando (27') en la fórmula de arriba y simplificando se obtiene

$$\frac{\omega_0^2}{\omega^2} = \frac{1}{1+x} \cdot \frac{1}{1 - \frac{5x^2}{8+15x+13x^2}} = \frac{1}{1+x} \frac{8+15x+13x^2}{8+15x+8x^2} = Q_{\text{res}}$$

Ahora podemos demostrar fácilmente que el punto de resonancia siempre se halla en la zona de influencia de la primera armónica ya que

$$\frac{1}{3} \frac{\omega_0^2}{\omega^2} (1+x)_{\text{res}} = \frac{1}{3} \frac{1+x}{1+x} \frac{8+15x+13x^2}{8+15x+8x^2} < \frac{13}{24} = 0,542$$

luego $K_{\text{res}} = 3 - \frac{1}{3} \frac{\omega_0^2}{\omega^2} (1+x)_{\text{res}} > 2,458$. luego el punto de resonancia cumple la restricción impuesta a los puntos de la zona de influencia:

Como para un ω_0^2/ω^2 fijo para puntos tales que $x \ll x_{\text{res}}$, es $K >$

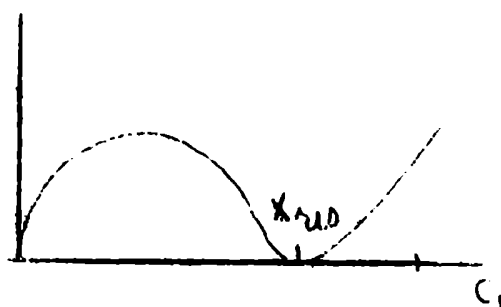
$> K_{\text{res}}$ podemos decir que la zona de influencia es una zona que se extiende desde el origen y contiene λ_0

seguramente al punto de resonancia. Además se ve que lo contiene muy cómodamente ya que se ve (y con una anotación burda) que si $x = n x_{\text{res}}$

($n > 1$)

$$\frac{1}{3} \frac{\omega_0^2}{\omega^2} (1+x) = \frac{1}{3} \frac{\omega_0^2}{\omega^2} (1+n x_{\text{res}}) < n \cdot 0,542$$

de modo que el punto cuyo x es el doble al de resonancia, o sea $n=2$ (notar que si $x=2 x_{\text{res}}$; $c_1 = \sqrt{2} c_{1\text{res}}$) está contenido siempre en la



(x) Punto de resonancia es el punto en el cual la curva $U_0=U_0(c_1)$ toca al eje c_1 .

zona de influencia aún con la acotación no refinada susodicha.

Volveremos atrás ahora a las (19) de pág. 49 y trataremos de demostrar que c_5/c_3 es de cuadrado despreciable cuando consideremos hasta la quinta armónica. Consideraremos por lo tanto la segunda y la tercera ecuación de (19) suponiendo $c_7 = 0$.

Multiplicando la segunda de (19) por c_3 y restándole la tercera multiplicada por $\frac{c_1}{2} - c_5$ obtenemos

$$\frac{c_3^3}{4} \frac{\omega_0^2}{\omega^2} C_3 - C_3^2 K_3 - C_3 C_5 \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \frac{9}{20} c_1^2 - \frac{7}{24} C_3 c_1^3 \frac{\omega_0^2}{\omega^2} + \frac{C_5 c_1}{2} K_5 + \frac{7}{12} C_3 C_5 c_1^2 \frac{\omega_0^2}{\omega^2} - c_5^2 K_1 = 0$$

donde hemos llamado K_3 lo que antes era K o sea

$$K_3 = 3 - \frac{1}{3} \left(\frac{\omega_0^2}{\omega^2} \left(1 + \frac{c_1^2}{2} \right) \right) \quad \text{y en general} \quad K_n = n - \frac{1}{n} \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \left(1 + \frac{c_1^2}{2} \right)$$

Dividiendo por $c_1 c_3$ obtenemos

$$\frac{c_1^2}{4} \frac{\omega_0^2}{\omega^2} - \frac{C_3}{c_1} K_3 - \frac{C_5}{c_1} \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \frac{9}{20} c_1^2 - \frac{7}{24} c_1^2 \frac{\omega_0^2}{\omega^2} + \frac{C_5}{c_3} K_5 \frac{1}{2} + \frac{7}{12} \frac{C_5}{c_1} c_1^3 \frac{\omega_0^2}{\omega^2} = 0$$

Es justificable despreciar c_5/c_1 frente a $1/2$ ya que nuestra hipótesis que tratamos de confirmar es que c_5/c_3 es de cuadrado despreciable. $\frac{C_5}{c_1} = \frac{C_5}{C_3} \frac{C_3}{c_1}$ ya sería despreciable frente a la unidad.

Llamando $x = c_1^2/4$ para mayor comodidad obtenemos:

$$x \frac{\omega_0^2}{\omega^2} - \frac{C_3}{c_1} K_3 - \frac{C_5}{c_3} \frac{C_3}{c_1} \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \frac{9}{20} x - \frac{7}{24} x \frac{\omega_0^2}{\omega^2} + \frac{C_5}{c_3} \frac{K_5}{2} + \frac{7}{3} \frac{C_5}{c_3} \frac{C_3}{c_1} x \frac{\omega_0^2}{\omega^2} = 0$$

$$(28) \quad \frac{C_5}{c_3} = \frac{\frac{1}{6} x \frac{\omega_0^2}{\omega^2} + \frac{C_3}{c_1} K_3}{\frac{K_5}{2} + x \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \frac{8}{15} \frac{C_3}{c_1}} = \frac{1/6 x \omega_0^2/\omega^2}{\frac{K_5}{2} + x \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \frac{8}{15} \frac{C_3}{c_1}} + \frac{C_3/c_1 K_3}{\frac{K_5}{2} + x \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \frac{8}{15} \frac{C_3}{c_1}}$$

Estudiar (28) en total resulta un poco difícil, es más conveniente acotar separadamente los dos sumandos que allí figuran. Para ello continuaremos suponiendo c_3/c_1 de cuadrado despreciable, eso es justificable ya que hemos considerado c_5/c_3 de cuadrado despreciable; de confirmarse esta hipótesis de trabajo podríamos despreciar en la segunda ecuación de (19) el último término del primer miembro frente al primero por ser $c_5 = \frac{C_5}{C_3} \cdot \frac{C_3}{c_1} C_1$ despreciable frente a c_1 si consideramos a c_3/c_1 también de cuadrado despreciable; esta última hipótesis se confirmaría inmediatamente por volvernos a dar el sistema formado por las primeras dos ecuaciones con el susodicho desprecio, los resultados de Págs. 52 y 53.

Si llamamos σ_1 y σ_2 a los dos sumandos de (28) respectivamente tendremos

$$\sigma_2 < 2 \frac{c_3/c_1 \cdot K_3}{K_5} \quad (x)$$

Pero se puede demostrar fácilmente que $\frac{K_3}{K_5} < \frac{3}{5}$

$$(29) \quad \boxed{\sigma_2 < \frac{6}{5} \frac{c_3}{c_1}}$$

Por otro lado:

$$\sigma_1 = \frac{1/6}{\frac{K_5}{2x\omega_0^2/\omega^2} + \frac{8}{15} \frac{c_3}{c_1}} < \frac{2x \frac{\omega_0^2}{\omega^2}}{6K_5}$$

vamos a tratar de acotar $2x \omega_0^2/\omega^2$.

Al decir que exigimos que $K_3 = 3 - \frac{1}{3} \frac{\omega_0^2}{\omega^2} (1 + \frac{c_1^2}{2}) = 3 - \frac{1}{3} \frac{\omega_0^2}{\omega^2} (1 + 2x)$ sea mayor que un cierto número (por ej. 1 ó 2) implicamos decir que $\frac{\omega_0^2}{\omega^2} (1 + 2x) < k$ donde k es un número que depende de la cota inferior de K_3 por ej. si $K_3 \geq 2$, $k = 3$ si $K_3 \geq 1$, $k = 6$, luego $2 \frac{\omega_0^2}{\omega^2} x < k - \frac{\omega_0^2}{\omega^2} < k$

$$(30) \quad \boxed{\sigma_1 < \frac{k}{6K_5}}$$

Luego si imponemos $K_3 > 2$, $k = 3$ es

$$K_5 > 5 - \frac{k}{5} = 5 - \frac{3}{5} = \frac{22}{5} \quad \sigma_1 < \frac{5}{44} \approx 0,114$$

Si imponemos $K > 1$, $k = 6$; $K_5 > 5 - \frac{6}{5} = \frac{19}{5} \therefore \sigma_1 < \frac{5}{19} \approx \frac{1}{4}$

Como vemos las cotas de σ_1 y de σ_2 pueden ser consideradas de cuadrado despreciable, la cota de σ_2 por resultar pequeña (muy pequeña en el primer caso y relativamente pequeña en el otro) y la de σ_1 por haber supuesto c_3/c_1 de cuadrado despreciable, cosa que se verificaba como hemos dicho si de ello se desprendía que c_5/c_3 era de cuadrado despreciable.

Considerando los otros términos de los denominadores de σ_1 y σ_2 obtendríamos cotas más precisas; de todos modos por los resultados de pág. 56 podemos considerar comprobado que $\frac{c_5}{c_3} = \sigma_1 + \sigma_2$ es de cuadrado despreciable frente a la unidad.

(x) Por ser $c_3/c_1 > 0$, o mejor dicho por suponer $c_3/c_1 > 0$, hipótesis que se verifica si resulta c_5/c_3 de cuadrado despreciable, por ser entonces ciertos los resultados de págs. 52 y 53.

Entonces por lo dicho antes, si fuera lícito considerar solamente las primeras cinco armónicas tendríamos en

$$y = c_1 \cos \varphi + c_3 \cos 3\varphi + c_5 \cos 5\varphi$$

o considerando que hemos tomado $\sin \alpha = +1$ en

$$y = -c_1 \sin \omega t + c_3 \sin 3\omega t - c_5 \sin 5\omega t$$

una solución particular periódica de (1) donde

c_1 , c_3 y c_5 por (20) ó (22); (26) y (28).

Las hipótesis hechas han sido comprobadas en gran parte de la zona de influencia de la primera armónica (partes que dependen de la restricción de la zona de interés, restricción dada por la cota de K y definidas esencialmente por hacer que c_3/c_1 dado en (25) ó (26) sea de cuadrado despreciable frente a la unidad y que están discutidas en pág. 52). No obstante, no es cierto que para muy grandes valores de c_1 no se compruebe necesariamente la teoría ya que los estudios hechos nos han dado en general cotas superiores; dado el circuito y por lo tanto ω_0^2/ω^2 se podrá afinar el cálculo y obtener zonas de validez seguramente mayores a las antedichas. Eso es de esperar, especialmente por ser las cotas obtenidas en los peores puntos valores todavía pequeños (por ej. para $K=2$, $c_3/c_1 < 0,5 \therefore c_3^2/c_1^2 < 0,25 \therefore \text{error} < 25\%$) de tal modo que pequeños mejoras en los cálculos puedan rendirlos accesibles. De todos modos restringiendo la zona de interés se aumenta el ámbito de validez de tal modo por ejemplo, que para el punto de resonancia, las hipótesis se comprueban independientemente de donde esté este punto, aún para $c_1 \rightarrow \infty$.

Queda no obstante como inconveniente el haber tomado solamente las 5 primeras armónicas, trataremos de evitar ese inconveniente.

Consideraremos para el cálculo subsiguiente que consideramos las $n+2$ primeras armónicas ($n \geq 5$).

El sistema (19) de pág. 49 se puede escribir suscintamente de esta manera

$$(19') \left\{ \begin{array}{l} F_1(c_1, c_3, \frac{\omega_0^2}{\omega^2}, V_0) = 0 \\ F_3(c_1, c_3, c_5, \frac{\omega_0^2}{\omega^2}, V_0) = 0 \\ F_5(c_1, c_3, c_5, c_7, \frac{\omega_0^2}{\omega^2}, V_0) = 0 \\ \vdots \\ F_i(c_1, c_{i-2}, c_i, c_{i+2}, \frac{\omega_0^2}{\omega^2}, V_0) = 0 \\ \vdots \\ F_m(c_1, c_{n-2}, c_n, c_{n+2}, \frac{\omega_0^2}{\omega^2}, V_0) = 0 \end{array} \right.$$

Vamos ahora a suponer que c_{i+2}/c_i es de cuadrado despreciable frente a la unidad para todo i , trataremos de calcular los c_i y de comprobar la hipótesis hecha.

Empezaremos por tratar de calcular c_{n+2}/c_n en función de c_n/c_{n-2} c_1 y $\frac{\omega_0^2}{\omega^2}$ utilizando para ello $F_n = 0$ y $F_{n+2} = 0$. (19) nos muestra que

$$(31) \begin{cases} F_n = \frac{2m-3}{m-2} c_{m-2} \frac{c_1^2}{4} \frac{\omega_0^2}{\omega^2} - c_m k_m - c_{m+2} \frac{2m+3}{m+2} \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \frac{c_1^2}{4} - V_0 \frac{c_1}{2} (c_{m-2} - c_{m+2}) = 0 \\ F_{n+2} = \frac{2m+1}{m} c_m \frac{c_1^2}{4} \frac{\omega_0^2}{\omega^2} - c_{m+2} k_{m+2} - \frac{V_0}{L_0 \omega} \frac{c_1 c_m}{2} = 0 \end{cases}$$

$$F_n - F_{m+2} \frac{c_{m-2} c_{m+2}}{c_m} = \frac{2m-3}{m-2} c_{m-2} \frac{c_1^2}{4} \frac{\omega_0^2}{\omega^2} - c_m k_m - c_{m+2} \frac{2m+3}{m+2} \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \frac{c_1^2}{4} + c_{m+2} k_{m+2} + \frac{V_0}{L_0 \omega} \frac{c_1 c_m}{2} = 0$$

$$\frac{\omega_0^2}{\omega^2} \frac{c_1^2}{4} - \frac{2m+1}{m} c_{m-2} \frac{c_1^2}{4} \frac{\omega_0^2}{\omega^2} + \frac{2m+1}{m} c_{m+2} \frac{c_1^2}{4} \frac{\omega_0^2}{\omega^2} + \frac{c_{m+2} c_{m-2}}{c_m} k_{m+2} - \frac{c_{m+2} k_m}{c_m} = 0$$

dividiendo por c_{n-2} y llamando como siempre $x = c_1^2/4$

$$x \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \left(\frac{2m-3}{m-2} - \frac{2m+1}{m} \right) - \frac{c_m}{c_{m-2}} k_m + \frac{c_{m+2}}{c_{m-2}} x \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \left(\frac{2m+1}{m} - \frac{2m+3}{m+2} \right) + \frac{c_{m+2} k_{m+2}}{c_m} = 0$$

Según nuestras hipótesis $\frac{c_{m+2}}{c_{m-2}} = \frac{c_{m+2}}{c_m} \frac{c_m}{c_{m-2}}$ es despreciable frente a 1, considerando además que

$$\frac{2m-3}{m-2} - \frac{2m+1}{m} = \frac{2}{m(m-2)}; \quad \frac{2m+1}{m} - \frac{2m+3}{m+2} = \frac{2(m+1)}{m(m+2)}$$

obtenemos:

$$x \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \frac{2}{m(m-2)} - \frac{c_m}{c_{m-2}} k_m + \frac{c_{m+2}}{c_m} \left[k_{m+2} + \frac{c_m}{c_{m-2}} x \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \frac{2(m+1)}{m(m+2)} \right] = 0$$

$$(32) \quad \frac{c_{m+2}}{c_m} = \frac{\frac{c_m}{c_{m-2}} k_m - x \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \frac{2}{m(m-2)}}{k_{m+2} + \frac{c_m}{c_{m-2}} x \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \frac{2(m+1)}{m(m+2)}}$$

Para verificar que efectivamente c_{n+2}/c_n es de cuadrado despreciable, empecemos por acotar el denominador de (32) independientemente del signo de c_n/c_{n-2} .

Hemos dicho en pág. 56 que $2x \frac{\omega_0^2}{\omega^2} < k$; por otro lado si c_n/c_{n-2} es de cuadrado despreciable frente a la unidad, será por lo menos

$$\left| \frac{c_m}{c_{m-2}} \right| < 1$$

$$\left| k_{m+2} + \frac{c_m}{c_{m-2}} x \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \frac{2(m+1)}{m(m+2)} \right| \geq k_{m+2} - \left| \frac{c_m}{c_{m-2}} \right| x \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \frac{2(m+1)}{m(m+2)}$$

$$\geq k_{m+2} - \frac{k(m+1)}{m(m+2)} = m+2 - \frac{1}{m+2} \frac{\omega_0^2}{\omega^2} (1+2x) - \frac{k(m+1)}{m(m+2)} >$$

$$> m+2 - \frac{k}{m+2} \left(1 + \frac{m+1}{m} \right) > m$$

ya que en el peor de los casos o sea $n=5$ y aún tomando $K > 1 \therefore k=3$
 $\frac{n+1}{n} = 1,2 \therefore \frac{k}{n+2} (1 + \frac{(n+1)}{n}) = \frac{k}{7} \cdot 2,2 = \frac{6}{7} \cdot 2,2 = \frac{13,2}{7} < 2$

Descomponiendo a c_{n+2}/c_n en dos sumandos, se ve que el primero vale aproximadamente c_n/c_{n-2} (en general se puede decir $\sigma_1 < \frac{m-1}{m} \frac{c_n}{c_{n-2}}$ y el segundo $|\sigma_2| = -\sigma_2 < \frac{2 \times \frac{W_0^2}{W_1^2} \frac{1}{m(m-2)}}{m} < \frac{k}{m^2(m-2)} < \frac{k}{75}$

aun tomando $k = 6: -\sigma_2 < 1/12$ o sea $|\sigma_2|$ es sumamente pequeño. Podemos entonces tomar c_{n+2}/c_n de cuadrado despreciable frente a la unidad si admitimos que también c_n/c_{n-2} cumple esa hipótesis.

Tendremos ahora derecho en F_n dada por (31) o (19) de desprejiciar $-c_{n+2} \frac{2n+3}{n+2} \frac{W_0^2}{W_1^2}$ x frente a $\frac{2n-3}{n-2} c_{n-2} \times \frac{W_0^2}{W_2^2}$ o sea aproximadamente desprejiciar c_{n+2} frente a c_{n-2} o sea $\frac{c_{n+2}}{c_{n-2}} = \frac{c_{n+2}}{c_n} \frac{c_n}{c_{n-2}}$ frente a 1. Este desprejicio será totalmente justificado cuando demos que c_n/c_{n-2} es de cuadrado despreciable.

Para ello: supongamos que lo sea, por lo tanto eliminemos el término susodicho en F_n ; consideremos F_{n-2} y F_n y aplicando un procedimiento exactamente análogo al anterior demostraríamos que c_n/c_{n-2} es de cuadrado despreciable si lo es c_{n-2}/c_{n-4} ; volvamos a suponer esta última hipótesis y por lo tanto eliminemos el término en c_n de F_{n-2} y estudiemos F_{n-4} y F_{n-2} y así continuemos hasta demostrar que c_7/c_5 es de cuadrado despreciable si lo es c_5/c_3 ; volvamos a suponerlo, eliminemos el término en c_7 de F_5 y el sistema que nos queda es idéntico al estudiado en págs. 55 y seq., donde demostramos efectivamente que en las zonas de interés de la primera armónica (con ciertas restricciones discutidas en pág. 57) c_5/c_3 y c_3/c_1 son de cuadrado despreciable. Pero si c_5/c_3 lo es, c_7/c_5 lo es y el cálculo de c_7/c_5 está bien hecho, se razona así sucesivamente y demostramos entonces con el rigor característico del cálculo aproximado que (32) es válida y que se cumplen las hipótesis hechas sobre la pequeñez de c_{2i+1}/c_i .

Obtenemos así en

$$y = \sum_{\nu=1}^m (-1)^\nu c_\nu \sin \nu \omega t$$

donde los c_ν están dados por (20) o (22) para $\nu = 1$, (26) para $\nu = 3$ (necesaria para calcular (1)); (28) para $\nu = 5$ y (32) para $5 < \nu < n$ una solución particular periódica de (1), (objeto esencial de nuestro problema) para las zonas de interés de la primera armónica; físicamente para las zonas en las cuales la primera armónica es preponde-

rante, llave de entrada para nuestro método aproximado de cálculo.

Podemos finalmente hacer aumentar n cuanto queramos, evitando así la arbitrariedad de considerar unas pocas armónicas. El hacer $n \rightarrow \infty$ no crearía dificultades de convergencia matemática; prescindiendo de ellas nuestros resultados admiten tal extensión.

Notamos, para terminar, una marcada diferencia con los resultados del § 6 donde encarábamos el mismo problema desde un mismo punto de vista físico, pero con un cálculo matemático un poco distinto, que dada la forma de las ecuaciones era utilizable en este caso. Los resultados fueron distintos y lo que es más, en este estudio se pudo prescindir de la restricción $((1 - f(c_1))^2 \ll 1$ del § 6 que nos restringía a zonas cercanas al origen, vale decir que aquí los resultados son válidos para prácticamente todos los valores de los parámetros. Desde un punto de vista físico, para hacer $H \rightarrow \infty$ habría que considerar el término en H en la fórmula de Dreifuss, pero la diferencia de los comportamientos usando la misma fórmula empírica en los dos cálculos son interesantes aun desde un punto de vista matemático.

Ya habríamos anticipado en el mismo § 6 que la segunda suposición allí hecha carecía de sentido físico y era impuesta por necesidades de cálculo, vale decir tuvimos que utilizarla para poder sacar alguna conclusión interpretable de los sistemas de ecuaciones que nos debían resolver el problema.

Así que a primera vista tendríamos: dos soluciones formalmente distintas, la una válida para todo punto de la zona de influencia definida por (24'); la otra válida para los puntos de la zona de influencia definida por (23) § 6 con tal que dichos puntos no distaran mucho del origen.

Dos cosas saltan a la vista; la primera es que dichas soluciones deberían ser iguales (dentro del error del cálculo aproximado) por lo menos en la zona de validez de ambos estudios; y la segunda que posiblemente habría algún método para evitar las dificultades de cálculo del § 6 antes mencionadas y extender el estudio restringido a puntos cercanos al origen, a toda la zona de influencia.

Justamente sobre estas relaciones entre los dos estudios trataremos el próximo párrafo.

§10. Breve resumen de los resultados obtenidos en los 6 y 9, correlación entre ellos y resultados obtenidos de estas relaciones.

En este párrafo vamos a tratar de establecer un paralelismo entre los estudios de los §§6 y 9^(x), y obtener de esta manera nuevas conclusiones que de aquel paralelismo se deduzcan.

Ante todo, resumiremos muy brevemente los resultados obtenidos en dichos párrafos.

a) Resumen resultados del § 6^(o)

Obtuvimos resultados, vale decir los valores de c_i y s_i (en función de los parámetros) de $y = \sum_{i=1}^N c_i \cos i\varphi + s_i \sin i\varphi(1)$. Para hallarlos tuvimos que hacer dos suposiciones que nos limitan el ámbito de variación de los parámetros para los cuales damos resultados^(xx).

1ª suposición) $A_i: -\frac{\omega_0^2}{\omega^2} > 1$ para $i > 1$ (2)

La desigualdad (2) nos define lo que hemos llamado zona de influencia de la armónica fundamental.

2ª suposición) $\left(\frac{p-q}{p+q}\right)^2 \ll 1$ (3)

Esta suposición fué necesaria para poder interpretar ciertos determinantes^(xxx). Para ese ámbito nos referiremos en adelante. Los resultados fueron obtenidos para funciones $\psi(y)$ generales a las cuales solamente hemos pedido la paridad. Entre los resultados interesantes podemos citar:

(4) $s_1 = c_2 \nu = 0$

(x) O sea ambos con $\delta = 0$.

(xx) Para el significado de $A_i, p, q, etc.$ referirse a (9) y (22) de §6

(xxx) En general puede decirse que (3) limita a valores de c_1 cercanos al origen.

(o) En este resumen, c_ν y s_ν serán los coeficientes de Fourier del desarrollo de y/y_0 , de manera que serán iguales a los c_ν y s_ν del § 6 divididos por y_0 . Con esto unificamos la nomenclatura con la del § 9 y se obtendrá en ventaja la adimensionalidad de las nuevas c_ν y s_ν .

quedando luego

$$(5) \quad \frac{y}{y_0} = \sum_{2\nu+1}^N c_{2\nu+1} \cos(2\nu+1)\varphi$$

se obtienen los valores de $c_{2\nu+1}$ en función de los parámetros, estando dado c_1 por ejemplo por la ecuación no lineal en c_1 (33), § 6 que para mayor comodidad escribimos si $V_0 = v_0/L_0\omega^2$

$$(6) \quad c_1 = \frac{V_0}{|Q_1(\frac{\omega_0^2}{\omega^2}, c_1) - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}|}$$

donde

$$(7) \quad Q_1 = q - \left\{ \frac{\frac{pq}{3} \left(\frac{p-q}{p+q} \right)^2}{A_{33} - \left(\frac{1}{3} \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \right)} \right\}$$

Los otros coeficientes de Fourier están dados por (25) y (26), § 6 en función de c_1 y $\frac{\omega_0^2}{\omega^2}$, vale decir en función de V_0 y $\frac{\omega_0^2}{\omega^2}$ mediante el uso de la (6).

Resulta cumplirse

$$(8) \quad \left(\frac{c_{2\nu+1}}{c_1} \right)^2 \ll 1$$

Para el caso particular de la función de Dreifuss, la (7) se convierte en la

$$(7') \quad Q_1\left(\frac{\omega_0^2}{\omega^2}, c_1\right) = f - \left\{ \frac{f^2(1-f)^2}{3 - 3(1-f)^3 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \frac{2-f}{3f}} \right\}$$

donde como siempre

$$(9) \quad f(c_1) = \frac{2}{c_1^2} \left(\sqrt{1+c_1^2} - 1 \right)$$

La condición (3) se convierte en la (3) $(1-f)^2 \ll 1$ que como se ve fácilmente por el carácter de f nos limita a pequeños valores de c_1 (p.ej. $c_1 \ll 1$). Esta limitación es sumamente molesta y quita mucho valor al resultado obtenido; matemáticamente se traduce en una reducida no linealidad del problema, cosa que queremos de alguna manera evitar.

Vamos para ello a ver donde fué necesaria la restricción (3). Si observamos el desarrollo del § 6, vemos que la utilización de (3) de este § nos permite llegar a la conclusión que la influencia de las armónicas superiores a la tercera sobre la primera y la tercera son despreciables. Ello equivale a decir que pese ser

$$y = \sum_1^N c_\nu \cos \nu \varphi$$

para el cálculo de c_1 y c_3 es suficiente ensayar $\mathcal{Y} = c_1 \cos \varphi + c_3 \cos 3\varphi$ y seguir exactamente el mismo método considerando las ecuaciones en $\sin \varphi$ y $\sin 3\varphi$ y no considerando las otras. Vendría a equivaler a un procedimiento análogo al de Zenneck y Schunck pero con dos armónicas en vez de una.

Mirando la fórmula (7) podríamos decir así que vendría a ser la contribución propia de la armónica fundamental, cosa que ya sabíamos por ser $Q_1 = q$ el resultado de Zenneck y Schunck que era obtenido ensayando $\mathcal{Y} = c_1 \cos \varphi$ solamente; y que el término encerrado entre llaves vendría a ser la influencia de la tercera armónica sobre la primera, que resulta efectivamente pequeña para la zona de influencia de la armónica fundamental definida por (2). Las influencias de las demás armónicas (de la 5ª en adelante) sobre la primera vendrían a ser despreciables gracias a la restricción $\left(\frac{p-q}{p+q}\right)^2 \ll 1$

Si de algún otro lado supiéramos u obtuviéramos que efectivamente las influencias de las armónicas superiores a la quinta sobre la fundamental son despreciables, obtendríamos la (7) sin necesidad de utilizar la restricción (3)^(x).

Recalquemos que lo dicho anteriormente no implica el conocimiento de que la solución buscada se pueda escribir $\mathcal{Y} = c_1 \cos \varphi + c_3 \cos 3\varphi$ sino necesitaríamos que alguien nos dijera: "Pese a que la solución sea $\mathcal{Y}/\mathcal{Y}_0 = \sum c_n \cos n\varphi$, para calcular c_1 reemplacen en la ecuación diferencial $\mathcal{Y}/\mathcal{Y}_0 = c_1 \cos \varphi + c_3 \cos 3\varphi$ sigan el mismo métodos como si las demás armónicas no existieran; el valor de c_1 que de esa manera obtengan será el mismo que si hubieran ensayado todas las armónicas".

Veremos luego que para el caso de Dreifuss ese alguien será el parágrafo 9.

b) Resumen de los resultados del § 9.

En el § 9 los resultados fueron obtenidos solamente para la función de Dreifuss, así que en cierto sentido tienen menor generalidad que los del § 6.

Se han obtenido resultados (vale decir $c_i = c_i(V_0, \frac{\omega \sigma}{\omega^2})$ y $s_i = s_i(V_0, \frac{\omega \sigma^2}{\omega^2})$) siempre y cuando los valores de los parámetros sean ta-

(x) Es interesante recordar que en el § 6 solamente era necesaria la desigualdad (3) para la evaluación de los determinantes que allí figuraban, no interviniendo por ejemplo en la valoración de c_n/c_1

les que se cumpla

$$(11) \quad K_3 = 3 - \frac{1}{3} \frac{\omega_0^2}{\omega^2} (1+x) > 1$$

donde como siempre

$$(12) \quad x = c_1^2/4$$

Esa desigualdad nos define lo que hemos llamado en el § 9 zona de influencia de la armónica fundamental.

Entre los resultados interesantes podremos citar:

$$(13) \quad s_1 = c_{2\nu} = 0$$

quedando luego

$$(14) \quad \psi = \sum_{\nu}^N C_{2\nu+1} \cos(2\nu+1) \psi$$

El resultado de $c_1 = c_1(V_0, \omega_0^2/\omega^2)$ se puede escribir fácilmente combinando (22) y (26) del § 9 como

$$(15) \quad c_1 = \frac{V_0}{|Q_2(\frac{\omega_0^2}{\omega^2}, c_1) - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}|}$$

donde

$$(16) \quad Q_2\left(\frac{\omega_0^2}{\omega^2}, c_1\right) = \frac{1}{1+x - \frac{2x^2 \left(1 - \frac{1}{6} \frac{\omega_0^2}{\omega^2} (1+x)\right)}{\left(3(1+x) - \frac{\omega_0^2}{\omega^2} (1+3x+x^2)\right)}} = \frac{3(1+x) - \frac{\omega_0^2}{3\omega^2} (1+3x+x^2)}{3+6x+x^2 - \frac{\omega_0^2}{3\omega^2} (1+4x+3x^2)}$$

Los resultados de $c_{2\nu+1} = c_{2\nu+1}(V_0, \omega_0^2/\omega^2)$ están dados (aunque no explícitamente) por (26) para $\nu = 1$, (28) para $\nu = 2$ y (32) para $\nu \geq 2$ todas del § 9.

En la zona restringida por la desigualdad (11) se comprueba

$$(17) \quad \left(\frac{c_{2\nu+1}}{c_{2\nu-1}}\right)^2 \ll 1$$

vale decir, la zona de influencia de la armónica fundamental (zona en la cual obtuvimos resultados) es zona de resonancia de la misma $\left(\frac{c_\nu}{c_1}\right)^2 \ll 1$.

Se comprueba que el punto de resonancia, definido como el valor de $c_1=0$ para el cual $U_0(c_1) = 0$, siempre está contenido en la zona de resonancia, por más alejado del origen esté aquél.

En este estudio resulta que la influencia de la armónica $c_{2\nu+3}$ y superiores sobre la $c_{2\nu+1}$ es despreciable para $\nu \geq 1$, y que las influencias de la quinta armónica y superiores sobre la fundamental son despreciables. Vale decir, resulta que el resultado obtenido en-

sayando $y = \sum_1^N c_n \cos n\psi + s_n \sin n\psi$ da el mismo valor de c_1 que el obtenido ensayando $y = c_1 \cos \psi + c_3 \cos 3\psi$ y siguiendo un método análogo al del § 9 pero con $N=3$.

Si hiciéramos el ensayo $y = c_1 \cos \psi$ y siguiéramos el mismo procedimiento que siguieron Zenneck y Schunck, obtendríamos la (15) con

$$(20) \quad Q_2 = \frac{1}{1+x}$$

término que podemos considerar como la contribución propia de la armónica fundamental, equivalente al término $Q_1=f$ de Zenneck-Schunck.

De esta manera, el término encerrado entre llaves en (16) es el causado por la influencia de la tercera armónica; con más precisión la influencia de la tercera armónica sobre la fundamental podría ser considerada como

$$(21) \quad I_1^3(c_1, \frac{\omega_0^2}{\omega^2}) = Q_2(c_1, \frac{\omega_0^2}{\omega^2}) - \frac{1}{1+x}$$

donde Q_2 está dado por (16).

En estudios posteriores tendremos oportunidad de evaluar I_1^3 y hacer consideraciones entre los valores de I_1^3 y de $\frac{1}{1+x}$.

c) Correlación de ambos estudios y principales consecuencias obtenidas

Veremos que muchas son las correlaciones de los anteriores estudios, y lo que es más interesante, es que dichas correlaciones usadas convenientemente hasta servirán para extendernos y ampliarnos anteriores resultados. Veremos así que cada estudio por separado difícilmente nos podrá dar resultados relativamente generales y tan bien interpretables como una combinación adecuada de los resultados de ambos.

Hasta ahora tendríamos: Dos estudios distintos de un mismo problema, que dan para c_1 dos soluciones formalmente distintas (7) y (16) y válidas en zonas no coincidentes (Suposiciones (2) y (3) en el primer caso y (11) en el segundo). Como es lógico, y como constataremos luego, $Q_1(c_1, \omega_0^2/\omega^2)$ y $Q_2(c_1, \omega_0^2/\omega^2)$ resultan iguales dentro del error del cálculo aproximado cuando c_1 y $\frac{\omega_0^2}{\omega^2}$ cumplen simultáneamente las mencionadas restricciones.

Pero la segunda restricción del primer estudio es sumamente fuerte y parece además carecer de significado físico, mucho adelantaríamos si probáramos la validez de (6) y (7) sin ella. Veremos que en el

caso de Dreifuss ello sería posible mediante el uso de algunos resultados del segundo estudio.

En la parte b) de este párrafo demostramos que en el segundo estudio, las influencias de las armónicas superiores a la tercera sobre la fundamental, eran despreciables. ¿ Es éste un resultado independiente del método con el que ha sido obtenido ? Parecería lógico creer que así fuera: si sé que reemplazando $J = c_1 \cos \psi + c_3 \cos 3\psi$ en

$$(22) \quad \ddot{J} + \int \frac{J}{J_0} + \frac{1}{\psi} \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \int \frac{J}{J_0} d\tau = \frac{V_0}{\psi} \cos \tau$$

y operando como si las demás armónicas de J y de todos los desarrollos de Fourier que aparezcan no existieran, obtenemos un buen resultado de c_1 , parecería que haciendo exactamente lo mismo en la misma ecuación diferencial previamente multiplicada por ψ , obtendríamos también un buen resultado para c_1 , que lógicamente tendría que coincidir con el anterior.

Si esto fuera cierto, basándonos en los razonamientos que hemos hecho en a), obtendríamos que (6) y (7) darían la solución para c_1 , con la única restricción de hallarnos en puntos de la zona de influencia de la armónica fundamental definida por (2).

Lógicamente se debería cumplir

$$(23) \quad Q_1\left(c_1, \frac{\omega_0^2}{\omega^2}\right) \cong Q_2\left(c_1, \frac{\omega_0^2}{\omega^2}\right)$$

siempre y cuando c_1 y ω_0^2/ω^2 cumplan (2) y (11).

Probemos esto, obteniendo algunos valores numéricos de esas funciones de dos variables.

Tabla 1

$$\frac{\omega_0^2}{\omega^2} = 0,81 \quad Q_1(0,81, c_1) = f - \frac{f^2(1-f)^2}{3 - 3(1-f)^3} = 0,27 \frac{2-f}{f}$$

$$Q_2(0,81, c_1) = \frac{2,73 + 2,19 x - 0,27 x^2}{2,73 + 2,19 x + 0,19 x^2}$$

c_1	x	f	Q_1	Q_2	$1/1+x$	$3A_{33} - \frac{1}{3} \frac{\omega_0^2}{\omega^2}$	K_3
0	0	1	1	1	1	>1	>2
0,2	0,010	1,000	1,000	0,999	0,990	>1	>2
0,5	0,062	0,944	0,943	0,939	0,940	>1	>2
0,8	0,160	0,876	0,872	0,872	0,860	>1	>2
1,0	0,250	0,830	0,822	0,822	0,800	>1	>2
1,2	0,360	0,778	0,770	0,770	0,753	>1	>2
1,5	0,563	0,714	0,698	0,696	0,640	>1	>2
2	1	0,618	0,592	0,593	0,500	1,73	2,46
3	2,25	0,480	0,444	0,434	0,308	0,543	2,12
4	4	0,390	0,343	0,304	0,200	0,292	1,65

$$1,0 < c_{1res} < 1,2$$

Tabla 2

$$\frac{\omega_0^2}{\omega^2} = 0,5$$

$$Q_1(0,5^2, c_1) = f - \frac{f^2 (1-f)^2}{3-3(1-f)^3 - \frac{2-f}{6f}}$$

$$Q_2(0,5, c_1) = \frac{17 + 15x - x^2}{17 + 15x + 3x^2}$$

c_1	x	f	Q_1	Q_2	$1/1+x$	$3A_{33} - \frac{1}{3} \frac{\omega_0^2}{\omega^2}$	K_3
0	0	1	1	1	1	>1	>2
1	0,250	0,830	0,822	0,822	0,800	>1	>2
2	1	0,618	0,595	0,596	0,500	1,833	2,66
2,5	1,56	0,541	0,516	0,512	0,390	0,840	2,57
3	2,25	0,480	0,458	0,427	0,308	0,606	2,45
4	4	0,390	0,356	0,316	0,200	0,395	2,17

$$2,5 < c_{1res} < 3$$

Tabla 3

$$\frac{\omega_0^2}{\omega^2} = 0,3$$

$$Q_1 = f - \frac{f^2(1-f)^2}{3-3(1-f)^3 - 0,1 \frac{2-f}{f}}$$

$$Q_2 = \frac{29 + 27x - x^2}{29 + 56x + 7x^2}$$

c_1	x	f	Q_1	Q_2	$1/1+x$	$3A_{33} - \frac{1}{3} \frac{\omega_0^2}{\omega^2}$	K_3
0	0	1	1	1	1	1	2
1	0,250	0,830	0,823	0,823	0,800	1	2
2	1	0,618	0,596	0,597	0,500	1,9	2,30
3	2,250	0,480	0,452	0,445	0,308	0,713	2,675
4	4	0,390	0,380	0,352	0,200	0,462	2,500
5	6,250	0,328	0,297	0,244	0,138	0,308	2,275

$$4 < c_{1res} < 5$$

Muchas son las conclusiones que se pueden desprender de estas tablas y de otros estudios análogos no tabulados^(x). Por lo pronto, se cumple con precisión sorprendente lo que esperábamos, vale decir

$$Q_1(c_1, \frac{\omega_0^2}{\omega^2}) = Q_2(c_1, \frac{\omega_0^2}{\omega^2})$$

cuando c_1 y $\frac{\omega_0^2}{\omega^2}$ cumplan (2) y (11).

En las tablas vemos que el error relativo de decir $Q_1 = Q_2$ no sobrepasa el 1/2 %, cosa realmente sorprendente por tener mayor error el cálculo aproximado utilizado.

En las últimas dos columnas de cada tabla, tabulamos los valores de $K_3 = 3 - \frac{1}{3} \frac{\omega_0^2}{\omega^2} (1+x)$ y de $3A_{33} - \frac{1}{3} \frac{\omega_0^2}{\omega^2}$ que nos representan cuando ambos son mayores que 1 las zonas en las cuales son válidos ambos estudios.

(x) No hemos puesto, por ejemplo, más tablas para valores de ω_0^2/ω^2 cercanos a 1, por ser los resultados que se desprenden análogos a los provenientes de la tabla 1. Veremos que la elección de las tres tablas puestas se debe al hecho que los puntos de resonancia respectivos se hallan en la zona de validez del primer estudio en la tabla 1, en el límite de dicha zona en la tabla 2, y fuera de esa zona en la 3. Se podría haber puesto más casos, pero hemos preferido poner solamente aquellos tres y explicitar las conclusiones que pueden desprenderse de todos ellos.

Como muestran las tablas, la restricción $3A_{33} - \frac{1}{3} \frac{\omega_0^2}{\omega^2} > 1$ es mucho más fuerte que la $K_3 > 1$, vale decir, que el ámbito de valores de los parámetros definido por la segunda desigualdad es más amplio que el de la primera. La diferencia es notable y puede verse de esta manera: sabemos que el punto de resonancia siempre cumple $K_3 > 1$ y eso se verifica en las tres tablas. Respecto a la restricción (2), vemos que es cumplida para el punto de resonancia en la primera tabla dejando de serlo en la segunda y tercera, por una pequeña diferencia y por una diferencia notable respectivamente.

Esto significa a las claras que la zona de influencia de la armónica fundamental definida por la (2) en la cual es válido el resultado (6) y (7') deja de contener el punto de resonancia cuando éste se aleja demasiado del origen (p.ej. para $c_{res} > 2,5$).

Trataremos de probar directamente lo antedicho y hallar de paso otros resultados interesantes.

Para ello volvamos a escribir el sistema (18), § 6 para el caso $m=3$ ($j=1$), y para la función de Dreifuss. Tendremos

$$(24) \begin{cases} \left(f - \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \right) + \frac{f(f-1)}{\sqrt{1+c_1^2}} \frac{c_3}{c_1} = \frac{V_0}{c_1} \\ f(f-1) + \left(3A_{33} - \frac{1}{3} \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \right) \frac{c_3}{c_1} = 0 \end{cases}$$

Ya que

$$(25) \quad A_{13} = \frac{f(f-1)}{\sqrt{1+c_1^2}}; \quad B_{13} = f(f-1)$$

y siendo

$$(26) \quad A_{33} = \frac{1}{\sqrt{1+c_1^2}} (1 - (A-f)^3)$$

sistema que como hemos dicho al comienzo de este punto c), podría considerarse suficiente para calcular $c_1 = c_1(V_0, \omega_0^2/\omega^2)$ y $c_3 = c_3(c_1, \omega_0^2/\omega^2) = c_3(V_0, \omega_0^2/\omega^2)$, si son válidos los razonamientos de pág. 66 que juzgaremos a posteriori.

Si llamamos punto de resonancia (c_{1res}) el valor de $c_1 = 0$ para el cual $V_0 = 0$, tendremos por la primera ecuación de (24) que c_{1res} tendría que cumplir:

$$(27) \quad f_{res} + \frac{f_{res}(f_{res}-1)}{\sqrt{1+c_{1res}^2}} \frac{c_3}{c_{1res}} = \frac{\omega_0^2}{\omega^2}$$

El resultado de $c_1 = c_1(V_0, \omega_0^2/\omega^2)$ es justamente el (6) y (7') de este párrafo.

Para $c_3 = c_3(c_1, \omega_0^2/\omega^2)$ la segunda ecuación de (24) nos da

$$(28) \quad \frac{c_3}{c_1} = \frac{f(1-f)}{3A_{33} - \frac{1}{3} \frac{\omega_0^2}{\omega^2}}$$

Si consideramos que $f(1-f)$ puede ser considerada siempre de cuadrado despreciable, vemos que en la zona de influencia definida por (2)^(x) resultará $(\frac{c_3}{c_1})^2 \ll 1$.

Por otra parte, si c_3/c_1 para un determinado valor de c_1 y ω_0^2/ω^2 no resultara de cuadrado despreciable, tendríamos que ese valor de c_1 no estaría en la zona de influencia susodicha.

Estudiaremos ahora c_3/c_1 en el punto de resonancia. Reemplazando (27) en (28) tendremos (suprimiendo subíndice res. que tendría que haber en toda esta página):

$$\frac{c_3}{c_1} = \frac{f(1-f)}{3A_{33} - \frac{1}{3}f - \frac{f(f-1)}{3\sqrt{1+c_1^2}} \frac{c_3}{c_1}}$$

Desarrollando en serie de Taylor respecto a c_3/c_1 y no considerando los términos en $(c_3/c_1)^2$ y potencias superiores obtenemos:

$$\frac{c_3}{c_1} = \frac{f(1-f)}{3A_{33} - \frac{1}{3}f} - \frac{f^2(1-f)^2 \frac{1}{\sqrt{1+c_1^2}} \frac{c_3}{c_1}}{(3A_{33} - \frac{1}{3}f)^2}$$

$$\frac{c_3}{c_1} \left[1 + \frac{f^2(1-f)^2}{3\sqrt{1+c_1^2}(3A_{33} - \frac{1}{3}f)^2} \right] = \frac{f(1-f)}{3A_{33} - \frac{1}{3}f} \quad \therefore$$

$$(29) \quad \frac{c_3}{c_1, \text{res}} = \frac{f(1-f)(3A_{33} - \frac{1}{3}f)}{(3A_{33} - \frac{1}{3}f)^2 + \frac{f^2(1-f)^2}{3\sqrt{1+c_1^2}}} = \frac{f(1-f) [2,333 + \frac{f}{3} - 3(1-f)^3]}{[2,333 + \frac{f}{3} - 3(1-f)^3]^2 + \frac{f^2(1-f)^2}{3}}$$

Como se puede ver c_3/c_1 en el punto de resonancia puede considerarse de cuadrado despreciable cuando dicho punto no esté muy alejado del origen (p.ej. $c_{1res} < 2,5$); para valores mayores de c_{1res} , c_3/c_{1res} crece hasta volverse mayor que 1.

(x) Cabe decir que en el caso de la función de Dreifuss, si se cumple $3A_{33} - \frac{1}{3} \frac{\omega_0^2}{\omega^2} > 1$ se cumplirá $iA_{ii} - \frac{1}{i} \frac{\omega_0^2}{\omega^2} > 1$ para todo $i > 3$ luego se puede definir la zona de influencia como la que cumple $3A_{33} - \frac{1}{3} \frac{\omega_0^2}{\omega^2} > 1$.

Damos algunos valores en la siguiente tabla.

Tabla 4

es	1-f	f(1-f)	f ² (1-f) ²	3(1-f) ³	()	$\sqrt{1+c_1^2}$	$\frac{[]^2}{\sqrt{1+c_1^2}}$	Denom. de (29)	Num. (29)	$\frac{Q_3}{c_1 \omega}$	$c_1 \omega$
5	0,5	0,25	0,0625	0,375	2,125	3	1,50	1,52	0,53	0,35	2,83
2	0,8	0,16	0,0256	1,536	0,864	9	0,0828	9,13.10 ⁻²	0,138	1,51	8,94
1	0,9	0,09	0,0081	2,187	0,180	19	1,71.10 ⁻³	4,41.10 ⁻³	1,62	3,67	19

Las últimas dos columnas de la tabla nos confirman lo antedicho. Hacemos notar que $\left(\frac{c_3}{c_1}\right)^2 \ll 1$, con este método, cuando por el estudio del §9 sabemos que efectivamente $\left(\frac{c_3}{c_1}\right)^2 \ll 1$ no representa una contradicción, ya que la pequeñez de c_3/c_1 fué una hipótesis de partida que de no confirmarse para ciertos valores de los parámetros, como en este caso, lo único que aduce es la no validez del primer estudio para esos valores de los parámetros.

Tendríamos como resumen: dos estudios distintos de un mismo problema, ambos dan el mismo resultado pero la zona en que dicho resultado vale, no es la misma en ambos estudios.

No obstante, ambas zonas son suficientemente amplias y aún la más restringida de ambas contiene problemas de fuerte no linealidad.

Observemos ahora las tablas 1,2 y 3; de ellas y de otros estudios análogos se puede desprender una conclusión bastante extraña: mientras $f(c_1)$ es siempre una buena aproximación de $Q_1(c_1, \omega_0^2/\omega)$, no pasa lo mismo entre $\frac{1}{1+x}$ y $Q_2(c_1, \omega_0^2/\omega)$.

Esto significa que mientras la influencia de la tercera armónica sobre la primera es muy pequeña, en el primer estudio, es apreciable en el segundo, pese a que los resultados totales (Q_1 y Q_2) sean los mismos. Esto significa que los resultados son iguales pero las "partes de los resultados" debidos a la armónica fundamental y a la tercera son distintas en ambos estudios.

Esto en el fondo puede muy bien ser físicamente admisible, espe-

(x) Nos referimos siempre a las zonas de influencia.

cialmente si recordamos que debido a la no linealidad hay que prescindir de algunos razonamientos intuitivos y en general bastante arraigados.

Como Q_1 representa el resultado de la ya discutida zona dada por $3A_{33} - \frac{1}{3} \frac{U_0^2}{\omega^2} > 1$ tendremos: la aproximación de Zenneck-Schunck

$$c_1 = \frac{U_0}{|f - \omega_0^2/\omega^2|} \quad (x)$$

nos representa una buena aproximación del resultado en una zona que contiene al punto de resonancia, con tal que éste no esté muy alejado del origen (p.ej. $c_{1res} < 2,5$ lo que ya representa una buena no linealidad).

Tenemos así después de tantas vueltas que la hipótesis de Zenneck y Schunck enunciada como: "Cerca del punto de resonancia se podrá considerar $y/y_0 = c_1 \cos \psi$ " es prácticamente cierta, ya que pese a que existan las otras armónicas de Fourier, sus coeficientes son pequeños frente a c_1 , y el valor de c_1 coincide con el calculado mediante la hipótesis de Zenneck-Schunck (siempre que el punto de resonancia no esté muy alejado del origen), y lo que es más raro: siempre y cuando se calcule c_1 con el método por ellos utilizado.

Esto último es sumamente extraño, pero es evidente, ya que hemos visto que si ensayamos $y/y_0 = c_1 \cos \psi$ en la ecuación diferencial previamente dividida por ψ obtenemos un resultado no satisfactorio.

Como vemos ahora, para llegar al anterior resultado, hemos utilizado una combinación de los resultados de ambos métodos de estudio; con el primero únicamente no seríamos capaces de desprendernos de la restricción $(1-f)^2 \ll 1$, y con el segundo tendríamos una considerable influencia de la tercera armónica sobre la fundamental, lo que nos daría para c_1 un resultado igual, pero de expresión más complicada, lo que puede traer inconvenientes varios. El resultado antedicho será fundamental en los problemas de estabilidad tratados en la tesis de A. Sirlin.

Los resultados obtenidos parecería confirmar (por lo menos por el éxito logrado) la suposición que el resultado "las influencias de las armónicas superiores a la tercera sobre las armónicas primera y tercera son despreciables" es independiente del método con el cual se estudie el problema suposición que nos ha servido de puente entre los dos estudios cuyos resultados fueron resumidos en a) y b) de este parágrafo.

(x) Recordar que c_1 son los coeficientes del desarrollo de y/y_0 .

No obstante, entre los resultados obtenidos figura justamente que la influencia de una armónica sobre otra (la tercera sobre la fundamental en particular) puede ser muy distinta según la manera de atacar el problema.

Luego esa suposición que parecía intuitiva, no lo es tanto, tanto es así que podría haber resultado falsa; pero los resultados fueron tales que virtualmente demuestran aquella suposición, por lo menos para la zona restringida por $3A_{33} - \frac{1}{3} \frac{\omega_0^2}{\omega^2} > 1.$ ^(x)

(x) Para obtener esta conclusión necesitamos forzosamente el resultado Q_2 del segundo estudio.

§ 11. Algunas observaciones sobre la zona de resonancia (x)

Podemos decir según lo visto que para la zona representada por la desigualdad $K_3 = 3 - \frac{1}{3} \frac{\omega_0^2}{\omega^2} (1 + \frac{c_1^2}{4}) > L$ hemos obtenido un resultado, vale decir, los valores de c_1 y s_1 en función de los parámetros.

Esta zona, como vimos, contiene al origen y al punto de resonancia, y es además zona de resonancia de la armónica fundamental. El hecho que dicha zona contenga al origen es sumamente lógico ya que para $J \rightarrow 0$, $\psi(J) \rightarrow 1$ y el problema tiende a un problema lineal representado por la ecuación

$$\ddot{J} + \delta J + \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \int J d\tau = \frac{U_0}{L_0 \omega} \cos \tau$$

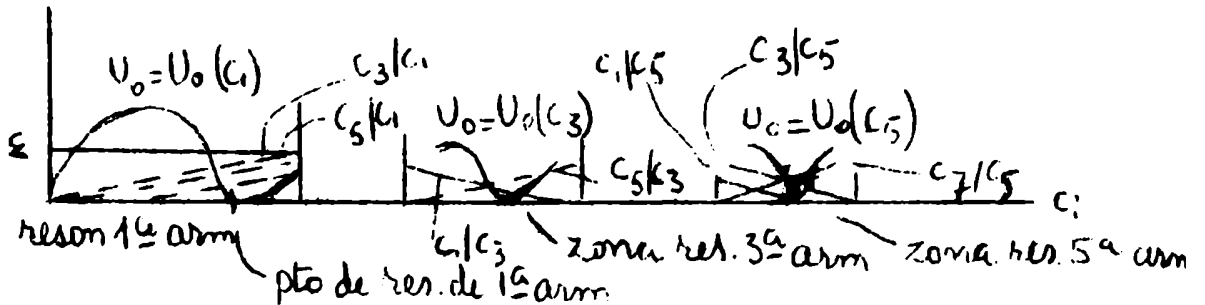
cuya solución es $J = c_1 \cos(\tau + \alpha)$. En el caso $\delta = 0$ es evidente que deberíamos considerar la solución particular obtenida al anular la oscilación libre, ya que nuestra solución particular da $J = 0$ para $U_0 = 0$, con lo que obtendríamos nuevamente $J = c_1 \cos(\tau + \alpha)$. Intuitivamente sería de esperar que para puntos cercanos al origen, se cumpliera aproximadamente $J = c_1 \cos(\tau + \alpha)$, vale decir, que los puntos cercanos al origen deberían estar en la zona de resonancia de la armónica fundamental, cosa que efectivamente sucede.

En cambio, pocas cosas de interés pueden sacarse en limpio del estudio de las zonas de resonancia de las armónicas superiores, hecho en el § 8, en el caso de Dreifuss. El estudio del § 8 fué poco preciso y no hemos profundizado las cosas como para poder eliminar la segunda suposición restrictiva $(1-f)^{2/n} \ll 1$, cosa que ha sido hecha para la resonancia de la armónica fundamental. Dicha restricción obliga a considerar puntos tan cercanos al origen que prácticamente quitarían el interés a resultados obtenidos.

No obstante, por carecer de sentido físico (por lo menos a primera vista) dicha hipótesis, podría ser que con un procedimiento semejante al seguido en el § 10 para la armónica fundamental, fuera posible evitarla.

(x) Trataremos el caso de Dreifuss.

Podríamos decir entonces que lo que esperamos (y que la restricción susodicha no deja comprobar completamente) es que para un valor dado de ω_0^2/ω^2 haya una serie de zonas, que no tengan puntos comunes, que representen las zonas de resonancia de las suce-



sivas armónicas. En cada zona, esperamos, se debería encontrar el punto de resonancia de la respectiva armónica, definido como el punto en el cual la curva $U_0 = U_0(c_n)$ se acerca más al eje de las abscisas. Tendríamos así una especie de "espectro", o sucesión de "niveles" de resonancia. Restrinjámonos no obstante, a la única zona de resonancia estudiada con un rigor satisfactorio, vale decir, a la de la armónica fundamental.

Keller^(x) dice que el salto brusco de la corriente (vale decir la parte descendente de nuestras curvas) es debido a que el circuito "entra en resonancia" con la fuerza electromotriz aplicada, vale decir, que la frecuencia del circuito libre vale (aproximadamente como es evidente, por tratar de tramos de curvas y no de puntos) a la de la f.e.m.

Los resultados obtenidos y las mismas curvas $J = J(\omega)$ que son del tipo parecen indicar, que el concepto físico de punto de resonancia de los fenómenos lineales, se ha "diluido" en una zona, sin tener allí las características tan agudas del susodicho punto.



Respecto al "peso" de nuestra hipótesis de resonancia, se puede todavía decir algo.

¿Qué herramienta fundamental da, la cuasi linealidad en los problemas no lineales, como son tratados en general? Pues es e-

(x) Op. cit. [1].

vidente que da una primerísima solución, que es la del problema lineal proveniente de hacer nulo un factor que en general puede considerarse pequeño (p.ej. el μ en $\ddot{x} + kx^2 + \mu f(x, \dot{x}, t) = 0$

Este artificio da la base desde la cual hallar la primera aproximación al problema no lineal, según los varios métodos (p.ej. el de Kryloff y Bogoliuboff). Como los sucesivos refinamientos se hacen en general partiendo de soluciones cada vez mejores, la pequeña no linealidad puede dar un método para hallar el primer eslabón de la cadena, eslabón de mala calidad, pero necesario para poder concatenar los siguientes.

Nosotros, para resolver nuestro problema, carecemos de esa base, ya que para utilizarlo tendríamos que restringir el problema físico, cosa que no queremos hacer. No obstante, para obtener resultados interesantes, tendremos que "ceder" algo, y nuestra concesión será que no pediremos una solución para todos los valores de los parámetros, sino que trataremos de hallarla en un ámbito más restringido de aquellos, ámbito tal que nos permita abordar el problema con la hipótesis fundamental de la resonancia.

Era de esperar que alguna concesión hubiera sido hecha, resolver íntegramente un problema no lineal, relativamente general y no numérico, habría posiblemente sido demasiada pretensión.

Apéndice 19

Demostración de

$$(1) \quad I_1 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin^2 \varphi}{1+y^2 \cos^2 \varphi} d\varphi = \frac{2}{y^2} [\sqrt{1+y^2} - 1] = f(y)$$

$$(2) \quad I_2 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos^2 \varphi}{1+y^2 \cos^2 \varphi} d\varphi = \frac{f(y)}{\sqrt{1+y^2}}$$

Empezaremos con I_2 :

$$(3) \quad I_2 = \frac{1}{y^2 \pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1+y^2 \cos^2 \varphi - 1}{1+y^2 \cos^2 \varphi} d\varphi = \frac{2}{y^2} - \frac{1}{y^2 \pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\varphi}{1+y^2 \cos^2 \varphi}$$

pero

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\varphi}{1+y^2 \cos^2 \varphi} = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\varphi}{1+y^2/2 + y^2/2 \cos 2\varphi} = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{du}{1+y^2/2 + y^2/2 \cos u}$$

donde $u = 2\varphi$. Resolveremos la última integral por integración compleja; haciendo $z = e^{iu}$ $\therefore dz = iz du$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\varphi}{1+y^2 \cos^2 \varphi} = \frac{1}{i} \oint \frac{dz}{z \left(1 + \frac{y^2}{2} + \frac{y^2}{2} \left(\frac{z+z^{-1}}{2}\right)\right)}$$

siendo la curva de integración, la circunferencia de radio unitario en el campo complejo.

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\varphi}{1+y^2 \cos^2 \varphi} = \frac{4}{iy^2} \oint \frac{dz}{z^2 + \frac{(2+y^2)z}{y^2} + 1}$$

pero por ser $z_1 = -\frac{(2+y^2)}{y^2} + \frac{2}{y^2} \sqrt{1+y^2}$ la única raíz de

$$z^2 + \frac{z(2+y^2)}{y^2} + 1 = 0 \quad \text{interior al círculo unitario,}$$

tendremos:

$$(4) \quad \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\varphi}{1+y^2 \cos^2 \varphi} = \frac{8\pi}{[2z_1 + \frac{2(2+y^2)}{y^2}]} y^2 = \frac{2\pi}{\sqrt{1+y^2}}$$

Reemplazando (4) en (3) se obtiene

$$I_2 = \frac{2}{y^2} - \frac{2}{y^2 \sqrt{1+y^2}} = \frac{2}{y^2} \frac{(\sqrt{1+y^2} - 1)}{\sqrt{1+y^2}}$$

con lo que demostramos la (2).

Por otro lado

$$I_1 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1 - \cos^2 \varphi}{1+y^2 \cos^2 \varphi} d\varphi = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\varphi}{1+y^2 \cos^2 \varphi} - I_2 = \frac{2}{\sqrt{1+y^2}} - \frac{f(y)}{\sqrt{1+y^2}} = f(y)$$

ya que

$$2 - f = 2 \left(1 - \frac{1}{y^2} (\sqrt{1+y^2} - 1)\right) = \frac{2}{y^2} (y^2 \sqrt{1+y^2} - 1) = \frac{2}{y^2} (\sqrt{1+y^2} - 1) \sqrt{1+y^2} = f(\sqrt{1+y^2})$$

Apéndice II

Demostraremos la fórmula (3) del § 5 según la cual

$$(1) \quad p(y) = q_1(y) + y \frac{dq_1}{dy} = \frac{d}{dy} (y q(y))$$

Siendo

$$(2) \quad q(y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \psi(y) \sin^2 \varphi \, d\varphi; \quad p(y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \psi(y) \cos^2 \varphi \, d\varphi$$

donde $y = y \cos \varphi$. Siendo

$$(3) \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{d\psi}{dy} \cos \varphi; \quad (4) \quad \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} = -\frac{d\psi}{dy} y \sin \varphi$$

tendremos

$$(5) \quad \frac{d\psi}{dy} = \frac{1}{\cos \varphi} \frac{\partial \psi}{\partial y} = -\frac{1}{y \sin \varphi} \frac{\partial \psi}{\partial \varphi}$$

por lo tanto

$$q + y q' = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \psi(y) \sin^2 \varphi \, d\varphi + y \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\partial \psi(y)}{\partial y} \sin^2 \varphi \, d\varphi =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \psi(y) \sin^2 \varphi \, d\varphi - \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} \sin \varphi \cos \varphi \, d\varphi =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \psi(y) \sin^2 \varphi \, d\varphi + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \psi(y) (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) \, d\varphi =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \psi(y) \cos^2 \varphi \, d\varphi = p(y)$$

Apéndice III

Muchos son los autores que abordan los problemas no lineales buscando soluciones particulares periódicas.

Demostrar la existencia de estas soluciones es prácticamente imposible y la suposición que se hace al adoptarlas puede ser más o menos justificable por razonamientos puramente físicos.

Además, desde un punto de vista matemático, el haber hallado una solución particular no representa adelanto alguno para el hallazgo de la solución general, por carecer del principio de superposición. Resumimos las justificaciones que en general se hacen sobre el valor de estas soluciones periódicas transcribiendo una observación de Kryloff y Bogoliuboff (op.cit.[4]): "les solutions periodiques au point de vue de la mathématique et de la physique ne représentent, bien entendu, q'une classe assez particulière des solutions et H. Poincaré lui même voit par ex. le mérite principal de ces méthodes en ce qu'elle permettent d'établir avec une rigueur mathématique suffisante toute une série des résultats dans le domaine où comme il s'exprime on faisait "bon marché" de la rigueur mathématique exigée dans d'autres branches de l'analyse".

O también según H. Poincaré:

"Ce qui nous rend ces solutions périodiques si précieuses, c'est sont, pour ainsi dire, la seule brèche par où nous puissions essayer de pénétrer dans une place jusqu'ici réputée inabordable".

Apéndice IV

Sea $\psi(x)$ una función par definida para todo valor real de x . Si hacemos $z = e^{ix}$ sea $\psi(x) = \bar{\psi}(z)$, de esta manera $\bar{\psi}(z)$ está definida sobre la circunferencia unidad. Supongamos además que $\bar{\psi}(z)$ sea prolongable al interior de dicha circunferencia de modo que resulte analítica en todos los puntos salvo en un polo.

Demostraremos ahora que si

$$(1) \quad p = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \psi(x) \cos^2 x \, dx \qquad q = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \psi(x) \sin^2 x \, dx$$

resulta

$$(2) \quad \begin{cases} A_{mm} = \frac{p+q}{2} \left[\left(\frac{p-q}{p+q} \right)^{\frac{|m-n|}{2}} + \left(\frac{p-q}{p+q} \right)^{\frac{m+n}{2}} \right] \\ B_{mm} = \frac{p+q}{2} \left[\left(\frac{p-q}{p+q} \right)^{\frac{|m-n|}{2}} - \left(\frac{p-q}{p+q} \right)^{\frac{m+n}{2}} \right] \end{cases}$$

$$(3) \quad A_{mm} = \frac{p+q}{2} \left[1 + \left(\frac{p-q}{p+q} \right)^m \right]; \quad B_{mm} = \frac{p+q}{2} \left[1 + \left(\frac{p-q}{p+q} \right)^m \right]$$

donde

$$(4) \quad A_{mm} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \psi(x) \cos m x \cos m x; \quad B_{mm} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \psi(x) \sin m x \sin m x \, dx$$

$$(5) \quad \begin{cases} A_{m,n} = A_{\frac{m+n}{2}, \frac{m+n}{2}} - B_{\frac{m-n}{2}, \frac{m-n}{2}} \\ B_{m,n} = B_{\frac{m+n}{2}, \frac{m+n}{2}} - B_{\frac{m-n}{2}, \frac{m-n}{2}} \end{cases}$$

será suficiente deducir las (3) y luego mediante (5) se obtendrán inmediatamente las (2).

De (5) y (1) se deduce

$$(6) \quad A_{mm} + B_{mm} = p + q = A_{00}$$

Por otro lado

$$(7) \quad A_{m,m} - B_{m,m} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \psi(\cos^2 mx - \sin^2 mx) \, dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \psi \cos 2mx \, dx$$

Haciendo

$$(8) \quad z = e^{2ix}; \quad dz = 2iz \, dx; \quad \cos 2mx = \frac{z^m + z^{-m}}{2}$$

$$\psi(x) = \bar{\psi}(z)$$

$$(9) A_{mm} - B_{mm} = \frac{1}{\pi i} \oint \frac{\bar{\psi}(z)(z^m + z^{-m})}{z} dz$$

pero por ser $\psi(x)$ par $\int_{-\pi}^{\pi} \psi(x) \operatorname{sen} 2m x dx = \oint \bar{\psi}(z) \frac{z^m - z^{-m}}{2iz} dz = 0$

$$(10) \oint \frac{\bar{\psi}(z) z^m}{z} dz = \oint \frac{\bar{\psi}(z) z^{-m}}{z} dz \dots$$

la (9) queda

$$(11) A_{mm} - B_{mm} = \frac{2}{\pi i} \oint \frac{\bar{\psi}(z) z^m}{z} dz$$

Si z_1 es el único polo de $z/\bar{\psi}(z)$:

$$(12) A_{mm} - B_{mm} = \frac{2}{\pi i} \frac{z_1^m}{\frac{d}{dz} \left(\frac{z_1}{\bar{\psi}(z_1)} \right)}$$

luego

$$(13) A_{00} = \frac{2}{\pi i} \frac{1}{\frac{d}{dz} \left(\frac{z_1}{\bar{\psi}(z_1)} \right)} \dots$$

$$(14) A_{mm} - B_{mm} = A_{00} z_1^m$$

$$(15) A_{11} - B_{11} = p - q = A_{00} z_1 = (p+q) z_1 \dots$$

$$(16) z_1 = \left(\frac{p-q}{p+q} \right)$$

$$(17) A_{mm} - B_{mm} = (p+q) \left(\frac{p-q}{p+q} \right)^m$$

Combinando (17) y (6) se obtiene las (2). Con la función de Dreifuss, según la cual $\psi = 1/|1 + \gamma^2 \cos^2 \theta|$ se halla dentro de las condiciones pedidas a comienzos de este apéndice (Ver ap. I).

(x) es decir en el caso de Dreifuss:

$$q = f(c_n)$$

$$p = \frac{f(c_n)}{\sqrt{1+c_n^2}}$$

Apéndice V

Según el sistema (19) del § 6 para la armónica $(2n+1)$ tendremos:

$$(1) \frac{c_{2m+1}}{c_1} = \frac{\begin{vmatrix} A_{33} - \left(\frac{1}{3} \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2 & A_{35} & \dots & \frac{B_{13}}{3} & \dots \\ A_{35} & A_{55} - \left(\frac{1}{5} \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2 & \dots & \frac{B_{15}}{5} & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ A_{3,2m+1} & A_{5,2m+1} & \dots & \frac{B_{1,2m+1}}{2m+1} & \dots \end{vmatrix}}{\Delta_1}$$

donde Δ_1 está dado por (21) del § 6.

Con las mismas suposiciones con las cuales se ha llegado a (25) se puede obtener

$$(2) \frac{c_{2m+1}}{c_1} = - \frac{\frac{B_{1,2m+1}}{2m+1}}{A_{2m+1,2m+1} - \left(\frac{1}{2m+1} \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2} + \frac{\frac{B_{1,2m-1}}{2m-1} A_{2m-1,2m-1}}{\left[A_{2m-1,2m-1} - \left(\frac{1}{2m-1} \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2\right] \left[A_{2m+1,2m+1} - \left(\frac{1}{2m+1} \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2\right]} + (-1)^m \frac{B_3}{3} \frac{\prod_{i=1}^{N-1} A_{2i+1,2i+3}}{\prod_{i=1}^m \left[A_{2i+1,2i+1} - \left(\frac{1}{2i+1} \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2\right]}$$

El numerador del primer término del segundo miembro de (2) vale según las (20), § 6

$$\frac{q}{2m+1} \left(\frac{p-q}{p+q}\right)^m$$

el del segundo

$$\frac{q}{2} \left(\frac{p+q}{2m-1}\right) \left(\frac{p-q}{p+q}\right)^m \quad (3)$$

y el del tercero

$$\frac{q}{3} \left(\frac{p-q}{p+q}\right) \left(\frac{p-q}{2}\right)^{N-m}$$

En los dos primeros casos, por ser los denominadores cercanos a la unidad, podremos considerar que el orden de magnitud de los términos está dado por el orden de magnitud de los respectivos numeradores.

En cuanto al tercer término, podremos considerarlo tendiente a cero para $N \rightarrow \infty$ sin mayores restricciones; esto podría traer molestias matemáticas, que no consideraremos para probar la convergencia de los determinantes.

Si queremos mantener N finito, tendremos en cada armónica un término creciente con n , y que para $m=n$ llegaría a valer $\frac{q}{3} \frac{p-q}{p+q} \frac{1}{A_{nn} - \left(\frac{1}{n} \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}$ en cuyo caso sería del orden de c_3/c_1 .

En resumidas cuentas, podremos considerar a c_{2n+1}/c_1 dado por (2) de cuadrado despreciable frente a 1 con las condiciones impuestas en el § 6.

Apéndice VI

Queremos aquí hallar expresiones de

$$(1) \begin{cases} P_{\mu\nu} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \psi(\cos m\varphi) \cos \mu\varphi \cos \nu\varphi d\varphi \\ Q_{\mu\nu} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \psi(\cos m\varphi) \sin \mu\varphi \sin \nu\varphi d\varphi \end{cases}$$

para funciones ψ que cumplan iguales condiciones a las enunciadas a comienzos del apéndice IV.

Por un lado es inmediato ver que $P_{\mu\nu}$ y $Q_{\mu\nu}$ cumplirían relaciones iguales a las establecidas para $A_{\mu\nu}$ y $B_{\mu\nu}$ en (2), ap. IV, donde p y q vendrían a ser $\int_{-\pi}^{\pi} \psi(\cos m\varphi) \cos^2 \varphi d\varphi$; $\int_{-\pi}^{\pi} \psi(\cos m\varphi) \sin^2 \varphi d\varphi$ respectivamente.

Pero interesa a nosotros ligar $P_{\mu\nu}$ y $Q_{\mu\nu}$ con

$$(2) \quad p = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \psi(\cos \varphi) \cos^2 \varphi d\varphi; \quad q = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \psi(\cos \varphi) \sin^2 \varphi d\varphi$$

p y q que coincidan con los del ap. IV y con los del § 6. Considerando que nuevamente se tendrán:

$$(3) \begin{cases} P_{\mu\nu} = P_{\frac{\mu+\nu}{2}, \frac{\mu+\nu}{2}} - Q_{\frac{|\mu-\nu|}{2}, \frac{|\mu-\nu|}{2}} \\ Q_{\mu\nu} = Q_{\frac{\mu+\nu}{2}, \frac{\mu+\nu}{2}} - P_{\frac{|\mu-\nu|}{2}, \frac{|\mu-\nu|}{2}} \end{cases}$$

tendremos reducido el problema a hallar expresiones para $P_{m,n}$ y $Q_{m,n}$. Demostraremos que

$$(4) \quad P_{mmm} = \frac{p+q}{2} \left[\left(\frac{p-q}{p+q} \right)^{m/2} + 1 \right]; \quad Q_{mmm} = \frac{p+q}{2} \left[1 - \left(\frac{p-q}{p+q} \right)^{m/2} \right]$$

a partir de la cual se obtiene

$$(5) \begin{cases} P_{\mu\nu} = \frac{p+q}{2} \left[\left(\frac{p-q}{p+q} \right)^{|\mu-\nu|/2m} + \left(\frac{p-q}{p+q} \right)^{\mu+\nu/2m} \right] \\ Q_{\mu\nu} = \frac{p+q}{2} \left[\left(\frac{p-q}{p+q} \right)^{|\mu-\nu|/2m} - \left(\frac{p-q}{p+q} \right)^{\mu+\nu/2m} \right] \end{cases}$$

Tendremos por lo pronto

$$(6) \begin{cases} P_{mmm} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \psi(\cos \theta) \cos^2 \frac{m}{n} \theta d\theta = \frac{1}{n\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \psi(\cos \theta) \cos^2 \frac{m}{n} \theta d\theta \\ Q_{mmm} = \frac{1}{n\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \psi(\cos \theta) \sin^2 \frac{m}{n} \theta d\theta \end{cases} \therefore (7) \quad P_{mmm} = p; \quad Q_{mmm} = q.$$

$$(8) \quad P_{mmm} + Q_{mmm} = P_{00} = p+q$$

De (6) tendremos

$$(9) P_{mm} - Q_{mm} = \frac{1}{m\pi} \int_{-m\pi}^{m\pi} \Psi(\cos\theta) \cos 2 \frac{m}{n} \theta d\theta$$

Ponemos

$$(10) z = e^{2i\theta/m} \therefore dz = \frac{2i}{m} z d\theta$$

De (9) se obtiene

$$(11) P_{mm} - Q_{mm} = \frac{1}{\pi i} \oint \bar{\Psi}(z) \frac{z^m + z^{-m}}{2} dz = \frac{2}{i\pi} \oint \bar{\Psi}(z) z^m$$

por un razonamiento análogo al hecho en el ap. IV para llegar a la (10), ap. IV. aquí la $\bar{\Psi}(z)$ representa la misma $\bar{\Psi}(z)$ del ap. IV.

En forma análoga a la de dicho apéndice se obtiene

$$(12) P_{mm} - Q_{mm} = \frac{2}{\pi i} \frac{z_1^m}{\frac{d}{dz_1} \left(\frac{z_1}{\bar{\Psi}(z_1)} \right)}$$

$$(13) P_{00} = p+q = \frac{2}{\pi i} \frac{1}{\frac{d}{dz_1} \left(\frac{z_1}{\bar{\Psi}(z_1)} \right)}$$

$$(14) P_{mm} - Q_{mm} = A_{00} z_1^m$$

$$(15) P_{mm} - Q_{mm} = p - q = (p+q) z_1^m$$

$$(16) z_1 = \left(\frac{p-q}{p+q} \right)^{1/m} \dots$$

$$(17) P_{mm} - Q_{mm} = (p+q) \left(\frac{p-q}{p+q} \right)^{m/m}$$

Combinando (17) y (8) se obtienen (4) y de allí las (5).

BIBLIOGRAFIA

- [1] Keller "Mathematics of Modern Engineering" Vol. 2.
- [2] Schunck y Zenneck "Jahrbuch für drahtlose Telegraphie", 19, 1922.
- [3] Kryloff y Bogoliuboff "Introduction to non linear Mechanics"
Traducción libre de Lefschetz, Princeton Univ. Press (con mucha bibliografía de los autores).
- [4] Kryloff y Bogoliuboff "Casopis pro Pestovani Matematiky a Fysiky", 64, 107, 1934-35.
- [5] Cunningham "Journal of Applied Physics", 1948.
- [6] Keller "Journal Franklin Institute", 225, 1938.
- [7] Sansone Equazioni Differenziali nel campo reale.
- [8] Dreifuss Archiv für Elektrotechnik, 2, 1913.
- [9] Piccaluga, "Ciencia y Técnica", 106, 1946, Nº 527.
- [10] N. Minorsky, Modern Trends in Non linear Mechanics, es el segundo capítulo del libro "Advances in Applied Mechanics" editado por R. von Mises y Th. von Karman.
- [11] A. Sirlin, Tesis Buenos Aires 1952.
- [12] N.W. Mc Lachlan "Ordinary Non linear Differential Equations" 1950, (trae numerosa bibliografía).
- [13] J.J. Stoker "Non linear Vibrations", 1950.
- [14] A.A. Andronow y C.E. Chaikin, "Theory of Oscillations".