Teoría de la estabilidad de fenómenos de resonancia no lineal

Sirlin, Alberto

1952

Tesis presentada para obtener el grado de Doctor en Ciencias Físico-Matemáticas de la Universidad de Buenos Aires

FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
UNIVERSIDAD NACIONAL DE BUENOS AIRES

"TEORIA DE LA ESTABILIDAD DE FENOMENOS DE RESONANCIA NO LINEAL"

Tesis para optar al título de Dr. en Ciencias Físicomatemáticas.

RESUMEN

Nuestro problema ha nacido en la consideración de dos circuitos ferroresonantes. El circuito ferroresonante serie consta de un generador de corriente alternada en serie con una resistencia, una capacidad y una bobina con núcleo de hierro. Este núcleo convierte a la bobina en un elemento no lineal. La curva característica experimental (amplitud de f.e.m. contra intensidad) muestra fenómenos de salto. En el circuito ferroresonante paralelo se conecta la bobina con núcleo de hierro en paralelo con la capacidad. Si se coloca una fuerte resistencia en serie con el generador en este circuito se puede imponer la intensidad, en cuyo caso se observan saltos. Si, por lo contrario, la resistencia adicional es pequeña, se impone la f.e.m. y se obtienen experimentalmente zonas descendentes de la característica.
El equilibrio del circuito ferroresonante serie fué explicado teóricamente por Zenneck y Schunck, quienes supusieron sin más justificación que, cerca de la resonancia, podemos despreciar todas las armónicas de la intensidad menos la fundamental para calcular la característica. Las curvas teóricas muestran una zona descendente que no es alcanzada por la experiencia. Zenneck y Schunck afirmaron que dichas zonas son inestables.
Nuestra tarea ha sido desarrollar, por una parte, una justificación de la teoría de Zenneck y Schunck del equilibrio y, por la otra, desarrollar un método que permita discutir la estabilidad de las zonas de resonancia, aun cuando ellas estén caracterizadas por una fuerte no linealidad.
Respecto del primer problema, hemos podido deducir fórmulas teóricamente justificadas por la consideración de las diferentes armónicas de la intensidad. En el cálculo nos hemos reducido a trabajar en la resonancia, mientras que Amati, en su tesis, ha extendido estos métodos a zonas más amplias. Una comparación de nuestros resultados con los de Zenneck y Schunck, permite justificar la plausibilidad de la teoría de dichos autores en casi todos los casos de interés práctico. Para no linealidades mayores el equilibrio se explica mediante nuestras fórmulas.
Desarrollamos luego un método para tratar la estabilidad de las zonas de resonancia aun cuando ellas se caractericen por una fuerte no linealidad. Las ideas esenciales del método son 1) se supone aplicada al circuito una perturbación conocida en la f.e.m. a la que el circuito responde con una perturbación incógnita en la amplitud y fase de la intensidad, con lo cual hemos deducido un sistema de dos ecuaciones no lineales de perturbación del primer orden; 2) se linealiza el sistema eliminando los términos de orden cero mediante las ecuaciones de equilibrio y despreciando las potencias de perturbación superiores a la primera; 3) debido a la lenta variabilidad de las perturbaciones cerca de la resonancia (hecho que confirman los resultados), logramos un sistema de ecuaciones de perturbación a coeficientes constantes 4) la interpretación de este sistema demuestra que las zonas descendentes son inestables, las ascendentes estables. En este método hemos representado el flujo por una función general de la que sólo supusimos que tenga derivada positiva respecto de la intensidad
Desarrollamos, luego, otra teoría de la estabilidad basada en los métodos mamáticos de Hill, mostrando las dificultades matemáticas y estudiando la ecuación de Hill cuando se le agrega un término de tipo disipativo.

Estudiamos, además, el circuito ferroresonante paralelo para el cual hallamos una expresión teórica de la característica, cuya estabilidad discutimos demostrando que, nuevamente, si se impone la intensidad de corriente, las zonas descendentes son inestables, las ascendentes, estables.
El principal interés de estos métodos reside en el hecho de que permiten discutir no linealidades muy fuertes, mientras que los autores de la moderna Mecánica no Lineal se reducen, cuando el tiempo figura explícitamente en las ecuaciones diferenciales como sucede en nuestro caso, a considerar problemas quasi-lineales.

Alberto Sirlin

Universidad Nacional de Buenos Aires

Facultad de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales

"TEORIA DE LA ESTABILIDAD DE FENOMENOS DE RESONANCIA NO LINEAL"

por Alberto Sirlin

Tesis para optar al título de Doctor en Ciencias Físico-Matemáticas

Padrino de tesis: Dr. Ricardo Gans

Buenos Aires, 1952.

A MI MADRE

Agradezco al Doctor Ricardo Gans sus continuos consejos y su valiosa dirección científica.-

También deseo expresar mi agradecimiento a Daniel Amati por su constante preocupación y frecuentes observaciones.

Expreso mi reconocimiento al Dr. J.C.Vignaux por haber facilitado la impresión de esta tesis en el Instituto Radiotécnico.

Indice

1. Exposición del equilibrio de los fenómenos de Ferroresonancia. Teoría de Zenneck Schunk. Generalización de su formalismo.

Nuestro problema ha nacido en el estudio del fenómeno de ferroresonancia característico del circuito-serie no lineal representado en la figura 1 y del circuito-paralelo representado en la figura 2, prácticamente no abandonado en la literatura. En el circuito-serie imponemos o mandamos la f.e.m. En la figura 3 hemos representado la curva característica de equilibrio del circuito-serie, entendiendo por u^0 y las amplitudes de la f.e.m. y de la intensidad de corriente respectivamente. Con trazo lleno representamos la curva característica experimental que muestra los saltos ("jump phenomena" dicen los autores de habla inglesa) en los puntos R y S. La no linealidad del problema se debe evidentemente al núcleo de hierro que convierte a la bobina de inducción en un elemento no lineal.

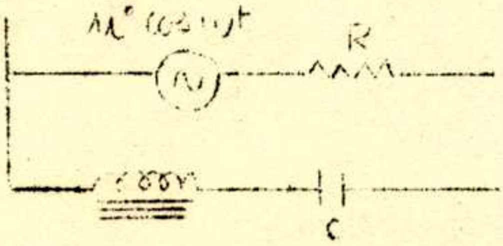


Fig. 1

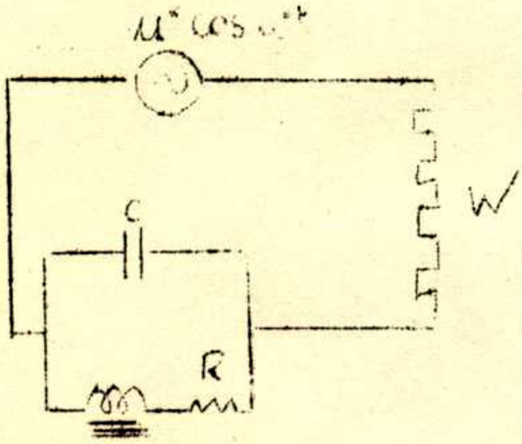


Fig. 2

En el circuito-paralelo representado en la figura 2 podemos imponer la f.e.m. si la resistencia W es suficientemente pequeña; si W es suficientemente grande podemos imponer en cambio la intensidad.

En la figura 4 hemos representado la curva característica del circuito-paralelo de la figura 2 en el caso de que impongamos la intensidad.

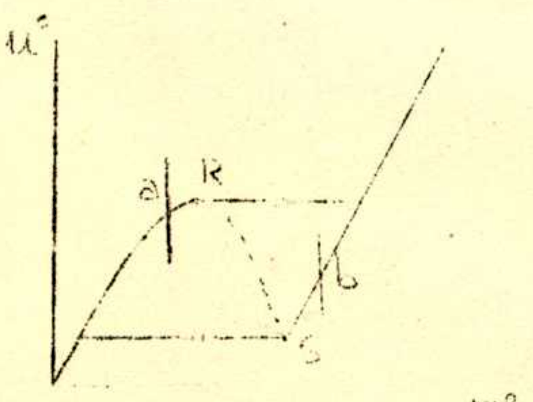


Fig. 3

(1) Acerca del equilibrio de los fenómenos tratados puede consultarse la tesis de D.Amati (ver Bibliografía).

Se observan también los saltos. El trazo lleno corresponde a la experiencia. En el caso de que se imponga la f.e.m. la parte punteada en la figura 4 es obtenida experimentalmente. Las zonas de la curva característica comprendida entre los dos segmentos a y b en la figura 3 y entre los c y d en la figura 4 serán de especial interés para nosotros y podemos llamarlas zonas de resonancia no lineal o zonas de interés, indistintamente.

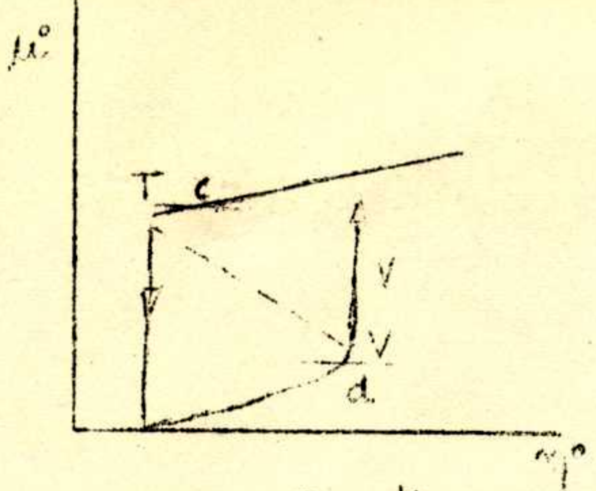


Fig. 4

La denominación de zona de resonancia no lineal queda justificada si observamos que los puntos S y T corresponden respectivamente a mínimos de u° y η° en las curvas de las figuras 3 y 4.

El fenómeno de resonancia no lineal, aun cuando esté caracterizado por una no-linealidad fuerte, fué teóricamente explicado en 1922 por Zenneck y Schunk(2) Resumiremos ahora la teoría de estos dos autores, referente al circuito-serie.

El equilibrio de tal circuito está representado por la ecuación diferencial

$$(1) \quad \frac{d\phi(J)}{dt} + RJ + \frac{1}{C}\int_0^t J\,dt = U^\circ \cos\omega t$$

en que ϕ es el flujo del vector inducción magnética, J la intensidad de corriente, t el tiempo, R la resistencia y C la capacidad.

Introduzcamos las nuevas definiciones:

$$(2) \quad L_0 = \left(\frac{d\Phi}{dJ}\right)_{J=0}; \quad \Psi(J) = \frac{1}{L_0}\frac{d\Phi}{dJ} \therefore \Psi(0)=1; \quad \delta = \frac{R}{L_0\omega}; \quad \omega_0^2 = \frac{1}{L_0 C}$$
$$\tau = \omega t$$

Con las definiciones (2) la (1) se escribe, entendiendo que $J'(\tau) = \frac{dJ}{d\tau}$,

$$(3) \quad \Psi(J)\,J' + \delta J + \frac{\omega_0^2}{\omega^2}\int J\,d\tau = \frac{U^\circ}{L_0\omega}\cos\tau = \bar{U}^\circ\cos\tau; \quad \bar{U}^\circ = \frac{U^\circ}{L_0\omega}$$

(2) Zenneck y Schunk, Jahrbuch für drahtlose Telegraphie, 19, 1922.

Con esto hemos logrado que las constantes propias del circuito excepto $\frac{\mu^{\circ}}{L_0\omega}$ y nuestra variable de derivación sean adimensionales. Si quisiéramos podríamos lograr que la incógnita sea adimensional introduciendo un parámetro J_0 que dependerá del hierro y que tiene las dimensiones de una intensidad. La ecuación de equilibrio sería:

$$(3)' \quad \Psi\left(\frac{J}{J_0}\right)\left(\frac{J'}{J_0}\right) + \delta \cdot \frac{J}{J_0} + \frac{\omega_0^2}{\omega^2}\int \frac{J}{J_0}\, d\tau = \frac{\mu^{\circ}}{L_0\omega J_0}\cos\tau$$

ecuación adimensional respecto a todas las constantes del circuito, a la variable de derivación y a la incógnita.

Zenneck-Schunk emplearon una función empírica debida a Dreifuss[3] para relacionar el vector inducción magnética B con el campo magnético H, a saber:

$$(4) \qquad B = H + 8M_{\infty}\,\mathrm{arctg}\,\frac{\mathcal{H}}{\mathcal{H}_0} = H + 8M_{\infty}\,\mathrm{arctg}\,\frac{J}{J_0}$$

En los casos de interés técnico, en que la intensidad de corriente no es muy grande podemos despreciar el campo magnético resultando $B \simeq 8M_{\infty}\,\mathrm{arc\,tg}\,\frac{J}{J_0}$. El significado físico de las constantes M_{∞} e J_0 se ve comparando (4) con la conocida fórmula $B = H + 4\pi M$ en que M representa la imantación.

M_{∞} es evidentemente la imantación de saturación y para $J = J_0$ vale

$$(5) \qquad M(J_0) = \frac{M_{\infty}}{2}$$

El significado de J_0 representado por la ecuación (5) se comprende inmediatamente en la figura 5 y en la tabla adjunta.

(3) Dreifuss, Archiv für Elektrotechnik, 2, 1913.

$$\Phi = L_0 J_0 \operatorname{arc\,tg} \frac{J}{J_0}\,, \quad \Phi_\infty = L_0 J_0 \frac{\pi}{2}$$

$$Y = \frac{\Phi}{\Phi_\infty} = \frac{2\Phi}{\pi L_0 J_0} = \frac{2}{\pi} \operatorname{arc\,tg} \frac{J}{J_0}$$

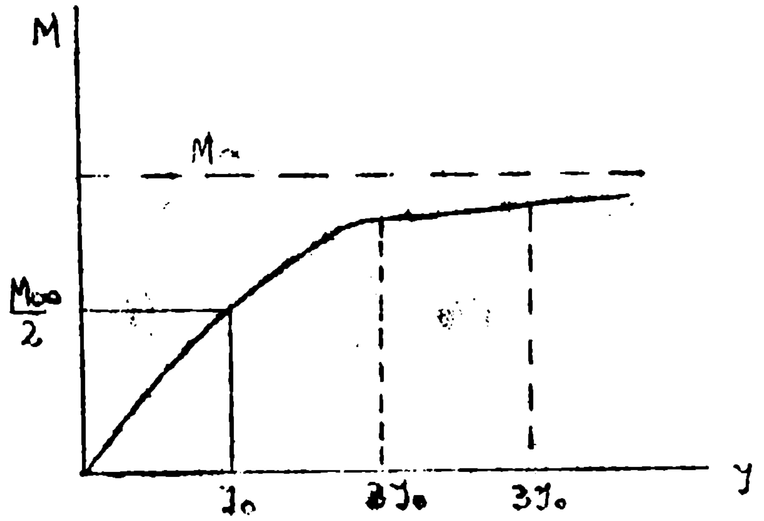


Fig. 5

$\frac{J}{J_0}$	$Y = \frac{\Phi}{\Phi_\infty}$
0	0,000
0,5	0,294
0,75	0,409
1	0,500
2	0,706
3	0,794
5	0,874
∞	1,000

Teniendo en cuenta las ecuaciones (2) y (4) resulta que en el caso particular de Dreyfuss:

$$(6) \qquad \Psi\left(\frac{J}{J_0}\right) = \frac{1}{1 + \frac{J^2}{J_0^2}}$$

En lugar de la ecuación general (3) Zenneck-Schunk estudiaron la ecuación particular:

$$(7) \qquad \frac{J'/J_0}{1 + J^2/J_0^2} + \delta \cdot \frac{J}{J_0} + \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \int_0^\tau \frac{J}{J_0}\, d\tau = \frac{U^0}{L_0 \omega J_0} \cos \tau$$

Por motivos que se comprenderán más adelante nos referiremos ahora y en casi todo este trabajo a las ecuaciones de equilibrio escritas en la forma general (3) o (3)' pasando cuando nos convenga al caso particular de Dreifuss.

De esas ecuaciones del equilibrio Zenneck-Schunk consideraban soluciones particulares periódicas de igual frecuencia que la fuerza electromotriz (bien entendido que en (3), (3)' y (7) la incógnita es la intensidad de corriente J). La idea esencial de esos autores era la siguiente: en la zona de resonancia no-lineal, aun cuando ella corresponda a una no-linealidad fuerte, podemos despreciar la influencia de todas las armónicas de la intensidad de corriente frente a la armónica fundamental.

Es decir, en la zona de resonancia no-lineal una solución aproximada de (3) será

$$(8) \qquad J = \eta^0 \cos(\omega t + \alpha^0) = \eta^0 \cos(\tau + \alpha^0) = \eta^0 \cos z^0$$

$$z^0 = \tau + \alpha^0$$

Llamaremos a η^0 y α^0 amplitudes y constante de fase de la intensidad de equilibrio, respectivamente.

Decir que la zona de resonancia no-lineal puede estar caracterizada por una no-linealidad fuerte significa físicamente que ella se obtiene en esos casos para intensidades relativamente grandes, digamos, por ejemplo, cerca de la saturación.

Ensayando (8) en (3):

$$(9)\quad -\eta^0\,\Psi(\eta^0\cos z^0)\,\mathrm{sen}\,z^0+\delta\,\eta^0\cos z^0+\frac{\omega_0^2}{\omega^2}\,\eta^0\,\mathrm{sen}\,z^0=\frac{u^0}{L_0\omega}\left[\mathrm{sen}\,\alpha^0\cos z^0+\cos\alpha^0\,\mathrm{sen}\,z^0\right]$$

Multiplicamos ahora (9) por sen z^0 e integraremos toda la ecuación en un período, es decir entre $-\pi$ y $+\pi$; luego multiplicaremos por cos z^0 y promediaremos nuevamente lo que naturalmente equivale a tomar el primer término en el desarrollo de Fourier de Ψ sen z^0 y separar luego los coeficientes de sern z^0 y cos z^0

Llamemos

$$(10)\quad q(\eta^0)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\Psi(\eta^0\cos z^0)\,\mathrm{sen}^2 z^0\,dz^0;\qquad p(\eta^0)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\Psi(\eta^0\cos z^0)\cos^2 z^0\,dz^0$$

Mediante el citado procedimiento obtendremos:

$$(11)\quad \begin{cases} -\eta^0\,q(\eta^0)+\dfrac{\omega_0^2}{\omega^2}\,\eta^0=\dfrac{u^0}{L_0\omega}\,\mathrm{sen}\,\alpha^0 \\[2ex] \eta^0\,\delta=\dfrac{u^0}{L_0\omega}\cos\alpha^0 \end{cases}$$

Cuadrando y sumando obtenemos:

$$(12)\quad \eta^0=\frac{\dfrac{u^0}{L_0\omega}}{\sqrt{\left(q(\eta^0)-\dfrac{\omega_0^2}{\omega^2}\right)^2+\delta^2}}$$

Dividiendo:

$$(13)\quad \mathrm{tg}\,\alpha^0=\frac{\dfrac{\omega_0^2}{\omega^2}-q(\eta^0)}{\delta}$$

Las fórmulas (12) y (13) difieren de las correspondientes a los circuitos lineales de corriente alternada (circuitos sin núcleo de hierro) únicamente en que en estos últimos en lugar de $q(\eta^0)$ tenemos la constante 1. La función $q(\eta^0)$ tendrá, por tanto, especial interés de acuerdo con Zenneck-Schunk pues ella trasunta la influencia no lineal del hierro.

En el caso particular de Dreifuss demostramos en el Apéndice Matemático Nº 2 por integración compleja, llamando en ese caso $q(\eta^0) = f(\eta^0)$:

$$(14) \qquad f(\eta^0) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\operatorname{sen} z^0}{1+\eta^0 \cos z^0}\, dz^0 = \frac{2}{\eta^{0\,2}}\left[\sqrt{1+\eta^{0\,2}} - 1\right]$$

Se comprende que en el caso de Dreifuss o el más general (3′) se ha ensayado en lugar de (8): $\mathcal{J}/\mathcal{J}_0 = \eta^0 \cos z^0$.

Para abreviar llamemos a $u^0/L_0\omega = \bar{u}^0$, expresión que también usaremos cuando corresponda para designar a

Si se usa la relación

$$(15) \qquad p(\eta^0) = \frac{d}{d\eta^0}\left(\eta^0 q(\eta^0)\right) = q(\eta^0) + \eta^0 q'(\eta^0)$$

que demostraremos en el Apéndice Matemático Nº 1 para cualquier función $\psi(\eta^0 \cos z^0)$

$$(16) \qquad \frac{d\bar{u}^0}{d\eta^0} = \frac{\left(q - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}\right)\left(q + \eta^0 q' - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}\right) + \delta^2}{\sqrt{\left(q - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}\right)^2 + \delta^2}} = \frac{\left(q - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}\right)\left(p - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}\right) + \delta^2}{\sqrt{\left(q - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}\right) + \delta^2}}$$

$$= F_1^2(\eta^0)\left[\left(q - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}\right)\left(p - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}\right) + \delta^2\right]$$

en que por $F_1^2(\eta^0)$ entendemos una función positiva de η^0.

En el caso especial de Dreifuss demostamos en el Ap. Mat. Nº 2, llamando en ese caso $g(\eta^0) = p(\eta^0)$:

$$(17) \qquad g(\eta^0) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos^2 z^0\, dz^0}{1+\eta^0 \cos^2 z^0} = \frac{f(\eta^0)}{\sqrt{1+\eta^{0\,2}}}$$

La fórmula de equilibrio que produce la teoría de esos dos autores será pues:

$$(18) \qquad \eta^0 = \frac{\bar{u}^0}{\sqrt{\left(f(\eta^0) - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}\right)^2 + \delta^2}}$$

Si se representa esta fórmula se obtienen curvas del tipo de la figura 3 incluyendo las zonas descendentes punteadas, que no han sido alcanzadas por la experiencia.

Intuitivamente la curva teórica de la figura 3 se comprende en la forma indicada en la figura 6.

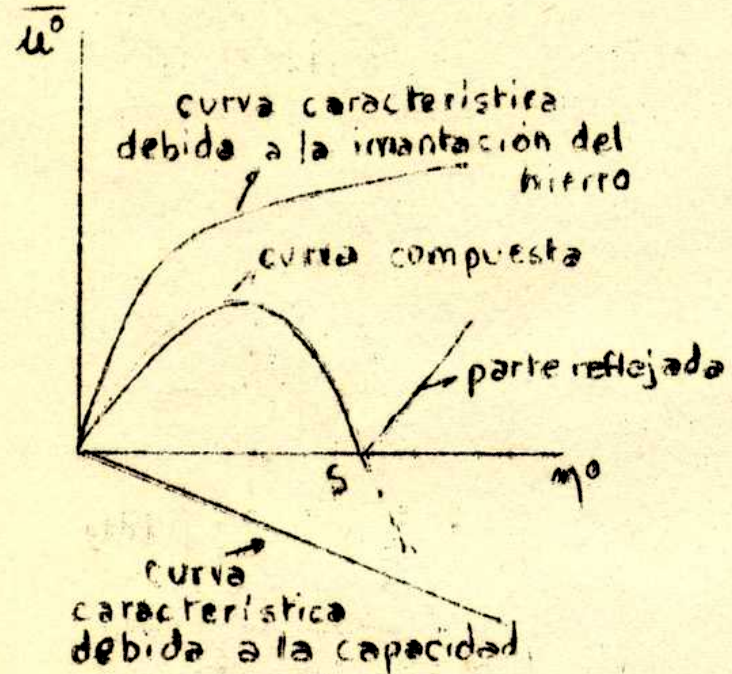


Fig. 6

Es decir si componemos la curva característica debida a la imantación del hierro con la debida a la capacidad y reflejamos las partes negativas(porque se trata de amplitudes) obtenemos intuitivamente una curva del tipo de la de la figura 3 con su mínimo correspondiente a $\overline{u^0} = 0$. El efecto de la resistencia será levantar un poco ese mínimo (punto S) de modo que no corresponda a $\overline{u^0}=0$.

En el caso de Dreifuss las funciones $f(\eta^0)$ y $g(\eta^0)$ dadas por (14) y (17) tienen la "allure" representada en la figura 7. Es decir, son dos funciones monótonas decrecientes que partiendo del valor 1 tienden asintóticamente a 0. Además, $g(\eta^0) \leq f(\eta^0)$ para todo η^0. Observando (16) se comprende que en el caso límite δ =0 los puntos R y S que delimitan la zona de resonancia no lineal se obtienen en la forma indicada en la figura. En general se comprende que si la función $\Psi(\gamma)$ es una función monótona decreciente de γ para $\gamma > 0$, $\Psi(\eta^0\cos z^0)$ será una función también monótona decreciente de η^0 para $\eta^0 > 0$, pues siendo $\gamma = \eta^0 \cos z^0$

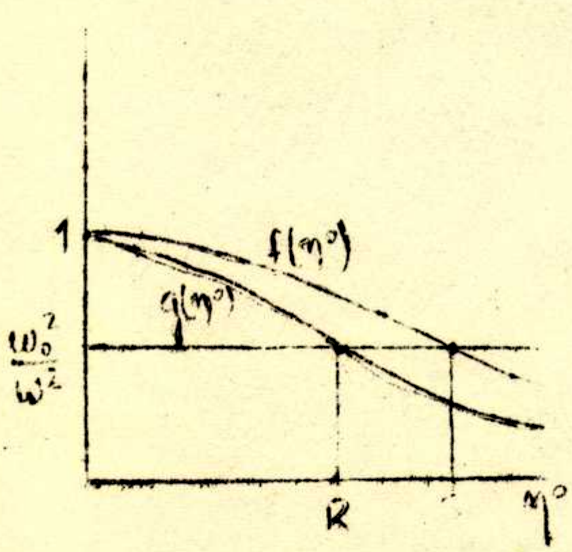


Fig. 7

$$\frac{\partial}{\partial\eta^0}\Psi(\eta^0\cos z^0) = \frac{d\Psi}{d\gamma}\cos z^0 \qquad \eta^0\frac{\partial\Psi}{\partial\eta^0} = \frac{d\Psi}{d\gamma}\gamma \qquad \mathrm{Sg}\,\frac{\partial\Psi}{\partial\eta^0} = \mathrm{Sg}\,\frac{d\Psi}{d\gamma}$$

donde Sg $\frac{\partial\psi}{\partial\eta^0}$ significa la función signo de $\frac{\partial\psi}{\partial\eta^0}$ etc.

Luego, en ese caso más general, $p(\eta^0)$ y $q(\eta^0)$ dadas por (10) serán también funciones monótonas decrecientes que partirán de 1. Si $\lim_{J\to\infty} \psi(J) = 0$ esas funciones más generales tenderán también asintóticamente a 0, de modo que tendrán la "allure" de las funciones representadas en la figura 7 y la zona de resonancia no lineal se halla de la manera señalada anteriormente.

Una observación será la siguiente: se sabe que, cerca de $J = 0$, la curva de imantación media presenta un punto de inflexión de modo que $\psi'(J) = \frac{1}{L_0}\frac{d\psi}{dJ}$ no es cerca de $J = 0$ una función monótona de J. Este hecho no es reflejado por la fórmula de Dreifuss; se puede discutir sin embargo cualitativamente en forma sencilla qué influencia tendría sobre los resultados de equilibrio considerar curvas de imantación como la representada en la figura 8. Recordemos que $Sg\left(\frac{\partial\psi}{\partial\eta^0}\right) = Sg\left(\frac{d\psi}{dJ}\right)$

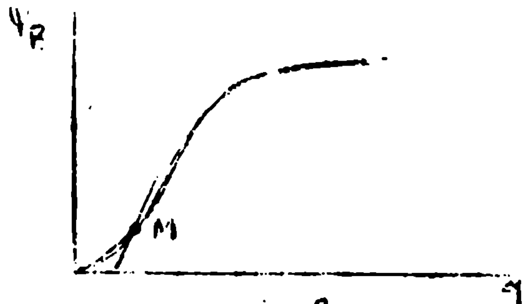


Fig 8

Usando (15) y (10) resulta:

$$\eta^0 q'(\eta^0) = p(\eta^0) - q(\eta^0) = \frac{J^0}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} \frac{\partial\psi}{\partial\eta^0}\, \operatorname{sen}^2 z^0 \, dz^0$$

Luego $Sg(p(\eta^0) - q(\eta^0)) = Sg\left(\frac{\partial\psi}{\partial\eta^0}\right) = Sg\left(\frac{d\psi}{dJ}\right) = -\pi\, Sg\left(\frac{d^2\phi}{dJ^2}\right)$

Mediante la relación demostrada $Sg(p(\eta^0) - q(\eta^0)) = Sg\left(\frac{d^2\phi}{dJ^2}\right)$ y mediante la análoga $Sg\, q'(\eta^0) = Sg\left(\frac{d^2\phi}{dJ^2}\right)$ se comprende que las funciones $q(\eta^0)$ y $p(\eta^0)$ correspondientes a la función representada en la figura 8, tendrán la "allure" dibujada en la figura 9. Observando la figura 7 es fácil dase cuenta que la teoría de Zenneck-Schunk predice que para $\frac{\omega_0^2}{\omega^2} > 1$ no puede haber salto y para $\frac{\omega_0^2}{\omega^2} < 1$ hay una sola zona descendente. En cambio la figura 9 predice que según sea el va-

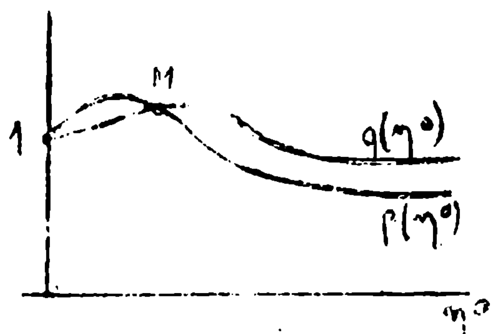


Fig 9

lor de $\frac{\omega_0^2}{\omega^2}$ podemos obtener una, dos o ninguna zona descendente. En particular para ciertos valores $\frac{\omega_0^2}{\omega^2} \dot{>} 1$ se tendrían regiones de salto. No hemos encontrado esta sugerencia teórica en la literatura.

§ 2. Nueva Teoría del Equilibrio

Influencia de las armónicas superiores en el equilibrio de la zona de resonancia. Justificación y límite de validez de la teoría de Zenneck-Schunk.

I) Ideas Generales, Resultados y Método de Cálculo

En el § 1 explicamos brevemente la teoría de Zenneck-Schunk. Estos autores afirmaban que cerca de la resonancia, podemos despreciar,para calcular la curva característica, la influencia de las armónicas superiores del ddsarrollo de Fourier de la intensidad. Se trata de estudiar ahora la influencia de las armónicas superiores cerca de la resonancia, para saber hasta qué grado la idea de Zenneck-Schunk es correcta. El estudio de dicha influencia, aun en zonas relativamente alejadas de la resonancia, es encarado en la tesis de D.Amati[1], cuya elaboración ha sido casi paralela a la del presente trabajo. En dicha Tesis se definen zonas de influencia de las distintas armónicas, es decir zonas donde una armónica es particularmente importante, siendo el coeficiente de las demás de cuadrado despreciable frente al cuadrado del de la primera. En general, para investigar la zona de influencia de la primeraarmónica se procede así: se ensaya en la ecuación de equilibrio (7) del § 1 una serie de Fourier, es decir:

$$(1)\qquad \frac{J}{J_0} = S_1 \operatorname{sen}(\tau+\alpha) + S_2 \operatorname{sen} 2\tau + C_2 \cos 2\tau + \quad + S_n \operatorname{sen} n\tau + C_n \cos n\tau$$

y se supone que los coeficientes de las armónicas superiores son de cuadrados y dobles productos despreciables frente a S_1^2. Se llega a un sistema de ecuaciones algebraicas en el cual se puede calcular $\frac{S_n}{S_1}$ y $\frac{C_n}{S_1}$ como una cierta función de S_1. En un cierto ámbito de valores de S_1 efectivamente se verifica que $\left(\frac{S_n}{S_1}\right)^2 \ll 1$ y $\left(\frac{C_n}{S_1}\right)^2 \ll 1$. Ese ámbito de valores de S_1 define la zona de influencia de la primera armónica. Es oficioso decir

(1) D.Amati: op.cit.

que de idéntica manera puede procederse para definir zonas de influencia de armónicas superiores.

En este parágrafo desarrollamos un método original y sencillo paraestudiar la influencia de las armónicas superiores cerca del punto S (ver figura 3 del 1) de resonancia en el caso $\delta = 0$. Con dicho método encontraremos un grupo de fórmulas (las 12(a),12(b) y 14) que explican el equilibrio cerca del punto S de resonancia, por grande que sea la no linealidad que la caracterice, a saber:

$$|S_1| = \overline{\mathfrak{A}^0} \left| \frac{1+\frac{S_1^2}{4}+\frac{S_1 S_3}{2}}{1-\frac{\omega_0^2}{\omega^2}\left[1+\frac{S_1^2}{4}+\frac{5 S_1 S_3}{12}\right]} \right| \quad (2)$$

(2)

$$\frac{S_3}{S_1} = -\frac{S_1^2/4}{\frac{3}{4}S_1^2+8-\frac{\omega_0^2}{\omega^2}\left[\frac{S_1^4}{48}+\frac{S_1^2}{4}+\frac{1}{3}\right]}$$

Para poder comparar esta expresión con la fórmula de equilibrio de Zenneck-Schunk (fórmula 12 del § 1), realizamos luego algunos desprecios y llegamos a las fórmulas (19), a saber:

$$(3) \qquad |S_1| = \frac{\overline{\mathfrak{A}^0}}{\left|\frac{4}{4+S_1^2+2S_1S_3}-\frac{\omega_0^2}{\omega^2}\right|}$$

donde S_3 está dado por la expresión arriba anotada en función de S_1 y ω_0^2/ω^2.

Cerca del punto de resonancia S se puede verificar, como veremos, que:

$$(4) \qquad \frac{S_3}{S_1} = -\frac{(S_1^2+S_1^4/4)}{\frac{33}{2}+5S_1^2+\frac{13}{12}S_1^4}$$

La fórmula de equilibrio escrita tiene como ya dijimos la misma estructura que la deZenneck-Schunk, ya que ésta se es cribe en el caso $\delta = 0$:

(2) Todas estas fórmulas , como veremos pueden obtenerse ensayando en la ec. (7) del §·1, previamente multiplicada por $1+\beta^2/\mathfrak{A}_0^2$, y $\vartheta = S_1 \operatorname{sen} \tau + S_3 \operatorname{sen} 3\tau$ y despreciando el cuadrado de de S_3 frente al de S_1. Como veremos, esto explica muy bien la zona de resonancia.

$$(5) \quad |S_1| = \frac{\Omega^c}{\left| f(S_1) - \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \right|} \quad ; \qquad f(S_1) = \frac{2}{S_1^2}\left[\sqrt{S_1^2+1} - 1\right]$$

Para analizar la corrección de la fórmula de Zenneck-Schunk cerca del punto de resonancia S basta por tanto comparar $f(S_1)$ con la fórmula:

$$\frac{4}{4+S_1^2+2S_1S_3} \; , \quad \frac{S_3}{S_1} = -\frac{S_1^2 + S_1^4/16}{\frac{32}{3} + 5S_1^2 + \frac{13}{12}S_1^4}$$

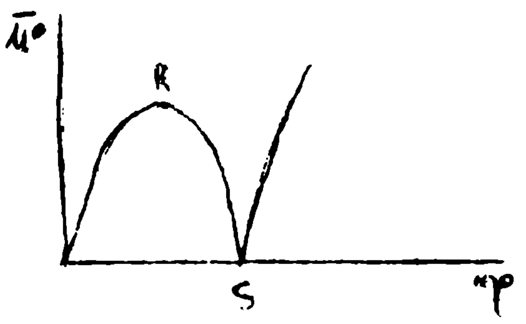
Esta comparación muestra un acuerdo muy bueno hasta $S_1=2$ (máxima diferencia del orden del 4%) y un acuerdo bueno hasta $S_1=3$ (máxima diferencia del orden del 10%). Podemos, pues, admitir que la fórmula de Zenneck-Schunk explica bien la resonancia hasta una no linealidad dada por $S_1 \sim 3$. Esto significa una intensidad cuya amplitud puede llegar a ser del orden de $3\,\mathcal{J}_0$. Si se observa la figura 5 del § 1 y la tabla adjunta, puede comprenderse que esto significa una no-linealidad importante ya que las intensidades correspondientes están prácticamente sobre la saturación(3). Para casi todos los casos de interés práctico, el método de Zenneck-Schunk, es, pues, téoricamente plausible. Para no linealidades mayores conviene usar las fórmulas que hemos anotado más arriba.

En su tesis D. Amati ha extendido considerablemente el método que nosotros hemos desarrollado cerca del punto de resonancia S. Mediante extensiones convenientes y estudios más detallados muestra que las fórmulas de equilibrio (2) representan convenientemente el equilibrio en una zona bastante amplia que, en general, contiene a la zona de resonancia. De dichos estudios surge, por tanto, que la fórmula de Zenneck-Schunk explica convenientemente el equilibrio no sólo cerca del punto S de resonancia, como demostraremos nosotros, sino en toda la zona de resonancia, siempre que ésta no esté caracterizada por intensidades mayores que $3\,\mathcal{J}_0$. Para intensidades mayores, el equilibrio de toda la zona de resonancia queda explicado convenien-

(3) Observando la tabla adjunta a la figura 5 del § 1 se comprende que $\mathcal{J}/\mathcal{J}_0 = 3$ representa $\Phi/\Phi_{max} = 0{,}8$ o sea un 80% de la saturación, suficiente para las aplicaciones.

temente por las fórmulas (2) o, cometiendo un leve error adicional, por las (3).

En esencia, el método de cálculo consistirá en lo siguiente: en nuestra ecuación de equilibrio 7 del § 1, previamente multiplicada por $1 + \frac{\gamma^2}{\gamma_0^2}$ (caso de Dreifuss), ensayaremos una serie de Fourier del tipo (6) limitándonos a los senos impares puesto que nos colocamos en el caso $\delta = 0$. Supondremos que los coeficientes superiores S_3, S_5, etc. son de cuadrados y dobles productos despreciables y llegaremos a un sistema de ecuaciones



algebraicas no lineales respecto a S_1 pero sí respecto a $S_3, S_5 \ldots$ En el caso $\delta = 0$ el punto S de resonancia corresponde a $\bar{\mu}^0 = 0$ (ver figura). Este punto S quedará determinado por una función $F\left(\frac{\omega_0^2}{\omega^2}, S_1, S_3, S_5 \ldots\right)$ Una de las grandes ventajas de haber multiplicado previamente por $1 + \gamma^2/\gamma_0^2$ será que esta función es notablemente simple y sólo depende de $\frac{\omega_0^2}{\omega^2}$, S_1 y S_3 no interviniendo los coeficientes de las demás armónicas. Esto no sucede si se estudia directamente la ecuación en la forma (7) del § 1. Luego se trata de demostrar que el coeficiente S_{2n+1} es pequeño frente al S_{2n-1}, éste frente al S_{2n-3}, etc. en una zona que comprende a la región de resonancia. Aquí nos limitaremos a considerar sólo hasta la quinta armónica situándonos cerca del punto de resonancia S. D. Amati ha extendido el método considerando un número arbitrario de armónicas y estudiando regiones amplias que contienen a la de resonancia. Otras importantes ventajas que acarrea el hecho de haber multiplicado previamente la ecuación diferencial por $1 + \gamma^2/\gamma_0^2$ son las siguientes: si ensayamos un número N de armónicas llegamos a un sistema de ecuaciones algebraicas en que las incógnitas son S_1, S_3, S_5, etc. En este método en cada ecuación sólo figuran, aparte de S_1, tres incógnitas sucesivas, es decir S_{2n-1}, S_{2n+1}, S_{2n+3} y S_1 lo cual permitirá demostrar en forma relativamente sencilla que S_{2n+3} es pequeño frente a S_{2n+1}, S_{2n+1} frente a S_{2n-1} y así sucesivamente por un método de iteración. En la última parte de este parágrafo daremos los resultados de otro cálculo en que no se desprecian las potencias superiores de S_3. Estas posibilidades se encuentran si no se multiplica previamente la ecuación diferencial por $1+y'^2/y_0^2$

II. <u>Cálculo de la influencia de las armónicas superiores</u>.

NUestra ecuación de equilibrio, en el caso especial de Dreifuss es la 7 del § 1.

$$\frac{y'/y_0}{1+y'^2/y_0^2} + \frac{\omega_0^2}{\omega^2}\int \frac{y}{y_0}\,d\tau = \bar{u}_0 \cos\tau$$

Simultiplicamos toda la ecuación por $1+y'^2/y_0^2$ tendremos(4):

$$(6)\quad \frac{y'}{y_0} + \frac{\omega_0^2}{\omega^2}\left(1+\frac{y'^2}{y_0^2}\right)\int\frac{y}{y_0}\,d\tau = \bar{u}^0\cos\tau\left(1+\frac{y'^2}{y_0^2}\right); \quad \bar{u}^0 = \frac{u^0}{L_0\omega y_0}$$

Ensayaremos (4) $y'/y_0 = S_1 \operatorname{sen}\tau + S_3 \operatorname{sen} 3\tau + S_5 \operatorname{sen} 5\tau$ y supondremos despreciables los cuadrados de S_3, S_5 y el doble producto S_3S_5.

$$S_1\cos\tau + 3S_3\cos 3\tau + 5S_5\cos 5\tau - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}\left(1+S_1^2\sin^2\tau + 2S_1S_3\sin\tau\sin 3\tau + 2S_1S_5\sin\tau\sin 5\tau\right)\left(S_1\cos\tau + S_3\frac{\cos 3\tau}{3} + S_5\frac{\cos 5\tau}{5}\right) =$$

$$= \frac{\bar{u}}{L_0\omega y_0}\cos\tau\left(1+S_1^2\sin^2\tau + 2S_1S_3\sin\tau\sin 3\tau + 2S_1S_5\sin\tau\sin 5\tau\right)$$

$$(5)\quad S_1\cos\tau + 3S_3\cos 3\tau + 5S_5\cos 5\tau - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}\Big[S_1\cos\tau + S_1^3\sin^2\tau\cos\tau + S_1^2S_3\sin 2\tau\sin 3\tau + S_1^2S_5\sin 2\tau\sin 5\tau + \frac{S_3}{3}\cos 3\tau + \frac{S_3S_1^2}{3}\sin^2\tau\cos 3\tau + \frac{S_5\cos 5\tau}{5} + \frac{S_5S_1^2}{5}\sin^2\tau\cos 5\tau\Big) =$$

$$= \frac{\bar{u}^0}{L_0\omega y_0}\left(\cos\tau + S_1^2\sin^2\tau\cos\tau + S_1S_3\sin 2\tau\sin 3\tau + S_1S_5\sin 2\tau\sin 5\tau\right)$$

Usaremos ahora las conocidas relaciones:

$$\cos m\tau\cos n\tau = \frac{\cos(m+n)\tau + \cos(m-n)\tau}{2}; \quad \sin m\tau\sin n\tau = \frac{\cos(m-n)\tau - \cos(m+n)\tau}{2}$$

Obtenemos:

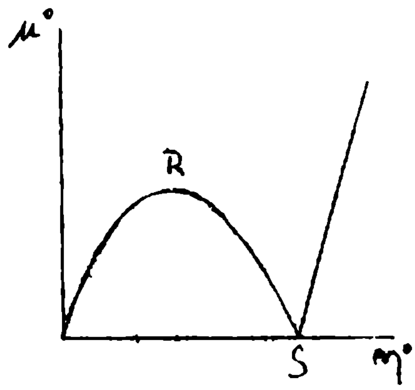
(4) Este método de multiplicar previamente por $1+y'^2/y_0^2$ parece, a primera vista no tener importancia, pero veremos que simplifica el cálculo y la interpretación de resultados en forma notable.

$$
(6)\begin{cases}
\operatorname{sen}^2\tau\cos\tau = \cos\tau\left(\dfrac{1-\cos 2\tau}{2}\right) = \dfrac{\cos\tau}{2} - \dfrac{\cos\tau}{4} - \dfrac{\cos 3\tau}{4} = \dfrac{\cos\tau}{4} - \dfrac{\cos 3\tau}{4}. \\[2ex]
\operatorname{sen} 2\tau \operatorname{sen} 3\tau = \dfrac{\cos\tau}{2} - \dfrac{\cos 5\tau}{2} \\[2ex]
\operatorname{sen} 2\tau \operatorname{sen} 5\tau = \dfrac{\cos 3\tau}{2} - \dfrac{\cos 7\tau}{2} \\[2ex]
\operatorname{sen}^2\tau\cos 3\tau = \cos 3\tau\left(\dfrac{1-\cos 2\tau}{2}\right) = \dfrac{\cos 3\tau}{2} - \dfrac{\cos 3\tau\cos 2\tau}{2} \\
\qquad = \dfrac{\cos 3\tau}{2} - \dfrac{\cos\tau}{4} - \dfrac{\cos 5\tau}{4} \\[2ex]
\operatorname{sen}^2\tau\cos 5\tau = \cos 5\tau\left(1-\dfrac{\cos 2\tau}{2}\right) = \dfrac{\cos 5\tau}{2} - \dfrac{\cos 5\tau\cos 2\tau}{2} \\
\qquad = \dfrac{\cos 5\tau}{2} - \dfrac{\cos 3\tau}{4} - \dfrac{\cos 7\tau}{4}
\end{cases}
$$

Si en (5) usamos (6) y separamos los coeficientes de cos τ cos 3τ y cos 5τ obtendremos ;

$$
\begin{array}{ll}
\cos\tau \Rightarrow & a)\; S_1\left\{1-\dfrac{\omega_0^2}{\omega^2}\left[1+\dfrac{S_1^2}{4}+\dfrac{5S_1S_3}{12}\right]\right\} = \dfrac{\mu^0}{L_0\omega J_0}\left[1+\dfrac{S_1^2}{4}+\dfrac{S_1S_3}{3}\right] \\[3ex]
\cos 3\tau \Rightarrow & b)\; 3S_3-\dfrac{\omega_0^2}{\omega^2}\left(\dfrac{S_3}{3}-\dfrac{S_3S_1^2}{6}+9\dfrac{S_1^2S_3}{20}-\dfrac{S_1^3}{4}\right) = -\dfrac{\mu^0}{L_0\omega J_0}\left[\dfrac{S_1^2}{4}+\dfrac{S_1S_3}{2}\right] \\[3ex]
\cos 5\tau \Rightarrow & c)\; 5S_5-\dfrac{\omega_0^2}{\omega^2}\left(\dfrac{S_5}{5}+\dfrac{S_5S_1^2}{10}-\dfrac{7}{12}S_1^3S_3\right) = -\dfrac{\mu^0}{L_0\omega J_0}\,\dfrac{S_1S_3}{2}
\end{array}
$$

Veamos las interesantes conclusiones que pueden deducirse del examen del sistema (7)



Es obvio observando 7 (a) que el punto de resonancia S de la figura corresponde a ;

$$\frac{\omega_0^2}{\omega^2} = \frac{4}{4+S_1^2+\frac{5}{3}S_1S_3}$$

La clave de ecte tratamiento está en este punto;es sumamente fácil expresar analíticamente la relación de ω_0^2/ω^2 en función de las amplitudes de las armónicas de la intensidad cerca del punto S de interés.Se debe esto a que la consideración de las armónicas superiores a partir de la quinta no modifica la ecuación 7(a) que es la que nos muestra la condición de resonancia (8).Esto no sucede,por lo menos en forma visible, si se emplea, como han hecho Zenneck y Schunk ,la no linealidad en la derivada de mayor orden. Allí si se considera una nueva armónica ella afecta a laprimera ecuación de modo que modifica la relación de resonancia.

Si multiplicamos la ecuación 7(b) por $-S_1S_3$, la 7(c) por $\left(\frac{S_1^2}{4}-\frac{S_1S_5}{2}\right)$ despreciando como antes S_3^2, S_5^2, S_3S_5 y sumamos obtendremos:

$$(9)\quad F_1(S_1,S_3,S_5)=\frac{5}{4}S_1^2S_5-\frac{\omega_0^2}{\omega^2}\left(\frac{S_1^2}{20}S_5-\frac{S_1^4S_3}{48}+\frac{S_1^4S_5}{40}\right)=0$$

Como a nosotros nos interesa comprobar la corrección de nuestros desprecios cerca del punto S, reemplacemos en (9) $\frac{\omega_0^2}{\omega^2}$ por su valor en (8) y despreciando nuevamente los cuadrados y dobles productos de S_3 y S_5:

$$(10)\qquad \frac{S_5}{S_3}=\frac{-\frac{S_1^4}{12}}{24\,S_1^2+\frac{23}{20}S_1^4}$$

Esta función es muy pequeña para todo valor de S_1; por ejemplo para $S_1=2$: $\frac{S_5}{S_3}\sim-0{,}035$; en el caso más desfavorable osea $S_1\to+\infty$: $\frac{S_5}{S_3}\sim0{,}072$

Multipliquemos ahora 7(a) por $\frac{S_1^2}{4}-\frac{S_1S_5}{2}$, 7(b) por $\left[1+\frac{S_1^2}{4}+\frac{S_1S_3}{2}\right]$ y sumemos. Obtenemos:

$$(11)\quad F_2(S_1,S_3,S_5)=\frac{S_1^3}{4}+\frac{3}{4}S_1^2S_3+2S_3-\frac{S_1^2S_5}{2}-\frac{\omega_0^2}{\omega^2}\left[\frac{S_1^4S_3}{48}-\frac{S_1^2S_5}{20}+\frac{S_3S_1^2}{4}-\frac{S_1^4S_5}{80}+\frac{S_3}{3}\right]=0$$

Si trabajamos cerca del punto S podremos usar la relación (8). Además como en el peor de los casos resultaba de (10) que $S_5=-0{,}07\,S_3$ vemos que es plausible despreciar $\frac{S_1^2S_5}{2}$ frente a $\frac{3}{4}S_1^2S_3$, $\frac{S_1^2S_5}{20}$ frente a $\frac{S_1^2S_3}{4}$ y $\frac{S_1^4S_5}{80}$ frente a $\frac{S_1^4S_3}{48}$ de modo que en (11) quedarán eliminados todos los términos que contienen S_5.

Cerca del punto S de resonancia se obtiene pues:

$$(12)(a)\qquad \frac{S_3}{S_1}=\frac{-\left(S_1^2+\frac{S_1^4}{4}\right)}{\frac{32}{3}+5S_1^2+\frac{13}{12}S_1^4}$$

En general será:

$$(12)(b)\qquad \frac{S_3}{S_1}=\frac{-\frac{S_1^2}{4}}{\frac{3}{4}S_1^2+3-\frac{\omega_0^2}{\omega^2}\left[\frac{S_1^4}{48}+\frac{S_1^2}{4}+\frac{1}{3}\right]}$$

Cuando $S_1 \to \infty$ la (12) da $\frac{S_3}{S_1} \sim -0{,}23$; para $S_1=2$: $\frac{S_3}{S_1} \sim -0{,}173$. Como se ve si despreciamos 4 frente a 100 (error máximo de 4%) verificamos que nuestra suposición original de que eran despreciables S_3^2, S_5^2 y S_3S_5 frente a S_1^2, es correcta. Definamos la amplitud de la intensidad como la media:

$$(13) \quad \eta^0 = \sqrt{\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \eta^2(\tau)\,d\tau} = \sqrt{\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(S_1^2 \sin^2\tau + 2S_1S_3 \sin\tau \sin 3\tau + 2S_1S_5 \sin\tau \sin 5\tau)\,d\tau} = \sqrt{S_1^2}$$

En lo que sigue consideraremos, para simplificar la escritura, que S_1 representa la amplitud de la intensidad. De 7 (a) deducimos:

$$(14) \quad |S_1| = \sqrt{S_1^2} = \frac{u^0}{L_0\omega\eta_0}\left|\frac{1+\frac{S_1^2}{4}+\frac{S_1S_3}{2}}{1-\frac{\omega_0^2}{\omega^2}\left[1+\frac{S_1^2}{4}+\frac{5S_1S_3}{12}\right]}\right|$$

estando S_3 dada por (12). Esta fórmula, aunque correcta, no es de expresiva estructura; preferiremos agregar un pequeño error para lograr una apropiada generalización del caso de la corriente alternada sin hierro. Para ello retomemos 7(a) y dividámosla por $1+\frac{S_1^2}{4}+\frac{S_1S_3}{2}$

$$(15) \quad S_1\left\{\frac{4}{4+S_1^2+2S_1S_3} - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}\,\frac{4+S_1^2+\frac{5S_1S_3}{3}}{4+S_1^2+2S_1S_3}\right\} = \frac{u^0}{L_0\omega\eta_0}$$

Ahora bien, como es lícito despreciar las potencias superiores de S_3:

$$\frac{4+S_1^2+\frac{5}{3}S_1S_3}{4+S_1^2+2S_1S_3} \approx \left(4+S_1^2+\frac{5}{3}S_1S_3\right)\left\{\frac{1}{4+S_1^2}-\frac{2S_1S_3}{(4+S_1^2)^2}\right\} \approx$$

$$= \frac{4+S_1^2+\frac{5}{3}S_1S_3}{4+S_1^2} - \frac{2S_1S_3}{4+S_1^2} = \frac{12+3S_1^2-S_1S_3}{12+3S_1^2}$$

Consideremos la relación $\frac{S_1S_3}{12+3S_1^2}$; en el peor de los casos, o sea cuando $S_1 \to \infty$, esta función vale $-0{,}0765$. Cuando $S_1=2$ esa relación vale $-0{,}0072$, de modo que cometemos un pequeño error, en el peor de los casos del orden de los anteriores, si despreciamos S_1S_3 frente a $12+3S_1^2$. Luego podremos decir $\frac{4+S_1^2+5/3\,S_1S_3}{4+S_1^2+2S_1S_3} = 1$ y en lugar de la 7(a):

$$(16) \quad S_1\left\{\frac{4}{4+S_1^2+2S_1S_3} - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}\right\} = \frac{u^0}{L_0\omega\eta_0}$$

Se ve que si en lugar de la condición de resonancia (8) se toma la (17) $\dfrac{\omega_0^2}{\omega^2} = \dfrac{4}{4+S_1^2+2S_1S_3}$

en lugar de 12(a) se obtiene

$$(18) \qquad \frac{S_3}{S_1} = - \frac{\left(S_1^2 + \frac{S_1^4}{4}\right)}{\frac{32}{3} + 5S_1^2 + \frac{7}{6}S_1^4}$$

que prácticamente da los mismos resultados que (12). Por tanto, en el caso $\delta = 0$, las sencillas fórmulas que proponemos son:

$$(19) \left\{ S_1 = \frac{\mu^0 I_0 \omega \gamma_2}{\sqrt{\left[q(S_1,S_3) - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}\right]^2}} \; ; \; q(S_1 S_3) = \frac{4}{4+S_1^2+2S_1S_3} \; ; \; S_3 = \frac{-\frac{S_1^2}{4}}{\frac{3}{4}S_1^2 + 3\frac{\omega_0^2}{\omega^2}\left[\frac{S_1^4}{48} + \frac{S_1^2}{4} + \frac{1}{3}\right]} \right.$$

Esta fórmula tiene la misma estructura que la de Zenneck-Schunk; la única diferencia estriba en la función de S_1 propuesta; en el caso de aquellos autores se escribía:

$$(20) \qquad q = \frac{2}{S_1^2}\left[\sqrt{1+S_1^2} - 1\right]$$

Comparemos algunos valores de (20) con la fórmula correspondiente en (19) y 12(a) es decir con:

$$q(S_1,S_3) = \frac{4}{4+S_1^2+2S_1S_3} \; ; \qquad \frac{S_3}{S_1} = - \frac{\left(S_1^2 + \frac{S_1^4}{4}\right)}{\frac{32}{3} + 5S_1^2 + \frac{13}{12}S_1^4}$$

S_1	$f(S_1)$	$q(S_1,S_3)$
0	1,000	1,000
1	0,826	0,824
2	0,620	0,600
2,5	0,541	0,508
3	0,480	0,429

Como se ve, la coincidencia es excelente hasta $S_1=1$ (error de 2,5%), muy buena hasta $S_1=2$(error de 3%). Para $S_1=2,5$ el error es de aproximadamente 65% y para $S_1=3$ llega ya al 10%.

Dada la fuerte no linealidad que tenemos ya en $S_1=3$ puede admitirse que hasta allí la fórmula de Zenneck-Schunk da una aproximación aceptable. Para no linealidades mucho mayores ambas fórmulas no tienen ningún parecido puesto que $f(S_1)$ se comporta asintóticamente para $S_1 \to +\infty$ como $2/S_1$ mientras que la función aquí hallada se comporta como $7/S_1^2$. Como ya dijimos observando la figura 5 del § 1 y la tabla adjunta vemos que una intensidad de amplitud $S_1=3$ o sea una intensidad del orden de 3 representa el 80 % de la saturación[5], de modo que la fórmu-

(5) Véase la nota (3) de este mismo parágrafo.

la de Zenneck-Schunk basta para explicar casi todos los casos de interés práctico. Para no-linealidades mayores convendrá tomar como fórmulas del equilibrio la (14) con la (12b). Muy cerca del punto S de resonancia puede tomarse la (14) con la (12a). Con un pequeño error adicional puede tomarse la (19) como fórmulas de equilibrio.

Resultados de cálculos en que no se desprecian las potencias superiores de S_3.

Es muy fácil desarrollar algunos cálculos de pulimiento al estudio anterior. Por ejemplo se puede ensayar sólo la primera y la tercera armónica sin despreciar las potencias superiores de esta última. Los resultados son:

$$(21)\begin{cases} \cos\tau \Rightarrow S_1\left\{1-\frac{\omega_0^2}{\omega^2}\left[1+\frac{S_1^2}{4}+\frac{S_3^2}{2}+\frac{5S_1S_3}{12}\right]\right\}=\frac{u^0}{L\omega^2}\left[1+\frac{S_1^2}{4}+\frac{S_3^2}{2}+[illegible]\right] \\ \cos 3\tau \Rightarrow S_3\left\{\frac{3S_3}{S_1}-\frac{\omega_0^2}{\omega^2}\left[\frac{S_3}{3S_1}+\frac{S_1^2}{4}+\frac{S_3S_1}{6}+\frac{S_3^2}{12S_1}\right]\right\}=-\left[\frac{u^0}{L\omega^2}\right]_0\frac{S_1^2}{4} \end{cases}$$

La combinación lineal de ambas:

$$(22)\ F_2(S_1,S_3)=\frac{S_1^3}{4}+3S_3\frac{S_1^2}{4}+3S_3+\frac{3S_3^3}{2}-\frac{\omega_0^2}{\omega^2}\left[\frac{S_1^4S_3}{48}+\frac{S_3}{3}+\frac{S_1^2S_3}{4}+\frac{S_3^3}{4}+\frac{5}{48}S_3^3S_1^2+\frac{S_3^5}{24}+\frac{S_3^2S_1}{6}+\frac{S_1^3S_3^2}{12}+\frac{S_1S_3^4}{24}\right]=0$$

Dado el ω_0^2/ω^2 de un circuito podemos obtener así su curva teórica, damos un valor arbitrario a S_1, mediante (22) calculamos S_3, gráficamente por ejemplo, reemplazamos en (21) y obtenemos $\left[u^0/L\omega^2\right]_0$. La amplitud de intensidad correspondiente será $\sqrt{S_1^2+S_3^2}$. Si en (22) anulamos las potencias superiores de S_3 obtendremos los resultados anteriores. También se puede lograr una mejor aproximación analítica despreciando en (22) las potencias de S_3 superiores a la segunda y despejando S_3 en función de S_1 lo que da:

$$(23)\ S_3=\frac{3\left(1+\frac{S_1^2}{4}\right)-\frac{\omega_0^2}{\omega^2}\left[\frac{S_1^4}{48}+\frac{1}{3}+\frac{S_1^2}{4}\right]\pm\sqrt{\left\{3\left(1+\frac{S_1^2}{4}\right)-\frac{\omega_0^2}{\omega^2}\left[\frac{S_1^4}{48}+\frac{1}{3}+\frac{S_1^2}{4}\right]\right\}^2+}}{2\frac{\omega_0^2}{\omega^2}\left[\frac{S_1}{6}+\frac{S_1^2}{12}\right]}$$

$$\frac{\overline{+S_1^3\frac{\omega_0^2}{\omega^2}\left[\frac{S_1}{6}+\frac{S_1^3}{12}\right]}}{2\frac{\omega_0^2}{\omega^2}\left[\frac{S_1}{6}+\frac{S_1^3}{12}\right]}$$

Estos pulimientos son prácticamente imposibles en el caso de seguir el método de Zenneck-Schunk de dejar la no-linealidad afectando a la derivada de mayor orden, puesto que es necesario resolver ecuaciones del sexto grado.

§3. <u>Significado de la Estabilidad e Inestabilidad de Curvas Características. Exposición del problema de Estabilidad que nos proponemos. Crítica de la Literatura.</u>

El objeto principal de este trabajo es discutir la estabilidad de los fenómenos cuyo equilibrio ha sido explicado en parágrafos anteriores, en las zonas de resonancia no-lineal, aun cuando ellas estén caracterizadas por una no-linealidad fuerte (es decir por intensidades grandes, cercanas, digamos, de la saturación).

Veamos, en forma rápida, el significado físico de la estabilidad refiriéndonos primero al fenómeno de ferroresonancia cuya curva característica teórica hemos representado nuevamente en la figura 1. μ^o y η^o son nuevamente las amplitudes de la f.e.m. y de la intensidad, respectivamente. Sea P un punto cualquiera de esa curva de coordenadas $(\mu^o)_P$ y $(\eta^o)_P$. Puesto que en el circuito serie de ferroresonancia podemos mandar o imponer la f.e.m., supongamos que la perturbamos mediante una variación infinitésima. A esta perturbación conocida, perturbación-dato de la f.e.m. el circuito responderá con una perturbación incógnita de la intensidad. Si para el punto de coordenadas $(\mu^o)_P$ y $(\eta^o)_P$ esa perturbación de la intensidad permanece infinitésima para todos los tiempos positivos ese punto es téoricamente estable. Si por el contrario, ella crece indefinidamente el punto es teóricamente inestable.

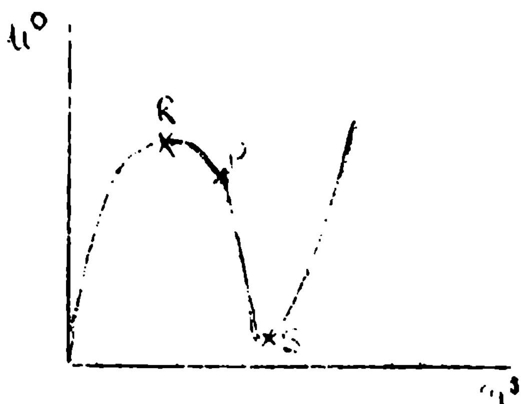


Fig. 1

Nuestro resultado general será que los puntos R y S de transición entre zonas ascendentes y descendentes son también puntos de transición entre zonas estables e inestables. Las primeras corresponden a las zonas ascendentes de la curva característica, las segundas a las descendentes.

Naturalmente, esta definición del problema de estabilidad de curvas características se extiende de manera obvia a todos los fenómenos físicos cuyo equilibrio se caracteriza por la búsqueda de soluciones $\tilde{y}$ periódicas de una ecuación del tipo

$\frac{d\phi_s(\eta)}{dt} + R\,\mathcal{I} + \frac{1}{C}\int \mathcal{I}\,dt = \mu^0 \cos\omega t$ La amplitud de intensidad será, en general, $\eta^2 = \sqrt{\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} \mathcal{I}^2 dt}$ y podemos definir siempre una curva característica $\eta^0 = \eta^0(\mu^0)$. La estabilidad de esta última se define de idéntica manera que en el caso de la ferroresonancia.

Ya en 1922 Zenneck y Schunk dijeron que la zona descendente no era obtenible experimentalmente pero no discutieron teóricamente su estabilidad. Desde entonces muchos autores han afirmado que esa zona es inestable teóricamente lo que equivale a decir que no puede ser alcanzada. La inversa no es cierta: una zona podría ser estable teóricamente y por dificultades experimentales no ser alcanzada en la práctica. Nosotros nos proponemos desarrollar un método o criterio que permita discutir la estabilidad, aun para no linealidades fuertes. Será condición sine qua non de este método que en las zonas ascendentes proporcione estabilidad puesto que dichas zonas son alcanzadas por la experiencia , condición cumplida por nuestros resultados, como veremos.

El mencionado problema de estabilidad del fenómeno de ferroresonancia y otros semejantes ha sido indicado o esbozado muchas veces en la moderna Mecánica no-lineal.

Numerosas obras recientes estudian el equilibrio de los circuitos citados no con la fórmula empírica de Dreifuss sino con:

$$(1) \qquad \mathcal{I} = A\,\phi - b\,\phi^3$$

siendo $\mathcal{I}$ y ϕ la intensidad de corriente y el flujo del vector B. Es evidente que esta fórmula representará convenientemente la curva de imantación media si nos limitamos a intensidades bastante pequeñas, pues $\mathcal{I}$ puede, efectivamente, considerarse como una función impar de ϕ . Si sustituímos (1) en

$$(2) \qquad \frac{d^2\phi}{dt^2} + R\,\dot{\mathcal{I}} + \frac{1}{C}\,\mathcal{I} = -\mu^0 \cos\omega t$$

$$(3) \qquad \ddot{\phi} + R\,(A - 3b\,\phi^2)\,\dot{\phi} + \frac{A}{C}\,\phi - \frac{b}{C}\,\phi^3 = -\mu^0\,\omega \operatorname{sen}\omega t$$

En el caso R = 0 la (3) se reduce a la llamada ecuación de Duffing:

$$(4) \qquad \ddot{\phi} + \frac{A}{C}\,\phi - \frac{b}{C}\,\phi^3 = -\mu^0\,\omega \operatorname{sen}\omega t$$

En esta ecuación la no-linealidad se ha introducido, pues, como un agregado en los términos potenciales, o sea losque corresponderían a fuerzas de tipo elástico. Algunos autores, Kryloff-Bogoliuboff[1], por ejemplo, estudian ecuaciones del tipo (4) suponiendo que b/c es muy pequeño, digamos de cuadrado despreciable frente a 1. Esta última suposición se hace en el trabajo de Stoker[2] al estudiar la estabilidad de la ecuación (4). Es decir, estos autores introducen en el estudio de la estabilidad, la no-linealidad como un pequeño factor correctivo, lo que, naturalmente, no puede ser cierto cerca de la saturación. En general, aun cuando estudiamos el equilibrio, el uso de fórmulas empíricas del tipo (1) presenta un serio inconveniente. Supongamos que mediante coeficientes b bastante fuertes logremos que la fórmula (1) representa bien la curva de imantación hasta un cierto valor de la intensidad. Si queremos que ande bien aún para no-linealidades mucho más grandes (digamos intensidades que se acerquen a la de saturación) debemos considerar en lugar de (1) otra fórmula empírica que contenga las potencias impares superiores de ψ . Pues bien, al agregar a (1) un nuevo término potencial hay que comenzar todo el tratamiento de nuevo. Ya considerando la quinta potencia como lo ha hecho Keller[3] el cálculo se complica notablemente. Y si no basta tal aproximación hay que emprender un nuevo estudio cada vez más complicado. Tal inconveniente no se presenta con la curva de Dreifuss.

En resumen, la estabilidad de estos fenómenos ha sido sólo considerada por dichos autores dentro del marco de una Mecánica Quasi-Lineal. Nuestro propósito es, en cambio, desarrollar un criterio de la estabilidad de la zona de resonancia aun cuando ello signifique una Mecánica fuertemente no-lineal, criterio que deberá mostrar estabilidad en las zonas alcanzadas seguramente por la experiencia.

(1) Kryloff y N. Bogoliuboff (ver Bibliografía).

(2) J.J.Stoker, Non Linear Vibrations (1950) Cap. VI.

(3) Keller: Mathematics of Modern Engineering (vol. II).

§4. Teoría de la Estabilidad del Fenómeno Resonante Serie. Generalización a otros fenómenos. Crítica comparativa de los Métodos de Estabilidad de Kryloff-Bogoliuboff.

En este parágrafo expondremos un método que permite discutir la estabilidad del fenómeno de ferroresonancia admitiendo la idea de Zenneck-Schunk expuesta en el § 1, de que, cerca de la resonancia, podemos despreciar el efecto de las armónicas superiores de la intensidad en el equilibrio.

La ecuación diferencial del equilibrio es la (3) del § 1 que derivada respecto a τ puede escribirse:

$$(1)\quad \psi_{(i)}\,\ddot{i} + \psi'\,\dot{i}^2 + \delta\,\dot{i} + \frac{u_0^2}{\omega^2}\,i = -\bar{u}^0 \sin\tau\,; \quad \bar{u}^0 = \frac{u^0}{L_0\omega}\,; \quad \psi' = \frac{d\psi}{di}$$

De acuerdo con los citados autores, cerca de la resonancia una solución aproximada de (1) será:

$$(2)\qquad i = a^0 \cos(\tau + \alpha^0) = a^0 \cos z^0$$

en que a^0 y α^0 representan la amplitud y la constante de fase de la intensidad.

Si imaginamos una perturbación infinitésima de la f.e.m., la amplitud y la fase quedarán también perturbadas, de modo que no serán constantes sino funciones de τ (1).

En lugar de (2), después de la perturbación de la f.e.m. la solución aproximada de (1) será:

$$(3)\quad i(\tau) = a(\tau)\cos(\tau + \alpha(\tau)) = a(\tau)\cos z(\tau)\,;\quad z(\tau) = \tau + \alpha(\tau)$$

$$\dot{i}(\tau) = -a \sin z + \dot{a}\cos z - a\dot{\alpha}\sin z$$

Como tenemos dos incógnitas (a y α) y una sola ecuación diferencial (la 1) podemos imponerles una condición arbitraria. Ella será que:

$$(4)\quad \dot{a}\cos z - a\dot{\alpha}\sin z = 0$$

(1) En este tratamiento supondremos, por simplicidad, que la perturbación dato de la f.e.m. se realiza mediante un impulso. Es fácil desarrollar un tratamiento paralelo en el caso que dicha perturbación esté representada por una función. Ello arroja los mismos resultados, en esencia.

de modo que

$$(5) \qquad \dot{y}(\tau) = -a \operatorname{sen} z$$

Este es un artificio usado en la Astronomía de antiguo y modernamente, por ejemplo, por Kryloff-Bogoliuboff en Mecánica Quasi-Lineal y su objeto es obtener ecuaciones diferenciales de perturbación del primer orden.

$$(6) \qquad \ddot{y}(\tau) = -a \cos z - \dot{a} \operatorname{sen} z - a\dot{\alpha} \cos z$$

Si reemplazamos (3),(5) y (6) en (1) obtendremos una nueva ecuación diferencial para a y α, que agregada a la (4) nos da el sistema buscado de ecuaciones de perturbación:

$$(7) \begin{cases} F_1(a,\alpha,\dot{a},\dot{\alpha}) = \Psi(a\cos z + \dot{a} \operatorname{sen} z + a\dot{\alpha}\cos z) - \Psi' a^2 \operatorname{sen}^2 z + \int a \operatorname{sen} z \\ \qquad\qquad - \frac{\omega_0^2}{\omega^2} a \cos z - \bar{\mu}^0 \operatorname{sen} \tau = 0 \\ F_2(a,\alpha,\dot{a},\dot{\alpha}) = \Psi \dot{a} \cos z - \Psi a \dot{\alpha} \operatorname{sen} z = 0 \end{cases}$$

Si se compara el ensayo de Zenneck-Schunk para el equilibrio (fórmula 2) con el nuestro para perturbaciones (fórmula 3), es obvio que a partir de (7) podremos obtener nuevamente las ecuaciones del equilibrio haciendo en (7) $\dot{a} = \dot{\alpha} = 0$; $a = a^0$; $\alpha = \alpha^0$ con lo cual dicho sistema se reduce a la única ecuación

$$(8) \qquad F_1(a^0, \alpha^0, 0, 0) = 0$$

Es muy fácil demostrar que esta exigencia teórica se cumple, puesto que la ecuación (8) no es más que la derivada respecto a z^0 de la ecuación (9) del § 1, que representa el equilibrio de Zenneck-Schunk.

Usando la relación (15) del § 1 se ve enseguida que, como era de esperar, el sistema (11) del § 1 puede escribirse simbólicamente:

$$(8) \begin{cases} \int_{z^0}^{z^0+2\pi} F_1(a^0,\alpha^0,0,0) \cos z^0 \, dz^0 = 0 \\ \int_{z^0}^{z^0+2\pi} F_1(a^0,\alpha^0,0,0) \operatorname{sen} z^0 \, dz^0 = 0 \end{cases}$$

El sistema de ecuaciones de perturbación es no lineal. Nuestra tarea inmediata será lograr, a partir de él, un sistema lineal que sea fácilmente interpretable. Para ello desarrollemos $F_1(a,\alpha,\dot a,\dot\alpha)$ y $F_2(a,\alpha,\dot a,\dot\alpha)$ en serie de Taylor "alrededor del punto de equilibrio" $(a^o,\alpha^o,0,0)$.

$$
(9)\left\{\begin{aligned}
F_1(a,\alpha,\dot a,\dot\alpha) &= F_1(a^o,\alpha^o,0,0)+\left(\frac{\partial F_1}{\partial a}\right)_o(a-a^o)+\left(\frac{\partial F_1}{\partial \alpha}\right)_o(\alpha-\alpha^o)+\left(\frac{\partial F_1}{\partial \dot a}\right)_o\dot a+\left(\frac{\partial F_1}{\partial \dot\alpha}\right)_o\dot\alpha \\
&\quad +\ldots = 0\\
F_2(a,\alpha,\dot a,\dot\alpha) &= F_2(a^o,\alpha^o,0,0)+\left(\frac{\partial F_2}{\partial a}\right)_o(a-a^o)+\left(\frac{\partial F_2}{\partial \alpha}\right)_o(\alpha-\alpha^o)+\left(\frac{\partial F_2}{\partial \dot a}\right)_o\dot a+\left(\frac{\partial F_2}{\partial \dot\alpha}\right)_o\dot\alpha+\ldots=0
\end{aligned}\right.
$$

donde el símbolo $\left(\frac{\partial F}{\partial}\right)_o$ significa que la derivada se toma en el "punto de equilibrio" $(a^o,\alpha^o,0,0)$.

Si despreciamos los términos indicados por los puntos suspensivos que contienen potencias superiores de $a-a^o$, $\alpha-\alpha^o$, $\dot a$ y $\dot\alpha$ nuestro sistema quedará linealizado. El significado físico de tal desprecio es que nos colocamos en la suposición de que obtendremos estabilidad. Por tanto, en las zonas donde obtengamos inestabilidad, nuestras demostraciones matemáticamente no serán de carácter suficiente. Aun más, es sabido desde la célebre memoria de Liapounoff [2] que, en muchos casos, despreciar las perturbaciones superiores puede no dar condiciones suficientes aun en el caso de que, efectivamente, se obtenga estabilidad. Sin embargo, las ideas empleadas en nuestra linealización han sido frecuentemente tratadas por físicos, astrónomos y técnicos en lo que se podría llamar Teoría de la Estabilidad Infinitesimal, con éxito frecuente. Convendrá recordar, por ejemplo, que la definición de estabilidad infinitesimal de ecuaciones diferenciales no lineales que da Stoker [3], está caracterizada por una equivalente linealización.

Todo esto puede extenderse intuitivamente observando la figura 1. El punto de equilibrio es P caracterizado por los valores $(a^o, \alpha^o, 0,0)$. Después de aplicada la perturbación de la f.e.m. este punto P irá variando con τ. Al instante adimensional τ, tendremos el punto

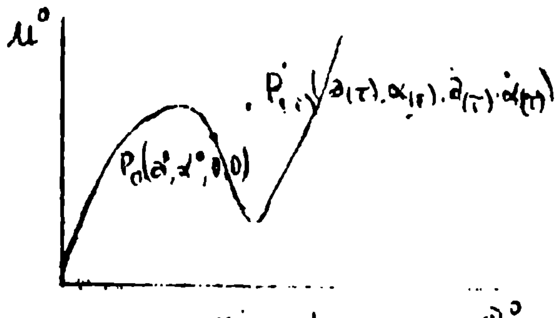


Fig. 1

(2) A.Liapounoff:Problème Général de la Stabilité de Mouvement (Véase por ejemplo el prólogo).
(3) Stoker, op.cit.,Cap. IV,11,pág. 115.

$P'(\tau)$ de "coordenadas" $(a(\tau), \alpha(\tau), \dot a(\tau), \dot\alpha(\tau))$ La anterior linealización supone pues que $P'(\tau)$ quedará siempre muy próximo a P_0. A pesar de ello, si al crecer τ, $P'(\tau)$ se aleja indefinidamente de P_0 diremos que este punto de eq ilibrio es inestable, lo que está de acuerdo con las ideas empleadas en la estabilidad infinitesimal.

Observando (7) es evidente que se cumple:

$$(10) \qquad F_2\,(a^\circ, \alpha^\circ, 0, 0) = \left(\frac{\partial F_2}{\partial a}\right)_0 = \left(\frac{\partial F_2}{\partial \alpha}\right)_0 = 0$$

Debido a la ecuación de equilibrio (8), a las relaciones (10) y al hecho de que en (9) despreciamos los términos superiores por el citado método de linealización, nuestro sistema de perturbaciones queda:

$$(11)\begin{cases} \text{I)} & \left(\dfrac{\partial F_1}{\partial a}\right)_0 (a-a^\circ) + \left(\dfrac{\partial F_1}{\partial \alpha}\right)_0 (\alpha-\alpha^\circ) + \left(\dfrac{\partial F_1}{\partial \dot a}\right)_0 \dot a + \left(\dfrac{\partial F_1}{\partial \dot\alpha}\right)_0 \dot\alpha = 0 \\ \text{II)} & \left(\dfrac{\partial F_2}{\partial \dot a}\right)_0 \dot a + \left(\dfrac{\partial F_2}{\partial \dot\alpha}\right)_0 \dot\alpha = 0 \end{cases}$$

De esta manera ya hemos podido eliminar los términos de orden 0 o sea los correspondientes al equilibrio (fórmula 8) y además hemos logrado linealizar el sistema de perturbaciones.

Calculemos ahora, las siguientes derivadas parciales llamando $\psi_0 = \psi(a^\circ \cos z^\circ) = \psi(a^\circ \cos(\tau + \alpha^\circ))$:

$$(12) \left(\frac{\partial F_1}{\partial \dot a}\right)_0 = \psi_0 \operatorname{sen} z^\circ \,;\; \left(\frac{\partial F_1}{\partial \dot\alpha}\right)_0 = \psi_0 a^\circ \cos z^\circ \,;\; \left(\frac{\partial F_2}{\partial \dot a}\right)_0 = \psi_0 \cos z^\circ \,;\; \left(\frac{\partial F_2}{\partial \dot\alpha}\right)_0 = -\psi_0 a^\circ \operatorname{sen} z^\circ$$

Si, teniendo en cuenta las relaciones (12) multiplicamos $(11)_{I}$ por sen z^0, $(11)_{II}$ por cos z^0 y sumamos; si luego multiplicamos $(11)_{I}$ por cos z^0, $(11)_{II}$ por -sen z^0 y sumamos, en lugar del sistema (11) tendremos:

$$(13)\begin{cases} \text{I)} & \psi_0 \dot a + (a-a^\circ)\left(\dfrac{\partial F_1}{\partial a}\right)_0 \operatorname{sen} z^\circ + (\alpha-\alpha^\circ)\left(\dfrac{\partial F_1}{\partial \alpha}\right)_0 \operatorname{sen} z^\circ = 0 \\ \text{II)} & \psi_0 a^\circ \dot\alpha + (a-a^\circ)\left(\dfrac{\partial F_1}{\partial a}\right)_0 \cos z^\circ + (\alpha-\alpha^\circ)\left(\dfrac{\partial F_1}{\partial \alpha}\right)_0 \cos z^\circ = 0 \end{cases}$$

En lugar de τ consideraremos a $z^0 = \tau + \alpha^0$ como variable. El sistema (13) es el sistema fundamental de perturbaciones que se deduce con nuestro tratamiento de la Estabilidad. Para resolverlo supondremos que $(a-a^0)$, $(\alpha-\alpha^0)$, $\dot{a}$ y $\dot{\alpha}$ son muy lentamente variables en un período cualquiera, es decir, imaginaremos que en el intervalo $(z^0, z^0+2\pi)$, cualquiera sea z^0, $a-a^0$, $\alpha-\alpha^0$, $\dot{a}$ y $\dot{\alpha}$ son constantes, bien entendido que esta suposición deberá ser donfirmada por los resultados. Si integramos respecto a z^0 las dos ecuaciones de (13) entre z^0 y $z^0+2\pi$:

$$(14)\begin{cases} \text{I)} \displaystyle\int_{z^0}^{z^0+2\pi}\left\{\Psi_0\,\dot{a}(z^0) + (a-a^0)\left(\frac{\partial F_1}{\partial a}\right)_0 \operatorname{sen} z^0 + (\alpha-\alpha^0)\left(\frac{\partial F_1}{\partial \alpha}\right)_0 \operatorname{sen} z^0\right\} dz^0 = 0 \\ \text{II)} \displaystyle\int_{z^0}^{z^0+2\pi}\left\{\Psi_0\, a^0\dot{\alpha} + (a-a^0)\left(\frac{\partial F_1}{\partial a}\right)_0 \cos z^0 + (\alpha-\alpha^0)\left(\frac{\partial F_1}{\partial \alpha}\right)_0 \cos z^0\right\} dz^0 = 0 \end{cases}$$

Debido a la lenta variabilidad de $a-a^0$, $\alpha-\alpha^0$, $\dot{a}$ y $\dot{\alpha}$, podremos sacarlas fuera del signo integral. Es inmediato darse cuenta observando (7) que los factores Ψ_0, $\left(\frac{\partial F_1}{\partial a}\right)_0 \operatorname{sen} z^0$, $\left(\frac{\partial F_1}{\partial a}\right)_0 \cos z^0$, $\left(\frac{\partial F_1}{\partial \alpha}\right)_0 \operatorname{sen} z^0$, $\left(\frac{\partial F_1}{\partial \alpha}\right)_0 \cos z^0$ son periódicos respecto de z^0 de modo que la integral entre z^0 y $z^0+2\pi$ equivale a la integral entre $-\pi$ y $+\pi$. Por lo tanto, debido a la lenta variabilidad de las incógnitas el sistema (13) se reduce a un sistemas de dos ecuaciones diferenciales a coeficientes constantes, a saber:

$$(15)\begin{cases} \dot{a}(z_0)\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\Psi_0\,dz^0 + (a-a^0)\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{\partial F_1}{\partial a}\right)_0 \operatorname{sen} z^0\,dz^0 + (\alpha-\alpha^0)\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{\partial F_1}{\partial \alpha}\right)_0 \operatorname{sen} z^0\,dz^0 = 0 \\ a^0\dot{\alpha}(z_0)\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\Psi_0\,dz^0 + (a-a^0)\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{\partial F_1}{\partial a}\right)_0 \cos z^0\,dz^0 + (\alpha-\alpha^0)\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{\partial F_1}{\partial \alpha}\right)_0 \cos z^0\,dz^0 = 0 \end{cases}$$

En el Apéndice Matemático Nº 3 demostramos (ver fórmulas

$$(16)\begin{cases} \left(\dfrac{\partial F_1}{\partial a}\right)_0 = -\left[\dfrac{d^2}{dz^{0\,2}}\left(\Psi_0 \cos z^0\right) + \dfrac{\omega_0^2}{\omega^2}\cos z^0 - \delta \operatorname{sen} z^0\right] \\ \left(\dfrac{\partial F_1}{\partial \alpha}\right)_0 = a^0\left[\dfrac{d^2}{dz^{0\,2}}\left(\Psi_0 \operatorname{sen} z^0\right) + \dfrac{\omega_0^2}{\omega^2}\operatorname{sen} z^0 + \delta \cos z^0\right] \end{cases}$$

Recordemos las definiciones (10) del § 1:

$$q(a^0) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\Psi_0 \operatorname{sen}^2 z^0\,dz^0; \quad p(a^0) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\Psi_0 \cos^2 z^0\,dz^0$$

En el Apéndice Matemático Nº 3 mostramos, aunque son inmediatas a partir de (16), las siguientes relaciones:

$$(16')\quad\begin{cases} \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\psi_0\,dz^0 = p(a^0)+q(a^0), \quad \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\left(\dfrac{\partial F_1}{\partial a}\right)_0 \operatorname{sen} z^0\,dz^0 = \delta; \quad \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\left(\dfrac{\partial F_1}{\partial \alpha}\right)_0 \operatorname{sen} z^0\,dz^0 = -a^0\left(q(a^0)-\dfrac{\omega_0^2}{\omega^2}\right) \\ \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\left(\dfrac{\partial F_1}{\partial a}\right)_0 \cos z^0\,dz^0 = p(a^0)-\dfrac{\omega_0^2}{\omega^2}; \quad \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\left(\dfrac{\partial F_1}{\partial \alpha}\right)_0 \cos z^0\,dz^0 = \delta a^0 \end{cases}$$

Puesto que las relaciones (16) y (16′), como se verá, son de gran importancia en el presente tratamiento, convendrá recalcar que son independientes de la forma de la función $\psi = \psi(a^0, \alpha^0, z^0)$.

Si en (15) tenemos en cuenta (16) e introducimos las definiciones adimensionales:

$$(17)\qquad \xi(z^0) = \frac{a(z^0)-a^0}{a^0}, \quad \zeta(z^0) = \alpha(z^0)-\alpha^0$$

el sistema (15) queda:

$$(18)\quad\begin{cases} \dot{\xi}(z^0)\left(p(a^0)+q(a^0)\right) + \delta\,\xi - \left(q-\dfrac{\omega_0^2}{\omega^2}\right)\zeta = 0 \\ \dot{\zeta}\,(p+q) + \left(p-\dfrac{\omega_0^2}{\omega^2}\right)\xi + \delta\,\zeta = 0 \end{cases}$$

El sistema (18) se integra inmediatamente con el ensayo euleriano

$$(19)\qquad \xi = A e^{\mu z^0} \;;\; \zeta = B e^{\mu z^0}$$

donde A, B y μ no dependen de z^0.

Reemplazando (19) en (18):

$$(20)\quad\begin{cases} A\left[\mu(p+q)+\delta\right] - B\left[q-\dfrac{\omega_0^2}{\omega^2}\right] = 0 \\ A\left[p-\dfrac{\omega_0^2}{\omega^2}\right] + B\left[\mu(p+q)+\delta\right] = 0 \end{cases}$$

Para que el sistema homogéneo (20) tenga soluciones A y B no nulas μ debe satisfacer la ecuación algebraica:

$$(21)\qquad \mu^2 + \frac{2\delta\mu}{(p+q)} + \frac{\left[\left(q-\frac{\omega_0^2}{\omega^2}\right)\left(p-\frac{\omega_0^2}{\omega^2}\right)+\delta^2\right]}{(p+q)^2} = 0$$

Si recordamos la fórmula (16) del § 1 que nos daba la derivada de la curva característica (21) puede escribirse:

$$(22)\qquad \mu^2 + \frac{2\delta\mu}{(p+q)} + K^2(a^0)\,\frac{d\bar{\mu}^0}{da^0} = 0$$

Las raíces de (21) son:

$$(23)\begin{cases} \mu_1 = -\dfrac{\delta}{(p+q)} + \sqrt{\dfrac{\delta^2}{(p+q)^2} - K^2(a^0)\dfrac{d\bar{u}^0}{da^0}} = -\dfrac{\delta}{(p+q)} + \dfrac{\sqrt{-\left(p-\frac{\omega_0^2}{\omega^2}\right)\left(q-\frac{\omega_0^2}{\omega^2}\right)}}{(p+q)} \\ \mu_2 = -\dfrac{\delta}{(p+q)} - \sqrt{\dfrac{\delta^2}{(p+q)^2} - K^2(a^0)\dfrac{d\bar{u}^0}{da^0}} = -\dfrac{\delta}{(p+q)} - \dfrac{\sqrt{-\left(p-\frac{\omega_0^2}{\omega^2}\right)\left(q-\frac{\omega_0^2}{\omega^2}\right)}}{p+q} \end{cases}$$

Si observamos (19) es claro que si la parte real de μ_1 y μ_2 es negativa para todos los tiempos positivos ξ y ζ estarán acotados y tenderán a 0. Tendremos, pues, en ese caso, estabilidad. Si, en cambio, una de las soluciones, μ_1 ó μ_2 tiene parte real positiva, ξ y ζ crecerán indefinidamente y, por tanto, tendremos inestabilidad.

Para discutir convenientemente las soluciones (23) observemos que

$$(24) \qquad p + q > 0$$

pues siendo:

$$(25) \qquad \psi_0 = \frac{1}{L_0}\frac{d\phi}{d\psi} > 0 \quad \therefore \quad p > 0,\ q > 0.$$

Obviamente cuando $\dfrac{d\bar{u}^0}{da^0} > 0$ (zonas ascendentes) $R(\mu_1) < 0$[4], donde por $R(\mu_1)$ entendemos la parte real de μ_1. Cuando $\dfrac{d\bar{u}^0}{da^0} < 0$, $R(\mu_1) > 0$ (inestabilidad). En cualquiera de los dos casos $R(\mu_2) < 0$.

Luego μ_1 es la raíz decisiva para discutir la estabilidad.

En resumen, con sugestiva precisión, las zonas ascendentes resultarán ser estables, las descendentes, inestables.

Nuestra demostración no queda terminada pues para pasar del sistema (13) al (15) hemos hecho la suposición que ξ y ζ son muy lentamente variables en un período, suposición que debe ser confirmada por los resultados.

Por (19) ξ y ζ serán de la forma:

$$(26) \qquad \xi = c_1 A_1 e^{\mu_1 z^0} + c_2 A_2 e^{\mu_2 z^0}; \quad \zeta = c_1 B_1 e^{\mu_1 z^0} + c_2 A_2 e^{\mu_2 z^0}$$

donde A1 y B1 son las soluciones del sistema (20) cuando en él

(4) Naturalmente, esto se comprende observando el término independiente de (21).

se reemplaza μ por μ_1 y A_2 y B_2 son las correspondientes soluciones cuando se hace $\mu = \mu_2$.

En los puntos R y S de transición entre zonas ascendentes y descendentes, $\frac{d\bar{u}^o}{dz^o} = 0$, luego:

$$(27) \qquad \mu_1 = 0 \quad ; \quad \mu_2 = -\frac{2\delta}{(p+q)}$$

Siendo δ muy pequeño en los casos interesantes μ_2 se puede considerar muy pequeño y $e^{\mu_2 z^o}$ muy lentamente variable. Con más razón lo es $e^{\mu_1 z^o}$. Luego en entornos más o menos amplios de R y S nuestras suposiciones de lenta variabilidad se cumplen y por tanto allí las soluciones (26) son correctas: ellas señalan, para repetirlo, inestabilidad en las zonas descendentes y estabilidad en las ascendentes.

Luego queda probado que los puntos de transición entre zonas ascendentes y descendentes son también de transición entre zonas estables e inestables: las zonas ascendentes corresponden a la estabilidad, las descendentes a la inestabilidad.

Quizás sea oficioso decir que si μ_2 fuera relativamente grande(5) la solución $A_2 e^{\mu_2 z^o}$ debería ser no considerada por no cumplir las suposiciones de lenta variabilidad, pero ésto no podría invalidar la demostración de inestabilidad de las zonas descendentes, aunque sí la de estabilidad de las ascendentes. Ello se debe a que la raíz responsable de la inestabilidad es μ_1. Como μ_1 es siempre pequeña cerca de la resonancia, las soluciones que determina a través de (19) serán aún en ese caso, lentamente variables y por tanto válidas, y ellas muestran la inestabilidad de las zonas descendentes.

Generalización del problema de la Estabilidad

Es importante observar que en este tratamiento de la estabilidad sobre la función ψ_o sólo supusimos la condición (24)

$$(24) \qquad \int_{-\pi}^{\pi} \psi_o \, dz^o = p + q \geqslant 0$$

Esto sugiere la siguiente generalización de nuestro problema de

(5) Esto ocurrirá, aun cerca de la resonancia, si δ fuera grande.

la Estabilidad: sea un fenómeno físico cuyo equilibrio está explicado por soluciones particulares periódicas de la ecuación no lineal:

$$(28) \qquad \frac{d\phi(J)}{dt} + RJ + \frac{1}{c}\int J\,dt = u^{0}\cos\omega t$$

donde supondremos que $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\phi(J)}{dJ}\,dz^{0} \geq 0$.

De la manera explicada en el § 3 podemos definir la curva característica:

$$(29) \qquad A^{0} = A^{0}(u^{0})$$

donde $A^{0} = \sqrt{\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} J^{2}\,dt}$ siendo J una solución periódica de (28). Supongamos ahora que estudiamos la curva característica (29) para un ámbito de valores de u^{0} tal que podamos despreciar la influencia de todas las armónicas menos la fundamental, es decir, un ámbito de valores en que la curva (29) se explique convenientemente ensayando en (28).

$$(30) \qquad J = a^{0}\cos(\tau + \alpha^{0})$$

En esa región tendremos:

(31) $A^{0} = a^{0}$; $a^{0} = a^{0}(u^{0})$ es la cruva característica. Pues bien, el método de estabilidad que desarrollamos en este parágrafo permite discutir la estabilidad de la curva característica (31) y demostrar que, con toda generalidad, los puntos de transición entre zonas ascendentes y descendentes de (31) son también de transición entre zonas estables e inestables, respectivamente.

El problema planteado en el § 3 y los resultados de estabilidad del § 4 quedan así considerablemente generalizados.

Esta generalización tiene interés físico pues muestra que nuestras discusiones de estabilidad son válidas aun en el caso en que no se hubiera despreciado la influencia del campo magnético en el equilibrio.

Además, dicha generalización da a nuestros resultados una cierta prescindencia de la aproximación un tanto burda que importa la fórmula empírica de Dreifuss.

<u>Crítica comparativa de los métodos de Estabilidad de Kryloff y Bogoliuboff[6] desarrollados en la Mecánica Quasi Lineal.</u>

(6) Kryloff-Bogoliuboff (ver Bibliografía).

Los matemáticos rusos Kryloff y Bogoliuboff, al realizar estudios de Mecánica Quasi-Lineal, discuten a menudo problemas de estabilidad involucrando ideas que presentan fuertes diferencias conceptuales con las que han inspirado nuestro método desarrollado en el § 4. Es nuestra intención, ahora, aclarar la naturaleza de dichas diferencias. Desde luego no haremos ahora hincapié en el carácter quasi-lineal de los métodos a que aludimos, ya que esa observación fué comentada en el § 3.

Los citados autores estudian ecuaciones diferenciales quasi-lineales del tipo:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \nu^2 x + \varepsilon f\left(x, \frac{dx}{dt}\right) = 0$$

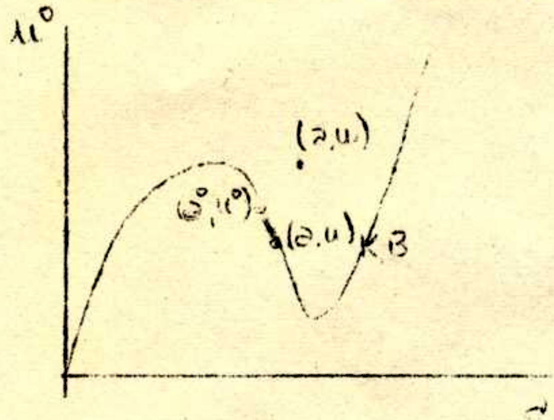
donde ε es un número pequeño (quasi-linealidad). Primero hacen $\varepsilon=0$ con lo que una solución de la ecuación mencionada es $x=a \operatorname{sen}(\nu t + \phi)$ en que a y ϕ son constantes. Para poder dar cuenta de la no-linealidad representada por el término $\varepsilon f(x, \frac{dx}{dt})$, suponen luego que a y ϕ, en lugar de ser constantes, son funciones de t muy lentamente variables en un período y obtienen para a y ϕ un sistema de ecuaciones no lineales de la forma:

$$\frac{da}{dt} = \frac{\varepsilon}{\nu} K_0(a) \qquad \frac{d\phi}{dt} = \frac{\varepsilon}{\nu} P_0(a)$$

en que $K_0(a)$ y $P_0(a)$ son dos funciones de a cuyo significado no viene al caso mencionar. Este sistema de ecuaciones <u>define, para los citados autores, el sistema de ecuaciones de equilibrio</u>. Este sistema se integra inmediatamente por cuadraturas. Desde luego, todo esto no ofrece ningún reparo. Lo que nos parece dudoso es lo siguiente: una vez integrado el citado sistema de equilibrio, estos autores aplican el siguiente criterio de estabilidad: si las soluciones de equilibrio $a(t)$, $\phi(t)$, soluciones del citado sistema, permanecen acotadas para todos los tiempos positivos, dichos autores afirman que las soluciones halladas son estables. Si, por el contrario crecen indefinidamente, dichas soluciones son inestables. Es decir dichos autores discuten la estabilidad sobre las mismas ecuaciones diferenciales cuyo estudio abordan.

Este criterio no es muy ortodoxo. Desde la época de Poincaré[7], de Routh, de Liapounoff, los matemáticos saben que para tratar la estabilidad de las soluciones de una ecuación diferencial, no hay que estudiar el comportamiento asintótico de dichas soluciones sino el de las soluciones de la así llamada ecuación de variaciones.

Para comprender el significado físico de la diferencia entre ese criterio y el método que hemos desarrollado en el § 4, supongamos que estudiamos con ambos criterios un mismo problema, por ejemplo el de la estabilidad de la curva característica de los fenómenos resonantes serie tratados en este trabajo. Para facilitar la comparación imaginemos que en lugar de haber realizado una perturbación impulso de la f.e.m., dicha perturbación está representada por una función $\gamma(\tau)$ lo que no modifica en esencia la naturaleza del método. Sea (a^{o}, u^{o}) el punto de equilibrio. En nuestro método desarrollado en el



§4 pasamos al punto (a,u) al tiempo τ después de iniciada la perturbación, punto que, en general, se encuentra fuera de la curva de equilibrio. Es decir, para estudiar la estabilidad, nos salimos de la curva de equilibrio. El otro criterio, en cambio, permitirá sólo una variación del punto sobre la misma curva de equilibrio, puesto que la estabilidad se discute sobre las mismas funciones que la definen. Una tal perturbación puede calificarse de parcial o especial. Y es claro que si una perturbación parcial muestra inestabilidad, las soluciones que caracterizan el equilibrio son seguramente inestables. Pero, en cambio, si una perturbación parcial muestra estabilidad, no podemos concluir que aquellas soluciones sean efectivamente estables.

(7) H.Poincaré: Les Méthodes Nouvelles de la Mécanique Céleste.

§5. Teoría del Equilibrio y Estabilidad del Circuito Resonante PAralelo.

En este parágrafo desarrollaremos un sencillísimo método para resolver, al mismo tiempo, los dos problemas enunciados en el título. En esencia el método consistirá en reducir dichos problemas a los correspondientes del circuito resonante serie, que ya hemos estudiado. En el equilibrio de la zona de resonancia nos conformaremos con la aproximación correspondiente a la que han tomado Zenneck y Schunk al tratar el circuito serie (ver § 1). El circuito paralelo resonante que queremos estudiar es el formado por las ramas I y II de la figura 1. Todo el resto del esquema representa elementos accesorios. Este circuito presenta un especial interés teórico desde el punto de vista de la estabilidad pues en él se puede imponer o bien la f.e.m. u^* o bien la intensidad total J, según el valor de la resistencia W. Si ella es muy grande, de modo que cuando varíe la f.e.m. del generador G, la caída de f.e.m. entre los puntos A y B quede prácticamente constante, entonces en el circuito paralelo podemos imponer la intensidad de corriente. Si, por el contrario W es pequeã, podemos imponer u^*. Las curvas experimentales de estos fenómenos tienen la forma de la figura 4 del § 1. En el caso en que se imponga u^* evidentemente se obtendrán las zonas descendentes puesto que dicha curva es monovaluada respecto de u^*. Nuestro problema será tratar , en cambio, el caso en que imponemos la intensidad de corriente total J. Tendremos:

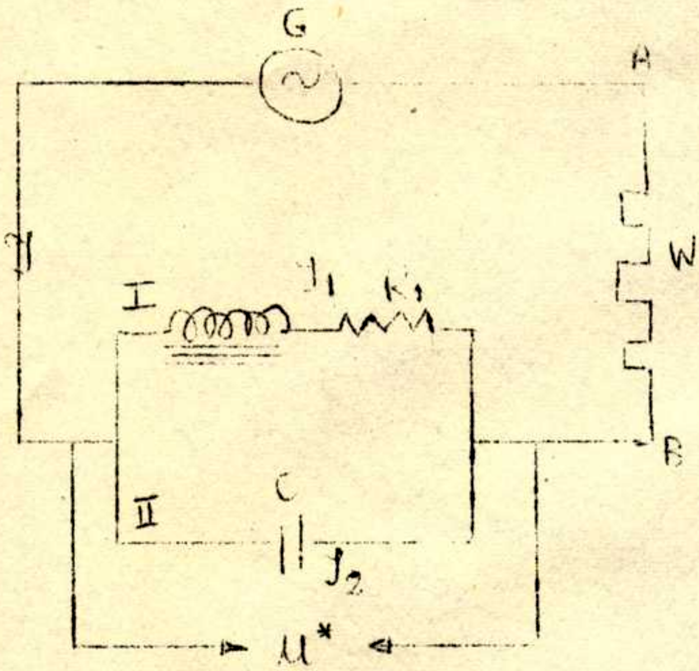


Fig. 1

$$(1) \qquad J = -a^\circ \sin \omega t = -a^\circ \sin \tau \qquad \tau = \omega t$$

Nuestras ecuaciones diferenciales serán, llamando J_1 la intensidad que pasa por la rama I e J_2 la que pasa por la rama II,

$$(2) \quad u^* = \frac{d\Phi(J_1)}{dt} + R_1 J_1 \,, \qquad (3) \quad u^* = \frac{1}{c}\int J_2\, dt \,, \qquad (4) \quad J = J_1 + J_2$$

Luego (3) queda:

$$(5) \qquad u^{*} = \frac{1}{C}\int (J - J_1)\,dt$$

Comparando (2) y (5):

$$(6) \quad \frac{d\phi(J_1)}{dt} + R_1 J_1 + \frac{1}{C}\int J_1\,dt = \frac{1}{C}\int J\,dt = \frac{a^0}{C\omega}\cos\tau$$

Llamando $\frac{d\phi(J_1)}{dJ_1} = L_0\,\psi(J_1)$ donde $L_0 = \left(\frac{d\phi}{dJ_1}\right)_{J_1 \to 0}$ tenemos:

$$\frac{d\phi(J_1)}{dt} = \frac{d\phi}{dJ_1}\dot{J}_1 = L_0\,\psi(J_1)\,\dot{J}_1$$

Si en (6) introducimos como nueva variable $\tau = wt$ y las definiciones $\delta_1 = \frac{R_1}{L_0\omega}$; $\omega_0^2 = \frac{1}{L_0 C}$, $\bar{a}^0 = \frac{\omega_0^2}{\omega^2}a^0$ tenemos:

$$(7) \quad \psi(J_1)\,\dot{J}_1 + \delta_1 J_1 + \frac{\omega_0^2}{\omega^2}\int J_1\,d\tau = \bar{a}^0\cos\tau$$

Si comparamos esta ecuación con la (3) del § 1, vemos que (7) representa un fenómeno resonante serie cuya intensidad es y cuya f.e.m. está representada por $\bar{a}^0$.

De acuerdo con las ideas explicadas en el § 1, cerca de la resonancia, para calcular la curva característica nos basta considerar el ensayo:

(8) $J_1^0 = a_1^0\cos(\tau + \alpha_1^0)$ resultando si se recuerdan las ecuaciones (12) del § 1:

$$(9) \quad a_1^0 = \frac{\bar{a}^0}{\sqrt{\left(q(a_1^0) - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}\right)^2 + \delta_1^2}}, \quad \operatorname{tg}\alpha_1^0 = \frac{\frac{\omega_0^2}{\omega^2} - q(a_1^0)}{\delta_1}; \quad q(a_1^0) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\psi(J_1^0)\sin^2(\tau+\alpha_1^0)\,d(\tau+\alpha_1^0)$$

En una palabra, donde en el § 1 decía $\bar{u}^0$ escribimos ahora $\bar{a}^0$ y donde decía η^0 escribimos a_1^0.

En el caso particular de Dreifuss si representamos $\bar{a}^0$ en función de a_1^0 obtendremos evidentemente una curva del tipo de la figura 2:

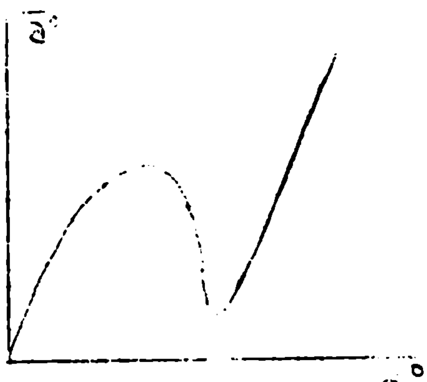
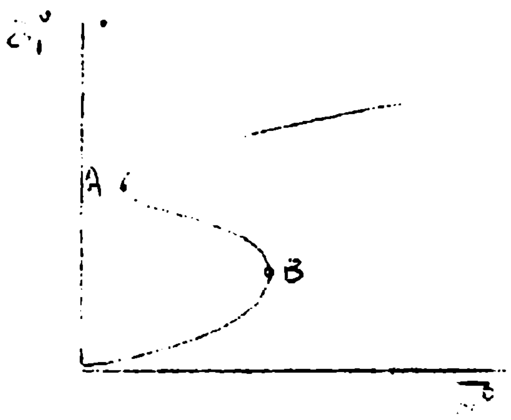


Fig. 2

Evidentemente a_1^0 en función de $\bar{a}^0$ será de la forma de la figura 3.
Como nuestro método de estabilidad, desarrollado en el § 4, es válido para estudiar la ecuación (7), evidentemente podremos decir ahora que los puntos de transición entre zonas ascendentes y descendentes de la curva de equilibrio (9) son también de transición entre zonas estables e ines-

tables, correspondiendo aquéllas a las regiones ascendentes, éstas a las descendentes. En el caso especial de Dreifuss, la zona descendente de la figura 3, comprendida entre A y B corresponde a la inestabilidad, las zonas ascendentes corresponden a la estabilidad.



En rigor, la aplicación del método del §4 al estudio de la estabilidad de la ecuación (7) nos permite sólo discutir las perturbaciones de J_1, no las de u^*. Sin embargo, si se observa la ecuación (5), y se recuerda que las soluciones que encontrábamos en el §4 para las perturbaciones de la amplitud y fase de la intensidad eran de tipo exponencial (ver ecs. (19) del §4), se comprenderá inmediatamente que, en nuestro caso actual, si J_1 resulta inestable también lo resultará u^*; si J_1 resulta estable lo mismo sucederá con u^*.

Ya sabemos, por tanto, que u^* será inestable para las zonas descendentes de la curva característica (9), estable para las zonas ascendentes. ¡Atención! : la demostración no queda terminada pues a nosotros nos interesa especialmente discutir el equilibrio y la estabilidad, no de la curva característica (9) sino de aquélla que represente la amplitud (llamémosla u^0) de la f.e.m. en función de a^0. Busquemos pues la ecuación de la curva característica $u^0 = u^0(a^0)$. Como en el equilibrio hemos escrito $J_2^0 = -a^0 \sin\tau$, $J_1^0 = a^0\cos(\tau+\alpha_2^0)$, observando (5) es evidente que u^* será de la forma:

(10) $$u^* = u^0 \cos(\tau + \alpha_2^0)$$

Veamos como podemos relaciones u^0 con a_1^0. Para ello estudiemos la ecuación de equilibrio de la rama I que puede escribirse:

(11) $$\frac{u^*}{L_0\omega} = \Psi(J_1)\dot{J}_1 + S_1 J_1 = \frac{u^0}{L_0\omega}\cos(\tau+\alpha_2^0)$$

Llamando $\bar{u}^0 = \dfrac{u^0}{L_0\omega}$ y reemplazando $J_1 = +a_1^0\cos(\tau+\alpha_1^0)$:

(12) $$\bar{u}^0\cos(\tau+\alpha_1^0+\alpha_2^0-\alpha_1^0) = -\Psi(J_1)a_1^0\sin(\tau+\alpha_1^0) + S_1 a_1^0\cos(\tau+\alpha_1^0)$$

o sea:

(13) $$\bar{u}^0\left[\cos(\alpha_2^0-\alpha_1^0)\cos(\tau+\alpha_1^0) - \sin(\alpha_2^0-\alpha_1^0)\sin(\tau+\alpha_1^0)\right] =$$
$$= -\Psi(J_1)a_1^0\sin(\tau+\alpha_1^0) + S_1 a_1^0\cos(\tau+\alpha_1^0)$$

Multipliquemos (13) por sen($\tau+\alpha_1^0$) e integremos respecto de $\tau+\alpha_1^0$ entre $-\pi$ y $+\pi$. Luego multipliquemos por cos($\tau+\alpha_1^0$) e integremos nuevamente:

$$(14)\quad \begin{cases} \bar{u}^0 \operatorname{sen}(\alpha_2^0-\alpha_1^0) = a_1^0 q(a_1^0) \\ \bar{u}^0 \cos(\alpha_2^0-\alpha_1^0) = a_1^0 \delta_1 \end{cases}$$

Cuadrando y sumando resulta:

$$(15)\qquad \bar{u}^0 = a_1^0 \sqrt{q(a_1^0)^2+\delta_1^2}$$

La ecuación (15) y la (9) forman el sistema:

$$(16)\quad \begin{cases} \bar{u}^0 = a_1^0 \sqrt{q(a_1^0)^2+\delta_1^2} \\ \bar{a}^0 = a_1^0 \sqrt{\left(q(a_1^0)-\frac{\omega_0^2}{\omega^2}\right)^2+\delta_1^2} \end{cases}$$

El sistema (16) puede considerarse como las ecuaciones paramétricas de parámetro a_1^0 de la curva característica buscada a saber $u^0=u^0(a^0)$. Con el hallazgo del sistema (16) hemos resuelto el problema de equilibrio planteado. Conviene recalcar que no hemos encontrado esas fórmulas en la literatura.

Hallemos ahora, a partir de (16) $\frac{d\bar{u}^0}{d\bar{a}^0}$. Para ello observemos:

$$\frac{d\bar{u}^0}{da_1^0} = \sqrt{q(a_1^0)^2+\delta_1^2} + \frac{a_1^0\, q\, \frac{dq}{da_1^0}}{\sqrt{q(a_1^0)^2+\delta_1^2}} = \frac{q\left(q + a_1^0 \frac{dq}{da_1^0}\right)}{\sqrt{q(a_1^0)^2+\delta_1^2}}$$

Si recordamos la relación (15) del § 1 tenemos:

$$p(a_1^0) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \psi(\vartheta_1^0)\cos^2(\tau+\alpha_1^0)\, d(\tau+\alpha_1^0) = q + a_1^0\frac{dq}{da_1^0}$$

Luego:

$$(17)\qquad \frac{d\bar{u}^0}{da_1^0} = \frac{qp}{\sqrt{q^2+\delta_1^2}}$$

Evidentemente:

$$(18)\qquad \frac{d\bar{a}^0}{da_1^0} = \frac{\left(q(a_1^0)-\frac{\omega_0^2}{\omega^2}\right)\left(p-\frac{\omega_0^2}{\omega^2}\right)+\delta_1^2}{\sqrt{\left(q-\frac{\omega_0^2}{\omega^2}\right)^2+\delta_1^2}}$$

De (17) y (18) se deduce:

$$(19)\qquad \frac{d\bar{u}^0}{d\bar{a}^0} = \frac{qp\sqrt{\left(q-\frac{\omega_0^2}{\omega^2}\right)^2+\delta_1^2}\left[\left(q-\frac{\omega_0^2}{\omega^2}\right)\left(p-\frac{\omega_0^2}{\omega^2}\right)+\delta_1^2\right]^{-1}}{\sqrt{q^2+\delta_1^2}}$$

Siendo $\psi(\vartheta_1) > 0$ resulta $q(a_1^0) > 0$, $p(a_1^0) > 0$ de modo que:

$$(20)\qquad \operatorname{sg}\frac{d\bar{u}^0}{d\bar{a}^0} = \operatorname{sg}\left[\left(q-\frac{\omega_0^2}{\omega^2}\right)\left(p-\frac{\omega_0^2}{\omega^2}\right)+\delta_1^2\right]$$

donde Sg indica la función signo.

Luego, las curvas características (9) y (16) presentan sus zonas descendentes en los mismo ámbitos de valores de $a_1^{\,o}$. Como habíamos demostrado que la f.e.m. es inestable para aquellos valores de $a_1^{\,o}$ en que la característica (9) es descendente, queda ahora demostrado que dicha inestabilidad corresponde también a las zonas descendentes de (16). Lo mismo sucede con la estabilidad de las zonas ascendentes.

De esta sencilla manera, probamos que las zonas descendentes de la característica del circuito resonante paralelo son inestables, las ascendentes estables, siempre que se imponga la intensidad de corriente.

§ 6. Teoría de la Estabilidad del Fenómeno Resonante Serie basada en los Métodos de Hill

En este parágrafo desarrollaremos un método de estabilidad que se acerca mucho más que el del § 4 a los ordinariamente usados en la literatura y en la Teoría Matemática de la Estabilidad de las Soluciones de Ecuaciones Diferenciales. La teoría que ahora desarrollaremos requiere un aparato matemático mucho más complejo que la anterior y hemos podido interpretar satisfactoriamente sus resultados para no-linealidades no muy poderosas.

Debemos buscar, ante todo, la así llamada ecuación de variaciones correspondiente a nuestra ecuación de equilibrio,

$$(1) \qquad \frac{d}{d\tau}\left(\Psi(J)\dot J\right) + \delta \dot J + \frac{\omega_0^2}{\omega^2} J = -\bar u^0 \sin\tau$$

Después de aplicada la perturbación de la f.e.m. podemos suponer que

$$(2) \qquad J = J^0(\tau) + \xi(\tau)$$

donde $J^0(\tau)$ es la intensidad de corriente correspondiente al equilibrio. Si despreciamos las potencias superiores de ξ :

$$(3) \qquad \Psi(J) = \Psi(J^0) + \left(\frac{d\Psi}{dJ}\right)_0 \xi \quad \text{en que} \quad \left(\frac{d\Psi}{dJ}\right)_0 = \left(\frac{d\Psi}{dJ}\right)_{J=J^0} \;; \quad \dot J = \dot J^0 + \dot\xi$$

$$\Psi(J)\dot J = \left(\Psi(J^0) + \left(\frac{d\Psi}{dJ}\right)_0 \xi\right)\left(\dot J^0 + \dot\xi\right) = \Psi(J^0)\dot J^0 + \frac{d}{d\tau}\left(\Psi(J^0)\xi\right)$$

Reemplazando en la ecuación (1)

$$(4) \qquad \frac{d}{d\tau}\left(\Psi(J^0)\dot J^0\right) + \frac{d^2}{d\tau^2}\left(\Psi(J^0)\xi\right) + \delta\left(\dot J^0 + \dot\xi\right) + \frac{\omega_0^2}{\omega^2}\left(J^0 + \xi\right) = -\bar u^0 \sin\tau$$

La ecuación de equilibrio es precisamente:

$$(5) \qquad \frac{d}{d\tau}\left(\Psi(J^0)\dot J^0\right) + \delta \dot J^0 + \frac{\omega_0^2}{\omega^2} J^0 = -\bar u^0 \sin\tau$$

Si eliminamos en la ecuación (4) los términos del equilibrio obtenemos la ecuación de variaciones buscada, a saber:

$$(6) \qquad \frac{d^2}{d\tau^2}\left(\Psi(J^0)\xi\right) + \delta\dot\xi + \frac{\omega_0^2}{\omega^2}\xi = 0$$

que también puede escribirse en la forma

$$(7) \qquad \Psi\ddot\xi + \left(2\dot\Psi + \delta\right)\dot\xi + \left(\ddot\Psi + \frac{\omega_0^2}{\omega^2}\right)\xi = 0$$

El tratamiento de esta ecuación de variaciones lo desarrollaremos siguiendo ideas introducidas por el astrónomo G.W.Hill[1] en la clásica memoria llamada "On the part of the motion of the lunar perigee which is a function of the mean motions of the sun and moon", memoria triplemente fecunda, pues, aparte del éxito que obtuvo en el problema de aplicación que trató, es el punto de origen de los capítulos matemáticos: el estudio de las ecuaciones diferenciales a coeficientes periódicos y el de los sistemas lineales de infinitas ecuaciones con infinitas incógnitas.

Brevemente deduciremos las fórmulas de equilibrio que necesitaremos para emplear el método mencionado. Nuestra ecuación general delequilibrio para los fenómenos-serie era:

$$(1) \qquad \frac{d\Phi}{dt} + Ry + \frac{1}{C}\int y\,dt = u^{0}\cos\omega t$$

Introduciendo: $\psi(y) = \frac{1}{L_0}\frac{d\Phi_B}{dy}$ en que $L_0 = \lim_{y\to 0}\frac{d\Phi}{dy}$; $\tau = \omega t$; $\delta = \frac{R}{L_0\omega}$

$\omega_0^2 = \frac{1}{L_0 C}$

la ecuación (1) puede escribirse:

$$(2) \qquad \dot{y}(\tau) + \frac{\delta\, y(\tau)}{\psi(y)} + \frac{1}{\psi(y)}\frac{\omega_0^2}{\omega^2}\int y\,d\tau = \frac{u^0}{L_0\omega}\,\frac{\cos\tau}{\psi(y)}$$

En las zonas de resonancia de la armónica fundamental de la solución particular periódica de (2) que estudiamos:

$$(3) \qquad y = \eta\cos\varphi \qquad\qquad \varphi = \tau + \alpha$$

Reemplazando (3) en (2):

$$(4) \qquad -\eta\,\mathrm{sen}\,\varphi + \frac{\delta\eta\cos\varphi}{\psi(y)} + \frac{\omega_0^2}{\omega^2}\,\eta\,\frac{\mathrm{sen}\,\varphi}{\psi(y)} = \frac{u^0}{L_0\omega}\,\frac{[\cos\alpha\cos\varphi + \mathrm{sen}\,\alpha\,\mathrm{sen}\,\varphi]}{\psi(y)}$$

Para determinar a y α multiplicaremos la ecuación (4) por $\cos\varphi$ e integraremos respecto a φ entre $-\pi$ y $+\pi$; luego la multiplicaremos por sen φ e integraremos entre los mismos límites. Llamaremos:

$$(5) \quad P(\eta) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\frac{\cos^2\varphi\,d\varphi}{\psi(y)}\, ; \quad Q(\eta) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\mathrm{sen}^2\varphi\,d\varphi}{\psi(y)}\, ; \quad p_1(\eta) = \frac{1}{P(\eta)}\, ; \quad q_1(\eta) = \frac{1}{Q(\eta)}$$

Evidentemente, haciendo una demostración análoga a la estudiada en el Apéndice Matemático (pág.), se cumple:

$$(6) \quad P = \frac{d}{d\eta}(\eta Q) = Q + \eta Q' \quad \therefore \quad (7) \quad \frac{1}{p_1} = \frac{1}{q_1} + \eta\frac{d}{d\eta}\left(\frac{1}{q_1}\right) = \frac{1}{q_1} - \frac{\eta q_1'}{q_1^2}$$

La ecuación (4) engendra el sistema

(1) G.W.Hill, Acta Mathematica,VIII, (1886),pp.1-36.

$$(8)\quad \begin{cases} \mathrm{sen}\,\varphi \Rightarrow & -\eta + \dfrac{\omega_0^2}{\omega^2}\eta Q = \dfrac{u^0}{L_0\omega} Q\,\mathrm{sen}\,\alpha \\ \cos\varphi \Rightarrow & \delta\eta P \qquad = \dfrac{u^0}{L_0\omega} P\cos\alpha \end{cases}$$

$$\therefore (9)\quad \begin{cases} -\eta\left(q_1 - \dfrac{\omega_0^2}{\omega^2}\right) = \dfrac{u^0}{L_0\omega}\,\mathrm{sen}\,\alpha \\ \delta\eta \qquad = \dfrac{u^0}{L_0\omega}\cos\alpha \end{cases}$$

$$(10)\quad \begin{cases} \dfrac{u^0}{L_0\omega} = \eta\sqrt{\left(q_1 - \dfrac{\omega_0^2}{\omega^2}\right)^2 + \delta^2} \\ \mathrm{tg}\,\alpha = -\dfrac{\left(q_1 - \dfrac{\omega_0^2}{\omega^2}\right)}{\delta} \end{cases}$$

Como se ve $q_1(\eta)$ desempeña el mismo papel que antes desempeñaba $q(\eta)$. En el caso particular de Dreifuss se ve:

$$(11)\qquad q_1(\eta) = f_1(\eta) = \frac{4}{4+\eta^2} \quad ; \quad p_1(\eta^0) = \frac{4}{4+3\eta^{0\,2}}$$

Nos interesará conocer la derivada a la curva de equilibrio:

$$\frac{d\left(\frac{u^0}{L_0\omega}\right)}{d\eta^0} = \sqrt{\left(q_1-\frac{\omega_0^2}{\omega^2}\right)^2+\delta^2} + \frac{\eta^0\left(q_1-\frac{\omega_0^2}{\omega^2}\right)q_1'}{\sqrt{\left(q_1-\frac{\omega_0^2}{\omega^2}\right)^2+\delta^2}} = \frac{\left(q_1-\frac{\omega_0^2}{\omega^2}\right)\left(q_1+\eta^0 q_1'-\frac{\omega_0^2}{\omega^2}\right)+\delta^2}{\sqrt{\left(q_1-\frac{\omega_0^2}{\omega^2}\right)^2+\delta^2}}$$

De la relación (7) se deduce:

$$\eta^0 q_1' = q_1^2\left(\frac{1}{q_1} - \frac{1}{p_1}\right) \therefore q_1 + \eta^0 q_1' = 2q_1 - \frac{q_1^2}{p_1} \therefore q_1 + \eta^0 q_1' - p_1 =$$

$$= \frac{2q_1p_1 - q_1^2 - p_1^2}{p_1} = -\frac{(p_1-q_1)^2}{p_1} \quad \therefore q_1 + \eta^0 q_1' = p_1 - \frac{(p_1-q_1)^2}{p_1}$$

Luego:

$$(12)\qquad \frac{d\left(\frac{u^0}{L_0\omega}\right)}{d\eta^0} = \frac{\left(q_1-\frac{\omega_0^2}{\omega^2}\right)\left(p_1-\frac{(p_1-q_1)^2}{p_1}-\frac{\omega_0^2}{\omega^2}\right)+\delta^2}{\sqrt{\left(q_1-\frac{\omega_0^2}{\omega^2}\right)^2+\delta^2}}$$

En (12) se ve que $p_1 - \frac{(p_1-q_1)^2}{p_1}$ desempeña el mismo papel que antes p. En este segundo tratamiento del equilibrio hay pues una separación en los papeles que representan $q_1(\eta^0)$ y $p_1(\eta^0)$.

Con esto tenemos los elementos que necesitamos sobre el equilibrio. Nuestra ecuación de perturbaciones en el caso $\delta = 0$ es:

$$(13)\qquad \frac{d^2(\psi\xi)}{dz^2} + \frac{\omega_0^2\,\xi}{\omega^2} = 0 \quad ; \quad \psi = \psi(\eta^0\cos^2 z) > 0$$

Introducimos la nueva incógnita

(14) $$u = \psi \xi$$

(15) $$\frac{d^2 u}{dz^2} + \frac{1}{\psi} \frac{\omega_0^2}{\omega^2} u = 0$$

La ecuación (15) es de singular importancia en los estudios de estabilidad y en otros campos de la Física. Se conoce con el nombre de ecuación de Hill y a su estudio se ha dedicado una extensa literatura. Según afirma Stoker[2], y así nos parece, la teoría de la ecuación de Hill es de notable belleza.

Abordaremos el estudio de la ecuación (15) mediante el llamado método de Hill de los determinantes infinitos para la determinación del exponente característico[3].

En dicho método se supone que $\frac{\omega_0^2}{\omega^2} \frac{1}{\psi(z^0)}$ es una función continua, par, de período π y desarrollable Fourier:

(16) $$\frac{\omega_0^2}{\omega^2} \frac{1}{\psi(a^0 \cos^2 z^0)} = v_0 + 2v_1 \cos 2z + 2v_2 \cos 4z + \ldots + 2v_n \cos 2nz +$$

También se admite que la serie $\sum_{n=0}^{\infty} |v_n|$ resulte convergente.

La teoría de Floquet afirma que una solución particular de (15) será de la forma

(17) $u_1 = e^{\mu z} \phi(z)$ en que μ es una constante respecto de z llamada exponente característico y $\phi(z)$ una función periódica de período π. Puesto que $\psi(z)$ es una función par respecto de z, es evidente que si (17) es solución de (15) también lo será:

(18) $$u_2 = e^{-\mu z} \phi(-z)$$

Luego la solución general de (15) será de la forma:

(19) $$u = c_1 e^{\mu z} \phi(z) + c_2 e^{-\mu z} \phi(-z)$$

en que c_1 y c_2 son constantes.

Siendo $\phi(z)$ función periódica se comprende que la discusión de estabilidad debe basarse en el conocimiento de μ. Más aún, observando (19) se reconoce que sólo habrá estabilidad cuando la parte real de μ sea nula ($R(\mu) = 0$). Este último hecho es sólo característico del caso $\delta = 0$ que ahora tratamos.

(2) Stoker, op.cit., Cap. VI

(3) Para la exposición matemática del método de Hill y Teoría de Floquet puede consultarse: Giovanni Sansone, Equazioni Differenziali nel Campo Reale (Parte Prima), Cap.VI, pág.341 et seq. Whittaker y Watson, A Course of Modern Analysis, Cap.XIX, pág. 412 et seq. Si se desea profundizar puede consultarse: Strutt M.J.O. Lamé-sche, Mathieu-sche und verwandte Funktionen, 1932 y F. Riesz, Les systèmes d'equations linéaires à une infinité d'inconnues (1913).

Empleando recursos matemáticos que implican el conocimiento de la teoría de sistemas de ecuaciones algebraicas a una infinidad de incógnitas, y la teoría de los determinantes infinitos, puede demostrarse que el exponente característico μ de (19) satisface la siguiente ecuación:

$$(20)\qquad \Delta(i\mu) = \begin{vmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{(i\mu+4)^2-\vartheta_0}{4^2-\vartheta_0} & \frac{-\vartheta_1}{4^2-\vartheta_0} & \frac{-\vartheta_2}{4^2-\vartheta_0} & \frac{-\vartheta_3}{4^2-\vartheta_0} & \frac{-\vartheta_4}{4^2-\vartheta_0} \\ \frac{-\vartheta_1}{2^2-\vartheta_0} & \frac{(i\mu+2)^2-\vartheta_0}{2^2-\vartheta_0} & \frac{-\vartheta_1}{2^2-\vartheta_0} & \frac{-\vartheta_2}{2^2-\vartheta_0} & \frac{-\vartheta_3}{2^2-\vartheta_0} \\ \frac{-\vartheta_2}{0^2-\vartheta_0} & \frac{-\vartheta_1}{0^2-\vartheta_0} & \frac{(i\mu)^2-\vartheta_0}{0^2-\vartheta_0} & \frac{-\vartheta_1}{0^2-\vartheta_0} & \frac{-\vartheta_2}{0^2-\vartheta_0} \\ \frac{-\vartheta_3}{2^2-\vartheta_0} & \frac{-\vartheta_2}{2^2-\vartheta_0} & \frac{-\vartheta_1}{2^2-\vartheta_0} & \frac{(i\mu-2)^2-\vartheta_0}{2^2-\vartheta_0} & \frac{-\vartheta_1}{2^2-\vartheta_0} \\ \frac{-\vartheta_4}{4^2-\vartheta_0} & \frac{-\vartheta_3}{4^2-\vartheta_0} & \frac{-\vartheta_2}{4^2-\vartheta_0} & \frac{-\vartheta_1}{4^2-\vartheta_0} & \frac{(i\mu-4)-\vartheta_0}{4^2-\vartheta_0} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix} = 0$$

Los puntos significan que este determinante debe considerarse extendido en todos los sentidos a un número infinito de filas y columnas. El determinante infinito $\Delta(i\mu)$ se llama determinante de Hill.

Llamemos $\Delta(0)$ al determinante infinito que se obtiene haciendo $\mu = 0$ en el determinante $\Delta(i\mu)$ de Hill.

En la literatura matemática se demuestra que el determinante $\Delta(i\mu)$ cumple(4):

$$(21)\qquad \Delta(i\mu) = \Delta(0) - \frac{\operatorname{sen}^2\left(\frac{1}{2}\pi i\mu\right)}{\operatorname{sen}^2\left(\frac{1}{2}\pi\sqrt{\vartheta_0}\right)}$$

Esta fórmula es importante pues permite reconocer que la ecuación (20) es equivalente a la ecuación trascendente:

$$(22)\qquad \operatorname{sen}^2\left(\tfrac{1}{2}\pi i\mu\right) = \Delta(0)\operatorname{sen}^2\left(\tfrac{1}{2}\pi\sqrt{\vartheta_0}\right)$$

En el Apéndice Matemático mostraremos que con leves cambios en la demostración de (21) puede llegarse a la fórmula:

$$(23)\qquad \Delta(i\mu) = \Delta(-1) + \frac{\cos^2\left(\frac{1}{2}\pi i\mu\right)}{\operatorname{sen}^2\left(\frac{1}{2}\pi\sqrt{\vartheta_0}\right)}$$

(4) Una bella demostración de (21) se encuentra en Whittaker y Watson, op.cit.

en que $\Delta(-1)$ es el determinante infinito que se obtiene al hacer $\mu = i$ en $\Delta(i\mu)$. La fórmula (23) es interesante pues permite reconocer que la ecuación (20) es equivalente a la nueva ecuación trascendente

$$(24) \qquad \cos^2\left(\frac{1}{2}\pi i\mu\right) = -\Delta(-1)\,\operatorname{sen}^2\left(\frac{1}{2}\pi\sqrt{v_0}\right)$$

ecuación que proponemos para la discusión del exponente característico μ.

En nuestro caso

$$(25) \qquad v_0 = \frac{1}{2\pi}\,\frac{\omega_0^2}{\omega^2}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{dz}{\varphi(z)}$$

Luego v_0 es real positiva.

Tendremos pues:

$$(26) \qquad 0 < C^2 = \operatorname{sen}^2\left(\frac{1}{2}\pi\sqrt{v_0}\right) \leq 1$$

en que C es una constante respecto de μ.

La ecuación (24) se escribe:

$$\cos^2\left(\frac{1}{2}\pi i\mu\right) = \cosh^2\left(\frac{1}{2}\pi\mu\right) = -\Delta(-1)\,C^2 \quad \therefore$$

$$(27) \qquad \operatorname{senh}^2\left(\frac{1}{2}\pi\mu\right) = -1-\Delta(-1)\,C^2$$

En (20) se ve, desde luego, que $\Delta(-1)$ así como también $\Delta(0)$ son reales por serlo $\dfrac{\omega_0^2}{\omega^2}\,\dfrac{1}{\varphi(z)}$

Si $\Delta(-1)$ es positiva cualquiera o negativa de valor absoluto menor que 1 el segundo miembro de (38) será negativo. Las raíces μ de la ecuación trascendente (38) serán en general números complejos que escribiremos así:

$\frac{1}{2}\pi\mu = \alpha + \beta i$ donde α y β son reales

En el caso $\Delta(-1) > -1$ la (38) puede escribirse:

$$(28) \qquad \operatorname{senh}(\alpha+\beta i) = \sqrt{-1-\Delta(-1)C^2} = i\sqrt{1+\Delta(-1)C^2} = i\Phi^2$$

en que Φ es un número real que cumple

$$(29) \qquad \begin{cases} \Phi > 1 \text{ si } \Delta(-1) > 0 \\ \Phi < 1 \text{ si } \Delta(-1) < 0 \end{cases}$$

La (28) puede escribirse:

$$(30) \qquad \operatorname{sh}(\alpha+\beta i) = \operatorname{sh}\alpha\,\operatorname{ch}(\beta i) + \operatorname{sh}(\beta i)\operatorname{ch}\alpha = \operatorname{sh}\alpha\cos\beta + i\operatorname{ch}\alpha\operatorname{sen}\beta = i\Phi^2$$

siendo α, β y Φ números reales caben dos casos:

$$(31) \qquad \begin{cases} a)\ \operatorname{sh}\alpha = 0 \ \therefore\ \operatorname{ch}\alpha = 1 \quad \operatorname{sen}\beta = \Phi^2 & \text{(Estabilidad)} \\ b)\ \cos\beta = 0 \ \therefore\ \operatorname{sen}\beta = 1 \ \therefore\ \operatorname{ch}\alpha = \Phi^2. & \text{(Inestabilidad)} \end{cases}$$

Evidentemente se cumplirá (31)(a) si $\mathfrak{D} < 1$ o sea si $\Delta(-1) < 0$ y se cumplirá (31)(b) si $\mathfrak{D} > 1$ o sea si $\Delta(-1) > 0$.

Dicho de otra manera:

Si $0 > \Delta(-1) > -1$, $\alpha = R(\mu) = 0$ lo que indica estabilidad si se observa (19).

Si $\Delta(-1) > 0$, $\alpha = R(\mu) \neq 0$ (Inestabilidad).

Debemos ahora hallar el significado físico de sg $\Delta(-1)$, es decir su relación con la curva de equilibrio (10).

Naturalmente para escribirlo basta reemplazar en (21) $i\mu$ por -1.

(33) $\Delta(-1) =$

$$\begin{vmatrix} \ddots & & & & & & \\ & \frac{3^2-v_0}{4^2-v_0} & -\frac{v_1}{4^2-v_0} & -\frac{v_2}{4^2-v_0} & -\frac{v_3}{4^2-v_0} & -\frac{v_4}{4^2-v_0} & \\ & -\frac{v_1}{2^2-v_0} & \frac{1^2-v_0}{2^2-v_0} & -\frac{v_1}{2^2-v_0} & -\frac{v_2}{2^2-v_0} & -\frac{v_3}{2^2-v_0} & \\ & -\frac{v_2}{0^2-v_0} & -\frac{v_1}{0^2-v_0} & \frac{(+1)^2-v_0}{0^2-v_0} & -\frac{v_1}{0^2-v_0} & -\frac{v_2}{0^2-v_0} & \\ & -\frac{v_3}{2^2-v_0} & -\frac{v_2}{2^2-v_0} & -\frac{v_1}{2^2-v_0} & \frac{(+3)^2-v_0}{2^2-v_0} & -\frac{v_1}{2^2-v_0} & \\ & -\frac{v_4}{4^2-v_0} & -\frac{v_3}{4^2-v_0} & -\frac{v_2}{4^2-v_0} & -\frac{v_1}{4^2-v_0} & \frac{(5)^2-v_0}{4^2-v_0} & \\ & & & & & & \ddots \end{vmatrix}$$

Veamos el valor de los v_n en el caso de Dreifuss.

$$(34) \quad \psi(\eta_0^2 \cos^2 z) = \frac{1}{1+\eta_0^2 \cos^2 z} \qquad \frac{\omega_0^2}{\omega^2 \psi} = \frac{\omega_0^2}{\omega^2}\left(1+\eta_0^2 \cos^2 z\right) = \frac{\omega_0^2}{\omega^2}\left(1+\eta_0^2/2\right) + \frac{\omega_0^2}{\omega^2}\,\eta_0^2/2 \cdot \cos 2z$$

Recordando (16) tenemos para el caso de Dreifuss:

$$(35) \quad v_0 = \frac{\omega_0^2}{\omega^2}\left(1+\frac{\eta_0^2}{2}\right), \quad v_1 = \frac{\omega_0^2}{\omega^2}\,\frac{\eta_0^2}{2}\,; \quad v_n = 0 \quad (n>1)$$

Podremos escribir esto mismo en la forma:

$$(36) \quad v_0 = \frac{1}{2\pi}\frac{\omega_0^2}{\omega^2}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{dz}{\psi} = \frac{1}{2}\,\frac{\omega_0^2}{\omega^2}\,\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{(\cos^2 z+\sin^2 z)\,dz}{\psi} = \frac{1}{2}\,\frac{\omega_0^2}{\omega^2}\left(\frac{1}{p_1}+\frac{1}{q_1}\right)$$

Esto último si se recuerda (5).

Análogamente

$$(37) \quad v_1 = \frac{1}{2\pi}\,\frac{\omega_0^2}{\omega^2}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\cos 2z}{\psi}\,dz = \frac{1}{2}\,\frac{\omega_0^2}{\omega^2}\left(\frac{1}{p_1}-\frac{1}{q_1}\right)$$

En resumen:

$$(38)\qquad \vartheta_0 = \frac{\omega_0^2}{\omega^2}\left(\frac{q_1+p_1}{2p_1q_1}\right);\quad \vartheta_1 = \frac{\omega_0^2}{\omega^2}\left(\frac{q_1-p_1}{2p_1q_1}\right);\quad \vartheta_n = 0\ (n>1)$$

En el caso en que $v_n = 0$ para $n > 1$ la ecuación (15) de Hill recibe el nombre especial de ecuación de Mathieu. El estudio de esta ecuación y de sus funciones asociadas constituye uno de los capítulos más importantes y menos aclarados del Análisis Moderno. En contra de lo que podría pensarse a primera vista, la técnica resolutoria de la ecuación de Hill general es de un mismo orden de dificultad que la de Mathieu. Para comprenderlo, basta observar cualquiera de los determinantes infinitos escritos en este parágrafo. Por ello hemos preferido seguir un procedimiento no directamente reducido a la ecuación de Mathieu, lo que además nos permitirá lograr algunas proposiciones para el caso de "inductancias $\psi(\mathfrak{J})$ generales"(5).

En el caso de Dreifuss pues, nuestro determinante (44) adquiere la forma especial:

$$(39)\qquad \Delta(-1) = \begin{vmatrix} \ddots & & & & & \\ & \frac{3^2-\vartheta_0}{4^2-\vartheta_0} & \frac{-\vartheta_1}{4^2-\vartheta_0} & 0 & 0 & 0 \\ & \frac{-\vartheta_1}{2^2-\vartheta_0} & \frac{1^2-\vartheta_0}{2^2-\vartheta_0} & \frac{-\vartheta_1}{2^2-\vartheta_0} & 0 & 0 \\ & 0 & \frac{-\vartheta_1}{0^2-\vartheta_0} & \frac{1^2-\vartheta_0}{0^2-\vartheta_0} & \frac{-\vartheta_1}{0^2-\vartheta_0} & 0 \\ & 0 & 0 & \frac{-\vartheta_1}{2^2-\vartheta_0} & \frac{3^2-\vartheta_0}{2^2-\vartheta_0} & \frac{-\vartheta_1}{2^2-\vartheta_0} \\ & 0 & 0 & 0 & \frac{-\vartheta_1}{4^2-\vartheta_0} & \frac{5^2-\vartheta_0}{4^2-\vartheta_0} \\ & & & & & & \ddots \end{vmatrix}$$

Como se ve en (39) si nos alejamos del centro del determinante, todos los elementos diagonales tienden a 1 y los no diagonesles a 0.

Ahora bien, para poder interpretar físicamente (39) reduciremos la no linealidad del problema considerado hasta $\eta^0 \sim 1$ (no linealidad no muy apreciable).

(5) Whitakker y Watson, op.cit.

Es muy fácil darse cuenta que, en esa zona, los únicos términos no diagonales que pueden influir son los que se encuentran rodeando términos diagonales pequeños, de modo que en las regiones de interés podemos escribir:

$$(40) \quad \Delta(-1) = \left(\frac{3^2-v_0}{4^2-v_0}\right) \begin{vmatrix} \dfrac{1^2-v}{2^2-v_0} & \dfrac{-v_1}{2^2-v_0} \\ \dfrac{-v_1}{0^2-v_0} & \dfrac{1^2-v_0}{0^2-v_0} \end{vmatrix} \left(\frac{3^2-v_0}{2^2-v_0}\right)\left(\frac{5^2-v_0}{4^2-v_0}\right)$$

En las zonas de interés es obvio que todos los factores que rodean al determinante de dos filas y columnas de (40) son todos positivos. De modo que podemos escribir:

$$(41) \quad \mathrm{Sg}\,\Delta(-1) = \mathrm{Sg} \begin{vmatrix} \dfrac{1^2-v_0}{2^2-v_0} & \dfrac{-v_1}{2^2-v_0} \\ \dfrac{-v_1}{0^2-v_0} & \dfrac{1^2-v_0}{0^2-v_0} \end{vmatrix} = -\mathrm{Sg} \begin{vmatrix} 1^2-v_0 & -v_1 \\ -v_1 & 1^2-v_0 \end{vmatrix} =$$

$$= -\mathrm{Sg}\left[(1-v_0)^2 - v_1^2\right] = -\mathrm{Sg}\,(1-v_0+v_1)(1-v_0-v_1)$$

Si usamos las (38) obtendremos:

$$(42) \quad \mathrm{Sg}\,\Delta(-1) = -\mathrm{Sg}\left(q_1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}\right)\left(p_1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}\right)$$

En el caso que ahora tratamos (ζ =0) según la ecuación (12) podemos escribir:

$$(43) \quad \mathrm{Sg}\,\frac{d\left(\frac{u^0}{L_0\omega}\right)}{d\eta^0} = \mathrm{Sg}\left(q_1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}\right)\left(p_1 - \frac{(p_1-q_1)^2}{p_1} - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}\right)$$

En las zonas de interés $\frac{(p_1-q_1)^2}{p_1}$ se puede considerar como un término correctivo de segundo orden que tiende a 0 a medida que nos acercamos a η^0=0. Luego en esas zonas:

$$(44) \quad \mathrm{Sg}\,\frac{d\left(\frac{u^0}{L_0\omega}\right)}{d\eta^0} = \mathrm{Sg}\left(q_1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}\right)\left(p_1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}\right) = -\mathrm{Sg}\,\Delta(-1)$$

Si recordamos la discusión que siguió a (31), llegamos a nuestra proposición final: las zonas ascendentes son estables, las descendentes inestables.

Convendrá observar que el punto $q_1(\eta^0) = \frac{\omega_0^2}{\omega'^2}$, en el caso $\delta = 0$, corresponde al punto S de la figura 3 del §1, mientras que el punto $p_1 - \frac{(p_1-q_1)^2}{p_1} = \frac{\omega_0^2}{\omega'^2}$ corresponde al punto R.

De esta manera hemos resuelto nuestro problema, para $\delta=0$, en el caso de Dreifuss cuando la no-linealidad no es muy apreciable. Debido a la generalidad del formalismo usado se adivina que estos métodos y resultados de Estabilidad pueden extenderse al estudio de fenómenos muy generales.

Estudiemos ahora el caso $\delta \neq 0$. Nuestra ecuación de perturbaciones será:

$$(45) \quad \frac{d^2(\psi\xi)}{dz^2} + \delta\dot{\xi} + \frac{\omega_0^2}{\omega'^2}\xi = 0$$

Hagamos: $\xi = \frac{u}{\psi} \quad \therefore \quad \dot{\xi} = \frac{\dot{u}}{\psi} + u\left(\frac{\dot{1}}{\psi}\right)$

La (45) queda:

$$(46) \quad \frac{d^2u}{dz^2} + \frac{\delta\dot{u}}{\psi} + \left[\frac{\omega_0^2}{\omega'^2}\frac{1}{\psi} + \delta\left(\frac{\dot{1}}{\psi}\right)\right]u = 0$$

La ecuación (46) es del tipo:

$$(47) \quad \ddot{u} + b(z)\,\dot{u} + c(z)\,u = 0$$

En (47) hagamos $u = p(z)\,v(z)$. La (47) queda:

$$(48) \quad p\,\ddot{v} + \dot{v}\,(2\dot{p} + bp) + v(\ddot{p} + b\dot{p} + cp) = 0$$

Determinemos ahora p por la condición de que en (48) sea nulo el coeficiente de $\dot{v}$, es decir

$$(49) \quad 2\dot{p} + bp = 0 \quad \therefore \frac{\dot{p}}{p} = -\frac{b}{2} \quad \therefore p = e^{-\int_0^z \frac{b}{2}dz}$$

De (49) deducimos: $2\ddot{p} = -\dot{b}p - b\dot{p} \quad \therefore \quad \frac{\ddot{p}}{p} = -\frac{b\dot{p}}{2p} - \frac{\dot{b}}{2} = \frac{b^2}{4} - \frac{\dot{b}}{2}$

Luego: $\frac{\ddot{p}}{p} + \frac{b\dot{p}}{p} + c = \frac{b^2}{4} - \frac{\dot{b}}{2} - \frac{b^2}{2} + c = c - \frac{\dot{b}}{2} - \frac{b^2}{4}$

Luego la (48) queda:

$$(50) \quad \ddot{v} + \left(c - \frac{\dot{b}}{2} - \frac{b^2}{4}\right)v = 0\,; \quad u = e^{-\frac{1}{2}\int_0^z b\,dz}\,v$$

Si aplicamos este método a la ecuación (46) tendremos

$$(51) \quad u = e^{-\frac{\delta}{2}\int_0^z \frac{dz}{\psi}}\,v$$

donde es solución de:

$$(52) \quad \ddot{v} + \left[\frac{\omega_0^2}{\omega'^2}\frac{1}{\psi} + \frac{\delta}{2}\left(\frac{\dot{1}}{\psi}\right) - \frac{\delta^2}{4\psi^2}\right]v = 0$$

Como fundamentalmente nos interesará el comportamiento asintótico de $\xi(z)$, éste estará dado por u(z) puesto que $\psi(z)$ es una función periódica. Convendrá de antemano visualizar como influye en el comportamiento asintótico de u el factor $e^{-\frac{\delta}{2}\int_0^z \frac{dz}{\psi}}$ de la ecuación (51)

$$(53) \qquad \frac{1}{\psi(z)} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{2niz} \quad ; \qquad c_n = c_{-n}$$

$$e^{-\frac{\delta}{2}\int_0^z \frac{dz}{\psi}} = e^{-\frac{\delta}{2}\int_0^z \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{2niz} dz}$$

Suponiendo lícita la integración término a término, lo que en el caso particular de Dreifuss no importa por ser $c_n = 0 \ (|n|>1)$

$$(54) \qquad e^{-\frac{\delta}{2}\int_0^z \frac{dz}{\psi}} = e^{-\frac{\delta}{2}\left\{c_0 z + \sum_{n\neq 0}^{-\infty,+\infty} \frac{c_n\left[e^{2niz}-1\right]}{2ni}\right\}} = e^{-\frac{\delta}{2}\left\{c_0 z + \sum_{n\neq 0}^{-\infty,+\infty} \frac{c_n e^{2niz}}{2ni}\right\}}$$

El comportamiento asintótico del factor (p) pues está dado por $e^{-\delta/2\, c_0 z}$. Luego nos convendrá recordar que la solución que obtengamos de (52) será afectada por un factor estabilizador del "orden" de $e^{-\delta/2\, c_0 z}$

Si llamamos

$$(55) \qquad J(z) = \frac{\omega_0^2}{\omega^2}\frac{1}{\psi} + \frac{\delta}{2}\left(\frac{1}{\psi}\right)^{\cdot} - \frac{\delta^2}{4\psi^2}$$

la (52) se escribe:

$$(56) \qquad \ddot{v} + J(z)\, v = 0 \quad ; \quad J(z+\pi) = J(z)$$

Es decir, casi tenemos una ecuación de Hill. Y decimos casi una ecuación de Hill pues (55) muestra que J(z) en general no será par. Esta falta de paridad en J(z) no parece ser en nuestro caso un problema grave. Podremos siempre escribir

$$(57) \qquad J(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} v_n e^{2niz}$$

bien entendido que ahora será, en general, $v_n \neq v_{-n}$

$$(58) \qquad v_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} J(z)\, e^{-2niz} dz$$

ya que la familia de funciones $\frac{e^{2niz}}{\sqrt{2\pi}}$ es ortonormal.

Por la teoría de Floquet, que se puede aplicar a toda ecuación diferencial lineal con coeficientes periódicos podremos siempre escribir:

$$(59) \qquad v = e^{\mu z}\phi(z) \qquad \phi(z+\pi) = \phi(z)$$

μ es constante respecto a z.

Es fácil comprender que la teoría desarrollada para estudiar la ecuación de Hill en el caso en que J(z) sea par, sirve también en las circunstancias presentes en que J(z) no tiene paridad definida con muy pequeños cambios de notación.

El determinante $\Delta(i\mu)$ que corresponde a nuestro caso actual es el dado por (21) si reemplazamos por v_{-n} todos los v_n que figuran a la izquierda de la diagonal principal. Igual observación que la hecha para $\Delta(i\mu)$ será necesaria para $\Delta(-1)$ dado en (33), o en (39) o en (40).

Las fórmulas (22) y (24) serán ahora válidas con las modificaciones indicadas para $\Delta(-1)$ y $\Delta(0)$. De aquí se desprende un resultado inesperado; aún cuando $J(z) = J(z+\pi)$ no sea una función par, $\Delta_1(i\mu)$ y $\Delta(i\mu)$ serán funciones pares de μ de modo que si sabemos que μ es un exponente característico también lo será $-\mu$.

Se comprende que el caso $\delta \neq 0$ es mucho más complicado que el anteriormente tratado por el hecho que la presencia del factor estabilizador $e^{-\delta/2\, c_0 z}$ nos obligará, no a calcular sg $R(\mu)$, sino a obtener $R(\mu)$.

Como la fórmula (24) sigue siendo válida nos convendrá calcular aproximadamente el valor de $\Delta(-1)\, \mathrm{sen}^2\left(\frac{1}{2}\pi \sqrt{v_0}\right)$

Si nos limitamos al caso que antes correspondía a la ecuación de Mathieu:

$$(60) \quad \frac{1}{\psi} = c_0 + c_1\left(e^{2iz} + e^{-2iz}\right); \quad \left(\frac{1}{\psi}\right)' = 2ic_1\left(e^{2iz} - e^{-2iz}\right)$$

$$\left(\frac{1}{\psi}\right)^2 = c_0^2 + 2c_1^2 + 2c_0c_1\left(e^{2iz} + e^{-2iz}\right) + c_1^2\left(e^{4iz} + e^{-4iz}\right)$$

$$(61) \quad v_0 = \frac{\omega_0^2}{\omega^2} c_0 - \frac{\delta^2}{4}\left(c_0^2 + 2c_1^2\right); \quad v_1 = \frac{\omega_0^2}{\omega^2} c_1 + \delta i c_1 - \frac{\delta^2}{2} c_0 c_1;$$

$$v_{-1} = \frac{\omega_0^2}{\omega^2} c_1 - \delta i c_1 - \frac{\delta^2}{2} c_0 c_1; \quad v_4 = v_{-4} = -\frac{\delta^2}{4} c_1^2;$$

$$c_0 = \frac{p_1 + q_1}{2p_1q_1}, \qquad c_1 = \frac{q_1 - p_1}{2p_1q_1}$$

Despreciando los términos en δ^2 frente a términos del orden de la unidad:

$$(62) \qquad v_0 = \frac{\omega_0^2}{\omega^2} c_0, \quad v_1 = \frac{\omega_0^2}{\omega^2} c_1 + \delta i c_1; \quad v_{-1} = \frac{\omega_0^2}{\omega^2} c_1 - i\delta c_1$$

En nuestro caso actual:

$$(63)\quad \Delta(-1)= \left(\frac{3^2-v_0}{4^2-v_0}\right)\begin{vmatrix} \dfrac{1-v_0}{2^2-v_0} & \dfrac{-v_1}{2^2-v_0} \\ \dfrac{-v_{-1}}{0^2-v_0} & \dfrac{1-v_0}{0^2-v_0}\end{vmatrix}\left(\frac{3^2-v_0}{2^2-v_0}\right)\left(\frac{5^2-v_0}{4^2-v_0}\right)$$

En el Apéndice Matemático demostramos usando conocidos resultados de Euler que:

$$(64)\quad \prod_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{v_0-(1+2n)^2}{v_0-4n^2}= \cdots\frac{3^2-v_0}{4^2-v_0}\,\frac{1-v_0}{2^2-v_0}\,\frac{1-v_0}{-v_0}\,\frac{3^2-v_0}{2^2-v_0}\,\frac{5^2-v_0}{4^2-v_0}\cdots =$$

$$= -\frac{\operatorname{sen}\frac{1}{2}\pi(1+\sqrt{v_0})\,\operatorname{sen}\frac{1}{2}\pi(1-\sqrt{v_0})}{\operatorname{sen}^2(\frac{1}{2}\pi\sqrt{v_0})} =$$

$$= -\frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{v_0}\right)}{\operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{v_0}\right)}$$

Si comparamos (63) y (64):

$$(65)\quad \Delta(-1)\operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{v_0}\right) = -\cos^2\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{v_0}\right)\left(1-\frac{v_1 v_{-1}}{(1-v_0)^2}\right)$$

La (24) quedará:

$$(66)\quad \cos^2\left(\tfrac{1}{2}\pi i\mu\right) = \frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{v_0}\right)}{(1-v_0)^2}\left((1-v_0)^2-v_1 v_{-1}\right);$$

Si usamos las (62):

$$(67)\quad (1-v_0)^2-v_1v_{-1} = \left(1-\frac{\omega_0^2}{\omega^2}c_0\right)^2-\left(\frac{\omega_0^2}{\omega^2}c_1\right)^2-\delta^2c_1^2=\left(1-\frac{\omega_0^2}{\omega^2q_1}\right)\left(1-\frac{\omega_0^2}{\omega^2p_1}\right)-\delta^2c_1^2$$

Como la resolución de la ecuación (66) es en general complicada nos limitaremos a estudiar su solución alrededor del punto de resonancia $q_1=\frac{\omega_0^2}{\omega^2}$ que corresponde al punto S de la fig. 3 de pág. 1. Ahora bien, en el caso $\delta=0$ tal punto corresponde a $1-v_0=-v_1=-\frac{\omega_0^2}{\omega^2}\left(\frac{q_1-p_1}{2p_1q_1}\right)$ cantidad que podemos considerar de cuadrado despreciable frente a 1. En el caso actual figurará además algún término con δ, también de cuadrado despreciable frente a 1. Por tanto escribamos $1-v_0=\rho$; $\rho^2\ll 1$; $\sqrt{v_0}=$
$=\sqrt{1-\rho}\sim 1-\frac{\rho}{2}$.

$$\cos\frac{\pi}{2}\left(1-\frac{\rho}{2}\right)\sim\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\rho\sim\frac{\pi}{4}\rho$$

$$(68)\qquad \frac{\cos^2 \frac{\pi}{2}\sqrt{\nu_0}}{(1-\nu_0)^2} \sim \frac{\pi^2}{16}$$

Si observamos (67) es obvio que una solución muy aproximada de (66) será $\mu = i$. Como estamos trabajando en el entorno del punto de resonancia podemos escribir $\mu = i+\varepsilon$ siendo ε de cuadrado despreciable..

$$\cos\left(\tfrac{1}{2}\pi i(i+\varepsilon)\right) = \cos\tfrac{1}{2}\pi(1-i\varepsilon) - \operatorname{sen}\tfrac{1}{2}\pi i\varepsilon = \tfrac{1}{2}\pi i\varepsilon$$

Luego

$$(69)\qquad \cos^2\left(\tfrac{1}{2}\pi i\mu\right) = -\frac{\pi^2}{4}\varepsilon^2$$

La (66) quadará recordando (68) y (69):

$$(70)\qquad \varepsilon = \pm\frac{1}{2}\sqrt{\left(1-\frac{\omega_0^2}{\omega^2 q_1}\right)\left(1-\frac{\omega_0^2}{\omega^2 p_1}\right)-\delta^2 c_1^2} = \pm\frac{1}{2}\sqrt{D}$$

Si el radicando es positivo evidentemente tendremos estabilidad. Para que haya inestabilidad el radicando deberá ser suficientemente negativo como para contrarrestar el efecto del factor estabilizador $e^{-\delta/2\,\omega z}$

Evidentemente los puntos de transición entre las zonas estables y las inestables estarán dados por la condición:

$$(71)\qquad \sqrt{-D} - \delta c_0 = 0 \;\therefore\; 0 = -D - \delta^2 c_0^2 = -\left(1-\frac{\omega_0^2}{\omega^2 q_1}\right)\left(1-\frac{\omega_0^2}{\omega^2}p\right) - \delta^2(c_0^2 - c_1^2)$$

$$= -\left(1-\frac{\omega_0^2}{\omega^2 q_1}\right)\left(1-\frac{\omega_0^2}{\omega^2 p_1}\right) - \frac{\delta^2}{p_1 q_1} = 0$$

Pero con el conocimiento anteriormente discutido esta expresión tiene el signo de $\frac{du^0}{d\eta}$. Esta deducción vale igualmente en el entorno del punto R de resonancia correspondiente aproximadamente a $p_1 = \omega_0^2/\omega^2$.

Podemos pues decir que, si despreciamos δ^2 frente a 1, en los entornos de los puntos de resonancia las zonas ascendentes son estables, las descendentes, inestables, confirmando resultados ya obtenidos.

Convendrá insistir que esta última demostración no es tan moderna como la desarrollada para $\delta = 0$ pues por los motivos apuntados hemos ahora debido limitar nuestras discusiones a entornos de los puntos de resonancia. Es indudable, sin embargo, que ambas discusiones aportan una parecida evidencia al físico teórico.

Conclusiones y Resultados

I) Nuevo método para estudiar las soluciones periódicas de ecuaciones diferenciales fuertemente no lineales en las zonas de preppnderancia de las diferentes armónicas (Ver § 2). Este método ha dado éxito para justificar teóricamente la Teoría de Zenneck-Schunk.

II) Nuevo criterio de Estabilidad para discutir la Estabilidad de Curvas Características en fenómenos fuertemente no-lineales (Ver § 4).

Este criterio de Estabilidad ha permitido discutir satisfactoriamente:

III) La Estabilidad del Circuito Ferroresonante Serie (zonas ascendentes estables, descendentes inestables). Ello significa que las zonas descendentes no pueden obtenerse experimentalmente. Ver § 4.

IV) La Estabilidad del Circuito Ferroresonante Paralelo (igual resultado). Ver § 5.

V) Sobre este último hemos desarrollado la teoría de equilibrio correspondiente a la aproximación de Zenneck-Schunk.

VI) En el § 6 y en el Apéndice Matemático estuadiamos algunos problemas matemáticos.

Apéndice Matemático № 1

Demostración de la relación: $\rho(\eta^\circ) = \frac{d}{d\eta^\circ}\left(\eta^\circ q(\eta^\circ)\right)$ (1) [ec. 15, §1]

$$(2)\quad \rho(\eta^\circ) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \psi(\mathfrak{z}) \cos^2\varphi \, d\varphi; \quad q(\eta^\circ) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} \psi(\mathfrak{z}) \operatorname{sen}^2\varphi \, d\varphi$$

$\psi(\mathfrak{z})$ es una función arbitraria acotada de $\mathfrak{z} = \eta \cos\varphi$

$$(3)\quad \frac{d\psi}{d\eta} = \frac{d\psi}{d\mathfrak{z}} \cos\varphi; \qquad (4)\quad \frac{\partial\psi}{\partial\varphi} = -\frac{d\psi}{d\mathfrak{z}}\, \eta^\circ \operatorname{sen}\varphi;$$

$$(5)\quad \frac{d}{d\eta^\circ}\left(\eta^\circ q(\eta^\circ)\right) = q(\eta^\circ) + \eta^\circ q'(\eta^\circ) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} \psi(\mathfrak{z}) \operatorname{sen}^2\varphi\, d\varphi + \frac{\eta^\circ}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} \frac{\partial\psi}{\partial\eta} \operatorname{sen}^2\varphi\, d\varphi$$

De (3) y (4): $\eta^\circ \frac{\partial\psi}{d\eta} \operatorname{sen}\varphi = -\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}\cos\varphi$; la (5) queda:

$$\frac{d}{d\eta^\circ}\left(\eta^\circ q(\eta^\circ)\right) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} \psi(\mathfrak{z}) \operatorname{sen}^2\varphi\, d\varphi - \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} \frac{\partial\psi}{\partial\varphi} \operatorname{sen}\varphi \cos\varphi\, d\varphi =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} \psi(\mathfrak{z}) \operatorname{sen}^2\varphi\, d\varphi + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} \psi(\mathfrak{z})\left[\cos^2\varphi - \operatorname{sen}^2\varphi\right] d\varphi = \rho(\eta^\circ)$$

l.q.q.d.

Apéndice Matemático № 2

Demostración $I_1 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} \frac{\operatorname{sen}^2\varphi\, d\varphi}{1+\eta^{\circ 2}\cos^2\varphi} = \frac{2}{\eta^{\circ 2}}\left[\sqrt{1+\eta^{\circ 2}} - 1\right] = f(\eta^\circ)$ (1)

y de $\quad I_2 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} \frac{\cos^2\varphi\, d\varphi}{1+\eta^{\circ 2}\cos^2\varphi} = \frac{f(\eta^\circ)}{\sqrt{1+\eta^{\circ 2}}} = g(\eta^\circ)$ (2)

Las fórmulas (1) y (2) son respectivamente la (14) y (17) del §1. Comenzaremos con la (2):

$$I_2 = \frac{1}{\eta^{\circ 2}\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} \frac{1+\eta^{\circ 2}\cos^2\varphi - 1}{1+\eta^{\circ 2}\cos^2\varphi}\, d\varphi = \frac{2}{\eta^{\circ 2}} - \frac{1}{\eta^{\circ 2}\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} \frac{d\varphi}{1+\eta^{\circ 2}\cos^2\varphi} \quad (3)$$

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \frac{d\varphi}{1+\eta^{\circ 2}\cos^2\varphi} = \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{d\varphi}{1+\frac{\eta^{\circ 2}}{2}+\frac{\eta^{\circ 2}}{2}\cos 2\varphi} = \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{du}{1+\frac{\eta^{\circ 2}}{2}+\frac{\eta^{\circ 2}}{2}\cos u}$$

donde $u = 2\varphi$

En la última integral hacemos $z = e^{iu}$ ∴ $dz = iz\,du$:

$$\int_{-\pi}^{+\pi}\frac{d\varphi}{1+\eta^{o2}\cos^2\varphi} = \frac{1}{i}\oint\frac{dz}{z\left(1+\frac{\eta^{o2}}{2}+\frac{\eta^{o2}}{2}\,\frac{(z+z^{-1})}{2}\right)}$$

donde la integral se realiza a lo largo de la circunferencia unitaria del plano complejo.

$$\int_{-\pi}^{+\pi}\frac{d\varphi}{1+\eta^{o2}\cos^2\varphi} = \frac{4}{i\eta^{o2}}\oint\frac{dz}{z^2+\frac{2(2+\eta^{o2})z}{\eta^{o2}}+1},$$

la única raíz de $z^2+\frac{2(2+\eta^{o2})}{\eta^{o2}}z+1=0$ interior al círculo unitario es:

$$z_1 = -\frac{(2+\eta^{o2})}{\eta^{o2}} + \frac{2}{\eta^{o2}}\sqrt{1+\eta^{o2}}$$

Luego:

$$\int_{-\pi}^{+\pi}\frac{d\varphi}{1+\eta^{o2}\cos^2\varphi} = \frac{8\pi}{\left[2z_1+\frac{2(2+\eta^{o2})}{\eta^{o2}}\right]\eta^{o2}} = \frac{2\pi}{\sqrt{1+\eta^{o2}}} \qquad (4)$$

Reemplazando (4) en (3) sale inmeadiatamente la (2). I_1 se calcula así:

$$I_1 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\frac{d\varphi}{1+\eta^{o2}\cos^2\varphi} - I_2 = \frac{2}{\sqrt{1+\eta^{o2}}} - \frac{f(\eta^o)}{\sqrt{1+\eta^{o2}}} = f(\eta^o)$$

con lo que queda demostrada la (1).

Apéndice Matemático Nº 3

Demostración de las fórmulas (16) del § 4.

$$(1)\begin{cases} \text{I)}\ \left(\dfrac{\partial F_1}{\partial a}\right)_0 = -\left[\dfrac{d^2}{dz^{o2}}\left(\psi_0\cos z^o\right) + \dfrac{\omega_0^2}{\omega^2}\cos z^o - \delta\sin z^o\right] \\[2ex] \text{II)}\ \left(\dfrac{\partial F_1}{\partial \alpha}\right)_0 = a^o\left[\dfrac{d^2}{dz^{o2}}\left(\psi_0\sin z^o\right) + \dfrac{\omega_0^2}{\omega^2}\sin z^o + \delta\cos z^o\right] \end{cases}$$

donde (2) $F_1(a,\alpha,\dot a,\dot\alpha) = \psi(a\cos z + \dot a\sin z + \dot a\alpha\cos z) - \psi'^2\sin^2 z + \delta a\sin z - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}a\cos z - \bar{u}^o\sin z$

Bien entendido que el símbolo $\left(\frac{\partial F_1}{\partial a}\right)_0$ significa que las derivadas parciales se toman en el "punto de equilibrio"

Llamando $z^o = \tau + \alpha^o$ se tiene en seguida derivando (2):

$$(3)\ \left(\frac{\partial F_1}{\partial a}\right)_0 = \psi_0\cos z^o + \psi_0'\cos^2 z^o a^o - 2\psi_0' a^o\sin^2 z^o - \psi_0'' a^{o2}\sin^2 z^o\cos z^o + \delta\sin z^o - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}\cos z^o$$

Siendo $y^0 = a^0 \cos z^0$ tenemos:

$$(4)\ \frac{d\psi_0}{dz^0} = -\psi_0' a^0 \,\mathrm{sen}\, z^0 ; \quad (4')\ \frac{d^2\psi_0}{dz^{02}} = -\psi_0' a^0 \cos z^0 + \psi_0'' a^{02} \,\mathrm{sen}^2 z^0 ;$$

$$(5)\ \psi_0' a^0 \cos z^0 - \psi'' a^{02} \,\mathrm{sen}^2 z^0 = -\frac{d^2\psi}{dz^{02}}$$

De (5) sededuce: $(6)\ \psi_0' a^0 \cos^2 z^0 - \psi'' a^{02} \,\mathrm{sen}^2 z^0 \cos z^0 = -\frac{d^2\psi}{dz^{02}} \cos z^0$

Luego en (3):

$$(7)\ \psi_0 \cos z^0 + \psi_0' \cos^2 z^0 a^0 - \psi_0'' a^{02} \,\mathrm{sen}^2 z^0 \cos z^0 - 2\psi_0' a^0 \,\mathrm{sen}^2 z^0 =$$
$$= \psi_0 \cos z^0 - \frac{d^2\psi}{dz^{02}} \cos z^0 + 2\frac{d\psi}{dz^0} \,\mathrm{sen}\, z^0 = -\frac{d^2}{dz^{02}}\left(\psi_0 \cos z^0\right)$$

con lo que queda demostrada $(1)_{\mathrm{I}}$.

De la misma manera:

$$(8)\ \left(\frac{\partial F_1}{\partial \alpha}\right)_0 = -\psi_0 a^0 \,\mathrm{sen}\, z^0 - \psi_0' a^{02} \,\mathrm{sen}\, z^0 \cos z^0 - 2\psi_0' a^{02} \,\mathrm{sen}\, z^0 \cos z^0 +$$
$$+ \psi_0'' a^{03} \,\mathrm{sen}^3 z^0 + \delta a^0 \cos z^0 + \frac{\omega_a^2}{\nu^2} a^0 \,\mathrm{sen}\, z^0$$

De (4') se deduce:

$$(9)\ \psi_0'' a^{03} \,\mathrm{sen}^3 z^0 - \psi_0' a^{02} \cos z^0 \,\mathrm{sen}\, z^0 = \frac{d^2\psi_0}{dz^{02}} a^0 \,\mathrm{sen}\, z^0$$

De (4) se deduce: $(10)\ -2\psi_0' a^{02} \,\mathrm{sen}\, z^0 \cos z^0 = 2a^0 \frac{d\psi}{dz^0} \cos z^0$

Observando (9) y (10) en (8) obtenemos:

$$(11)\ -\psi_0 a^0 \,\mathrm{sen}\, z^0 - \psi_0' a^{02} \,\mathrm{sen}\, z^0 \cos z^0 + \psi_0'' a^{03} \,\mathrm{sen}^3 z^0 - 2\psi_0' a^{02} \,\mathrm{sen}\, z^0 \cos z^0$$
$$= -\psi_0 a^0 \,\mathrm{sen}\, z^0 + \frac{d^2\psi_0}{dz^{02}} a^0 \,\mathrm{sen}\, z^0 + 2\frac{d\psi_0}{dz^0} a^0 \cos z^0 = a^0 \frac{d^2}{dz^{02}}\left(\psi_0 \,\mathrm{sen}\, z^0\right)$$

con que $(1)_{\mathrm{II}}$ queda demostrada.

Apéndice Matemático Nº 4

Demostración de la fórmula (23) del § 6:

$$(1)\qquad \Delta(i\mu) = \Delta(-1) + \frac{\cos^2(\frac{1}{2}\pi i\mu)}{\operatorname{sen}^2(\frac{1}{2}\pi\sqrt{v_0})}$$

en que $\Delta(i\mu)$ es el determinante infinito de Hill representado en la ecuación (20) del §6 y $\Delta(-1)$ es el determinante infinito que se obtiene haciendo $\mu = i$ en $\Delta(i\mu)$.

Existe en la literatura matemática una bella demostración de la fórmula[1]:

$$(2)\ \Delta(i\mu) = -\frac{\operatorname{sen}\frac{1}{2}\pi(i\mu-\sqrt{v_0})\operatorname{sen}\frac{1}{2}\pi(i\mu+\sqrt{v_0})}{\operatorname{sen}^2(\frac{1}{2}\pi\sqrt{v_0})} + 2K\cot\left(\tfrac{1}{2}\pi\sqrt{v_0}\right)$$

donde K es una constante independiente de μ. Para determinar K hagamos en (2) $\mu = i$;

$$\Delta(-1) = -\frac{\operatorname{sen}\frac{1}{2}\pi(1+\sqrt{v_0})\operatorname{sen}\frac{1}{2}\pi(1-\sqrt{v_0})}{\operatorname{sen}^2(\frac{1}{2}\pi\sqrt{v_0})} + 2K\cot\left(\tfrac{1}{2}\pi\sqrt{v_0}\right) =$$

$$= \frac{\frac{1}{2}\left[\cos\pi - \cos(\pi\sqrt{v_0})\right]}{\operatorname{sen}^2(\frac{1}{2}\pi\sqrt{v_0})} + 2K\cot\left(\tfrac{1}{2}\pi\sqrt{v_0}\right) = -\frac{\cos^2(\frac{1}{2}\pi\sqrt{v_0})}{\operatorname{sen}^2(\frac{1}{2}\pi\sqrt{v_0})} + 2K\cot\left(\tfrac{1}{2}\pi\sqrt{v_0}\right)$$

$$\therefore (3)\ \Delta(-1) = -\cot^2\left(\tfrac{1}{2}\pi\sqrt{v_0}\right) + 2K\cot\left(\tfrac{1}{2}\pi\sqrt{v_0}\right)$$

Restando (3) de (2):

$$(4)\ \Delta(i\mu) - \Delta(-1) = -\frac{\operatorname{sen}\frac{1}{2}\pi(i\mu-\sqrt{v_0})\operatorname{sen}\frac{1}{2}\pi(i\mu+\sqrt{v_0})}{\operatorname{sen}^2(\frac{1}{2}\pi\sqrt{v_0})} + \cot^2\left(\tfrac{1}{2}\pi\sqrt{v_0}\right);$$

$$-\operatorname{sen}\tfrac{1}{2}\pi(i\mu-\sqrt{v_0})\operatorname{sen}\tfrac{1}{2}\pi(i\mu+\sqrt{v_0}) = -\left[\operatorname{sen}(\tfrac{1}{2}\pi i\mu)\cos(\tfrac{1}{2}\pi\sqrt{v_0}) - \operatorname{sen}(\tfrac{1}{2}\pi\sqrt{v_0})\cos(\tfrac{1}{2}\pi i\mu)\right] = \operatorname{sen}^2(\tfrac{1}{2}\pi\sqrt{v_0})\cos^2(\tfrac{1}{2}\pi i\mu) - \operatorname{sen}^2(\tfrac{1}{2}\pi i\mu)\cos^2(\tfrac{1}{2}\pi\sqrt{v_0});$$

Luego (4) queda:

$$\Delta(i\mu) - \Delta(-1) = \frac{\operatorname{sen}^2(\frac{1}{2}\pi\sqrt{v_0})\cos^2(\frac{1}{2}\pi i\mu) - \operatorname{sen}^2(\frac{1}{2}\pi i\mu)\cos^2(\frac{1}{2}\pi\sqrt{v_0}) + \cos^2(\frac{1}{2}\pi\sqrt{v_0})}{\operatorname{sen}^2(\frac{1}{2}\pi\sqrt{v_0})} =$$

$$\frac{\operatorname{sen}^2(\frac{1}{2}\pi\sqrt{v_0})\cos^2(\frac{1}{2}\pi i\mu) + \cos^2(\frac{1}{2}\pi\sqrt{v_0})\cos^2(\frac{1}{2}\pi i\mu)}{\operatorname{sen}^2(\frac{1}{2}\pi\sqrt{v_0})} = \frac{\cos^2(\frac{1}{2}\pi i\mu)}{\operatorname{sen}^2(\frac{1}{2}\pi\sqrt{v_0})}$$

$$\Delta(i\mu) = \Delta(-1) + \frac{\cos^2(\frac{1}{2}\pi i\mu)}{\operatorname{sen}^2(\frac{1}{2}\pi\sqrt{v_0})}$$

que es la fórmula buscada, la que no hemos encontrado en la literatura.

(1) Véase Whittaker-Watson, op.cit. Cap. XIX.

Apéndice Matemático Nº 5

Demostración de la fórmula (64) del §6:

$$(1)\quad \prod_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{\nu_0-(1+2n)^2}{\nu_0-4n^2} = -\frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{\nu_0}\right)}{\operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{\nu_0}\right)}$$

Para ello demostraremos la fórmula más general:

$$(2)\quad \prod_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{\nu_0-(i\mu-2n)^2}{\nu_0-4n^2} = -\frac{\operatorname{sen}\frac{1}{2}\pi(i\mu-\sqrt{\nu_0})\operatorname{sen}\frac{1}{2}\pi(i\mu+\sqrt{\nu_0})}{\operatorname{sen}^2\left(\frac{1}{2}\pi\sqrt{\nu_0}\right)}$$

$$\prod_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{\nu_0-(i\mu-2n)^2}{\nu_0-4n^2} = \frac{\nu_0-(i\mu)^2}{\nu_0}\prod_{n=1}^{+\infty}\frac{[\nu_0-(i\mu-2n)^2][\nu_0-(i\mu+2n)^2]}{(\nu_0-4n^2)^2} =$$

$$-\frac{[(i\mu)^2-\nu_0]}{\nu_0}\prod_{n=1}^{+\infty}\frac{\left(1-\frac{(i\mu-\sqrt{\nu_0})^2}{4n^2}\right)\left(1-\frac{(i\mu+\sqrt{\nu_0})^2}{4n^2}\right)}{\left(1-\frac{\nu_0}{4n^2}\right)^2}$$

Si a este último producto le aplicáramos la célebre fórmula de Euler:

$$\operatorname{sen}\pi x = \pi\prod_{n=1}^{+\infty}\left(1-\frac{x^2}{n^2}\right)$$

obtendríamos inmediatamente la (2). Si en la (2) hacemos $\mu = i$:

$$(3)\quad \prod_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{\nu_0-(1+2n)^2}{\nu_0-4n^2} = -\frac{\operatorname{sen}\frac{1}{2}\pi(1+\sqrt{\nu_0})\operatorname{sen}\frac{1}{2}\pi(1-\sqrt{\nu_0})}{\operatorname{sen}^2\left(\frac{1}{2}\pi\sqrt{\nu_0}\right)} = -\frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{\nu_0}\right)}{\operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{\nu_0}\right)}$$

con lo que (1) queda demostrada.

Bibliografía

Schunck y Zenneck, Jahrbuch für drahtlose Telegraphie, 19, 1922.

Dreifuss, Archiv für Elektrotechnik 2, 1913.

Kryloff y Bogoliuboff, Ukrainska akad.nauk. Inst. de la mécanique, Chaire de phys.math. Annales, t. 1-2, 1937.

Kryloff y Bogoliuboff, Ukrainska akd.nauk., Inst. mecánique, Rapport № 8, 1934.

Estos dos trabajos han llegado a la literatura inglesa a través de la traducción de Lefschetz:
Kryloff y Bogoliuboff, Introduction to Non-Linear Mechanics, 1947.
Trae una extensa bibliografía debida a dichos autores.

Keller, Journal Franklin Institute, 225, 1938.

Keller, Mathematics of Modern Engineering, 2.

Cunningham, Journal of Applied Physics, , 1948.

Hill G.W., Acta Mathematica, VIII, 1886.

Piccaluga, Ciencia y Técnica, 106, 1946

Amati D., Tesis, Buenos Aires, 1952.

Andronow y Chaikin, Theory of Oscillations, 1937.

Liapounoff A., Problème Général de la Stabilité du Movement.

Mc Lachlan, Ordinary non-linear differential equations, 1950 con abundante bibliografía.

Stoker, Non-Linear Vibrations, , 1950 con abundante bibliografía.

Textos Matemáticos

Giovanni Sansone, Equazioni Differenziali nel Campo Reale.
Whittaker y Watson, A course of Modern Analysis.
Riesz F., Les systèmes d'equations linéaires à une infinité d'inconnues.
Strutt, M.Y.O., Lamé-sche, Mathieu-sche und verwandte Funktionen.

R. Gans 18/XII/5?