Sobre un sistema completo de funciones ortogonales de dos variables

Diharce, Juan Felix

1950

Tesis presentada para obtener el grado de Doctor en Ciencias Físico-Matemáticas de la Universidad de Buenos Aires

SOBRE UN SISTEMA COMPLETO DE FUNCIONES

ORTOGONALES DE DOS VARIABLES

TESIS DOCTORAL

DE

JUAN FELIX DIHARCE

DOCTORADO EN CIENCIAS FISICOMATEMATICAS

AÑO 1950

INDICE GENERAL

PAG Nº

PRIMERA PARTE

(Exposición)

SEGUNDA PARTE

(Investigación)

SOBRE UN SISTEMA COMPLETO DE FUNCIONES ORTOGONALES (Alfredo Haar)

Las funciones más simples son las funciones características de intervalos, es decir que valen 1 en un intervalo y son nulas fuera de él, es decir en el resto de (0,1). Toda función continua es aproximable uniformemente por combinaciones lineales de tales funciones características. Por eso, aunque históricamente no fué así, resulta natural considerar en primer término sistemas $\{f_n(x)\}$ compuestos de funciones características. El sistema más simple de este tipo es el siguiente: Pongamos

$f_0(x) = 1$ para $0 \leq x \leq 1$, 0 en el resto de $(0,1)$

$f_1^1(x) = 1$ " $0 \leq x < \frac{1}{2}$, 0 en el resto de $(0,1)$

$f_1^2(x) = 1$ " $\frac{1}{2} \leq x \leq 1$, 0 en el resto de $(0,1)$

....

$f_k^i(x) = 1$ " $\frac{i-1}{2^k} \leq x < \frac{i}{2^k}$, 0 en el resto de $(0,1)$

Es decir: dividimos el intervalo $(0,1)$ en 2^k partes iguales $I_1, I_2, \dots\dots, I_{2^k}$ y para cada i definimos la función $f_k^i(x)$ como la función característica de I_i; tendremos pues, para cada k, 2^k funciones.

Ordenemos ahora las $f_k^i(x)$ según las k e i crecientes:

$$f_0, f_1^1, f_1^2, f_2^1, f_2^2, f_2^3, f_2^4, f_3^1, \dots\dots\dots$$

el sistema así obtenido no es ortogonal.

Apliquémosle el método de ortonormalización. Para ello, observemos antes que f_0, f_1^1 son linealmente independientes, en cambio f_1^2 depende de ellas; en general son independientes las funciones f_0, f_1^1, f_2^1, f_2^3

$f_3^1, f_3^5, f_3^7, \dots\dots\dots, f_k^1, f_k^3, \dots, f_k^{2^k-1}$

y las demás f_i^r, $i \leq k$, dependen de ellas. Luego para ortogonalizar la sucesión (1) basta ortogonalizar la subsucesión formada por los elementos de índice ~~par~~ los d dos primeros elementos.

Pongamos pues

$$\chi_0(x) = f_0(x) \qquad (2)$$

$$\bar{\chi}_1(x) = -(\chi_0 . f_1^1)\chi_0(x) + f_1^1(x) = -\left(\int_0^{1/2} 1dx + \int_{1/2}^{1} 0dx\right)\chi_0(x) +$$

$$+ f_1^1(x) = -\frac{1}{2} f_0(x) + f_1^1(x) = -\frac{1}{2} + f_1^1(x)$$

de modo que

$$\bar{\chi}_1(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{en } 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \text{en } \frac{1}{2} \leq x < 1 \end{cases}$$

luego $\|\bar{\chi}_1(x)\| = \int_0^1 \chi_1^2 dx = \int_0^1 1/4 \, dx = 1/4$

entonces $\sqrt{\|\bar{\chi}_1(x)\|} = 1/2$ y resulta

$$\chi_1(x) = -1 + 2 f_1^1(x) \qquad (3)$$ de modo que

$$\chi_1(x) = \begin{cases} 1 & \text{en } 0 \leq x < 1/2 \\ -1 & \text{en } 1/2 \leq x < 1 \end{cases} \qquad (3a)$$

Siguiendo del mismo modo se obtendrán funciones $\chi_n^k(x)$ con $k = 1, 2, 3, \dots, 2^{n-1}$ (por que de (1) hemos suprimido para cada n las f_n^i de i par, de modo que sólo existen 2^{n-1} independientes dadas por las fórmulas

$$\chi_n^k(x) = \begin{cases} \sqrt{2^{n-1}} & \text{en } \frac{2k-2}{2^n} \leq x < \frac{2k-1}{2^n} \\ -\sqrt{2^{n-1}} & \text{en } \frac{2k-1}{2^n} \leq x < \frac{2k}{2^n} \end{cases}$$

El sistema $\left\{ X_n^k (x) \right\}$ $(k = 1,2,\ldots\ldots 2^{n-1})$ 0 en el resto de (0,1)

así obtenido, ordenado según n y k crecientes, es el sistema ortonormal de Haar

Este sistema de Haar es completo, es decir toda f(x) ortogonal a todas las funciones $X_n^i (x)$ es nula en casi todo punto. (supondremos f(x) continua o continua salvo un número finito de puntos)

Demostración.- Sea f(x) continua y supongamos que es f(x) ortogonal a toda $X_n^i (x)$. Probaremos que $f(x) \equiv 0$

Por la continuidad uniforme de f(x), dado $\varepsilon > 0$, existe un n tal que dividiendo (0,1) en 2^n partes iguales $I_1, I_2, \ldots\ldots I_{2^n}$, es la oscilación de la función f(x) en cada I_i menor que ε.

Sean $C_1, C_2, \ldots C_{2^n}$ los valores de f(x) en los extremos derechos de los intervalos $I_1, I_2, \ldots I_{2^n}$ respectivamente

La función $C_1 f_n^1 (x) + \ldots\ldots + C_{2^n} f_n^{2^n} (x) = f_\varepsilon (x)$

(donde f_n^i son las funciones características diádicas) vale C_i en el intervalo I_i y por tanto difiere de f(x) en menos de ε, es decir $|f(x) - f_\varepsilon (x)| < \varepsilon$ para todo x. Como cada $f_n^i (x)$ es una combinación lineal de de las X_n^i se puede escribir también

$$f_\varepsilon (x) = d_1 X_n^1 (x) + \ldots\ldots + d_n^{2^{n-1}} X_n^{2^{n-1}} (x)$$

donde los d_i son ciertos números reales constantes

Como f(x) es ortogonal a todas las $X_n^i(x)$ resulta

$$\int_0^1 f(x) f_\varepsilon(x) = \sum_{i=1}^{2^{n-1}} d_i \int_0^1 f(x) X_n^i(x)dx =$$

$$= \sum_{i=1}^{2^{n-1}} d_i \cdot 0 = 0$$

Por otra parte, por lo visto, es $f(x) = f_\varepsilon(x) + \varepsilon(x)$

con $|\varepsilon(x)| < \varepsilon$. Luego

$$\int_0^1 f(x)^2 dx = \int_0^1 f(x) \cdot f(x) dx = \int_0^1 f(x) \left[f_\varepsilon(x) + \varepsilon(x) \right] dx =$$

$$\int_0^1 f(x) f_\varepsilon(x) dx + \int_0^1 f(x)\, \varepsilon(x) dx = 0 + \int_0^1 f(x) \varepsilon(x) dx =$$

$$\int_0^1 f(x) \varepsilon(x) dx$$

Pero siendo $|\varepsilon(x)| < \varepsilon$ es $\left| \int_0^1 f(x)\, \varepsilon(x) dx \right| \leq \varepsilon M$

(M = máximo de f(x) en (0,1)) y como ε es arbitrario

resulta

$$\int_0^1 |f(x)|^2 dx < \varepsilon \quad \text{, luego} \quad \int_0^1 |f(x)|^2 dx = 0$$

lo que dá f(x) = 0.

2.-<u>Desarrollos según el sistema de funciones ortogonales</u> $\left\{ X_n^1(x) \right\}$

Vamos a mostrar ahora que la serie de Fourier respecto al sistema ortogonal $\left\{ X_n^i(x) \right\}$ definido antes de una función continua f(s), en todo el intervalo (0,1), converge uniformemente al esa función.

Consideremos la serie indefinida:

$$X_0(s) \int_0^1 f(t) X_0(t)dt + X_1(s) \int_0^1 f(t) X_1(t)dt + \ldots$$

$$\ldots\ldots + X_n^1(s) \int_0^1 f(t) X_n^1(t)dt + \ldots\ldots + X_n^1(s) \int_0^\mu f(t) X_n^1(t)dt + \ldots$$

Para cualquier término, entonces para $X_n^\rho(s) \int_0^1 f(t) X_n^\rho(t)dt$

obtendremos una suma finita,que será designada en adelante con $\left[f(s)\right]_n^{(p)}$

$$\left[f(s)\right]_n^{(p)} = \chi_0(s)\int_0^1 f(t)\chi_0(t)\,dt + \dots + \chi_n^p(s)\int_0^1 f(t)\chi_n^p(t)\,dt$$

Poniendo $K_n^{(p)}(s,t) = \chi_0(s)\chi_0(t) + \dots + \chi_n^p(s)\chi_n^p(t)$

obtenemos

$$\left[f(s)\right]_n^{(p)} = \int_0^1 K_n^{(p)}(s,t) f(t)\,dt$$

La última ecuación define infintas funciones de las dos variables s,t: $K_0(s,t)$, $K_1(x,t)$,.......,y trataremos de estudiar ahora las propiedades de esas funciones.

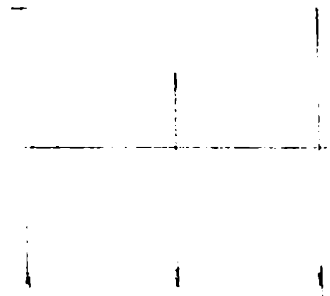
La función $K_0(s,t)$ definida en el cuadrado $0 \le x \le 1$, $0 \le t \le 1$ es en todo igual a 1. La función $\chi_1(s)\,\chi_1(t)$ es igual a 1 en el interior de los cuadrados

$$Q_{11}\begin{cases} 0 \le s < 1/2 \\ 0 \le t < 1/2 \end{cases} \quad \text{y} \quad Q_{22}\begin{cases} 1/2 \le s \le 1 \\ 1/2 \le t \le 1 \end{cases};$$

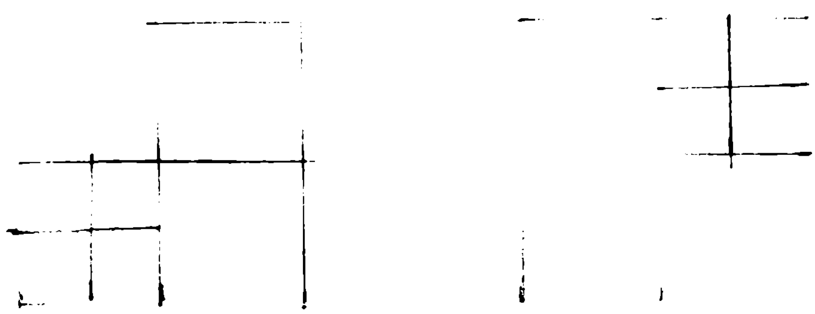
en los otros dos cuadrados

$$Q_{12}\begin{cases} 1/2 \le s \le 1 \\ 0 \le t < 1/2 \end{cases} \quad \text{y} \quad Q_{21}\begin{cases} 0 \le s < 1/2 \\ 1/2 \le t \le 1 \end{cases}$$

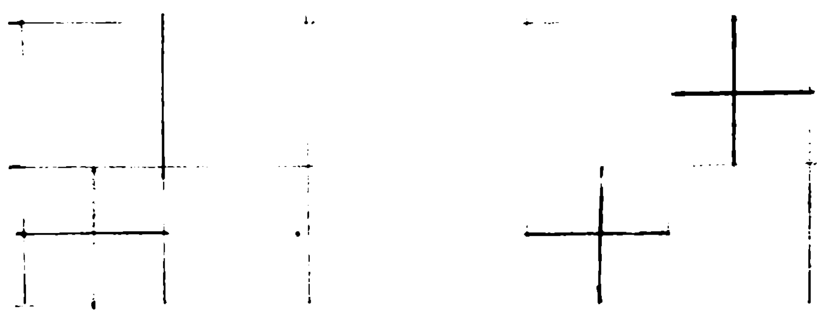
es igual a -1. Por ello $K_{11}(s,t)$ es igual a 2 en Q_{21} y Q_{22} ,y nula en Q_{12} y Q_{21}



En las rectas $s=1/2$ ó $t=1/2$, la función $K_1(s,t)$ es naturalmente igual a la media aritmética de los valores que adopta en los intervalos adyacentes. Para obtener $K_2^1(s,t)$ y $K_2^2(s,t)$ dibujamos en la figura los valores que adoptanlas funciones $X_2^1(s).X_2^1(t)$ ó $X_2^2(s)X_2^2(t)$



Los valores de $K_2^1(s,t)$ y $K_2^2(s,t)$ están por ello representados por las figuras. Con ello se vé de inmediato la ley de formación



de las funciones $K_n^p(s,t)$. Para obtener los valores de las funciones $K^{2^{n-1}}(s,t)$ dividimos el cuadrado un nidad en 2^{2n} partes iguales; en los cuadrados parciales que yacen en la diagonal $s=t$ de los cuadrados q_1, $q_2, \dots\dots, q_{2^n}$ es $K_n^{2n-1} = 2^n$, en el interior de los otros cuadrados es K_n^{2n-1} igual a 0. En las posiciones en que la función experimenta un salto, toma la media aritmética de los valores que adopta en los cuadrados adyacentes.

Para obtener ahora $K_{n+1}^{p}(s,t)$ dividamos cada uno de los cuadrados parciales primeros $q_1, q_2, \dots, q_p$, que yacen en la diagonal $s=t$ en cuatro cuadrados, como indica la figura

$$q = q_x^{(1,1)} + q_x^{(1,2)} + q_x^{(2,1)} + q_x^{(2,2)}$$

$(x=1,2,\dots p)$

$$\begin{array}{cc} q_x^{(2,1)} & q_x^{(2,2)} \\ q_x^{(1,1)} & q_x^{(1,2)} \end{array}$$

q_x

Entonces K_{n+1}^{p} es dado mediante la siguiente ley:

En los cuadrados parciales $q_x^{(1,1)}$, $q_x^{(2,2)}$ es

$K_n^p(s,t) = 2^{n+1}$, en los cuadrados $q^{(1,2)}$, $q^{(2,1)}$ igual a 0. Interiormente a todo otro cuadrado es

$K_{n+1}^{p}(s,t) = K_n^{2n-1}(s,t)$ (es decir igual a 2^n en los cuadrados parciales $q_{p+1}, \dots\dots, q_{2^n}$

e igual a 0 cuando el punto s,t no está en esos cuadra-

cuando el punto s,t no pertenece a esos cuadrados).
En los puntos donde $K^{p}_{n+1}(s,t)$ es discontinua (es decir en aquellas posiciones s,t donde una de las magnitudes s ó t (ó las dos) es una fracción diádica finita de la forma $\frac{1}{2^{p_1}}+\dots\dots+\frac{1}{2^{p}}$) lo determinamos por la ley obtenida antes.

Para comprobar la exactitud de esas leyes, admitamos que sean ciertas para $K^{2^{n}-1}(s,t)$; es entonces

$$K^{1}_{n+1}(s,t) = K^{2^{n}-1}_{n}(s,t) + X^{1}_{n+1}(s)X^{1}_{n+1}(t)$$

Pero como $X^{1}_{n+1}(s)$ es distinta de cero sólo en el intervalo $0 \leq s < \frac{1}{2^{n}}$, entonces $K^{1}_{n+1}(s,t)$ sólo puede ser distinta de $K^{2^{n}-1}(s,t)$ en el cuadrado $0 \leq s < \frac{1}{2^{n}}$, $0 \leq t < \frac{1}{2^{n}}$, esto es en q_1.

Como además $X^{1}_{n+1}(s)X^{1}_{n+1}(t) = 2^{n}$ en los cuadraditos $q^{(1,1)}_{1}, q^{(2,2)}_{1}$ y -2^{n} en los cuadraditos $q^{(1,2)}_{1}, q^{(2,1)}_{1}$, entonces resulta que $K^{1}_{n+1}(s,t)$ toma los valores 2^{n+1} en $q^{(1,1)}_{1}, q^{(2,2)}_{1}$, 0 en $q^{(1,2)}_{1}, q^{(2,1)}_{1}$.

Designemos con f(s) una función arbitraria, integrable en el sentido de Lebesgue, que está definida en el intervalo (0,1), y con s=a un punto arbitrario de ese intervalo.
Es entonces

$$\left[f(a)\right]^{(p)}_{n} = \int_{0}^{1} K^{(p)}_{n}(a,t)f(t)\,dt$$

Admitamos, por el momento, que a no sea ninguna fracción diádica finita de la forma indicada antes, entonces la función $K_n^p(a,t)$ es nula en todo $(0,1)$ con excepción de ciertos intervalos $i_n^{(p)}$, cuyas longitudes son $l_n^{(p)} = \frac{1}{2^n}$ ó $\frac{1}{2^{n-1}}$; en ese intervalo $i_n^{(p)}$ es pues $K_n^p(a,t) = \frac{1}{l_n^{(p)}}$ y obtenemos por ello:
$$\left[f(a,t)\right]_n^{(p)} = \frac{1}{l_n^{(p)}} \int_{i_n^{(p)}} f(t)\,dt$$

Si a es por el contrario una fracción diádica finita, entonces es $K_n^p(a,t)$ distinta de cero en un intervalo $\bar{i}_n^{(p)}$, cuya longitud $\bar{l}_n^{(p)}$ es $\frac{1}{2^{n-2}}$ ó $\frac{1}{2^{n-1}}$; el valor de $K_n^p(a,t)$ en ese intervalo es entonces igual a $\frac{1}{\bar{l}_n^{(p)}}$ y obtenemos por ello también en este caso
$$\left[f(a,t)\right]_n^{(p)} = \frac{1}{\bar{l}_n^{(p)}} \int_{(\bar{i}_n^{(p)})} f(t)\,dt$$

En ambos casos es por ello la longitud del intervalo de integración, que contiene al punto $s = a$, igual al valor recíproco del factor colocado delante de la integral. Ahora convergen entonces a 0 $l_n^{(p)}$ y $\bar{l}_n^{(p)}$ para n crecientes, y convergen por ello las sumas parciales
$$\left[f(a,t)\right]_n^{(p)} \quad \text{a} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{l_n^{(p)}} \int_{i_n^{(p)}} f(t)\,dt$$

Como los intervalos $i_n^{(p)}$ con n crecientes coinciden en el punto $s = a$, entonces ese valor límite no difiere del valor de la derivada de $\int_0^s f(t)\,dt$ respecto de s en el punto $s = a$:

$$\lim_{n=\infty} \frac{1}{l_n^{(p)}} \int_{i_n^{(p)}} f(t)dt = \left[\frac{d}{ds} \left(\int_0^s f(t)dt \right) \right]_{s=a}$$

y obtenemos el resultado: Si $f(s)$ es una función arbitraria, entonces convergen sus desarrollos en sumas parciales en cada punto donde exista la derivada

$\frac{d}{ds} \left(\int_0^s f(t)dt \right)$ y toman sus valores

Como entonces, por una ley de Lebesgue, $\frac{d}{ds}\left(\int_0^s f(t)dt\right)$ siempre existe, con excepción de un conjunto de medida nula, y coincide con $f(s)$, resulta: el desarrollo de una función arbitraria, integrable Lebesgue, según funciones de nuestro sistema ortogonal converge en cada punto, con excepción de un conjunto de medida nula.

Si $f(s)$ es continua en cada punto, entonces es para todo punto sin excepción $f(s) = \frac{d}{ds} \int_0^s f(t)dt$

es decir:

El desarrollo de Fourier de una función continua cualquiera (respecto de nuestro sistema ortogonal K) converge en cada punto del intervalo al valor de la función en él.

3.-<u>Otras propiedades de los sistemas de funciones ortogonales K</u>

Queremos ahora deducir algunas otras propiedades de nuestro sistemas de funciones, que corresponden a leyes de la teoría de series trigonométricas, obtenidas aquí por distintos métodos de sumación.

De la circunstancia de que las funciones $K_n^p(s,t)$ son siempre positivas, deducimos la siguiente ley:

Si se mantiene la función $f(s)$, integrable Lebesgue en el intervalo $(0,1)$ entre los límites m y M,

$m \leq f(s) \leq M$, entonces se mantienen también todas las sumas parciales entre esos límites: $m \leq \left[f(s)\right]_n^{(p)} \leq M$

En efecto, si es por ejemplo $\left[f(s)\right]_n^{(p)} = \int_0^1 K_n^p(s,t) f(t)dt \leq$

$$\leq M \int_0^1 K_n^p(s,t)dt = M.$$

Sea ahora $s = a$ un punto cualquiera del intervalo $(0,1)$

Como para n suficientemente grande las funciones $K_n^p(a,t)$ cuando es $0 \leq t \leq a-\varepsilon$, o cuando es $a+\varepsilon \leq t \leq 1$, elijiendo ε suficientemente pequeño, entonces es

$$\left[f(a)\right]_n^{(p)} = \int_{a-\varepsilon}^{a+\varepsilon} K_n^{(p)}(a,t) f(t)dt$$

tan pronto cuando n sobrepasa un determinado límite.

Como en esta fórmula no es tenido en cuenta el comportamiento de la función fuera del intervalo $0 \leq s \leq a-\varepsilon$ o $a+\varepsilon \leq s \leq 1$, deducimos: La convergencia de la serie de Fourier respecto de las K de una función integrable Lebesgue, en el punto $s = a$, sólo depende del comportamiento de esa función en un entorno del punto $s = a$.

Si coinciden las funciones $f(s)$ y $g(s)$ en un pequeño intervalo, entonces se puede indicar un índice N, tal que, si $n > N$, toda $\left[f(s)\right]_n^{(p)}$ y $\left[g(s)\right]_n^{(p)}$ coinciden también en ese intervalo.

En combinación con la ley principal del parágrafo anterior obtenemos: La serie de Fourier, respecto de K, de una función $f(s)$ converge hacia esa función en cada punto de continuidad de $f(s)$.

4.-DISTINTAS GENERALIZACIONES

Podemos generalizar el sistema ortogonal construído arriba en distintas direcciones, sin que sus propiedades principales desaparezcan. Indicaremos algunas de esas generalizaciones.

Podemos primero utilizar del modo siguiente un procedimiento general de división del eje s para construcción de sistemas ortogonales: Sea otra vez la primera función del sistema igual a 1, luego elejimos un punto cualquiera del intervalo 0,1, acaso α_1, y construímos una función $\bar{X}_1(s)$ que en el intervalo $(0, \alpha_1)$ ó $(\alpha_1, 1)$ es constante y que cumple las condiciones $\int_0^1 \bar{X}_1(s) \ldots ds = 0$

$$\int_0^1 (X_1(s))^2 ds = 1$$

Elijamos luego puntos $\alpha_1^{(1)}$ y $\alpha_2^{(2)}$ en los intervalos $[0, \alpha_1]$, $[\alpha_1, 1]$ cualesquiera y determinamos las funciones $\bar{X}_2^1(s)$ y $\bar{X}_2^2(s)$ mediante la siguiente regla: $X_2^{(1)}(s)$ se anula en $[\alpha_1, 1]$ y toma en el intervalo $[0, \alpha_2^{(1)}]$ y $[\alpha_2^{(1)}, \alpha_1]$ un valor constante, que puede ser elejido de modo que sea

$$\int_0^1 \bar{X}_2^1(s) ds = 0 \quad , \quad \int_0^1 (X_2^1(s))^2 ds = 1$$

$\bar{X}_2^2(s)$ se anula pues en $(0, \alpha_1)$ y toma un valor constante en los intervalos $[\alpha_1, \alpha_2^{(2)}]$ y $[\alpha_2^{(2)}, 1]$, que se elije de manera que las relaciones $\alpha_3^{(1)}, \alpha_3^{(2)}, \alpha_3^{(3)}, \alpha_3^{(4)}$

$$\int_0^1 \bar{X}_2^2(s) ds = 0 \quad , \quad \int_0^1 (X_2^2(s))^2 ds = 1$$

se cumpla. Ahora elejimos 4 puntos $\alpha_3^{(1)}, \alpha_3^{(2)}, \alpha_3^{(3)}, \alpha_3^{(4)}$ que se encuentran en los intervalos $[0, \alpha_2^{(1)}] \ldots [\alpha_2^{(2)}, 1]$ y construímos en forma análoga las funciones $\bar{X}_3^1(s), \ldots$

$X_3^2(s) \ldots X_3^4(s)$, y así continuamos. Fijaremos además que en un punto de salto las funciones sean iguales a la media aritmética de los valores que la misma adopta en los dos intervalos adyacentes.

Si forman los puntos así elejidos un continuo de puntos podemos deducir exactamente en la misma forma que antes que el sistema así definido es completo. Para mostrar que ese sistema de funciones posee la propiedad que toda función continua es desarrollable en una serie a la manera de Fourier, la cual crece según las funciones del sistema, notemos que las funciones

$$K_n^{(p)}(s,t) = X_o(s)X_o(t) + \ldots\ldots\ldots + X_n^1(s)X_n^1(t) + \ldots\ldots\ldots + X_n^p(s)X_n^p(t) \ldots\ldots$$

permanecen positivas para cada par de valores n, p y que $\int_0^1 K_n^{(p)}(s,t) = 1$

Designamos también con $\left[f(s)\right]_n^{(p)}$ la suma finita que obtendremos cuando la serie de Fourier de la función $f(s)$ se corta en el término $X_n^p(s)\int_0^1 f(t)X_n^p(t)dt$

y como las funciones $K_n^{(p)}(s,t)$ son siempre positivas deducimos de ello que $\left[f(s)\right]_n^{(p)}$ permanece siempre entre el máximo y el mínimo de $f(s)$.

La ordenación indicada en virtud de la ecuación

$$f(s)_n^{(p)} = \int_0^1 K_n^{(p)}(s,t)f(t)dt$$

llena todas las limitaciones de nuestra ley de lo que resulta que la serie de Fourier de una función cualquiera formada respecto al sistema ortogonal considerado converge uniformemente a la función,cuando f(s) yace en el dominio del sistema ortogonal.

Ahora es claro que toda suma finita de nuestras funciones ortogonales es una función continua a saltos,inversamente es también combianación de funciones continuas a saltos,que experimenta en un número finito de puntos un salto,y en tales puntos es igual a la media aritmética de los valores que adopta en los intervalos adyacentes, un agregado finito de nuestras funciones ortogonales.Como entonces los puntos de sañto está repartidos en todo el intervalo (0,1) se vé de inmediato que una función continua se puede aproximar mediante funciones continuas en escalera cualesquiera.Con lo que se verá que el dominio de nuestro sistema ortogonal comprende todas las funciones continuas,y por ello converge la serie de Fourier de cada función continua,uniformemente en tal intervalo.

No hay ahora ningún impedimento para mostrar que la serie de cada función integrable,con excepción de un conjunto de medida nula,es convergente en todo el intervalo

Otra generalización de nuestros sistemas ortogonales puede obtenerse,adoptando en lugar de una división por dos del intervalo una por tres o por cuatro partes,etc,,entonces definimos de igual modo que antes un sistema de funciones ortogonales completo,construyendo para cada división del intervalo un sistema finito de funciones en escalera,continuas,las que se encuestran entre las anteriores funciones ortogonales y que adoptan en el intervalo parcial valores constantes.Así se define,como es siempre posible,para cada división un tal número de funciones de las cuales ninguna es una función en escalera idéndicamente nula,que se encuentran entre las funciones ortogonales definidas y que experimentan saltos sólo en los puntos de división.Entonces los sistemas de funciones así obtenidos son completos en todo sentido,cuando los puntos de división forman un continuo de puntos,así que cada función integrable Lebesgue que se encuentra entre las funciones del sistema ortogonal se anula,con excepción de un conjun o de medida nula.Todas ellas poseen la propiedad de convergencia antes indicada,y finalmente vale también la ley,que la convergencia de la serie de Fourier(con respecto a ese sistema de funciones) de una función en un punto,sólo depende del comportamiento de la función en el entorno del punto.

UNA PROPIEDAD DE LOS SISTEMAS

ORTOGONALES DE HAAR

(J. Schauder)

(Mathemathische Zeitscchrft 28-1928)

Ley I Si es $f(x)$ una función definida en el intervalo $(0,1)$, integrable Lebesgue, con α -ésima potencia integrable $(0,1)$, entonces es

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \left| f(x) - \sum_{i=1}^{n} c_i \varphi_i(x) \right|^{\alpha} dx = 0,$$

donde designamos $\{\varphi_i(x)\}$ el sistema ortogonal de Haar y c_i los coeficientes de Fourier $c_i = \int_0^1 f(x)\varphi_i(x)\,dx$

(2) $(i = 1,2,3,\ldots)$

Comprobación escribiremos en adelante $s_n(f)$ ó, más brevemente, s_n en lugar de $\sum_{i=1}^{n} c_i \varphi_i(x)$ y expresaremos la mayor parte de las veces la variable independiente con x

Como ya mostrara Haar, se divide el intervalo $(0,1)$ en $m(n)$ intervalos parciales $(a_0, a_1), (a_1, a_2), \ldots (a_{m-1}, a_m)$ así que $s_n(f)$ es constante en el interior de cada intervalo parcial, es exactamente

(3) $$s_n(f) = \frac{\int_{a_k}^{a_{k+1}} f(x)\,dx}{a_{k+1} - a_k} \text{ para } a_k < a_{k+1},$$

$(k = 0,1,2,\ldots\ldots,m-1)$

Por ello resulta (4) $$\int_0^1 |s_n|^{\alpha} dx = \sum_{k=0}^{m-1} \int_{a_k}^{a_{k+1}} |s_n|^{\alpha} dx = \sum_{k=0}^{m-1} \left| a_{k+1} - a_k \right| \left| \frac{\int_{a_k}^{a_{k+1}} f(x)\,dx}{a_{k+1} - a_k} \right|^{\alpha}$$

La desigualdad de Césaro-Holder para integrales suministra entonces

$$\left|\int_{a_k}^{a_{k+1}} f dx\right|^{\alpha} \leq \left|a_{k+1} - a_k\right|^{\alpha-1} \int_{a_k}^{a_{k+1}} |f|^{\alpha} dx$$

que con (4) dá (5) $\int_0^1 |s_n|^{\alpha} dx \leq \int_0^1 |f|^{\alpha} dx$

La ley a comprobar es ahora evidentemente exacta, cuando la función $f(x)$ es acotada, entonces se obtiene principalmente no sólo la relación de Haar

1.- $\lim\limits_{n\to\infty} s_n(f) = f$ en casi todo (0,1) sino también, como se induce de (3)

2.- $\text{Máx } |s_n(f)| \leq \text{máx } |f| = \text{const } C^{(n)}$ $(n=1,2,3,\ldots)$

y según 1

$\bar{1}$ $\lim\limits_{n} |s_n - f|^{\alpha} = 0$ en casi todo (0,1)

$\bar{2}$ $\text{Máx } |s_n - f|^{\alpha} \leq (2C)^{\alpha}$, donde C no depende de n ni de x

Llevando $\bar{2}$ a (5) y permutando lim e $\int$ se obtiene la ley deseada.

Si se trata del caso general, entonces para cada número positivo existen un par de funciones $f_1(x)$, $f_2(x)$ tales que (6) $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$

$$(7) \int_0^1 |f_2(x)|^{\alpha} dx < \varepsilon$$

f_1 es por ello acotada en (0,1); (5) y (7) dán

$$(8) \int_0^1 \left| s_n [f_2] \right|^{\alpha} dx < \varepsilon$$

Si empleamos ahora dos veces la desigualdad de Minkowski para integrales

$$(9)\quad \left(\int_0^1 |f-s_n(f)|^{\alpha}\,dx\right)^{\frac{1}{\alpha}} = \left(\int_0^1 \left|\left[f_1 - s_n(f_1)\right] + \left[f_2 - s_n(f_2)\right]\right|^{\alpha} dx\right)^{\frac{1}{\alpha}} \leq \left(\int_0^1 |f_1 - s_n(f_1)|^{\alpha}\,dx\right)^{\frac{1}{\alpha}} +$$

$$+ \left(\int_0^1 |f_2 - s_n(f_2)|^{\alpha} dx\right)^{\frac{1}{\alpha}} \leq \left(\int_0^1 |f_1 - s_n(f_1)|^{\alpha}\,dx\right)^{\frac{1}{\alpha}} +$$

$$\left(\int_0^1 |f_2|^{\alpha}\,dx\right)^{\frac{1}{\alpha}} + \left(\int_0^1 |s_n(f_2)|^{\alpha}\,dx\right)^{\frac{1}{\alpha}}$$

La nota sobre funciones acotadas, como $f_1(x)$ es unade ellas, dá sin más con (7), (8), (9)

$$\text{limite superior}_{n\to\infty} \left(\int_0^1 |f-s_n(f)|^{\alpha}\,dx\right)^{\frac{1}{\alpha}} < 2\varepsilon^{\frac{1}{\alpha}}$$

$$\limsup_{n\to\infty} \int_0^1 |f-s_n(f)|^{\alpha} dx < 2^{\alpha}\varepsilon$$, como ε es positivo arbitrario, la relación (1) resulta de inmediato

FUNCIONES ORTOGONALES NORMALES

(J. L. WALSH)

(American Journal of Mathematics, t. 45, 1923)

1.-Definiremos primeramente el sistema de Rademacher

$$\Phi_0(x) = \begin{cases} 1 & \text{en } 0 < x < 1/2 \\ -1 & \text{en } 1/2 < x < 1 \end{cases}$$

$$\Phi_n(x) = \Phi_0(2^n x)$$

Adoptemos ahora el sistema diádico de numeración, todo número natural admite una y sólo una representación de la forma $n = 2^{n_1} + 2^{n_2} + \ldots\ldots + 2^{n_\nu}$ siendo n_i números enteros no negativos.

Pongamos ahora

$$\Psi_0(x) = 1 \quad \text{para todo } x \qquad (n = 2^{n_1} + \ldots\ldots + 2^{n_\nu}) \qquad (1)$$

$$\Psi_n(x) = \Phi_{n_1}(x) . \Phi_{n_2}(x) \ldots\ldots \Phi_{n_\nu}(x)$$

En particular si $n = 2^k$ es $n_1 = k, n_2 = \ldots\ldots = n_\nu = 0$

y resulta $\Psi_{2^k}(x) = \Phi_k(x)$ (2)

Es decir que el sistema de Rademacher se obtiene suprimiendo en el $\Psi_n(x)$, llamado sistema de Walsh, todos los elementos de índice no igual a una potencia de 2; las partes suprimidas presentan pues lagunas del tipo de progresión geométrica, lo que explica por que las series respecto del sistema de Rademacher se comportan como las series trigonométricas lacunares. Como cada $\Phi_{n_i}(x)$ sólo toma los valores ± 1, también las $\Psi_n(x)$ sólo toma los valores

valores ± 1, pero los signos $+$ $-$ se suceden en el caso de las $\varphi_n(x)$ de una manera mucho más complicada que en las $\Phi_n(x)$

2.-Propiedades elementales del sistema de Walsh

Teorema 1: El sisteman $\varphi_n(x)$ es ortonormal

Demostración: Como (x) vale $+1$ ó -1 es $\varphi_n(x)^2=1$ y la normalidad de $\varphi_n(x)$ es obvia. Para probar que para $m \neq n$ es $\int_0^1 \varphi_n(x)\varphi_m(x)dx=0$, observemos antes la siguiente propiedad de las funciones de Rademacher: si entre los números $\alpha_1, \ldots\ldots\ldots \alpha_\nu$ hay por lo menos un impar

entonces $\int_0^1 \Phi_{n_1}^{\alpha_1}(x) \ldots\ldots \Phi_{n_\nu}^{\alpha_\nu}(x)dx = 0$

y si todos los α_i son pares la integral vale 1

En efecto, si α_i es par $\Phi_{n_i}^{\alpha_i}=1$, de modo que podemos suprimir todos los factores con α_i par y la integral en cuestión se reduce a $\int_0^1 \Phi_{n_1} \ldots\ldots \Phi_{n_\nu} dx$. Sea $k=n_\nu$ el mayor de los n_i y dividamos el intervalo $(0,1)$ en 2^k partes iguales $I_{.1}, I_{.2}, \ldots\ldots I_{.2^{i-1}}, I_{.2^i}, \ldots\ldots I_{.2^{k-1}}, I_{.2^k}$.

Si $n_r < n$ la función $\Phi_{n,r}$ es contante en $I_{.2^{i-1}} + I_{.2^i}$; $i=1,\ldots\ldots k$, en cambio Φ_{n_ν} vale 1 en $I_{.2^{i-1}}$ y -1 en $I_{.2^i}$ o al revés, luego todo el integrando vale 1 en $I_{.2^{i-1}}$ y -1 en $I_{.2^i}$ o al revés, de donde resulta $\int_{I_{.2^{i-1}}+I_{.2^i}} \Phi_{n_1} \cdots \Phi_{n_\nu} dx = 0$ lo que prueba la aserción.

Ahora, si $n \neq m$ es evidente de la definición de φ_n que $\varphi_n \cdot \varphi_m$ es de la forma $\varphi_{n_1}^{\alpha_1} \varphi_{n_2}^{\alpha_2} \ldots\ldots \varphi_{n_\nu}^{\alpha_\nu}$ con por lo menos un α impar, luego $\int_0^1 \varphi_n \varphi_m \, dx = 0$.

COROLARIO: El sistema de Rademacher es ortogonal, por que es subconjunto del de Walsh.

Teorema 2.- El sistema de Walsh es completo

Demostración: Sea $f(x)$ una función tal que para todo n es $\int_0^1 f(x)\,\varphi_n(x)\,dx = 0$, $n = 1, 2, \ldots\ldots$ y probaremos que $f(x)$ es idénticamente nula. Dividamos $(0,1)$ en 2^n intervalos iguales $I_1, \ldots\ldots I_{2^n}$; si $m \neq n$ las 2^n funciones φ_m, $m = 0, 1, \ldots\ldots 2^n - 1$ son constantes en cada I_i $(i \leq 2^n)$; sea pues c_m^i el valor constante de φ_m en I_i $(m \leq 2^n - 1$, $i \leq 2^n)$. Poniendo

$$I_i = \int_{I_i} f(x)\,dx$$

tendremos

$$\int_0^1 f(x)\,\varphi_m(x)\,dx = c_m^1 I_1 + c_m^2 I_2 + \ldots\ldots + c_m^{2^n} I_{2^n}$$

luego

$$\begin{cases} c_0^1 I_1 + \ldots\ldots\ldots\ldots + c_0^{2^n} I_{2^n} = 0 \\ c_1^1 I_1 + \ldots\ldots\ldots + c_1^{2^n} I_{2^n} = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ c_{2^n-1}^1 I_1 + \ldots\ldots\ldots + c_{2^n-1}^{2^n} I_{2^n} = 0 \end{cases}$$

Vemos que el determinante $\Delta = \left| c_k^i \right|$ es distinto de cero. En efecto, de lo contrario existirían las constantes $\lambda_0 \ldots\ldots\ldots\ldots \lambda_{2^n-1}$ tales que

$$\lambda_0 C_0^i + \lambda_1 C_1^i + \cdots + \lambda_{2^n-1} C_{2^n-1}^i = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots 2^n)$$

lo que significa, ya que C_m^i es el valor de φ_m en I_i, que $\lambda_0 \varphi_0 + \lambda_1 \varphi_1 + \cdots + \lambda_{2^n-1} \varphi_{2^n-1} = 0$ para todo x, o sea $\varphi_0, \ldots \varphi_{2^n}$ son linealmente dependientes, lo que contradice a que es un sistema ortogonal. Así pues $|A| \neq 0$, luego de (1) resulta $I_1 = \ldots\ldots\ldots = I_i \ldots\ldots = I_{2^n-1} = 0$.

Si $F(x) = \int_0^x f(x)\,dx$ se tendrá entonces

$$F\left(\frac{1}{2^n}\right) - F(0) = F\left(\frac{2}{2^n}\right) - F\left(\frac{1}{2^n}\right) = \ldots\ldots = 0$$

es decir $F(x)$ es constante en los puntos $0, \frac{1}{2^n}, \frac{2}{2^n}, \ldots$ $\ldots\ldots\ldots \frac{2^n}{2^n}$

Como n es arbitrario y $F(x)$ continua resulta $F(x)$ const entonces $F'(x) = f(x) = 0$

<u>Teorema 3</u>: Toda φ_n es combinación lineal de funciones X_i de Haar y viceversa.

<u>Demostración</u>: Para $n = 0, 1, 2, 3$ se vé directamente que φ_n es combinación lineal de $X_0, X_1, \ldots\ldots X_n$ por que $\varphi_0 = X_0$, $\varphi_1 = X_1$, $\varphi_2 = \frac{\sqrt{2}(X_2^1 - X_2^2)}{2}$

$$\varphi_3 = \frac{\sqrt{2}(X_2^1 + X_2^2)}{2}$$

y la definición recurrente de φ_n permite la inmediata demostración por inducción completa. Como φ_n es ortogonal, entonces también X_n

es combinación lineal de $\varphi_0 \ldots\ldots\ldots \varphi_n$

Antes de dar una segunda definición del sistema de Walsh-Kacmerz séanos permitido hacer una cierta reflexión sobre la primera.

Primera definición del sistema de Walsh-Kacmerz

Ponemos $\varphi_0(x) = X_0(x)$, $\varphi_1(x) = X_1(x)$

$$\varphi_2^1(x) = \frac{X_2^1(x) + X_2^2(x)}{\sqrt{2}}$$

$$\varphi_2^2(x) = \frac{X_2^1(x) - X_2^2(x)}{\sqrt{2}}$$

es decir φ_2^1 φ_2^2 se obtienen de X_2^1, X_2^2 por el esquema

$+ \quad +$ y por $+ \quad -$, de modo que las dos funciones φ_2 se sacan esquemáticamente por

$$\begin{matrix} + & + \\ + & - \end{matrix} \qquad (1)$$

Ahora se definen cuatro funciones $\varphi_3^1, \varphi_3^2, \varphi_3^3, \varphi_3^4$ por el esquema

$$\begin{matrix} + & + & + & + \\ + & + & - & - \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ + & - & + & - \\ + & - & - & + \end{matrix} \qquad (2)$$

El esquema (2) se obtiene de (1) así: la primera fila de (1) se escribe dos veces en la primera mitad de (2), luego se repite una vez con los mismos signos y otra vez con signos opuestos; análogamente se procede con la segunda fila de (1). De este modo se obtiene, por ejemplo,

$$\varphi_3^3 = \frac{X_3^1 - X_3^2 + X_3^3 - X_3^4}{2}$$

En general formado un esquema para las funciones φ^i_n para formar el esquema correspondiente a las funciones φ^i_{n+1} se escribe cada fila del esquema anterior dos veces en la izquierda o sea primera mitad del nuevo esquema, luego se repite una vez con los mismos signos y otra vez con signos opuestos, en la segunda mitad de dicho esquema. Finalmente la suma así obtenida de las x^i_n se divide por $\sqrt{2^n}$ lo que dá φ^i_{n+1}

Segunda definición de las φ^i_n

Todo número n se escribe en el sistema binario como $n = 2^{n_1} + 2^{n_2} + \ldots\ldots + 2^{n_\nu}$

y se pone $\varphi_n(x) = \Phi_{n_1}(x) . \Phi_{n_2}(x) \ldots \Phi_{n_\nu}(x)$

$(n > 0)$. Por ejemplo $7 = 2^2 + 2^1 + 2^0$

$n_1 = 2, n_2 = 1, n_3 = 0$, luego $\varphi_7(x) = \Phi_2(x)\ \Phi_1(x)\Phi_0(x)$

Teorema: Las $\varphi^i_n(x)$ $(i = 1,2,\ldots\ldots\ldots 2^{n-1})$ son combinaciones lineales de las $x^i_n(x)$ $(i=1,2,\ldots 2^{n-1})$ y viceversa.

Demostración En virtud de la definición primera de $\varphi^i_n(x)$

$$\varphi^1_n = \frac{1}{\sqrt{2^{n-1}}} x^1 \pm \frac{1}{\sqrt{2^{n-1}}} x^2 + \ldots\ldots + \frac{1}{\sqrt{2^{n-1}}} x^{2^{n-1}}$$

$$\varphi^2_n = \frac{1}{\sqrt{2^{n-1}}} x^1 \pm \frac{1}{\sqrt{2^{n-1}}} x^2 + \ldots\ldots\ldots + \frac{1}{\sqrt{2^{n-1}}} x^{2^{n-1}}$$

....

$$\varphi^{2^{n-1}}_n = \frac{1}{\sqrt{2^{n-1}}} x^1_1 \pm \frac{1}{\sqrt{2^{n-1}}} x^2_1 \ldots\ldots\ldots \pm \frac{1}{\sqrt{2^{n-1}}} x^n_1$$

es decir las φ^{i}_{n} se obtienen por medio de la matriz del esquema correspondiente. De la definición del esquema resulta inmediatamente que la matriz es ortogonal es decir llamando Δ el determinante de (1) es $\Delta \cdot \Delta = 1$, luego se pueden resolver también las χ^{i}_{n} en función de las φ^{i}_{n} por ser $\Delta = 1 \neq 0$.

Más aún, por ser ortogonal Δ se vé que el inverso, es decir la matriz inversa de la Δ es la propuesta, luego obtenemos

Teorema. Existen constantes

$$\begin{array}{llll} c_{1,1}, & c_{1,2}, & \ldots, & c_{1,2^{n-1}} \\ c_{2,1}, & c_{2,2}, & \ldots, & c_{2,2^{n-1}} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ c_{2^{n-1},1}, & c_{2^{n-1},2}, & \ldots, & c_{2^{n-1},2^{n-1}} \end{array}$$

tales que $$\varphi^{i}_{n}(x) = \sum_{k=1}^{2^{n-1}} c_{ik}\, \chi^{i}_{n}(x)$$

y $$\chi^{i}_{n}(x) = \sum_{i=1}^{2^{n-1}} c_{ik}\, \varphi^{k}_{n}(x)$$

Corolario. El sistema de Walsh-Kamcarz es ortonormal y completo.

El teorema anterior es el que sido llamado teorema 1 en la memoria que J.L.Walsh presenta en American Journal of Mathematics.-1 45,1923,con el nombre de Funciones ortogonales normales.

Todo lo visto hasta condensa en su esencia lo visto por Walsh en el primero y segundo capítulo de la meoria ci, tada,actualizado por mi maestro Mischa Cotlar.

A continuación haremos conocer tal memoria desde el tercer capítulo en adelante.

Desarrollo en términos del conjunto

Enunciado el teorema:Si $F(x)$ es continua en el intervalo $(0,1)$ la serie

$$F(x) \sim X_0(x)\int_0^1 F(y)X_0(y)dy + \dots + X_n^{(k)}(x)\int_0^1 F(y)X_n^{(k)}(y)dy$$

converge al valor $F(x)$ si los términos son agrupados de modo que cada grupo contenga todos los 2^{n-1} términos de un conjunto $\left\{X_n^{(k)}\right\}$, $k=1,2,\dots,2^{n-1}$, que el llama 1, y aplicando nuestro teorema 1,resulta el siguiente

TEOREMA II:Si $F(x)$ es continua en el intervalo $(0,1)$,la serie $F(x) \sim \varphi_0(x)\int_0^1 F(y)\varphi_0(y)dy + \varphi_1(x)\int_0^1 F(y)$

$$\varphi_1(y)dy + \dots\dots + \varphi_i^{(j)}(x)\int_0^1 F(y)\varphi_i^{(j)}(y)dy \quad \dots(5)$$

converge uniformemente al valor de $F(x)$ si los términos son agrupados de manera que cada grupo contenga todos los 2^{n-1} términos de un conjunto $X_n^{(k)}$, $k=1,\dots 2^{n-1}$

La serie (5) luego de la agrupación de los términos es precisamente la serie (1) luego de la agrupación de los términos.

El teorema II puede ser extendido incluyendo igualmente funciones discontinuas $F(x)$ suponemos que $F(x)$ sea integrable en el sentido de Lebesgue. Introduzcamos la notación

$$F(a+0)=\lim_{\varepsilon=0} F(a+\varepsilon),\ F(a-0)=\lim_{\varepsilon=0} F(a-\varepsilon),$$

y supongamos que esos límites existan para un punto particular $x=a$. Introduzcamos las funciones

$$F_1(x)=\begin{cases} F(x), & x<a \\ F(a-0), & x>a \end{cases} \qquad F_2(x)=\begin{cases} F(a+0), & x\leq a \\ F(x), & x>a \end{cases} \qquad (6)$$

La menor interpretación cuadrática de las sumas parciales S_{2^n} de las series (1) ó (5) expresada en términos de las dá por resultado que si $h_1<F<h_2$ en cualquier intervalo, entonces es también $h_1<S_{2^n}<h_2$ en cualquier intervalo completamente interior si n es suficientemente grande. Resulta que $F_1(x)$ está estrechamente aproximada en $x=a$ por su suma parcial $S_{2^n}(x)$ si n es suficientemente grande, y que esta aproximación es uniforme en cualquier entorno del punto $x=a$ en el cual $F_1(x)$ es continua. Un resultado similar vale para $F_2(x)$.

La función $F_1(x)+F_2(x)$ difiere de la función original simplemente en

$$G(x)=\begin{cases} F(a+0) & x<a \\ F(a-0) & x>a \end{cases}$$

La representación de tales funciones por sucesiones de la clase que consideramos será estudiada luego con mayor detalle (§ 6) pero es obvio que una tal función está representada uniformemente excepto en la proximidad del punto $x=a$.

Si $F(x)$ es continua en a y su entorno, ó si a es racional diádico, la aproximación a $G(x)$ también es uniforme en el punto a. Entonces tenemos:

TEOREMA III: Si $F(x)$ es una función integrable y si existe $\lim_{x=a} F(x)$ para un punto a, entonces cuando son agrupados los términos de la serie (5) como se describe en el teorema II, la serie así obtenida converge para $x=a$ al valor $\lim_{x=a} F(x)$

Si $F(x)$ es continua en a y en su entorno, entonces esta convergencia es uniforme en un entorno de a

Si $F(x)$ es cualquier función integrable y si los límites $F(a-0)$ y $F(a+0)$ existen para un racional diádico x a, entonces la serie con los términos agrupados converge para $x=a$, al valor $\frac{1}{2}(F(a+0)+F(a-0))$; esta convergencia es uniforme en el entorno del punto $x=a$ si $F(x)$ es continua sobre dos intervalos que se extienden desde a uno en cada sentido.

Ahora es tiempo de estudiar la convergencia de la serie (5) cuando los términos no están agrupados como en los teoremas II y II. Establecemos el

TEOREMA IV.- Sea la función $F(x)$ de variación acotada en el intervalo $0 \leq x \leq 1$. Entonces la serie (5) converge al valor $F(x)$ en todo punto en el cual $F(a+0)=F(a-0)$ y en todo punto en el cual $x=a$ es diádico racional

Esta convergencia es uniforme en un entorno de $x=a$. En cada uno de esos dos casos si $F(x)$ es continua en dos intervalos que se extienden desde a, uno en cada dirección.

Puesto que $F(x)$ es a variación acotada $F(a+0)$ y $F(a-0)$ existen en todo punto a. El teorema IV presume tácitamente que $F(x)$ está definida en todo punto de discontinuidad a, así que $F(a)=\frac{1}{2}(F(a+0)+F(a-0))$

Cualquier tal función puede ser considerada como la diferencia de dos funciones monótonamente crecientes, así que el teorema será probado si él es probado simplemente para una función monótonamente creciente. Aceptaremos que $F(x)$ es una tal función, positiva. Valoraremos el límite de

$$\int_0^1 F(y)K_n^{(k)}(x,y)\,dy,\quad K_n^{(k)}=\varphi_0(x)\varphi_0(y)+\dots\varphi_n^{(k)}(x)\varphi_n^{(k)}(y)$$

Tenemos calculado ya este límite para la sucesión $k=2^{n-1}$ entonces resta simplemente probar que

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 F(y)\,Q_n^{(k)}(x,y)\,dy=0 \qquad (7)$$

$$Q_n^{(k)}=\varphi_n^{(1)}(x)\varphi_n^{(1)}(x)+\dots+\varphi_n^{(k)}(x)\varphi_n^{(k)}(y)$$

cualquiera sea el valor de k

Consideraremos la función $F(x)$ simplemente en un punto a de continuidad, esto es, estudiaremos esencialmente las nuevas funciones F_1 y F_2 definidas por las ecuaciones (6). En lo sucesivo supondremos que a es un irracional diádico. La modificación necesaria para a racional puede ser hecha por el lector.

Las fórmulas siguientes están completamentes basadas en la definición de $Q_n^{(k)}$, ambas x,y son supuestas irracionales diádicas.

$$Q_2^{(1)}(x,y)=\pm 1$$

$$Q_2^{(2)}(x,y)=\begin{cases}0 \text{ si } x<1/2,\ y>1/2\\ 0 \text{ si } x>1/2 \text{ y } <1/2\\ 2 \text{ si } x<1/2,\ y<1/2\\ -2 \text{ si } x>1/2,\ y>1/2\end{cases}$$

....

$$Q_n^{(1)}(x,y)=\pm 1$$

$$(\mathbf{2})\quad \varphi_n^{(1)}(x,y)=\begin{cases} 0 & \text{si } x<1/2,\ y>1/2, \text{ o si } x>1/2,\ y<1/2, \\ 2\varphi_{n-1}^{(1)}(2x,2y) & \text{si } x<1/2,\ y<1/2, \\ 2\varphi_{n-1}^{(1)}(2x-1,2y-1) & \text{si } x>1/2,\ y>1/2 \end{cases}$$

....

$$\varphi_n^{(2k)}(x,y)=\begin{cases} 0 & \text{si } x<1/2,\ y>1/2 \text{ o si } x>1/2,\ y<1/2 \\ 2\varphi_{n-1}^{(k)}(2x,2y) & \text{si } x<1/2,\ y<1/2 \\ 2\varphi_{n-1}^{(k)}(2x-1,2y-1) & \text{si } x>1/2,\ y>1/2 \end{cases}$$

$$\varphi_n^{(2k)}(x,y)=\begin{cases} 1 & \text{si } x<1/2,\ y>1/2, \text{ o si } x>1/2,\ y<1/2 \\ \dfrac{\varphi_n^{(2k)}+\varphi_n^{(2k\ \ 2)}}{2} & \text{si } x<1/2,\ y<1/2 \\ & \text{o si } x>1/2,\ y>1/2 \end{cases}$$

La integral en (7) para $x=a$ es dividida en tres partes

Consideramos un intervalo limitado por dos puntos de la forma $x=\frac{\rho}{2^\nu}$, $x=\frac{\rho+1}{2^\nu}$, donde ρ,ν son enteros y tales que $\frac{\rho}{2^\nu}<a<\frac{\rho+1}{2^\nu}$, entonces tenemos

$$\int_0^1 F_1(y)\varphi_n^{(k)}(a,y)\,dy=\int_0^{\rho/2^\nu} F_1(y)\varphi_n^{(k)}(a,y)\,dy+\int_{\rho/2^\nu}^{(\rho+1)/2^\nu} F_1(y)\varphi_n^{(k)}(a,y)\,dy+\int_{(\rho+1)/2^\nu}^{1} F_1(y)\varphi_n^{(k)}(a,y)\,dy \qquad (8)$$

Estas integrales de la derecha exigen una consideración por separado. Pongamos $\frac{\rho}{2^\nu}=\frac{\mu_1}{2^1}+\frac{\mu_2}{2^2}+\dots+\frac{\mu_\nu}{2^\nu}$

$\mu_i=0,1.$

La primera integral del segundo miembro de (8) puede ser escrita

$$\int_0^{\mu_1/2^1}+\int_{\mu_1/2^1}^{\mu_1/2^1+\mu_2/2^2}+\dots+\int_{\rho/2^\nu-\frac{\mu_\nu}{2^\nu}}^{\rho/2^\nu} F_1(y)\varphi_n^{(k)}(a,y)\,dy$$

(9)

Cada una de estas integrales se calcula facilmente entonces, sobre el intervalo $0\leq y<\frac{\mu_1}{2^1}$, $\varphi_n^{(k)}(a,y)$

toma solamente los valores ± 1 ó 0; es 0 si k es par, y tiene el valor $+\varphi_n^{(k)}$ si k es impar

Sucede ciertamente que

$$\lim_{n=\infty}\int_0^1 \Phi(y)\,\varphi_n^{(k)}(y)\,dy = o(1)$$

no importando que pueda ser la función $\Phi(y)$ integrable Lebesgue y de cuadrado integrable. Aquí tenemos

$$\lim_{n=\infty}\int_0^1 F_1(y)\,\psi_n^{(k)}(a,y)\,dy = 0$$

sobre el intervalo $\frac{\nu_1}{2^1} \leq y \leq \frac{\nu_1}{2^1} + \frac{\nu_2}{2^2}$ ....,

la función $\psi_n^{(k)}(a,y)$ toma solamente los valores $0, \pm 1, \pm 2$, y excepto para uno de esos números como factor c constante, tiene el valor $\varphi_n^{(k)}(y)$. Entonces sucede que

$$\lim_{n=\infty}\int_{\nu_1/2^1}^{(\nu_1/2^1)+(\nu_2/2^2)} F_1(y)\,\psi_n^{(k)}(a,y)\,dy = 0$$

De esta correspondencia resulta para cada una de las integrales en (9) y de un trato similar de la última integral del segundo miembro de (8), tenemos

$$\lim_{n=\infty}\int_0^{\rho/2^\nu} F_1(y)\,\psi_n^{(k)}(a,y)\,dy = 0 \qquad ,$$

$$\lim_{n=\infty}\int_{(\rho+1)/2^\nu}^{1} F_1(y)\,\psi_n^{(k)}(a,y)\,dy = 0 \qquad (11)$$

Obtendremos un límite superior para la segunda integral en (8) por el segundo teorema del valor medio. Notemos que

$$\left| \int_{\xi}^{(\rho+1)/2^\nu} \psi_n^{(k)}(a,y)\,dy \right| \leq \frac{1}{2}$$

cualquiera pueda ser el valor de ξ. En efecto, esta relación es inmediata si n es pequeño y ella resulta para más grandes valores de n en virtud del método de construcción de las $\varphi_n^{(k)}$.

Además, si $n \geq \nu$, y si $\xi = \frac{\rho}{2^\nu}$, esta integral tiene el valor 0. Por lo tanto obtenemos, por el segundo teorema del valor medio,

$$\int_{\rho/2^\nu}^{(\rho+1)/2^\nu} F_1(y)\varphi_n^{(k)}(a,y)dy = F_1\left(\frac{\rho}{2^\nu}\right)\int_{\rho/2^\nu}^{\xi} \varphi_n^{(k)}(a,y)dy +$$

$$F_1\left(\frac{\rho+1}{2^\nu}\right)\int_{\xi}^{(\rho+1)/2^\nu} \varphi_n^{(k)}(a,y)dy = \left[F_1(a) - F_1\left(\frac{\rho}{2^\nu}\right)\right]\varphi_n^{(k)}(a,y)dy$$

Por una apropiada elección del punto $\frac{\rho}{2^\nu}$ podemos hacer el factor de esta última integral tan pequeño como se quiera; toda la expresión será tan pequeña como se quiera para n suficientemente grande. Las relaciones (11) son independientes de la elección de $\frac{\rho}{2^\nu}$, entonces (7) está completamente probada para la función F_1. Una prueba similar es aplicable a F_2, entonces (7) puede ser considerada como completamente probada para la función original $f(x)$.

La convergencia uniforme de (5) como se ha establecido en el teorema IV resulta de la continuidad uniforme de $f(x)$ y será facilmente establecida por el lector.

OTRAS PROPIEDADES DEL DESARROLLO DEL CONJUNTO

La interpretación cuadrática dada ya para las sumas parciales y las expresiones de las φ en términos de las χ muestran que si los términos de (5) son agrupados como en los teoremas II y III, la cuestión de la convergencia o divergencia de la serie en un punto depende simplemente de ese punto y de la naturaleza de la función en un entorno de él. Eso mismo resulta para la serie (5) cuando los términos no están agrupados, de (8) y (10) si $f(x)$ es integrable y de cuadrado integrable. Extenderemos este resultado y probaremos:

TEOREMA V. Si $f(x)$ es cualquier función integrable, entonces la convergencia o divergencia de la serie (5) en un punto depende completamente de ese punto y del comportamiento de la función en un entorno de ese punto. Si en particular $f(x)$ es una función a variación acotada en las vecindades del punto $x = a$, y si a es diádico racional ó si $f(a-0) = f(a+0)$, entonces la serie (5) converge para $x = a$ al valor

$\frac{1}{2}\left(f(a-0) + f(a+0)\right)$. Si $f(x)$ es nó solo de variación acotada sino también continuá en dos entornos, uno a cada lado de a, y si a es racional diádico o si $f(a-0) = f(a+0)$, la convergencia de (5) es uniforme en el entorno del punto a.

El teorema V resulta inmediatamente de los razonamientos ya dados y probados por (10) sin restricción para ϕ; fijaremos el teorema para cualquier conjunto ortogonal y normal de funciones φ_n acotadas.

TEOREMA VI. Si $\{\varphi_n(x)\}$ es un conjunto de funciones ortonormales, uniformemente acotadas en el intervalo (0,1) y si $\phi(x)$ es cualquier función integrable, entonces

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \phi(x)\,\varphi_n(x)\,dx = 0 \quad (12)$$

Designemos con E el conjunto de los puntos del intervalo para el que $|\phi(x)| > N$, elejimos N tan grande que $\int_E |\phi(x)dx| < \varepsilon$ donde ε es arbitrario. Designemos con $\bar{M}$ el conjunto complementario de M, entonces tenemos

$$\int_0^1 \Phi(x)\,\varphi_n(x)\,dx = \int_{M} \Phi(x)\,\varphi_n(x)\,dx + \int_{\bar{M}}^{1} \Phi(x)\,\varphi_n(x)\,dx$$

Resulta la prueba de (10) ya indicada que la segunda integral del segundo miembro se aproxima a 0 cuando n tiende a infinito. La primera integral es en valor absoluto menor que $M\varepsilon$ cualquiera sea el valor de n, donde M es la cota uniforme de las φ_n. Resulta pues que esas dos integrales pueden hacerse tan pequeñas como se quiera, primero por la elección de ε suficientemente pequeño y después por la elección de n suficientemente grande.

Es interesante observar que el teorema VI no es válido si omitimos la hipótesis que el conjunto φ_n sea uniformemente acotado. En efecto, la función $\Phi(x) = (x-\frac{1}{2})^{-\nu}$ sea a considerar. $\nu < 1$

Tenemos

$$\int_0^1 \varphi_{(2^{n-2}+1)}(x)\,\Phi(x)\,dx = \sqrt{2^{n-1}}\int_{1/2}^{1/2+1/2^{n}} (x-\tfrac{1}{2})^{-\nu}\,dx$$

$$-\sqrt{2^{n-1}}\int_{1/2+1/2^{n}}^{1/2+1/2^{n-1}} (x-\tfrac{1}{2})^{-\nu}\,dx = \frac{2}{1-\nu}\,(n-1)^{\nu-(1/2)}\,(2^{\nu}-1)$$

Toda vez que $\nu \geq 1/2$, es claro que no puede valer (12), y si $\nu > 1/2$ hay una subsucesión de la sucesión en (12) la cual efectivamente tiende a infinito.

Llegamos ahora del estudio de la convergencia de un tal desarrollo en serie como (5) al estudio de la sumabilidad de tales desarrollos, y probaremos

TEOREMA VII. Si $s(x)$ es continua en el intervalo cerrade (0,1), la serie V es sumable uniformemente en todo el intervalo a la suma F(x)

Si F(x) es integrable en el intervalo (0,1), y si existen F(a-0) y F(a+0), y si cada uno de F(a-0) = F(a+0) donde a es un diádico racional, entonces la serie (5) es sumable para x=a al valor $\frac{1}{2}(F(a-0)+F(a+0))$.

Si F(x) es continua en el entorno de a, excepto para un salto finito en a, la sumabilidad es uniforme en todo x próximo a ese punto.

En este teorema y siguiente el término sumabilidad indica sumabilidad por el primer procedimiento de Césaro

Encontraremos conveniente tener por referencia el siguiente

LEMA: Supongamos que la serie

$$(b_1+b_2+\cdots\cdots+b_{n_1})+(b_{n_1+1}+\cdots\cdots+b_{n_2})+\cdots$$

$$\cdots\cdots+(b_{n_k+1}+b_{n_k+2}+\cdots\cdots+b_{n_{k+1}})+\cdots(13)$$

converja a la suma B y que la sucesión

$$b_1,\ \frac{2b_1+b_2}{2},\ \frac{3b_1+2b_2+b_3}{3},\ \ldots\ldots,\ \frac{(n_1-1)b_1+\cdots+b_{n_1-1}}{n_1-1}$$

(14) converge a 0. Entonces la serie $b_1+b_2+b_3+\cdots$

(15) es sumable a la suma B.

Este lema comprende simplemente una transformación de las fórmulas que encierran las nociones de límites. Intercalando ceros en la serie (13) así que los paréntesis sean respectivamente el n_1-ésimo, el n_2-ésimo el n_3-ésimo términos de la nueva serie, esta nueva serie converge a la suma B y por esto es sumable a la su ma b.

La diferencia término a término de la nueva serie y (15) es la serie $b_1 + b_2 + \dots\dots + b_{n_1-1} - (b_1 + b_2 + \dots\dots + b_{n_1-1}) + (b_{n_1+1} + b_{n_1+2} \dots + b_{n_2-1}) - (b_{n_1+1} + b_{n_1+2} \dots\dots + b_{n_2-1}) + \dots\dots$ (16)

que se muestra es sumable a la suma cero. La sucesión correspondiente a la sumación de (16) es precisamente (14)

Una condición suficiente para la convergencia de (14) es que tengamos, independientemente de m,

$$\lim_{k=\infty} \frac{m b_{n_k+1} + (m-1) b_{n_k+2} + \dots\dots + b_{n_k+m}}{m} = 0$$

$$m \leq n_{k+1} - n_k \qquad (17)$$

por que desde un punto de vista geométrico cada término de la sucesión (14) es el centro de gravedad de un número de términos tal que como ocurre en (17, cada término pesa de acuerdo al número b_i que aparece en él Una prueba $(\varepsilon - \delta)$ puede ser efectuada sin dificultad Para el caso del teorema VII supongamos F(x) integrable y que existan F(a-0) y F(a 0). La serie (15) está identificada con la serie (5), y (13) con (5) luego que los términos sean agrupados como en el teorema III. La suma que aparece en (17) es, entonces, para x=a

$$\frac{1}{m}\int_0^1 \left[m\,\varphi_n^{(1)}(a)\,\varphi_n^{(1)}(y) + (m-1)\,\varphi_n^{(2)}(a)\,\varphi_n^{(2)}(y) + \dots\dots\dots\,\varphi_n^{(m)}(a)\,\varphi_n^{(m)}(y)\right] F(y)\,dy \,, \quad m \leq 2^{n-1}$$

(18)

Probaremos que (18) formada para la función $F_1(y)$ definida en (6) para a irracional diádico tiene el límite 0 cuando n tiende a infinito.

Notemos que

$$\frac{1}{m}\int_0^1 \left| m\varphi_n^{(1)}(a)\varphi_n^{(1)}(y) + (m-1)\varphi_n^{(2)}(a)\varphi_n^{(2)}(y)+\dots+\varphi_n^{(m)}(a)\varphi_n^{(m)}(y)\right| dy = 1 \quad (19)$$

Esto resulta directamente de (3) y (4). El valor de la integral en (19) no se cambia si reemplazamos a a por cualquier irracional diádico b. Elejimos $b = 2^{-n}$, así todas las funciones $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_{m-1}$ son positivas para $x = b$.

Entonces el integrando en (19) puede ser reducido simplemente a $m\varphi_0(y)$, entonces es probado 19.

Consideremos la integral (18) formada para la función F_1 dividida como en (8), donde como antes $\frac{\rho}{2^\nu} \leq a < \frac{\rho+1}{2^\nu}$, y denotemos con (20), (21) y (22) y (23), respectivamente la integral total y sus tres partes entonces (22) puede ser hecha tan pequeña como se quiera simplemente por elección adecuada del punto $\frac{\rho}{2^\nu}$ como en el intervalo $\left(\frac{\rho}{2^\nu}, \frac{\rho+1}{2^\nu}\right)$ podemos hacer $\left|F_1(y)-F_1(a)\right|$ uniformemente pequeña, tenemos establecido (19), y tenemos entonces

$$\int_{\rho/2^\nu}^{(\rho+1)/2^\nu}\Big[m\,\varphi_n^{(1)}(a)\varphi_n^{(1)}(y)+(m-1)\,\varphi_n^{(2)}(a)\varphi_n^{(2)}(y)+\dots\dots\dots+\varphi_n^{(m)}(a)\varphi_n^{(m)}(y)\Big]F_1(a)\,dy \to 0$$ si sim-

plemente $n > \nu$.

La integral (21) es el promedio de m integrales del tipo que aparece en (18) $\int_0^{\beta/2} F_1(y)\,\psi_n^{(k)}(a,y)\,dy$,

$k = 1,2,\ldots m$,

entonces la integral total (21) se aproxima a 0 cuando n tiende a infinito. Tratando de modo similar la integral (23) probamos que (20) se aproxima a 0

Es igualmente cierto que (18) formada para la función $F_2(y)$ también se aproxima a cero cuando n tiende a infinito.

Esto completa la prueba de la segunda sentencia del teorema VII para un irracional diádico, omotimos la prueba para un racional diádico. La continuidad uniforme de f(X) nos dá facilmente la parte restante del teorema VII.

FUNCIONES NO TOTALMENTE CONTINUAS PUEDEN SER DESARROLLADAS EN TERMINOS DE φ

La sumabilidad del desarrollo de funciones continuas en términos de las funciones φ es otro punto de semejanza de esas funciones con las funciones seno y coseno de Fourier. Ya otro punto de semejanza que será ahora establecido es que existe una función continua cuyo desarrollo en términos de las φ no converge en todo punto del intervalo.

Nuestra prueba se basa en un teorema debido a Haar en virtud del cual la existencia de una tal función continua será mostrada si se prueba simplemente que

$\int_0^1 \left| K_n^{(k)}(a,y) \right| dy$ (24) es no uniformemente acotada para todo n y k. El punto a es un punto de divergencia del desarrollo de la función continua y para nuestro caso particular puede elejirse cualquier punto del intervalo (0,1). Estudiaremos (24) en detalle e simplemente para a irracional diádico, la integral (24) es independiente del punto (a) elejido si a es irracional diádico

La integral (24) está acotada uniformemente para todos los valores de n si $k = 2^{n-1}$, entonces será suficiente considerar la integral $c_n^{(k)} = \int_0^1 \left| q_n^{(k)}(a,y) \right| dy$

La siguiente tabla muestra el valor de $c_n^{(k)}$ para valores pequeños de n y para cada valor de k.

n = 2		1				1		
n = 3	1		1	$1\frac{1}{2}$			1	
n = 4	1	1	$1\frac{1}{2}$	$1\frac{3}{4}$	$1\frac{1}{2}$	$1\frac{3}{4}$	1	

Tenemos las fórmulas generales

$$c_n^{(1)} = c_n^{(2n+1)} = 1, \qquad c_n^{(k)} = c_{n+1}^{(2k)}, \; c_{n+1}^{(2k\ 1)} =$$

$$= \frac{1}{2}\left[c_n^{(k)} + c_n^{(k+1)} \right] + \frac{1}{2},$$

así que las $c_n^{(k)}$ son no uniformemente acotadas

TEOREMA VIII Si un punto a es arbitrariamente elejido existirá una función continua cuyo desarrollo en no converge en a.

LA APROXIMACION A UNA FUNCION EN UNA DISCONTINUIDAD/

Hemos considerado con un grado puro de perfección la naturaleza de la aproximación a f(x) del desarrollo f formal de una función arbitraria $\phi(x)$ en la vecindad de un punto de discontinuidad de $\phi(x)$. Estudiaremos este p problema simplemente para una función que es constante excepto para unassola singularidad, un salto finito, pero esto lleva directamente a resultados similares para cualquier función $\phi(x)$ en una discontinuidad aislada q que es un salto finito, si $\phi(x)$ es de tal naturaleza que el desarrollo de $\phi(x)$ converge uniformemente en el entorno de la discontinuidad siendo salvada esa discontinuidad por la adición de una función constante excepto para un salto finito

Consideremos la función $f(x) = \begin{matrix} 1 & 0 \leq x < a \\ 0 & a < x \leq 1 \end{matrix}$

Si a es racional diádico, f(x) puede ser expresada como una suma finita de funciones , y por ello es representada uniformemente, si hacemos la definición $f(a) = \frac{1}{2}\left(f(a-0) + f(a+0) \right)$; esto resulta de la evidente posibilidad de la expansión de f(x) en términos de

Si el punto a es irracional diádico f(x) no puede ser desarrollado en términos de las . El desarrollo formal de f(x) converge en efecto para cada valor de x distinto de a y diverge para x = a. La convergencia para x ≠ a resulta evidentemente del teorema IV. Procederemos a demostrar la divergencia

Si se usa la notación diádica $a = \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{2^2} + \frac{a_3}{2^3} + \dots$, $a_n = 0, 1$

la suma parcial $S_n^{(k)}(x) = \phi_0(x) \int_0^1 f(y)\, \phi_0(y)\, dy + \dots\dots\dots\dots\dots + \phi_n^{(k)}(x) \int_0^1 f(y)\, \phi_n^{(k)}(y)\, dy$

es en el sentido de los menores cuadrados la mejor aproximación a $f(x)$ que pueda ser formada según las funciones $\varphi_0, \varphi_1, \ldots \varphi_n^{(k)}$ es por ello cierto que cuando $k = 2^{n-1}$, sobre cada subintervalo $\left(\frac{r}{2^n}, \frac{r+1}{2^n}\right)$ en el que $f(x)$ es constante, $S_{n}^{(k)}(x)$ es también constante e igual a $\tilde{f}(x)$. Sobre ese subintervalo $\left(\frac{m}{2^n}, \frac{m+1}{2^n}\right)$ que contiene al punto $a, S_n^{(k)}$ tiene el valor

$$2^n a - m = \frac{a_{n+1}}{2^1} + \frac{a_{n+2}}{2^2} + \frac{a_{n+3}}{2^3} \cdots \quad (25)$$

comprendido entre cero y la unidad. Entonces $S_n^{(k)}(a)$

$n \geq 1$ es una función con dos puntos de discontinuidad y que toma tres valores distintos en la totalidad de sus puntos de discontinuidad.

La serie infinita correspondiente a la sucesión (25) es

$$\left(\frac{a_2}{2^1} + \frac{a_3}{2^2} + \frac{a_4}{2^3} + \cdots\cdots\right) + \left(\frac{a_3}{2^2} + \frac{a_4}{2^3} + \cdots\cdots - \frac{a_2}{2^2}\right) +$$

$$+ \left(\frac{a_4}{2^2} + \frac{a_5}{2^3} + \frac{a_6}{2^4} + \cdots - \frac{a_3}{2^2}\right) + \left(\frac{a_5}{2^2} + \frac{a_6}{2^3} + \frac{a_7}{2^4} + \cdots - \frac{a_4}{2^2}\right) + \cdots$$

No todos los números a_n después de un cierto punto pueden ser cero, ni tampoco todos ellos pueden ser uno, así que el término general de la serie (26) no se puede aproximar a cero y la sucesión (25) no puede converger.

Es evidentemente cierto que la sucesión (25) no siempre es sumable y si es sumable puede no ser sumable al valor medio. Entonces si elejimos $a = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{0}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^5} +$

$+\frac{6}{2^{6}}+\frac{1}{2^{7}}+$ ......,la sucesión (25) es sumable a la suma 2/3. Evidentemente la sucesión $S_n^{(k)}(x)$ para x=a y donde consideramos todos los valores de n y k, es sumable al valor 2/3.

El comportamiento general de $S_n^{(k)}(x)$ para f(x) donde no haremos la restricción $k=2^{n-1}$ es obtenido totalmente con la misma facilidad que el comportamiento para $k=2^{n-1}$ y la relación

$$\varphi_n^{(i)}(a)\int_0^1 f(y)\,\varphi_n^{(i)}(y)\,dy+\cdots+\varphi_n^{(k)}(a)\int_0^1 f(y)\,\varphi_n^{(k)}(y)\,dy,$$

vale para todos los valores de i,k,n.

En efecto, ocurre un fenómeno muy análogo al fenómeno de Gibbs para series de Fourier. Para el conjunto las funciones aproximantes están uniformemente acotadas. El pico de las funciones aproximantes $S_n^{(k)}(x)$ desaparece enteramente para $k=2^{n-1}$, pero reaparece (usualmente alterado en altura) para más grandes valores de n. Es claro que los hechos concernientes a las curvas aproximantes a f(x) valen sin modificación esencial para una función a variación acotada en una simple discontinuidad finita, y que el hecho para la sumación de la sucesión aproximante vale sin modificación esencial para una función continua excepto en una discontinuidad simple finita

LA UNICIDAD DEL DESARROLLO

Ahora estudiaremos la posibilidad de una serie de la forma $a_0\varphi_0(x)+a_1\varphi_1(x)+\cdots+a_n\varphi_n(x)+\cdots$ (27)

que converge sobre $0 \leq x \leq 1$ a la suma cero, con la posible excepción de un cierto número de puntos x

saber ha señalado que existe una serie de funciones $\chi^{(k)}_n(x)$ que converge a cero excepto en un único punto, y que la convergencia es uniforme, excepto en un entorno de ese punto

Fijaremos como referencia el lema fácil de comprobar.

LEMA Si la serie (27) converge para solo un valor de x irracional diádico, luego $\lim_{n \to \infty} a_n = 0$

Este lema resulta inmediatamente del hecho que

$$\varphi^{(k)}_n(x) = \pm 1 \quad \text{si x es irracional diádico}$$

Usaremos este lema para establecer el

TEOREMA IX Si la serie (27) converge a la suma cero uniformemente excepto en el entorno de un solo valor de x, entonces $a_n = 0$ para todo n

Consideraremos que tal valor excepcional x_1 es irracional diádico. Si $x_1 > \frac{1}{2}$, tenemos para

$0 \leq x < 1/2$. $a_0 \varphi_0(x) + a_1 \varphi_1(x) + \ldots a_n \varphi_n(x) = 0$,

$(a_0 + a_1) \varphi_0(y) + (a_2 + a_3) \varphi_1(y) + (a_4 + a_5) \varphi_2(y) +$

$\ldots\ldots\ldots = 0$, para todo valor de $y = 2$. Entonces tenemos por la uniformidad de la convergencia,

$a_0 + a_1 = 0, a_2 + a_3 = 0, a_4 + a_5 = 0,$ (28)

Si $x < 3/4$, tenemos para $3/4 \leq x \leq 1$

$a_0 \varphi_0(x) + a_1 \varphi_1(x) + \ldots\ldots + a_n \varphi_n(x) = 0$, ó

para $0 \leq y < 1, y = 4x-3$,

$(a_0 - a_1 + a_2 - a_3) \varphi_0(y) + (a_4 - a_5 + a_6 - a_7) \varphi_1(y)$

$\ldots\ldots + (a_{4n} - a_{4n+1} + a_{4n+2} - a_{4n+3}) \varphi_n(y) = 0$

De la uniformidad de la convergencia tenemos

$a_0 - a_1 + a_2 - a_3 = 0$

$a_4 - a_5 + a_6 - a_7 = 0$ ó de (28)

$a_0 = -a_1 = a_3 = -a_2$ y

$a_4 = -a_5 = -a_6 = a_7$

Si $x > 5/8$, tenemos para $5/8 \leq x < 3/4$

$a_0 \varphi_0(x) + a_1 \varphi_1(x) + \ldots\ldots\ldots = 0$; ó para $0 \leq y \leq 1$,

$y = 8x-5, (a_0 - a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5 + a_6 - a_7) \varphi_0(y) +$

$(a_8 - a_9 - a_{10} + a_{11} - a_{12} + a_{13} + a_{14} - a_{15}) \varphi_1(y) +$

$\ldots\ldots\ldots\ldots = 0$

Entonces deben anularse cada uno de esos coeficientes, y por ello $a_0 = -a_1 = a_3 = a_4 = -a_5 = -a_6 = a_7$ continuando en este camino con el lema se demuestra que todo an debe ser nulo. Este razonamiento es típico y no depende esencialmente de nuestra consideración numérica sobre a_1. Entonces el teorema IX está probado.

El razonamiento es igualmente similar si en lugar de la hipótesis del teorema IX admitimos la posibilidad de un número finito de puntos en el entorno de cada uno de los cuales la convergencia no es considerada uniforme.

TEOREMA X. Si la serie $a_0 \varphi_0(x) + a_1 \varphi_1(x) + \ldots a_n \varphi_n(x) + \ldots\ldots$ converge a la suma cero uniformemente, $0 \leq x \leq 1$, excepto en los entornos de un números finito de puntos, entonces $a_1 = a_2 = \ldots\ldots = a_n = 0$

SEGUNDA PARTE

(INVESTIGACION)

SOBRE UN SISTEMA COMPLETO DE FUNCIONES ORTOGONALES DE DOS VARIABLES

JUAN FELIX DIHARCE

1.950

INTRODUCCION

Presentamos un sistema de funciones ortogonales de dos variables que hemos obtenido al sugerirnos nuestro maestro, el señor Mischa Cotlar, generalizar para dos variables la memoria de Alfredo Haar, publicada en "Mathemathischen Annalen" de 1910.

Al buscar bibliografía afín, nos encontramos con la memoria de Schauder en "Mathemathische Zeitschrift" de 1923, donde (en la página 317 y siguientes) también presenta una generalización del sistema de Haar para dos variables, aunque de tipo diferente al nuestro.

Schauder utiliza el llamado principio de transposición de F. Riesz que establece una correspondencia "casi biunívoca" entre los puntos del segmento $[0,1]$ y el cuadrado unitario, que conserva las medidas, del tipo de la curva de Peano, entendiendo por correspondencia "casi biunívoca" la propiedad de formar un conjunto de medida nula los puntos de uno de los conjuntos que no tienen correspondiente en el otro, ó que tienen más de un correspondiente.

Por tal representación a cada función de Haar $\left\{ \chi_n^k(x) \right\}$ de $[0,1]$ corresponde una $\left\{ \chi_i^l \right\}(x,y)$ definida en el cuadrado de lado unidad. Al $\left\{ \chi_i^l(x,y) \right\}$ es el sistema de Schauder.

Como se vé Schauder define pero no construye su sistema. El que ofrecemos nosotros, además de ser definido constructivamente, es diferente del de Scahuder y sigue la

línea de Haar, de modo que conserva todas las propiedades características del sistema de Haar, que lo diferencian de los otros sistemas ortogonales.
Es necesario observar todavía que nuestro sistema es del "tipo Haar" pero <u>no</u> es el sistema "producto" de Haar, $\chi_n(x)\chi_m(y)$ ($\chi_n(x)$ función de Haar de una variable); en el § 4 estudiaremos la relación entre este último sistema y el nuestro.
Siguiendo a Haar definimos nuestro sistema ortonormalizando las funciones características diádicas, pero bidimensionales, y numeradas de acuerdo a la ordenación diagonal. Determinamos la ley general de formación de estas funciones y establecemos su relación con el sistema de Haar "producto". Determinando la ley de formación de los núcleos del desarrollo de Fourier probamos que la serie de Fourier de toda función integrable Lebesgue converge en casi todo punto y, si la función es continua en todos los puntos.
Finalmente probamos para nuestro sistema la ley general de Schauder que constituye el objeto principal de su memoria citada.

1.-EL SISTEMA DE LAS FUNCIONES CARACTERISTICAS DE INTERVALOS BI-DIMENSIONALES.

Consideraremos funciones reales de dos variables reales x e y, definidas en $-\infty < x < +\infty$, $-\infty < y < +\infty$

Supondremos que las funciones estudiadas son doblemente periódicas, de período 1, de modo que reticulando el plano xy en cuadrados de lado unidad, los valores de las funciones son los mismos en todos los cuadrados.

Designaremos al cuadrado fundamental con $C^{(0)}$, es decir

$$C^{(0)} : \begin{array}{l} 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq 1 \end{array}$$

, y con $f^{(0)}$ su función característica, es decir

$$f^{(0)}(x,y) \equiv 1 \quad \text{en } C^{(0)}$$
$$f^{(0)}(x,y) \equiv 0 \quad \text{en el resto del plano } xy.$$

Dividamos $C^{(0)}$ en cuatro cuadrados iguales por las rectas $x = 1/2, y = 1/2$.

A cada uno de esos cuadrados parciales lo afectaremos con un ídice superior (1) que sirve para indicar que proviene de la primera divsión del cuadrado fundamental $C^{(0)}$ en 4 partes, y de dos subíndices que denotan, contados de izquierda a derecha cual mitad del intervalo del eje x ó del eje y deben ser considerados como lados horizontal y vertical respectivamente del cuadrado parcial considerado.

Adoptaremos la convención de ordenar a los cuadrados parciales de acuerdo al primer subíndice en sentido creciente, a igualdad del segundo subíndice, y agotada esta ordenación, por el segundo subíndice. Tal ordenación corresponde pues a ordenación diagonal.

De es modo se tiene que

$$(1) \qquad C^{(1)}_{i,j} : \begin{array}{l} \frac{i-2}{2} \leq x < \frac{i-1}{2} \\ \frac{j-1}{2} < y < \frac{j}{2} \end{array}$$

con $i,j = 1,2$, $C^{(0)} = \sum_{j=1}^{2}\sum_{i=1}^{2} C^{(1)}_{ij}$

Para cada $C^{(1)}_{ij}$ designaremos su función característica con $f^{(1)}_{ij}(x,y)$, es decir $f^{(1)}_{ij}(x,y) \equiv 1$ en $C^{(1)}_{ij}$, $f^{(1)}_{ij}(x,y) \equiv 0$ en el resto de $C^{(0)}$.

Dividamos ahora cada $C^{(1)}_{ij}$ en 4 partes $C^{(2)}_{kl}$ que ordenaremos de acuerdo a lo convenido.

De una manera general. Dividamos cada $[0,1]$ en 2^n partes iguales, obtenemos 4^n cuadrados de longitud de lados igual a $\frac{1}{2^n}$ que llamaremos $C^{(n)}_{rs}$. Ordenamos tales cuadrados de acuerdo a la ordenación diagonal y designaremos, para cada $C^{(n)}_{rs}$, su función características con $f^{(n)}_{rs}(x,y)$, es decir $f^{(n)}_{rs}(x,y) \equiv 1$ en $C^{(n)}_{rs}$;

$f^{(n)}_{rs}(x,y) \equiv 0$ fuera de $C^{(n)}_{rs}$.

Manteniendo la convención de ordenación impuesta ordenamos todas las $f^{(n)}_{rs}(x,y)$ según $\underline{n}$ creciente resultando la sucesión $f^{(0)}, f^{(1)}_{11}, f^{(1)}_{21}, f^{(1)}_{12}, f^{(1)}_{22}, \ldots\ldots f^{(n)}_{2^n 2^n} \ldots$ (1) que llamamos la sucesión $\{f^{(n)}_{ij}\}$ de las funciones características diádicas. Este sistema no es ortogonal.

2.-UN SISTEMA DE HAAR DE DOS VARIABLES

En el caso de una variable Haar define su sistema ortogonalizando el sistema de las funciones características de intervalos diádicos 1-dimensionales. Vamos a hacer lo mismo en el caso de dos variables. Es decir el sistema que vamos a introducir y que designaremos con $\left\{D^{(n)}_{ij}\right\}$ será el sistema que resulta ortonormalizando el sistema $\left\{f^{(n)}_{ij}\right\}$ de las funciones características diádicas bidimensionales. Empezaremos por calcular las primeras funciones de este sistema, luego daremos la ley general de las mismas.

Pongamos $D^{(0)} = 1$ en todo U, luego $D^{(0)} = f^{(0)}$ (2)

Formemos la combinación lineal

$$\tilde{D}^{(1)}_{1,1} = \lambda^{(0)} D^{(0)} + \lambda^{(1)}_{1,1} f^{(1)}_{1,1} \qquad (3)$$

e impongámosle a $\tilde{D}^{(1)}_{1,1}$ la condición de ser ortogonal a $D^{(0)} = f^{(0)}$:

$$\int_0^1\int_0^1 D^{(0)}(x,y)\,\tilde{D}^{(1)}_{1,1}(x,y)\,dxdy = 0,$$

ó sea

$$\lambda^{(0)}\int_0^1\int_0^1 dxdy + \lambda^{(1)}_{1,1}\int_0^1\int_0^1 f^{(0)} f^{(1)}_{1,1}\,dxdy = 0$$

Pero $f^{(0)} f^{(1)}_{11}$ vale 1 en $U^{(1)}_{1,1}$ (cuya medida es 1/4) y cero fuera, luego su integral es distinta de cero sólo en $U^{(1)}_{1,1}$

Entonces $\lambda^{(0)} + \dfrac{\lambda^{(1)}_{1,1}}{4} = 0$, de donde $\lambda^{(0)} = -\dfrac{\lambda^{(1)}_{1,1}}{4}$ (4)

Reemplazando en (1) se obtiene

$$\tilde{D}^{(1)}_{1,1}(x,y) = -\frac{\lambda^{(1)}_{1,1}}{4}\left(f^{(0)} - 4f^{(1)}_{1,1}\right) \text{ con } \sqrt{\left\|\tilde{D}^{(1)}_{1,1}\right\|} = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

Como la norma de $\tilde{D}^{(1)}_{1,1}$ es distinta de cero es posible normalizarla, obteniendo

$$D^{(1)}_{11} = \frac{\tilde{D}^{(1)}_{11}}{\sqrt{\left\|\tilde{D}^{(1)}_{1,1}\right\|}} = -\frac{1}{\sqrt{3}}\left(f^{(0)} - 4f^{(1)}_{1,1}\right)$$

(4).

La siguiente función de primer orden que vamos a calcular será de la forma $\overline{D}^{(1)}_{2,1}(x,y) = \lambda^{(0)} D^{(0)} + \lambda^{(1)}_{1,1} D^{(1)}_{1,1} + \lambda^{(1)}_{2,1} f^{(1)}_{2,1}$

(5) y tendrá que ser ortogonal a $D^{(0)}$ y a $D^{(1)}_{1,1}$

Para que sea ortogonal a $D^{(0)}$ debe ser

$$\lambda^{(0)}\int_0^1\int_0^1 D^{(0)2}\,dxdy + \lambda^{(1)}_{1,1}\int_0^1\int_0^1 D^{(0)} D^{(1)}_{1,1}\,dxdy + \lambda^{(1)}_{2,1}\int_0^1\int_0^1 D^{(0)} f^{(1)}_{2,1}\,dxdy = 0$$

Pero siendo $D^{(0)}$ ortogonal a $D^{(1)}_{1,1}$ se tiene

$$\int_0^1\int_0^1 D^{(0)} D^{(1)}_{1,1}\,dxdy = 0$$

con lo que

$$\lambda^{(0)}\int_0^1\int_0^1 f^{(0)2}\,dxdy + \lambda^{(1)}_{2,1}\int_0^1\int_0^1 f^{(0)} f^{(1)}_{2,1}\,dxdy = 0$$

$f^{(0)} = 1$ en todo $C^{(0)}$ mientras que $f^{(0)} f^{(1)}_{2,1} = 1$ en $C^{(1)}_{2,1}$ e

idénticamente nula en el resto. Entonces

$$\lambda^{(0)} + \lambda^{(1)}_{2,1}\int_{1/2}^1\int_0^{1/2} dxdy = 0, \text{luego } \lambda^{(0)} + \frac{\lambda^{(1)}_{2,1}}{4} = 0, \text{por}$$

lo que $\lambda^{(0)} = -\dfrac{\lambda^{(1)}_{2,1}}{4}$ (6)

La condición de ortogonalidad con $D^{(1)}_{1,1}$ da

$$\int_0^1\int_0^1 \overline{D}^{(1)}_{2,1} D^{(1)}_{1,1}\,dxdy = \lambda^{(0)}\int_0^1\int_0^1 D^{(0)} D^{(1)}_{1,1}\,dxdy +$$

$$\lambda^{(1)}_{1,1}\int_0^1\int_0^1 D^{(1)2}_{1,1}\,dxdy + \lambda^{(1)}_{2,1}\int_0^1\int_0^1 D^{(1)}_{1,1} f^{(1)}_{2,1}\,dxdy = 0$$

Pero por la normalización realizada antes

$$\int_0^1\int_0^1 \left[D^{(1)}_{1,1}\right]^2 dxdy = 1 \text{ , entonces}$$

$$\Lambda_{1,1}^{(1)} + \Lambda_{2,1}^{(1)} \int_0^1 \int_0^1 D_{1,1}^{(1)} f_{2,1}^{(1)} dxdy = 0 \quad (a)$$

Recordemos que

$$D_{1,1}^{(1)}(x,y) = - \frac{1}{\sqrt{3}} \left(f^{(0)} - 4f_{1,1}^{(1)} \right), dxdy = 0$$

Llevando tal valor a (a) obtenemos

$$\Lambda_{1,1}^{(1)} - \frac{\Lambda_{2,1}^{(1)}}{\sqrt{3}} \int_0^1 \int_0^1 \left(f^{(0)} - 4f_{1,1}^{(1)} \right) f_{2,1}^{(1)} dxdy = 0$$

Pero $U_{1,1}^{(1)}$ y $U_{2,1}^{(1)}$ son disjuntos por lo que

$f_{1,1}^{(1)} \cdot f_{2,1}^{(1)} = 0$. Por ello

$$\int_0^1 \int_0^1 \left(f^{(0)} - 4f_{1,1}^{(1)} \right) f_{2,1}^{(1)} dxdy =$$

$$\int_0^1 \int_0^1 f^{(0)} f_{2,1}^{(1)} = \text{valor de f en}$$

en la parte común de los dominios de $f^{(0)}$ y de $f_{2,1}^{(1)}$, igual

entonces a 1) por la medida de ese intervalo común(entonces

por 1/4)

Tenemos $\Lambda_{1,1}^{(1)} - \dfrac{\Lambda_{2,1}^{(1)}}{4\sqrt{3}} = 0$, luego $\Lambda_{1,1}^{(1)} = \dfrac{\Lambda_{2,1}^{(1)}}{4\sqrt{3}}$ (7)

Reemplazando las expresiones de $\Lambda^{(0)}$ y de $\Lambda_{1,1}^{(1)}$ en función de $\Lambda_{2,1}^{(1)}$ en $\bar{D}_{2,1}^{(1)}$ obtenemos

$$\bar{D}_{2,1}^{(1)} = - \frac{\Lambda_{2,1}^{(1)}}{4} \left(D^{(0)} - \frac{1}{\sqrt{3}} D_{1,1}^{(1)} - 4 f_{2,1}^{(1)} \right)$$

y como $D_{1,1}^{(1)} = - \dfrac{1}{\sqrt{3}} \left(f^{(0)} - 4f_{1,1}^{(1)} \right)$ y $D^{(0)} = f^{(0)}$

$$\bar{D}_{2,1}^{(1)} = - \frac{\Lambda_{2,1}^{(1)}}{4} \left(f^{(0)} + \frac{1}{3} \left(f^{(0)} - 4f_{1,1}^{(1)} \right) - 4f_{2,1}^{(1)} \right)$$

ó también $\bar{\nu}^{(1)}_{2,1} = -\frac{\lambda^{(1)}_{2,1}}{3}(f^{(0)} - f^{(0)}_{1,1} - 3f^{(1)}_{2,1})$

Como $\|\bar{\nu}^{(1)}_{2,1}\| = \frac{[\lambda^{(1)}_{2,1}]^2}{6}$ para efectuar su normalización

hacemos
$$\nu^{(1)}_{2,1} = \frac{\bar{\nu}^{(1)}_{2,1}}{\sqrt{\|\bar{\nu}^{(1)}_{2,1}\|}}$$

y obtenemos $\nu^{(1)}_{2,1} = -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}(f^{(0)} - f^{(1)}_{1,1} - 3f^{(1)}_{2,1})$ (8)

que es la segunda función ν de primer orden, e incluye en su expresión a $f^{(1)}_{2,1}$

Pongamos $\bar{\nu}^{(1)}_{1,2} = \lambda^{(0)}\nu^{(0)} + \lambda^{(1)}_{1,1}\nu^{(1)}_{1,1} + \lambda^{(1)}_{2,1}\nu^{(1)}_{2,1} + \lambda^{(1)}_{1,2}f^{(1)}_{1,2}$ (9)

Por ortogonalidad $\int_0^1\int_0^1 \nu^{(0)}\,\bar{\nu}^{(1)}_{1,2}\,dxdy = 0$;

$$\int_0^1\int_0^1 \nu^{(1)}_{1,1}\,\bar{\nu}^{(1)}_{1,2}\,dx\,dy = 0 \quad ;$$

$$\int_0^1\int_0^1 \nu^{(1)}_{2,1}\,\bar{\nu}^{(1)}_{1,2}\,dxdy = 0$$

y como $\nu^{(0)}, \nu^{(1)}_{1,1}, \nu^{(1)}_{2,1}$ son ortogonales entre sí

se obtiene simplemente

$$\int_0^1\int_0^1 \bar{D}^{(1)}_{1,2}\,\nu^{(0)}\,dxdy = \lambda^{(0)}\int_0^1\int_0^1 [\nu^{(0)}]^2\,dxdy + \lambda^{(1)}_{1,2}\int_0^1\int_0^1 \nu^{(0)}\,f^{(1)}_{1,2}\,dxdy$$

0 1

Obtenemos entonces $\frac{\quad}{4}$ 0 , de donde $-\frac{\quad}{4}$ (10)

$$\lambda_{1,1}^{(1)} + \lambda_{1,2}^{(1)} \int_0^1 \int_0^1 D_{1,1}^{(1)} f_{1,2}^{(1)} \, dxdy = 0, \text{ de}$$

donde reemplazando $D_{1,1}^{(1)}$ por $-\frac{1}{\sqrt{3}}(f^{(0)} - 4f_{1,1}^{(1)})$, resulta

$$\lambda_{1,1}^{(1)} - \frac{\lambda_{1,2}^{(1)}}{\sqrt{3}} \int_0^1 \int_0^1 (f^{(0)} - 4f_{1,1}^{(1)}) f_{1,2}^{(1)} \, dxdy = 0$$

luego $\lambda_{1,1}^{(1)} - \frac{\lambda_{1,2}^{(1)}}{4\sqrt{3}} = 0$, ó también $\lambda_{1,1}^{(1)} = \frac{\lambda_{1,2}^{(1)}}{4\sqrt{3}}$ (11)

De $\lambda_{2,1}^{(1)} + \lambda_{1,2}^{(1)} \int_0^1 \int_0^1 D_{2,1}^{(1)} f_{1,2}^{(1)} \, dxdy = 0$, ó

$$\lambda_{2,1}^{(1)} - \frac{\sqrt{2}\,\lambda_{1,2}^{(1)}}{\sqrt{3}} \int_0^1 \int_0^1 (f^{(0)} - f_{1,1}^{(1)} - 3 f_{2,1}^{(1)}) f_{1,2}^{(1)} \, dxdy = 0$$

Se obtiene entonces $\lambda_{2,1}^{(1)} - \frac{\sqrt{2}\,\lambda_{1,2}^{(1)}}{4\sqrt{3}} = 0$, luego $\lambda_{2,1}^{(1)} = \frac{\sqrt{2}\,\lambda_{1,2}^{(1)}}{4\sqrt{3}}$ (11 a)

Reemplazando los valores de $\lambda^{(0)}, \lambda_{1,1}^{(1)}, \lambda_{2,1}^{(1)}$, en función de $\lambda_{1,2}^{(1)}$ en la expresión de $\bar{D}_{1,2}^{(1)}$ se tendrá, luego de reemplazar $D^{(0)}, D_{1,1}^{(1)}, D_{2,1}^{(1)}$ por sus expresiones en función de las las f: $\bar{D}_{1,2}^{(1)} = -\frac{\lambda_{1,2}^{(1)}}{2}(f^{(0)} - f_{1,1}^{(1)} - f_{2,1}^{(1)} - f_{1,2}^{(1)})$ que normalizada dá $D_{1,2}^{(1)} = -\frac{\sqrt{2}}{\;}(f^{(0)} - f_{1,1}^{(1)} - f_{2,1}^{(1)} - 2f_{1,2}^{(1)})$ (12)

De las cuatro funciones características de primer orden sólo tres $f_{1,1}^{(1)}, f_{2,1}^{(1)}, f_{1,2}^{(1)}$ son independientes. La restante $f_{2,2}^{(1)}$ depende linealmente de las tres anteriores pues

$$f_{2,2}^{(1)} = f^{(0)} - \left\{ f_{1,1}^{(1)} + f_{2,1}^{(1)} + f_{1,2}^{(1)} \right\}$$

Por tal causa sólo habrá tres funciones $D_{i,j}^{(1)}$ de primer or den.

En el diagrama que sigue representamos los valores de cada una de esas funciones en cada cuadrado parcial

Agotadas las funciones $u^{(1)}_{i,j}$ de primer orden calculemos las de segundo orden, para lo cual dividimos $0 \leq x \leq 1$, en $2^2 = 4$ partes iguales, cosa que igualmente hacemos con $0 \leq y \leq 1$. Se determinan de tal modo 4^2 16 cuadrados $U^{(2)}_{i,j}$ que ordenamos de acuerdo a una ordenación diagonal.

Observemos que ~~sobre~~ cada $U^{(1)}_{k,l}$ están repartidos 4 cuadrados de orden 2. Luego, definiremos en cada cuadrado de orden 1 3 funciones de orden 2, es decir 12 funciones en el cuadrado fundamental $U^{(0)}$.

Pongamos

$$u^{(2)}_{1,1} = \lambda^{(0)} u^{(0)} + \lambda^{(1)}_{1,1} u^{(1)}_{1,1} + \lambda^{(1)}_{2,1} u^{(1)}_{2,1} + \lambda^{(1)}_{1,2} u^{(1)}_{1,2} + \lambda^{(2)}_{1,1} f^{(2)}_{1,1}$$

(13)

Ortogonalizando $\lambda^{(0)} + \lambda^{(2)}_{1,1} \int_0^1 \int_0^1 u^{(0)} f^{(2)}_{1,1}\, dxdy = 0$

Entonces $\lambda^{(0)} + \dfrac{\lambda^{(2)}_{1,1}}{16} = 0$, luego $\lambda^{(0)} = -\dfrac{\lambda^{(2)}_{1,1}}{16}$ (14)

$$\lambda^{(1)}_{1,1} + \lambda^{(2)}_{1,1} \int_0^1 \int_0^1 u^{(1)}_{1,1} f^{(2)}_{1,1}\, dxdy = 0$$

$$\lambda_{1,1}^{(1)} - \frac{\lambda_{1,1}^{(2)}}{\sqrt{3}} \int_0^1 \int_0^1 (f^{(0)} - 4 f_{1,1}^{(1)}) f_{1,1}^{(2)} dxdy = 0$$

$$\lambda_{1,1}^{(1)} - \lambda_{1,1}^{(2)} \frac{(1-4)}{16 \cdot \sqrt{3}} = 0 \ , \quad \lambda_{1,1}^{(1)} + \lambda_{1,2}^{(2)} \frac{\sqrt{3}}{16} = 0$$

de donde $\lambda_{1,1}^{(1)} = - \lambda_{1,1}^{(2)} \frac{\sqrt{3}}{16}$ (14 a)

$$\lambda_{2,1}^{(1)} + \lambda_{1,1}^{(2)} \int_0^1 \int_0^1 \bar{D}_{2,1}^{(1)} f_{1,1}^{(2)} dxdy = 0$$

Pero como $\bar{D}_{2,1}^{(1)}$ está definida distinta de cero en $C_{2,1}^{(1)}$ y $f_{11}^{(2)}$ en $C_{1,1}^{(2)}$ $C_{1,1}^{(1)}$, $\bar{D}_{2,1}^{(1)}$ $f_{1,1}^{(2)}$ es idénticamente nula, luego $\lambda_{2,1}^{(1)} = 0$. Análogo razonamiento podemos hacer para mostrar que $\lambda_{1,2}^{(1)} = 0$ (14b)

Entonces podemos poner $\bar{D}_{1,1}^{(2)} = - \frac{\lambda_{1,1}^{(2)}}{16}(D^{(0)} + \sqrt{3}\, D_{1,1}^{(1)} - 16\, f_{1,1}^{(2)})$

Reemplazando $D^{(0)}$ y $D_{1,1}^{(1)}$ por sus expresiones en función de las f y normalizando obtenemos $D_{1,1}^{(2)} = - \frac{2}{\sqrt{3}} (f_{1,1}^{(1)} - 4\, f_{1,1}^{(2)})$

La aplicación de la condición de ortogonalidad nos lleva siempre a una suma de la constante respectiva de la función cuyo producto escalar por la $f_{1,1}^{(2)}$ se halla, más el producto de una constante por el, producto escalar de la f por la D relativa a la primera constante más este producto escalar es idénticamente nulo a menos que f y D tengan dominios de definición de producto no nulo.

Por tal causa, al considerar la condición de ortogonalidad, bastará poner a la D como combinación lineal de las D y de las f definidas distintas de cero en los cuadrados de orden inmediato inferior al considerado y que contiene a este

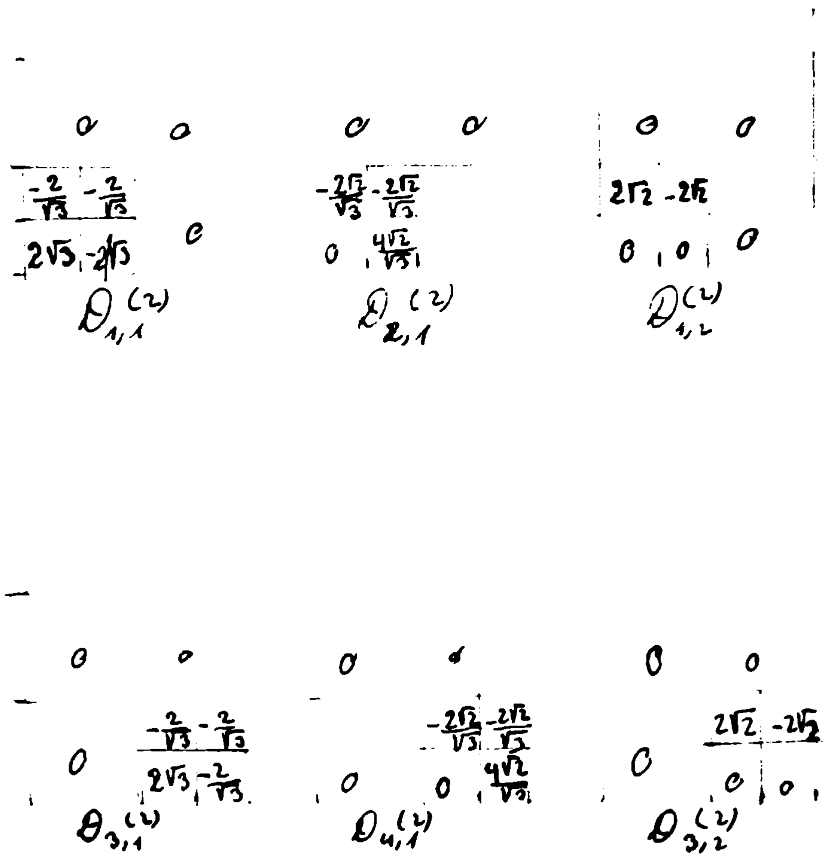
Así obtendremos $D^{(2)}_{2,1} = -2\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\left(f^{(1)}_{1,1} - f^{(2)}_{1,1} - 3f^{(2)}_{2,1}\right)$ (15)

$$D^{(2)}_{1,2} = -2\sqrt{2}\left(f^{(1)}_{1,1} - f^{(2)}_{1,1} - f^{(2)}_{2,1} - 2f^{(2)}_{1,2}\right)$$

(16).

Sobre el cuadrado $C^{(1)}_{1,1}$ no existen más funciones $D^{(2)}$. En cada uno de los $C^{(1)}_{i,j}$ restantes las funciones $D^{(2)}$ se comportan de una manera análoga.

Para mejor orientación nos hemos permitido representar en el diagrama siguiente las seis primeras funciones $D^{(2)}_{i,j}$.



3.-LEY DE FORMACION DE LAS $D^{(n)}_{i,j}$

Se presenta ahora de inmediato la ley general de formación de las funciones $D^{(n)}_{i,j}$

Dividimos $C^{(0)}$ en 4^n partes iguales $C^{(n)}_{i,j}$ por las rectas $x = \frac{i}{2^n}$, $y = \frac{j}{2^n}$, $i,j = 1,2,\dots,2^{n-1}$

Para cada par i,j ponemos $\left[\frac{i-1}{2}\right] = l$, $\left[\frac{j-1}{2}\right] = k$, de modo que $i = 2l+p+1$, $j = 2k+q+1$, con $p,q = 0$ ó 1.

Entonces el cuadrado $C^{(n-1)}_{l+1,k+1} = C^{(n)}_{2l+1,2k+1} + C^{(n)}_{2l+2,2k+1} + C^{(n)}_{2l+1,2k+2} + C^{(n)}_{2l+2,2k+2}$.

Vamos a probar que

$$D^{(n)}_{i,j}(x,y) = -\frac{2^{(n-1)}}{\sqrt{3}}\left(f^{(n-1)}_{l+1,k+1} - 4f^{(n)}_{2l+1,2k+1}\right) \quad \text{(I) si}$$

si $p = q = 0$.

$$D^{(n)}_{i,j}(x,y) = -2^{(n-1)}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\left(f^{(n-1)}_{l+1,k+1} - f^{(n)}_{2l+1,2k+1} - 3f^{(n)}_{2l+2,2k+1}\right) \quad \text{(II)} \quad \text{si } p=1, q=0$$

$$D^{(n)}_{i,j}(x,y) = -2^{(n-1)}\sqrt{2}\left(f^{(n-1)}_{l+1,k+1} - f^{(n)}_{2l+1,2k+1} - f^{(n)}_{2l+2,2k+1} - f^{(n)}_{2l+1,2k+2}\right) \quad \text{(III) si } p=0, q=1$$

$$D^{(n)}_{i,j}(x,y) = 0 \text{ en el resto de } C^{(0)} \quad \text{(IV)}$$

Como las funciones $D^{(n)}_{i,j}$ son simplemente trasladadas en cada cuadrado de orden $n-1$, bastará demostrar la verdad de la ley para las tres primeras funciones de orden n.

Vamos a efectuar la demostración por inducción, para lo cual supondremos cierta la ley para las D de orden $n-1$, es decir

$$\bar{D}^{(n-1)}_{1,1} = -\frac{2^{(n-2)}}{\sqrt{3}}\left(f^{(n-2)}_{1,1} - 4f^{(n-1)}_{1,1}\right)$$

$$D^{(n-1)}_{2,1} = -\frac{2^{(n-2)}\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\left(f^{(n-2)}_{1,1} - f^{(n-1)}_{1,1} - 3f^{(n-1)}_{2,1}\right)$$

$$D^{(n-1)}_{1,2} = -\frac{2^{(n-2)}\sqrt{2}}{3}\left(f^{(n-2)}_{1,1} - f^{(n-1)}_{1,1} - f^{(n-1)}_{2,1} - 2f^{(n-1)}_{1,2}\right)$$

Pongamos

$$\bar{D}^{(n)}_{1,1} = \lambda^{(0)} D^{(0)} + \lambda^{(1)}_{1,1} D^{(1)}_{1,1} + \lambda^{(1)}_{2,1} D^{(1)}_{2,1} + \lambda^{(1)}_{1,2} D^{(1)}_{1,2} + \lambda^{(2)}_{1,1} D^{(2)}_{1,1} + \lambda^{(2)}_{2,1} D^{(2)}_{2,1} + \dots\dots\dots$$

$$\dots + \lambda^{(n-1)}_{1,1} D^{(n-1)} + \dots + \lambda^{(n)}_{1,1} f^{(n)}_{1,1}$$

Al imponer a $\bar{D}^{(n)}_{1,1}$ la condición de ortogonalidad resultan idénticamente nulas todas aquella λ correspondientes a aquellas D cuyo dominio no contiene a $C^{(n)}_{1,1}$

quedará entonces

$$\bar{D}^{(n)}_{1,1} = \lambda^{(0)} D^{(0)} + \lambda^{(1)}_{1,1} D^{(1)}_{1,1} + \dots\dots\dots + \lambda^{(n)}_{1,1} f^{(n)}_{1,1}$$

Haciendo $\bar{D}^{(n)}_{1,1}$ ortogonal a $D^{(0)}_{1,1}$ resulta

$$\lambda^{(0)}\int_0^1\int_0^1 D^{(0)\,2}\,dxdy + \lambda^{(n)}_{1,1}\int_0^1\int_0^1 D^{(0)} f^{(n)}_{1,1}\,dxdy = 0$$

entonces $\lambda^{(0)} + \frac{\lambda^{(n)}_{1,1}}{4^n} = 0$, es decir $\lambda^{(0)} = -\frac{\lambda^{(n)}_{1,1}}{4^n}$

Haciendo $\bar{D}^{(n)}_{1,1}$ ortogonal a $D^{(1)}_{1,1}$ resulta

$$\lambda^{(1)}_{1,1}\int_0^1\int_0^1 D^{(1)\,2}_{1,1}\,dxdy + \lambda^{(n)}_{1,1}\int_0^1\int_0^1 D^{(1)}_{1,1} f^{(n)}_{1,1}\,dxdy = 0$$

entonces $\lambda^{(1)}_{1,1} + \lambda^{(n)}_{1,1}\int_0^1\int_0^1 D^{(1)}_{1,1} f^{(n)}_{1,1}\,dxdy = 0$

$$D^{(n)}_{1,1} \quad -\frac{\;}{4^{n}}\left(f^{(0)} - (f - 4f^{(0)(1)}_{1,1}) - 4(f^{(1)}_{1,1} - 4f^{(2)}_{1,1})\right.$$

$$\left. - \dots\dots 4^{(n-2)}(f^{(n-2)}_{1,1} - 4f^{(n-1)}_{1,1}) - 4f^{(n)}_{1,1}\right)$$

operando se obtiene

$$D^{(n)}_{1,1} \quad \frac{(n)}{4^{n}} \quad f^{(0)} - f^{(0)} - 4f^{(1)}_{1,1} - 4f^{(1)}_{1,1} \; 16f^{(2)}_{1,1}$$

$$- f^{(2)}_{1,1} \quad -4^{(n-2)} f^{(n-2)}_{1,1} - 4^{(n-1)} f^{(n-1)}_{1,1} - 4^{n} f^{(n)}_{1,1}$$

ó también $D^{(n)}_{1,1} \quad \frac{(n)}{4^{n}} \quad f^{(n-1)}_{1,1} - 4\, f^{(n)}_{1,1}$

$$D^{(n)}_{1,1} \quad \frac{(n)\,2}{-} \; {}^{1}_{0}\;{}^{1}_{0} \,(f^{(n-1)}_{1,1})^{2}\, dxdy -$$

$$8 \; {}^{1}_{0}\;{}^{1}_{0}\, f^{(n-1)}_{1,1}\, f^{(n)}_{1,1}\, dxdy \;\; 16 \; {}^{1}_{0}\;{}^{1}_{0}\, (f^{(n)}_{1,1})^{2}\, dxdy$$

$$D^{(n)}_{1,1} \quad \frac{(n)^{2} \quad 3}{16 \cdot 4^{n-1}}$$

$$D^{(n)}_{1,1} \quad \frac{(n) \quad 3}{4 \cdot 2^{n-1}}$$

Hagamos $D^{(n)}_{1,1} \quad \frac{D^{(n)}_{1,1}}{D^{(n)}_{1,1}}$

obtenemos $D^{(n)}_{1,1} \quad \frac{-2^{n-1}}{3} \left(f^{(n-1)}_{1,1} - 4f^{(n)}_{1,1}\right)$ (1)

Del mismo modo pongamos

$$D^{(n)}_{2,1} \quad D^{(0)} \quad D^{(1)}_{1,1} \quad D^{(1)}_{2,1} \dots \quad D^{(n)}_{1,1}$$

$$+ \Lambda^{(n)}_{2,1} \quad f^{(n)}_{2,1}$$

Por ortogonalidad

$$\Lambda^{(0)} + \Lambda^{(n)}_{2,1} \int_0^1 \int_0^1 D^{(0)} \, f^{(n)}_{2,1} \, dxdy = 0$$

$$\Lambda^{(0)} + \frac{\Lambda^{(n)}_{2,1}}{4^n} = 0, \qquad \Lambda^{(0)} = -\frac{\Lambda^{(n)}_{2,1}}{4^n}$$

$$\Lambda^{(1)}_{1,1} + \Lambda^{(n)}_{2,1} \int_0^1 \int_0^1 D^{(1)}_{1,1} \, f^{(n)}_{2,1} \, dxdy = 0$$

luego

$$\Lambda^{(1)}_{1,1} - \frac{\Lambda^{(n)}_{2,1}}{\sqrt{3}} \int_0^1 \int_0^1 \left(f^{(0)} - 4 f^{(1)}_{1,1} \right) f^{(n)}_{2,1} \, dxdy = 0$$

$$\Lambda^{(1)}_{1,1} = \frac{-\Lambda^{(n)}_{2,1} \sqrt{3}}{4^n}$$

$$\Lambda^{(n)}_{1,1} + \Lambda^{(n)}_{2,1} \int_0^1 \int_0^1 D^{(n)}_{1,1} \, f^{(n)}_{2,1} \, dxdy = 0$$

$$\Lambda^{(n)}_{1,1} - \frac{2^{n-1}}{\sqrt{3}} \Lambda^{(n)}_{2,1} \int_0^1 \int_0^1 \left(f^{(n-1)}_{1,1} - 4 f^{(n)}_{1,1} \right) f^{(n)}_{2,1} \, dxdy = 0$$

$$\Lambda^{(n)}_{1,1} - \frac{2^{n-1}}{4^n \, 3} \Lambda^{(n)}_{2,1} = 0, \qquad \frac{2^{n-1}}{4^n \, 3} \Lambda^{(n)}_{2,1} = \Lambda^{(n)}_{1,1}$$

Entonces $\bar{D}^{(n)}_{2,1} = \frac{1}{4^n} \Lambda^{(n)}_{2,1} \Big[f^{(0)} - (f^{(0)} - 4 f^{(1)}_{1,1}) - 4 (f^{(1)}_{1,1} - 4 f^{(2)}_{1,1})$

$$- \ldots \ldots \frac{4^{n-1}}{3} \left(f^{(n-1)}_{1,1} - 4 f^{(n)}_{1,1} \right) - 4 f^{(n)}_{1,1} \Big]$$

Queda finalmente

$$\bar{D}^{(n)}_{2,1} = -\frac{\lambda^{(n)}_{2,1}}{4^n}\left[\frac{4^n}{3} f^{(n-1)}_{1,1} - \frac{4^n}{3} f^{(n)}_{1,1} - 4^n f^{(n)}_{2,1}\right]$$

y factoreando $\frac{4^n}{3}$ resulta

$$\bar{D}^{(n)}_{2,1} = -\frac{\lambda^{(n)}_{2,1}}{3}\left[f^{(n-1)}_{1,1} - f^{(n)}_{1,1} - 3f^{(n)}_{2,1}\right]$$

Nos queda por comprobar la forma de la función normalizada.

Procediendo del mismo modo que en los casos anteriores obtenemos $\left\|\bar{D}^{(n)}_{2,1}\right\| = \frac{6}{4^n}\left(\lambda^{(n)}_{2,1}\right)^2$

entonces $\sqrt{\left\|\bar{D}^{(n)}_{2,1}\right\|} \quad \frac{\sqrt{6}}{2^n}\lambda^{(n)}_{2,1}$

Obtendremos, haciendo $D^{(n)}_{2,1} = \dfrac{\bar{D}^{(n)}_{2,1}}{\sqrt{\left\|\bar{D}^{(n)}_{2,1}\right\|}}$,

$$(11) \qquad D^{(n)}_{2,1} = -2^{n-1}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\left[f^{(n-1)}_{1,1} - f^{(n)}_{1,1} - 3f^{(n)}_{2,1}\right]$$

y la segunda parte de la ley está demostrada.

Pongamos ahora

$$\bar{D}^{(n)}_{1,2} = \lambda^{(0)} D^{(0)} + \lambda^{(1)}_{1,1} D^{(1)}_{1,1} + \dots + \lambda^{(n)}_{1,1} D^{(n)}_{1,1} + \lambda^{(n)}_{2,1} D^{(n)}_{2,1} + \lambda^{(n)}_{1,2} f^{(n)}_{1,2}$$

Por la condición impuesta de ser ortogonal a todas las D anteriores, obtendremos

(n)

$$\lambda^{(0)} + \lambda_{1,2}^{(n)} \int_0^1 \int_0^1 \nu^{(0)} f_{1,2}^{(n)} dxdy = 0$$

$$\lambda^{(0)} + \frac{\lambda_{1,2}^{(n)}}{4^n} = 0 , \qquad \lambda^{(0)} = - \frac{\lambda_{1,2}^{(n)}}{4^n}$$

$$\lambda_{1,1}^{(1)} + \lambda_{1,2}^{(n)} \int_0^1 \int_0^1 \nu_{1,1}^{(1)} f_{1,2}^{(n)} dxdy = 0$$

$$\lambda_{1,1}^{(1)} - \frac{1}{\sqrt{3}} \lambda_{1,1}^{(n)} \int_0^1 \int_0^1 (f^{(0)} - 4f_{1,1}^{(1)}) f_{1,2}^{(n)} dxdy = 0$$

$$\lambda_{1,1}^{(1)} = - \lambda_{1,2}^{(n)} \frac{\sqrt{3}}{4^n}$$

....

$$\lambda_{1,1}^{(n)} + \lambda_{1,2}^{(n)} \int_0^1 \int_0^1 \nu_{1,1}^{(n)} f_{1,2}^{(n)} dxdy = 0$$

$$\lambda_{1,1}^{(n)} - \lambda_{1,2}^{(n)} \frac{2^{n-1}}{\sqrt{3}} \int_0^1 \int_0^1 (f_{1,1}^{(n-1)} - 4f_{1,1}^{(n)}) f_{1,2}^{(n)} dxdy = 0$$

$$\lambda_{1,1}^{(n)} = \lambda_{1,2}^{(n)} \frac{2^{n-1}}{4^n \sqrt{3}}$$

$$\lambda_{2,1}^{(n)} + \lambda_{1,2}^{(n)} \int_0^1 \int_0^1 \nu_{2,1}^{(n)} f_{1,2}^{(n)} dxdy = 0$$

$$\lambda_{2,1}^{(n)} - \frac{2^{n-1}}{\sqrt{3}} \lambda_{1,2}^{(n)} \sqrt{2} \int_0^1 \int_0^1 (f_{1,1}^{(n-1)} + f_{1,1}^{(n)} - 3f_{2,1}^{(n)}) f_{1,2}^{(n)} dxdy = 0$$

, es decir

$$\lambda_{2,1}^{(n)} - \frac{2^{n-1}}{\sqrt{3}} \sqrt{2}\, \lambda_{1,2}^{(n)} = 0$$

luego $\lambda^{(n)}_{2,1} = 2^{n-1}\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\lambda^{(n)}_{1,2}$

Entonces $\bar{D}^{(n)}_{1,2} = -\dfrac{\lambda^{(n)}_{1,2}}{4^n}\left(D^{(0)} + \sqrt{3}\, D^{(1)}_{1,1} + \dots - \dfrac{2^{n-1}}{\sqrt{3}} D^{(n)}_{1,1} - \dfrac{2^{n-1}\sqrt{2}}{\sqrt{3}} D^{(n)}_{2,1} - 4^n f^{(n)}_{1,2}\right)$

Reemplazando las D en función de las f,obtenemos

$$\bar{D}^{(n)}_{1,2} = -\frac{\lambda^{(n)}_{1,2}}{4^n}\Big[f^{(0)} - (f^{(0)} - 4 f^{(1)}_{1,1}) - 4(f^{(1)}_{1,1} - 4 f^{(2)}_{1,1}) - \dots \dots - \frac{4^{n-1}}{3}(f^{(n-1)}_{1,1} - 4 f^{(n)}_{1,1}) - \frac{2\cdot 4^{n-1}}{3}(f^{(n-1)}_{1,1} - 8 f^{(n)}_{1,1} - 3 f^{(n)}_{2,1}) - 4^n f^{(n)}_{1,2}\Big]$$

Entonces resulta

$$\bar{D}^{(n)}_{1,2} = -\frac{\lambda^{(n)}_{1,2}}{3\cdot 4^n}\Big[4\cdot\frac{4^{n-1}}{3} f^{(n-1)}_{1,1} - \frac{(4+2)4^{n-1}}{3} f^{(n)}_{1,1} - 2\cdot 4^{n-1} f^{(n)}_{2,1} - 4^n f^{(n)}_{1,2}\Big]$$

De otro modo

$$\bar{D}^{(n)}_{1,2} = -\lambda^{(n)}_{1,2}\,\frac{2\cdot 4^{n-1}}{4^n}\Big[f^{(n-1)}_{1,1} - f^{(n)}_{1,1} - f^{(n)}_{2,1} - 2 f^{(n)}_{1,2}\Big]$$

$$\bar{D}^{(n)}_{1,2} = -\frac{\lambda^{(n)}_{1,2}}{2}\Big[f^{(n-1)}_{1,1} - f^{(n)}_{1,1} - f^{(n)}_{2,1} - 2 f^{(n)}_{1,2}\Big]$$

Su norma es $\left\|\bar{D}^{(n)}_{1,2}\right\| = \dfrac{(\lambda^{(n)}_{1,2}\sqrt{2})^2}{(2^{n+1})^2}$,de donde,poniende $D^{(n)}_{1,2} = \dfrac{D^{(n)}_{1,2}}{\sqrt{\|D^{(n)}_{1,2}\|}}$ obtenemos

$$D^{(n)}_{1,2} = -2^{n-1}\sqrt{2}\,\left(f^{(n-1)}_{1,1} - f^{(n)}_{1,1} - f^{(n)}_{2,1} - 2f^{(n)}_{1,2}\right)$$

y la ley propuesta queda probada.

4.-SISTEMA DE HAAR PRODUCTO

Hemos obtenido entonces un sistema ortogonal,normal de funciones $\left\{ D^{(n)}_{i,j}(x,y)\right\}$ definido en el cuadrado unitario,y ahora nuestro paso primero es establecer si se trata de un sistema completo.

Que nuestro sistema es completo puede verse directamente por el hecho de que sus funciones son combinaciones lineales de las funciones características $\left\{ f^{(n)}_{i,j}\right\}$ y de que estas últimas se puede aproximar uniformemente a toda función continua.Sin embargo vamos a dar otra demostración indirecta que vá a resultar de la relación entre nuestro sistema y el"sistema de Haar producto" que pasamos a definir a continuación.

Dividamos al lado horizontal del cuadrado fundamental en 2^n partes iguales por las rectas $x = \frac{i}{2^n}$, $i = 1,..2^{n-1}$ hagamos una división en 2^n partes iguales del lado vertical por las rectas $y = \frac{j}{2^n}$, $j = 1,2,\ 2^{n-1}$

Sobre cada uno de esos lados consideremos un sistema de funciones de Haar(que como probó Haar es ortogonal,normal y completo) que siga la ley

(m) m-1

$$X_i^{(m)}(x) = \begin{cases} \sqrt{2^{m-1}} & \text{en } \dfrac{2i-2}{2^m} \leq x < \dfrac{2i-1}{2^m} \\ -\sqrt{2^{m-1}} & \text{en } \dfrac{2i-1}{2^m} \leq x < \dfrac{2i}{2^m} \\ 0 & \text{en el, resto de } [0,1] \end{cases}$$

$$X_j^{(n)}(y) = \begin{cases} \sqrt{2^{n-1}} & \text{en } \dfrac{2i-2}{2^n} \leq y < \dfrac{2i-1}{2^m} \\ -\sqrt{2^{n-1}} & \text{en } \dfrac{2i-1}{2^n} \leq y < \dfrac{2i}{2^m} \\ 0 & \text{en el resto de } [0,1] \end{cases}$$

Llamaremos $X_{i,j}^{m,n}(x,y) = X_i^{(m)}(x)X_j^{(n)}(y)$

que es un sitema ortogonal,normal y completo por ser el producto de dos sistemas ortogonales,normales y completos.

Tendremos entonces

$$X_{i,j}^{m,n}(x,y) = \begin{cases} \sqrt{2^{m+n-2}} & \text{en } \begin{cases} \dfrac{2i-2}{2^m} \leq x < \dfrac{2i-1}{2^m} \\ \dfrac{2i-2}{2^n} \leq y < \dfrac{2i-1}{2^n} \end{cases} \\ & \begin{cases} \dfrac{2i-1}{2^m} \leq x < \dfrac{2i}{2^m} \\ \dfrac{2i-1}{2^n} \leq y < \dfrac{2i}{2^n} \end{cases} \\ -\sqrt{2^{m+n-2}} & \text{en } \begin{cases} \dfrac{2i-1}{2^m} \leq x < \dfrac{2i}{2^m} \\ \dfrac{2i-2}{2^n} \leq y < \dfrac{2j}{2^n} \end{cases} \\ & \dfrac{2i-2}{2^m} \leq x < \dfrac{2i-1}{2^m} \end{cases}$$

$$\overset{m,n}{X}_{i,j}(x,y) = \begin{cases} \sqrt{2^{m+n-2}} & \dfrac{2i-2}{2^{m}} \leq x < \dfrac{2i-1}{2^{m}} \\[2mm] & \dfrac{2j-2}{2^{n}} \leq y < \dfrac{2j-1}{2^{n}} \\[2mm] 0 & \text{en el resto del cuadrado unitario} \end{cases}$$

Veamos la relación existente entre el sistema $\left\{\overset{m,n}{X}_{i,j}(x,y)\right\}$ y nuestro sistema $\left\{D^{(n)}_{i,j}(x,y)\right\}$

Si logramos mostrar que ambos sistemas dependen linealmente uno del otro, como tal dependencia lineal implica la completidad ó la no completidad simultánea de los dos sistemas quedará probada la completidad de nuestro sistema, puesto que, por lo dicho, el $\overset{m,n}{X}_{i,j}(x,y)$ es completo.

Tenemos $\overset{0,0}{X}_{0,0} = D^{(0)} = 1$

Si dividimos $C^{(0)}$ en 4 partes iguales

$$C^{(0)} = C^{(1)}_{1,1} + C^{(1)}_{2,1} + C^{(1)}_{1,2} + C^{(1)}_{2,2}$$

obtendremos las funciones $\overset{(1),1}{X}_{1,1}$, $\overset{(1),0}{X}_{1,0}$, $\overset{0,1}{X}_{0,1}$

Para tal división obteníamos por otra parte 3 funciones $D^{(1)}_{i,j}$

Pongamos $D^{(r)}_{i,j} = \lambda_0 \overset{0,0}{X}_{0,0} + \lambda_1 \overset{1,0}{X}_{1,0} + \lambda_2 \overset{0,1}{X}_{0,1} + \lambda_3 \overset{1,1}{X}_{1,1}$

$D^{(1)}_{1,1}$ la debe satisfacer, entonces

$$\sqrt{3} = \lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$$

$$-\frac{1}{\sqrt{3}} = \lambda_0 - \lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 \quad (1)$$

$$-\frac{1}{\sqrt{3}} = \lambda_0 + \lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3$$

$$-\frac{1}{\sqrt{3}} = \lambda_0 - \lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3$$

La matriz

$$\Delta = \begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{Vmatrix}$$

tiene determinante $|\Delta| = 16$

Entonces el sistema (1) es resoluble y su resolución da $\lambda_0 = 0$, $\lambda_1 = -\lambda_2 = \lambda_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}$

entonces $$D^{(1)}_{1,\bar{1}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(X^{0,1}_{0,1} + X^{1,0}_{1,0} + X^{1,1}_{1,1} \right) \qquad (17)$$

La $D^{(1)}_{2,\bar{1}}$ está definida por la misma matriz. Los valores de λ que satisfacen son las raíces del sistema que se obtiene al reemplazar en (1) $\sqrt{3}$, $-\frac{1}{\sqrt{3}}$, $-\frac{1}{\sqrt{3}}$, $-\frac{1}{\sqrt{3}}$, respectivamente por 0, $2\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$, $-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$, $-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$. Obtenemos $\lambda_0 = 0$, $\lambda_1 = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$, $\lambda_2 = \lambda_3 = \frac{-\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}$

entonces $$D^{(1)}_{2,\bar{1}} = -\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}} \left(X^{1,0}_{1,0} - 2X^{0,1}_{0,1} + X^{1,1}_{1,1} \right)$$

(18)

Análogas consideraciones sobre $D^{(1)}_{1,2}$, se obtiene de la misma matriz, permiten establecer que

$$D^{(1)}_{1,2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(X^{1,0}_{1,0} - X^{1,1}_{1,1} \right) \qquad (19)$$

Vemos entonces que el valor de una $D^{(1)}_{i,j}$ no depende de los valores de $X^{0,0}_{0,0}$. Todas las $D^{(1)}_{i,j}$ se obtienen de una misma matriz.

Será esta ley general? Tratemos de hallar una $D^{(n)}_{i,j}$

Tal $D^{(n)}_{i,j}$ está definida en un cuadrado de orden $n-1$, el

$$C^{(n-1)}_{l+1,k+1} \quad \text{, si se pone } \left[\frac{i-1}{2}\right] = l, \ \left[\frac{j-1}{2}\right] = k,$$

con $i = 2l+p+1$, $j = 2k+q+1$, con $p, q = 0$ ó 1.

Dividamos tal cuadrado en cuatro cuadrados iguales de orden n

$$C^{(n-1)}_{l+1,k+1} = C^{(n)}_{2l+1,2k+1} + C^{(n)}_{2l+2,2k+1} + C^{(n)}_{2l+1,2k+2} + C^{(n)}_{2l+2,2k+2}$$

Podemos poner

$$D^{(n)}_{i,j} = \lambda_0 X^{(n-1),(n-1)}_{l+1,k+1} + \lambda_1 X^{n,(n-1)}_{2l+1,k+1} + \lambda_2 X^{(n-1),n}_{l+1,2k+1}$$

$$X^{n,n}_{2l+1,2k+1}$$

a) Si $p = q = 0$

$$2^{n-1}\sqrt{3} = \lambda^{(0)} 2^{n-2} + \lambda^{(1)} 2^{n-2}\sqrt{2} + \lambda^{(2)} 2^{n-2}\sqrt{2} + \lambda^{(3)} 2^{n-1}$$

$$\frac{-2^{n-1}}{\sqrt{3}} = \lambda^{(0)} 2^{n-2} - \lambda^{(1)} 2^{n-2}\sqrt{2} + \lambda^{(2)} 2^{n-2}\sqrt{2} - \lambda^{(3)} 2^{n-1}$$

$$\frac{-2^{n-1}}{\sqrt{3}} = \lambda^{(0)} 2^{n-2} - \lambda^{(1)} 2^{n-2}\sqrt{2} - \lambda^{(2)} 2^{n-2}\sqrt{2} - \lambda^{(3)} 2^{n-1}$$

$$\frac{2^{n-1}}{\sqrt{3}} = \lambda^{(0)} 2^{n-2} - \lambda^{(1)} 2^{n-2}\sqrt{2} - \lambda^{(2)} 2^{n-2}\sqrt{2} + \lambda^{(3)} 2^{n-1}$$

Si dividimos a ambos miembros de estas ecuaciones por 2^{n-2} obtenemos

$$2\sqrt{3} = \lambda^{(0)} + \lambda^{(1)}\sqrt{2} + \lambda^{(2)}\sqrt{2} + \lambda^{(3)}\,2$$

$$\frac{-2}{\sqrt{3}} = \lambda^{(0)} - \lambda^{(1)}\sqrt{2} + \lambda^{(2)}\sqrt{2} + \lambda^{(3)}(-2)$$

$$\frac{-2}{\sqrt{3}} = \lambda^{(0)} + \lambda^{(1)}\sqrt{2} - \lambda^{(2)}\sqrt{2} + \lambda^{(3)}(-2)$$

$$\frac{-2}{\sqrt{3}} = \lambda^{(0)} - \lambda^{(1)}\sqrt{2} - \lambda^{(2)}\sqrt{2} + \lambda^{(3)}\,2$$

$$\Delta = \left\| \begin{matrix} 1 & \sqrt{2} & \sqrt{2} & 2 \\ 1 & -\sqrt{2} & \sqrt{2} & -2 \\ 1 & \sqrt{2} & -\sqrt{2} & -2 \\ 1 & -\sqrt{2} & -\sqrt{2} & 2 \end{matrix} \right\|$$

$$|\Delta| = 2^6 = 64$$

obtenemos entonces $\lambda^{(0)} = 0$, $\lambda^{(1)} = \lambda^{(2)} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$, $\lambda^{(3)} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$$D_{i,j}^{(n)} = \frac{1}{\sqrt{3}}\left[\left(x_{2i+1,k+1}^{(n),(n-1)} + x_{i+1,2k+1}^{(n-1),n}\right)\sqrt{2} + x_{2i+1,2k+1}^{(n),(n)}\right]$$

(V)

b) Si $p=1, q=0$

$D_{i,j}^{(n)}$ se obtiene de la misma matriz anterior reemplazando $2\sqrt{3}$, $-\frac{2}{\sqrt{3}}$, $-\frac{2}{\sqrt{3}}$, $-\frac{2}{\sqrt{3}}$ respectivamente por 0, $-2\sqrt{2}/\sqrt{3}$, $-2\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$, $-2\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$

Obtenemos entonces $\lambda^{(0)} = 0$, $\lambda^{(1)} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$, $\lambda^{(2)} = \frac{2}{\sqrt{3}}$,

$$\lambda^{(3)} = -\frac{1}{2\sqrt{3}}$$

entonces $D_{i,j}^{(n)} = -\frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{3}}\left[\left(x_{2i+1,k+1}^{(n-1),(n-1)} - 2x_{i+1,2k+1}^{(n-1),n}\right)\sqrt{2} + x_{2i+1,2k+1}^{(n),(n)}\right]$

(VI)

Nos queda demostrar la relación para $D_{i,j}^{(n)}$ con $p=0, q=1$

Reemplazando en (1) los primeros miembros por $0,0,2\sqrt{2}$, $-2\sqrt{2}$, respectivamente, obtenemos

$$\lambda^{(0)} = \lambda^{(2)} = 0, \quad \lambda^{(1)} = 1, \quad \lambda^{(3)} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

Entonces $\nu^{(n)}_{i,j} = X^{(n),(n-1)}_{2l+1,k+1} - \frac{1}{\sqrt{2}} X^{(n),(n)}_{2l+1,2k+1}$

y también

$$\nu^{(n)}_{i,j} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(X^{(n),(n-1)}_{2l+1,k+1}\sqrt{2} - X^{(n),(n)}_{2l+1,2k+1}\right) \quad \text{(VII)}$$

Vemos entonces que nuestro sistema ortogonal es una combinación lineal de un "sistema producto" de Haar. De estas fórmulas sigue también que el sistema producto engendrado es una combinación lineal de las funciones de nuestro sistema, es decir que ambos sistemas dependen linealmente uno del otro.

5.- DESARROLLO EN SERIE DE FOURIER RESPECTO DEL SISTEMA $\left\{ \nu^{(n)}_{i,j} \right\}$

Vayamos ahora a uno de los puntos capitales de este trabajo, mostrando que la serie de Fourier con respecto al sistema ortogonal $\left\{ \nu^{(n)}_{i,j} \right\}$ de una función $f(x,y)$ continua en todo $C_{(0)}$, converge uniformemente a esa función.

Consideremos la serie indefinida

$$\nu^{(0)}(x,y)\int_0^1\int_0^1 f(s,t)\nu^{(0)}(s,t)\,ds\,dt + \nu^{(1)}_{1,1}(x,y)\int_0^1\int_0^1 f(s,t)\nu^{(1)}_{1,1}(s,t)\,ds\,dt + \ldots\ldots + \nu^{(n)}_{i,j}(x,y)\int_0^1\int_0^1 f(s,t)\nu^{(n)}_{i,j}(s,t)\,ds\,dt + \ldots\ldots \quad (20)$$

Si nos detenemos en el término que encierra a $\nu^{(n)}_{i,j}$, y llamamos $\left[f(x,y) \right]^{(n)}_{i,j} = \nu^{(0)}(x,y)\int_0^1\int_0^1 f(s,t)\nu^{(0)}(s,t)\,ds\,dt$

$$+\dots\dots+D^{(n)}_{i,j}(x,y)\int_0^1\int_0^1 f(s,t)D^{(n)}_{i,j}(s,t)\,ds\,dt \qquad (21)$$

quedan así definidas infinitas funciones de las cuatro variables x,y,s,t: $K^{(n)}_{i,j}(x,y,s,t)= D^{(0)}(x,y)D^{(0)}(s,t)+$

$$\dots\dots\dots\dots+D^{(n)}_{i,j}(x,y)D^{(n)}_{i,j}(s,t) \qquad (22)$$

que satisfacen la ecuación $\left[f(x,y)\right]^{(n)}_{i,j}=\int_0^1\int_0^1 f(s,t)$

$$K^{(n)}_{i,j}(x,y,s,t)\,ds\,dt \qquad (23)$$

Empecemos por calcular los valores de los primeros núcleos, luego daremos la ley general

Se tiene $K^{(0)}(x,y,s,t) = 1$ en todo el hipercubo fundamental que es aquél que tiene como aristas los segmentos de los ejes x,y,s,t de longitud unitaria.

Para simplificar las cosas consideraremos tal hipercubo como producto de un cuadrado unitario del plano x,y, el $C^{(0)}$, por un cuadrado unitario del plano s,t, el $C'^{(0)}$.

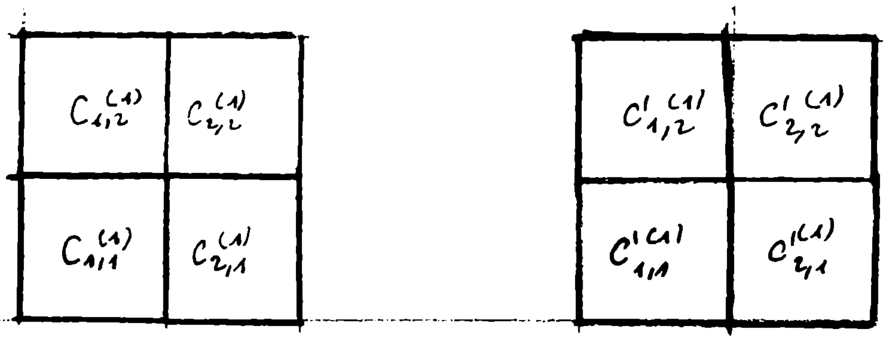
Dividimos a $C^{(0)}$ y $C'^{(0)}$ respectivamente en 4 partes iguales $C^{(1)}_{i,j}$ y $C'^{(1)}_{i,j}$ y definimos sobre ellas las funciones $K^{(1)}_{i,j}$ de acuerdo a la ley

$$K^{(1)}_{1,1}(x,y,s,t) = K^{(0)}(x,y,s,t)+D^{(1)}_{1,1}(x,y)D^{(1)}_{1,1}(s,t)$$

Obtenemos

$$K^{(1)}_{1,1}(x,y,s,t)=\begin{cases} 4 \text{ en } C^{(1)}_{1,1},\ C'^{(1)}_{1,1} \\ \dfrac{4}{3} \text{ en } \begin{cases} C^{(1)}_{2,1}\ C'^{(1)}_{2,1}, & C^{(1)}_{2,1}\ C'^{(1)}_{1,2} \\ C^{(1)}_{2,1}\ C'^{(1)}_{2,2}, & C^{(1)}_{1,2}\ C'^{(1)}_{2,1} \\ C^{(1)}_{1,2}\ C'^{(1)}_{1,2}, & C^{(1)}_{1,2}\ C'^{(1)}_{2,2} \\ C^{(1)}\ C'^{(1)}, & C^{(1)}\ C'^{(1)} \end{cases} \end{cases}$$

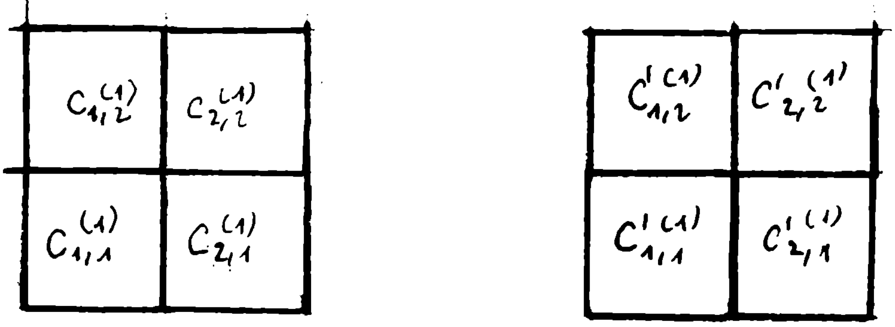
es decir $K^{(1)}_{2,1}$ es 4 en los hipercubos producto del primero y segundo cuadrado parcial de orden 1 de $C^{(0)}$, respectivamente por el primero y segundo cuadrado parcial de orden 1 de $C'^{(0)}$; es 2 en los hipercubos productos de los restantes intervalos parciales de primer orden de $C^{(0)}$ por los restantes intervalos parciales de primer orden de $C'^{(0)}$. La función $K^{(1)}_{2,1}$ es nula en el resto de $C^{(0)} \times C'^{(0)}$.



Pongamos $K^{(1)}_{\hat{1},\hat{2}} = K^{(1)}_{2,1} + D^{(1)}_{1,\hat{2}}(x,y)\,D^{(1)}_{1,\hat{2}}(s,t)$

Entonces

$$K^{(1)}_{\hat{1},\hat{2}} = \begin{cases} 4 \text{ en } & C^{(1)}_{1,1} \times C'^{(1)}_{1,1},\quad C^{(1)}_{2,1} \times C'^{(1)}_{2,1} \\ & C^{(1)}_{\hat{1},\hat{2}} \times C'^{(1)}_{\hat{1},\hat{2}},\quad C^{(1)}_{\hat{2},\hat{2}} \times C'^{(1)}_{\hat{2},\hat{2}} \\ 0 \text{ en el resto de } & C^{(0)} \times C'^{(0)} \end{cases}$$



Entonces $K^{(1)}_{1,\bar{2}}$ es 4 en los hipercubos parciales de primer orden producto de cada cuadrado parcial de $C^{(0)}$ por el cuadrado del mismo orden y subíndices de $C'^{(0)}$

En el resto de $C^{(0)}.C'^{(0)}$, $K^{(1)}_{1,\bar{2}} = 0$

Tratemos de hallar ahora las funciones K de segundo orden. Dividamos $C^{(0)}$ en 4^2 partes iguales $C^{(2)}_{i,\bar{j}}$ y hagamos lo mismo con $C'^{(0)}$, llamando a estos cuadrados parciales $C'^{(2)}_{i,\bar{j}}$

Las primeras tres funciones $K^{(2)}_{i,\bar{j}}$ pertenecen a $C^{(1)}_{\bar{i},j}.C'^{(1)}_{i,j}$ y en cada uno de los restantes $C^{(1)}_{i,\bar{j}}.C'^{(1)}_{i,\bar{j}}$ hay definidas otras tres. Luego obtenemos en total 12 funciones $K^{(2)}_{i,j}$

Calcularemos las funciones $K^{(2)}_{i,j}$ definidas en $C^{(1)}_{1,\bar{1}}.C'^{(1)}_{1,\bar{1}}$

Pongamos $K^{(2)}_{1,\bar{1}} = K^{(1)}_{1,\bar{2}} + D^{(2)}_{1,\bar{1}}(x,y)\, D^{(2)}_{1,\bar{1}}(s,t)$

Entonces $K^{(2)}_{1,\bar{1}}$ toma los valores

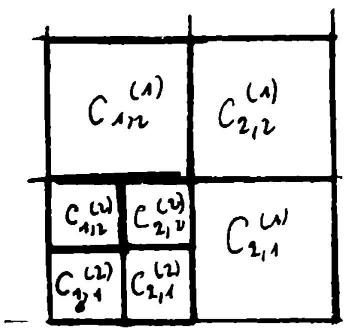
$$K^{(2)}_{1,1} = \begin{cases} 4^2 \text{ en } C^{(2)}_{1,1}.C'^{(2)}_{1,1},\ C^{(2)}.C \\ -\dfrac{4^2}{3} \text{ en } C^{(2)}_{2,\bar{1}}.C^{(2)}_{2,\bar{1}},\ C^{(2)}_{2,\bar{1}}.C'^{(2)}_{1,\bar{2}} \\ \qquad C^{(2)}_{2,1}.C'^{(2)}_{2,2},\ C^{(2)}_{1,2}.C'^{(2)}_{2,1} \\ \qquad C^{(2)}_{1,\bar{2}}.C'^{(2)}_{1,\bar{2}},\ C^{(2)}_{1,2}.C'^{(2)}_{2,\bar{2}} \\ \qquad C^{(2)}_{2,2}.C'^{(2)}_{2,\bar{1}},\ C^{(2)}_{2,2}.C'^{(2)}_{1,\bar{2}} \\ \qquad C^{(2)}_{2,\bar{2}}.C'^{(2)}_{2,\bar{2}} \end{cases}$$

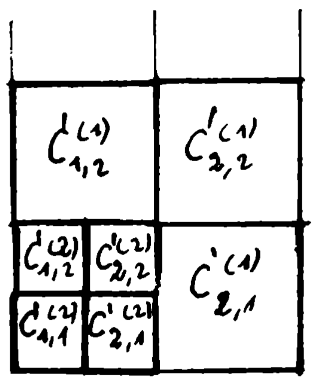
0 en el resto de $C^{(1)}_{1,1} \cdot C'^{(1)}_{1,1}$

4 en los hipercubos de primer orden de la forma $C^{(1)}_{r,s} \cdot C'^{(1)}_{r,s}$ distintos al considerado.

0 en el resto de $C^{(0)} \cdot C'^{(0)}$

Es decir, dividimos el cuadrado $C^{(1)}_{1,1}$ en 4 partes iguales, y haciendo lo mismo con $C'^{(1)}_{1,1}$ definimos la función $K^{(2)}_{1,1}$ igual a 4^2 en el hipercubo de segundo orden producto del primer cuadrado parcial de $C^{(1)}_{1,1}$ por el primer cuadrado parcial de $C'^{(1)}_{1,1}$. En los hipercubos de segundo orden producto de los cuadrados parciales restantes de $C^{(1)}_{1,1}$ por los cuadrados parciales restantes de $C'^{(1)}_{1,1}$ $K^{(2)}_{1,1}$ vale $\frac{4^2}{3}$; vale como la última función de orden primero en el resto de $C^{(0)} \cdot C'^{(0)}$



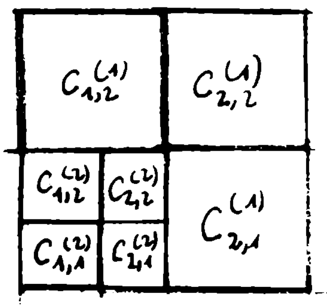


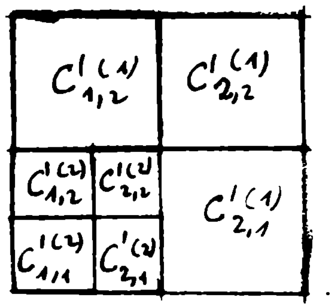
La segunda función de segundo orden está dada por

$$K^{(2)}_{2,1} = K^{(2)}_{1,1} + D^{(2)}_{2,1}(x,y)\; D^{(2)}_{2,1}(s,t)$$

y se comprueba que ella vale 4^2 en los hipercubos de segundo orden producto del primero y segundo cuadrado parciales de $C^{(1)}_{1,1}$ respectivamente por el primero y segundo cuadrado parcial de $C'^{(1)}_{1,1}$, vale 2.4 en los hipercubos parciales productos de los restante cuadrados parciales de $C^{(1)}_{1,1}$ por los restantes cuadrados parciales de $C'^{(1)}_{1,1}$. En el resto de $C^{(1)}_{1,1} . C'^{(1)}_{1,1}$ la función K definida vale 0.

En los restantes hipercubos de primer orden ~~Vale~~ como $K^{(1)}_{1,2}$



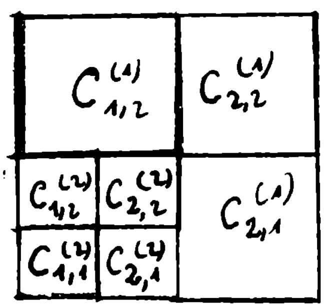


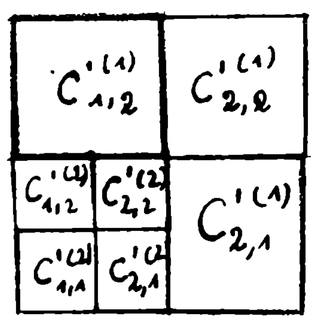
Calculemos $K^{(2)}_{1,2} = K^{(2)}_{2,1} + D^{(2)}_{2,1}(x,y) . D^{(2)}_{2,1}(s,t)$

Se obtendrá entonces que $K^{(2)}_{1,2}$ es igual a 4^2 en los hipercubos producto de cada cuadrado parcial de $C^{(1)}_{1,1}$

por el cuadrado parcial del mismo subíndice de $C'^{(1)}_{1,1}$

En el resto de $C^{(1)}_{1,1} . C'^{(1)}_{1,1}$ la función $K^{(2)}_{1,2}$ es nula, y toma el mismo valor que $K^{(1)}_{1,2}$ en el resto de $C^{(0)} . C'^{(0)}$





Por la definición de las $D^{(n)}_{i,j}$ el núcleo K siguiente

es decir el $K^{(2)}_{3,1}(x,y,s,t)$ no adoptará nuevos vale res en $C^{(1)}_{1,1}$ $C'^{(1)}_{1,1}$, ni tampoco en los $C^{(1)}_{i,j}$ $C'^{(1)}_{i,j}$ siguientes al considerado.

Podemos decir entonces: Para hallar el valor de una función $K^{(2)}_{i,j} = (x,y,s,t)$ dividimos a $C^{(0)}$ y a $C'^{(0)}$ en 4^2 partes iguales. Llamando $\left[\frac{i-1}{2}\right] = l$, $\left[\frac{j-1}{2}\right] = k$, obtenemos que $K^{(2)}_{i,j}$ está definida en el hipercubo

$C^{(1)}_{l+1,k+1} \cdot C'^{(1)}_{l+1,k+1}$ como distinta de la K anteriores.

En los hipercubos $C^{(2)}_{g,h} \cdot C'^{(2)}_{g,h}$ contenidos en el de primer orden $C^{(1)}_{l,k} \cdot C'^{(1)}_{l,k}$ ó los del mismo orden que le preceden, la función $K^{(2)}_{i,j} = 4^2$;

vale cero en los demás hipercubos de segundo orden contenidos en el de primer orden $C^{(1)}_{l,k} \cdot C'^{(1)}_{l,k}$ • en los que le preceden.

En los hipercubos de primer orden que siguen al considerado, entonces de la forma $C^{(1)}_{l+s,k+s} \cdot C'^{(1)}_{l+s,k+s}$,

$s > 1$, $K^{(2)}_{i,j} = K^{(1)}_{l+s,k+s}$

Nos falta todavía ver el comportamiento de la función en el hipercubo $C^{(1)}_{l+1,k+1} \cdot C'^{(1)}_{l+1,k+1}$

Como $i = 2l+p+1$, $j = 2k+q+1$, con $p,q = 0$ ó 1,

si $p = q = 0$

$K^{(2)}_{i,j} = 4^2$ en $C^{(2)}_{2l+1,2k+1} \cdot C'^{(2)}_{2l+1,2k+1}$

$K^{(2)}_{i,j} = -\frac{4^2}{3}$ en el producto de los cuadrados de segundo orden restantes de $C_{l+1,k+1}$ por los cuadradel primer cuadrado parcial de orden n contenido en el cuadrado de orden n-1 de $C^{(0)}$ en el que está definida $D^{(n)}_{i,j}(x,y)$, por el primer cuadrado parcial de orden n contenido en el cuadrado de orden n-1 de $C'^{(0)}$ donde está definida $D^{(n)}_{i,j}(s,t)$

$K^{(n)}_{i,j} = \frac{4^n}{3}$ en el producto de los restantes cuadrados de orden n del cuadrado de orden n-1 donde está definida $D^{(n)}_{i,j}(x,y)$ por los restantes cuadrados de orden n del cuadrado de orden n-1 donde está definida $D^{(n)}_{i,j}(s,t)$

$K^{(n)}_{i,j} = 0$ en el resto del producto de tales cuadrados de orden n-1.

$K^{(n)}_{i,j} = K^{(n)}_{21,21}$ en los hipercubos de orden n-1 productos de los cuadrados de orden n-1 que preceden al $C^{(n-1)}_{1+1,k+1}$ por los cuadrados de orden n-1 ,por los cuadrados de orden n-1, de los mismos subíndices, que preceden al $C'^{(n-1)}_{-1\ 1,k\ 1}$

$K^{(n)}_{i,j} = K^{(n-1)}_{2^n,2^n}$ en todo hipercubo de orden n-1 de la forma $C^{(n-1)}_{1+s,k\ s} \cdot C'^{(n-1)}_{1+s\ ,k+s}$

b) Si en cambio, es $p = 1, q = 0$

$K^{(n)}_{i,j}$ vale 4^n en los hipercubos producto del primero y segundo cuadrado parcial de orden n del cuadrado de orden n-1 en el que se define $D^{(n)}_{i,j}(x,y)$, respectivamente por el primero y segundo cuadrado parcial de orden n del cuadrado de orden n-1 donde se define $D^{(n)}_{i,j}$

En los hipercubos producto del resto del tal cuadrado de orden n-1 de $C^{(0)}$, por el resto de su correspondiente en $C'^{(0)}$ la función $K^{(n)}_{i,j}$ vale 2.4^{n-1}

Es nula en el resto del hipercubo producto de cuadrado de orden n-1 donde se define $D^{(n)}_{i,j}$ por el cuadrado de orden n-1 donde se define $D^{(n)}_{i,j}(s,t)$

$K^{(n)}_{i,j} = K^{(n)}_{2l,2k}$ en los hipercubos de orden n-1 productos de aquellos cuadrados de orden n-1 que preceden al $C^{(n-1)}_{l+1,k+1}$ por aquellos cuadrados de orden n-1 que preceden al $C'^{(n-1)}_{l+1,k+1}$

$K^{(n)}_{i,j} = K^{(n-1)}_{2^{n-1},2^{n-1}}$ en todo hipercubo de orden n-1 de la forma $C^{(n-1)}_{l+s,k+s}$, $C'^{(n-1)}_{l+s,k+s}$

e) Si, en cambio, $p=0$, $q=1$

$K^{(n)}_{i,j} = 4^n$ en los hipercubos productos del primero, segundo, tercero y cuarto cuadrado de orden n del cuadrado de orden n-1 en el que se define $D^{(n)}_{i,j}(\ ,y)$, respectivamente por el primero, segundo, tercero y cuarto cuadrado de orden n del cuadrado de orden n-1 donde está definida $D^{(n)}_{i,j}(s,t)$

En el resto del cuadrado de orden n-1 considerado, de $C^{(0)}$, por el resto del cuadrado de orden n-1 correspondiente, de $C'^{(0)}$, la función $K^{(n)}_{i,j}$ es idénticamente nula.

$K^{(n)}_{i,j} = K^{(n)}_{2l,2k}$ en los productos de los cuadrados de de orden n-1 que preceden al $C^{(n-1)}_{l+1,k+1}$ por los cuadrados delos mismos subíndices que preceden al $C'^{(n-1)}_{1+1,K+1}$

$K^{(n)}_{i,j} = K^{(n-1)}_{\frac{n-1}{2},2}$ n-1 en los hipercubos de orden n-1 $C^{(n-1)}_{1+s,k+s}$, $C^{(n-1)}_{1+s,k+s}$ que siguen al hipercubo considerado.

En los puntos donde $K^{(n)}_{i,j}$ experimenta un salto le atribuímos como valor la media aritmética de los valores que ella toma en los hipercubos que concurren a tal punto.

Para demos trar tal ley por inducción la supondremos cierta para las funciones K de orden n-1

Para cada par i,j de números naturales $i,j=1,2,..2^n$ hallamos $\left[\frac{i-1}{2}\right]=1$, $\left[\frac{j-1}{2}\right]=k$, de donde $i=21+p+1$, $j=2k+q+1$, con p,q = 0 ó 1

Si p, q = 0 $D^{(n)}_{i,j}$ toma en su dominio los mismos valores que $D^{(n)}_{1,1}$ en el primer cuadrado de orden n-1

Si p=1, q=0 $D^{(n)}_{i,j}$ toma en su dominio los mismos valores que $D^{(n)}_{2,1}$ en el primer cuadrado de orden n-1.

Si p=0, q=1 $D^{(n)}_{i,j}$ toma en su dominio los mismos valores que $D^{(n)}_{1,2}$ en el primer cuadrado de orden n-1.

Fuera de sus dominios de definición las $D^{(n)}_{i,j}$ son idénticamente nulas.

Luego los valores que adoptan las K correspondientes serán, en el dominio de las $D^{n}_{i,j}$, los valores de de $K^{(n)}_{1,1}$, $K^{(n)}_{2,1}$, $K^{(n)}_{1,2}$ en el primer hipercubo de orden n-1, y en los hipercubos de orden n-1 siguientes al considerado, los valores de $K^{(n-1)}_{2}\;{}^{n-1}_{,2}\;n-1$

Dividamos al cuadrado $C^{(n-1)}_{1,1}$ en 4 partes iguales y hagamos lo mismo con el $C'^{(n-1)}_{1,1}$

Si definimos

$$K^{(n)}_{1,1} = K^{(n-1)}_{1,1} + D^{(n)}_{1,1}(x,y)\cdot D^{(n)}_{1,1}(z,t)$$

obtenemos para $K^{(n)}_{1,1}$ la siguiente relación:

Vale 4^n en el hipercubo producto del primer cuadrado parcial de orden n de $C^{(n-1)}_{1,1}$ por el primer cuadrado parcial de orden n de $C'^{(n-1)}_{1,1}$

Vale $\frac{4^n}{3}$ en los hipercubos parciales de orden n producto del resto de $C^{(n-1)}_{1,1}$ por el resto de $C'^{(n-1)}_{1,1}$. En el resto de $C^{(n-1)}_{1,1}$. $C'^{(n-1)}_{1,1}$ $K^{(n)}_{1,1}$ es idénticamente nula, comportándose como $K^{(n-1)}_{2}\;{}^{n-1}_{,2}$ en el resto de $C^{(0)}$. $C'^{(0)}$

Si $p=1, q=0$ entonces el núcleo definido es

$$K^{(n)}_{2,1} = K^{(n)}_{1,1} + D^{(n)}_{2,1}(x,y)D^{(n)}_{2,1}(z,t)$$

y se obtienen los valores

$K^{(n)}_{i,j} = 4^n$ en el producto de cada uno de los dos primeros cuadrados de orden n de $C^{(0)}$ por los correspondientes cuadrados de orden n de $C'^{(0)}$

Vale 2.4^{n-1} en el resto del primer cuadrado de orden n-1 de $C^{(0)}$ por el resto del primer cuadrado de orden n-1 de $C'^{(0)}$.

En el resto de $C^{(n-1)}_{1,1} \cdot C'^{(n-1)}_{1,1}$ la función $K^{(n)}_{2,1}$ es idénticamente nula.

Vale lo mismo que $K^{(n-1)}_{2^{n-1},2}$ en el resto de $C^{(0)} \cdot C'^{(0)}$.

Si, en cambio, $p=0, q=1$

$K^{(n)}_{1,2} = 4^n$ en los hipercubos producto del primero, segundo, tercero o cuarto cuadrado parcial de orden n de $C^{(n-1)}_{1,1}$ por, respectivamente, el primero, segundo, tercero o cuarto intervalo parcial de orden n de $C'^{(n-1)}_{1,1}$

En el resto de $C^{(n-1)}_{1,1} \cdot C'^{(n-1)}_{1,1}$ $K^{(n)}_{1,2}$ es idénticamente nula y adopta los mismos valores que $K^{(n-1)}_{2^{n-1},2^{n-1}}$ en el resto de $C^{(0)} \cdot C'^{(0)}_{0}$.

Ello resulta de inmediato al poner

$$K^{(n)}_{1,2} = K^{(n)}_{2,1} + D^{(n)}_{1,2}(x,y) \cdot D^{(n)}_{1,2}(s,t)$$

En los puntos donde la función K experimenta un salto le atribuímos como valor la media aritmética de los valores que adopta en los hipercubos que concurren a tal punto.

Notemos además, que al pasar del primero al segundo cuadrado de orden n-1 la función $K^{(n)}_{i,j}$ toma el valor de la función $K^{(n)}_{1,2}$ en todo el hipercubo $C^{(n-1)}_{1,1} \cdot C'^{(n-1)}_{1,1}$

7.-CONVERGENCIA DE LAS SUMAS $\left[f(x,y)\right]^{(n)}_{i,j}$

Designemos ahora con f(x,y) una función arbitraria, doblemente integrable en el sentido de Lebesgue, defi nida en $C^{(0)}$, y sea $x=a$, $y=b$ un punto de $C^{(0)}$.

Pongamos $\left[f(a,b)\right]^{(n)}_{i,j} = \int_0^1\int_0^1 K^{(n)}_{i,j}(a,b,s,t)f(s,t)\,ds\,dt$

Admitamos, por ahora que ni a ni b sean fracciones diádicas finitas de la forma $\frac{1}{2^{p_1}} + \ldots\ldots + \frac{1}{2^{p}}$

La función $K^{(n)}_{i,j}(x,y,s,t)$ es nula salvo en ciertos cuadrados Δ cuya área es $\frac{1}{4^n}$ ó $\frac{1}{4^{n-1}} = S^{(n)}_{i,j}$

En cada uno de ellos es $K^{(n)}_{i,j} = \frac{1}{S^{(n)}_{i,j}}$ y obtenemos

por ello $\left[f(a,b)\right]^{(n)}_{i,j} = \frac{1}{S^{(n)}_{i,j}}\int_0^1\int_0^1 f(s,t)\,ds\,dt$

Si, por el contrario, a y b son fracciones diádicas finitas, entonces $K^{(n)}_{i,j}$ es distinta de cero en ciertos intervalos cuya área $\bar{S}^{(n)}_{i,j}$ es $\frac{1}{4^{n-1}}$ ó $\frac{1}{4^{n}}$

En ese intervalo $K^{(n)}_{i,j} = \frac{1}{\bar{S}^{(n)}_{i,j}}$ y obtenemos también

$$\left[f(a,b)\right]^{(n)}_{i,j} = \frac{1}{\bar{S}^{(n)}_{i,j}}\iint_{\Delta^{(n)}_{i,j}} f(s,t)\,ds\,dt$$

En ambos casos el área del recinto de integración que contiene a (a,b) es igual al valor recíproco del factor colocado delante de la integral.

Ahora convergen a cero, para n crecientes, $S^{(n)}_{i,j}$ y $\bar{S}^{(n)}_{i,j}$, y por ello convergen las sumas parciales

$$\left[f(a,b)\right]^{(n)}_{i,j} \text{ a } \lim_{n\to\infty} \frac{1}{S^{(n)}_{i,j}}\iint_{\Delta^{(n)}_{i,j}} f(s,t)\,ds\,dt$$

$\frac{0}{2^6}$ $\frac{1}{2^7}$ .....la sucesión (25) es sumable a la suma 2/3. Evidentemente la sucesión $s_n^{(k)}(x)$ para x a y donde consideramos todos los valores de n y k, es sumable al valor 2/3.

El comportamiento general de $s_n^{(k)}(x)$ para f(x) donde no haremos la restricción k 2^{n-1} es obtenido totalmente con la misma facilidad que el comportamiento para K 2^{n-1} y la relación

$$s_n^{(i)}(x) \int_0^1 f(y)\, s_n^{(i)}(y)\,dy \qquad s_n^{(k)}(x) \int_0^1 f(y)\, s_n^{(k)}(y)\,dy.$$

vale para todos los valores de i, k, n.

En efecto, ocurre un fenómeno muy análogo al fenómeno de Gibbs para series de Fourier. Para el conjunto las funciones aproximantes están uniformemente acotadas al pico de las funciones aproximantes $s_n^{(k)}(x)$ desaparece enteramente para k 2^{n-1}, pero reaparece (un... [illegible] alterado en altura) para más grandes valores de n, así claro que los hechos concernientes a las curvas aproximantes a f(x) valen sin modificación esencial para una función a variación acotada en una simple discontinuidad finita, y que el hecho para la sumación de la sucesión aproximante vale sin modificación esencial para una función continua excepto en una discontinuidad simple finita.

[illegible] UNICIDAD [illegible]

Ahora estudiaremos la posibilidad de una serie de la forma $a_0\,\varphi_0(x)$ $a_1\,\varphi_1(x)$ .... $a_n\,\varphi_n(x)$ ...(27)

De la circunstancia de que las funciones $K_{i,j}^{(m)}$ son siempre positivas deducimos la siguiente ley:

Si se mantiene la función $f(x,y)$, doblemente integrable en el sentido de Lebesgue, entre los límites $m \leq f(x,y) \leq M$ en $C^{(0)}$, entonces las sumas parciales $\left[f(x,y)\right]_{i,j}^{(m)}$ se mantienen acotadas entre los mismos límites

$$m \leq \left[f(x,y)\right]_{i,j}^{(m)} \leq M$$

En efecto, $\left[f(x,y)\right]_{i,j}^{(m)} \leq M \int_0^1 \int_0^1 K_{i,j}^{(m)} \, ds\,dt = M$

Del mismo modo se demuestra para la otra cota.

Sea ahora un punto (a,b) cualquiera de $C^{(0)}$.

Como para m suficientemente grande se anulan seguramente las funciones $K_{i,j}^{(m)}(x,y,s,t)$ cuando

es $0 \leq x < a-\varepsilon$ $\quad a+\varepsilon \leq x \leq 1$

$0 \leq y < b-\varepsilon$ $\quad b+\varepsilon \leq y \leq 1$

ó $0 \leq x < a-\varepsilon$ $\quad a+\varepsilon \leq x \leq 1$

$b+\varepsilon \leq y \leq 1$ $\quad 0 \leq y < b-\varepsilon$

con ε arbitrariamente pequeño, entonces, cuando $m = 0$, siendo $N = N(\varepsilon)$ es $\left[f(a,b)\right]_{i,j}^{(n)} = \int_{a-\varepsilon}^{a} \int_{b-\varepsilon}^{b} K_{i,j}^{(n)}(a,b,s,t)\,ds\,dt$

Como aquí sólo es tenido en cuenta el comportamiento de la función en un entorno de (a,b) de radio ε, deducimos: La convergencia de una serie de Fourier de una función continua en el punto (a,b) sólo depende del comportamiento de la función en un entorno de ese punto.

Si dos funciones $f(x,y)$ y $g(x,y)$ coinciden en un entorno es posible entonces determinar un índice N tal que si $m > N$ toda $\left[f(x,y)\right]_{i,j}^{(n)}$ y $\left[g(x,y)\right]_{i,j}^{(m)}$ coinciden totalmente en tal entorno.

Combinando tal resultado con la ley principal del parágrafo anterior obtenemos: La serie de Fourier, respecto luego

de nuestro sistema $D^{(n)}_{i,j}$ de una función converge en todo punto de continuidad de la misma al valor de la función

9.- GENERALIZACION DE UNA LEY DE SCHAUDER

Si $f(x,y)$ es una función definida en $C^{(0)}$, doblemente integrable en el sentido de Lebesgue, con α-ésima potencia integrable, $\alpha \geq 1$, entonces se verifica

$$(1)\quad \lim_{n\to\infty} \int_0^1\int_0^1 \left| f(x,y) - \sum_{i,j=1}^{n} c_{i,j}^{(n)} D_{i,j}^{(n)}(x,y)\right|^{\alpha} dxdy = 0$$

siendo
$$c_{i,j}^{(n)} = \int_0^1\int_0^1 f(x,y) D_{i,j}^{(n)}(x,y)\,dxdy$$

Comprobación:

Pongamos $s_{i,j}^{(n)} f = s_{i,j}^{(n)}$ en lugar de $\sum_{i,j}^{n} c_{i,j}^{(n)} D_{i,j}^{(n)}$ y expresemos las variables independientes con x,y.

Hemos mostrado que dividiendo $C^{(0)}$ en n partes iguales $C_{i,j}^{(n)}$ así que $s_{i,j}^{(n)} f$ es constante en el interior de cada cuadrado $C_{i,j}^{(n)}$. Resulta entonces

$$s_{i,j}^{(n)} f = \frac{1}{S_{i,j}^{(n)}} \int_{a_i}^{a_i+1}\int_{b_j}^{b_j+1} f(x,y)\,dxdy \qquad (2)$$

ó también
$$s_{i,j}^{(n)} = \frac{\int_{a_i}^{a_i+1}\int_{b_j}^{b_j+1} f(x,y)\,dxdy}{(a_{i+1}-a_i)(b_{j+1}-b_j)} \qquad (3)$$

Entonces
$$\int_0^1\int_0^1 \left|S_{i,j}^{(n)}\right|^{\alpha} dxdy = \sum_{i,j=0}^{n-1} \int_{a_i}^{a_{i+1}}\int_{b_j}^{b_{j+1}} \left|s_{i,j}^{(n)}\right|^{\alpha} dxdy$$

n-1 a 1 b 1

$$\sum_{i,j=0}^{n-1} \left|(a_{i+1}-a_i)(b_{j+1}-b_j)\right| \left| \frac{\int_{a_i}^{a_{i+1}}\int_{b_j}^{b_{j+1}} f(x,y)\,dxdy}{(a_{i+1}-a_i)(b_{j+1}-b_j)} \right|^{\alpha}$$

Utilizando la desigualdad de César Helder para integrales obtenemos

$$\left|\int_{a_i}^{a_{i+1}}\int_{b_j}^{b_{j+1}} f(x,y)\,dxdy\right|^{\alpha} \leq \left|a_{i+1}-a_i\right|^{\alpha-1}\int_{a_i}^{a_{i+1}}\left|\int_{b_j}^{b_{j+1}} f(x,y)\,dy\right|^{\alpha} dx \leq$$

$$\left|a_{i+1}-a_i\right|^{\alpha-1}\left|b_{j+1}-b_j\right|^{\alpha-1}\int_{a_i}^{a_{i+1}}\int_{b_j}^{b_{j+1}}\left|f(x,y)\right|^{\alpha} dxdy$$

Entonces

$$\sum_{i,j=0}^{n-1} \left| \frac{\int_{a_i}^{a_{i+1}}\int_{b_j}^{b_{j+1}} f(x,y)\,dxdy}{(a_{i+1}-a_i)(b_{j+1}-b_j)} \right|^{\alpha} \leq$$

$$= \sum_{i,j=0}^{n-1} \frac{1}{\left|(a_{i+1}-a_i)(b_{j+1}-b_j)\right|^{\alpha}} \left|\int_{a_i}^{a_{i+1}}\int_{b_j}^{b_{j+1}}\left|f(x,y)\right|^{\alpha} dxdy\right| \leq$$

$$\sum_{i,j=0}^{n-1} \frac{\left|(a_{i+1}-a_i)(b_{j+1}-b_j)\right|^{\alpha-1}}{(a_{i+1}-a_i)(b_{j+1}-b_j)} \int_{a_i}^{a_{i+1}}\int_{b_j}^{b_{j+1}}\left|f(x,y)\right|^{\alpha} dxdy$$

Entonces $\int_0^1\int_0^1 \left|S^{(n)}_{i,j}\right|^{\alpha} \leq \int_0^1\int_0^1 \left|f(x,y)\right|^{\alpha} dxdy$

de donde $\int_0^1\int_0^1 \left| S^{(n)}_{i,j} - f(x,y)\right|^{\alpha} dxdy = 0$

y la ley a comprobar es exacta en el caso que $f(x,y)$ sea acotada, en cuyo caso se obtiene no sólo que

$$\lim_{n} \int_0^1\int_0^1 \left| S_{i,j}^{(n)} - f(x,y) \right| dxdy = 0 \quad ó \quad \lim_{n} S_{i,j}^{(n)}(f) = f$$

en todo $C^{(0)}$, sino también, como se induce de (3)

$$\text{Máx} \left| S_{i,j}^{(n)}(f) \right| \leq \text{máx} |f| = \text{constante } C^{(n)} \quad (n = 1,2..)$$

(2) y según (1) $\lim |s_n - f| = 0$ en casi todo punto de $C^{(0)}$ (1)

$\overline{2}$ $\text{Máx} |s_n - f| \leq$ (20) , donde C no depende de n, de x ni de y. De (1), permutando límite e integración se obtiene la ley deseada.

Pasemos ahora al caso general, entonces para cada número positivo existen un par de funciones $f_1(x,y)$ y $f_2(x,y)$ tales que $f(x,y) = f_1(x,y) + f_2(x,y)$

con $\int_0^1\int_0^1 |f(x,y)| dxdy$. Entonces $f_1(x,y)$ es acotada en C

De $\int_0^1\int_0^1 \left| S_{i,j}^{(n)} \right| dxdy \leq \int_0^1\int_0^1 |f| dxdy$

obtenemos, para f_2, $\int_0^1\int_0^1 \left| S_{i,j}^{(n)} \right| dxdy \leq \int_0^1\int_0^1 |f| dxdy$

Apliquemos la desigualdad de Minkowski para integrales.

Pongamos

$$\int_0^1\int_0^1 \left| f - S_{i,j}^{(n)} \right| dxdy \leq \int_0^1\int_0^1 \left| f_1 - S_{i,j}^{(n)}(f_1) \right|$$

$$(f_2 - S_{i,j}^{(n)}(f_2))dxdy \leq \int_0^1\int_0^1 \left| f_1 - S_{i,j}^{(n)}(f_1) \right| dxdy$$

$$+ \int_0^1\int_0^1 \left| f_2 - S_{i,j}^{(n)}(f_2) \right| dxdy$$

$$\leq \left[\int_0^1\int_0^1 \left|f_1 - S_{i,j}^{(n)}(f_1)\right|^{\alpha} dxdy\right]^{\frac{1}{\alpha}} + \left[\int_0^1\int_0^1 \left|f_2\right|^{\alpha} dxdy\right]^{\frac{1}{\alpha}} + \left[\int_0^1\int_0^1 \left|S_{i,j}^{(n)}(f_2)\right|^{\alpha} dxdy\right]^{\frac{1}{\alpha}}$$

Luego

$$\left[\int_0^1\int_0^1 \left|f - S_{i,j}^{(n)}(f)\right|^{\alpha} dxdy\right]^{\frac{1}{\alpha}} \leq \left[\int_0^1\int_0^1 \left|f_1 - S_{i,j}^{(n)}(f_1)\right|^{\alpha} dxdy\right]^{\frac{1}{\alpha}} +$$

$$\varepsilon^{\frac{1}{\alpha}} + \varepsilon^{\frac{1}{\alpha}} = \left[\int_0^1\int_0^1 \left|f_1 - S_{i,j}^{(n)}(f_1)\right|^{\alpha} dxdy\right]^{\frac{1}{\alpha}} + 2\varepsilon^{\frac{1}{\alpha}}$$

Pero f_1 era acotada, entonces

$$\lim_{n \to \infty} \int_0^1\int_0^1 \left|f_1 - S_{i,j}^{(n)}(f_1)\right|^{\alpha} dxdy = 0$$

Entonces

$$\lim_{n \to \infty} \int_0^1\int_0^1 \left|f - S^{(n)}(f)\right|^{\alpha} dxdy < 2\varepsilon^{\frac{1}{\alpha}}$$

y como ε era arbitrario, la ley queda probada