Teorema de equiconvergencia para las derivadas de un orden entero cualquiera, de series e integrales de Fourier y de sus conjugadas

Herrera, Félix Eduardo

1947

Tesis presentada para obtener el grado de Doctor en Ciencias Matemáticas de la Universidad de Buenos Aires

Tesis presentada por el Sr. Félix Eduardo Herrera
para optar el título de Doctor en Matemáticas.

El presente trabajo que someto a consideración del Tribunal como Tesis Final, consta de tres partes.

En la primera parte se establece un teorema de equiconvergencia para las derivadas de un orden entero cualquiera, de series e integrales de Fourier y de sus conjugadas.

En la segunda se demuestra para integrales trigonométricas, el análogo de un teorema de Plessner para series trigonométricas.

Finalmente, en la muy breve parte tercera, se mencionan algunas posibles aplicaciones de los resultados precedentes.

Introducción

El capítulo de la representación de funciones por medio de series e integrales funcionales, constituye en el Análisis Moderno, uno de los más interesantes y al mismo tiempo uno de los que mayor significación han adquirido al presente. Dentro de tal capítulo, se destaca en particular por su importancia la representación de funciones por medio de series e integrales de Fourier, importancia justificada tanto desde el punto de vista histórico, como desde el punto de vista de las aplicaciones que ella ofrece a las ciencias que utilizan a las Matemáticas, no ya como una finalidad en ella misma, sino como un instrumento de estudio de sus problemas específicos.

Ahora bien, en el caso especial de la representación de funciones por medio de integrales de Fourier, su estudio puede hacerse, o bien presuponiendo una ignorancia casi completa de la teoría de las series de Fourier, o bien, para quien conozca esta última, mediante un principio de economía, a saber: intentando reducir, en cuanto sea posible, el problema sobre integrales de Fourier que se considere, al análogo problema ya resuelto sobre series de Fourier.

El primer punto de vista es el que adopta por ejemplo Titchmarsh en su obra Introduction to the Theory of Fourier Integrals, donde se plantean, casi con independencia de todo conocimiento sobre series de Fourier, los problemas de convergencia, sumabilidad, etc., de integrales de Fourier.

En el segundo punto de vista, se supone en cambio que el lector está ya familiarizado con la teoría de las series de Fourier y entonces, probado un teorema de equiconvergencia que mencionaremos oportunamente, se trasladan en forma automática, todos los teoremas clásicos de convergencia simple y aún de sumabilidad a integrales de Fourier. Es éste por ejemplo el camino que en forma muy concisa sigue Zygmund en el capítulo final de su conocido libro Trigonometrical Series.

Este segundo método tiene la ventaja que cualquier nuevo resultado que se establezca sobre la convergencia de series de Fourier, resulta, bajo las condiciones precisas del teorema de equiconvergencia aludido, válido también para integrales de Fourier y recíprocamente, circunstancia esta última que tiene su importancia, pues eventualmente podrían probarse resultados sobre series de Fourier, demostrando previamente los resultados correlativos sobre integrales de Fourier, si el caso ocurriera que por la índole especial del problema, el manejo y cálculo de un integral resultase más fácil que el de la análoga serie.

Pero las ventajas de este segundo método no se limitan a la mera parte expositiva, pues además él induce de una manera natural nuevos problemas, por ejemplo el siguiente: ¿es posible reducir, mediante un apropiado teorema de equiconvergencia, la teoría de la derivación de integrales de Fourier y de sus conjugadas, respectivamente a la teoría de la derivación de series de Fourier y de sus conjugadas?

Un tal problema le ha sido propuesto al autor por el profesor Zygmund, y la solución del mismo, en las condiciones que se especificarán más adelante constituye la primera parte del presente trabajo.

Antes de entrar al desarrollo de este último, convendrá dar en esta introducción algunas nociones previas, que aunque conocidas, facilitarán la exposición del tema evitando digresiones aclaratorias. Tales nociones son las siguientes:

a) Dos sucesiones $\{u_n\}$ y $\{v_n\}$ se dicen equiconvergentes en sentido estricto o simplemente equiconvergentes, si la sucesión $\{u_n - v_n\}$ tiende a cero para $n \to \infty$.-

Si $\{u_n - v_n\}$ converge pero no necesariamente a cero, las sucesiones se dicen equiconvergentes en sentido amplio.-

b) Sea $\varphi(x)$ una función definida para $x \geq 0$ e integrable sobre cualquier intervalo finito $(0,a)$. Escribamos $\Phi_0(x) = \varphi(x)$ e indiquemos con $\Phi_k(x)$, $K=1,2,\ldots$ la integral de $\Phi_{k-1}(x)$ sobre $0 \leq t \leq x$. Diremos que s es el límite (C,k) de $\varphi(x)$ cuando $x \to \infty$, si $\frac{\Phi_k \, k!}{x^k} \to s$, es decir si

$$(1) \quad \frac{k}{x^k} \int_0^x (x-t)^{k-1} \varphi(t)\,dt \to s \qquad \text{para} \quad x \to \infty$$

Más generalmente, dado un cierto $k > 0$, entero o nó, adoptaremos (1) como definición del límite (C,k) de $\varphi(x)$ para $x \to \infty$.

c) Dada una integral $\int_0^\infty f(t)\,dt$, diremos que es sumable (C,K) hacia el valor s, si se satisface (1) con $\varphi(x) = \int_0^x f(t)\,dt$, es decir si

$$\frac{1}{x^k} \int_0^x (x-t)^k f(t)\,dt \to s \qquad \text{cuando} \quad x \to \infty \,.$$

d) Dada una serie arbitraria $(U): u_0 + u_1 + \cdots$, sea $U_n = u_0 + \cdots + u_n$ y $U(x) = U_n$ para $n \leq x < n+1$, $n = 0,1,\ldots\ldots$ Si para $x \to \infty$, el límite (C,α) de $U(x)$ existe y es igual a s, se dice que la serie U es sumable por el método de M. Riesz de orden α o simplemente sumable por el método (R,α) hacia la suma s.-

e) Supongamos que dada una función f(x) definida en el entorno de un punto x_0, ella sea expresable para pequeños valores de $|t|$, en la forma:

$$f(x_0+t)=\alpha_0+\frac{1}{1!}\alpha_1 t+\frac{1}{2!}\alpha_2 t^2+\dots+\frac{1}{(n-1)!}\alpha_{n-1}t^{n-1}+\frac{1}{n!}(\alpha_n+\varepsilon_t)t^n$$

donde las α designan constantes y $\varepsilon_t=\varepsilon_{n,t}\to 0$ con t.

El número α_i, $1\leq i\leq r$, se denomina la i ésima derivada generalizada de f(x) en el punto x_0.

Análogamente sea $\varphi_{x_0}(t)=\frac{1}{2}\{f(x_0+t)+f(x_0-t)\}$ y $\psi_{x_0}(t)=\frac{1}{2}\{f(x_0+t)-f(x_0-t)\}$. Si $\varphi_{x_0}(t)$ ó $\psi_{x_0}(t)$ son expresables en la forma:

$$\varphi_{x_0}(t)=\beta_0+\frac{\beta_2}{2!}t^2+\dots+\frac{\beta_{2k-2}}{(2k-2)!}t^{2k-2}+(\beta_{2k}+\varepsilon_t)\frac{t^{2k}}{(2k)!}$$

$$\psi_{x_0}(t)=\beta_1 t+\frac{\beta_3}{3!}t^3+\dots+\frac{\beta_{2k-1}}{(2k-1)!}t^{2k-1}+(\beta_{2k+1}+\varepsilon_t)\frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

con β_i constante y $\varepsilon_t\to 0$ para $t\to 0$, β_i se denomina la i ésima derivada generalizada simétrica de f(x) en el punto x.

- BIBLIOGRAFIA -

Zygmund, A - ~~T~~rigonométrica~~l~~ series - Warszawa - Lwow, 1935.-

Titchmarsh, E.C.- Introduction to the Theory of Fourier Integrals, Oxford 1937.

Hobson, E.W.- On a general convergence theorem, Proceedings of the London Math Society, 6, 1908-349-395.-

Plessner, A.- Trigonometrischen Reihen en el "Repertorium der Höheren Analysis" de Pascal, Vol. I3, Leipzig und Berlin 1929.

Pi Calleja, P.-Über die konvergenzbedingungen der Komplexen Form des

Fourierschen Integralen, Math Zeits, 40, 1935-1936.

Sidon S.- Die Bestimmung des Sprunges der Funktin aus der Fourierreihe, Math. es Phys, Lapok, 27, 1918, pág. 309-311.-

Hardy and Littlewood - Solution of the Cesàro summability problem for power series and Fourier Series, Math Zeits, 19, 1923, 67-96.-

- EXPOSICION DEL TEMA -

I.- Dada cualquier función f (x) definida para $-\infty < x < \infty$, sea

$$(1) \qquad \int_0^\infty \{a(u)\cos ux + b(u)\,\mathrm{sen}\,ux\}\,du$$

la integral de Fourier de f (x), donde

$$(2) \qquad a(u) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos ut\,dt \;;\quad b(u) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\mathrm{sen}\,ut\,dt$$

son respectivamente las transformadas coseno y seno de f (x). Ellas existen como integrales absolutamente convergentes si $f \in L(-\infty, \infty)$ y en un cierto sentido generalizado, si $f \in L^p(-\infty, \infty)$ con $1 < p \leq 2$.

En todos estos casos, las integrales parciales de (1) están dadas por la fórmula

$$S_\omega(x,f) = \int_0^\omega \{a(u)\cos ux + b(u)\,\mathrm{sen}\,ux\}\,du$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x+t)\,\frac{\mathrm{sen}\,\omega t}{t}\,dt$$

pero esta última integral tiene sentido si

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|f(t)|}{1+|t|}\,dt < \infty$$

aún en el caso en que las transformadas (2) no existan.

Ahora bien, es sabido que el problema de la representación de f (x) como el límite de

$$S_\omega(x,f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x+t)\,\frac{\mathrm{sen}\,\omega t}{t}\,dt$$

para $\omega\to\infty$, puede ser reducido al problema de la representación de f(x) por medio de una serie de Fourier. Más precisamente, es conocido el siguiente teorema:

A)- Dada cualquier función f(x) que satisfaga a (3) y cualquier intervalo $I_a=(a, a+2\pi)$ de longitud 2π, sea $f_a(x)$ la función de período 2π que coincide con f(x) en I_a. Sea además

$$(4) \qquad \frac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n \operatorname{sen} nx)$$

la serie de Fourier de f(x) y

$$s_\omega(x,f_a)=\frac{1}{2}a_0+\sum_{n\leq\omega}(a_n\cos nx+b_n\operatorname{sen} nx) \quad ; \quad \omega\geq 0$$

una suma parcial cualquiera de (4). Entonces la diferencia

$$(5) \qquad \Delta_\omega(x)=\Delta_\omega(x,f,a)=S_\omega(x,f)-s_\omega(x,f_a)$$

tiende a cero en cadapunto x interior a I_a y la convergencia es uniforme en cada intervalo cerrado I_a' interior a I_a.(1)

Mediante este teorema,todo criterio de convergencia que sea válidp para series de Fourier es inmediatamente aplicable a integrales de Fourier. Además, puesto que la convergencia de (5) a cero, implica su sumabilidad (C,α) para $\alpha>0$, se obtiene de inmediato para la sumabilidad de integrales de Fourier, resultados análogos a aquéllos conocidos para series de Fourier.

Sea ahora

$$(6) \qquad \int_0^\infty\{a(u)\operatorname{sen} ux-b(u)\cos ux\}\,du$$

la integral conjugada de (I). Las integrales parciales de (6) pueden ser escritas en la forma

$$(6a) \qquad \tilde{S}_\omega(x,f)=-\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(x+t)\,\frac{1-\cos\omega t}{t}\,dt$$

si $f\in L^p(-\infty,\infty)$, $1\leq p\leq 2$, pero de nuevo el segundo miembro de esta igualdad tiene sentido con solo satisfacerse la condición (3).

El siguiente resultado complementa al A) :

B)- Sea

(1) Zygmund, Trigonometrical Series, pag. 306. Este libro será citado en lo sucesivo simplemente como T.S.

$$\tilde{s}_\omega(x,f_a) = \sum_{n\leq\omega} (a_n \operatorname{sen} nx - b_n \cos nx) \quad ; \ \omega \geq 1$$

Bajo las mismas condiciones de A), la diferencia

$$\tilde{\Delta}_\omega(x) = \tilde{\Delta}_\omega(x,f,a) = \tilde{S}_\omega(x,f) - \tilde{s}_\omega(x,f_a)$$

tiende a un límite, (no necesariamente cero), en cada punto x interior a I_a y la convergencia es uniforme en cada intervalo cerrado I'_a interior a I_a.[1]

En ciertos problemas de la teoría de las series trigonométricas, se debe considerar el comportamiento de series de Fourier derivadas término a término un número k de veces. Un resultado típico en este orden de ideas es por ejemplo, el expresado a continuación:

C)- Sea $f_{(k)}(x)$ la derivada generalizada de $f(x)$ de orden k. Si $f_{(k)}(x_0)$ existe, la serie de Fourier de $f(x)$, derivada término a término k veces, es en el punto x_0, sumable (C,α), $\alpha > k$, hacia el valor $f_{(k)}(x_0)$.[2]

Problemas similares existen para integrales de Fourier. Es el objeto de esta primera parte reducir la solución de problemas de este tipo al correspondiente problema sobre series de Fourier. Una tal reducción se hace posible mediante el siguiente teorema:

D) - Sea $f(x)$ una función que satisfaga a (3), $I_a = (a, a+2\pi)$ y $f_a(x)$ la función de período 2π que coincide con $f(x)$ en I_a. Sea además $S_\omega(x,f)$ la integral parcial (3a) y $s_\omega(x,f_a)$ la suma parcial genérica de la serie de Fourier de $f_a(x)$. Sea finalmente $k=1,2,3,\ldots$ Entonces la diferencia

$$\frac{d^k}{dx^k} S_\omega(x,f) - \frac{d^k}{dx^k} \tilde{s}_\omega(x,f_a)$$

es uniformemente sumable (C,k) hacia cero en cada intervalo cerrado I'_a interior a I_a.

Análogamente la diferencia

$$\frac{d^k}{dx^k} \tilde{S}_\omega(x,f) - \frac{d^k}{dx^k} \tilde{s}_\omega(x,f_a)$$

es uniformemente sumable (C,k), (no necesariamente hacia cero), en cada intervalo cerrado I'_a interior a I_a.

(1) Pi Calleja, P.– Über die Konvergenzbedingungen der Komplexen Form des Fourierschen Integralen, Math. Zeits., 40, 1935–1936

2) T.S. pag. 252

Este teorema completa los resultados A) y B) precedentes. Su demostración se basa en los tres siguientes lemas:

(i)- Sea g(t) una función integrable en $(-\pi,\pi)$ y de período 2π. Sea $r>1$ y $0<\delta<\pi$. Entonces la integral

$$\int_{|t|\geq\pi}\frac{g(t)}{(x-t)^2}\,dt$$

converge absoluta y uniformemente en cualquier intervalo $J_\delta=(-\pi+\delta,\pi-\delta)$. La demostración de este lema es inmediata pues suponiendo p.ej. $t\geq\pi$, tenemos

$$\int_{t\geq\pi}\frac{g(t)}{(x-t)^2}\,dt=\int_{\pi}^{\infty}\frac{g(t)}{(x-t)^2}\,dt=\sum_{k=1}^{\infty}\int_{(2k-1)\pi}^{(2k+1)\pi}\frac{g(t)}{(x-t)^2}\,dt=\sum_{k=1}^{\infty}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{g(t)}{(x-t-2k\pi)^2}\,dt$$

Pero siendo la serie $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(x-t-2k\pi)^2}$ tal que $(x\in J_\delta)$

$$\left|\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(x-t-2k\pi)^2}\right|\leq\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k\pi-|x-t|)^2}\leq\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{[\delta+2(k-1)\pi]^2}<M$$

con M designando una constante positiva, resulta

$$\left|\int_{|t|\geq\pi}\frac{g(t)}{(x-t)^2}\,dt\right|=\left|\sum_{k=1}^{\infty}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{g(t)}{(x-t-2k\pi)^2}\,dt\right|\leq\int_{-\pi}^{\pi}|g(t)|\,dt\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{|(x-t)-2k\pi|^2}\leq M\int_{-\pi}^{\pi}|g(t)|\,dt$$

con lo que el lema queda probado.

(ii)- Sea $0<\eta<\frac{1}{2}$. Bajo las mismas condiciones del lema (i), la integral

$$\int_{|t|\geq\pi}\frac{g(t)}{x-t}\,e^{i\omega(x-t)}\,dt=\left\{\int_{\pi}^{\infty}+\int_{-\infty}^{-\pi}\right\}\frac{g(t)}{x-t}\,e^{i\omega(x-t)}\,dt$$

$$=\lim_{T\to\infty}\left\{\int_{\pi}^{T}+\int_{-T}^{-\pi}\right\}\frac{g(t)}{x-t}\,e^{i\omega(x-t)}\,dt$$

converge:

a) uniformemente en J_δ para cualquier ω fijo;

b) uniformemente en el rectángulo $-\pi+\delta\leq x\leq\pi-\delta$, $\eta\leq\omega\leq 1-\eta$;

c) acotadamente en J_δ y cualquier intervalo de variación de ω .

Como es obvio, basta suponer que $T=(2n+1)\pi$. Bajo tal hipótesis tenemos

$$\left\{\int_{\pi}^{T}+\int_{-T}^{-\pi}\right\}\frac{g(t)}{x-t}\,e^{i\omega(x-t)}\,dt=\sum_{k=1}^{n}\int_{-\pi}^{\pi}g(t)\,e^{i\omega(x-t)}\left\{\frac{e^{2k\pi i\omega}}{2k\pi+(x-t)}-\frac{e^{-2k\pi i\omega}}{2k\pi-(x-t)}\right\}dt$$

Por inspección directa del segundo miembro de esta igualdad obtenemos a) en el caso especial en que ω= entero. Supongamos por lo tanto ω diferente

.e un número entero. La aplicación del procedimiento de sumación por partes nos da

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{e^{\pm 2k\pi i\omega}}{2k\pi\pm(x-t)}=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{\nu=1}^{k}e^{\pm 2\nu\pi i\omega}\left\{\frac{1}{2k\pi\pm(x-t)}-\frac{1}{2(k+1)\pi\pm(x-t)}\right\}$$

$$=\frac{2\pi e^{\pm 2\pi i\omega}}{1-e^{\pm 2\pi i\omega}}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1-e^{\pm 2k\pi i\omega}}{[2k\pi\pm(x-t)][2(k+1)\pi\pm(x-t)]}$$

y en consecuencia para el intervalo J_δ será

$$\left|\sum_{k=1}^{\infty}\frac{e^{\pm 2k\pi i\omega}}{2k\pi\pm(x-t)}\right|<\frac{4\pi}{|1-e^{\pm 2\pi i\omega}|}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{[2(k-1)\pi+\delta]^2}$$

resultado del cual siguen de inmediato a) y b).

Para obtener c), consideremos la expresión

$$Z_n(\omega,x-t)=\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{e^{2k\pi i\omega}}{2k\pi+(x-t)}-\frac{e^{-2k\pi i\omega}}{2k\pi-(x-t)}\right\}=$$

$$=2i\sum_{k=1}^{n}\frac{\operatorname{sen}2k\pi\omega}{2k\pi-\frac{(x-t)^2}{2k\pi}}-2(x-t)\sum_{k=1}^{n}\frac{\cos 2k\pi\omega}{4k^2\pi^2-(x-t)^2}=2iP_n(\omega,x-t)-2(x-t)Q_n(\omega,x-t)$$

Vamos a probar que cuando $n\to\infty$, $Z_n(\omega,x-t)$ existe y es uniformemente acotada en el intervalo J_δ, cualquiera que sea el intervalo de variación de ω.

En efecto, por una parte es bien claro que $\lim_{n\to\infty}Q_n(\omega,x-t)$ y

$$\lim_{n\to\infty}\left\{P_n(\omega,x-t)-\sum_{k=1}^{n}\frac{\operatorname{sen}2k\pi\omega}{2k\pi}\right\}=(x-t)^2\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{\operatorname{sen}2k\pi\omega}{(2k\pi)^2\left[2k\pi-\frac{(x-t)^2}{2k\pi}\right]}$$

existen uniformemente en J_δ y cualquier intervalo de variación de ω. Por otra parte, siendo bien conocido(1) que la serie $\sum_{k=1}^{n}\frac{\operatorname{sen}2k\pi\omega}{2k\pi}$ converge acotadamente para cualquier intervalo de ω, se deduce que también $Z_n(\omega,x-t)$ converge acotadamente en J_δ y cualquier intervalo de variación de ω y por lo tanto mediante pasaje al límite bajo el signo integral, se obtiene c).

iii)- Sea $v\neq 0$. Entonces para cualquier entero $q\geq 1$ y $k=1,2,3,\ldots$ es

$$)\quad \frac{d^q}{dv^q}\int_0^{\Omega}\left(1-\frac{\omega}{\Omega}\right)^k e^{i\omega v}d\omega=(-1)^q\frac{q!}{v^{q+1}}i+\sum_{\nu=0}^{k-2}\frac{(-1)^q k(k-1)\cdots(k-\nu)(\nu+1+q)!}{i^\nu(\nu+1)!\,\Omega^{\nu+1}v^{\nu+q+2}}+$$

$$+\sum_{\nu=0}^{q-1}\binom{q}{\nu}\frac{(-1)^{\nu}(k+\nu)!\,e^{i\Omega v}}{i^{k+\nu+1-q}\Omega^{k+\nu-q}v^{k+\nu+1}}+\frac{(-1)^{q}(k+q)!}{i^{(k+1)}\Omega^{k}v^{k+q+1}}\left(e^{i\Omega v}-1\right)$$

donde hacemos la convención que $\sum_{\nu=0}^{-1}\psi(\nu)=0$ con $\psi(\nu)$ cualquier función del entero no negativo ν.

Para probar este lema necesitamos tan solo probar que

$$(8)\qquad \int_0^{\Omega}\left(1-\frac{\omega}{\Omega}\right)^{k}e^{i\omega v}d\omega=\frac{1}{v}i+\sum_{\nu=0}^{k-2}\frac{k(k-1)\cdots(k-\nu)}{i^{\nu}\Omega^{\nu+1}v^{\nu+2}}+\frac{k!}{\Omega^{k}}\,\frac{e^{i\Omega v}-1}{(iv)^{k+1}}$$

puesto que poe derivación de esta fórmula con respecto a v obtenemos la (7).

Ahora bien, la (8) es cierta para $k=1$. Para demostrarla en general, supongamos que ella es cierta para $k=n$. Vamos a ver que bajo tal hipótesis, la (8) es también válida para $k=n+1$.

En efecto, integrando por partes

$$\int_0^{\Omega}\left(1-\frac{\omega}{\Omega}\right)^{n+1}e^{i\omega v}d\omega=\frac{1}{v}i+\frac{n+1}{i\Omega v}\int_0^{\Omega}\left(1-\frac{\omega}{\Omega}\right)^{n}e^{i\omega v}d\omega$$

$$=\frac{1}{v}i+\frac{n+1}{i\Omega v}\left\{\frac{1}{v}i+\sum_{\nu=0}^{n-2}\frac{n(n-1)\cdots(n-\nu)}{i^{\nu}\Omega^{\nu+1}v^{\nu+2}}+\frac{n!}{\Omega^{n}}\,\frac{e^{i\Omega v}-1}{(iv)^{n+1}}\right\}$$

$$=\frac{1}{v}i+\sum_{\nu=0}^{n-1}\frac{(n+1)n\cdots(n+1-\nu)}{i^{\nu}\Omega^{\nu+1}v^{\nu+2}}+\frac{(n+1)!}{\Omega^{n+1}}\,\frac{e^{i\Omega v}-1}{(iv)^{n+2}}$$

que es justamente lo que queríamos probar.

En particular, si $q=k$ y A_ν, B_ν y C designan constantes, la fórmula (7) puede escribirse en la forma

$$(7_a)\qquad \frac{d^k}{dv^k}\int_0^{\Omega}\left(1-\frac{\omega}{\Omega}\right)^{k}e^{i\omega v}d\omega=(-1)^{k}\,\frac{k!}{v^{k+1}}\,i+\Phi_{\Omega}(k,v)$$

donde

$$(9)\qquad \Phi_{\Omega}(k,v)=\sum_{\nu=0}^{k-2}\frac{A_\nu}{\Omega^{\nu+1}v^{\nu+k+2}}+\sum_{\nu=0}^{k-1}\frac{B_\nu\,e^{i\Omega v}}{\Omega^{\nu}v^{\nu+k+1}}+\frac{C}{\Omega^{k}v^{2k+1}}\left(e^{i\Omega v}-1\right)$$

Pasemos ahora a la demostración del teorema.

Con el propósito de simplificar la demostración, supongamos $a=0$ y escribamos en consecuencia f_0, I_0, I_0' en lugar de f_a, I_a, I_a'. Pongamos además

$$s_\omega^*(x) = s_\omega^*(x,f_0) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n\leq\omega}{}' a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx \;, \quad \omega \geq 0$$

expresión en la cual el acento en el signo de sumatoria indica que si ω es un entero debe considerarse en ella tan solo un medio del valor del último término.

Por consiguiente, para ω positivo y no entero es

$$s_\omega^*(x) = s_\omega(x)$$

y así, en lugar de considerar la suma (C,α) de la diferencia $S_\omega(x)-s_\omega(x)$, podemos considerar la suma (C,α) de la diferencia $S_\omega(x)-s_\omega^*(x)$.

Ahora, si $g(t)$ es una función periódica de período 2π, integrable en el intervalo $(0,2\pi)$, entonces

$$s_\omega^*(x,g) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} g(t)\,\frac{\operatorname{sen}\omega(x-t)}{x-t}\,dt = \lim_{T\to\infty}\int_{-T}^{T} g(t)\,\frac{\operatorname{sen}\omega(x-t)}{x-t}\,dt \qquad (1)$$

En consecuencia, la primera parte del teorema quedará probada si demostramos que, cuando $\Omega\to\infty$,

$$\frac{k}{\pi\Omega^k}\int_0^{\Omega}(\Omega-\omega)^{k-1}d\omega\;\frac{d^k}{dx^k}\int_{-\infty}^{\infty}\{f(t)-f_0(t)\}\,\frac{\operatorname{sen}\omega(x-t)}{x-t}\,dt \to 0$$

uniformemente en I_0', o bien, teniendo en cuenta que en el intervalo $(-\pi,\pi)$ es $f(t)=f_0(t)$, si probamos que idéntica cosa ocurre con

$$J_\Omega(k,x) = \frac{k}{\pi\Omega^k}\int_0^{\Omega}(\Omega-\omega)^{k-1}d\omega\;\frac{d^k}{dx^k}\int_{|t|\geq\pi}\{f(t)-f_0(t)\}\,\frac{\operatorname{sen}\omega(x-t)}{x-t}\,dt$$

---

(1) Esta sencilla y muy útil forma de expresar $s_\omega^*(x,g)$, ha sido presuntivamente dada por vez primera por G.H.Hardy en una nota publicada en el Messenger of Mathematics entre los años 1921 y 1922 y psteriormente redescubierta por Zygmund, de qien el autor ha tomado conocimiento de su existencia.

Desde un punto de vista puramente formal, la fórmula podría justificarse de la siguiente manera:

Sea $g(x) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$. Entonces

Ahora bien, en virtud de la hipótesis (3) y de los lemas (i) y (ii), la integral

$$\int_{|t|\geq\pi} \{f(t)-f_0(t)\}\left\{\frac{d^k}{dx^k}\frac{e^{i\omega(x-t)}}{x-t}\right\}dt$$

es, para cada ω fijo, uniformemente convergente en I_0' , de manera que podemos escribir, $x\in I_0'$,

$$J_\Omega(k,x)=\frac{k}{\pi\Omega^k}\int_0^\Omega(\Omega-\omega)^{k-1}d\omega\int_{|t|\geq\pi}\{f(t)-f_0(t)\}\left\{\frac{d^k}{dx^k}\frac{\operatorname{sen}\omega(x-t)}{x-t}\right\}dt$$

y también

$$J_\Omega(k,x)=\frac{1}{\pi}\int_{|t|\geq\pi}\{f(t)-f_0(t)\}dt\,\frac{k}{\Omega^k}\int_0^\Omega(\Omega-\omega)^{k-1}\left\{\frac{d^k}{dx^k}\frac{\operatorname{sen}\omega(x-t)}{x-t}\right\}d\omega$$

encontrando justificación la inversión del orden de integración de nuevo en la hipótesis (3) y en los lemas (i) y (ii).

Integrando por partes la integral interior, obtenemos

$$J_\Omega(k,x)=\frac{1}{\pi}\int_{|t|\geq\pi}\{f(t)-f_0(t)\}dt\int_0^\Omega\left(1-\frac{\omega}{\Omega}\right)^k\left\{\frac{d^k}{dx^k}\cos\omega(x-t)\right\}d\omega$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{|t|\geq\pi}\{f(t)-f_0(t)\}dt\,\frac{d^k}{dx^k}\int_0^\Omega\left(1-\frac{\omega}{\Omega}\right)^k\cos\omega(x-t)\,d\omega$$

$$\int_{-T}^{T}g(x+t)\,\frac{\operatorname{sen}\omega t}{t}dt=\int_{-T}^{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_ne^{in(x+t)}\,\frac{\operatorname{sen}\omega t}{t}dt=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_ne^{inx}\int_{-T}^{T}e^{int}\,\frac{\operatorname{sen}\omega t}{t}dt$$

Pero

$$\int_{-T}^{T}e^{int}\,\frac{\operatorname{sen}\omega t}{t}dt=\int_{-T}^{T}\frac{e^{i(n+\omega)}-e^{i(n-\omega)}}{2it}dt=\int_0^T\frac{\operatorname{sen}(n+\omega)}{t}dt-\int_0^T\frac{\operatorname{sen}(n-\omega)t}{t}dt$$

Teniendo en cuenta que

$$\lim_{T\to\infty}\int_0^T\frac{\operatorname{sen}kt}{t}dt=\int_0^\infty\frac{\operatorname{sen}kt}{t}dt=\begin{cases}\frac{\pi}{2} & \text{si } k>0\\ 0 & \text{si } k=0\\ -\frac{\pi}{2} & \text{si } k<0\end{cases}$$

resulta

$$\lim_{T\to\infty}\int_{-T}^{T}e^{int}\,\frac{\operatorname{sen}\omega t}{t}dt=\begin{cases}0 & \text{si } |n|>\omega\\ \pi & \text{si } |n|<\omega\\ \frac{1}{2}\pi & \text{si } |n|=\omega\end{cases}$$

con lo cual la fórmula resulta establecida bajo forma compleja.

$$= \frac{1}{\pi} \mathcal{R} \left\{ \int_{|t| \geq \pi} \{ f(t) - f_0(t) \} dt \; \frac{d^k}{dx^k} \int_0^{\Omega} \left(1 - \frac{\omega}{\Omega}\right)^k e^{i\omega(x-t)} d\omega \right\}$$

, de acuerdo a (7a)

$$J_{\Omega}(k,x) = \frac{1}{\pi} \mathcal{R} \left\{ \int_{|t| \geq \pi} \{ f(t) - f_0(t) \} \Phi_{\Omega}(k, x-t) \, dt \right\}$$

Consideremos ahora la integral

$$\int_{|t| \geq \pi} \{ f(t) - f_0(t) \} \Phi_{\Omega}(k, x-t) \, dt$$

y supongamos que hemos reemplazado en ella $\Phi_{\Omega}(k, x-t)$ por su expresión (9). En tales condiciones obtendrámos integrales pertenecientes a uno de los tres tipos siguientes:

$$\frac{1}{\Omega^s} \int_{|t| \geq \pi} \frac{h(t)}{(x-t)^r} dt \; ; \; \frac{1}{\Omega^s} \int_{|t| \geq \pi} \frac{h(t)}{(x-t)^r} e^{i\Omega(x-t)} dt \; , \; \int_{|t| \geq \pi} \frac{h(t)}{(x-t)^2} e^{i\Omega(x-t)} dt$$

donde h(t) reemplaza indistintamente a f(t) o a $f_0(t)$ según el caso, y r y s designan enteros positivos tales que $s \geq 1$, $r \geq 2$.

Con respecto a las dos primeras integrales es obvio, sea en virtud de (3), sea en virtdd del lema (1), que ellas tienden uniformemente a cero en I'_0 cuando $\Omega \to \infty$. En lo que a

$$\int_{|t| \geq \pi} \frac{h(t)}{(x-t)^2} e^{i\Omega(x-t)} dt$$

se refiere, tenemos

$$\int_{|t| \geq \pi} \frac{h(t)}{(x-t)^2} e^{i\Omega(x-t)} dt = \left\{ \int_{A \geq |t| \geq \pi} + \int_{|t| \geq A} \right\} \frac{h(t)}{(x-t)^2} e^{i\Omega(x-t)} dt$$
$$= U + V$$

Eligiendo A suficientemente grande, podemos conseguir, sea en virtud de (3) o del lema (1) según el caso, que $|V| < \frac{\varepsilon}{2}$ para cualquier $x \in I'_0$, designando con ε un número positivo tan pequeño como se quiera. Por otra parte, siendo $\frac{1}{(x-t)^2}$ para $x \in I'_0$, $\pi \leq |t| \leq A$, una función acotada y uniformemente continua, dependiente del parámetro x, la integral $U \to 0$ cuando $\Omega \to \infty$, uniformemente en I'_0,(1) de tal suerte que en definitiva

$$\int_{|t| \geq \pi} \frac{h(t)}{(x-t)^2} e^{i\Omega(x-t)} dt \to 0$$

(1) T.S. – pag. 307

uniformemente en I_0', con lo que queda demostrada la primera parte del teorema.

Para demostrar la segunda parte, pongamos

$$\tilde{s}_\omega^*(x) = \tilde{s}_\omega^*(x, f_0) = \sum_{n \leq \omega}{}' (a_n \operatorname{sen} nx - b_n \cos nx) \quad ; \quad \omega \geq 1$$

donde el acento en el signo de sumatoria tiene el mismo significado de antes.

En analogía a $s_\omega^*(x)$, la expresión $\tilde{s}_\omega^*(x)$ puede ser escrita en la forma

$$\tilde{s}_\omega^*(x) = -\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f_0(t)\, \frac{1-\cos\omega(x-t)}{x-t}\, dt = -\lim_{T\to\infty} \frac{1}{\pi}\int_{-T}^{T} f_0(t)\, \frac{1-\cos\omega(x-t)}{x-t}\, dt$$

y el mismo procedimiento utilizado en la primera parte del teorema nos permite escribir

$$\frac{k}{\pi\Omega^k}\int_0^\Omega (\Omega-\omega)^{k-1} \frac{d^k}{dx^k}\left\{\tilde{S}_\omega(x) - \tilde{s}_\omega(x)\right\} d\omega =$$

$$= -\frac{1}{\pi}\,\mathcal{J}\left\{\int_{|t|\geq\pi} \{f(t) - f_0(t)\}\, dt\, \frac{d^k}{dx^k}\int_0^\Omega \left(1-\frac{\omega}{\Omega}\right)^k e^{i\omega(x-t)} d\omega\right\}$$

$$= \frac{(-1)^{k+1} k!}{\pi}\int_{|t|\geq\pi} \frac{f(t)-f_0(t)}{(x-t)^{k+1}}\, dt - \frac{1}{\pi}\,\mathcal{J}\left\{\int_{|t|\geq\pi} \{f(t)-f_0(t)\}\, \Phi_\omega(k, x-t)\, dt\right\}$$

y puesto que

$$\int_{|t|\geq\pi} \{f(t) - f_0(t)\}\, \Phi_\Omega(k, x-t)\, dt \to 0$$

uniformemente en I_0', obtenemos finalmente

$$\lim_{\Omega\to\infty} \frac{k}{\pi\Omega^k}\int_0^\Omega (\Omega-\omega)^{k-1}\frac{d^k}{dx^k}\left\{\tilde{S}_\omega(x) - \tilde{s}_\omega(x)\right\} d\omega = \frac{(-1)^{k+1} k!}{\pi}\int_{|t|\geq\pi} \frac{f(t)-f_0(t)}{(x-t)^{k+1}}\, dt$$

uniformemente en I' y esto completa la demostración del teorema.

II)- Dada una serie trigonométrica

$$(1) \qquad \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx$$

es bien conocido que si ella converge en un intervalo hacia una función $f(x)$, entonces

$$F(x) = \frac{1}{2}a_0 x^2 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx}{n^2}$$

existe como función continua de x en dicho intervalo y posee en éste una derivada segunda generalizada igual a $f(x)$.

El análogo para integrales trigonométricas ha sido probado por Tichmarsh,[1] a saber:

Sean $a(u)$ y $b(u)$ integrables en cualquier intervalo finito e iguales a cero en un entorno del origen. Sea

$$\int_0^{+\infty} \{a(u)\cos ux + b(u)\,\mathrm{sen}\,ux\}\,du = f(x)$$

en un cierto intervalo J ~~dax~~ de x. Entonces

$$F(x) = -\int_0^{\infty} \frac{a(u)\cos ux + b(u)\,\mathrm{sen}\,ux}{u^2}\,du$$

existe en J y posee en éste una derivada segunda generalizada igual a $f(x)$.

El teorma mencionado en primer término, debido a Riemann, ha sido generalizado por Plessner de la siguiente manera:[2]

Sea la serie trigonométrica (1) sumable (C,α), $\alpha=0,1,2,..$ para $x=x_0$ hacia s. Sea r un entero $>\alpha+1$ y supongamos que la serie integrada término a término r veces, converja, en la proximidad de x_0, hacia una función $F(x)$. En tales condiciones, si $F_{(r)}(x)$ designa la résima derivada generalizada de $F(x)$, $F_{(r)}(x_0)$ existe y es igual a s.

Es el propósito de esta segunda parte probar que vale para integrales trigonométricas el análogo de esta generalización de Plessner, a saber:

Sean $a(u)$ y $b(u)$ integrables en cualquier intervalo finito e iguales a cero en un entorno del origen . Sea la integral trigonométrica

$$(2) \qquad \int_0^{\infty} \{a(u)\cos ux + b(u)\,\mathrm{sen}\,ux\}\,du$$

sumable (C,α), $\alpha=0,1,2,...$ para $x=x_0$ hacia s. Sea r un entero $>\alpha+1$ y supongamos que la integral (2), integrada bajo el signo r veces, converja en la proximidad de x_0, hacia una función $F(x)$. En esas condiciones $F_{(r)}(x_0)$ existe y es igual a s.

La demostración sigue, con oportunas modificaciones, las líneas de la demostración dada por Zygmund para el teorema de Plessner.

Supongamos r par. Si fuese impar la demostración sería completamente

(1) Titchmarsh, Theory of Fourier Integrals, pag. 156

(2) T.S. – pag 260

similar. Además, incrementando α si fuera necesario, podemos admitir que $r=\alpha+2$ o bien que $r=\alpha+3$. Tendríamos entonces

$$(3) \qquad F(x) = (-1)^{\frac{r}{2}} \int_0^\infty \frac{a(u)\cos ux + b(u)\operatorname{sen} ux}{u^r}\, du$$

Sin pérdida de generalidad podemos aceptar que $x_0=0$, $s=0$ y además que (2) sea simplemente una "integral coseno" porque siendo la "componente seno" de (2) una función impar de x, su résima derivada simétrica es igual a cero para $x=0$. Finalmente, sin que ello implique una restricción, podemos suponer que el intervalo en el cual $a(u)$ es cero, coincida con el intervalo (0,1). Con todas estas hipótesis simplificatorias, (2) toma la forma

$$(4) \qquad F(x) = (-1)^{\frac{r}{2}} \int_1^\infty \frac{a(u)\cos ux}{u^r}\, du$$

Pongamos ahora

$$\gamma(u) = \frac{\cos u}{u^r}, \quad S_\lambda = S_\lambda^0 = \int_1^\lambda a(u)\,du, \ldots, S_\lambda^k = \int_1^\lambda S_u^{k-1}\,du = \frac{1}{k!}\int_1^\lambda (\lambda-u)^k a(u)\,du$$

Desde que por hipótesis $\frac{1}{\lambda^\alpha}\int_1^\lambda (\lambda-u)^\alpha a(u)\,du \to 0$, es $S_\lambda^\alpha = o(\lambda^\alpha)$ y por lo tanto, tomando en consideración que $S_{\lambda+1}^k - S_\lambda^k = \int_\lambda^{\lambda+1} S_u^{k-1}\,du$, es también $S_\lambda^{\alpha-1} = o(\lambda^\alpha)$, $S_\lambda^{\alpha-2} = o(\lambda^\alpha)$, ...

Integrando (4) por partes $(\alpha+1)$ veces

$$F(x) = (-1)^{\frac{r}{2}+(\alpha+1)} x^r \int_1^\infty S_u^\alpha \left\{ \frac{d^{(\alpha+1)}}{du^{(\alpha+1)}} \gamma(ux) \right\} du$$

Escribamos a continuación

$$P(t) = \sum_{\nu=0}^{\frac{1}{2}r-1} (-1)^\nu \frac{t^{2\nu}}{(2\nu)!} \qquad ; \qquad \lambda(t) = \frac{\cos t - P(t)}{t^r}$$

Entonces

$$\gamma(ux) = \lambda(ux) + \frac{P(ux)}{(ux)^r}$$

y en consecuencia

$$F(x) = (-1)^{\left[\frac{r}{2}+(\alpha+1)\right]} x^r \int_1^\infty S_u^\alpha \frac{d^{(\alpha+1)}}{du^{(\alpha+1)}} \left[\lambda(ux) + \frac{P(ux)}{(ux)^r}\right] du$$

o bien

$$F(x) = \sum_{\nu=0}^{\frac{1}{2}r-1} \frac{A_\nu}{(2\nu)!} x^{2\nu} + x^r R(x)$$

donde

$$A_\nu = (-1)^{\frac{r}{2}+\nu} \frac{(r+\alpha+2-2\nu)!}{(r-2\nu-1)!} \int_1^\infty S_u^\alpha u^{2\nu-r-\alpha-1}\, du$$

$$R(x) = (-1)^{\left(\frac{1}{2}r+\alpha+1\right)} \int_1^{\infty} S_u^{\alpha} \left\{ \frac{d^{(\alpha+1)}}{du^{(\alpha+1)}} \lambda(ux) \right\} du$$

En virtud de que las integrales que definen a los números A_ν convergen absolutamente, sigue que R(x) es también absolutamente convergente. Faltaría pues probar que $R(x) = o(1)$ para $x \to 0$. Con ese fin sea $0 < x \leq \frac{1}{2}$. Entonces

$$|R(x)| \leq \int_1^{\frac{1}{x}} \left| S_u \frac{d^{(\alpha+1)}}{du^{(\alpha+1)}} \lambda(ux) \right| du + \int_{\frac{1}{x}}^{\infty} \left| S_u \frac{d^{(\alpha+1)}}{du^{(\alpha+1)}} \lambda(ux) \right| du = U + V$$

Con relación a V observamos que la función $\lambda(t)$ es regular para todo valor de t y además para $u \leq \frac{1}{x}$, es

$$\left| \frac{d^{(\alpha+1)}}{du^{(\alpha+1)}} \lambda(ux) \right| \leq C x^{1+\alpha}$$

donde C designa una constante independiente de u y de x. Por lo tanto

$$U \leq C x^{1+\alpha} \int_1^{\frac{1}{x}} |S_u^{\alpha}| du = C x^{1+\alpha} \int_1^{\frac{1}{x}} o(u^{\alpha}) du = o(1)$$

Por otra parte, siendo para $u \geq \frac{1}{x} \geq 2$, $|\gamma^{(\alpha+1)}(u)| \leq C_1 u^{-r}$ resulta

$$\frac{d^{(\alpha+1)}}{du^{(\alpha+1)}} \lambda(ux) \leq C_2 x^{\alpha+1-r} u^{-r}$$

con C_1, C_2 constantes independientes de u y de x. Sigue de aquí que

$$V \leq C_2 x^{\alpha+1-r} \int_{\frac{1}{x}}^{\infty} |S_u^{\alpha}| u^{-r} du = C_2 x^{\alpha+1-r} \int_{\frac{1}{x}}^{\infty} o(u^{\alpha-r}) du$$
$$= C_2 x^{\alpha+1-r} o(x^{r-\alpha-1}) = o(1)$$

y así el teorema queda establecido.

III) Para terminar, señalaremos algunas posibles aplicaciones de los resultados que preceden. En particular, la aplicación del teorema D) conduce a la obtención inmediata para integrales de Fourier, de resultados conocidos como ciertos para series de Fourier.

Por ejemplo, es sabido que si f(t) es integrable entre $-\pi$ y π y de período 2π, el salto $D_x = f(x+0) - f(x-0)$ de la función puede determinarse mediante la fórmula(1)

$$2\pi \lim_{n\to\infty} \frac{\sigma_n'(x)}{n} = D_x$$

(1) Sidon S. - Die Bestimmung des Sprunges der Funktion aus der Fourierreihe, [illegible] 1919 pag 309-311

donde $\sigma'_n(x)$ indica la derivada de la enésima suma parcial (C,1) de la serie d e Fourier de la función f(x).

El resultado correlativo para integrales de Fourier ,se expresaría así:

Sea $f(t)\in L(-\infty,\infty)$. Si $\sigma_\lambda(x)$ representa la λésima integral parcial de la suma (C,1) de la integral de Fourier de f(t), es decir si

$$\sigma_\lambda(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\lambda \left(1-\frac{u}{\lambda}\right) du \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos u(x-t)\,dt$$

entonces

$$2\pi \lim_{\lambda\to\infty} \frac{\sigma'_\lambda(x)}{\lambda} = D_x$$

Análogamente, el correlativo para integrales de Fourier del teorema C) de pág. 3, adoptaría la forma siguiente:

C') Sea $f(t)\in L(-\infty,\infty)$. Si la derivada generalizada de orden k, $f_{(k)}(x)$ existe en el punto x_0, la integral de Fourier de f(t), diferenciada formalmente k veces bajo el signo de integral, es, en el punto x_0, sumable (C,α), α>k, hacia el valor $f_{(k)}(x_0)$.

La validez d e estos teoremas, resulta como simple consecuencia del teorema D) con solo tomar en consideración la definición de sumabilidad de una serie por el método de M. Riesz de orden α o sumabilidad (R,α) y el hecho que si una serie es sumable hacia la suma s por el método (R,α), es sumable hacia la misma suma por el método (C,α) y recíprocamente.(1)

Por otra parte, el teorema C') y el correlativo del de Plessner de la pag. 11, abre un camino para la solución del problema de la llamada sumabilidad C de la integral de Fourier, es decir del problema de la determinación de condiciones necesarias y suficientes para que la integral de Fourier de una dada función f(t) sea sumable, no por un promedio aritmético de un orden determinado, sino por un promedio aritmético de algún orden, cualquiera que éste sea. Un tal estudio se inspiraría, con las naturales modificaciones, en la solución dada

15

por Hardy y Littlewood al problema de la sumabilidad de series de potencias y series de Fourier.(1)

Al finalizar este trabajo, séame permitido expresar mi mayor agradecimiento a los Profesores Antoni Zygmund y Alberto González Domínguez, delas Universidades de Chicago y Buenos Aires respectivamente, por las sugerencias y consejos con que me orientaron en la realización de aquél.

Félix Eduardo Herrera

Tucumán Noviembre de 1947

(1) Hardy and Littlewood – Solution of the Cesaro Summability problem for power series and Fourier Series, Math. Zeits, 19, 1923, 67–96