Integración en espacios abstractos

Selzer, Samuel

1947

Tesis presentada para obtener el grado de Doctor en Ciencias Físico-Matemáticas de la Universidad de Buenos Aires

Tesis

Integración en Espacios Abstractos.

Samuel Selzer

INTRODUCCION

En esta Tesis se estudia la Integración en Espacios Abstractos, partiendo del concepto de **medida exterior** de Caratheodory, que es una función φ de conjunto que posee las siguientes propiedades:

1- $\varphi(A)=0$, si $A=0$.

2- $\varphi(\bigcup_i A_i) \leq \sum \varphi(A_i)$

3- $\varphi(B) \leq \varphi(A)$ si $B \subset A$.

Entre los conjuntos del espacio abstracto E se encuentran los medibles que son los A que satisfacen la condición

$$\varphi(W) = \varphi(WA) + \varphi(W-A)$$

para todo W tal que $\varphi(W) < +\infty$.

Estos conjuntos forman lo que se llama **familia aditiva** $\mathcal{A}$, es decir que cumple las condiciones:

1-El conjunto vacío pertenece a $\mathcal{A}$.

2-Si $A \in \mathcal{A}$, $E-A \in \mathcal{A}$.

3- Si $A_i \in \mathcal{A}$ $\bigcup_i^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$.

En forma análoga se define la medida interior ψ cambiando la condición 3 por la

$$3') \quad \psi\left(\bigcup_i^{\infty} A_i\right) \geq \sum \psi(A_i) \qquad A_i \text{ disjuntos.}$$

y luego tratando de introducir una relación entre la medida exterior y la interior se observa que dada una medida exterior φ e indicando con μ su aplicación a conjuntos medibles φ, la función de conjuntos

$$\psi(A) = \operatorname*{Sup}_{X \subset A} \mu(X)$$

es una función de medida interior, que recibe el nombre de **medida interior correspondiente a la medida exterior φ.**

La medida interior correspondiente a una medida exterior dada goza de la interesante propiedad de que los conjuntos medibles φ son medibles ψ, siendo para todo conjunto H medible φ, $\psi(H)=\mu(H)$.

Planteada la cuestión de si vale la recíproca de esta propiedad, se obtiene el resultado afirmativo para las φ regulares, es decir aquellas que satisfacen la siguiente

Definición: dado un conjunto $C\subset E$ se verifica:

$$\inf_{X\supset C}\mu(X)=\varphi(C)$$

siendo X medibles φ. Esta definición equivale a decir que para todo C, dado $\varepsilon>0$ arbitrario existe un X medible φ, $X\supset C$ tal que

$$\mu(X)=\varphi(C).$$

———•———

Un procedimiento constructivo de Caratheodory-Lebesgue para obtener funciones de medida exterior, se aplica por analogía a las funciones de medida interior obteniendose resultados análogos, entre los cuales es importate el hecho de que si $\{R\}$ es un cuerpo y se cumplen para una función p (ó P) de conjunto la propiedad $p(R_1\cup R_2)\geq p(R_1)+p(R_2)$

$$\left(\text{ó}\quad P(R_1\cup R_2)\leq P(R_1)+P(R_2)\right)\qquad R_1R_2=0.$$

la $\{R\}$ es una familia de conjuntos medibles φ (ó ψ).

Seguidamente se hace una exposición breve de la integral en un espacio definida para funciones medibles φ, sobre una clase aditiva, siguiendo el libro de S.Saks: Theory of Integral. N.Y. 1937.-

En la tercera parte se aplican los conceptos anteriores a Espacios Topológicos, definiendo la medida ρ de Radón a la familia aditiva menor que contiene a la familia de conjuntos cerrados en E. La integral definida para los conjuntos medibles ρ, es una funcional lineal $\geqslant 0$ si f(x) es continua $\geqslant 0$, es decir si si $f(x)\varepsilon L_+$.

Se demuestra la recíproca es decir el teorema de Riesz que vale para los espacio topológocos localmente compactos de Hausdorff.

Esta ultima proposición enunciada en la página 32 del libro de André

Weil: L'Integration dans les Groupes Topologiques et ses Applications, Hermann et Cie, 1938, Paris; ha sido el motivo de este estudio.

Deseo dejar constancia de que este tema surgió como resultado de las brillantes clases de Seminario dadas por el eminente matemático Prof. Marshall H. Stone durante su estadía de cuatro meses en nuestra ciudad el año 1943.

Tambien deseo expresar mi agradecimiento a mi maestro y profesor Dr. Juan Blaquier, quién supo alentarme en mis estudios; así como al profesor Dr. Agustín Durañona y Vedia y al Sr. Mischa Cotlar por el continuo cambio de ideas y sugestiones para elaborar el tema de esta tesis.

La continuación natural de este trabajo será el estudio de la Integral de Haar, poderoso instrumento para el estudio profundo de los grupos topológicos localmente compactos; estudio que nos proponemos hacer en un futuro próximo.-

Medida exterior

Sea E un espacio abstracto dado; una función de conjunto $\varphi(A) \geq 0$, pudiendo ser $\varphi(A) = \infty$, definida para todo subconjunto $A \subset E$, se llama **medida exterior**, si cumple las siguientes condiciones:

I) Si A es vacío, $\varphi(A) = 0$.

II) Si $B \subset A$, es: $\varphi(B) \leq \varphi(A)$.

III) Si $V = \bigcup_i A_i$, es $\varphi(V) \leq \sum \varphi(A_i)$, siendo finito o infinito el número de sumandos.

Ejemplo de función de medida:

Sea P un punto fijo del espacio E. Pongamos $\varphi(A) = 1$, si $P \in A$; $\varphi(A) = 0$ si $P \notin A$. Se verifica fácilmente que φ cumple las tres condiciones.

Si A es un conjunto dado, para todo conjunto $W \subset E$, se verifica la relación:

$$W = WA \cup (W - A)$$

y por la condición III), tenemos:

$$\varphi(W) \leq \varphi(WA) + \varphi(W - A).$$

Conjuntos medibles.

El conjunto A, se llama **medible φ**, si para todo W arbitrario de medida exterior finita $(\varphi(W) < \infty)$, se verifica:

$$\varphi(W) = \varphi(WA) + \varphi(W - A)$$

Si A es un conjunto **medible φ**, el valor $\varphi(A)$ será indicado con $\mu(A)$ es decir: $\varphi(A) = \mu(A)$ si A es medible φ.

Teorema 1.

El conjunto complementario de un conjunto medible φ, es medible φ.

Demostración. Sea A medible, $A' = E - A$; para todo conjunto W, se verifica: $WA' = W - A$, $W - A' = WA$, de donde:

$$\varphi(WA') + \varphi(W - A') = \varphi(W - A) + \varphi(WA) = \varphi(W)$$

Teorema 2.

La intersección de dos conjuntos medibles φ, es medible φ.

Demostración. Sean A y B dos conjuntos medibles φ; se tiene por hipótesis:
$$\varphi(W) = \varphi(WA) + \varphi(W-A) \qquad (1)$$
siendo W un conjunto arbitrario de medida exterior finita; también se tiene:
$$\varphi(AW) = \varphi(ABW) + \varphi(AW-B) \qquad (2)$$
que puede escribirse así: $\varphi(AW) = \varphi(ABW) + \varphi(AW-AB)$, (2') pues: $AW - B = AW - AB$; pero siendo $W - AB$ un conjunto de medida exterior finita, se verifica:
$$\varphi(W-AB) = \varphi[(W-AB)A] + \varphi[(W-AB)-A] \qquad (1')$$
reemplazando en (1'):

y como $(W-AB)A = WA - AB \qquad (W-AB)-A = W-A$

y reemplazando en (1'): $\varphi(W-AB) = \varphi(WA-AB) + \varphi(W-A) \qquad (3)$

Efectuando la operación: (1) + (2') − (3):
$$\varphi(W) + \varphi(AW) - \varphi(W-AB) = \varphi(WA) + \varphi(W-A) + \varphi(ABW) + \varphi(AW-AB) - \varphi(WA-AB) - \varphi(W-A).$$
y finalmente:
$$\varphi(W) = \varphi(ABW) + \varphi(W-AB).$$

Teorema 3.

La unión y la intersección de un número finito de conjuntos medibles φ es medible φ.

Demostración. Para la intersección, resulta del teorema anterior y del principio de inducción. Para la unión, el mismo y, tomando los complementarios, el teorema 1.

Corolario. Si A y B son conjuntos medibles φ, (A − B) es medible φ, pues si $B' = I - B$, se tiene: $A - B = AB'$ y B' es medible φ.

Teorema 4.

Si $B_1 \supset B_2 \supset B_3 \supset \dots$ es una sucesión decreciente de conjuntos medibles φ $\Omega = \bigcap_i B_i$ es medible φ.

Demostración. Sea W un conjunto arbitrario $\varphi(W) < \infty$. Si ponemos $W_k = B_k W$, $W_0 = \Omega W$, tendremos: $\varphi(W_k) \leq \varphi(W)$, $\varphi(W_0) \leq \varphi(W)$ (condición II)

y como $B_{k+1} = B_{k+1} B_k$, $\Omega = \Omega B_k$ resulta: $W_{k+1} = B_{k+1} W_k \subset W_k$, $W_0 = \Omega B_k W = \Omega W_k \subset W_k$

de lo cual se deduce: $\varphi(W_{k+1}) \leq \varphi(W_k)$, $\varphi(W_0) \leq \varphi(W_k)$

luego existe $\lim_k \varphi(W_k) = \lambda$ siendo: $\lambda \geq \varphi(W_0)$ (4)

Vamos a demostrar ahora que $\lambda = \varphi(W_0)$. Para ello observemos que:

$W - W_0 = (W-W_1) \cup (W_1 - W_2) \cup \dots \qquad \therefore \quad W = W_0 \cup (W-W_1) \cup (W_1 - W_2) \cup \dots$

aplicando la condición III): $\varphi(W) \leq \varphi(W_0) + \varphi(W-W_1) + \dots$

pero: $\varphi(W-W_1)=\varphi(W-B_1W)=\varphi(W-B_1)=\varphi(W)-\varphi(B_1W)=\varphi(W)-\varphi(W_1)$ (B, medible φ)

y en forma análoga: $\varphi(W_{k-1}-W_k)=\varphi(W_{k-1})-\varphi(W_k)$

luego: $\varphi(W)\le\varphi(W_0)+[\varphi(W)-\varphi(W_1)]+[\varphi(W_1)-\varphi(W_2)]+\cdots=\varphi(W_0)+\varphi(W)-\lim_{k\to\infty}\varphi(W_k)=\varphi(W_0)+\varphi(W)-\lambda.$

de donde $\varphi(W_0)\ge\lambda$ desigualdad que comparada con la (1), da:

$$\lambda=\varphi(W_0)$$

Ahora aplicando nuevamente la condición III), tenemos:

$$\begin{aligned}\varphi(W-W_0)&\le\varphi(W-W_1)+\varphi(W_1-W_2)+\cdots\\&=[\varphi(W)-\varphi(W_1)]+[\varphi(W_1)-\varphi(W_2)]+\cdots\\&=\varphi(W)-\lambda=\varphi(W)-\varphi(W_0).\end{aligned}$$

por tanto: $\varphi(W)\ge\varphi(\Omega W)+\varphi(W-\Omega)$

que con la relación $\varphi(W)\le\varphi(\Omega W)+\varphi(W-\Omega)$

da $\varphi(W)=\varphi(\Omega W)+\varphi(W-\Omega)$ que demuestra el teorema.

<u>Teorema 5</u>.

La intersección de infinitos conjuntos medibles φ, es medible φ.

Demostración. Sea $A_1, A_2, A_3, A_4, \ldots$ los conjuntos dados. Consideremos la sucesión

$$B_1=A_1,\quad B_2=A_1\cdot A_2,\quad B_3=A_1\cdot A_2\cdot A_3,\ \ldots$$

los B_i son medibles φ (teor. 5) y se tiene: $B_1\supset B_2\supset B_3\supset\ldots$

luego $\Omega=\bigcap_i B_i=\bigcap_i A_i$ es medible φ (teor. 4).

<u>Teorema 6</u>.

La unión de infinitos conjuntos medibles φ, es medible φ.

Demostración. Basta considerar la intersección de los complementarios.

<u>Teorema 7</u>.

El límite superior, el límite inferior y el límite ordinario, cuando existe, de una sucesión de conjuntos medibles φ, es medible φ.

Demostración. Siendo

$$\overline{\text{Lím}}\,A \quad \text{Inf. supr.}(A_k, A_{k+1},\ldots)=\bigcap_{1}^{\infty}(A_k\cup A_{k+1}\cup\ldots)$$

$$\underline{\text{Lím}}\,A \quad \text{supr. inf.}(A_k, A_{k+1},\ldots)=\bigcup_{1}^{\infty}(A_k\cap A_{k+1}\cap\ldots)$$

el teorema resulta cierto aplicando los teoremas 5 y 6.

<u>Teorema 8</u>.

Si A es un conjunto medible φ y B es un conjunto cualquiera de medida exterior finita, se tiene: $\varphi(A \cup B) = \varphi(A) + \varphi(B) - \varphi(AB)$

Demostración. Por la condición II: $\varphi(A \cup B) \leq \varphi(A) + \varphi(B)$

luego $A \cup B$ tiene medida exterior finita y siendo A medible φ, se tiene

$$\varphi(A \cup B) = \varphi\left[(A \cup B) \cup A\right] + \varphi\left[(A \cup B) - A\right]$$

pero $(A \cup B).A = A$, $(A \cup B) - A = B - A$; luego : $\varphi(A \cup B) = \varphi(A) + \varphi(B - A)$

y como B es de medida exterior finita y A medible φ, resulta:

$$\varphi(B) = \varphi(AB) + \varphi(B - A).$$

Reemplazando ahora en la igualdad anterior queda demostrado el teorema.

Corolario. Si $A.B = 0$, resulta $\varphi(A \cup B) = \varphi(A) + \varphi(B)$; por tanto, si A y B ~~son medibles~~ son medibles φ, la unión es medible φ (teor. 3) y su medida es igual a la suma de las medidas (aditividad en sentido restringido).

Corolario. Si A y B son conjuntos medibles φ, $A - B$ es medible φ, siendo $\mu(A - B) = \mu(A) - \mu(AB)$

Teorema 9. (Total aditividad de la medida φ).

La medida de la unión de infinitos conjuntos medibles φ, sin elementos comunes, es igual a la suma de sus medidas. (ver teor. 7).

Demostración. Sea $V = \bigcup_1^\infty A_k$. Pongamos $V_n = \bigcup_1^n A_k$; siendo $V \supset V_n$ se deduce: $\mu(V) \geq \mu(V_n)$ (condición II)

Pero por el corolario anterior: $\mu(V_n) = \sum_1^n \mu(A_k)$, de donde: $\mu(V) \geq \sum_1^n \mu(A_k)$

y para $n \to \infty$ $\mu(V) \geq \sum_1^\infty \mu(A_k)$,

pudiendo la serie del segundo miembro ser divergente. Por otra parte de la condición III), resulta que $\mu(V) \leq \sum_1^\infty \mu(A_k)$.

Luego: $\mu(V) = \sum_1^\infty \mu(A_k)$.

Teorema 10.

Si $A_1 \subset A_2 \subset A_3$ ... es una sucesión de conjuntos medibles φ,

$$\mu\left(\bigcup_1^\infty A_k\right) = \lim_k \mu(A_k)$$

Demostración. Por hipótesis: $\bigcup_1^\infty A_k = A_1 \cup (A_2 - A_1) \cup \cdots$

siendo los sumandos del segundo miembro conjuntos medibles φ sin elementos comunes; luego por el teorema 9:

$$\mu\left(\bigcup_1^\infty A_k\right) = \mu(A_1) + \sum_1^\infty \mu(A_{k+1} - A_k)$$

y como A_k y $A_{k+1} - A_k$ no tienen elementos comunes resulta (corolario teor. 8)

$$\mu(A_{k+1}) = \mu(A_k) + \mu(A_{k+1} - A_k)$$

luego: $$\mu\left(\bigcup_1^\infty A_k\right) = \mu(A_1) + \sum_1^\infty \left[\mu(A_{k+1}) - \mu(A_k)\right] = \lim_k \mu(A_k)$$

Teorema 10'.

Si $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \ldots$ es una sucesión de conjuntos medibles φ, se tiene:

$$\mu\left(\bigcap_1^\infty A_k\right) = \lim_k \mu(A_k)$$

Demostración. Sabemos por el teorema 4 que $\bigcap_1^\infty A_k$ es medible φ. La sucesión $B_k = A_1 - A_{k+1}$ verifica las condiciones del teor. 10. Siendo $\lim B_k = A_1 - \bigcap_1^\infty A_k$ y por tanto $\lim \mu(B_k) = \mu\left(\bigcup_1^\infty B_k\right) = \mu(\lim B_k) = \mu\left(A_1 - \bigcap_1^\infty A_k\right) = \mu(A_1) - \mu\left(\bigcap_1^\infty A_k\right)$.

se deduce:

$$\mu\left(\bigcap_1^\infty A_k\right) = \mu(A_1) - \lim_k \mu(B_k) = \mu(A_1) - \lim \mu(A_1 - A_{k+1}) = \mu(A_1) - \lim\left[\mu(A_1) - \mu(A_{k+1})\right] = \lim \mu(A_{k+1})$$

Teorema 11.

Si $A_1, A_2, A_3, \ldots A_k, \ldots$ es una sucesión arbitraria de conjuntos medibles φ se tiene: $$\mu(\underline{\lim}\, A_k) \leq \underline{\lim}\left(\mu(A_k)\right).$$

Demostración. Pongamos $D_k = A_k A_{k+1} A_{k+2} \ldots$ $\quad \underline{\lim}\, A_k = \bigcup_1^\infty D_k$

siendo $D_1 \subset D_2 \subset D_3 \ldots$, aplicando el teor. 10

$$\mu(\underline{\lim}\, A_k) = \lim_k \mu(D_k)$$

Por otra parte siendo $D_k \subset A_k$, $\mu(D_k) \leq \mu(A_k)$, $\lim \mu(D_k) \leq \underline{\lim}\, \mu(A_k)$ resulta el teorema.

Teorema 11'.

Si $A_1, A_2, \ldots$ es una sucesión de conjuntos medibles φ, se tiene:

$$\mu(\overline{\lim}\, A_k) \geq \overline{\lim}\, \mu(A_k)$$

Teorema 12.

Si $A_1, A_2, \ldots$ es una sucesión de conjuntos medibles φ convergente

$$\mu(\lim A_k) = \lim \mu(A_k)$$

Teorema 13.

Todo conjunto de medida exterior nula, es medible.

Demostración, Si W es un conjunto de medida exterior finita se tiene:

$$\varphi(W) \leq \varphi(AW) + \varphi(W-A)$$

Siendo por hipótesis $\varphi(A) = 0$, se deduce $0 \leq \varphi(AW) \leq \varphi(A) = 0 \therefore \varphi(AW) = 0$

pero siendo $W \supset W - A$, resulta: $\varphi(W) \geq \varphi(AW) + \varphi(W-A)$ $\quad$ Q.D.E.

MEDIDA INTERIOR

En forma análoga a la definición de medida exterior, se define la **medida interior** de un conjunto $A \subset E$ a toda función ψ que cumple las condiciones I) II) de la medida exterior y a la condición

III') $\psi\left(\bigcup_i A_i\right) \geq \sum \psi(A_i)$ siendo los conjuntos A_i disjuntos.

Conjunto medible ψ, es todo conjunto A que para todo W de medida interior finita verifica: $\psi(W) = \psi(WA) + \psi(W-A)$

Medida interior correspondiente a una medida exterior.

Si φ es una medida exterior, definamos para todo $A \subset E$ la función

$$\psi(A) = \sup_{X<A} \mu(X)$$

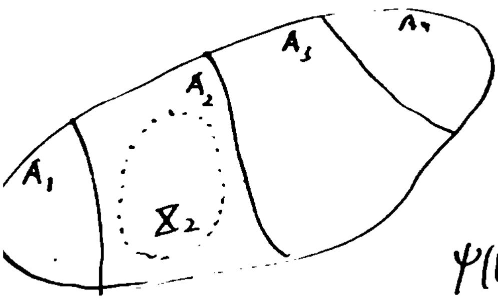
donde los conjuntos X son medibles φ. Evidentemente si A es medible φ,

$$\psi(A) = \mu(A).$$

Teorema 14.

La función $\psi(A)$ que acabamos de definir, es una medida interior.

Demostración. Las condiciones I) y II) son evidentes. En cuanto a la condición III'), observemos que siendo por definición $\psi(A_i) = \sup_{X<A_i} \mu(X)$



para cada $\varepsilon_i > 0$ existe un $X_i < A_i$ tal que

$$\mu(X_i) > \psi(A_i) - \varepsilon_i$$

Por lo tanto, recordando que los X_i son disjuntos

$$\psi\left(\bigcup_i A_i\right) \geq \psi\left(\bigcup_i X_i\right) = \mu\left(\bigcup_i X_i\right) = \sum \mu(X_i) > \sum \psi(A_i) - \sum \varepsilon_i$$

Tomando ahora para $\varepsilon > 0$ arbitrario $\sum \varepsilon_i < \varepsilon$ resulta:

$$\psi\left(\bigcup_i A_i\right) \geq \sum \psi(A_i)$$

Basándonos en este teorema podemos designar a la función $\psi(A) = \sup_{X<A} \mu(X)$ con el nombre de **función de medida interior correspondiente a la medida exterior** φ.

Teorema 15.

Si ψ es la función de medida interior correspondiente a la medida exterior φ, todo conjunto medible φ, es medible ψ; la medida ψ coincide con la medica φ ; o sea si H es un conjunto medible se verifica: $\psi(H) = \mu(H)$

Demostración. Sea H un conjunto medible φ; si $\varphi(W) < \infty$, se verifica

$$\varphi(W) = \varphi(WH) + \varphi(W-H)$$

En primer lugar se tiene $\varphi(W) < \infty$, pues $\mu_{X\subset W}(X) < \varphi(W)$.

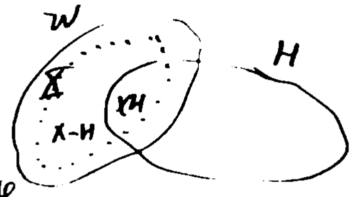
Si $X \subset W$, X medible φ, XH y X - H también son medibles y sin elementos comunes; se tiene: $\mu(X) = \mu(XH) + \mu(X-H)$

Tomando ahora un conjunto X tal que $\mu(X) > \psi(W) - \varepsilon$ resulta:

$$\psi(W) - \varepsilon < \mu(X) = \mu(XH) + \mu(X-H) \leq \psi(WH) + \psi(W-H) \quad \therefore \quad \psi(W) \leq \psi(WH) + \psi(W-H)$$

por ser $\varepsilon > 0$ arbitrario.

Siendo además $\psi(W) \geq \psi(WH) + \psi(W-H$



resulta que H es un conjunto medible ψ .

De lo anterior deducimos que si H es medible φ

$$\psi(H) = \sup_{X\subset H} \mu(X) = \mu(H)$$

pues dado $\varepsilon > 0$ existe un conjunto $X \subset H$, tal que: $\mu(X) > \mu(H) - \varepsilon \therefore \mu(X) \geq \mu(H)$

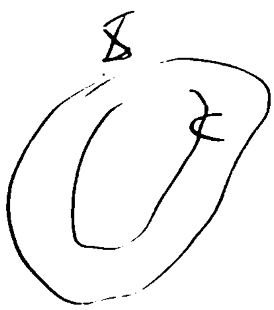
y por otra parte $\mu(X) \leq \mu(H)$ para todo $X \subset H$ y como $\psi(H)$ tiene las mismas propiedades, resulta: $\psi(H) = \mu(H)$.

Las funciones de medida exterior y su correspondiente de medida interior tienen propiedades interesantes cuando se considera una clase especial de funciones de medida exterior, las llamadas <u>funciones de medida exterior regulares</u>.

Una función φ de medida exterior se llama regular si para todo conjunto $C \subset E$ se verifica:

$$\operatorname{Inf.}_{X\supset C} \mu(X) = (C) \qquad X \text{ medibles } \varphi \qquad [\varphi(X) = \mu(X)]$$

o sea: dado $\varepsilon > 0$ arbitrario, existe un $X \supset C$ tal que: $\mu(X) \leq \varphi(C) + \varepsilon$



o bien $\mu(X) \leq \varphi(C)$

pero siendo por otra parte $\mu(X) \geq \varphi(C)$,

resulta que para toda función de medida exterior regular φ , dado un conjunto C, existe un conjunto X medible φ, cuya medida es igual a la medida exterior de C; $\mu(X) = \varphi(C)$.

El espacio total es medible por ser complementario del conjunto vacío; luego la definición que acabamos de dar tiene sentido.

Teorema 16.

Si φ es una medida exterior regular y $\psi(A)$ es la medida interior correspondiente a φ, la familia de los conjuntos medibles ψ coincide con la de los medibles φ.

Demostración. Sabemos ya (teor. anterior) que todo conjunto medible φ es medible ψ. Sea ahora A un conjunto medible ψ; indicaremos su medida con $m(A)$ y vamos a demostrar que A es medible φ.

Por ser φ regular, existe un conjunto medible φ, A', tal que:

$$A' \supset A \quad \text{y} \quad \mu(A') = \varphi(A).$$

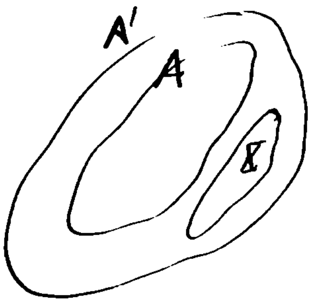
Siendo A' medible φ, resulta que A' es medible ψ y se tiene

$$m(A') = \mu(A').$$

(teor. 6. de C. Caratheodory, Vorlesungen über reelle Funktionen pág. 265)

luego $$m(A') = \varphi(A)$$

Vamos a demostrar ahora que $\psi(A'-A) = m(A'-A) = 0$ (A' y A son medibles ψ, por lo tanto lo es: $A'-A$). En efecto para todo



$X \subset A'-A$, se verifica: $\mu(X) = 0$, pues si hubiera un conjunto $X \subset A'-A$ tal que $\mu(X) > 0$, como $A'-X \supset A$, se deduce:

$$\mu(A') > \mu(A') - \mu(X) > \varphi(A)$$

lo cual contradice la igualdad $\mu(A') = \varphi(A)$; por tanto $\mu(X) = 0$, para todo conjunto $X \subset A'-A$. Entonces

$$\sup_{X \subset A'-A} \mu(X) = 0 \quad \text{o sea:} \quad m(A'-A) = 0$$

y de aquí $m(A') = m(A)$ y finalmente: $\varphi(A) = m(A)$.

PROCEDIMIENTO CONSTRUCTIVO DE CARATHEODORY- LEBESGUE PARA OBTENER FUNCIONES DE MEDIDA.

Consideremos en el espacio E una familia arbitraria $\{R\}$ de conjuntos en la cual está el espacio E; utilizaremos los cubrimientos finitos o infinitos numerables de $A \subset E$ mediante elementos de $\{R\}$. A todo $R \in \{R\}$ le haremos corresponder un número no negativo finito o infinito llamado peso de R, que indicaremos con $p(R) \geq 0$. Podemos entonces definir para cada $A \subset E$ la siguiente función de conjunto:

$$\varphi(A) = \operatorname{Inf.}_{A \subset \bigcup_i R_i} \sum p(R_i) \qquad \varphi(A) = 0 \quad \text{si } A \text{ es vacío}$$

Todo conjunto A tiene por lo menos un cubrimiento, puesto que el espacio total E, que es un R, contiene a A. Vamos a demostrar que la función φ así definida es una medida exterior.

Teorema 17.

La función $\varphi(A) = \operatorname{Inf.}_{A \subset \bigcup_i R_i} \sum_i p(R_i)$ cumple las condiciones I) II) III).

Demostración. I) y II) son evidentes.

Condición III): Sea $V = \bigcup_i A_i$. Para cada A_i existe una familia finita o infinita $\{R_{ij}\}$ tal que $A_i \subset \bigcup_j R_{ij}$

$$\varphi(A_i) + \varepsilon_i > \sum_j p(R_{ij}), \qquad \varepsilon_i > 0 \text{ arbitrario.}$$

Elegiremos los ε_i de tal modo que $\sum \varepsilon_i = \varepsilon > 0$ arbitrario; entonces:

$$V = \bigcup_i A_i \subset \bigcup_i \bigcup_j R_{ij} \quad , \quad \varphi(V) \leq \sum_i \sum_j p(R_{ij}) < \sum_i \left(\varphi(A_i) + \varepsilon_i\right) = \sum \varphi(A_i) + \varepsilon$$

de donde

$$\varphi(V) \leq \sum_i \varphi(A_i)$$

Observación. Evidentemente $\varphi(R_i) \leq p(R_i)$

Teorema 18.

Entre todas las funciones de medida exterior Φ que pueden definirse con condición $\Phi(R) \leq p(R)$, la φ definida en el teorema anterior es la que da el valor máximo para todo conjunto A.

Demostración. Sea A un conjunto cualquiera de E y $A \subset \bigcup_i R_i$

$$\Phi(A) \leq \Phi\left(\bigcup_i R_i\right) \leq \sum_i \Phi(R_i) \leq \sum_i p(R_i)$$

Por lo tanto: $\quad \Phi(A) \leq \operatorname{Inf.}_{A \subset \bigcup_i R_i} \sum_i p(R_i) = \varphi(A)$

de donde: $\quad \Phi(A) \leq \varphi(A)$.

Teorema 19.

Si para R se verifica, para todo cubrimiento de cada conjunto de la familia $p(R) \leq \sum_i p(R_i)$, se tiene: $\varphi(R) = p(R)$.

Demostración. Si se cubre con un sistema $\{R_i\}$, como R es un tal sistema se tiene: $\varphi(R) \leq p(R)$, y como por hipótesis

CONSTRUCCION DE UNA FUNCION DE MEDIDA INTERIOR.

Así como hemos definido el peso ρ mediante el cual se ha construído la función φ de medida exterior, podemos proceder en forma análoga para la construcción de una medida interior. Sea $\{R\}$ una familia arbitraria de conjuntos que incluye al conjunto vacío y $P(R)$ una función ≥ 0 finita o infinita. Definiremos la función de conjunto, siendo A un conjunto $\subset E$:

$$\psi(A) = \sup_{A\supset\bigcup_i R_i} P(R_i) \qquad \psi(A) = 0, \quad \text{si} \quad A = 0$$

<u>Teorema 20.</u>

$\psi(A)$ es una medida interior.

Demostración. I) por definición.

Condición II). Si $B\subset A$, todo conjunto de $\{R\}$ contenido en B está contenido en A; luego $\sup\limits_{B\supset\bigcup_i R_i}\sum P(R_i) \leq \sup\limits_{A\supset\bigcup_i R_i}\sum P(R_i)$

de donde $\psi(B) \leq \psi(A)$.

Condición III'). Sea $V = \bigcup_i A_i$; vamos a demostrar que

$$\psi(V) \geq \sum \psi(A_i)$$

para cada A_i existe una familia finita o infinita $\{R_{ij}\}$ tal que

$$A_i \supset \bigcup_j R_{ij} \qquad \psi(A_i) - \varepsilon_i < \sum P(R_{ij}) \qquad \varepsilon_i > 0 \text{ arbitrario;}$$

eligiendo los ε_i de tal modo que $\sum\varepsilon_i = \varepsilon > 0$ arbitrario, resulta:

$$V = \bigcup_i A_i \supset \bigcup_i\bigcup_j R_{ij} \qquad \psi(V) \geq \sum_i\sum_j P(R_{ij}) > \sum_i \left(\psi(A_i) - \varepsilon_i\right)$$

de donde: $\psi(V) > \sum \psi(A_i) - \varepsilon$

y finalmente: $\psi(V) \geq \sum \psi(A_i)$

<u>Observación</u>. $\psi(R_i) \geq P(R_i)$.

<u>Teorema 21.</u>

Entre todas las funciones de medida interior Ψ que pueden definirse con la condición $\Psi(R) \geq P(R)$ la ψ definida en el teorema anterior es la mínima.

Demostración. Sea $A \subset E$ y $A \supset \bigcup_i R_i$. Se tiene:

$$\Psi(A) \geq \Psi(\bigcup_i R_i) \geq \sum \Psi(R_i) \geq \sum_i P(R_i)$$

Por lo tanto: $\Psi(A) \geq \sup\limits_{A\supset\bigcup_i R_i}\sum P(R_i) = \psi(A)$.

Q. E. D.

En lo que sigue atribuiremos a la familia $\{R\}$ de ideas de cada una de las construcciones anteriores, nuevas propiedades con las cuales obtendremos familias de conjuntos medibles.

<u>Definición de cuerpo.</u>

Una familia de conjuntos $\{R\}$ se llama <u>cuerpo</u> si cumple las siguientes condiciones: Si R_1 y $R_2 \in \{R\}$ 1°) $R_1 \cup R_2 \in \{R\}$; 2°) $R_1 \cap R_2 \in \{R\}$; 3°) $R_1 - R_2 \in \{R\}$. Es fácil ver que para que se cumplan las tres condiciones es suficiente que se cumpla la primera cada vez que sea $R_1 \cap R_2 = 0$ y la 3°).

<u>Definición de σ-cuerpo, tribu o clase aditiva.</u>

Es un cuerpo en que la unión de toda sucesión de conjuntos pertenecientes al cuerpo, también pertenece al cuerpo. En este caso la intersección de toda sucesión de conjuntos pertenecientes al cuerpo, también pertenece al cuerpo. El sistema de los conjuntos medibles φ, forman un σ-cuerpo (teor. 2-5-8).

<u>Teorema 22.</u>

Si la familia $\{R\}$ es un cuerpo y se cumple la relación de semiaditividad

$$p(R_1 \cup R_2) \geq p(R_1) + p(R_2). \qquad \text{siendo } R_1 R_2 = 0$$

los conjuntos R resultan medibles φ, siendo φ la función de medida exterior definida por $p(R)$.

Demostración. Sea W un conjunto arbitrario con $\varphi(W) < \infty$. Existe un sistema $\{R_i\} \subset \{R\}$ tal que $W \subset \bigcup_i R_i$, $\varphi(W) + \varepsilon > \sum p(R_i)$

Vamos a demostrar que si $R \in \{R\}$, es medible φ. Evidentemente:

$$WR \subset \bigcup_i R_i R \qquad WR' \subset \bigcup_i R_i R' \qquad (R' \text{ complementario de } R).$$

$$\varphi(WR) \leq \sum p(R_i R) \qquad \varphi(WR') \leq \sum_i p(R_i R')$$

Sumando: $\varphi(WR) + \varphi(WR') \leq \sum_i p(R_i R) + \sum p(R_i R') \leq \sum_i p(R_i R \cup R_i R') \leq \sum p(R_i)$

$$\varphi(WR) + \varphi(WR') < \varphi(W) + \varepsilon \qquad \varepsilon > 0 \text{ arbitrario.}$$

$$\varphi(WR) + \varphi(WR') \leq \varphi(W)$$

<u>Corolario.</u>

Por el teorema 6., toda unión $\bigcup_i R_i$ es medible φ.

<u>Observación.</u>

Siendo $\{R\}$ un cuerpo, toda $\bigcup_i R_i$ es un R; podemos entonces eliminar la sumatoria $\sum$ en la definición de $\varphi(A)$ y poner

$$\varphi(A) = \inf_{A\subset R} p(R)$$

<u>Observación.</u>

La familia de conjuntos en la cual está definida la $p(R)$ puede extenderse al σ-cuerpo $\{R\} + \{\bigcup_i R_i\}$ que es el menor que contiene al cuerpo $\{R\}$, siendo $\varphi(\bigcup_i R_i) \leq \sum p(R_i) = \sum \varphi(R_i)$ (teor.9). Es decir: <u>Si $\{R\}$ es un cuerpo y $p(R)$ es el peso subaditivo en el cuerpo, se puede prolongar $p(R)$ conservando la subaditividad en el menor σ-cuerpo que contiene a $\{R\}$.</u>

Para la función $P(R)$ vale un teorema análogo al teorema 22, siendo su enunciado el siguiente:

<u>Teorema 23.</u>

Si la familia $\{R\}$ es un cuerpo y se cumplen

$$P(R_1 \cup R_2) \leq P(R_1) + P(R_2) \qquad R_1 R_2 = 0$$

los conjuntos R son medibles ψ, siendo ψ la función de medida interior definida por $P(R)$.

Demostración. Sea W arbitrario $\psi(W) < \infty$; existe $\{R_i\}$ tal que

$$W \supset \bigcup_i R_i \qquad \psi(W) - \varepsilon > \sum_i P(R_i)$$

Si $R \in \{R\}$ se tiene:

$$WR \supset \bigcup_i R_i R \qquad W - R \supset \bigcup_i R_i - R$$

$$\psi(WR) \geq \sum_i P(R_i R) \qquad \psi(W - R) \geq \sum_i P(R_i - R)$$

$$\psi(WR) + \psi(W - R) \geq \sum P(R_i R \cup R_i - R) \geq \sum_i P(R_i)$$

Vale aquí una observación análoga a la que sigue al teorema 22.

<u>Observación.</u>

Los teoremas 22 y 23 nos dan dos cuerpos de conjuntos medibles según las respectivas ~~xxxxxxx~~ funciones de medida. Es interesante investigar si puede haber alguna relación entre las dos medidas, especialmente si la P está definida mediante la p. Sobre esto lo que se puede observar por ahora es lo siguiente:

Definida la $p(R)$ y mediante ésta la $\varphi(A)$, sea $\{R^x\}$ la familia de los conjuntos medibles φ y definamos

$$P(R^x) = \mu(R^x) \qquad\qquad R^x \text{ medible } \varphi$$

Esta P nos define una medida interior ψ que es la medida interior correspondiente a φ ; pues:

$$\psi(A) = \operatorname{Sup.}_{R^x\subset A} P(R^x) = \operatorname{Sup.}_{R^x\subset A} \mu(R^x)$$

En este caso todo conjunto medible ψ, tiene medida igual a la medida φ .

FUNCIONES MEDIBLES EN UN ESPACIO ABSTRACTO.

En lo que sigue haremos un resumen de la exposición del libro de S. Saks: Theory of Integral, New York, 1937; sobre la integral en un espacio abstracto.

Dada una función de medida exterior φ, consideremos la clase aditiva de todos los conjuntos X medibles φ , que indicaremos con $\mathfrak{X} = \{X\}$.
Una función de punto $f(x)$ definida en el conjunto $X \in \mathfrak{X}$, se dirá medible φ, si

$$\underset{x}{C}\,(x \in X;\ f(x) > a) \in \mathfrak{X} \qquad \text{para todo } a \text{ finito.}$$

Por brevedad escribiremos $\underset{x}{C}\,(f(x) > a)$ en lugar de $\underset{x}{C}\,(x \in X;\ f(x) > a)$.

Es fácil comprobar que la condición a) $C\,(f(x) > a) \in \mathfrak{X}$ equivale a cada una de las siguientes: b) $\underset{x}{C}\,(f(x) \le a) \in \mathfrak{X}$; c) $\underset{x}{C}\,(f(x) < a) \in \mathfrak{X}$; d) $\underset{x}{C}\,(f(x) \ge a) \in \mathfrak{X}$. En efecto: a) y b) así como c) y d) son conjuntos complementarios y en cuanto a a) y d) por ejemplo, basta ver que

$$\underset{x}{C}\,(f(x) \ge a) = \prod_{1}^{\infty} \underset{x}{C}\,(f(x) > a - 1/n)$$

como cada $\underset{x}{C}\,(f(x) > a - 1/n)$ es medible, lo es también la intersección de todos ellos.

Definición. Una función se llama simple cuando sólo puede tomar un número finito de valores distintos.

Teorema 24.

Condición necesaria y suficiente para que un conjunto A sea medible, es que lo sea su función característica. Más generalmente: condición necesaria y suficiente para que una función simple sea medible, es que para cada valor de $f(x)$, el conjunto de los $x \in X$ en que toma dicho valor sea medible

Teorema 25.

Toda $f(x)$ medible no negativa en X, es el límite de una sucesión no decreciente de funciones simples, finitas, medibles y no negativas.

Demostración. Para todo n entero positivo y $x \in X$, pongamos:

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{i-1}{2^n} & si \quad \frac{i-1}{2^n} \leq f(x) < \frac{i}{2^n} \qquad 1 \leq i \leq 2^n n \\ n & si \quad f(x) \geq n \end{cases}$$

INTEGRAL EN UN ESPACIO ABSTRACTO.

Sea un espacio abstrato y sea $\varphi(x)$ una función de medida exterior la cual define el conjunto $\{X\}$ de los medibles φ; indicaremos con μ la medida.

1) Si $f(x)$ es una función medible ≥ 0, llamaremos integral definida correspondiente a la medida μ, de $f(x)$ sobre X a:

$$\int_X f(x) d\mu(x) = \text{Súp.} \sum_1^n v_k \cdot \mu(X_k)$$

para toda descomposición finita disjunta de $X = \bigcup_1^n X_k$ y siendo

$$v_k = \operatorname*{Inf.}_{x \in X_k} f(x)$$

2) Si $f(x)$ es una función medible definida sobre $X \in \{X\}$ cualquiera, llamaremos integral definida de $f(x)$ correspondiente a la medida μ, a:

$$\int_X f(x) . d\mu(x) = \int_{C_X (f(x)>0)} f(x) . d\mu(x) - \int_{C_X (f(x)<0)} -f(x) . d\mu(x)$$

si los dos términos del segundo miembro existen. Si este valor es finito, diremos que la función es integrable μ.

3) Si $g = \{y_1, X_1; y_2, X_2; \dots; y_m, X_m\}$ es una función simple ≥ 0 en $X = \bigcup_1^m X_i$ siendo $X_i \in \{X\}$, se tiene: $\int_X g(x) d\mu x = \sum_1^m y_i \mu(X_i)$

Demostración.

$\int_X g . d\mu = \text{Sup.} \sum_1^n y'_k \cdot \mu(X'_k)$; $X = X'_1 \cup X'_2 \cup X'_3 \cup \dots \cup X'_n$ es una subdivisión cualquiera disjunta de X. Siendo para todo k tal que $X'_k \cap X_i \neq 0$ $y'_k = y_i$, resulta: $\sum_1^{n} y'_k \cdot \mu(X'_k) = \sum_{k=1}^n y'_k \sum_1^m \mu(X'_k \cap X_i) = \sum_1^n \sum_1^m y_i \mu(X'_k \cap X_i) =$

$$= \sum_1^m y_i \sum_1^n \mu(X'_k \cap X_i) \leq \sum_1^m y_i \mu(X_i) \quad \therefore \int g \, d\mu x \leq \sum_1^m y_i \mu(X_i)$$

y siendo $\sum y_i\,\mu(X_i)$ una de las sumas obtenidas por subdivisión de X, resulta:

$$\sum_{i=1}^{m} y_i\cdot\mu(X_i) \le \int_X g(x)\cdot d\mu(x).$$

Propiedades fundamentales de la Integral Definida.

Si $g(x)$, $h(x)$, son funciones simples ≥ 0 y medibles sobre X y $\{g_n(x)\}$ es una sucesión no decreciente de tales funciones, se tiene:

1) $\int_X (g+h)\,d\mu(x) = \int_X g\,d\mu + \int_X h\,d\mu$

2) $\int_{X_1\cup X_2} g\,d\mu = \int_{X_1} g\,d\mu + \int_{X_2} g\,d\mu$ siendo $X_1\cap X_2 = 0$.

3) Si $\lim g_n(x) \ge h(x)$ sobre X, se deduce: $\lim \int_X g_n(x)\,d\mu(x) \ge \int_X h\,d\mu$

4) Si $\lim g_n(x) = g(x)$, se deduce: $\lim \int_X g_n(x)\,d\mu(x) = \int_X g(x)\,d\mu(x)$.

Demostraciones.

1) $g = (g_1, G_1; g_2, G_2; \dots; g_n, G_n)$; $h = (h_1, H_1; h_2, H_2; \dots; h_m, H_m)$ sean dos funciones simples y $X = G_1\cup G_2\cup G_3 \dots = H_1\cup H_2\cup H_3\cup\dots$ las dos descomposiciones de X en las partes en que dichas funciones toman todos sus valores. Se tiene:

$$\int_X (g+h)\cdot d\mu = \sum_1^n\sum_1^m (g_i+h_j)\cdot\mu(G_i\cap H_j) = \sum\sum g_i\,\mu(G_i\cap H_j) + \sum\sum h_j\,\mu(G_i\cap H_j) =$$

$$= \sum g_i \sum \mu(G_i\cap H_j) + \sum h_j \sum \mu(G_i\cap H_j) = \sum g_i\,\mu(G_i) + \sum h_j\,\mu(H_j) =$$

$$= \int_X g\,d\mu + \int_X h\,d\mu$$

2) $$\int_{X_1\cup X_2} g\,d\mu = \sum_1^n g_i\,\mu(G_i) = \sum_1^n g_i\,\mu(X_1\cap G_i) + \sum g_i\,\mu(X_2\cap G_i) = \int_{X_1} g\,d\mu + \int_{X_2} g\,d\mu$$

3) Supongamos definida la función simple h de tal manera que

$$0 \le h_1 < h_2 < h_3 \dots < h_m$$

se puede reemplazar el signo $\le$ por $<$ pues si fuera $h = 0$ sobre H_1, se tendría $\int_X h\,d\mu = \int_{X-H_1} h\,d\mu$ y siendo $\int_X g_n\,d\mu \ge \int_{X-H_1} g_n\,d\mu$ se puede reemplazar X por $X - H$. Supondremos pues:

$$0 < h_1 < h_2 < h_3 \dots < h_m$$

Consideremos primero $h_m < \infty$. Siendo $\lim_{n\to\infty} g_n(x) \ge h(x)$, dado $\varepsilon > 0$ $\varepsilon > h_1$, para todo n entero positivo podemos considerar la sucesión de conjuntos

$$\quad = C\{\, g_n(x) > h(x) - \varepsilon \,\}$$

que es creciente y convergente a X y se tiene : $\mu(Q_n) \to \mu(X)$.

Ahora si $\underline{\mu(X) \neq \infty}$., existe n_0 tal que para $n > n_0$

$$\mu(X - Q_n) < \varepsilon$$

$$\int_X g_n d\mu \geq \int_{Q_n} g_n d\mu \geq \int_{Q_n} (h - \varepsilon) d\mu = \int_{Q_n} h d\mu - \varepsilon \mu(Q_n) = \int_X h d\mu - \int_{X-Q_n} h d\mu - \varepsilon \mu(Q_n) \geq$$

$$\geq \int_X h d\mu - h_m \mu(X - Q_n) - \varepsilon \mu(Q_m) \quad \therefore \quad \lim \int_{X_n} g_n d\mu \geq \int_X h d\mu - \varepsilon \cdot \mu(X)$$

y finalmente: $\lim \int_X g_n d\mu \geq \int_X h d\mu$

Si $\mu(X) = \infty$; $\int_X g_n d\mu \geq (h_1 - \varepsilon) \cdot \mu(Q_n) \quad \therefore \quad \lim \int_X g_n d\mu = \infty$

__Sea ahora $h_m = \infty$.__ Entonces $\lim \int_X g_n d\mu \geq k \cdot \mu(H_m) + \sum_1^{m-1} h_i \mu(H_i)$

siendo k cualquier valor finito ≥ 0; por tanto subsiste si $k = h_m = \infty$.

4) Sea $X_1, X_2, \ldots, X_m$ una subdivisión arbitraria de X, $X_i \cap X_j = 0$, y $h_i = \operatorname{Inf}_{x \in X_i} g(x)$ y sea $h = (h_1, X_1; h_2, X_2; \ldots; h_m, X_m)$

de donde se deduce: $\lim g_n(x) \geq h(x)$

$$\lim \int_X g_n d\mu \geq \int_X h d\mu = \sum_1^m h_i \mu(X_i) \quad \therefore \quad \lim \int_X g_n d\mu \geq \int_X g d\mu$$

Por otra parte $\lim \int_X g_n d\mu \leq \int_X g d\mu$ por que $0 \leq g_n(x) \leq g(x)$.

Utilizando las propiedades demostradas para las funciones simples y el teorema 25, se obtienen los siguientes teoremas para funciones integrables

I) $\int_X (g + h) d\mu = \int_X g d\mu + \int_X h d\mu$

II) $\int_{X_1 \cup X_2} f d\mu = \int_{X_1} f d\mu + \int_{X_2} f d\mu \qquad X_1 \cap X_2 = 0$

III) Si $\mu X = 0 \qquad \int_X f d\mu = 0$.

IV) Si $g(x) = h(x)$ en casi todo X, y una de ellas es integrable, la otra también lo es y $\int_X g d\mu = \int_X h d\mu$.

V) Si $\int f d\mu \neq \infty$, $\mu(\underset{X}{C} \{f(x) = \infty\}) = 0$.

VI) __Distributividad de la integral__. Si $g(x)$ y $h(x)$ son integrables sobre X, $ag(x) + bh(x)$, a b constantes, es integrable y:

$$\int (ag + bh) d\mu = a \int g d\mu + b \int h d\mu$$

VII) Condición necesaria y suficiente para que la función medible $f(x)$ sea integrable μ, sobre X, es que lo sea su valor absoluto $|f(x)|$.

VIII) Si para $g(x)$ medible sobre X existe una $h(x)$ integrable μ tal que $|g| \leq h$ sobre X, $g(x)$ es integrable ; en particular toda función medible μ y acotada sobre X de medida μ finita, es integrable μ sobre X.

IX) <u>Teorema 1° del valor medio</u>. Si $f(x)$ es acotada y medible μ sobre X y $g(x)$ es integrable μ sobre X, $f(x) \cdot g(x)$ es integrable μ sobre X y existe un número γ entre los extremos de $f(x)$ en X, tal que:

$$\int_X f \cdot |g| \cdot d\mu = \gamma \cdot \int_X |g| \cdot d\mu .$$

LA MEDIDA Y LA INTEGRAL EN UN ESPACIO TOPOLOGICO.

Antes de entrar al estudio de la medida y de la integral en un Espacio Topológico, daremos algunas definiciones.

Espacio Topológico es un conjunto de elementos en el cual se puede definir la familia de los subconjuntos cerrados ; siendo éstos los que cumplen las siguientes condiciones:

1) El E y el conjunto vacío son conjuntos cerrados.

2) La intersección de una familia cualquiera de conjuntos cerrados, es un conjunto cerrado.

3) La unión de un número finito de conjuntos cerrados, es un conjunto cerrado.

Una segunda manera de definir el Espacio Topológico es mediante la clausura de un conjunto. Si $A \subset E$ se llama clausura de A y se indica con $\bar{A}$ al conjunto que goza de las siguientes propiedades:

1) $\bar{0} = 0$; 2) $A \subset \bar{A}$; 3) $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}$; 4) $\bar{\bar{A}} = \bar{A}$.

Si a todo conjunto $A \subset E$ se le puede hacer corresponder uno $\bar{A}$, el conjunto de aquellos que coinciden con sus clausuras satisfacen las condiciones que definen los conjuntos cerrados; definen el espacio topológico coincidente con el definido primitivamente.

Finalmente, se puede definir un Espacio Topológico utilizando la base abierta. Se llama así a un sistema $\mathfrak{B}$ de conjuntos abiertos tal que todo conjunto abierto de E es suma de elementos de $\mathfrak{B}$; en particular la clase de todos los conjuntos abiertos de E es una base abierta.

Toda base abierta $\mathfrak{B}$ goza de las siguientes propiedades:

1) Dado $x \in E$, existe $U_x \in \mathfrak{B}$ tal que $x \in U_x$;

2) Si $x \in E$ y además $x \in U$, $x \in V$ siendo $U \in \mathfrak{B}$ $V \in \mathfrak{B}$, existe un elemento $W \in \mathfrak{B}$ tal que $x \in W \subset U \cap V$.

Cada uno de los elementos de $\mathfrak{B}$ que contienen a un punto x se llaman entornos de x.

Un Espacio Topológico se llama de <u>Hausdorff si la intersección de las clausuras de todos los entornos de todo elemento x del espacio es sólo x</u>. Esta definición equivale a la siguiente: Si x, y son elementos distintos, existen un entorno de x y uno de y cuya intersección es vacía.

En un espacio topológico de Hausdorff un conjunto se llama <u>compacto</u>, si toda familia de subconjuntos de intersección vacía contiene una subfamilia finita de intersección vacía. Esta definición de conjunto compacto equivale a la siguiente: Un conjunto se llama compacto si toda representación de dicho conjunto como unión de conjuntos abiertos, puede reducirse a la unión de un número finito de conjuntos extraídos de dichos conjuntos abiertos.

Un espacio se llama <u>localmente compacto</u> si todo punto posee un entorno cerrado compacto o bien si posee un entorno cuya clausura es compacta.

<u>Espacio Normal</u>. Hay tres definiciones equivalentes (E. Cech : Espacios bicompactos Annals of Mathematics V.38 n.4 Oct. 1937.):

1) Si F_1, F_2 son subconjuntos cerrados sin elementos comunes, existen dos subconjuntos abiertos G_1, G_2 tales que $F_1 \subset G_1$, $F_2 \subset G_2$ $G_1 G_2 = 0$.

2) Si F_1, F_2 son subconjuntos cerrados sin elementos comunes, existe una función contínua en E tal que $f(x) = 0$ para $x \in F_1$ $f(x) = 1$ para $x \in F_2$.

3) Si F es un conjunto cerrado en E y $f(x)$ función contínua acotada en F, existe una extensión contínua de $f(x)$ a todo el espacio E.

<u>MEDIDA DE RADON</u>.

Consideremos ahora un espacio topológico localmente compacto. La familia de los conjuntos de E <u>compactos cerrados</u> está contenida en una clase aditiva mínima[1]; supongamos definida una medida $\rho(X)$ siendo X perteneciente a dicha clase aditiva. Con el procedimiento seguido para un espacio abstracto se define la integral definida de toda función medible en dicha clase aditiva. Sea ρ una medida para la cual todas las funciones continuas nulas fuera de un conjunto compacto cerrado sean integrables. Para tal medida

$$I(f) = \int f(x)\, d\rho(x)$$

es una funcional lineal ≥ 0 sobre L_+. Esta medida ρ se llama <u>medida de Radón</u>; vale para esta medida el teorema de Riesz de la teoría de funcionales lineales. Su enunciado es el siguiente:

<u>Teorema de Riesz-Radón para los espacios topológicos localmente compactos de Hausdorff.</u>

Si $I(f)$ es una funcional lineal ≥ 0, es decir, cumple las siguientes condiciones: 1°) $I(\alpha \cdot f + \beta \cdot g) = \alpha \cdot I(f) + \beta \cdot I(g)$; 2°) $I(f) \leq C . \mathrm{Sup}\, |f|$, para todas las f, g funciones de L_+, clase constituída por las funciones contínuas ≥ 0 nulas fuera de un conjunto compacto del espacio E. En tal caso <u>existe una medida ρ de Radón y una sola</u>, definidas sobre la menor clase aditiva que contiene a todos los conjuntos cerrados compactos, siendo para todo cerrado compacto

$$\rho(C) = \mathrm{Inf.}\ I(f) \quad \text{para} \quad f \in L_+ \ , \quad f \geq 1 \quad \text{para} \quad x \in C.$$

<u>Demostración</u>.

Para demostrar este teorema nos basaremos sobre los siguientes teoremas topológicos, en los cuales C indica conjunto cerrado compacto de E.

a) Para todo C existe un conjunto abierto $A \supset C$ tal que $\bar{A}$ es un conjunto compacto, por tanto según un teorema de Alexandroff-Urysohn (AU p.26), es un subespacio normal compacto. En efecto: para cada $x \in C$, existe U_x con $\bar{U}_x$ compacto; C puede cubrirse con un número finito de U_x, y el conjunto

$$A = U_{x_1} \cup U_{x_2} \cup U_{x_3} \ \ldots \cup U_{x_n} \supset C$$

cumple las condiciones enunciadas.

b) Para todo C, existe $f(x) \in L_+$ definida en E tal que $f(x) = 1$ para x C. Demostración: Sea A el conjunto abierto determinado en a); siendo C cerrado, $\bar{A} - A$ y C son subconjuntos cerrados de $\bar{A}$ sin elementos comunes y por ser $\bar{A}$ normal existe una función $f(x)$ contínua ~~definida en~~ $\bar{A}$

definida en $\overline{A}$ siendo $f(x) = 1$ para $x \in C$, $f(x) = 0$ en $\overline{A} - A$; tomando $f(x) = 0$ para $x \in E - \overline{A}$ queda demostrado.

c) Si $C_1 \cap C_2 = 0$, $f(x) \in L_+$ siendo $f(x) = 1$ en C_1, existe una función continua $h(x) \leq f(x)$ siendo $h(x) = 0$ en C_2, siendo además

$$|I(h) - \rho(C_1)| < \varepsilon$$

Demostración. Sea $g(x) \in L_+$ con $g(x) = 1$ para $x \in C_1$ tal que

$$I(g) - \rho(C_1) < \varepsilon$$

y además $\varphi(x) \in L_+$ tal que: $\varphi(C_1) = 1$, $\varphi(C_2) = 0$ $\quad 0 \leq \varphi \leq 1$

La función $h(x) = \min\left[g(x).\varphi(x) ; f(x)\right]$ es tal que:

$$h(C_1) = 1, \quad h(C_2) = 0 \quad h(x) \leq f(x), \ I(h) \geq \rho C_1$$

y como $h \leq g$, se deduce: $I(h) < \rho(C_1) - \varepsilon$.

d) Si $C_1 \cap C_2 = 0$ $\quad \rho(C_1 \cup C_2) = \rho(C_1) + \rho(C_2)$.

Demostración. Evidentemente: $\rho(C_1 \cup C_2) \leq \rho(C_1) + \rho(C_2)$.

Para demostrar la desigualdad en sentido contrario, sea $f(x)$ una función perteneciente a L_+ siendo $f(x) = 1$ para $x \in C_1 \cup C_2$ y $I(f) - \rho(C_1 \cup C_2) < \varepsilon$ (1)

Tomemos ahora dos funciones $f_1(x)$, $f_2(x)$ de L_+ tales que:

$$f_1(x) \leq f(x) \quad f_2(x) \leq f(x) \quad I(f_1) - \rho C_1,\ I(f_2) - \rho C_2 < \varepsilon$$

$$f_1 = \begin{cases} 1 & \text{en } C_1 \\ 0 & \text{en } C_2 \end{cases} \qquad f_2 = \begin{cases} 0 & \text{en } C_1 \\ 1 & \text{en } C_2 \end{cases}$$

La función $f - f_1$ pertenece a L_+ siendo $f - f_1 = 1$ en C_2; luego

$$I(f - f_1) \geq \rho C_2, \text{ de donde } I(f - f_1) + I(f_1) \geq \rho C_2 + \rho C_1$$

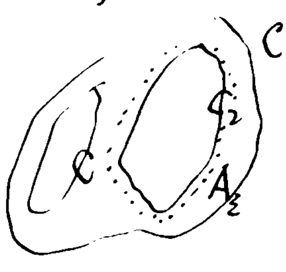
$$\text{por tanto: } I(f) \geq \rho C_2 + \rho C_1$$

que comparando con la desigualdad (1); $\quad \rho(C_1 \cup C_2) \geq \rho(C_1) + \rho(C_2)$.

e) Si $C_1 \supset C_2$ $\quad \rho(C_1) - \rho(C_2) = \sup_{C \subset C_1 - C_2} \rho(C)$.

Demostración. Siendo C disjunto de C_2, se tiene:

$$\rho(C) + \rho(C_2) = \rho(C \cup C_2) \leq \rho C_1 \quad \text{de donde: } \rho(C) \leq \rho(C_1) - \rho(C_2)$$



Hay que demostrar que dado $\varepsilon > 0$, existe $C \subset C_1 - C_2$ tal que: $\rho(C) > \rho(C_1) - \rho(C_2) - \varepsilon$

Para ello, sea $f_2 \in L_+$ $f_2(C_2) = 1$, $I(f_2) - \rho C_2 < \varepsilon$,

$$A_\varepsilon = \mathop{C}_{x}\left(f_2(x) > 1 - \ \right);$$

Poniendo $C = C_1 - A_\varepsilon$ (cerrado); además sea $f(x) \in L_+$ siendo $f(C) = 1$

$I(f) - \rho(C) < \varepsilon$; siendo:

$f + f_2 > 1 - \varepsilon$ en C_1, $A_1 = \underset{x}{C}\,(f + f_2 > 1 - \varepsilon) \supset C_1$

Por tanto existe $f_1 \in L_+$ siendo $f_1 = 1$ en C_1, $f_1 = 0$ en $E - A_1$, $I(f_1) \geq \mu(C_1)$.

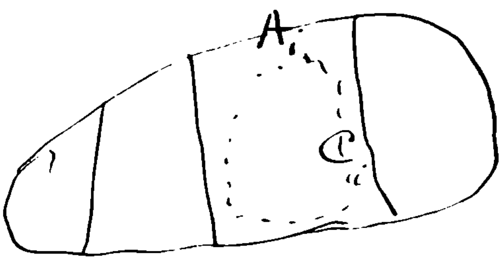
Poniendo $h_\varepsilon(x) = f_1 - \varepsilon$, siendo $f + f_2 \geq f_1 = 1$ en C_1,

$$f + f_2 \geq f_1 - \varepsilon \text{ , de donde: } I(f) + I(f_2) \geq I(f_1 - \varepsilon)$$

como $f_1 - \varepsilon \to f_1$, se deduce: $I(f) + I(f_2) \geq I(f_1)$

$$\rho(C) + \rho(C_2) \geq \rho(C_1) - 3\varepsilon. \quad \text{q.e.d.}$$

Para demostrar el teorema de Riesz-Radón, consideremos ahora la siguiente función: $\psi(X) = \sup_{C \subset X} \rho(C)$ para todo conjunto $X \subset E$, y probaremos que ψ es una función de medida interior. En efecto es evidente que cumple las condiciones I) y II). En cuanto a III') sea $A = \bigcup_i A_i$ (A_i disjuntos); consideremos la suma



$A^{(n)} = \bigcup_1^n A_i$ de un número finito de sumandos. Para cada A_i, existe un conjunto $C_i \subset A_i$, tal que $\rho(C_i) > \psi(A_i) - \varepsilon_i$ de donde $\sum_1^n \rho(C_i) > \sum_1^n \psi(A_i) - \sum \varepsilon_i$

Siendo los C_i conjuntos disjuntos por serlo los A_i se tiene (a);

$$\rho\left(\sum_1^n C_i\right) > \sum_1^n \psi(A_i) - \sum_1^n \varepsilon_i$$

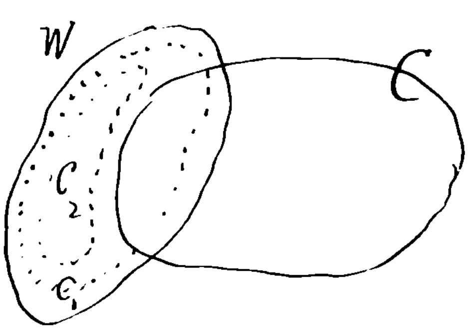
pero $\bigcup_1^n C_i = C \subset A$ de donde: $\rho(C) \leq \psi(A)$, por tanto: $\psi(A) \geq \sum_1^n \psi(A_i) - \sum \varepsilon_i$

y siendo n arbitrario

$$\psi(A) \geq \sum_1^\infty \psi(A_i)$$

Vamos a demostrar ahora que con esta medida interior <u>los conjuntos C son medibles</u>.

Demostración. Si W es un conjunto cualquiera de medida interior finita



vamos a probar que $\psi(W) \leq \psi(WC) + \psi(W - C)$

Para ello sea $C_1 \subset W$ tal que: $\rho(C_1) > \psi(W) - \varepsilon_1$

Como $C_1 C \subset C$ $\therefore$ $\rho(C_1 C) \leq \rho(C_1)$

Siendo $\rho(C_1) - \rho(C_1 C) = \max_{C \subset C_1 - C} \rho(C)$, existe un conjunto $C_2 \subset C_1 - C$ tal que

$$\rho(C_2) > \rho(C_1) - \rho(C_1 C) - \varepsilon_2$$

de donde

$$\rho(C_2) + \rho(C_1 C) > \rho(C_1) > \psi(W) - (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)$$

Como $C_2 \subset A - C$ y $C_1 \subset A \cdot C_1$, se tendrá: $\rho(C_2) \leq \psi(A - C)$, $\rho(C_1) \leq \psi(A \cdot C)$

y sumando miembro a miembro estas desigualdades:

$$\psi(A - C) + \psi(A \cdot C) \geq \rho(C_2) + \rho(C_1 \cdot C) > \psi(A) - (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)$$

Finalmente como, además,

$$\psi(C) = \max_{C' \subset C} \rho(C') = \rho(C),$$

resulta que la función ρ es precisamente la medida de Carathéodory.

— · —

Samuel [illegible]

Buenos Aires Mayo de 1946.