Transformaciones de Laplace-Stieltjes generalizadas

Repetto, Celina H.

1942

Tesis presentada para obtener el grado de Doctor en Ciencias Físico-Matemáticas de la Universidad de Buenos Aires

La clásica Transformación de Laplace, utiliza exclusivamente integrales de Riemann y sus propiedades más importantes figuran en el Tratado de Doetsch "Theorie und Anwendung der Laplace-Transformation".

Una generalización inmediata, consiste en adoptar integrales de Riemann-Stieltjes y es así como la considera D. V. Widder en diversas memorias(A generalization of Dirichlet's series and of Laplace's integrals by means of a Stieltjes integral- Transactions of the American Mathematical Society- 1929. The inversion of the Laplace integral and related moment problem- Transactions of the American Mathematical Society- 1934- etc.).

Otrageneralización radica, en referirse solamente a integrales Riemann pero reemplazando el factor exponencial $e^{-z t}$ por $e^{-\lambda(t) z}$; en esta forma y paralelamente con la Teoría de Series de Dirichlet, fué desarrollada en el "Curso sobre series e integrales D" (1925) del Doctor Rey Pastor, quien ultimamente considerara la generalización que incluye a las dos anteriores es decir: la transformación que corresponde a integrales Riemann-Stieltjes y con el factor exponencial $e^{-\lambda(t) z}$.

Nuestro trabajo versa sobre esta transformación generalizada, que tiene la ventaja de comprender a las Series de Dirichlet y que sólo cuando se imponen a $\lambda(t)$ condiciones restrictivas (como por ejemplo $\lambda(t)$ derivable) se reduce a la clásica de Laplace por un cambio de variable; pero aún en los casos en que nos hemos visto obligados a aceptar tales condiciones, dimos la demostración de los teoremas correspondientes en la forma general, pues así las conclusiones se aplican sin previo cambio de variable a otras transformaciones como por ejemplo las del tipo Hermite.

Dejamos aquí constancia de nuestro sincero agradecimiento al Doctor Julio Rey Pastor que fué quien nos propuso el tema y que en todo momento nos prestó su tan valiosa guía .

--------0-------

INDICE

Pág.

Convergencia uniforme de las integrales D_λ 5

Convergencia de las integrales D_λ con variable complejo parabólica 24

Ultraconvergencia 29

Inversión 36

Derivadas fraccionarias de la función de repartición 43

Algunos casos en que se determina el campo de analiticidad de la función D_λ 49

Comportamiento de la integral en las líneas verticales 59

Resumen de la Teoría preliminar de las funciones D_λ 79

Bibliografía 87

--------0--------

CONVERGENCIA UNIFORME

Los teoremas relativos a la convergencia simple y a la convergencia absoluta de las funciones D_λ, están expuestos brevemente en el Resumen de la Teoría preliminar que figura en las notas finales, donde se transcriben también, las fórmulas de las abscisas correspondientes c y a ; en lo que respecta a la convergencia uniforme, se recuerda allí el teorema que la asegura en un ángulo que tiene por vértice un punto de convergencia simple.

Nosotros establecemos los casos en que existe la convergencia uniforme y consideramos luego la convergencia de funciones D_λ, de variable compleja parabólica, pues en ellas se presenta la particularidad de coincidir las abscisas de convergencia simple y uniforme .

En algunos de los teoremas que damos, la demostración es paralela a la ya conocida para la transformación ordinaria de Laplace e igualmente sencillas a pesar de la doble generalización del tipo de integral y de la exponencial que figura en el integrando, resultan así, con el mismo esfuerzo, propiedades más generales que comprenden a aquellas ya conocidas como casos particulares de estas .

TEOREMA

Si la integral

$$(1) \qquad \int_0^\infty e^{-z\lambda(r)}\, d\alpha(r)$$

converge absolutamente en $z = z_0 = x_0 + i y_0$, converge también uniformemente en el semiplano $x \geq x_0$.

H) $\displaystyle\int_0^\infty e^{-z\lambda(r)}\, d\alpha(r)$ conv. absol. en $z_0 = x_0 + i y_0$

T) $\displaystyle\int_0^\infty e^{-z\lambda(r)}\, d\alpha(r)$ conv. unif. en $x \geq x_0$

Demostración:

La hipótesis implica que, dado un ε arbitrariamente pequeño, existe un r_0 tal que

$$\int_{r_1}^{r_2} \left| e^{-z_0\lambda(r)}\, d\alpha(r) \right| < \varepsilon \qquad \text{para} \qquad r_2 > r_1 > r_0$$

o sea

$$(1) \qquad \int_{r_1}^{r_2} e^{-x_0\lambda(r)}\, |d\alpha(r)| < \varepsilon \qquad \text{para} \qquad r_2 > r_1 > r_0$$

Ahora bien

$$\left| \int_{r_1}^{r_2} e^{-z\lambda(r)}\, d\alpha(r) \right| \leq \int_{r_1}^{r_2} e^{-x\lambda(r)}\, |d\alpha(r)|$$

y para $x \geq x_0$

$$\left| \int_{r_1}^{r_2} e^{-z\lambda(r)}\, d\alpha(r) \right| \leq \int_{r_1}^{r_2} e^{-x_0\lambda(r)}\, |d\alpha(r)|$$

que por (2) es menor que ε para $r_2 > r_1 > r_0$; por lo tanto

$$\left| \int_{r_1}^{r_2} e^{-z\lambda(r)} \, d\,a(r) \right| < \varepsilon$$

para todo z tal que $R(z) \geq x_0$ y en consecuencia se verifica la tesis.

TEOREMA (*)

Si $\alpha(r) \downarrow 0$ es decir, si es decreciente desde unvalor de r en adelante y converge a cero y además existe $\lambda'(r)$ y es creciente desde otro valor de r en adelante, la integral

$$(3) \qquad \int_0^{\infty} e^{-z\lambda(r)} \alpha(r) \, dr$$

converge uniformemente en el semiplano $x \geq 0$, con exclusión de un entorno arbitrariamente pequeño del origen .

H) $\alpha(r) \downarrow 0$ para $r \geq R_1$

$\lambda'(r)$ creciente para $r \geq R_2$

T) $\int_0^{\infty} e^{-z\lambda(r)} \alpha(r) \, dr$ converge unif. para x 0, con exclusión de un entorno arbitrariamente pequeño del origen.

Demostración.

Consideremos el punto

$z = x + iy$ donde $x \geq 0$

y los números ω_1 y ω_2 tales que

$R \leq \omega_1 < \omega_2$ y $R \geq R_1$; $R \geq R_2$

Veremos que el módulo de la integral entre ω_1 y ω_2, desde un r en adelante es menor que ε . En efecto se verifica que

---

(*) Este teorema puede reducirse al correspondiente de la transformación ordinaria de Laplace por cambio de variable,pero preferimos demostrarlo directamente para dar unidad y autonomía a la exposición. Esta observación vale para el siguiente teorema y para algún otro.

$$\int_{\omega_1}^{\omega_2} e^{-z\lambda(r)}\alpha(r)\,dr = \int_{\omega_1}^{\omega_2} e^{-x\lambda(r)}\left[\cos y\lambda(r) - i\,\mathrm{sen}\,y\lambda(r)\right]\alpha(r)\,dr =$$

$$= \int_{\omega_1}^{\omega_2} e^{-x\lambda(r)}\cos y\lambda(r).\,\alpha(r)\,dr - i\int_{\omega_1}^{\omega_2} e^{-x\lambda(r)}\alpha(r)\,\mathrm{sen}\,y\lambda(r)\,dr$$

Si multiplicamos y dividimos los integrandos por $\lambda'(r)$ es, en virtud del segundo teorema del valor medio:

$$\int_{\omega_1}^{\omega_2} e^{-z\lambda(r)}\alpha(r)\,dr = e^{-x\lambda(\omega_1)}\alpha(\omega_1)\frac{1}{\lambda'(\omega_1)}\int_{\omega_1}^{\omega'}\lambda'(r)\cos y\lambda(r)\,dr -$$

$$-i\,e^{-x\lambda(\omega_1)}\alpha(\omega_1)\frac{1}{\lambda'(\omega_1)}\int_{\omega_1}^{\omega''}\lambda'(r)\,\mathrm{sen}\,y\lambda(r)\,dr$$

donde ω' y ω'' son dos puntos del intervalo $(\omega_1\,\omega_2)$.

Integrando, para $|y| > 0$

$$\int_{\omega_1}^{\omega'}\lambda'(r)\cos y\lambda(r)\,dr = \left.\frac{\mathrm{sen}\,y\lambda(r)}{y}\right|_{\omega_1}^{\omega'} = \frac{1}{y}\left[\mathrm{sen}\,y\lambda(\omega') - \mathrm{sen}\,y\lambda(\omega_1)\right]$$

Por lo tanto

$$\left|\int_{\omega_1}^{\omega'}\lambda'(r)\cos y\lambda(r)\,dr\right| \leq \frac{2}{|y|}$$

Análogamente:

$$\left|\int_{\omega_1}^{\omega''}\lambda'(r)\,\mathrm{sen}\,y\lambda(r)\,dr\right| \leq \frac{2}{|y|}$$

$$\left|\int_{\omega_1}^{\omega_2} e^{-z\lambda(r)}\alpha(r)\,dr\right| \leq e^{-x\lambda(\omega_1)}\alpha(\omega_1)\frac{1}{\lambda'(\omega_1)}\left[\frac{2}{|y|} + \frac{2}{|y|}\right] =$$

$$= \frac{4\,e^{-x\lambda(\omega_1)}\alpha(\omega_1)}{|y|\;\lambda'(\omega_1)}$$

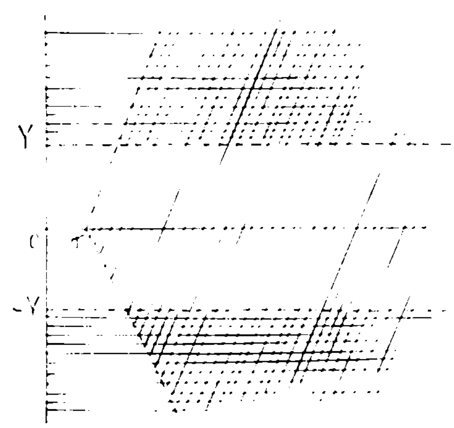
Para $\omega_1 \to \infty$ es, según la Hipótesis: $\alpha(\omega_1) > 0$; $\lambda'(\omega_1) > K$; como $\lambda(\tau)$ es infinitamente creciente, para todo $x \geq 0$ y $|y| \geq Y$, el módulo de esta integral o sea el módulo del resto tiende uniformemente a 0.

Obtenemos así la convergencia uniforme para $x \geq 0$, salvo la zona

$$-Y < y < Y$$

Pero por el teorema(*) que dice : Si la integral converge en un punto σ, converge uniformemente en un ángulo menor que π , con vértice en dicho punto y simétrico con respecto al eje de las x , la zona restante puede ser incluída en uno de estos ángulos, excepto a lo sumo una parte arbitrariamente pequeña a la izquierda de $\sigma > 0$.

El Teorema queda así demostrado.



En el caso particular en que la integral converja en el origen, por ser $\alpha(\tau) > 0$ la convergencia simple es absoluta en todo el semiplano y, por lo tanto uniforme en todo él.

(*) Véase Resumen final .

TEOREMA

Si $\alpha(r)\downarrow L>0$, es decir, si es decreciente desde un valor de r en adelante y converge a $L>0$, y además existe $\lambda'(r)$ creciente para $r \geq R$, la integral converge uniformemente para $x > \sigma$, siedo σ positivo pero arbitrariamente pequeño.

Demostración

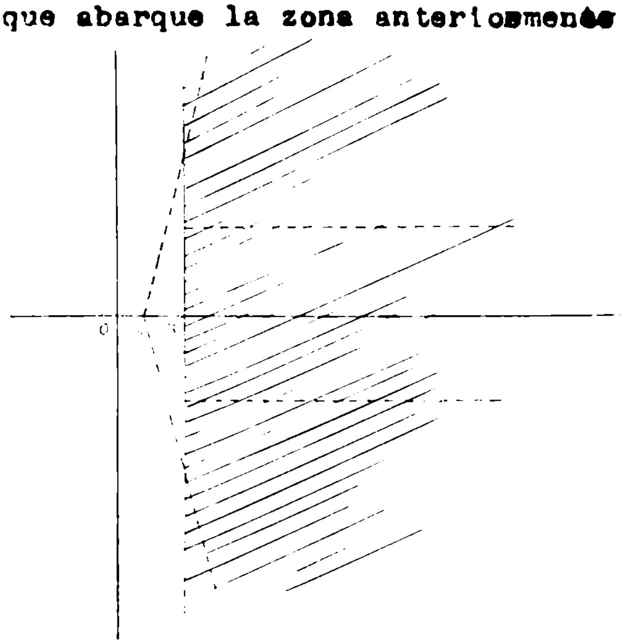
Repitiendo el razonamiento del Teorema anterior, llegamos a establecer la relación (1)

$$\left| \int_{\omega_1}^{\omega_2} e^{-z\lambda(r)}\alpha(r)\,dr \right| \leq \frac{4\, e^{-x\lambda(\omega_1)}\,\alpha(\omega_1)}{|y|\;\lambda'(\omega_1)}$$

Como por Hipótesis $\alpha(r) \to L$, desde un valor de r en adelante, su módulo está acotado y es, en particular $\alpha(\omega_1) < M$. Luego, para todo $x \geq \sigma > 0$ y todo y tal que $|y| \geq Y > 0$, será

$$\left| \int_{\omega_1}^{\omega_2} e^{-z\lambda(r)}\alpha(r)\,dr \right| \leq \frac{4\, e^{-\sigma\lambda(\omega_1)}\,M}{Y\;K}$$

es decir, arbitrariamente pequeño, puesto que $\lambda(r)$ es infinitamente crecienete. Como la integral converge para $R(z)>0$, elegido σ, tal que $0<\sigma_1<\sigma$, con vértice en él se puede considerar un ángulo de convergencia uniforme que abarque la zona anteriormente excluída.



TEOREMA

Si $\alpha(r)\downarrow 0$ para $r\to\infty$, y son $\alpha(r)$ y $\lambda(r)$ funciones continuas, la integral

$$\int_0^\infty e^{-z\lambda(r)}\,d\alpha(r)$$

converge uniformemente para $x\geq 0$.

Demostración

Consideremos la integral

$$\int_{\omega_1}^{\omega_2} e^{-z\lambda(r)}\,d\alpha(r) = \int_{\omega_1}^{\omega_2} e^{-x\lambda(r)}\left[\cos y\lambda(r) - i\,\operatorname{sen} y\lambda(r)\right] d\alpha(r) =$$

$$= \int_{\omega_1}^{\omega_2} e^{-x\lambda(r)}\cos y\lambda(r)\,d\alpha(r) - i\int_{\omega_1}^{\omega_2} e^{-x\lambda(r)}\operatorname{sen} y\lambda(r)\,d\alpha(r)$$

Aplicando a la primera integral del segundo miembro el Teorema segundo del valor medio, demostrado en nuestros trabajos de Seminario, e integrando por partes:

$$\int_{\omega_1}^{\omega_2} e^{-x\lambda(r)}\cos y\lambda(r)\,d\alpha(r) = e^{-x\lambda(\omega_1)}\int_{\omega_1}^{\omega'}\cos y\lambda(r)\,d\alpha(r) =$$

$$= e^{-x\lambda(\omega_1)}\left[\cos y\lambda(r)\Big|_{\omega_1}^{\omega'} + y\int_{\omega_1}^{\omega'}\alpha(r)\operatorname{sen} y\lambda(r)\,d\lambda(r)\right] =$$

aplicando nuevamente el segundo Teorema del valor medio:

$$= e^{-x\lambda(\omega_1)}\left[\cos y\lambda(r)\,\alpha(r)\Big|_{\omega_1}^{\omega'} + \alpha(\omega_1)\,y\int_{\omega_1}^{\omega''}\operatorname{sen} y\lambda(r)\,d\lambda(r)\right] =$$

$$= e^{-x\lambda(\omega_1)}\left[\cos y\lambda(r)\,\alpha(r)\Big|_{\omega_1}^{\omega'} - \alpha(\omega_1)\cos y\lambda(r)\Big|_{\omega_1}^{\omega''}\right] =$$

$$= e^{-x\lambda(\omega_1)}\Big[\cos y\lambda(\omega')\cdot\alpha(\omega') - \cos y\lambda(\omega_1)\cdot\alpha(\omega_1) -$$

$$- \alpha(\omega_1)\cos y\lambda(\omega'') + \alpha(\omega_1)\cos y\lambda(\omega_1)$$

de donde

$$\left| \int_{\omega_1}^{\omega_2} e^{-x\lambda(r)} \cos y\lambda(r)\, d\alpha(r) \right| \leq e^{-x\lambda(\omega_1)} \left\{ \left| \cos y\lambda(\omega')\cdot\alpha(\omega') \right| + \left| \alpha(\omega_1) \cos y\lambda(\omega'') \right| \right\}$$

y por lo tanto

$$(\mathrm{I}) \quad \left| \int_{\omega_1}^{\omega_2} e^{-x\lambda(r)} \cos y\lambda(r)\, d\alpha(r) \right| \leq e^{-x\lambda(\omega_1)} \left[\alpha(\omega') + \alpha(\omega_1) \right]$$

Si ω_1 y por lo tanto, ω' tienden a ∞, $\alpha(\omega_1)$ y $\alpha(\omega')$ tienden a 0 por hipótesis, y $\lambda(\omega_1) \to \infty$.

En consecuencia, para $x \geq 0$, la expresión (I) tiende a cero uniformemente.

Análogamente, resulta que

$$\int_{\omega_1}^{\omega_2} e^{-x\lambda(r)} \operatorname{sen} y\lambda(r)\, d\alpha(r)$$

tiende a cero uniformemente; luego:

$$\int_{0}^{\infty} e^{-z\lambda(r)}\, d\alpha(r)$$

converge uniformemente para $x \geq 0$.

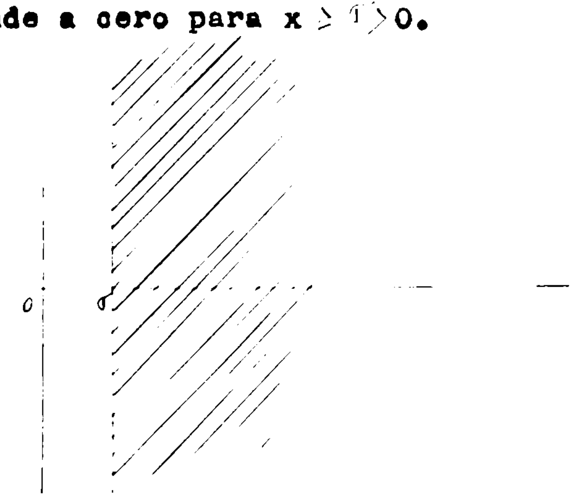
TEOREMA

Si $\alpha(r) \to L > 0$ para $r \to \infty$ cumpliéndose las demás condiciones del Teorema anterior, la integral converge uniformemente para $x \geq \sigma > 0$.

En efecto es así, pues en (I) ; $\alpha(\omega_1)$ y $\alpha(\omega')$ tienden a L>0 y resulta

$$\left| \int_{\omega_1}^{\omega_2} e^{-x\lambda(\tau)} \cos y\lambda(\tau)\, d\alpha(\tau) \right| \leqslant e^{-x\lambda(\omega_1)}\, 2L$$

Expresión que tiende a cero para $x \geqslant \sigma > 0$.



COROLARIOS

Si $\alpha(\tau)$ es, además estrictamente monótona la integral de Stieltjes se transforma en integral de Riemann y se deduce:

1º) La integral $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x\lambda(\tau)}\alpha(\tau)\,d\tau$

converge uniformemente para $x \geqslant 0$, si $\alpha(\tau)$ y $\lambda(\tau)$ son funciones continuas y $\alpha(\tau)\downarrow 0$ siendo estrictamente monótona.

2º) La integral $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x\lambda(\tau)}\alpha(\tau)\,d\tau$

converge uniformemente para $x \geqslant \sigma > 0$, si $\alpha(\tau)$ y $\lambda(\tau)$ son funciones continuas y $\alpha(\tau)\downarrow L > 0$, siendo estrictamente monótona.

TEOREMA

Si $\alpha(r)$ y $\lambda(r)$ son derivables para $r > 0$ y la $\int_0^\infty e^{-z\lambda(r)}\alpha'(r)\,dr$ tiene un campa de convergencia uniforme (que en particular puede ser absoluta) siendo $\sigma \geq 0$ la abscisa de convergencia uniforme, si además $\lambda'(r)$ es creciente y $> K > 0$, desde un $r = R$ en adelante, se verifica:

I°) Si $\sigma > 0$ la

$$\int_0^\infty e^{-z\lambda(r)}\alpha(r)\,dr$$

converge uniformemente para $x \geq \sigma$.

2°) Si $\sigma = 0$ y $\alpha(r) \to 0$ para r $r \to \infty$ la

$$\int_0^\infty e^{-z\lambda(r)}\alpha(r)\,dr$$

converge uniformemente para $x \geq 0$ con excepción de un entorno arbitrariamente pequeño del origen.

Demostración

Consideremos la integral $\int_{\omega_1}^{\omega_2} e^{-z\lambda(r)}\alpha(r)\,dr$

multiplicando y dividiendo por $\lambda'(r)$, aplicando el segundo Teorema del valor medio, integrando por partes y tomando módulos, setiene:

$$\left|\int_{\omega_1}^{\omega_2} e^{-z\lambda(r)}\alpha(r)\,dr\right| \leq \frac{1}{\lambda'(\omega_1)}\left[\left|\left|\frac{e^{-z\lambda(r)}\alpha(r)}{z}\right|_{\omega_1}^{\omega_2}\right| + \left|\frac{1}{z}\int_{\omega_1}^{\omega_2} e^{-z\lambda(r)}\alpha'(r)\,dr\right|\right]$$

$$\leq \frac{1}{|z|\cdot K}\left\{e^{-x\lambda(\omega_1)}|\alpha(\omega_1)| + e^{-x\lambda(\omega_2)}|\alpha(\omega_2)| + \left|\int_{\omega_1}^{\omega_2} e^{-z\lambda(r)}\alpha'(r)\,dr\right|\right\}$$

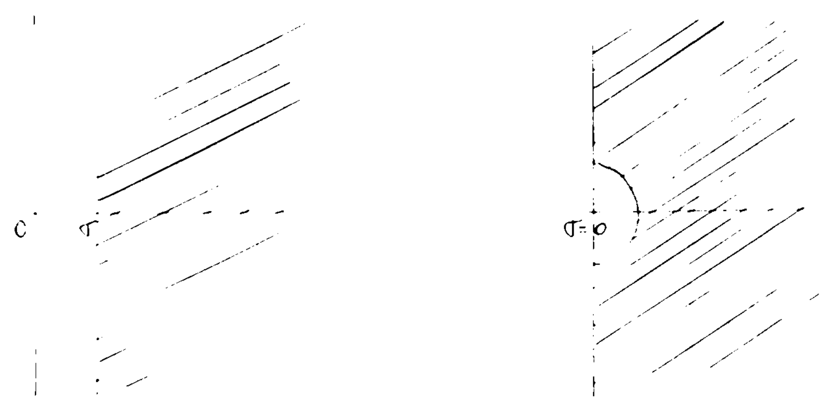
Si $x \geq \sigma > 0$, será con mayor razón $|z| \geq \sigma > 0$, y:

$$\left|\int_{\omega_1}^{\omega_2} e^{-z\lambda(r)}\alpha(r)\,dr\right| \leq \frac{1}{\sigma K}\left\{e^{-x\lambda(\omega_1)}|\alpha(\omega_1)| + e^{-x\lambda(\omega_2)}|\alpha(\omega_2)| + \left|\int_{\omega_1}^{\omega_2} e^{-z\lambda(r)}\alpha'(r)\,dr\right|\right\}$$

Aplicando el Lema que dice " Si la $\int_c e^{-z\lambda(r)}\alpha'(r)\,dr$ converge para $x-\sigma>0$ es $|\alpha(r)|<k_1 e^{\sigma\lambda(r)}$ " ; los dos primeros términos son menores que $k_1 e^{-(x-\sigma)\lambda(\omega_1)}$ y por lo tanto infinitésimos para $x>\sigma$ y $\omega_1\to\infty$; el, tercero es el resto de la integral que, por Hipótesis, converge uniformemente para $x\geq\sigma$ .Luego el restode nuestra integral $\int_{\omega_1}^{\omega_2} e^{-z\lambda(r)}\alpha(r)\,dr$ tiende a cero uniformemente.

La primera parte queda así demostrada.

Si es en cambio $\sigma=0$, debemos imponer la condición $|z|\geq\rho>0$ por el factor $\frac{1}{|z|}$ y, además $x\geq\sigma=0$ que, agregadas a la de Hipótesis $\alpha(r)>0$ aseguran la convergencia uniforme en la región resultante.



TEOREMA

Si la integral

$$\int_0^\infty e^{-z\lambda(r)}\alpha(r)\,d\lambda(r)=\frac{1}{z}\int_0^\infty\alpha(r)\,de^{-z\lambda(r)}=\frac{1}{z}\int_c^\infty e^{-z\lambda(r)}\,d\alpha(r)$$

converge uniformemente para $x\geq\sigma>0$, la integral

$$\int_0^\infty e^{-z\lambda(r)}A(r)\,d\lambda(r)$$

[en que $A(r)=\int_0^r\alpha(r)\,d\lambda(r)$] también converge uniformemente para $x\geq\sigma$ siempre que $|A(r)|<K$.

Demostración.

Consideremos la integral cuya convergencia uniforme queremos probar, en el intervalo (ω_1, ω_2) e integremos por partes:

$$\int_{\omega_1}^{\omega_2} e^{-z\lambda(r)} A(r)\, d\lambda(r) = -\frac{1}{z} e^{-z\lambda(r)} A(r)\Big|_{\omega_1}^{\omega_2} + \frac{1}{z}\int_{\omega_1}^{\omega_2} e^{-z\lambda(r)}\, d\,A(r) =$$

$$= -\frac{1}{z} e^{-z\lambda(\omega_2)} A(\omega_2) + \frac{1}{z} e^{-z\lambda(\omega_1)} A(\omega_1) + \frac{1}{z}\int_{\omega_1}^{\omega_2} e^{-z\lambda(r)}\, d\,A(r)$$

Tomando módulos:

$$\text{(I)} \qquad \left|\int_{\omega_1}^{\omega_2} e^{-z\lambda(r)} A(r)\, d\lambda(r)\right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{|z|} e^{-x\lambda(\omega_2)} |A(\omega_2)| + \frac{1}{|z|} e^{-x\lambda(\omega_1)} |A(\omega_1)| + \frac{1}{|z|}\left|\int_{\omega_1}^{\omega_2} e^{-z\lambda(r)}\, d\,A(r)\right|$$

Para $x \geq \sigma$ es :

$$\left|\int_{\omega_1}^{\omega_2} e^{-z\lambda(r)} A(r)\, d\lambda(r)\right| \leq \frac{1}{\sigma}\left[e^{-\sigma\lambda(\omega_2)} K + e^{-\sigma\lambda(\omega_1)} K + \left|\int_{\omega_1}^{\omega_2} e^{-z\lambda(r)}\, d\,A(r)\right|\right.$$

Como por hipótesis es $\sigma > 0$, los dos primeros términos tienden uniformemente a 0 para $\omega_1 \to \infty$ y $\omega_2 \to \infty$; el tercer término tiende a cero uniformemente, pues. por hipótesis, converge uniformemente la integral:

$$\int_0^\infty e^{-z\lambda(r)} \alpha(r)\, d\lambda(r)$$

Por lo tanto

$$\left|\int_{\omega_1}^{\omega_2} e^{-z\lambda(r)} A(r)\, d\lambda(r)\right|$$

tiende a cero uniformemente y el teorema queda demostrado.

TEOREMA

Si la

$$\int_0^{\infty} e^{-z\lambda(r)}\, \alpha(r)\, d\lambda(r)$$

converge uniformemente para $x \geq 0$ y la integral

$$A(r) = \int_0^{r} \alpha(r)\, d\lambda(r) \longrightarrow 0$$

entonces la integral

$$\int_0^{\infty} e^{-z\lambda(r)}\, A(r)\, d\lambda(r)$$

también converge uniformemente para $x \geq 0$, con excepción de un pequeño entorno del origen.

Demostración.

Razonando en forma análoga a la del Teorema anterior, se llega a la expresión ( )

$$\left| \int_{\omega_1}^{\omega_2} e^{-z\lambda(r)}\, A(r)\, d\lambda(r) \right| \leq \frac{1}{|z|}\, e^{-x\lambda(\omega_2)} |A(\omega_2)| + \frac{1}{|z|}\, e^{-x\lambda(\omega_1)} |A(\omega_1)| + \frac{1}{|z|} \left| \int_{\omega_1}^{\omega_2} e^{-z\lambda(r)}\, \alpha(r)\, d\lambda(r) \right|$$

Para $|z| \geq \rho > 0$ y $x \geq 0$ es:

$$\left| \int_{\omega_1}^{\omega_2} e^{-z\lambda(r)}\, A(r)\, d\lambda(r) \right| \leq \frac{1}{\rho} \left[|A(\omega_2)| + |A(\omega_1)| + \left| \int_{\omega_1}^{\omega_2} e^{-z\lambda(r)}\, \alpha(r)\, d\lambda(r) \right| \right]$$

expresión que de acuerdo con las condiciones de Hipótesis, tiende a cero uniformemente.

Luego la integral

$$\int_0^{\infty} e^{-z\lambda(r)}\, A(r)\, d\lambda(r)$$

converge uniformemente para $x \geq 0$, excepto el entorno del origen que corresponde a la condición impuesta $|z| \geq \rho$, y como ρ es arbitrariamente pequeño, el entorno excluído también lo es .

TEOREMA

Si $\alpha(r)\downarrow 0$, es decir es decreciente desde un valor de r en adelante y converge hacia 0 y $\alpha(0) \neq \infty$, la integral

$$\int_0^\infty e^{-z\lambda(r)}\alpha(r)\,d\lambda(r)$$

converge uniformemente en el semiplano $x \geq 0$,con exclusión de un entorno arbitrariamente pequeño del origen. (Demostración aplicando el Criterio de Dirichlet)

Demostración

La integral $\int_0^\infty e^{-z\lambda(r)}\,d\lambda(r)$ es convergente para $|z| > \rho$

Multiplicando por $\alpha(r)\downarrow 0$ el integrando, resulta:

$$\int_0^\infty e^{-z\lambda(r)}\alpha(r)\,d\lambda(r)$$

que también converge de acuerdo con el Criterio de Dirichlet:

" Si la integral $\int \alpha(r)\,dr$ converge, y se multiplica el integrando por el factor decreciente $b_n \downarrow 0$, la nueva integral también converge."

Integrando por partes se tiene:

$$\int_0^\infty e^{-z\lambda(r)}\alpha(r)\,d\lambda(r) = -\left.\frac{e^{-z\lambda(r)}\alpha(r)}{z}\right|_0^\infty + \frac{1}{z}\int_0^\infty e^{-z\lambda(r)}\,d\alpha(r)$$

El módulo de $\left.\frac{e^{-z\lambda(r)}\alpha(r)}{z}\right|_0^\infty$ tiende a $\frac{\alpha(0)}{|z|}$ para todo $x \geq 0$

el módulo del otro término:

$$\left|\frac{1}{z}\int_0^\infty e^{-z\lambda(r)}d\alpha(r)\right| < \frac{1}{|z|}\left[\left|\int_0^R e^{-z\lambda(r)}d\alpha(r)\right| + \left|\int_R^\infty e^{-z\lambda(r)}d\alpha(r)\right|\right] < \frac{1}{|z|}\left[K + \int_R^\infty |d\alpha(r)|\right] = \frac{1}{|z|}\left[K + \alpha(R)\right]$$

Luego:

$$\left|\int_0^\infty e^{-z\lambda(r)}\alpha(r)\,d\lambda(r)\right| < \frac{\alpha(0) + K + \alpha(R)}{\rho} \qquad \text{para todo } |z| \geq \rho \text{ y } x \geq 0.$$

Si $\alpha(r) \downarrow \alpha > 0$ la integral $\int_0^\infty e^{-z\lambda(r)} \alpha(r)\, d\lambda(r)$ converge absolutamente para $x = h > 0$ y por lo tanto la convergencia es uniforme en el semiplano $x \geqslant h$. En efecto es así pués:

$$\int_0^\infty \left| e^{-z\lambda(r)} \alpha(r)\, d\lambda(r) \right| = \int_0^\infty e^{-x\lambda(r)} \alpha(r)\, d\lambda(r)$$

Como:

$$\int_0^\infty e^{-x\lambda(r)}\, d\lambda(r)$$

es convergente para $x = h > 0$

al multiplicar por $\alpha(r) \rightarrow \downarrow \alpha > 0$, el integrando, la integral que resulta es según el criterio de Abel convergente, luego la integral dada converge absolutamente para $x = h > 0$ y en consecuencia uniformemente.

En el Teorema (8), si se aplica este procedimiento: demuéstrasé la convergencia uniforme de la

$$\int_0^\infty e^{-z\lambda(r)} \alpha(r)\, d\lambda(r)$$

para $x \geq h > 0$, es decir , excluída una faja a la derecha del eje y .

TEOREMA

Si la integral $\displaystyle\int_{0}^{\infty} e^{-z\lambda(r)}\,\alpha(r)\,dr$

converge uniformemente para $x \geq \sigma > 0$, y existe $\lambda'(r)$ tal que $k \leq \lambda'(r) < K$

la integral
$$\int_{0}^{\infty} e^{-z\lambda(r)} A(r)\,d\lambda(r)$$

converge también uniformemente para $x \geq \sigma$, siendo $A(r) = \displaystyle\int_{0}^{r} \alpha(r)\,dr$.

Demostración.

Vamos a ver que la integral
$$\int_{\omega_1}^{\omega_2} e^{-z\lambda(r)} A(r)\,d\lambda(r)$$

es tan pequeña como se quiere, para ω_1 y ω_2 suficientemente grandes.

En efecto integrando por partes:
$$\int_{\omega_1}^{\omega_2} e^{-z\lambda(r)} A(r)\,d\lambda(r) = \frac{e^{-z\lambda(r)}}{-z} A(r)\Big|_{\omega_1}^{\omega_2} + \frac{1}{z}\int_{\omega_1}^{\omega_2} e^{-z\lambda(r)}\,\alpha(r)\,dr$$

y tomando módulos:
$$\left|\int_{\omega_1}^{\omega_2} e^{-z\lambda(r)} A(r)\,d\lambda(r)\right| \leq \frac{e^{-x\lambda(\omega_2)}}{|z|}\,|A(\omega_2)| + \frac{e^{-x\lambda(\omega_1)}}{|z|}\,|A(\omega_1)| +$$
$$+ \frac{1}{|z|}\left|\int_{\omega_1}^{\omega_2} e^{-z\lambda(r)}\,\alpha(r)\,dr\right|$$

Aplicando el Teorema que dice: "Si la integral D_λ converge para un número real $x_0 > 0$, y existe $H < \lambda'(r) < K$, también converge para x_0 la integral $\displaystyle\int_{0}^{\infty} e^{-z\lambda(r)}\alpha(r)\,dr$ y es $\alpha(r) = o\left(e^{\lambda(r) x_0}\,\lambda'(r)\right)$ para $r \to \infty$."

es:
$$A(r) = o\left(e^{\sigma\lambda(r)}\,\lambda'(r)\right)$$

y resulta la suma de los dos primeros términos menor que:

$$2\,\frac{e^{-x\lambda(\omega_1)}}{|z|}\,|A(\omega_2)| = \frac{2}{|z|}\,\frac{|A(\omega_2)|}{e^{x\lambda(\omega_1)}} \to 0$$

uniformemente para $x \geq \sigma$ y teniendo en cuenta las condiciones que por Hipótesis debe cumplir $\lambda'(r)$. El tercer término tiende a cero uniformemente por Hipótesis, por lo tanto el Teorema está demostrado.

Si no se impone la existencia de $\lambda'(r)$, aplicando el Lema que hemos demostrado, que dice "Si la integral $\int_0^\infty e^{-z\lambda(r)}\,dA(r)$ converge en $z = \sigma$ es $|A(r)| < K\, e^{\sigma\lambda(r)}$" resulta la convergencia simple de la integral de Tesis para $x > \sigma$.

COROLARIO

Si $\sigma = 0$ y $A(r) \to 0$, la convergencia uniforme se verifica en todo el semiplano $x \geq \sigma = 0$ salvo en un pequeño entorno del origen.

En efecto: en la expresión (I), si $|z| > \rho$ arbitrariamente pequeño, los dos primeros términos tienden a cero por la condición $A(r) \to 0$, y el tercer término, por la convergencia exigida en Hipótesis

----

TEOREMA

Si la integral

$$\int_0^\infty e^{-z\lambda(r)}\,\alpha(r)\,d\lambda(r)$$

converge uniformemente para $x \geq \sigma > 0$; también converge uniforme mente para $x \geq \sigma > 0$, la integral

$$\int_0^{\infty} e^{-z\lambda(r)} A(r)\, d\lambda(r)$$

siendo:

$$A(r) = \int_0^{r} \alpha(r)\, d\lambda(r)$$

y $\qquad k \leq \lambda'(r) \leq K$

y $\alpha(r)$ de variación acotada, de acuerdo con las condiciones de Hipótesis.

Demostración

Consideremos la integral entre ω_1 y ω_2, e integremos por partes:

$$\int_{\omega_1}^{\omega_2} e^{-z\lambda(r)} A(r)\, d\lambda(r) = \frac{e^{-z\lambda(r)}}{-z} A(r) \Big|_{\omega_1}^{\omega_2} + \frac{1}{z} \int_{\omega_1}^{\omega_2} e^{-z\lambda(r)} \alpha(r)\, d\lambda(r)$$

y teniendo en cuenta que

$$A(r) = O\left(e^{\sigma\lambda(r)} \lambda'(r)\right)$$

la demostración se continúa en forma idéntica a la del Teorema anterior.

COROLARIO

Si $\sigma = 0$ y $A(r) \to 0$, la convergencia uniforme también se verifica en todo el semiplano $x \geq \sigma = 0$, salvo un pequeño entorno del origen.

TEOREMA

Si la integral

$$\int_0^{\infty} e^{-z\lambda(r)}\, d\alpha(r)$$

converge uniformemente para $x \geq \sigma > 0$, siendo:

$$\alpha(r) = o\left(e^{|\sigma|\lambda(r)}\right)$$

también converge uniformemente para $x \geq \sigma$ la integral

$$\int_0^{\infty} e^{-z\lambda(r)} \alpha(r)\, d\lambda(r)$$

DEMOSTRACIÓN

En efecto:

$$\int_{\omega_1}^{\omega_2} e^{-z\lambda(r)} \alpha(r)\, d\lambda(r) = \frac{e^{-z\lambda(r)}}{-z}\alpha(r)\Big|_{\omega_1}^{\omega_2} + \frac{1}{z}\int_{\omega_1}^{\omega_2} e^{-z\lambda(r)}\, d\alpha(r)$$

Por lo tanto:

$$\left|\int_{\omega_1}^{\omega_2} e^{-z\lambda(r)} \alpha(r)\, d\lambda(r)\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{|\alpha(\omega_1)|}{|z|\, e^{|\sigma|\lambda(\omega_1)}} + \frac{|\alpha(\omega_2)|}{|z|\, e^{|\sigma|\lambda(\omega_2)}} + \frac{1}{|z|}\left|\int_{\omega_1}^{\omega_2} e^{-z\lambda(r)}\, d\alpha(r)\right|$$

y el Teorema queda demostrado, pues de acuerdo con las condiciones de Hipótesis, los tres términos son $< \varepsilon$ desde un ω_1 en adelante para todo $x \geqslant \sigma$.

--------- o ---------

CONVERGENCIA DE INTEGRALES D $_{\lambda}$ CON VARIABLE

COMPLEJA PARABÓLICA

Como ya anticipamos, veremos que: Dada la función

$$f(z) = \int_0^{\infty} e^{-z\lambda(r)}\, d\,a(r)$$

de variable compleja parabólica, la abscisa de convergencia uniforme coincide con la de convergencia simple .

Para llegar a demostrarlo, nos fué necesario demostrar primero, el Lema de Perron generalizado, que dice así:

Cualquiera que sea el valor de la variable compleja parabólica : $z = x + jy$, se verifica:

$$\text{Mód}\left[\mathfrak{D}\, e^{-z\lambda(r)}\right] = \pm\, \mathfrak{D}\, e^{-x\lambda(r)}$$

En efecto: siendo complejos parabólicos, se tiene :

$$\text{Mód}\, z = \text{Mód}\,(x + jy) = |x|$$

Por otra parte : $$\mathfrak{D}\, e^{-z\lambda(r)} = -z\, e^{-z\lambda(r)}\, \mathfrak{D}\, \lambda(r)$$

Luego :

$$\text{Mód}\left[\mathfrak{D}\, e^{-z\lambda(r)}\right] = \text{Mód}\, z \,.\, e^{-x\lambda(r)}\, \mathfrak{D}\, \lambda(r)$$

(I)

$$= -\frac{\text{Mód}\, z}{x}\, \mathfrak{D}\, e^{-x\lambda(r)}$$

y, de acuerdo con el módulo adoptado, resulta, según que x sea positivo o negativo

$$\text{Mód}\left[\mathfrak{D}\, e^{-z\lambda(r)}\right] = \mp\, \mathfrak{D}\, e^{-x\lambda(r)}$$

Si en cambio, se adoptara como definición de módulo:

$$|z| = +\sqrt{x^2+y^2}$$

es :

$$\mathfrak{D}\, e^{-z\lambda(r)} = -z\, e^{-z\lambda(r)}\, \mathfrak{D}\, \lambda(r)$$

$$\left|\mathfrak{D}\, e^{-z\lambda(r)}\right| = |z|\left|e^{-z\lambda(r)}\right| \mathfrak{D}\, \lambda(r)$$

y, como

$$e^{-z\lambda(r)} = e^{-x\lambda(r)}\left(1 - \lambda(r)\, y\, j\right)$$

y, por consiguiente

$$\left|e^{-z\lambda(r)}\right| = e^{-x\lambda(r)}\sqrt{1+\lambda(r)^2 y^2}$$

reemplazando en (2)

$$\left| \mathcal{D} e^{-z\lambda(r)} \right| = \sqrt{x^2+y^2}\; e^{-x\lambda(r)} \sqrt{1+\lambda(r)^2 y^2}\; \mathcal{D}\lambda(r)$$

$$= -\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x} \sqrt{1+\lambda(r)^2 y^2}\; \mathcal{D} e^{-x\lambda(r)}$$

Si es $x > 0$ es $\mathcal{D} e^{-x\lambda(r)}$ negativa y los demás factores positivos; teniendo en cuenta el signo menos, resulta positivo el valor.

Si es $x < 0$ es $\mathcal{D} e^{-x\lambda(r)}$ positiva y el signo de x con el menos que antecede, da más .

Como los dos primeros factores son ≥ 1 es:

$$\left| \mathcal{D} e^{-z\lambda(r)} \right| \leq \mathcal{D} e^{-x\lambda(r)}$$

----------O---------

Pasamos entonces al Teorema que nos interesa: " Si la integral

$$\int_0^\infty e^{-z\lambda(r)}\, d\alpha(r)$$

converge en un punto z_0 , converge uniformemente en el semiplano $\mathcal{R}(z) \geq \mathcal{R}(z_0)$

Demostración.

Primer caso $z_0 = 0$

Para estudiar la convergencia debemos calcular el módulo del resto:

$$\int_p^q e^{-z\lambda(r)}\, d\alpha(r)$$

que integrando por partes resulta:

$$\int_p^q e^{-z\lambda(r)}\, d\alpha(r) = \alpha(r)\, e^{-z\lambda(r)}\Big|_p^q - \int_p^q \alpha(r)\, \mathcal{D} e^{-z\lambda(r)}$$

y su módulo

$$\left| \int_p^q e^{-z\lambda(r)}\, d\alpha(r) \right| \leq |\alpha(q)|\, e^{-x\lambda(q)} + |\alpha(p)|\, e^{-x\lambda(p)} + \left| \int_p^q \alpha(r)\, \mathcal{D} e^{-z\lambda(r)} \right|$$

Como por hipótesis $\int_0^\infty e^{-z\lambda(r)}\, d\alpha(r)$ converge en el origen y en ese punto $e^{-0\lambda(r)} = 1$, esto implica que :

$\int_0^\infty d\alpha(r)$ converge y en consecuencia $\left| \int_p^q d\alpha(r) \right| < \varepsilon$

para $p \geq p_0$, y teniendo en cuenta que la exponencial (que es la única que depende de z) es menor que uno para todo z de parte real positiva, el primer término es uniformemente menor que ε para $\mathcal{R}(z) \geq 0$

El valor absoluto del segundo término se calcula aplicando el Lema de Perron. (Con signo - porque consideramos $x \geq 0$)

$$\text{Mód} \int_p^q \alpha(r)\, \mathcal{D} e^{-z\lambda(r)} < \varepsilon \int_p^q \left| \mathcal{D} e^{-\lambda(r) z} \right| = -\varepsilon \int_p^q \mathcal{D} e^{-\lambda(r) x} = \varepsilon \left[e^{-\lambda(p)x} - e^{-\lambda(q)x} \right]$$

Como las exponenciales son menores que ~~uno~~ ε para $z \to \infty$, este término es también suficienetemente pequeño para $p \geq p_0$ y x positivo o nulo.
Luego el resto esarbitrariamente pequeño y por lo tanto la integral converge uniformemente en el semiplano $\mathcal{R}(z) \geq 0$

Segundocaso $z_0 > 0$
Siendo $z_0 \neq 0$, por medio de la sustitución $z = z_0 + z'$, la integral dada se reduce a :

$$\int_0^\infty e^{-(z_0+z')\lambda(r)}\, d\alpha(r) = \int_0^\infty e^{-z'\lambda(r)}\, e^{-z_0\lambda(r)}\, d\alpha(r) =$$

$$= \int_0^\infty e^{-z'\lambda(r)}\, d\beta(r)$$

Esta integral converge uniformemente en el semiplano $\mathcal{R}(z) > \mathcal{R}(z_0)$ que resulta ser el de convergencia ~~absoluta~~ uniforme de la integral dada .

-----------0----------

ULTRACONVERGENCIA

---------- o ----------

Establecemos aquí, las definiciones de ultraconvergencia y de ultraconvergencia estricta para las funciones D_λ , como una extensión de las correspondientes para series de Dirichlet. A continuación, consideramos ejemplos de funciones D_λ que no son convergentes, pero sí ultraconvergentes, con respecto a sucesiones de intervalos convenientemente elegidos.

Recordando que en el estudio de las Series de Dirichlet, se llama:

1º Abcisa de ultraconvergencia de .

$$(1) \qquad f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s}$$

al extremo inferior de los números σ tales que, existe una sucesión de sumas parciales de la serie anterior:

$$(2) \qquad f_{m_k}(s) = \sum_{n=1}^{m_k} a_n e^{-\lambda_n s}$$

que converge uniformemente en cada recinto finito interior al semiplano $x > \sigma$.

2º Abcisa de ultraconvergencia estricta de la misma serie (I) ,

al extremo inferior de los números σ tales que existe una sucesión del tipo (2) que satisface esas mismas condiciones y , además, se verifica:

$$\lim_{k \to \infty} \frac{m_{k+1} - m_k}{\lambda_{m_{k+1}}} = 0$$

y

$$\lim_{k \to \infty} \frac{\lambda_{m_{k+1}}}{\lambda_{m_k}} = 1$$

Para las integrales I_λ , extendemos estas definiciones en la siguiente forma:

Se llama abcisa de ultraconvergencia de

$$f(z) = \int_0^{\infty} e^{-z\lambda(r)} d\alpha(r)$$

al número $J =$ extr. σ , siendo estos σ tales que existe una suce-sión de las integrales

$$\int_{\rho_n} (z) = \int_0^{\rho_n} e^{-z\lambda(r)}\, d\,\alpha(r) \qquad n = 1, 2, \ldots$$

que convergen uniformemente en todo el semiplano $x > \sigma$.

Si , además se verifican las condiciones:

$$\lim_{n\to\infty}{}' \frac{\rho_{n+1} - \rho_n}{\lambda(\rho_{n+1})} = 0$$

y $\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (3)$

$$\lim_{n\to\infty}{}' \frac{\lambda(\rho_{n+1})}{\lambda(\rho_n)} = 1$$

la abscisa J que así resulta, se llama de <u>ultraconvergencia estricta</u>.

------------0-------------

Ahora bien, así como la serie:

$$1 - 1 + 1 - 1 + \cdots\cdots$$

no converge, pero agrupando sus términos convenientemente:

$$(1-1) + (1-1) + \cdots$$

resulta convergente, veremos un ejemplo en que, una integral D_λ , no convergente, posee sin embargo, un semiplano de ultraconvergencia.

Consideremos el caso en que:

$$\lambda(r) = r \qquad \text{y} \qquad \alpha(r) = e^r \operatorname{sen} r.$$

Luego:

$$f(z) = \int_0^\infty e^{-z\lambda(r)}\, d\alpha(r) = \int_0^\infty e^{-rz}\, d\left(e^r \operatorname{sen} r\right) =$$

$$= \int_0^\infty e^{-rz} e^r \operatorname{sen} r \, dr + \int_0^\infty e^{-rz} e^r \cos r \, dr$$

converge para $R(z) > 1$ puesto que:

$$\int_0^\infty e^{-(z-1)r} \operatorname{sen} r \, dr$$

y

$$\int_0^\infty e^{-(z-1)r} \cos r \, dr$$

convergen para $R(z-1) > 0$.

Pero para $Z = 1$, se reducen a:

$$\int_0^\infty \operatorname{sen} r \, dr \qquad \text{y} \qquad \int_0^\infty \cos r \, dr$$

cuya suma no converge

Ahóra bien, si se consideran las sucesiones de funciones:

a)

$$f_{k_1}(1) = \int_0^{\frac{\pi}{2}+2k_1\pi} (\operatorname{sen} r + \cos r)\, dr \qquad (k_1 = 0, 1, 2, \ldots\ldots)$$

$$f_{k_1}(1) = \operatorname{sen} r - \cos r \Big|_0^{\frac{\pi}{2}+2k_1\pi} = 2$$

$$\lim_{k_1 \to \infty} f_{k_1}(1) = 2$$

b)

$$f_{k_2}(1) = \int_0^{\pi+2k_2\pi} (\operatorname{sen} r + \cos r)\, dr \qquad (k_2 = 0, 1, 2, \ \ldots)$$

$$f_{k_2}(1) = \operatorname{sen} r - \cos r \Big|_0^{\pi+2k_2\pi} = 2$$

$$\lim_{k_2 \to \infty} f_{k_2}(1) = 2$$

c)

$$f_{k_3}(1) = \int_0^{2\pi k_3} (\operatorname{sen} r + \cos r)\, dr \qquad (k_3 : 0, 1, 2 \ldots.)$$

$$f_{k_3}(1) = \operatorname{sen} r - \cos r \Big|_0^{2k_3\pi} = 0$$

$$\lim_{k_3 \to \infty} f_{k_3}(1) = 0$$

d)

$$f_{k_4}(1) = \int_0^{\frac{\pi}{4}+2k_4\pi} (\operatorname{sen} r + \cos r)\, dr \qquad (k_4 = 0, 1, 2 \ldots)$$

$$f_{k_4}(1) = \operatorname{sen} r - \cos r \Big|_0^{\frac{\pi}{4}+2k_4\pi} = -1$$

$$\lim_{k_4 \to \infty} f_{k_4}(1) = -1$$

Es decir, entonces, que, la integral dada no converge en el punto $z = 1$, pero en cambio en él es ultraconvergente con respecto a cada una de las sucesiones de intervalos:

$$(1) \qquad \frac{\pi}{2} + 2k\pi \qquad \pi + 2k\pi \qquad 2k\pi \qquad \frac{\pi}{4} + 2k\pi \qquad \text{etc.}$$

Obsérvese que en este caso la ultraconvergencia es estricta, pues se verifican las condiciones (3), en efecto:

$\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{\rho_{n+1} - \rho_n}{\lambda(\rho_{n+1})}$ es en este caso, por ejemplo para la sucesión b-)

$$\lim_{k \to \infty} \frac{[\pi + 2(k+1)\pi] - (\pi + 2k\pi)}{\pi + 2(k+1)\pi} = \lim_{k \to \infty} \frac{2\pi}{2(k+1)\pi + \pi} = 0$$

y $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{\lambda(\rho_{n+1})}{\lambda(\rho_n)}$ es en la misma sucesión b)

$$\lim_{k \to \infty} \frac{\pi + 2(k+1)\pi}{\pi + 2k\pi} = \lim_{k \to \infty} \left(1 + \frac{2\pi}{\pi + 2k\pi}\right) = 1$$

Para $R(z) < 1$, la integral considerada no converge, pero puede verse que existen sucesiones de intervalos, con respecto a los cuales resulta ultraconvergente.

El ejemplo considerado, queda incluído en la función más general:

$$\int_0^{\infty} e^{-z\lambda(r)}\, d\left[e^{\lambda(r)} \operatorname{sen} \lambda(r)\right]$$

que puede tratarse en forma análoga, resultando entonces sucesiones de intervalos, en que los valores (I) , corresponden a $\lambda(r)$ y no a r .

----------O---------

- INVERSIÓN-

EXPRESIÓN DE $\alpha(r)$ Y DE SUS DERIVADAS FRACCIONARIAS

En la Teoría de las funciones D_λ, uno de los problemas fundamentales que se presentan es el de la inversión, que consiste en: Dada una función D_λ

$$f(z) = \int_0^\infty e^{-z\lambda(r)}\, d\alpha(r)$$

encontrar la expresión de $\alpha(r)$ en función de $f(z)$ y $\lambda(r)$.
Nosotros, para las integrales de Laplace-Stieltjes generalizadas, hemos resuelto el problema, suponiendo primero: que $\lambda(r)$ es continua y estrictamente creciente, luego imponiéndole solamente la segunda condición.
Quedaría por estudiar el caso en que $\lambda(r)$ no es estrictamente creciente; esto podría resolverse, considerando una sucesión de funciones $\lambda_n(r)$ estrictamente crecientes y tales que $\lambda_n(r) \to \lambda(r)$, aplicar la inversión a cada una de ellas y luego pasar al límite.
Mediante un procedimiento que nos ha sido sugerido por el Doctor Alberto González Domínguez, para resolver en forma más amplia este problema, utilizamos las

integrales de Lebesgue-Stieltjes, que premiten generalizar todas las demás fórmulas de la inversión.

Para integrales ordinarias de Laplace-Stieltjes, Widder en su memoria" A generalization of Dirichlet's Series and of Laplace's integrals by means of Stieltjes integral" (Transactions of the American Mathematical Society-31 1929- pag. 694) llega a la fórmula de la inversión mediante integrales de Fourier; nosotros hemos ensayado ese camino para las integrales D_λ , sin lograr un resultado satisfactorio.

Una vez obtenida $\alpha(r)$ por la fórmula de la inversión, encontramos en un teorema posterior , la expresión de sus derivadas fraccionarias de Riemann de orden ρ ,

-----------0---------

TEOREMA

Dada

$$f(z) = \int_0^\infty e^{-z\lambda(t)} d\alpha(t) \qquad (1)$$

que converge para $x > c$, donde $\lambda(t)$ es continua, estrictamente creciente y $\lambda(0)=0$; la función $\alpha(t)$ de variación acotada, estáexpresada por :

$$\alpha(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{h-i\infty}^{h+i\infty} \frac{e^{+z\lambda(t)} f(z)}{z} dz$$

para $h > c$.

Demostración

Por ser $\lambda(t)$ continua y estrictamente creciente, haciendo $\lambda(t)=u$, existe la función inversa $t = \psi(u)$ también continua y estrictamente creciente . Sustituyendo en (I)

$$f(z) = \int_0^\infty e^{-zu} d\alpha\left[\psi(u)\right]$$

Puesto que f(z) es una función D_λ , por la condición de existencia, debe ser $\alpha(t)$ de variación acotada, como decimos más arriba (e continua) y por lo tanto $\alpha\left[\psi(u)\right]$ también lo es .

Aplicando la fórmula de la inversión conocida para esta integral , se tiene:

$$\alpha\left[\psi(u)\right] = \frac{1}{2\pi i} \int_{h-i\infty}^{h+i\infty} \frac{e^{uz} f(z)}{z} dz$$

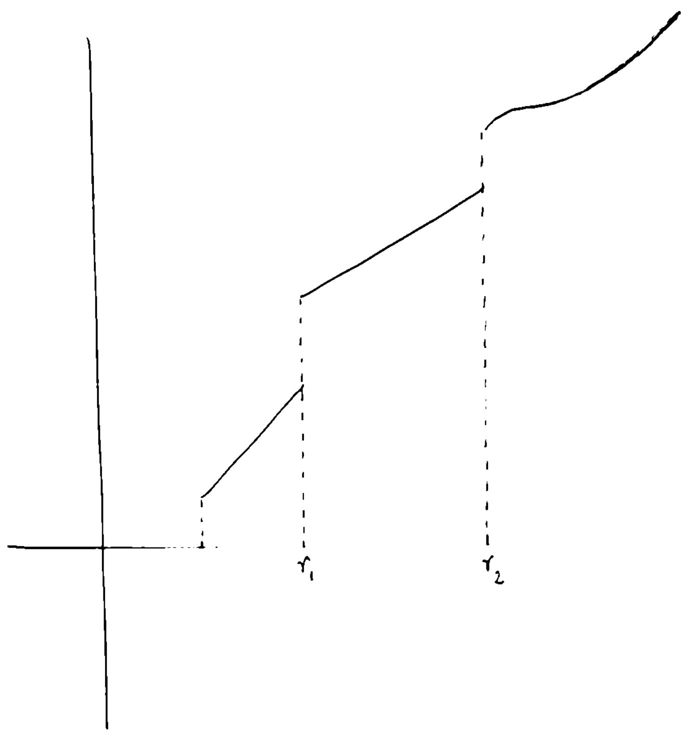
donde $h > c$ y $u > 0$.

En consecuencia:

$$\alpha(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{h-i\infty}^{h+i\infty}$$

Que es lo que queríamos demostrar .

Si $\lambda(r)$ no es continua, el teorema es también válido, atribuyendo a la función inversa, en los intervalos de discontinuidad $\lambda(r_i^-) \leq \lambda \leq \lambda(r_i^+)$ de $\lambda(r)$ al valor constante $r = r_i$.



---------o--------

Introducimos ahora como ya habíamos anticipado, integrales de Lebesgue-Stieltjes .

Recordemos que dada la integral

$$(I) \qquad \int_a^b f(t)\, d\alpha(t)$$

Si se hace

$$\alpha(t) = u \qquad \alpha(t) \text{ creciente}$$
$$t = \varphi(u)$$

y existe

$$(2) \qquad \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} f\left[\varphi(u)\right] du$$

como integral de Lebesgue, la (1) existe por definición, como integral de Lebesgue-Stieltjes. Como se sabe es condición suficiente para que exista (2) que $f(\varphi(u))$ sea acotada y medible.

Ahora bien; suponemos las funciones $\alpha(r)$ y $\lambda(r)$ tales que:

1ª $\alpha(r)$ es monótona, lo que no restringe en nada la generalidad, pues la que consideramos comunmente, de variación acotada, puede expresarse como diferencia de dos crecientes. Suponemos además que:

$\alpha(0) = 0$ y $\alpha(\infty) = c$.

2ª $\lambda(r)$ es infinitamente creciente y $\lambda(0) = 0$.

Si consideramos la integral:

$$\int_0^c e^{-z\lambda\left[\varphi(u)\right]} du$$

existe como integral (L), pues $f\left[\varphi(u)\right] = e^{-z\lambda[\varphi(u)]}$ de acuerdo con las condiciones impuestas a $\lambda(r)$ es acotada y medible*, luego haciendo el cambio de variable

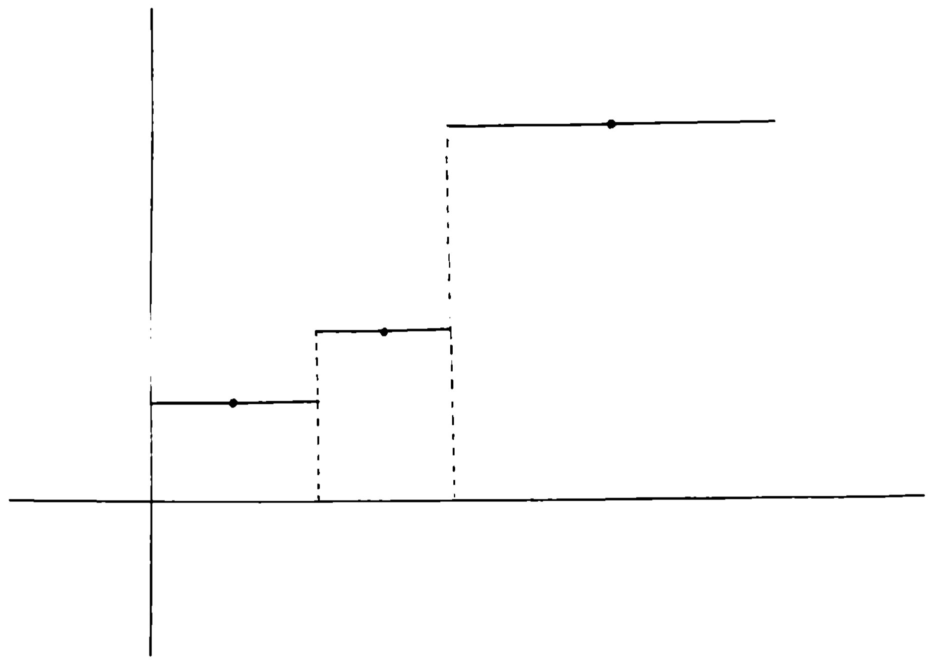
$$\alpha(r) = u$$
$$r = \varphi(u)$$

(*) También existe como integral (R) por ser el integrando monótono.

la integral

$$\int_0^{\infty} e^{-z\lambda(r)}\, d\,\alpha(r)$$

existe según hemos dicho, como integral Lebesgue-Stieltjes. Obsérvase que el ser $\alpha(r)$ creciente es suficiente, pues aunque sea discontinua:



como es monótona y acotada, el número de saltos puede ser a lo sumo númerable, por lo tanto de medida nula, despreciable en la integral de Lebesgue (y también (R) por ser monótona la función) Existirán entonces, infinitas funciones que pueda adoptar como inversa, según el valor atribuído a dicha inversa en los puntos correspondientes a $\alpha(r) = C^{te}$ (por ejemplo el promedio de los valores de r tales que $\alpha(r) = C^{te}$). Sea la función $r = \varphi(u)$ una de ellas. Podemos escribir:

$$\lambda\left[\varphi(u)\right] = \omega(u)$$

que como sabemos es creciente y sea una de sus infinitas inversas:

$$u = \psi(\omega)$$

Luego:

$$\int_0^{\infty} e^{-z\lambda(r)}\, d\alpha(r) = \int_0^{\infty} e^{-z\omega}\, d\psi(\omega) = f(z)$$

esta es una integral ordinaria de Laplace-Stieltjes, por lo tanto es válida la fórmula de inversión conocida:

$$\psi(\omega) = \frac{1}{2\pi i}\int_{h-i\infty}^{h+i\infty} \frac{f(z)\, e^{z\omega}}{z}\, dz$$

o sea:

$$\psi\left[\lambda\{\varphi(u)\}\right] = \frac{1}{2\pi i}\int_{h-i\infty}^{h+i\infty} \frac{f(z)\, e^{z\lambda[\varphi(u)]}}{z}\, dz$$

es decir:

$$\alpha(r) = \frac{1}{2\pi i}\int_{h-i\infty}^{h+i\infty} \frac{f(z)\, e^{z\lambda(r)}}{z}\, dz$$

que es la fórmula buscada.

-------------0-------------

DERIVADAS FRACCIONARIAS DE $\alpha(r)$.

---------------o---------------

En el Teorema que figura a continuación, utilizamos las derivadas generalizadas de Riemann Lieuville, sobre las cuales hemos leído las publicaciones:

A. Marchaud- "Sur les dérivées et sur les différences des fonctions de variables réelles" (Journal de Mathématiques pures et appliquées 1927 - pag. 337)

C. V.L. Smith- " The fractional derivative of Laplace integral" (Duke Mathematical Journal -8- 1941- pag. 47)

Transcribimos un sucinto resumen de la parte de la primera que nos interesa:

El autor establece primero, las condiciones necesarias y suficientes para la existencia de derivadas continuas hasta el orden α , entero o no, y su expresión por una integral definida.

Considera a la derivada como una integral de orden negativo, después de haber transformado la expresión de la integral de orden $\alpha > 0$ de manera que pueda conservar un sentido cuando se reemplaza por un número no positivo.

Las nociones de integral y derivada generalizada, cuya primera idea parece debida a Leibnitz, han sido precisadas por Léouville y sobre todo por Riemann. Este último llama integral de oreden $\alpha > 0$ de $f(x)$ a :

$$I_a^{(\alpha)} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t)\,dt = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{x-a} t^{\alpha-1} f(x-t)\,dt$$

donde $\Gamma(\alpha)$ designa la función euleriana de segunda especie.

Cuando α es entero, $I_a^{(\alpha)}$ es el resultado obtenido al integrar $f(x)$ α veces consecutivas a partir de a.

La derivada de orden $\alpha\ (\alpha>0)$ el autor define por la relación:

$$D_a^{(\alpha)} f(x) = D^{(n)} I_a^{(n-\alpha)} f(x) = \frac{d^n}{dx^n}\ I_a^{(n-\alpha)}\ f(x) \qquad (n>\alpha)$$

que es independiente del entero n y se reduce a la derivada ordinaria para α entero.

Si se tratara de definir directamente la derivada de orden α, como integral de orden $-\alpha$, podríamos:

$$D_a^{(\alpha)} f(x) = \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \int_0^{x-a} t^{-\alpha-1} f(x-t)\,dt$$

que diverge, por lo tanto, trata de dar otra expresión a la integral de orden α, para que conserve sentido, cuando $\alpha<0$.

Siempre que la derivada sea continua, se le puede considerar como una integral de orden negativo

$$D_a^{(\alpha)} f(x) = I_a^{(-\alpha)} f(x) = \frac{1}{\gamma(\alpha)} \int_0^{\infty} t^{-\alpha-1} \varphi(x,t)\,dt$$

donde:

$$\gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} t^{-\alpha-1}\psi(t)\,dt$$

$$\psi(t) = \sum_0^p c_i e^{-k_i t}$$

$$\varphi(x,t) = \sum_0^p c_i\, f(x - k_i t)$$

siendo c_i constantes y k_i constantes positivas crecientes.

Enuncia y demuestra:

La condición necesaria y suficiente para que f(x) continua en (a ; a_1) admita en este intervalo derivadas continuas hasta la de orden α inclusive es que :

$$\int_\varepsilon^\infty t^{-\alpha-1}\, \varphi(x,t)\, dt$$

sea uniformemente convergente en todo intervalo interior al dado.

Lieuville (Journal Ec.Polyt.cah.21) define:

$$D_x^{(\mu)} f(x) = \frac{(-1)^\mu}{\Gamma(-\mu)} \int_0^\infty f(x+t)\, t^{-(\mu+1)}\, dt$$

para $\mu \leq -1$

C.V.L.Smith en la memoria citada, adopta como definición:

$$D_x^{(\nu)} f(x) = \frac{-1}{\Gamma(1-\nu)} \int_x^\infty (u-x)^{-\nu} f(u)^{m+1}\, du$$

Pero en la fórmula que aplicamos en nuestro caso para el Teorema que consideramos es la de Riemann

$$D_{\omega}^{-\rho}\alpha(\omega) = \frac{1}{\Gamma(\rho)}\int_{0}^{\omega}\alpha(t)(\omega-t)^{\rho-1}\,dt$$

$$\rho > 0 \qquad \omega > 0$$

-----------O---------

TEOREMA

Si la integral

$$(1) \qquad f(z) = \int_{0}^{\infty} e^{-z\lambda(r)}\,d\alpha(r)$$

donde $\lambda(r)$ es continua y estrictamente creciente, converge para $x > c$, para todo $h > c$ se verifica que:

$$D_{r_0}^{-\rho}\alpha(r_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{h-i\infty}^{h+i\infty}\frac{f(z)\,e^{\lambda(r_0)z}}{z^{\rho+1}}\,dz$$

para $r_0 > 0$

y $\rho > 0$.

donde $D_{r_0}^{-\rho}\alpha(r_0)$ es la derivada fraccionaria de Riemann en r_0 ;
expresada según sabemos por:

$$D_{r_0}^{-\rho}\alpha(r_0) = \frac{1}{\Gamma(\rho)}\int_0^{r_0}\alpha(r)\,(r_0-r)^{\rho-1}\,dr$$

Demostración

Dado que por Hipótesis es $\lambda(r)=u$ continua y estrictamente creciente,
existe la función inversa $r=\varphi(u)$ también continua y estrictamente creciente.
Substituyendo en (1)

$$f(z) = \int_0^{\infty} e^{-zu}\,d\alpha\left[\varphi(u)\right]$$

donde $\alpha[\varphi(u)]$ es de variación acotada por serlo $\alpha(r)$.

Aplicando el Teorema que Widder expone en su memoria "A generalization of Dirichlet's Series and of Laplace's integrals by means of a Stieltjes integral" (Transactions of American Mathematical Society 31 -1929- pag. 694) que dice:

"Si la integral

$$\int_0^{\infty} e^{-st}\,d\alpha(t)$$

converge para $\sigma>\sigma_c$ y si c es una constante positiva, mayor que σ_c

es:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\frac{e^{\omega s}\,f(s)}{s^{\rho+1}}\,ds = D_{\omega}^{-\rho}\,\alpha(\omega)$$

$$\omega>0$$
$$\rho>0$$

para nuestro caso es:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{h-i\infty}^{h+i\infty} \frac{f(z)\, e^{u_0 z}}{z^{\nu+1}}\, dz = D_{u_0}^{-\nu}\, \alpha\left[\varphi(u_0)\right] \qquad \text{para } u_0 > 0,\ \nu > 0$$

y haciendo el cambio de variables

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{h-i\infty}^{h+i\infty} \frac{f(z)\, e^{z\lambda(r_0)}}{z^{\nu+1}}\, dz = D_{r_0}^{-\nu}\, \chi(r_0)$$

que es la tesis.

ALGUNOS CASOS EN QUE SE DETERMINA EL CAMPO DE ANALITICIDAD DE D_λ

Como es sabido, toda integral de Laplace-Stieltjes generalizada, define una función holomorfa en su semiplano de convergencia; en algunos casos, el campo de analiticidad puede ampliarse, llegando a comprender casi todo el plano, como se ve en los teoremas siguientes, que incluyen una generalización del Teorema de Lau .

--------O--------

TEOREMA:

Si $\alpha(r)$ es una función de variación acotada en todo intervalo finito $0 \leq r \leq R$ y coincidente con $\psi(r)$ para $r \geq k$, tal que $\psi(r)$ es analítica en la región $|r| \geq k$ y es nula en el infinito, y $\lambda(r)$ es una función positiva infinitamente creciente, entonces la función

$$(1) \qquad f(z) = \int_0^\infty e^{-z\lambda(r)}\, d\alpha(r)$$

es analítica en todo el plano cortado a lo largo del semieje real negativo.

Demostración.

Integrando por partes, se tiene:

$$f(z) = \alpha(r)\, e^{-z\lambda(r)}\Big|_0^\infty + z\int_0^\infty \alpha(r)\, e^{-z\lambda(r)}\, d\lambda(r)$$

El primer término es nulo si suponemos que $\alpha(0) = 0$, ya que $\alpha(\infty) = \psi(\infty) = 0$.

Luego

$$f(z) = z\int_0^\infty \alpha(r)\, e^{-z\lambda(r)}\, d\lambda(r)$$

Descomponemos ahora el intervalo de integración y resulta

$$(2) \qquad f(z) = z\left[\int_0^k \alpha(r)\, e^{-z\lambda(r)}\, d\lambda(r) + \int_k^\infty \psi(r)\, e^{-z\lambda(r)}\, d\lambda(r)\right]$$

Como $\psi(r)$ es analítica y nula en el infinito es según teorema anterior, una función D, es decir:

$$\psi(r) = \int_0^\infty e^{-t\lambda(r)}\, d\beta(t)$$

donde $\beta(t)$ es una función de orden unidad y tipo k, por lo tanto dado un ε arbitrariamente pequeño, puede determinarse un H tal que

$$|\beta(t)| < e^{(k+\varepsilon)|t|} \qquad \text{para } |t| \geq H$$

Reemplazando en (2)

$$(3) \qquad f(z) = z\int_0^k \alpha(r)\, e^{-z\lambda(r)}\, d\lambda(r) + z\int_k^\infty e^{-z\lambda(r)}\, d\lambda(r) \int_0^\infty e^{-t\lambda(r)}\, d\beta(t)$$

De acuerdo con las condiciones que debe cumplir $\psi(r)$, desde r = k en adelante debe verificarse

$$|\psi(r)| < M$$

Luego el segundo término de (3) converge absolutamente, por lo tanto es lícita la permutación del orden de integración

$$z\int_k^\infty e^{-z\lambda(r)}\, d\lambda(r)\int_0^\infty e^{-t\lambda(r)}\, d\beta(t) = z\int_0^\infty d\beta(t)\int_k^\infty e^{-(z+t)\lambda(r)}\, d\lambda(r)$$

$$= z\int_0^\infty \left. \frac{e^{-(z+t)\lambda(r)}}{-(z+t)} \right|_k^\infty d\beta(t) = z\int_0^\infty \frac{e^{-(z+t)\lambda(k)}}{z+t}\, d\beta(t)$$

Y, sustituyendo en (3)

$$f(z) = z\int_0^\infty \alpha(r)\, e^{-z\lambda(r)}\, d\lambda(r) + z\int_0^\infty \frac{e^{-(z+t)\lambda(k)}}{z+t}\, d\beta(t)$$

La primera integral define una función analítica en todo el plano, y la segunda en el plano cortado según el eje real negativo, luego el teorema queda demostrado.

TEOREMA

Si $\alpha(r)$ es una función acotada en el intervalo (0; ∞), de variación acotada en cada intervalo finito, definida por la serie uniformemente convergente :

$$(1) \qquad \alpha(r) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\lambda(r) + b_n \operatorname{sen} \lambda(r) n$$

$$|a_n| < \frac{K}{n} \qquad |b_n| < \frac{K}{n}$$

siendo $\lambda(r) > 0$ infinitamente creciente, la función:

$$(2) \qquad f(z) = \int_0^{\infty} e^{-z\lambda(r)} \, d\,\alpha(r)$$

tiene a lo sumo como puntos singulares en el plano, polos de primer orden en los puntos $\pm$ mi.

Demostración.

La integral que define f(z) converge para x > 0 , pues por Hipótesis:

$$|\alpha(r)| \leqslant M = M e^{0\,\lambda(r)}$$

que es la condición exigida para la convergencia , según un Lema establecido en Trabajos de Seminario.

Integrando por partes (2)

$$f(z) = e^{-z\lambda(r)} \alpha(r) \Big|_0^{\infty} + z \int_0^{\infty} e^{-z\lambda(r)} \alpha(r) \, d\,\lambda(r)$$

de donde:

$$(3) \qquad f(z) = -\alpha(0) + z \int_0^{\infty} e^{-z\lambda(r)} \alpha(r) \, d\,\lambda(r)$$

Multiplicando la (I) por $e^{-z\lambda(r)}$ e integrando de 0 a ∞ con respecto a $\lambda(r)$, se tiene:

$$\int_0^{\infty} e^{-z\lambda(r)}\alpha(r)\,d\lambda(r) = \int_0^{\infty} e^{-z\lambda(r)}\left[\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\lambda(r) + b_n \operatorname{sen} n\lambda(r)\right] d\lambda(r)$$

Por la convergencia uniforme de (I), y ser $e^{-z\lambda(r)}$ decreciente,(*) puede integrarse término a término, y resulta:

$$\int_0^{\infty} e^{-z\lambda(r)}\alpha(r)\,d\lambda(r) = \int_0^{\infty} e^{-z\lambda(r)}\frac{a_0}{2}\,d\lambda(r) + \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\infty} e^{-z\lambda(r)}\left[a_n\cos n\lambda(r) + b_n \operatorname{sen} n\lambda(r)\right] d\lambda(r)$$

$$= \frac{a_0}{-2z}e^{-z\lambda(r)}\Big|_0^{\infty} + \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\infty} e^{-z\lambda(r)}\left[a_n\cos n\lambda(r) + b_n \operatorname{sen} n\lambda(r)\right] d\lambda(r)$$

$$= \frac{a_0}{2z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n z + b_n n}{z^2 + n^2}$$

(para $x > 0$)

dado que:

$$a_n\int_0^{\infty} e^{-z\lambda(r)}\cos n\lambda(r)\,d\lambda(r) = a_n\int_0^{\infty} e^{-z\lambda(r)}\,\frac{e^{in\lambda(r)} + e^{-in\lambda(r)}}{2}\,d\lambda(r) =$$

$$= \frac{a_n}{2}\int_0^{\infty}\left[e^{-\lambda(r)(z-in)} + e^{-\lambda(r)(z+in)}\right] d\lambda(r) =$$

$$= \frac{a_n}{2}\left[\frac{e^{-\lambda(r)(z-in)}}{-(z-in)}\Big|_0^{\infty} + \frac{e^{-\lambda(r)(z+in)}}{-(z+in)}\Big|_0^{\infty}\right] =$$

$$= \frac{a_n}{2}\,\frac{z+in+z-in}{z^2+n^2} = \frac{a_n z}{z^2+n^2}$$

(*) Criterio de Abel

Analogamente

$$b_n \int_0^{\infty} e^{-z\lambda(r)} \operatorname{sen} n\lambda(r)\, d\lambda(r) = \frac{b_n n}{z^2+n^2}$$

Reemplazando en (3)

$$f(z) = -\alpha(0) + \frac{a_0}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n z^2 + b_n n z}{z^2+n^2} \qquad \text{(para } x > 0 \text{)}$$

Demostraremos que esta serie define una función analítica en todo el plano, excepto tal vez, en los puntos ni ($n = \pm 1 ; \pm 2 ;$).
En efecto, considerando un número m arbitrariamente grande:

$$f(z) = -\alpha(0) + \frac{a_0}{z} + \sum_{n=1}^{m} \frac{a_n z^2 + b_n n z}{z^2+n^2} + \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{a_n z^2 + b_n n z}{z^2+n^2}$$

La función racional

$$-\alpha(0) + \frac{a_0}{z} + \sum_{n=1}^{m} \frac{a_n z^2 + b_n n z}{z^2+n^2}$$

tiene a lo sumo polos de primer orden, en los puntos $z = \pm i ; \pm 2i, \ldots \pm mi$ dentro del círculo de radio R; $m \leq R \leq m+1$ por ejemplo $R = |Z| \leq m + \frac{1}{2}$
En cuanto a la serie

$$\sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{a_n z^2 + b_n n z}{z^2+n^2}$$

define una función analítica en el mismo círculo, pues converge en él uniformemente. En efecto: siendo $\alpha(r)$ una función acotada, cuyos coeficientes deben cumplir las condiciones:

$$|a_n| < \frac{K}{n} \qquad\qquad |b_n| < \frac{K}{n}$$

y, en consecuencia, para $|z| \leq m + \frac{1}{2}$

$$\sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{a_n z^2 + b_n n z}{z^2+n^2} < \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{\frac{K}{n} z^2 + K z}{z^2+n^2} < \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{K z^2 + K z}{z^2+n^2}$$

$$= (K z^2 + K z) \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{1}{z^2+n^2} = (K z^2 + K z) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^2+(n+m+1)^2}$$

$$< \left[K (m+\tfrac{1}{2})^2 + K(m+\tfrac{1}{2})\right] \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+m+1)^2}$$

y como esta serie es independiente de z y converge, la serie:

$$\sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{a_n z + b_n n z}{z^2+n^2}$$

converge uniformemente en el círculo $|z| \leq m + \frac{1}{2}$, como queríamos probar.

Por lo tanto, $f(z)$ tiene a lo sumo polos de primer orden en los puntos ni, dentro del círculo $|z| \leq m + \frac{1}{2}$, y como m es arbitrariamente grande, el teorema queda demostrado.

--------o--------o------

TEOREMA

Si la función $\alpha(r)$ está definida por la serie:

$$\alpha(r) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-k_n \lambda(r)} \qquad (0 \leq k_0 < k_1 < \cdots \quad k_n \to \infty)$$

absolutamente convergente para $r \geq 0$ y $\lambda(r)$ es continua e infinitamente creciente, la función

$$f(z) = \int_0^\infty e^{-z\lambda(r)} d\alpha(r)$$

tiene a lo sumo polos de primer orden en los puntos $-k_0, -k_1, \ldots\ldots$

Demostración.

Como la derivada con respecto a $\lambda(r)$ de la serie dada es otra del mismo tipo, el Teorema no pierde generalidad, si se escribe

$$f(z) = \int_0^\infty e^{-z\lambda(r)} \alpha(r)\, d\lambda(r)$$

Por lo tanto

$$f(z) = \int_0^\infty e^{-z\lambda(r)} \sum_{n=0}^\infty a_n e^{-k_n \lambda(r)} d\lambda(r)$$

$$= \int_0^\infty \sum_{n=0}^\infty a_n e^{-(z+k_n)\lambda(r)} d\lambda(r)$$

Puesto que la serie dada es absolutamente convergente, al multiplicarla por $e^{-z\lambda(r)}$ que es una función positiva y decreciente para $x > 0$, la serie que resulta es absolutamente convergente y, por lo tanto, aplicando Teorema de Abel

es entonces lícita la integración término a término, y

$$f(z) = \sum_{n=0}^\infty a_n \int_0^\infty e^{-(z+k_n)\lambda(r)} d\lambda(r)$$

$$= \sum_{n=0}^\infty a_n \left. \frac{e^{-(z+k_n)\lambda(r)}}{-(z+k_n)} \right|_0^\infty$$

$$= \sum_{n=0}^\infty a_n \frac{1}{z+k_n} \qquad \text{para } x > 0.$$

Aparece así f(z) representado por la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{d_n}{z+k_n}$ para x> 0 pero esta serie por la convergencia absoluta de la serie de Hipótesis converge en todo el plano exceptoen los puntos $z = -k_n$; por lo tanto, f(z) puede ser prolongada analíticamente en todo el plano, teniendo a lo sumo polos de primer orden en los puntos $-k_0, -k_1 \ldots\ldots$

TEOREMA

Si es

$$f(z) = \int_0^{\infty} e^{-z\lambda(r)}\, d\alpha(r)$$

donde

$$\alpha(r) = \int_0^{\infty} e^{-\lambda(r)t}\, d\beta(t) \qquad \alpha(0) = 0$$

es absolutamente convergente para $r \geq 0$, entonces F(z) es analítica en todo el plano, excepto a lo sumo el semieje real negativo.

Demostración.

Integrando por partes:

$$f(z) = e^{-z\lambda(r)}\alpha(r)\Big|_0^{\infty} + z\int_0^{\infty} e^{-z\lambda(r)}\alpha(r)\, d\lambda(r)$$

anulándose la primera parte para ∞ ,y también para 0 pues suponemos $\alpha(0)=0$.

En consecuencia:

$$f(z) = z\int_0^\infty e^{-z\lambda(r)}\alpha(r)\,d\lambda(r)$$

y sustituyendo $\alpha(r)$

$$\frac{f(z)}{z} = \int_0^\infty e^{-z\lambda(r)}\left[\int_0^\infty e^{-t\lambda(r)}\,d\beta(t)\right]d\lambda(r)$$

Permutando el orden de integración (*)

$$\frac{f(z)}{z} = \int_0^\infty d\beta(t)\int_0^\infty e^{-(z+t)\lambda(r)}\,d\lambda(r)$$

$$= \int_0^\infty \left[\frac{e^{-(z+t)\lambda(r)}}{-(z+t)}\right]_0^\infty d\beta(t) = \int_0^\infty \frac{d\beta(t)}{z+t}$$

para $x > 0$.

Esta integral existe puesto que $\beta(t)$ debe ser de variación acotada o continua, y $\frac{1}{z+t}$ reune las dos condiciones.

La función $\frac{f(z)}{z}$ y por lo tanto f(z), aparece definida como función analítica en el semiplano de la derecha con respecto al eje imaginario, pero por prolongación analítica puede extenderse a todo el plano, excepto a lo sumo en el semieje real negativo; puede ocurrir que ese corte en el plano sea ficticio, o bien que corresponda efectivamente, de acuerdo con las propiedades de $\beta(t)$.

(*) La permutación del orden de integración es lícita dado que la integral converge absolutamente para $x > 0$. En efecto:

$$\int_0^\infty |d\beta(t)|\int_0^\infty e^{-\lambda(r)(x+t)}\,d\lambda(r) = \int_0^\infty \frac{|d\beta(t)|}{x+t}$$

que converge para $x > 0$.

-----------●----------

COMPORTAMIENTO DE LA INTEGRAL EN LAS LÍNEAS VERTICALES

Del mismo modo que en las Series de Dirichlet, en las funciones D_λ es importante el comportamiento de la función cuando x σ y tiende a infinito .

Se establece inmediatamente que $f(z) = O(|y|)$, luego , afinando más, vemos que $f(z) = o(|y|)$ y, en otros teoremas, cómo las características de $\alpha(r)$ y $\lambda(r)$ influyen en el orden de crecimiento de $f(z)$ a lo largo de las líneas verticales .

Finalmente, consideramos la integral en un intervalo finito y vemos que cumpliéndose ciertas condiciones, estas integrales tienden uniformemente a cero en las líneas verticales .

-------0--------

TEOREMA

Si la

$$\int_0^\infty e^{-z\lambda(r)}\, d\alpha(r)$$

tiene c por abcisa de convergencia, se verifica que:

$$f(h+iy) = C(|y|) \qquad \text{para } h > c.$$

En efecto: de acuerdo con una transformación que hemos establecido en nuestros trabajos de Seminario, si

$$z = h+iy \qquad \text{y} \qquad c < h = x$$

es:

$$\int_0^\infty e^{-z\lambda(r)}\, d\alpha(r) = (z-z_0)\int_0^\infty S(r,z_0)\, e^{-(z-z_0)\lambda(r)}\, d\lambda(r)$$

que converge absolutamente y donde:

$$S(r,x_0) = \int_0^r e^{-z_0\lambda(r)}\, d\alpha(r)$$

en consecuencia

$$\frac{|f(z)|}{|y|} \leq \frac{|z-z_0|}{|y|}\int_0^\infty |S(r,z_0)|\, e^{-(x-x_0)\lambda(r)}\, d\lambda(r)$$

$$\frac{|f(h+iy)|}{|y|} \leq \frac{\left[(h-x_0)^2+y^2\right]^{\frac{1}{2}}}{|y|}\, K$$

o sea

$$|f(h+iy)| = C(|y|) \qquad \text{para } h > c.$$

TEOREMA

Si la integral
$$f(z) = \int_c^\infty e^{-z\lambda(r)}\, d\alpha(r)$$

converge para $z = z_0$ es
$$f(x+iy) = o(|y|)$$
uniformemente, para $x \ge x_0 + k$ siendo $k > 0$.

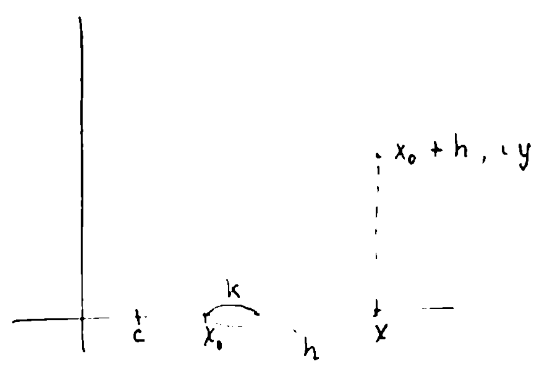
O en otros términos, para $k \le h < \infty$ es:
$$\frac{|f(x_0+h+iy)|}{|y|} \longrightarrow 0$$

Demostración.

Consideremos el punto z_0 sobre el eje de abcisas es decir $z_0(x_0;0)$

luego:

$z - z_0 = h + iy$



Podemos escribir:
$$\frac{|f(x_0+h+iy)|}{|y|} = \frac{1}{|y|}\left|\int_0^\infty e^{-(x_0+h+iy)\lambda(r)}\, d\alpha(r)\right| =$$
$$= \frac{1}{|y|}\left|\int_c^a e^{-(x_0+h+iy)\lambda(r)}\, d\alpha(r)\right| + \frac{1}{|y|}\left|\int_a^\infty e^{-(x_0+h+iy)\lambda(r)}\, d\alpha(r)\right|$$

Demostraremos primero que el segundo término es menor que $\frac{\varepsilon}{2}$ para a suficientemente grande. Para ello tenemos que:
$$\int_a^\infty e^{-(x_0+h+iy)\lambda(r)}\, d\alpha(r) = \int_a^\infty e^{-(h+iy)\lambda(r)}\, e^{-(x_0\lambda(r))}\, d\alpha(r)$$

Integrando por partes y teniendo en cuenta que

$$S(r,x_0) = \int_0^r e^{-x_0 \lambda(r)}\, d\alpha(r)$$ se tiene:

$$\int_a^\infty e^{-(x_0+h+iy)\lambda(r)}\, d\alpha(r) = S(r,x_0)\, e^{-(h+iy)\lambda(r)} \Big|_a^\infty - \int_a^\infty S(r,x_0)\, d e^{-(h+iy)\lambda(r)}$$

y como para $r \to \infty$ la exponencial tiende a cero y la S(r;X) está acotada es:

$$\int_a^\infty e^{-(x_0+h+iy)\lambda(r)}\, d\alpha(r) =$$

$$= - S(a,x_0)\, e^{-(h+iy)\lambda(a)} - \int_a^\infty S(r,x_0)\, d e^{-(h+iy)\lambda(r)} =$$

$$= - S(a,x_0)\, e^{-(h+iy)\lambda(a)} + (h+iy) \int_a^\infty S(r,x_0)\, e^{-(h+iy)\lambda(r)}\, d\lambda(r)$$

LLamando K a la cota del módulo de S, al dividir por y la expresión anterior, y tomar módulos, resulta:

$$\left| \frac{1}{y} \int_a^\infty e^{-(x_0+h+iy)\lambda(r)}\, d\alpha(r) \right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{|y|} K e^{-k\lambda(a)} + \left| \frac{h+iy}{y} \right| \left| \int_a^\infty S(r,x_0)\, e^{-(h+iy)\lambda(r)}\, d\lambda(r) \right|$$

y tomando módulos dentro del signo integral en el último término, la expresión anterior resulta:

$$\left| \frac{1}{y} \int_a^{\infty} e^{-(x_0+h+iy)\lambda(r)} d\alpha(r) \right| \leq \frac{1}{|y|} K e^{-k\lambda(a)} + k \left| \frac{h+iy}{y} \right| \int_a^{\infty} e^{-h\lambda(r)} d\lambda(r)$$

$$= \frac{1}{|y|} K e^{-k\lambda(a)} - \frac{K}{h} \left| \frac{h+iy}{y} \right| e^{-h\lambda(r)} \Big|_a^{\infty}$$

$$= \frac{1}{|y|} K e^{-k\lambda(a)} - K \sqrt{\frac{h^2+y^2}{h^2y^2}} \; e^{-h\lambda(r)} \Big|_a^{\infty}$$

y teniendo nuevamente en cuenta que $e^{-h\lambda(r)} \to 0$ cuando $r \to \infty$ es:

$$\left| \frac{1}{y} \int_a^{\infty} e^{-(x_0+h+iy)\lambda(r)} d\alpha(r) \right| <$$

$$< \frac{1}{|y|} K e^{-k\lambda(a)} + K \sqrt{\frac{h^2+y^2}{h^2y^2}} \; e^{-h\lambda(a)} <$$

$$< \frac{1}{y_1} K e^{-k\lambda(a)} + K \sqrt{\frac{1}{y_1^2}+\frac{1}{k^2}} \; e^{-k\lambda(a)}$$

donde $y_1 \leq |y|$

Expresión que para a suficientemente grande, como $\lambda(r)$ es infinitamente creciente con r y los demás términos son constantes, puede hacerse menor que $\frac{\varepsilon}{2}$.

Consideremos ahora la integral entre 0 y a :

$$\frac{1}{|y|} \left| \int_0^a e^{-(x_0+h+iy)\lambda(r)} d\alpha(r) \right| \leq \frac{1}{|y|} e^{-x_0\lambda(0)} \, \text{Variac.}\, \alpha(r) \Big|_0^a$$

esta desigualdad es inmediata si se observa que $e^{-x_0\lambda(0)}$ es el máximo del módulo de la exponencial, y se recuerda la propiedad expresada simbólicamente por.

$$\left| \int_a^b f(r)\, d\alpha(r) \right| \leq M \text{ Variac. total de } \alpha(r) \text{ en } (a,b)$$

La expresión obtenida se hace entonces menor que $\frac{\varepsilon}{2}$ para $|y| \geq y_2$. Considerando el mayor entre y_1 e y_2. la integral total resulta menor que ε es decir:

$$\frac{\left| f(x_1 + h + iy) \right|}{|y|} < \varepsilon$$

y el Teorema queda demostrado.

----------O----------

LEMMA

Si $a(r)$ y $\lambda(r)$ tienen derivadas continuas hasta las de orden n que cumplen las condiciones (I), la $f(x+iy) = O\left(|y|^{1-n}\right)$ es decir para todo $x > \gamma_1 + (n-2)\gamma_2$ es:

$$\left| \frac{f(x+iy)}{y^{1-n}} \right| < K$$

$$\begin{cases} \lambda(0) = 0 \\ \lambda'(0) \neq 0 \\ \left| \left(\dfrac{\alpha'(r)}{\lambda'(r)} \right)^{(k)} \right| < M_1 e^{\gamma_1 \lambda(r)} \\ \left(\dfrac{\alpha'(0)}{\lambda'(0)} \right)^{(k)} = 0 \\ \left| \left(\dfrac{1}{\lambda'(r)} \right)^{(k)} \right| < M_2 e^{\gamma_2 \lambda(r)} \end{cases}$$

Demostración

Como $\alpha(r)$ es derivable, se tiene:

$$\int_0^\infty e^{-z\lambda(r)} d\alpha(r) = \int_0^\infty e^{-z\lambda(r)} \alpha'(r) dr$$

Integrando por partes:

$$\int_0^\infty e^{-z\lambda(r)} \alpha'(r) dr = \frac{e^{-z\lambda(r)}}{-z} \frac{\alpha'(r)}{\lambda'(r)} \Bigg|_0^\infty + \frac{1}{z} \int_0^\infty e^{-z\lambda(r)} \left(\frac{\alpha'(r)}{\lambda'(r)} \right)' dr$$

El primer término tiende a cero, pues para $r \to \infty$ la expresión $\dfrac{\alpha'(r)}{\lambda'(r)}$ está acotada por hipótesis de tal manera que :

$$\left| e^{-z\lambda(r)} \frac{\alpha'(r)}{\lambda'(r)} \right| < M_1 e^{-x\lambda(r)} e^{\gamma_1 \lambda(r)} = M_1 e^{-(x-\gamma_1)\lambda(r)}$$

que tiende a 0 al crecer r, para $x > \gamma_1$, y para $r = 0$, según la hipótesis es $\dfrac{\alpha'(r)}{\lambda'(r)} = 0$. Luego:

$$\int_0^\infty e^{-z\lambda(r)} \alpha'(r) dr = \frac{1}{z} \int_0^\infty e^{-z\lambda(r)} \left(\frac{\alpha'(r)}{\lambda'(r)} \right)' dr$$

Integrando nuevamente por partes

$$\int_0^\infty e^{-z\lambda(r)} d\alpha(r) = - \frac{e^{-z\lambda(r)}}{z^2} \frac{1}{\lambda'(r)} \left(\frac{\alpha'(r)}{\lambda'(r)}\right)' \Bigg|_0^\infty +$$

$$+ \frac{1}{z^2} \int_0^\infty e^{-z\lambda(r)} \left[\left(\frac{1}{\lambda'(r)}\right)' \left(\frac{\alpha'(r)}{\lambda'(r)}\right)' + \frac{1}{\lambda'(r)} \left(\frac{\lambda'(r)}{\lambda'(r)}\right)'' \right] dr$$

y razonando como en el caso anterior, el primer término se anula y queda:

$$\int_0^\infty e^{-z\lambda(r)} d\alpha(r) = \frac{1}{z^2} \int_0^\infty e^{-z\lambda(r)} \left[\left(\frac{1}{\lambda'(r)}\right)' \left(\frac{\alpha'(r)}{\lambda'(r)}\right)' + \frac{1}{\lambda'(r)} \left(\frac{\alpha'(r)}{\lambda'(r)}\right)'' \right] dr$$

Repitiendo la integración por partes

$$\int_0^\infty e^{-z\lambda(r)} d\alpha(r) = - \frac{e^{-z\lambda(r)}}{z^3} \frac{1}{\lambda'(r)} \left[\left(\frac{1}{\lambda'(r)}\right)' \left(\frac{\alpha'(r)}{\lambda'(r)}\right)' + \frac{1}{\lambda'(r)} \left(\frac{\alpha'(r)}{\lambda'(r)}\right)'' \right] \Bigg|_0^\infty +$$

$$+ \frac{1}{z^3} \int_0^\infty e^{-z\lambda(r)} \left\{ \left(\frac{1}{\lambda'(r)}\right)' \left[\left(\frac{1}{\lambda'(r)}\right)' \left(\frac{\alpha'(r)}{\lambda'(r)}\right)' + \frac{1}{\lambda'(r)} \left(\frac{\alpha'(r)}{\lambda'(r)}\right)'' \right] + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\lambda'(r)} \left[\left(\frac{1}{\lambda'(r)}\right)'' \left(\frac{\alpha'(r)}{\lambda'(r)}\right)' + \left(\frac{1}{\lambda'(r)}\right)' \left(\frac{\alpha'(r)}{\lambda'(r)}\right)'' + \left(\frac{1}{\lambda'(r)}\right)' \left(\frac{\alpha'(r)}{\lambda'(r)}\right)'' + \frac{1}{\lambda'(r)} \left(\frac{\alpha'(r)}{\lambda'(r)}\right)''' \right] \right\} dr$$

Nuevamente el primer término se anula, pues, para r = 0 es $\left(\frac{\alpha'(r)}{\lambda'(r)}\right)' = \left(\frac{\alpha''(r)}{\lambda''(r)}\right)'' = 0$ y para $r \to \infty$ se tiene

$$| \; | < e^{-x\lambda(r)} M_2 e^{\gamma_2\lambda(r)} \left[2 M_2 e^{\gamma_2\lambda(r)} M_1 e^{\gamma_1\lambda(r)} \right] = 2 M_1 M_2 e^{-[x-(\gamma_1+2\gamma_2)]\lambda(r)}$$

expresión que tiende a 0 cuando $x > \gamma_1 + 2\gamma_2$

Cuando se ha realizado(n − I) veces la integración por partes, el primer término general está formado por la suma de N términos(N número finito) de la forma

$$\frac{1}{z^{n-1}} \left(\frac{1}{\lambda'(r)}\right)^{(i_0)} \left(\frac{1}{\lambda'(r)}\right)^{(i_1)} \cdots \left(\frac{1}{\lambda'(r)}\right)^{(i_{n-3})} \left(\frac{\alpha'(r)}{\lambda'(r)}\right)^{(j)} e^{-z\lambda(r)}$$

en que $i_0 + i_1 + \cdots + i_{n-3} + j = n-2$;los i_i varían desde 0 hasta (n − 3) y la j desde I hasta (n − 2); teniendo en cuenta las condiciones de Hipótesis, esta suma es :

$$\left| \quad \right| < \frac{1}{|z^{n-1}|} N M_2^{n-2} e^{(n-2)\gamma_2 \lambda(r)} M_1 e^{\gamma_1 \lambda(r)} e^{-x\lambda(r)} =$$

$$= \frac{1}{|z^{n-1}|} N M_1 M_2^{n-2} e^{-\left[x - \{\gamma_1 + (n-2)\gamma_2\}\right] \lambda(r)}$$

que para $r \to \infty$ y $x > \gamma_1 + (n-2)\gamma_2$ tiende a 0.

En cuanto a su valor en el punto 0, se anulan todos los términos en que aparecen las derivadas de $\frac{\alpha'(r)}{\lambda'(r)}$ hasta la de orden(n − 3) , quedando solamente:

$$\frac{e^{-z\lambda(r)}}{z^{n-1}} \left(\frac{1}{\lambda'(r)}\right)^{(n-3)} \left(\frac{\alpha'(r)}{\lambda'(r)}\right)^{(n-2)}$$

cuyo módulo es menor que

$$\frac{1}{|z^{n-1}|} M_1 M_2^{n-3} e^{-\left[x - \{\gamma_1 + (n-3)\gamma_2\}\right] \lambda(r)}$$

y como $\lambda(0) = 0$ se reduce a

$$\frac{1}{|z^{n-1}|} M_1 M_2^{n-3}$$

Pasemos ahora a considerar la segunda parte; en la integral figuran N'términos(N'número finitp) y razonando como para la primera parte, resulta su módulo menor que

$$\left|\frac{1}{z^{n-1}}\right| \int_0^{\infty} e^{-x\lambda(r)} N' M_1 M_2^{n-2} e^{[\gamma_1+(n-2)\gamma_2]\lambda(r)} dr$$

$$= \left|\frac{1}{z^{n-1}}\right| N' M_1 M_2^{n-2} \int_0^{\infty} e^{-\{x-[\gamma_1+(n-2)\gamma_2]\}\lambda(r)} \lambda'(r) \frac{1}{\lambda'(r)} dr$$

La integral es convergente siempre que $x > \gamma_1+(n-1)\gamma_2$, luego el coeficiente de $\frac{1}{|z^{n-1}|}$ tiene un valor finito y como ocurría lo mismo con la primera parte., resulta que

$$|f(z)| < \left|\frac{1}{z^{n-1}}\right| K$$

o sea

$$\left|\frac{f(z)}{z^{1-n}}\right| < K$$

que es la tesis.

OBSERVACION

Las condiciones impuestas a $\left(\frac{1}{\lambda'(r)}\right)^{(k)}$ parecerían superfluas pensando que $\lambda(r)$ es infinitamente creciente, pero en el ejemplo $\lambda(r) = \log\log r$ se ve que no es así, pues

$$\lambda'(r) = \frac{1}{r\log r} \qquad \frac{1}{\lambda'(r)} = r.\log r$$

y para cualquier γ existirá un r tal que se verifique:

$$r \log r > e^{\gamma \log \log r}$$

o sea

$$r \log r > \overline{\log r}^{\,\gamma}$$

de donde:

$$r > \frac{\overline{\log r}^{\,\gamma}}{\log r} = \overline{\log r}^{\,\delta}$$

Por lo tanto, desde el valor así determinado de r en adelante, se verifica que:

$$\frac{1}{\lambda'(r)} > e^{\gamma \log \log r} = e^{\gamma \lambda(r)}$$

es decir: $\frac{1}{\lambda'(r)}$ cumple una desigualdad de sentido contrario a la impuesta en la Hipótesis del Teorema anterior.

---------o----------

TEOREMA

Si

$$f(z) = \int_0^\infty e^{-z\lambda(r)}\, d\alpha(r)$$

converge para $x \geq c$ y es $f(z) = O(|y|^\rho)$ ($\rho < -n$, siendo n un número natural) para $R(z) = h \geq c$; si $\lambda(r)$ es estrictamente creciente, existe hasta su derivada enésima y cada $\lambda^{(m)}(r)$ (m = 1, 2, ... n) es de orden unidad y a lo sumo de tipo mh con respecto a $\lambda(r)$, entonces se verifica que $\alpha(r)$ es función continua lo mismo que sus n primeras derivadas $\alpha^{(m)}(r)$ (m = 1, 2, ... n) y son de orden unidad y tipo a lo sumo $(m+1)h$ con respecto a $\lambda(r)$

H) $f(z) = \int_0^\infty e^{-z\lambda(r)}\, d\alpha(r)$ converge para $x \geq c$.

$f(z) = O(|y|^\rho)$ $\rho < -n$ siendo n natural.

$\lambda(r)$ estrictamente creciente

$|\lambda^{(m)}(r)| < e^{mh\lambda(r)}$

T) $\alpha(r)$ continua y derivable hasta $\alpha^{(n)}(r)$

$|\alpha^{(m)}(r)| < K_m e^{(m+1)h\lambda(r)}$ (m = 0, 1, 2, ... n)

Demostración.

Aplicando un Lema que hemos establecido en nuestros Trabajos de Seminario, resulta que , si la integral converge en $R(z) = h$ es:

$$|\alpha(r)| < K_1 e^{h\lambda(r)}$$

Por otra parte según la fórmula de la inversión es:

$$\alpha(r) = \frac{1}{2\pi i} \int_{h-i\infty}^{h+i\infty} \frac{f(z)\, e^{z\lambda(r)}}{z}\, dz$$

Para ver que $\alpha(r)$ es continua y que se puede derivar , derivando el integrando, demostraremos que la integral es uniformemente convergente en un intervalo arbitrario $(0;r_1)$.

consideremos el módulo de la integral, en el inetrvalo $(h+i\varrho,\ h+i\infty)$

$$\left| \int_{h+i\varrho}^{h+i\infty} \frac{f(z)\, e^{z\lambda(r)}}{z}\, dz \right| < \int_{\varrho}^{\infty} \frac{M\, |y|^{\rho}\, e^{h\lambda(r_1)}}{|y|}\, dy$$

puesto que por Hipótesis :

$$(1) \qquad |f(z)| < M\, |y|^{\rho}$$

y $\lambda(r_1)$ es el máximo de $\lambda(r)$ en $(0;r_1)$.

La integral del segundo miembro es independiente de r y converge para $\rho < -n$.

Por lo tanto, converge uniformemente la integral del primer miembro; en consecuencia, $\alpha(r)$ está expresada mediante una integral uniformemente convergente, por lo tanto es continua y se puede derivar bajo el signo integral, y es:

$$\alpha'(r) = \frac{1}{2\pi i} \int_{h-i\infty}^{h+i\infty} \frac{f(z)\, e^{z\lambda(r)}\, \cancel{z}\, \lambda'(r)}{\cancel{z}}\, dz$$

$$|\alpha'(r)| < \frac{1}{2\pi}\, e^{2h\lambda(r)} \int_{h-i\infty}^{h+i\infty} |f(z)|\, dz$$

Laintegral converge por (1)

, y al valor de

$$\int_{h-i\infty}^{h+i\infty} |f(z)|\, dz$$

independiente de r, lo designaremos por M_1. $\frac{M_1}{2\pi} = K_1$

$$|\alpha'(r)| < K_1\, e^{2h\lambda(r)}$$

Para la segunda derivada

$$\alpha''(r) = \frac{1}{2\pi i}\int_{h-i\infty}^{h+i\infty} f(z)\, e^{z\lambda(r)}\left(z\,\lambda'(r)^2 + \lambda''(r)\right) dz$$

$$|\alpha''(r)| < \frac{1}{2\pi}\, e^{3h\lambda(r)} \int_{h-i\infty}^{h+i\infty} |f(z)| \left[\,|z|+1\right] dz = \frac{1}{2\pi}\, e^{3h\lambda(r)} M_2$$

$$\therefore \quad |\alpha''(r)| < K_2\, e^{3h\lambda(r)}$$

Análogamente, siendo:

$$\alpha'''(r) = \frac{1}{2\pi i}\int_{h-i\infty}^{h+i\infty} f(z)\, e^{z\lambda(r)}\left[z\,\lambda'(r)\left(z\lambda'(r)^2 + \lambda''(r)\right) + 2z\lambda'(r)\lambda''(r) + \lambda'''(r)\right] dz$$

resulta

$$|\alpha'''(r)| < k_3\, e^{4h\lambda(r)}$$

y, en general

$$|\alpha^{(m)}(r)| < K_m\, e^{(m+1)h\lambda(r)}$$

con lo que el teorema quede demostrado.

TEOREMA

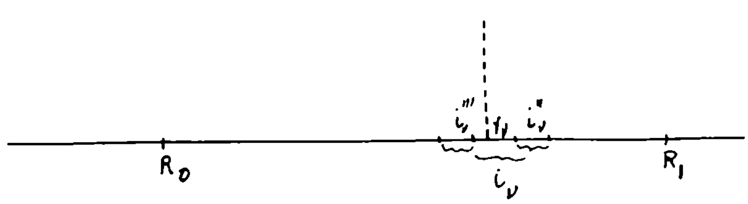
Dada una función

$$f(z) = \int_{R_0}^{R_1} e^{-z\lambda(r)}\,\alpha(r)\,dr$$

donde $\lambda(r)$ es derivable salvo en un número finito de puntos y tal que $\lambda'(r) \geq l > 0$ y $\left(\frac{1}{\lambda'}\right)' < e^{r\lambda(r)}$; $\alpha(r)$ integrable en el mismo intervalo $(R_0\ R_1)$ salvo en otro número finito de puntos (distintos de los anteriores) en los cuales $\int_{i_\nu} |\alpha(r)|\,dr$ tiende a un límite cuando los extremos de i_ν tienden a los puntos excepcionales, entonces la

$$\int_{R_0}^{R_1} e^{-z\lambda(r)}\,\alpha(r)\,dr$$

tiende uniformemente a cero para $x \geq \sigma$, $|v| \to \infty$.



Demostración.

Consideremos primero los intervalos que corresponden a puntos excepcionales; la integral extendida a la suma de ellos, puede hacerse tan pequeña como se quiera, considerando a dichos intervalos suficientemente pequeños; en efecto: Llamando $i_1, \ldots\ldots, i_p$ a los que corresponden a puntos excepcionales de $\alpha(r)$ e $i_1', \ldots\ i_q'$ a los que corresponden a puntos excepcionales de $\lambda(r)$ es:

$$\left| \int_{i_1+\cdots+i_p+i'_1+\cdots+i'_q} e^{-z\lambda(r)}\alpha(r)\,dr \right| = \left| \int_{i_1+\cdots+i_p} e^{-z\lambda(r)}\alpha(r)\,dr \right| + \left| \int_{i'_1+\cdots+i'_q} e^{-z\lambda(r)}\alpha(r)\,dr \right| \leq$$

$$\leq \int_{i_1+\cdots+i_p} e^{-x\lambda(r)} |\alpha(r)|\,dr + \left| \int_{i'_1+\cdots+i'_q} e^{-z\lambda(r)}\alpha(r)\,dr \right| \leq$$

$$\leq e^{|\sigma|\lambda(R_1)} \int_{i_1+\cdots+i_p} |\alpha(r)|\,dr + e^{|\sigma|\lambda(R_1)} \left| \int_{i'_1+\cdots+i'_q} \alpha(r)\,dr \right|$$

Por ser $\alpha(r)$ en los intervalos i'_ν, el segundo término es tan pequeño como se quiera para $\sum_1^q i'_\nu$ suficientemente pequeño, y por la condición impuesta a $\alpha(r)$ en los intervalos i_ν ocurre lo mismo con el primer término para $\sum_{\nu=1}^p i_\nu$ suficientemente pequeño.

Consideremos ahora los intervalos δ_μ que resultan al subdividir el intervalo (R_0, R_1) excluídos los i_p e i'_q

$$(1) \quad \sum_{\mu=1}^n \int_{\delta_\mu} e^{-z\lambda(r)}\alpha(r)\,dr = \sum_{\mu=1}^n \int_{\delta_\mu} e^{-z\lambda(r)} \Big[m_\mu + \big(\alpha(r) - m_\mu\big) \Big]\,dr$$

siendo m_μ el mínimo de $\alpha(r)$ en δ_μ

$$(2) \quad \sum_{\mu=1}^n \int_{\delta_\mu} e^{-z\lambda(r)}\alpha(r)\,dr = \sum_{\mu=1}^n m_\mu \int_{\delta_\mu} e^{-z\lambda(r)}\,dr + \sum_{\mu=1}^n \int_{\delta_\mu} e^{-z\lambda(r)} \big[\alpha(r) - m_\mu\big]\,dr$$

Multiplicando y dividiendo por $\lambda'(r)$ el integrando de la primera sumatoria e integrando por partes, se tiene:

$$\int_{\delta_\mu} e^{-z\lambda(r)} dr = \frac{e^{-z\lambda(r)}}{-z\lambda'(r)}\Bigg|_{\delta_\mu} + \frac{1}{z}\int_{\delta_\mu} e^{-z\lambda(r)}\left(\frac{1}{\lambda'(r)}\right)' dr$$

$$\left|\int_{\delta_\mu} e^{-z\lambda(r)} dr\right| < \frac{e^{|\sigma|\lambda(R_1)}}{|z|\,l} + \frac{1}{|z|}\int_{\delta_\mu} e^{(\sigma+\gamma)\lambda(R_1)} dr$$

para todo $x \geq \sigma$; la integral tiene un valor determinado $e^{(\sigma+\gamma)\lambda(R_1)}\delta_\mu = K\delta_\mu$ y por lo tanto:

$$(3) \qquad \left|\int_{\delta_\mu} e^{-z\lambda(r)} dr\right| < \frac{1}{|y|}\left[\frac{e^{|\sigma|\lambda(R_1)}}{l} + K\delta_\mu\right]$$

$$\therefore \left|\sum_{\mu=1}^{n} m_\mu \int_{\delta_\mu} e^{-z\lambda(r)} dr\right| < \sum_{\mu=1}^{n} m_\mu \frac{1}{|y|}\left[\frac{e^{|\sigma|\lambda(R_1)}}{l} + K\delta_\mu\right] < \frac{\varepsilon}{2}$$

para $x \geq |\sigma|$ y $|y| \geq Y$

En cuanto a la sumatoria del segundo término de (2)

$$\left|\sum_{\mu=1}^{n}\int_{\delta_\mu} e^{-z\lambda(r)}\left[\alpha(r) - m_\mu\right] dr\right| < e^{|\sigma|\lambda(R_1)}\sum_{\mu=1}^{n}(M_\mu - m_\mu)\delta_\mu$$

donde M_μ es el máximo de $\alpha(r)$ en δ_μ

La sumatoria $\sum_{\mu=1}^{n}(M_\mu - m_\mu)\delta_\mu$ es, salvo el factor constante $\frac{1}{R_1-R_0}$ la oscilación media de $\alpha(r)$ en el intervalo $(R_0 R_1)$, que puede hacerse menor que ε' para un número n de divisiones suficientemente grande.

Fijado así n , es:

$$e^{|\sigma|\lambda(R_1)}\sum_{\mu=1}^{n}(M_\mu - m_\mu)\delta_\mu < \frac{\varepsilon}{2} \tag{4}$$

De (3) y (4)

$$\left|\sum_{\mu=1}^{n}\int_{\delta_\mu} e^{-z\lambda(r)}\alpha(r)\,dr\right| < \varepsilon$$

para $|y| \geq Y$ independientemente de x.

Y como

$$\left|\int_{R_0}^{R_1} e^{-z\lambda(r)}\alpha(r)\,dr\right| \leqslant \left|\int_{i+\cdots i_p+i'_1+\cdots i'_q} e^{-z\lambda(r)}\alpha(r)\,dr\right| + \left|\sum_{\mu=1}^{n}\int_{\delta_\mu} e^{-z\lambda(r)}\alpha(r)\,dr\right| < \varepsilon_1$$

resulta que f(z) tiende uniformemente a 0 para $x \geq |\sigma|$ $|y| \to \infty$

Teorema.

Supongamos $\alpha(r)$ de variación acotada e integrable con respecto a $\lambda(r)$ en el intervalo $0 \leq R_0 \leq r \leq R_1$, salvo en un número finito de puntos singulares r_ν, en los que se verifica.

1º $\int_a^{\varepsilon} |\alpha(r)|\, d\lambda(r)$ tiene un límite finito cuando $\varepsilon \to r_\nu$ siempre que (a,ε) no contenga puntos singulares

2º en un entorno de ellos existe $\lambda'(r)$ tal que $\lambda'(r) < K$.

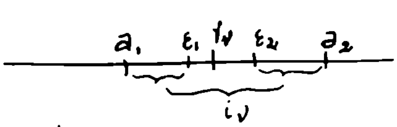
Entonces la integral

$$\int_{R_0}^{R_1} e^{-z\lambda(r)} \alpha(r)\, d\lambda(r) \to 0$$

uniformemente para $x \geq \sigma$ $(\sigma > c)$ y $|y| \to \infty$.

Demostración.

Consideremos los intervalos $(i_1, i_2, \ldots\, i_p)$ correspondientes a los puntos excepcionales.



$$\left| \int_{i_1+\cdots+i_p} e^{-z\lambda(r)} \alpha(r)\, d\lambda(r) \right| \leq \int_{i_1+\cdots+i_p} e^{-x\lambda(r)} |\alpha(r)|\, d\lambda(r) \leq$$

$$\leq e^{|\sigma|\lambda(R_1)} \int_{i_1+\cdots+i_p} |\alpha(r)|\, d\lambda(r) = e^{|\sigma|\lambda(R_1)} \int_{i_1+\cdots+i_p} |\alpha(r)|\, \lambda'(r)\, dr < e^{|\sigma|\lambda(R_1)} K \sum_{i_\nu} l_{i_\nu}$$

Eligiendo los i_ν suficientemente pequeños es decir a_1 y a_2 suficientemente próximos a r_ν es $\sum_{i_\nu} l_{i_\nu}$ tan pequeña como se quiera.

$$\left| \int_{i_1+\dots+i_p} e^{-z\lambda(r)} \alpha(r)\, d\lambda(r) \right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

el intervalo $(r_0, 1)$ excluídos los i_p, lo dividimos en intervalos δ_ν $(\nu = 1, 2 \dots n)$ y consideramos la suma de las integrales sobre los intervalos δ_ν

$$\sum_{\nu=1}^{n} \int_{\delta_\nu} e^{-z\lambda(r)} \alpha(r)\, d\lambda(r) =$$

$$\sum_{\nu=1}^{n} \int_{\delta_\nu} e^{-z\lambda(r)} \left[m_\nu + \alpha(r) - m_\nu \right] d\lambda(r) =$$

(llamando M_ν y m_ν el máximo y el mínimo de $\alpha(r)$ en δ_ν y $M = \overline{ext}\, m_\nu$)

$$\sum_{\nu=1}^{n} \int_{\delta_\nu} e^{-z\lambda(r)} \alpha(r)\, d\lambda(r) = \sum_{\nu=1}^{n} m_\nu \int_{\delta_\nu} e^{-z\lambda(r)} d\lambda(r) + \sum_{\nu=1}^{n} \int_{\delta_\nu} \left[\alpha(r) - m_\nu \right] e^{-z\lambda(r)} d\lambda(r) =$$

$$= \sum_{\nu=1}^{n} m_\nu \left. \frac{e^{-z\lambda(r)}}{-z} \right|_{\delta_\nu} + \sum_{\nu=1}^{n} \int_{\delta_\nu} \left[\alpha(r) - m_\nu \right] e^{-z\lambda(r)} d\lambda(r)$$

$$\left| \sum_{\nu=1}^{n} \int_{\delta_\nu} e^{-z\lambda(r)} \alpha(r)\, d\lambda(r) \right| \leq n M \frac{2\, e^{|\sigma| \lambda(R_1)}}{|z|} + e^{|\sigma| \lambda(R_1)} \sum_{\nu=1}^{n} \int_{\delta_\nu} (M_\nu - m_\nu)\, d\lambda(r)$$

este último termino, puede hacerse tan pequeño como se quiera para un número de divisiones suficientemente grande.

Por lo tanto:

$$(2) \quad \sum_{\nu=1}^{n} \int_{\delta_\nu} e^{-z\lambda(r)} \alpha(r)\, d\lambda(r) < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{para} \quad \begin{array}{l} x \geq \sigma \\ |y| \to \infty \end{array}$$

Teniendo en cuenta (1) y (2), el teorema queda demostrado.

[illegible] N [illegible] IA [illegible]

D[illegible] [illegible]S [illegible]ON[illegible] D[illegible]

Dejamos aquí constancia de algunas definiciones y rpopiedades fundamentales, que son necesarias para el desarrollo de nuestro trabajo. Ellas fueron tomadas, de la recopilación del Curso completo que sobre el Asunto, desarrollara el Doctor Rey Pastor.

----------o---------

Definición: Se llama función D_λ, a la función f(z) definida por la integral:

$$\int_0^\infty e^{-z\lambda(t)}\, dA(t)$$

donde $\lambda(t)$, función real de variable real es infinitamente creciente para $t\to\infty$, y $A(t)$, función completa variable real es continua pue o bien discontinua de variación acotada y $\lambda(t)$ continua pudiendo ocurrir aún que la integral exista siendo las dos funciones de variación acotada con discontinuidades no coincidentes.

-------o-------

Abscisa de convergencia

La abcisa de convergencia de la función D_λ, esta dada por la fórmula :

$$c = \overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{\log |A(t)|}{\lambda(t)}$$

y se demuestra que: Si la integral converge en un punto z_0, converge en el semiplano $\mathcal{R}(z) \geq x_0$

-------0------

Convergencia uniforme

Si la integral D_λ, converge en un punto z_0, converge en uniformemente en todo recinto interior al ángulo menor que π, de vértice en z_0 y simétrico con respecto a la paralela al eje real.

La integral D_λ converge uniformemente en todo dominio acotado interior al semiplano de convergencia.

Si la convergencia de la integral D_λ, es uniformen en la recta $x = x_0$ es también uniforme en el semiplano $x \geq x_0$

----------0---------

Convergencia absoluta

La fórmula de la abcisa de convergencia absolute de D_λ es:

$$a = \overline{\lim_{t \to \infty}} \frac{\log V_0^t A(t)}{\lambda(t)}$$

Si la integral D_λ , converge absolutamente en el punto $x = h$, en todo el semiplano $x \geq h$ de verifica que:

$$|f(x)| \leq \int_c^\infty |\alpha(t)|\, e^{-th}\, dt$$

donde $\alpha(t)$ es tal que

$$A(t) = \int_c^t \alpha(t)\, dt$$

Entre las abcisas de convergencia simple, uniforme y absoluta, se verifica la siguiente relación:

$$c \leq u \leq a$$

----------0--------

Número D

El orden de crecimiento de la función $\lambda(t)$ respecto del logaritmo de t , puede medirse por el número :

$$D = \overline{\lim} \frac{Lt}{\lambda(t)}$$

y caracteriza las propiedades de las funciones D_λ .

Se consideran tres tipos de funciones D_λ :

1º $\lambda(t)$ tiene crecimiento superior al de Lt es decir $D = 0$

2º $\lambda(t)$ tiene crecimiento logarítmico es decir $0 < D < \infty$.

3º $\lambda(t)$ tiene crecimiento inferior al de Lt es decir $D = +\infty$.

Las abscisas de convergencia simple y de convergencia absoluta de las integrales D_λ , de integrando uqe tiende a cero están ligadas por la acotación:

$$0 \leq a - c \leq D$$

--------0--------

La función analítica f(z)

La función f(z) definida por la integral:

$$f(z) = \int_0^\infty e^{-z\lambda(t)}\, dA(t)$$

es holomorfa en el interior de su semiplano de convergencia y su derivada está expresada por la integral convergente:

$$f'(z) = -\int_0^\infty e^{-z\lambda(t)}\lambda(t)\, dA(t)$$

La derivada n-sima de $f(z)$ está expresada por la integral:

$$f^{(n)}(z) = (-1)^n \int_0^{\infty} e^{-z\lambda(t)} \lambda(t)^n \, dA(t)$$

que tiene el mismo semiplano de convergencia que la que define $f(z)$.

Si la integral converge en el punto z_0 de la recta de convergencia, su valor en él, es el límite de la función $f(z)$ al tender z a z_0 dentro de un ángulo de vértice z_0 interior al semiplano.

---------O-------

Puntos singulares

Si la función de repartición $\lambda(t)$ es monótona, el punto real del eje de convergencia es singular.

------C------

Condición suficiente para que una función analítica sea función D .
----

a) $f(z)$ regular y acotada para $x > c$.

b($f(z) \to 0$ para $x \to \infty$

c) Las integrales paraciales de la integral de Riemann están acotadas uniformemente.

La derivada n-sima de $f(z)$ está expresada por la integral:

$$f^{(n)}(z) = (-1)^n \int_0^\infty e^{-z\lambda(t)} \lambda(t)^n \, dA(t)$$

que tiene el mismo semiplano de convergencia que la que define $f(z)$.

Si la integral converge en el punto z_0 de la recta de convergencia, su valor en él, es el límite de la función $f(z)$ al tender z a z_0 dentro de un ángulo de vértice z_0 interior al semiplano.

---------O-------

Puntos singulares

Si la función de repartición $A(t)$ es monótona, el punto real del eje de convergencia es singular.

------O------

Condición suficiente para que una función analítica sea función D.

a) $f(z)$ regular y acotada para $x > c$.

b) $f(z) \to 0$ para $x \to \infty$

c) Las integrales paraciales de la integral de Riemann están acotadas uniformemente.

La condición c) puede ser reemplazada por:

c') las componentes de f(z) tienden monótonamente a 0 para x = h y $|y| \to \infty$.

Las funciones D_λ, de repartición creciente son completamente crecientes en todo intervalo finito de convergencia; por lo tanto: Toda función D_λ, cuya A(t) sea creciente es expresable por una serie de polinomios del tipo

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} (x-x_1)(x-x_2) \qquad (x-x_n)[1\ 2 \ldots \ n]$$

Operador D_λ

Aplicar el operador D_λ a una función A(t) es encontrar la función f(z) tal que:

$$f(z) = \int_0^\infty e^{-z\lambda(t)}\, d\, A(t)$$

En la página siguiente figura un cuadro de propiedades de este operador.

función $\alpha(r)$	función $f(z)$	
a) Producto por K	Producto por k	$D_\lambda[k\alpha] = k f(z)$
b) Producto por $e^{-h\lambda(t)}$	Incremento de z en h	$D_\lambda[e^{-h\lambda(t)}\alpha] = f(z+h)$
c) Producto por $-\lambda(t)$	Derivación	$D_\lambda[-\lambda(t)\alpha] = f'(z)$
Producto por $[-\lambda(t)]^n$	Derivacion n-sima	$D_\lambda[\overline{-\lambda(t)}^n\alpha] = f^{(n)}(z)$
d) División por $-\lambda(t)$	Integración	$D_\lambda[\alpha : (-\lambda(t))] = f^{-1}(z)$
e) Integración	División por z	$D[A] = \frac{f(z)}{z}$
f) Derivación	Multiplicación por z	$D[\alpha'] = z f(z)$

Las dos últimas operaciones se refieren al tipo D.

BIBLIOGRAFIA

Knopp Konrad - Theorie und Anwendung der unendlichen Reihen .

Bieberbach Ludwig - Lehrbuch der funktionentheorie .

Valiron G. - Théorie général des séries de Dirichlet - Mémorial
des Sciences Mathématiques - 1926 .

Widder D. V. - The singularities of a function defined by a Dirich
let series - American Journal of Mathematics- 1927.

Doetsch Gustav - Theorie und Anwendung der Laplace-' Transformation
- 1937 .

Rey Pastor Julio - Algoritmos de convergencia [illegible]
series [illegible] les - [illegible]

Bernstein V. - Séries de Dirichlet-

Bromwich T. J. - An introduction to the theory of infinite series.

Hamburger - (M. Z. 4
M. Z. 7)

Bohr Harald - Ein satz uber Dirichletsche reihen - Sitzungsberich
te ~~der~~ Bayer. Akademie der Wissenschaften zu Munchen-
1913 -

Marchaud A. - Sur les dérivées et sur les différences des Fonctions
de variables réelles - Journal de Mathématiques pu
res et appliquées - 1927.

Smith C. V. L. - The fractional derivative of a Laplace integral - Duke Mathematical Journal -8 - 1941.

Hobson E. W. - The Theory of Functions of a variable and the Theory of Fourier's series -192[illegible]

Widder D. V. - A generalitzation of Dirichlet's series and of Laplace's integrals by means of a Stieltjes integral- Transactions of the American Mathematical Society- 3I - 1929 .

The inversión of the Laplace integral and related moment problem.- Transactions of the American Mathematical Society - 1934

Bohr Harald - Über eine quasi- periodische Eigenschaft Dirichletscher Reihen mit Anwendung auf die Dirichletschen L-Funktionen - Mathematischen Annalen I922

Riesz Marcel - Ein Konvergenzsatz für Dirichletsche Reihen- Acetha Mathematica - 1916

Bohr Harald - Über diophantische Approximationen und ihre Anwendungen- Jahrbuch - 1923

Sur les fonctions presque-périodiques - C. R. 1923