Sobre un nuevo teorema límite del cálculo de probabilidades

González Domínguez, Alberto

1939

Tesis presentada para obtener el grado de Doctor en Ciencias Físico-Matemáticas de la Universidad de Buenos Aires

Cita tipo APA:
González Domínguez, Alberto. (1939). Sobre un nuevo teorema límite del cálculo de probabilidades. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad de Buenos Aires.
http://digital.bl.fcen.uba.ar/Download/Tesis/Tesis_0238_GonzalezDominguez.pdf

Cita tipo Chicago:
González Domínguez, Alberto. "Sobre un nuevo teorema límite del cálculo de probabilidades". Tesis de Doctor. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad de Buenos Aires. 1939.
http://digital.bl.fcen.uba.ar/Download/Tesis/Tesis_0238_GonzalezDominguez.pdf

SOBRE UN NUEVO TEOREMA LIMITE DEL CALCULO DE PROBABILIDADES

-----oo0oo-----

Tesis presentada para optar al grado de
Doctor en Ciencias Físico-Matemáticas

por

ALBERTO GONZALEZ DOMINGUEZ

1 ejemplar devuelto s. autoriz. Exp. 1019/939

Buenos Aires
1939

A mi querido maestro

JULIO REY PASTOR

INTRODUCCION

Este trabajo consta de tres partes. La primera,en cuyos teoremas se basan los resultados obtenidos en las restantes,está dedicada a sistematizar y generalizar los teoremas sobre paso al límite bajo el signo de integral (con integrales de *Stieltjes*). Para ello comenzamos por demostrar un teorema general de Cálculo Funcional (*Teorema 2*),que da condiciones necesarias y suficientes para la convergencia débil de funcionales lineales definidas en el campo de las funciones continuas. Este teorema contiene,como caso particular,un teorema enunciado (aunque no demostrado) por *Riesz* en una nota famosa (*Riesz,1*). Los teoremas restantes del capítulo (*Teoremas 3.4.5.6.7.8.9.y10*),son casos especiales del Teorema 2,y contienen,como casos particulares,a conocidos teoremas de *Lebesgue*.

En el segundo capítulo de la primera parte damos una nueva demostr ción de un importante teorema de *Carathéodory* (Carathéodory,1) basada e nuestro teorema 2. Rectificamos luego con un ejemplo una aserción de este gran geómetra,lo que nos conduce al *Teorema 12* ,que es una generaliz ción del teorema de *Carathéodory*. Para ello nos apoyamos en el *Teorema* en el que se consignan condiciones para la convergencia de una sucesión de funciones igualmente continuas.

En la *Segunda Parte*,dedicada a sistematizar y generalizar los Teor mas Límites del Cálculo de Probabilidades,considerándolos como correlat vos del teorema de Carathéodory,comenzamos por dar una nueva demostraci del Teorema Límite de *Paul Lévy*,que creemos más sencilla y natural que las demás conocidas; acentuamos aquí el nexo que une al teorema de *Paul Lévy* con el de *Carathéodory* más de lo que hemos hecho en otra parte (*Go zález Domínguez*,1). A fin de generalizar el Teorema Límite de *Jacob* (*Ja cob*,1),demostramos los *Teoremas 14* y *15*,que constituyen también amplias generalizaciónes de teoremas debidos al mismo *Jacob* (*loc. cit.*).

. Hacemos luego varias aplicaciones del teorema 15. Es la primera la demostración de una famosa fórmula de inversión de Stieltjes, que ha adquirido recientemente fundamental importancia en la Mecánica cuántica. Aplicamos luego el teorema 15 para obtener una fórmula de inversión, que nos permite determinar la función, definida en un intervalo finito, conocidos sus momentos (con integrales de Stieltjes). En el párrafo siguiente, siguiendo análogo camino, obtenemos otra fórmula de inversión, para el caso en que la función esté definida en un intervalo infinito. Cerramos la segunda parte con el Teorema XVII, que constituye un Teorema Límite muy general, que comprende como caso particular un teorema debido a Jacob (loc. cit.).

La tercera parte consta de dos capítulos. En el primero establecemos condiciones necesarias y suficientes para que los coeficientes de una serie de Hermite vengan dados por las fórmulas de Euler-Fourier (Teoremas 19-25). Estos teoremas ya los hemos publicado en otra parte (A. González Domínguez: "Sobre las Series de Funciones de Hermite; Revista de la Unión Matemática Argentina, Vol.   193). Los hemos reproducido aquí en razón del íntimo nexo qu los une con los teoremas que demostramos en el capítulo segundo. El primero de estos últimos, que es el Teorema 26, es un teorema sobre integrales singulares de Stieltjes, análogo al teorema 15, pero de más difícil demostración. Corolario fácil del teorema anterior es el Teorema 27, que constituye un teorema de unicidad para series de Hermite-Stieltjes. Finalmente, apoyándonos en los resultados anteriores, demostramos el Teorema 28, que es un nuevo Teorema Límite de Cálculo de Probabilidades, en el que las funciones de repartición se caracterizan de la manera en cierto sentido más natural, a saber, por medio de sus coeficientes de Hermite-Stieltjes.

No queremos concluir sin expresar la impagable deuda de gratitud que nos liga a nuestro querido maestro Julio Rey Pastor. Ya antes de conocerlo, sus excelentes libros (únicos en lengua española y comparables con los mejores extranjeros) y la bibliografía en ellos contenida nos habían introducido en la Matemática moderna. Luego,la frecuentación durante años de sus clases y de su trato no ha hedho sino aumentar esa deuda,y es seguro que sin sus enseñanzas,su ejemplo,e incluso sus instancias,esta tesis no se habría escrito. Hay ciertas deudas que ni prescriben,ni pueden pagarse. De esa clase es la nuestra. Que lo dicho valga,cuando menos,como expresión de nuestro profundo agradecimiento.

A. González Domínguez

A. González Domínguez.

Junio de 1939.

Me parece que lo dicho en la p. 1 sea demasiado conocido – En cuanto a lo que sigue me parecería conveniente relacionar un poco más con términos conocidos pero que en este momento no tengo exactamente presentes.

En particular me permito preguntar si se ha tenido presente algunas [illegible] de la integral de Stieltjes contenidas en Vallée-Poussin Funzioni di Variabile reale

En la demostración del teor. 3 hay algo que no entiendo completamente

INDICE

PRIMERA PARTE

Sistematización y generalización de teoremas de paso al límite bajo el signo de integral con integrales de Stieltjes.

Capítulo I.- Generalización de teoremas de Helly.

1.- Sean $f_1(x), f_2(x) \cdots,$ funciones continuas definidas en el intervalo (a,b) y sea $h(x)$ una función de variación acotada. Es sabido que la condición

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x),$$

para todo x de (a,b), no lleva aparejado que se verifique

$$1) \quad \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,d\,h(x) = \int_a^b f(x)\,d\,h(x),$$

ni siquiera para el caso particular $h(x) \equiv x$, en que las integrales de Stieltjes se convierten en integrales ordinarias.

Una condición suficiente, aunque no necesaria, para que se cumpla la es la convergencia uniforme de ($f_n(x)$)hacia $f(x)$. La demostración es análoga a la del teorema correlativo para integrales de Riemann: en virtud de la convergencia uniforme de ($f_n(x)$) ,se verifica que, dado un $\varepsilon>0$, existe un $n(\varepsilon)$ tal que, para $n > n(\varepsilon)$,

$$2) \quad |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{\int_a^b |d\,h(x)|};$$

se verificará por tanto,

$$\left| \int_a^b f_n(x)\,d\,h(x) - \int_a^b f(x)\,d\,h(x) \right| \leq \max |f_n(x) - f(x)| \int_a^b |d\,h(x)| \leq \varepsilon$$

con lo que queda demostrado el teorema.

2.- Otro teorema del mismo tipo, aunque de demostración algo menos sencilla, es el siguiente[1]:

Si las funciones ($f_n(x)$) son continuas y uniformemente acotadas

---

[1] (1).- Banach, pag. 7.

y la sucesión $\left\{ f_n(x) \right\}$ converge en todos los puntos hacia una función contínua $f(x)$, se verifica

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\, dh(x) = \int_a^b f(x)\, dh(x)$$

para toda funcion $h(x)$ de variación acotada.

Más teoremas del mismo tipo han sido demostrados por Bray ('')y Daniell (''') y otros.

3- En todos los teoremas anteriores, la función $\overset{h(x)}{\cancel{f(x)}}$, con respecto a la cual se integra, era FIJA, mientras que el primer factor del integrado era una función continua VARIABLE. En esta primera parte de nuestro trabajo, nos ocuparemos de teoremas de un tipo distinto, en que la función FIJA es el primer factor del integrando, mientras que el segundo, es decir, la función de variación acotada con respecto a la cual se integra, es VARIABLE. En otras palabras, nos ocuparemos de la cuestión de la validez de la igualdad

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f(x)\, dh_n(x) = \int_a^b f(x)\, dh(x) \tag{1}$$

Helly (') demostró, en 1912, que, para que se verifique la (1), es SUFICIENTE que se cumplan las condiciones:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} h_n(x) = h(x)$, en todo el intervalo (cerrado $[a\ b]$

2) $\int_a^b |dh_n(x)| < K$ para todo n.

También demostró Helly que la condición 2) es NECESARIA para la validez del teorema.

Bray, ('''') ha demostrado un teorema más general, substituyendo la condición (1), por la siguiente, menos restrictiva:

('') ver Wiener- (1) pag. 24

(') Helly, (1), pag. 265.

(''') Ver Wiener, (1).

('''') Ver Bray, pag. 180.

2) $\lim_{n\to\infty} h_n(x) = h(x)$, en todos los puntos de un conjunto denso en $[a.\ b]$, que comprenda el punto a, y al punto b. El teorema de Bray, como el de Helly, da sólo condiciones suficientes.

Estos teoremas se designan con la denominación genérica de TEOREMAS DE HELLY; tal denominación no es del todo justa; pues si bien es cierto que Helly fué el primero que DEMOSTRO el primer teorema de ese tipo, también lo es que unos años antes Riesz (') habia ENUNCIADO (aunque no demostrado) un teorema análogo a los de Helly, pero que daba condiciones NECESARIAS Y SUFICIENTES. El teorema de Riesz es el siguiente:

TEOR. 1)- Condición necesaria y suficiente para que, dada una sucesión de funciones $\{h_n(x)\}$ y una función $h(x)$, todas de variación acotada, y tales que $h_n(a) = h(a) = 0$, se verifique

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f(x)\, dh_n(x) = \int_a^b f(x)\, dh(x)$$

para toda función CONTINUA $f(x)$ son:

1) $\int_a^b |dh_n(x)| < M$ para todo n;

2) $\lim_{n\to\infty} \int_a^x h_n(x)\, dx = \int_a^x h(x)\, dx$ para todo x de $[a\ b]$

De este teorema no se ha dado, que nosotros sepamos, ninguna demostración.

Damos a continuación un teorema, que comprende, como demostraremos, al de Riesz, al de Helly y al de Bray, y del que en la segunda parte haremos aplicaciones al Análisis y a la Teoría de las Probabilidades.

(') Riesz (2)

TEOR. 2.- CONDICIONES NECESARIAS Y SUFICIENTES PARA QUE, DADA UNA SUCESION DE FUNCIONES $\{h_n(x)\}$ Y UNA FUNCION $h(x)$, TODAS DE VARIACION ACOTADA, SE VERIFIQUE, PARA TODA FUNCION CONTINUA, LA IGUALDAD

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f(x)\,dh_n(x) \qquad \int_a^b f(x)\,dh(x)$$

es que se cumplan las condiciones:

1) $\int_a^b |dh_n(x)| < M$ para todo n;

2) $\lim_{n\to\infty}\int_a^b dh_n(x) = \int_a^b dh(x)$

3) $\lim_{n\to\infty}\int_s^b (x-s)\,dh_n(x) = \int_s^b (x-s)\,dh(x)$

para todo $a \leq s < b$.

Otro juego de condiciones es el siguiente:

1') igual que (1)

2') $\lim_{n\to\infty}\int_a^b x^r\,dh_n(x) = \int_a^b x^r\,dh(x)$

para todo $r = 0, 1, 2, \dots$

4· Podríamos demostrar este teorema siguiendo un camino análogo al de de Helly; pero la demostración resultaría muy larga y engorrosa. Preferimos pues, apoyarnos en el siguiente teorema de Banach (')

Para que una sucesión $F_n(f(x))$ de funcionales lineales conver-

---

(') Banach, 1, pag. 123.

jan débilmente hacia la funcional $F(f(x))$,es necesario y suficiente que se cumplan las condiciones:

1) La sucesión $\{\|F_n\|\}$ es acotada;

2) $\lim F_n(f)=F(f)$ para todo elemento f de un conjunto denso en el espacio considerado.

Recordemos que toda funcional lineal definida en el espacio de las funciones contínuas en (a, b) , puede expresarse en la forma

$$F(f)=\int_a^b f(x)\,dh(x)$$

con

$$\|F\|=\int_a^b |dh(x)|.$$

Resulta de esta representación, que la sucesión de funcionales

$$\int_a^b f(x)\,dh_n(x)$$

converge DEBILMENTE hacia la funcional

$$\int_a^b f(x)\,dh(x)$$

cuando se verifica

1) $$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f(x)\,dh_n(x)=\int_a^b f(x)\,dh(x)$$

Ahora bien, nuestro teorema (2), ~~de pag (4)~~ dá condiciones necesarias y suficientes para que se verifique la (1); es decir, da CONDICIONES CARACTERISTICAS PARA LA CONVERGENCIA DEBIL DE FUNCIONALES LINEALES EN EL ESPACIO E.

En otras palabras; el dar condiciones necesarias y suficientes para la validez del teorema de Helly, y el dar condiciones necesarias y suficientes para la convergencia débil de funcionales lineales en el espacio de las funciones continuas en un intervalo finito,son problemas equivalentes. Abordemos pues, este último problema.

La condición (1) del teorema de Banach anteriormente enunciado, es, p para nuestro caso particular

$$\int_a^b |dh_n(x)| < M$$

para todo n;

en efecto, los números $\int_a^b |dh_n(x)|$, son precisamente las normas de nuestra sucesión de funcionales.

Para ver en qué se convierte la condición (2) en nuestro caso (del espacio C,) habrá que encontrar algún conjunto denso en el espacio de las funciones continuas. Pero esto es fácil; en efecto, un clásico teorema de Weierstrass afirma que toda función continua se puede aproximar uniformemente por polinomios; por lo tanto, las funciones $x^0, x^1, x^2 \dots x^n \dots$ constituyen un conjunto denso en el espacio C; eligiendo este conjunto, la condición (2) se transforma en esta otra:

$$\lim_{n \to \infty} \int_a^b x^r \, dh_n(x) = \int_a^b x^r \, dh(x)$$

para todo $r = 0, 1, 2.$

Pero esta es precisamente la condición (2') de nuestro teorema (2) de pág. (4)

5- Para el intervalo $(0, 2\pi)$, el mismo teorema de Weierstrass nos asegura que el conjunto de funciones $\cos rx, \operatorname{sen} rx$ $r = 0, 1, 2.$ es denso:

por lo tanto, la condición (2), para este conjunto denso especial, se transforma en la siguiente:

$$\lim_{n \to \infty} \int_0^{2\pi} \begin{matrix} \cos rx \\ \operatorname{sen} rx \end{matrix} \, dh_n(x) = \int_0^{2\pi} \begin{matrix} \cos rx \\ \operatorname{sen} rx \end{matrix} \, dh(x)$$

6- Demostraremos todavía que el conjunto de funciones definidas como sigue:

1) $$f(x) = \begin{matrix} 0, \text{ para } x < s & (a \leq s < b); \\ x-s \text{ para } x \geq s \end{matrix}$$

conjuntamente con LA CONSTANTE 1, es denso en $[a, b]$. En efecto, toda poligonal definida en $[a, b]$, puede expresarse como una combinación lineal de funciones tales como la $f(x)$; pero es sabido que toda función continua puede aproximarse uniformemente por medio de poligonales.

La condición (2) se transforma, aplicándola al conjunto denso (1), en la siguiente:

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b dh_n(x) = \int_a^b dh(x);$$

$$\lim_{n\to\infty} \int_s^b (x-s)\, dh_n(x) = \int_s^b (x-s)\, dh(x),$$

para todo s tal que $a \leq s < b$.

Pero éstas son precisamente las condiciones (2) y (3) de nuestro teorema principal, con lo que el mismo queda completamente demostrado.-

Demostramos ahora que de nuestro teorema se deduce fácilmente el de Riess, ~~enunciado en la página (3)~~. Para ello, integremos por partes en la expresión

$$\lim_{n\to\infty} \int_s^b (x-s)\, dh_n(x) = \int_s^b (x-s)\, dh(x),$$

que no es otra cosa que la condición (3) de nuestro teorema. Resulta así:

$$\lim_{n\to\infty} \left[\Big[(x-s)\, h_n(x)\Big]_s^b - \int_s^b h_n(x)\, dx \right] = \Big[(x-s)h(x)\Big]_s^b - \int_s^b h(x)\, dx;$$

o, lo que es lo mismo

1) $$\lim_{n\to\infty} \left[(b-s)\, h_n(b) - \int_s^b h_n(x)\, dx \right] = (b-s)\, h(b) - \int_s^b h(x)d$$

En virtud de la condición (2) de nuestro teorema, se verifica:

2) $$\lim_{n\to\infty} \big(h_n(b) - h_n(a) \big) = h(b) - h(a).$$

Como una de las hipótesis del teorema de Riesz es:

$$h_n(a) = h(a) = 0$$

resulta, teniendo en cuenta la (2)

$$\lim_{n\to\infty} h_n(b) = h(b). \qquad [3]$$

De la (1') se deduce pues, teniendo en cuenta la (3)

$$\lim_{n\to\infty} \int_s^b h_n(x)\,dx = \int_s^b h(x)\,dx$$

o, lo que es lo mismo:

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^x h_n(x)\,dx = \int_a^x h(x)\,dx,$$

que es la condición (2) del teorema de Riesz; este último queda, pues demostrado. Se vé que la hipótesis $h_n(a) = h(a) = 0$ simplifica notablemente las condiciones de validez del teorema; esto es, seguramente, lo que decidió a Riesz a hacerla. Pero esto no obsta para que el teorema más general tenga su interés, aunque sea de aplicación más dificultosa.

7- Pasemos a algunos casos particulares de nuestro teorema, Hagamos en primer lugar, $h(x) = 0$.

Resulsta así:

<u>TEOREMA 3</u>.- LAS CONDICIONES NECESARIAS Y SUFICIENTES PARA QUE SE VERIFIQUE:

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f(x)\,dh_n(x) = 0$$

PARA TODA FUNCION CONTINUA, son

1) $\int_a^b |dh_n(x)| < M,$ para todo n;

2) $$\lim_{n\to\infty}\int_a^b dh_n(x) = 0,$$

3) $$\lim \int_{\cancel{a}}^b (x-s)\, dh_n(x) = 0$$ para todo s.

$/s$

Poniendo en este teorema

$$h_n(x) = \int_0^x F_n(x)\,dx,$$

resulta el siguiente teorema de Lebesgue (') :

TEOR.4.-- A fin de que $$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f(x)\,F_n(x)\,dx = 0$$

~~tiende a cero con $\frac{1}{n}$~~ , para toda función continua $f(x)$,es necesario y suficiente:

1) $F_n(x)$ sumable,y

$$\int_a^b |F_n(x)|\,dx < M,$$

para todo n;

2) $$\lim_{n\to\infty}\int_a^b F_n(x)\,dx = 0$$

3) $$\lim_{n\to\infty}\int_s^b (x-s)\,F_n(x)\,dx = 0$$

8-Pasemos a otro caso particular. Pongamos en nuestro teorema (2)

$$h(x) = 0 \quad \text{para} \quad x < x_0.$$
$$h(x) = 1 \quad \text{"} \quad x > x_0$$

Resulta asi:

TEOREMA 5.- CONDICIONES NECESARIA Y SUFICIENTE PARA QUE SE VERIFIQUE $$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f(x)\,dh_n(x) = f(x_0)$$

(') Lebesgue, (1), pag. 63.

son:

1) $\int_a^b |dh_n(x)| < M$ para todo n;

2) $\lim_{n\to\infty} \int_a^b dh_n(x) = 1$;

3) $$\lim_{n\to\infty} \int_s^b (x-s)\, dh_n(x) = \begin{matrix} x_0 - s & \text{para } s < x_0 \\ 0 & \text{,,} \quad s > x_0 \end{matrix}$$

Poniendo en este teorema:

$$h_n(x) = \int_0^x F_n(x)\, dx ,$$

resulta un teorema análogo a uno de Lebesgue (').-

(') Lebesgue (1) pag. 70 (en la parte que se refiere a las funciones continuas).-

9- Otro caso particular se obtiene, considerando todas las funciones continuas que se anulan en el punto a. El conjunto danso correspondiente será el mismo que anteriormente, menos la constante 1. Obtenemos así los siguientes teoremas:

TEOREMA 6.- Dada una sucesión de funciones $\{h_n(x)\}$, y una función $h(x)$, todas de variación acotada, las condiciones necesarias y suficientes para que se verifique

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f(x)\,dh_n(x)=\int_a^b f(x)\,dh(x)$$

para toda función CONTINUA que se anule en el punto a, son:

1) $\int_a^b |dh_n(x)|< M$ para todo n;

2) $\lim_{n\to\infty}\int_s^b (x-s)\,dh_n(x)=\int_s^b (x-s)\,dh(x)$

para todo s, $a\leq s<b$.

o también:

1') igual que (1);

2') $\lim_{n\to\infty}\int_a^b x^r\,dh_n(x)=\int_a^b x^r\,dh(x)$

para todo $r=1,2,3,\ldots\ldots$

Haciendo en este teorema $h(x)=0$, se obtiene un teorema de Lebesgue (').-

10- OPERACIONES FUNCIONALES LINEALES, QUE TRANSFORMAN FUNCIONES CONTINUAS EN FUNCIONES CONTINUAS.-

---

(') Lebesgue, I.S.pag.63,teor. IV".

Se conoce la forma canónica de las funciones lineales definidas en la mayoría de los espacios interesantes. En cambio, el problema de la forma canónica de las OPERACIONES funcionales lineales, no había sido abordado hasta hace muy poco tiempo. En el siguiente teorema establecemos la forma canónica de toda operación lineal que transforma funciones continuas en funciones continuas.

Damos a continuación un teorema que comprende, como caso particular a un teorema demostrado recientemente por Fichtenholz, (1),

TEOR. 4.- **La forma general de una operación lineal y = u (x) que transforma funciones continuas en funciones continuas, definidas en (0,1), está dada por la integral de Stieltjes.**

$$y(s) = \int_0^1 x(t)\, d_t\, h(s, t \qquad [1]$$

x e [illegible]

DEPENDIENTE DE UN PAROMETRO S.

LA FUNCION h ESTA SUJETA A LAS CONDICIONES SIGUIENTES:

1) $h(s, t)$ DE VARIACION ACOTADA COMO FUNCION DE t;

2) $\int_0^1 | d_t\, h(s, t) | \leq K$ PARA TODO ~~s~~ s;

3) $$\lim_{n \to \infty} \int_0^1 t^r\, d_t\, h(s_n, t) = \int_0^1 t^r\, d_t\, h(s_0, t)$$

para todo s$_0$, y para toda sucesión $s_n \to s_0$ **para todo** $r = 0, 1, 2$

DEMOSTRACION:

Las condiciones son necesarias. Sea $y = U(x)$ una operación lineal que hace corresponder a un $x \varepsilon C$ un $y \varepsilon C$. Para un valor fijo s_0 de s, $y(s_0)$ es una funcional lineal definida en C. En efecto, es aditiva, y, además satisface a la desigual-

---

(') Fichtenhols,(1).

dad $$|y(s_0)| \le \|y\| \le |\mathcal{U}|.\|x\|$$

Se ve, pues, que la norma de esta funcional no supera a la norma $|\mathcal{U}|$ de la operación dada.

Siendo una funcional lineal, se tiene:

$$y(s_0) = \int_0^1 x(t)\, dh(s_0, t) \qquad [1]$$

siendo $h(s_0, t)$ una función de variación acotada. Se verifica tambien, en virtud de la observasión anterior:

$$\int_0^1 |dh(s_0, t)| \le |\mathcal{U}| \qquad [2]$$

de modo que queda satisfecha la condición

$$\int_0^1 |d_t\, h(s, t)| \le K$$

Como la funcion $y(s)$ es continua; se verifica para toda sucesión S_n convergente hacia S_0:

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 x(t)\, dh(S_n, t) = \int_0^1 x(t)\, dh(S_0, t) \quad [3]$$

Por lo tanto, en virtud de nuestro teorema fundamental (2) de pag. (4) sobre convergencia débil de funcionales lineales definidas en el espacio de las funciones continuas, se verificara, para todo. $r = 0, 1, 2 \ldots$

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 t^r\, dh(S_n, t) = \int_0^1 t^r\, dh(S_0, t)$$

para todo S_0, y para toda sucesión $S_n \to S$.

Las condiciones son suficientes. Consideremos, en efecto, la expresión (1), de pag. (12), definida en el espacio C, estando h restringida a las condiciones (1), (2) y (3) de pag. (12). El teorema fundamental sobre convergencia débil nos indica que la función y(

es continua). Se ve inmediatamente que también es aditiva. Además, de la condición

$$\int_0^1 |d_t h(s,t)| \leq K,$$

se deduce:

$$|y(s)| \leq \max x(t) \cdot \int_0^1 |d_t h(s,t)| \leq \|x\| \cdot K$$

Se tendrá, pues,

$$\|y\| = \max |y(s)| \leq K \|x\|$$

De esto se deduce que la operación lineal tiene una norma:

$$|U| \leq K$$

Teniendo en cuenta esta igualdad, y la (2) de pag. (13) se deduce que, si la constante K se elige la mas pequeña posible, se tendrá

$$|U| \leq K.$$

El teorema ha quedado así completamente demostrado.

----

11) Algunos corolarios del teorema 2

Haremos ahora algunas aplicaciones del teorema II, que volvemos a enunciar para mayor facilidad de referencia.

TEOREMA 2.-

Condición necesaria y suficiente para que, dada una sucesión de funciones $\{h_n(x)\}$ y una función $h(x)$, todas de variación acotada, se verifique, para toda función continua, la igualdad

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f(x)\,dh_n(x) = \int_a^b f(x)\,dh(x),$$

es que se cumpla cualquiera de los dos siguientes juegos de condiciones, $a)$, $b)$:

$$a\begin{cases} 1)\ \int_a^b |dh_n x| < M \text{ para todo } n; \\ 2)\ \lim\limits_{n\to\infty}\int_a^b dh_n(x) = \int_a^b dh(x); \\ 3)\ \lim\limits_{n\to\infty}\int_s^b (x-s)\,dh_n(x) = \int_s^b (x-s)\,dh(x) \text{ para todo } s,\ a \leq s < b. \end{cases}$$

(Si las funciones $\{h_n(x), h(x)\}$ son tales que $h_n(a) = h(\alpha) = ($

para todo n, las anteriores condiciones 2), 3), se transforman, en virtud del teorema de Riesz, de pag (3), en las siguientes:

$$a'\begin{cases} 2')\ \lim\limits_{n\to\infty} h_n(b) = h(b); \\ 3')\ \lim\limits_{n\to\infty}\int_a^x h_n(x)\,dx = \int_a^x h(x)\,dx). \end{cases}$$

para todo x del intervalo $[a, b]$.

$$b\begin{cases} 1" \text{ igual que (1)} \\ 2") \lim_{n\to\infty}\int_a^b x^n\, d\, h_n(x) = \int_a^b x^n\, d\, h(x). \end{cases}$$

Si el intervalo de definición es $[0,2\pi]$, los juegos de condiciones a), b) se transforman en los siguientes:

$$A\begin{cases} 1)\ \int_0^{2\pi} |d\, h_n(x)| < M \text{ para todo } n; \\ 2)\ \lim_{n\to\infty}\int_0^{2\pi} d\, h_n(x) = \int_0^{2\pi} d\, h(x); \\ 3)\ \lim_{n\to\infty}\int_s^{2\pi} (x-s)\, d\, h_n(x) = \int_s^{2\pi} (x-s)\, d\, h(x) \\ \qquad\qquad \text{para todo } s,\ 0 \leq s < 2\pi \end{cases}$$

(Si las funciones $\{h_n(x)\}$, $h(x)$ se anulan en el punto o,

$$h_n(0) = h(0) = 0, \text{ para todo } n,$$

las condiciones 2), 3), se transforman en las siguientes

$$A'\begin{cases} 2')\ \lim_{n\to\infty} h_n(2\pi) = h(2\pi); \\ 3')\ \lim_{n\to\infty}\int_0^x h_n(x)\, dx = \int_0^x h(x d\, x. \end{cases}$$

El juego equivalente B, es el siguiente:

$$B\begin{cases} 1^{\circ})\ \text{igual que}\quad (1) \\ 2')\ \lim\limits_{n\to\infty}\int_{0}^{2\pi}\begin{matrix}\cos rx\\ \operatorname{sen} rx\end{matrix}\,d\quad x = \int_{0}^{2\pi}\begin{matrix}\cos rx\\ \operatorname{sen} rx\end{matrix}\,dh(x)\end{cases}$$

para tode $r = 0, 1, 2,$

La equivalencia de las condiciones a) y b) , A) y B)

nos conduce inmediatamente

a los teoremas siguientes:

TEOREMA 8.- Dada una sucesión de funciones de variación uniformemente acotada $\{h_n(X)\}$ y una función de variación acotada $h(X)$, tales que se verifique:

$$h_n(0) = h(0) = 0 \quad \text{para todo } n.$$

$$\lim_{n \to \infty} \int_a^b x^r \, dh_n(X) = \int^b x^r \, dh(X)$$

para todo $r = 0, 1, 2, \ldots, a$

se verificará también

$$\lim_{n \to \infty} \int_0^X h_n(x) \, dx = \int_0^X h(x) \, dX \qquad [1]$$

para todo X, $a \leq X < b$.

Si las funciones $h_n(x)$ de variación uniformemente acotada, son **MONOTONAS**, la 1) implica que:

$$\lim_{n \to \infty} h_n(x) = h(x)$$

en todos los puntos de continuidad de $h(X)$.

TEOREMA 9.- Dada una sucesión de funciones $\{h_n(X)\}$ y una función $h(X)$, de variación uniformemente acotada, tales que

$$h_n(0) = h(0) = 0 \quad \text{para todo } n,$$

que cumplan la condición:

$$\lim_{n \to \infty} \int_0^{2\pi} \begin{matrix} \cos rx \\ \operatorname{sen} rx \end{matrix} \, dh_n(x) = \int_0^{2\pi} \begin{matrix} \cos rx \\ \operatorname{sen} rx \end{matrix} \, dh(x)$$

para todo $x = 0, 1, 2, \ldots,$

se verifica

$$\lim_{n \to \infty} \int_0^X h_n(x)\,dx = \int_0^X h(x)\,dx. \qquad [2]$$

Si las funciones $h_n(X)$ son, además, no decrecientes, la 2) implica que:

$$\lim_{n \to \infty} h_n(x) = h(x)$$

para todo PUNTO DE CONTINUIDAD de $h(X)$.-

12- Demostremos esta última aserción; ésto es, démostremos el siguiente

TEOREMA 10.-

DADA UNA SUCESION DE FUNCIONES NO DECRECIENTES $\{h_n(X)\}$ UNIFORMEMENTE ACOTADAS, Y UNA FUNCION $h(X)$ TAMBIEN NO DECRECIENTES, TALES QUE SE VERIFIQUE:

$$\lim_{n \to \infty} \int_a^X h_n(x)\,dx = \int_a^X h(x)\,dx \qquad [4]$$

y además $\lim h_n(a) = h\,a$ siendo a punto de continuidad

PARA TODO X DEL INTERVALO (a,b,), SE VERIFICA TAMBIEN

$$\lim_{n \to \infty} h_n(X) = h(X) \qquad [5]$$

PARA TODO PUNTO DE CONTINUIDAD de $h(X)$.-

DEMOSTRACION:

Supongamos, por reducción al absurdo, que ello no sucediera; es decir, que siendo S un punto de continuidad de $h(X)$, $h_n(S)$ no tienda a $h(S)$.- Como la sucesión $h_n(S)$ es acotada, podremos encontrar una sucesion parcial $h_j(S)$ tal que

$$\lim_{j \to \infty} h_j(s) \text{ existe} = F \neq h(s)$$

Supongamos, por ejemplo, que $F < h(s)$.

En virtud de la continuidad de $h(x)$ en el punto S, existe un h tal que, para $S - h \leq x \leq S$ la diferencia $h(x) - h_j(x)$ se conserva mayor que un cierto número A, a partir de un j en adelante. Por lo tanto,

$$\left| \int_{S-h}^{S} [h(x) - h_j(x)]\, dx \right| > A\, h$$

a partir de un cierto j, lo cual contradice la (4), pues, de acuerdo con ella, debe verificarse

$$\left| \int_{S-h}^{S} [h(x) - h_n(x)]\, dx \right| < \varepsilon$$

a partir de un cierto n en adelante.

Segundo Capítulo

13_ EL TEOREMA de CARATHEODORY

Sea $\{h_n(x)\}$ una sucesión de funciones monotonas no decrecientes, definidas en el intervalo $[0, 2\pi]$ uniformemente acotadas, y sean $a_{n0}, a_{nr}, \bar{a}_{nr}$, sus coeficientes de Fourier:

$$a_{n0} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} h_n(x)\,dx, \quad a_{nr} = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} h_n(x)\cos rx\,dx$$

$$\bar{a}_{nr} = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} h_n(x)\,\mathrm{sen}\,rx\,dx \;;$$

El teorema de Caratheodory, que demostraremos y generalizaremos apoyándonos en el teorema general 3 sobre paso al límite bajo el signo de integral, que anteriormente hemos demostrado, es el siguiente: (')

TEOREMA. 11 –

Condición necesaria y suficiente para que la sucesión $\{h_n(x)\}$ tienda hacia una función $h(x)$ no decreciente en $[0, 2\pi]$ en, todos los puntos donde esta última es contínua, es que se verifique: $\lim_{n\to\infty} a_{n0} = a_0$, $\lim_{n\to\infty} a_{nr} = a_r$, $\lim_{n\to\infty} \bar{a}_{nr} = \bar{a}_r$ los números $a_0, a_r, \bar{a}_r$, son entonces los coeficientes de Fourier de la función $h(x)$

La condición es necesaria. En efecto, si se verifica

$$\lim_{n\to\infty} h_n(x) = h(x) \,.$$

se tiene inmediatamente en virtud del clásico teorema de Lebesgue

---

(') Ver Zygmund, 1, pp. 82-83.

sobre paso al límite bajo el signo de integral:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \left.\begin{matrix} \text{sen } r x \\ \cos r x \end{matrix}\right\} h_n x \, d x = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \left.\begin{matrix} \text{sen } r X \\ \cos r X \end{matrix}\right\} h(x) \, dX,$$

$$r = 1, 2, \ldots$$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} h_n(x) \, d x = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h(x) \, d x$$

La condición es suficiente. Empecemos por demostrar que se cumple la última aserción del teorema, ésto es, que los numeros $a_0, a_r, \bar{a}_r$ son coeficientes de Fourier de $h(x)$.- Ello es casi inmediato, En efecto, de la sucesión $\left\{ h_n(x) \right\}$ de funciones monotonas, uniformemente acotadas, puede extraerse, en virtud de un clásico teorema de Helly (') una sucesión parcial $\left\{ h_j(x \right\}$ que converge hacia una función no decreciente $h(x)$. .

Aplicando a la sucesión parcial $\left\{ h_j(x) \right\}$, el teorema de paso al límite de Lebesgue, resulta:

$$\lim_{j \to \infty} \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \left.\begin{matrix} \text{sen } r x \\ \cos r x \end{matrix}\right\} h_j(x) \, d x = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \left.\begin{matrix} \text{sen } r X \\ \cos r X \end{matrix}\right\} h(x) \, dX$$

$$r = 0, 1, 2, \ldots$$

Pero el primer miembro tiende por hipótesis hacia a_r, o hacia $\bar{a}_r$ respectivamente, o sea

$$a_r = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} h(x) \cos r x \, dX,$$

$$\underline{a}_r = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} h(x) \text{ sen } r x \, d x ;$$ y por la

---

(') Helly. 1 .

misma razon

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h(x)\, dx.$$

Pasemos a demostrar ahora que del hecho

$$[1] \lim_{n\to\infty} \int_0^{2\pi} \left.\begin{matrix} \cos rx \\ \operatorname{sen} rx \end{matrix}\right\} h_n(x)\, dx = \int_0^{2\pi} \begin{matrix} \cos rx \\ \operatorname{sen} rx \end{matrix}\, h(x)\, dx$$

se deduce

$$\lim_{n\to\infty} h_n(x) = h(x)$$

en todo punto de continuidad de $h(x)$.

Para ello, introduzcamos las funciones

$$u_n(x) = \int_0^x h_n(x)\, dx, \quad u(x) = \int_0^x h(x)\, dx.$$

Estas funciones cumplen las condiciones:

1) $u_n(0) = u(0) = 0$ para todo n;

2) $u_n(x) < M$ para todo n, y para todo X del intervalo

Con las funciones $u_n(x)$, , las igualdades (1)

se escriben

$$[2] \quad \lim_{n\to\infty} \int_0^{2\pi} \begin{matrix} \cos rx \\ \operatorname{sen} rx \end{matrix}\, d\, u_n(x) = \int_0^{2\pi} \begin{matrix} \cos rx \\ \operatorname{sen} rx \end{matrix}\, d\, u(x).$$

Pero, de acuerdo con nuestro teorema 9 de pag. 18 , de las igualdades [2] , se deduce

$$[3] \quad \lim_{n\to\infty}\int_0^X u_n(X)\,dX = \int_0^X u \; X \; d$$

para todo t del intervalo $[0, 2\pi]$, igualdad que a su vez implica, de acuerdo con nuestro teorema 9 de página (18-19) , cuando las funciones $u_n(X)$ y $u(X)$ son monótonas:

$$\lim_{n\to\infty} u_n(X) = u(X)$$

en todo punto de continuidad de $u(X)$ es decir, en todo punto de $[0, 2\pi]$, ya que $u(X)$, siendo una integral, es continua. Es decir, se verificará, para todo X de $[0, 2\pi]$,

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^X h_n(X)\,dx = \int_0^X h(x)\,dX$$

con una nueva aplicación de nuestro teorema 9 de pag. (18-19) se deduce:

$$\lim_{n\to\infty} h_n(x) = h(X)$$

en todo punto de continuidad de $h(X)$. El teorema de Caratheodory, queda así completamente demostrado.

14. GENERALIZACION DEL TEOREMA de CARATHEODORY

El Prof. Carathéodory, después de haber demostrado el precedente teorema, afirma, en la página 562 de su memoria (Bemerkung 2) que

, el teorema subsiste íntegramente para funciones uniformemente acotadas y de variación uniformemente acotada.

A menos que hayamos interpretado mal lo que dice el Prof. Carathéodory, consideramos que su afirmación es inexacta. El siguiente ejemplo simple (') parece, en efecto, invalidar el teorema de Carathéodory. Sean los intervalos cerrados $(0, \pi)$, $(\pi, 2\pi)$,

$$(0, \frac{2\pi}{3}), (\frac{2\pi}{3}\ \frac{4\pi}{3}), (\frac{4\pi}{3}, 2\pi), (0, \frac{2\pi}{4}),$$

y definamos una sucesión de funciones $\{h_n(x)\}$, en el intervalo $[0, 2\pi]$, de la siguiente manera:

$h_n(x) = 1$ en el intervalo enésimo, y $h_n(x) = 0$ en el resto del intervalo $[0, 2\pi]$.

Estas funciones cumplen todas las condiciones del teorema; pues son uniformemente acotadas, ya que su máximo es 1, y tambien son de variación total uniformemente acotada, pues la variación total de $h_n(x)$ es ≤ 2. Se verifica también

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h_n(x)\,dx = 0 ,$$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} h_n(x) \cos rx\,dx = 0 ,$$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} h_n(x) \operatorname{sen} rx\,dx = 0 , \quad r = 0, 1, 2, \dots .$$

(') Titchmarsh, 1, pag. 390.

se cumplen, pues, todas las hipótesis del teorema; sin embargo, la sucesión $\{h_n(x)\}$ no tiende, para $n \to \infty$, a ninguna función límite de variación acotada, pues se vé inmediatamente que dado un punto arbitrario S, del intervalo $[0, 2\pi]$, la sucesión $h_n(S)$ tiene los dos puntos de acumulación 0, y 1.

He aquí el teorema a que hemos llegado, como substituto del de Caratheodory:

TEOREMA 12

Sea una sucesión de funciones $\{h_n(x)\}$, uniformemente acotadas, y de variación total uniformemente acotada; la existencia de los límites

$$\lim_{n\to\infty}\int^{2\pi} \begin{matrix}\cos rx\\ \operatorname{sen} rx\end{matrix}\ h_n(x)\,dx = \begin{matrix}a_r\\ b_r\end{matrix} \qquad [1]$$

$$r = 0, 1, 2, \ldots\ldots\ldots,$$

es necesaria y suficiente para que exista una funcion $h(x)$, de variación acotada, cuyos coeficientes de Fourier son a_r y b_r, que cumple la condición

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^x h_n(x)\,dx = \int_0^x h(x)\,dx$$

para todo x del intervalo $[0, 2\pi]$

La condición es necesaria. Esta parte se demuestra de manera idéntica a la parte correspondiente del teorema de Caratheodory cuando las funciones $\{h_n(x)\}$ son monótonas, utilizando, en vez del teorema de Lebesgue, el teorema de Helly de paso al límite bajo el signo de integral. En efecto, las funciones

$$u_n(x) = \int_0^x h_n(x)\,dx,$$

$$u(x) = \int_0^x h(x)\,dx,$$

son uniformemente acotadas, de variación uniformemente acotada, y

$$u_n(0) = u(0) = 0; \quad u_n(2\pi) \to u(2\pi)$$

por hipótesis, por lo tanto, en virtud del teorema de Helly:

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{2\pi} \begin{matrix}\cos rx\\ \operatorname{sen} rx\end{matrix}\, du_n(x) = \lim_{n\to\infty}\int_0^{2\pi} \begin{matrix}\cos rx\\ \operatorname{sen} rx\end{matrix}\, h_n(x)\,dx =$$

$$= \int_0^{2\pi} \begin{matrix}\cos rx\\ \operatorname{sen} rx\end{matrix}\, du(x) = \int_0^{2\pi} \begin{matrix}\cos rx\\ \operatorname{sen} rx\end{matrix}\, h(x)\,dx.$$

La condición es suficiente. Empecemos, como en el teorema de Caratehodory para funciones monótonas, por observar que los numeros a_0, a_r, b_r son los coeficientes de Fourier de una función $h(x)$ de variación acotada en $[0, 2\pi]$. Ello se demuestra de idéntica manera a como lo hicimos para el teorema de Caratheodory, cuando las $\{h_n(x)\}$ son monótonas. Pasemos a mostrar que se verifica

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^x h_n(x)\,dx = \int_0^x (x)\,dx.$$

Para ello, consideremos nuevamente las funciones

$$u_n(x) = \int_0^x h_n(x)\,dx \quad u(x) = \int_0^x h(x)\,dx$$

Estas funciones son uniformemente acotadas, de variación uniformemente acotada, y cumplen la condición

$$u_n(0) = u(0) = 0$$

$$\lim_{n \to \infty} u_n(2\pi) = u(2\pi)$$

Introduciendo las funciones $u_n(x)$ y $u(x)$ ~~en las igualdades [illegible]~~, y teniendo en cuenta que los a_r b_r , son los coeficientes de Fourier de $h(x)$ obtenemos como en la demostración del teorema de Caratheodory

$$\lim_{n \to \infty} \int_0^{2\pi} \begin{matrix} \cos rx \\ \operatorname{sen} rx \end{matrix} \, du_n(x) = \int_0^{2\pi} \begin{matrix} \cos rx \\ \operatorname{sen} rx \end{matrix} \, du(x) \quad (r = 0, 1,$$

Pero de estas igualdades se deduce, en virtud de nuestro teorema 9 de pag (18)

$$\lim_{n \to \infty} \int_0^x u_n(x)\,dx = \int_0^x u(x)\,dx$$

para todo X del intervalo $[0, 2\pi]$

Pero la sucesión $\{u_n(x)\}$ es un conjunto de funciones <u>igualmente continuas</u>. En efecto, dado un ε arbitrario, positivo, puede determinarse un δ tal que, para todo n, se verifique

$$| u_n(x'') - u_n(x') | < \varepsilon \qquad [1]$$

para $|x'' - x'| < \delta$ En efecto

$$|u_n(x'') - u_n(x')| = \left| \int_{x'}^{x''} h_n(x)\,dx \right| \leq (x''-x')M \qquad [2]$$

pues, por hipótesis las $\{h_n(x)\}$ son uniformemente acotadas:

$$|h_n(x)| < M \qquad \text{para todo n.}$$

Bastará, pues, tomar $|x''-x'| < \dfrac{\varepsilon}{M}$,

para que se cumpla la (1).

Nos apoyaremos ahora, para terminar la demostración, en el siguiente teorema.

TEOREMA 13 .

Sea $\{u_n(x)\}$ una sucesión de funciones igualmente continuas y uniformemente acotadas en un intervalo $[a, b]$, que cumplan la condición

$$[3] \quad \lim_{n \to \infty} \int_a^x u_n(x)\,dx = \int_a^x u(x)\,dx, \quad [a \leq x \leq b]$$

siendo $h(x)$ una función continua acotada en el intervalo considerado. Se verifica entonces:

$$\lim_{n \to \infty} u_n(x) = u(x)$$

para todo x del intervalo $[a, b]$.

Haremos la demostración por el absurdo. Supongamos que existiera un punto S, del intervalo $[a, b]$, en que la sucesión $\{u_n(s)\}$ no tendiera hacia $u(S)$. Podremos entonces extraer una sucesión parcial $u_j(X)$, de la sucesión dada, para la cual se verifique

$$\lim_{j\to\infty} u_j(S) = A \neq u(S) \qquad [4]$$

De la sucesión $\{u_j(x)\}$ de funciones, igualmente continuas por hipótesis, podremos extraer, apoyándonos en un clásico teorema de Arzela-Montel, una sucesion parcial $u_K(X)$, que converge uniformemente hacia una función continua $\bar{u}(x)$;

$$\lim_{K\to\infty} u_K(x) = \bar{u}(X) \qquad [5]$$

para todo X de $[a, b]$,

Aplicando a esta sucesión uniformemente convergente de funciones continuas, el conocido teorema de paso al límite bajo el signo de integral, obtenemos:

$$\lim_{K\to\infty} \int_a^X u_K(x)\,dx = \int_a^X \bar{u}(x)\,dx \qquad [6]$$

para todo X de $[a, b]$

Pero la sucesión $\{u_K(X)\}$ es una sucesión parcial de $\{u_n(x)\}$, luego se verifica, por hipótesis

$$\lim_{K\to\infty}\int_a^x u_K(x)\,dx = \int_a^x u(x)\,dx \qquad [7]$$

para todo x de $[a, b]$

De (6) y (7) se deduce:

$$\int_a^x u(x)\,dx = \int_a^x \overline{u}(x)\,dx \qquad [a \leq x \leq b]. \; [8]$$

Como $u(x)$ y $\overline{u}(x)$ son continuas (la primera por hipótesis y la segunda en virtud del teorema de Montel), la igualdad 8 implica

$$u(x) = \overline{u}(x) \qquad [a \leq x \leq b] \qquad [9].$$

Por lo tanto, reemplazando en [5] obtenemos:

$$\lim_{K\to\infty} u_K(x) = u(x), \qquad [a \leq x \leq b] \; [10]$$

y, en especial para el punto S :

$$\lim_{K\to\infty} u_K(S) = u(S) \qquad [11].$$

Por otra parte, como $\{u_K(x)\}$ es una sucesión parcial de $\{u_j(x)\}$ se verifica, en virtud de [4]:

$$\lim_{K\to\infty} u_K(S) = A \neq u(S) \qquad [12].$$

Pero esta igualdad está en contradicción con la anterior, y el teorema queda por lo tanto demostrado.

Aplicando el teorema demostrado a las funciones $\{u_n(x)\}$ y a la función $u(x)$ que aparecen en nuestro teorema 12. que cumplen todas las condiciones en él exigidas, se obtiene

$$[13] \quad \lim_{n \to \infty} u_n(x) = u(x) \quad , \quad \text{en todo}$$

punto del intervalo $[0, 2\pi]$. Recordando la manera como hemos definido las funciones $u_n(x)$, $u(x)$, , la igualdad [13] equivale a la siguiente:

$$\lim_{n \to \infty} \int_0^x h_n(x)\,dx = \int_0^x h(x)\,dx \qquad [14].$$

Nuestro teorema queda así completamente demostrado.

SEGUNDA PARTE

EL TEOREMA LIMITE DEL CALCULO DE PROBABILIDADES

-15- El llamado Teorema Fundamental, o Segundo Teorema Límite del Cálculo de Probabilidades, se enuncia como sigue:

Dada una sucesión de funciones de repartición(1) $\left\{ h_n(x) \right\}$, cuyos momentos tienden hacia los momentos de la ley de Gauss;

$$\lim_{n \to \infty} \int_{-\infty}^{\infty} x^r d\, h_n(x) = \pi^{-\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} x^r e^{-x^2} dx \quad [r=0,1,2,$$

se verifica:

$$\lim_{n \to \infty} h_n(x) = \pi^{-\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{x} e^{-x^2} dx$$

Es numerosa la lista de grandes matemáticos que han ejercitado su ingenio en la demostración de este teorema; baste citar los nombres de Thebicheff, Luapunoff, Markoff, Sonine, Levy, Cantelli, Polya, von Mises, etc.

Recientemente, Wintner(X), y Fréchet-Shoat(XX) han dado una formulación en cierto sentido definitiva del Teorema Límite, en los siguientes términos:

Dada una sucesión de funciones de repartición $\left\{ h_n(x) \right\}$, cuyos momentos tienden hacia los momentos de una función de repartición cuyo problema de momentos es determinado

---

(1) Es decir, funciones no decrecientes, definidas en $(-\infty, +\infty)$, que cumplen las condiciones:

$$\lim_{x \to \infty} h_n(x) = 0, \quad \lim_{x \to \infty} h_n(x) = 1.$$

$$h_n(x) = \frac{h_n(x+0) + h_n(x-0)}{2}$$

(X) Wintner, 1 ,

(XX) Fréchet-Shoat, 1

$$\lim_{n \to \infty} \int_{-\infty}^{8} x^r d\, h_n(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x^r d\, h(x),$$

$$r = 0, 1, 2 \ldots\ldots,$$

se verifica

$$\lim_{n \to \infty} h_n(x) = h(x)$$

en todos los puntos donde $h(x)$ es continua.

Como se ve, este teorema es el correlativo para intervalo infinito, de nuestro teorema de página (18). Nuestro teorema no es, en efecto, sino el teorema límite para intervalo finito.-

En el teorema límite clásico, se caracterizan las funciones de repartición por la sucesión de sus infinitos momentos.- Se debe a Paul Lévy la fecunda idea de caracterizar las funciones de repartición, no por sus momentos, sino por sus transformadas de Fourier; lo que ha conducido a este profundo matemático a la siguiente versión del teorema Límite.

Sea una sucesión de funciones de repartición $\{h_n(x)\}$ y, una función de repartición $h(x)$; condición necesaria y suficiente para que se verifique

$$\lim_{n \to \infty} h_n(x) = h(x)$$

en todo punto de continuidad de $h(x)$, es que se cumpla la igualdad

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}\, d\, h_n(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}\, d\, h(x) \qquad [1]$$

Como se ve, el anterior teorema de Paul Levy es el correlativo del teorema 11 de Carathéodory, enunciado en la página (21).

Presenta a nuestro entender, gran interés esta correlación, pues hasta ahora los teoremas límites habían sido abordados por métodos ad hoc, de gran dificultad. En lo que sigue nos proponemos un doble objeto. 1º Dar una demostración simple del Teorema de Levy$^{(x)}$, utilizando exactamente las mismas ideas que emplea Caratheodory; . . ,

2º) Demostrar un nuevo teorema límite, caracterizando a las funciones de repartición no por sus momentos, como en el teorema límite clásico, ni por sus transformadas de Fourier, como hace Paul Lévy, sino por los coeficientes de su desarrollo de Hermite-Stieltjes.-

(6-Comenzaremos por demostrar el teorema de Lévy, recalcando, más de lo que

---

(x) La versión primitiva que dió Lévy de su teorema, no es la arriba consignada, sino un poco más restrictiva, pues exigía la convergencia uniforme de las integrales [1] , para todo intervalo finito; el teorema por nosotros consignado fué demostrado por Glivenko (ver Glivenko, 1), por Bochner (Bochner, 1), por Cramer (Cramer 1), por el mismo Levy en su reciente libro (Lévy, 2), y por nosotros (González Domínguez, 1).

hemos hecho en otra parte (*), las relaciones que lo ligan con el de Carathéodory (**).

Demostraremos primero que la condición (1) de pag. (35) es necesaria.

En efecto, como

$$|e^{itx}| \leq 1,$$

y tanto las $\{h_n(x)\}$ como la $h(x)$ son funciones de repartición, podrá elegirse $|a|$ suficientemente grande para que las integrales;

$$\int_{-\infty}^{-a} e^{itx} dh_n(x), \quad \int_{a}^{\infty} e^{itx} dh_n(x), \quad \int_{-\infty}^{-a} e^{itx} dh(x), \quad \int_{a}^{\infty} e^{itx} dh(x),$$

sean cada una, en valor absoluto, menores que un ε positivo, arbitrariamente pequeño. Tendremos, por tanto

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} dh_n(x) - \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} dh(x) \right| < \underset{[2]}{4\varepsilon} + \left| \int_{-a}^{a} e^{itx} dh_n(x) - \int_{-a}^{a} e^{itx} dh(x) \right|$$

Elijamos el número $|a|$ de manera que cumpla, además, la condición

$$\lim_{n \to \infty} h_n(-a) = h(-a), \quad \lim_{n \to \infty} h_n(a) = h(a)$$

A la integral entre límites finitos que figura en el segundo miembro de 2, podemos aplicar el teorema de Helly Bray, enunciado en la página 2,3 , pues la sucesión $\{h_n(x)\}$ cumple todas las condiciones en él exigidas. Podemos pues, elegir n suficientemente grande para que se verifique

$$\left| \int_{-a}^{a} e^{itx} dh_n(x) - \int_{-a}^{a} e^{itx} dh(x) \right| < \varepsilon . \qquad [3]$$

Tenemos, por lo tanto, reemplazando en [2]

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} dh_n(x) - \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} dh(x) \right| < 5\varepsilon,$$

con lo que queda demostrada la necesidad de la condición (1).

(*) A.Gonzáles Domingues: Sur un theoréme de M. Glivenko. Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, t. 203, p. 577, 1936.

(**) Quizás se nos dispense mencionar que nuestra demostración ha merecido elogiose juicio del Prof. Carathéodory.-

La condición es suficiente. Antes de demostrarlo, y para hacer ver claramente que el teorema de Lévy es esencialmente idéntico al de Carathéodory, recordemos los tres instrumentos de que éste se vale para demostrar su teorema. Son ellos: 1º) el conocido teorema de selección de Helly(x): dada en un intervalo $[a \leq x \leq b]$ una sucesión de funciones $\{h_n(x)\}$ de variación uniformemente acotada, o bien existe una sucesión parcial uniformemente acotada, $\{h_\nu(x)\}$ que converge hacia una función de variación acotada en todos los puntos en que esta última es continua, o bien $h_n(x)$ diverge uniformemente a ∞ para $n \to \infty$;

2º) el conocido teorema de paso al límite bajo el signo de integral, debido a Lebesgue;

3º) el teorema de unicidad de las séries trigonométricas.

Basaremos nuestra demostración en tres teoremas que son los correlativos de los anteriores, para el intervalo infinito.

El primer teorema subsiste sin modificación. El segundo tiene el siguiente correlativo, debido a Bochner(xx): Sea $\{h_n(x)\}$ una sucesión de funciones de repartición, que convergen hacia una función de repartición $h(x)$ en todos los puntos de continuidad de esta última; si se verifica,

$$\lim_{n \to \infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}\, d h_n(x) = A(x),$$

(x) Helly, 1.

(xx) Bochner; 1, pg. 71.

siendo $A(x)$ una función contínua, se puede pasar al límite bajo el signo de integral:

$$\lim_{n \to \infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} \, d\, h_n(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} \, d\, h(x).$$

El tercer teorema admite el siguiente correlativo, también debido a Bochner:(X)

Condición necesaria y suficiente para que se verifique

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} \, d\, h(x) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} \, d\, g(x)$$

es que las respectivas funciones de repartición sean iguales:

$$h(x) \equiv g(x)$$

Pasemos ahora a demostrar que la condición

$$\lim_{n \to \infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} \, d\, h_n(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} \, d\, h(x),$$

es suficiente para que se verifique

$$\lim_{n \to \infty} h_n(x) = h(x)$$

en todos los puntos de continuidad de $h(x)$.

Supongamos, por reducción al absurdo, que la condición no se realizara,

---

(X) Bochner, 1, pág. 67.

y que exista un punto a de continuidad de $h(x)$, en el cual $h_n(a$ no converja hacia $h(a)$. Existirá entonces una sucesión parcial $h_j(x)$, tal que, para $j \to \infty$, se verificará

$$\lim_{j \to \infty} h_j(a) = A \neq h(a)$$

En virtud del teorema de Helly, se puede extraer de la sucesión $\{h_j(x)\}$ una sucesión parcial $\{h_k(x)\}$, que converje hacia una función acotada no decreciente $\bar{h}(x)$, en todos los puntos de continuidad de esta última. Es bien sabido que la función $\bar{h}(x)$ puede normalizarse de manera de tener

$$\bar{h}(x) = \frac{\bar{h}(x+0) + \bar{h}(x-0)}{2}$$

La sucesión de funciones características

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} \, d h_k(x)$$

tiende, en virtud de la hipótesis, hacia una función continua, (a saber la función $\int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} \, d h(x)$). Esta sucesión cumple, pues, las condiciones exigidas por el teorema de Bochner enunciado en la página 37, de donde se deduce

$$\lim_{K\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}\, dh_K(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}\, d\bar{h}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}\, dh(x).$$

Por lo tanto, apelando al teorema de unicidad de Bochner, enunciado en la página (38), se deduce que

$$h(x) \equiv \bar{h}(x).$$

Se tendrá pues,

$$\lim_{K\to\infty} h_K(x) = h(x)$$

en todo punto de continuidad de $h(x)$, y, en particular,

$$\lim_{K\to\infty} h_K(a) = h(a)$$

Pero, como $\{h_K(x)\}$ es una sucesión parcial de $\{h_j(x)\}$ se tendrá también

$$\lim_{K\to\infty} h_K(a) = \lim_{j\to\infty} h_j(a) = A \neq h(a)$$

Pero esta igualdad es incompatible con la anterior, y el teorema queda, por lo tanto, demostrado.

Acabamos de ver que el teorema de P. Lévy se demuestra muy sencillamente utilizando las ideas fundamentales de Carathéodory.

El teorema límite clásico, en su versión general dada por Frechet-Shohat, que hemos enunciado en la página 33, se puede demostrar también siguiendo el esquema de Carathéodory.
La demostración de los citados autores, utiliza fundamentalmente, las mismas ideas de Carathéodory.
De lo anterior se deduce que la idea de Carathéodory permite demostrar de manera simple, uniforme y general, las dos versiones del teorema límite, y que aunque no haya expresado su idea en términos de Cálculo de Probabilidades, es justo asociar su nombre al de los grandes promotores de esta disciplina.

INTEGRALES SINGULARES DE STIELTJES

17- En la teoría clásica de las integrales singulares sistematizada y perfeccionada por Lebesgue en su famosa memoria ('), y expuesta por Hobson en su conocido Tratado (''), se consideran las integrales en el sentido de Lebesgue, Denjoy, Perron, Khintchine, etc. pero el caso de integrales de Stieltjes no ha sido abordado.

Nos proponemos en esta parte de nuestro trabajo, demostrar dos teoremas generales sobre integrales singulares de Stieltjes, que nos permitirán luego dar un nuevo teorema límite muy general, sobre cálculo de Probabilidades.-

----

Sea $K_n(u)$ función continua de u para todo n, derivable, y tal que $K_n(u) \to 0$ para $|u| \to \infty$. Hahn (''') ha dado condi-

---

(') Lebesgue, 1.-
('') Hobson, 1. tomo II, páginas 425-475.
(''') Hahn, 1. página 614.

ciones para que se verifiquen las igualdades

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty} K_n(t-x)\,h(t)\,dt = h(x),$$

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial x} K_n(t-x)\,h(t)\,dt = h'(x), \qquad [1]$$

para extensas categorías de funciones, entre las que figuran aquellas que sólo tienen discontinuidades de primera especie, y tienen límite para $|t| \to \infty$. En estas están comprendidas las funciones de repartición,

18 Sea $h(t)$ una función de repartición.

Supongamos que la función continua de t $K_n(t-x)$ cumple las siguientes condiciones:

se cumplen las igualdades (1), y tiende a 0 para $\underline{x}$ y $\underline{n}$ fijos, y $|t| \to \infty$.

Se verifica entonces el siguiente

<u>TEOREMA</u> 14. —

$$\boxed{\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty} K_n(t-x)\,d\,h(t) = h'(x)}$$

<u>en todos los puntos donde la derivada existe, es decir, en casi todos los puntos de $(-\infty, \infty)$</u> . .-

<u>Demostración.</u>

Integrando por partes la expresión

$$\int_{-\infty}^{\infty} K_n(t-x)\,d\,h(t)$$

se obtiene :
$$\int_{-\infty}^{\infty} K_n(t-x)\,dh(t) =$$

$$= \Big\{ h_n(t)K_n(t-x) \Big\}_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} h(t)\frac{\partial}{\partial t}K_n(t-x)\,dt\,.$$

La parte integrada se anula en virtud de las hipótesis, y nos queda por lo tanto
$$\int_{-\infty}^{\infty} K_n(t-x)\,dh(t) =$$

$$= -\int_{-\infty}^{\infty} h(t)\frac{\partial}{\partial t}K_n(t-x)\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)\frac{\partial}{\partial x}K_n(t-x)\,dt.$$

La integral singular de Stieltjes ha quedado reducida a una integral singular ordinaria. Además, como el nucleo $K_n(t-x)$ cumple, por hipótesis, las condiciones para que se cumplan las igualdades (1) de página (42), tomando límites para $n \to \infty$ resulta

$$\boxed{\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty} K_n(t-x)\,dh(t) = \lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial}{\partial x}K_n(t-x)\,dt = h'(x)}$$

en todos los puntos donde la derivada existe, es decir, en casi todo el eje real.

18-Hemos obtenido así, de manera sumamente sencilla, un teorema que comprende, como caso muy particular, a un teorema enunciado (aunque no demostrado) por Jacob ('). Este considera, en efecto, sólo núcleos positivos derivados de la sumación de la integral de Fourier.

19-Sea nuevamente $h(t)$ una función de repartición, que supondremos normalizada, es decir, tal que en todo punto de discontinuidad (nece-

---

Jacob, l.página 755

cariamente de primera especie),se verifique

$$h(t)=\frac{1}{2}\{h(t+0)+h(t-0)\}$$

Supongamos que el núcleo continuo $K_n(t-x)$ cumple las condiciones siguientes:

a) $$\lim_{\substack{n\to\infty\\ n\to\infty}}\int_{-\infty}^{\infty} K_n(t-x)\,h(t)\,dt = h(x),$$

b) $$\lim_{|t|\to\infty} K_n(t-x) = 0$$ para todo n y para todo x;

c) $\frac{\partial}{\partial x}K_n(t-x)$ finita como función de x, para t y n cualesquiera;

d) $$\int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{\partial}{\partial x}K_n(t-x)\right|dx < M$$ para cada n fijo, para casi todo t

Se verifica entonces el siguiente

TEOREMA XV

Sea $h(t)$ una funcion de repartición, y cumpla el núcleo las condiciones a), b), c), y d). Se tendrá entonces

$$\boxed{\lim_{n\to\infty}\int_0^x dx\left\{\int_{-\infty}^{\infty}K_n(t-x)\,d\,h(t)\right\} = h(x)-h(0)}$$

DEMOSTRACION.

Integrando por partes la integral del primer miembro, obtenemos, como en el teorema anterior

$$\int_{-\infty}^{\infty}K_n(t-x)\,d\,h(t) = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial}{\partial x}K_n(t-x)\,h(t)\,dt \,. \qquad [1]$$

Ahora bien, el núcleo $K_n(t-x)$ cumple la condición d), en virtud de la cual se demuestra fácilmente, recurriendo a un teorema de Hahn ('), que existe la integral doble

$$\int_0^{a}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial}{\partial x}K_n(t-x)\,h(t)\,dx\,dt\,;$$

aplicando pues, el clásico teorema de <u>Fubini</u>, se deduce que existen y son iguales, las integrales

$$[2] \quad \int_0^x dx\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial}{\partial x}K_n(t-x)\,h(t)\,dt \quad ,$$

$$[3] \quad \int_{-\infty}^{\infty}h(t)\left[\int_0^x\frac{\partial}{\partial x}K_n(t-x)\,dx\right]dt$$

(') Hahn, l. página 666.

Ahora bien, la finitud e integrabilidad de $\frac{\partial}{\partial x} K_n(t-x)$, que se cumple en virtud de las hipótesis c) y d), nos permite asegurar, en virtud de un conocido teorema ('), que se verifica

$$\int_0^x \frac{\partial}{\partial x} K_n(t-x)\,dx = K_n(t-x) - K_n(t-0) .$$

Por lo tanto:

$$\int_{-\infty}^{\infty} h(t)\left[\int_0^x \frac{\partial}{\partial x} K_n(t-x)\,dx\right] dt = \qquad [4]$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} K_n(t-x)\,h(t)\,dt - \int_{-\infty}^{\infty} K_n(t-0)\,h(t)\,dt .$$

Obtenemos pues, de (1) , (2), (3) y (4),

$$\int_0^x dx \int_{-\infty}^{\infty} K_n(t-x)\,dh(t) =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} K_n(t-x)\,h(t)\,dt - \int_{-\infty}^{\infty} K_n(t-0)\,h(t)\,dt . \qquad [5] .$$

Recordando ahora que el núcleo $K_n(t-x)$ cumple la condición (a), obtenemos finalmente, tomando límites en ambos miembros:

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \int_0^x dx \int_{-\infty}^{\infty} K_n(t-x)\,dh(t) = h(x) - h(0)}$$

Nuestro teorema queda, pues, completamente demostrado.

(') Ver , por ejemplo, Titchmarsh, 1, página 369.

El teorema general que acabamos de demostrar tiene múltiples aplicaciones algunas de las cuales consignamos a continuación. Presenta especial interés, a nuestro entender, la que consignamos en último término, que consiste en un teorema límite muy general, que comprende a uno dado por Jacob (')

LA FORMULA DE INVERSION DE STIELTJES

2º Stieltjes demostró, en su famosa memoria ('') , la siguiente fórmula de inversión, que despues ha adquirido una importancia fundamental en diversas ramas del Análisis, y en especial, en la formulación matemática rigurosa de la Mecánica cuántica (''')

Teorema XVI.

Sea $h(t)$ una funcion no decreciente, acotada, y consideremos la función

$$F(s) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\,h(t)}{s-t} \qquad [1]$$

siendo s un complejo cualquiera

$$s = p + iq \,,$$

tal que $q \neq 0$. En tales hipótesis, la función $h(t)$ puede expresarse por medio de la $F(s)$, de la siguiente manera:

$$\boxed{\frac{h(x+0)+h(x-0)}{2} - \frac{h(+0)+h(-0)}{2} = \lim_{J(s)\to 0} \frac{1}{\pi} \int_0^x J[F(s)]\,d\,h(s)}$$

(') Jacob, 1, página 755 .

('') Stieltjes, 1 página 87 .

(''') Ver, por ejemplo, Stone, 1.

('''') Stieltjes considera las integrales definidas entre los extremos $0, \infty$. La extension al intervalo $(-\infty, \infty)$ es inmediata.

$\mathcal{R}(s)$, e $\mathcal{J}(s)$ significan las partes real e imaginaria, respectivamente de s.

Mostraremos que la anterior fórmula de Stieltjes es un corolario inmediato de nuestro teorema (XV).

Para ello basta con multiplicar el numerador y denominador del integrando de (1), por el conjugado de $s-t$, con lo que obtenemos

$$F(s)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\,h(t)}{s-t}=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(\overline{s-t})\,d\,h(t)}{|s-t|^{2}}, \qquad [2]$$

cuya parte imaginaria es

$$\mathcal{J}\left(F(s)\right)=-\int_{-\infty}^{\infty}\frac{q\,d\,h(t)}{(p-t)^{2}+q^{2}}. \qquad [3]$$

Ahora bien, el núcleo

$$K(q,p-t)=\frac{1}{\pi}\frac{q}{(p-t)^{2}+q^{2}},$$

que no es otro que el de la integral singular de Poisson para el semiplano, cumple todas las condiciones de nuestro teorema 15. Que la condición (a) se cumple, es bien conocido. Vease por ejemplo, la demostración de Hahn ('). La (b), la (c), son inmediatas; y también lo es la d) teniendo en cuenta que se verifica

$$\frac{\partial}{\partial p}K(p-t,q)=-\frac{1}{\pi}\frac{4q(p-t)}{\left[(p-t)^{2}+q^{2}\right]^{2}},$$

(Hahn, 1, página 634 y siguientes. .

con lo que la integral d) se calcula inmediatamente, con el cambio de variable $u = (p-t)^2 + q^2$ y resulta finita para todo t. Resulta pues, en virtud de nuestro teorema XV multiplicando ambos miembros de (3) por $-\frac{1}{\pi}$, integrando con respecto a p entre $\underline{0}$ y $\underline{x}$, y tomando límites:

$$\lim_{q\to 0}\left[-\frac{1}{\pi}\int_0^x \Psi(F(s))\,dp\right] = \lim_{q\to 0}\frac{1}{\pi}\int_0^x dp\int_{-\infty}^{\infty}\frac{q\,dh(t)}{(p-t)^2+q^2} =$$

$$= \frac{h(x+0)+h(x-0)}{2} - \frac{h(0)+h(-0)}{2},$$

con lo que la fórmula de Stieltjes queda demostrada.

EL PROBLEMA DE LOS MOMENTOS PARA INTERVALO FINITO

21 Haremos ahora una aplicacion de nuestro teorema (XVI), a la resolucion del problema de los momentos de Hausdorff, para intervalo finito.

Sea una sucesión de numeros reales

$m_0, m_1, m_2, \dots\dots\; m_n \dots\dots$ que sean los sucesivos momentos de una funcion no decreciente incógnita $h(t)$:

$$m_0 = \int_0^1 t^0 d\,h(t)$$

$$m_1 = \int_0^1 t^1 d\,h(t)$$

$$m_n = \int^1 t^n d\,h(t).$$

$$\vdots$$

Damos a continuacion una formula que nos permite expresar la funcion incognita $h(t)$ (*) , en funcion de sus momentos (dados), como aplicacion de nuestro teorema (XV) . .

Consideremos la expresion

$$K_n(t-x) = \left(\frac{n}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \left[1-(t-x)^2\right]^n$$

Supongamos normalizada la funcion $h(t)$, de modo que se verifique:

$$h(0)=0$$

$$h(t)=\frac{1}{2}\left\{h(t+0)+h(t-0)\right\}.$$

El nucleo

$$H_n(t-x)=\sqrt{\frac{n}{\pi}}\left[1-(t-x)^2\right]^n$$

Satisface a la condicion (a) de nuestro teorema (XV). Se verifica, en efecto, como es bien sabido[*]:

$$h(x)=\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{n}{\pi}}\int_0^1\left[1-(t-x)^2\right]^n h(t)\,dt\ ,$$

para todo punto de $[0,1]$

Ademas, se tiene, integrando por partes:

$$\sqrt{\frac{n}{\pi}}\int_0^1\left[1-(t-x)^2\right]^n dh(t)=\sqrt{\frac{n}{\pi}}\left\{\left[1-(t-x)^2\right]^n h(t)\right\}_0^1+$$

$$+\sqrt{\frac{n}{\pi}}\int_0^1\frac{\partial}{\partial x}\left[\left[1-(t-x)^2\right]^n\right]h(t)\,dt=$$

$$=\sqrt{\frac{n}{\pi}}\left[\left[1-(1-x)^2\right]^n h(1)-\sqrt{\frac{n}{\pi}}\left[1-x^2\right]^n h(0)+\right.$$

$$\left.+\sqrt{\frac{n}{\pi}}\int_0^1\frac{\partial}{\partial x}\left[\left[1-(t-x)^2\right]^n\right]h(t)\,dt\qquad [1]\right.$$

---

[*] Ver, por ejemplo, Hobson, 1, Vol. II, página 459.

Como hemos supuesto $h(0) = 0$, nos queda

$$\sqrt{\frac{n}{\pi}} \int_0^1 \left[1-(t-x)^2\right]^n d\,h(t) =$$

$$= \sqrt{\frac{n}{\pi}} \left[1-(1-x)^2\right]^n \cdot h(1) + \sqrt{\frac{n}{\pi}} \int_0^1 \frac{\partial}{\partial x}\left[1-(t-x)^2\right]^n h(t)\,dt.$$

Integrando esta expresion entre $\underline{0}$ y $\underline{X}$ obtenemos

$$\int_0^X dx \left[\sqrt{\frac{n}{\pi}} \int_0^1 \left[1-(t-x)^2\right]^n d\,h(t) = \sqrt{\frac{n}{\pi}} \int_0^X h(1)\left[1-(1-x)^2\right]^n dx + \right.$$

$$+ \sqrt{\frac{n}{\pi}} \int_0^X dx \int_0^1 \frac{\partial}{\partial x}\left[1-(t-x)^2\right]^n h(t)\,dt \qquad [2]$$

Ahora bien, como la derivada

$$\sqrt{\frac{n}{\pi}} \cdot \frac{\partial}{\partial x}\left[1-(t-x)^2\right]^n = 2n\sqrt{\frac{n}{\pi}} \cdot (t-x)\left[1-(t-x)^2\right]^{n-1}$$

verifica la relacion

$$\sqrt{\frac{n}{\pi}} \int_0^1 \left| 2n\left(1-(t-x)^2\right)^{n-1} (t-x) \right| < M$$

para n fijo y todo t del intervalo (0,1), (esto es, se cumple la condición (d) de nuestro teorema (XV) se puede invertir el orden de integracion en la fórmula ([illegible]), obteniendo

$$\int_0^x dx\left[\sqrt{\frac{n}{\pi}}\int_0^1 \left(1-(t-x)^2\right)^n dh(t)\right] = \sqrt{\frac{\pi}{n}}\int_0^x \left[1-(t-x)^2\right]^n h(1)\,dx +$$

$$+\sqrt{\frac{n}{\pi}}\int_0^1 \left[1-(t-x)^2\right]^n h(t)\,dt - \qquad [3]$$

$$-\sqrt{\frac{n}{\pi}}\int_0^1 \left[1-(t-0)^2\right]^n h(t)\,dt$$

Tomando en esta igualdad límites para n → ∞, el primer sumando del segundo miembro tiende a cero, y por lo tanto se obtiene

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^x dx\left[\sqrt{\frac{n}{\pi}}\int_0^1 \left(1-(t-x)^2\right)^n dh(t)\right] = \qquad [1]$$

$$= h(x)-h(0) = h(x)$$

Es decir, se obtiene el valor de la funcion en el punto X. [illegible]

Ahora bien, integrando termino a termino la expresión

$$\sqrt{\frac{n}{\pi}}\int_0^1 \left[1-(t-x)^2\right]^n dh(t)$$

(observemos que $\left[1-(t-x)^2\right]^n$ es un plinomio de grado $2n$. obtenemos

$$\sqrt{\frac{n}{\pi}}\int_0^1 [1-(t-x)^2]^n d h(t) = A_{2n}X^{2n} + A_{2n-1}X^{2n-1} + \cdots + A_0 =$$

$$= P_{2n}(x) \qquad [2]$$

siendo las A_{2n} combinaciones lineales de los momentos dados

$$m_0, m_1 \dots\dots\dots m_{2n}$$

Estos polinomios, que son los bien conocidos polinomios de Stieltjes, se obtienen fácilmente calculando las potencias simbólicas

$$\sqrt{\frac{n}{\pi}}\left(1-(m-x)^2\right)^n,$$

entendiendo que deben calcularse segun la regla del binomio de Newton, reemplazando, en los m, las potencias por subíndices, y multiplicando por m_0 los terminos en que como coeficientes de X^n no figure ningun m .

Obtenemos asi, reemplazando (2) en la fórmula (1) de página 53:

$$h(x) = \lim_{n\to\infty}\int_0^1 P_{2n}(x)\,dx$$

que es la fórmula de inversión deseada.

El problema de los momentos para intervalo infinito.

11- Daremos ahora una fórmula análoga, para determinar la función, conocidos sus momentos, cuando el intervalo es $(-\infty, +\infty)$

Sea, pues, una función acotada no decreciente $h(t)$ normalizada de la manera siguiente:

$$h(-\infty) = 0$$

$$h(\infty) = 1$$

$$h(t) = \frac{1}{2}\left[h(t+0) + h(t-0)\right].$$

Supongamos que se nos dan sus infinitos momentos:

$$m_0 = \int_{\infty}^{\infty} t^0 dh(t),$$

$$m_1 = \int_{-\infty}^{\infty} t^1 dh(t)$$

$$m_n = \int_{-\infty}^{\infty} t^n dh(t), \text{ etc.}$$

Supongamos, ademas, que la función $h(t)$ sea tal, que se pueda integrar término a término la integral.

$$\frac{n}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-n^2(t-x)^2} dh(t),$$

que no es otra que la famosa integral singular de Weierstrass. Como el núcleo

$$W_n(t-x) = \frac{n}{\sqrt{\pi}} e^{-n^2(t-x)^2}$$

satisface todas las condiciones de nuestro teorema (XV) se verifica:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{\pi}} \int_0^x dx \int_{-\infty}^{\infty} e^{-n^2(t-x)^2} dh(t) = h(x)-h(0) \quad . \quad [1]$$

Ahora bien, la integral

$$\frac{n}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-n^2(t-x)^2} dh(t)$$

se puede integrar termino a $\overset{\text{por hipótesis}}{\text{término}}$; efectuando la integración, obtenemos [2]

$$\frac{n}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-n^2(t-x)^2} dh(t) = \frac{n}{\sqrt{\pi}} \left[m_0 - n^2(m_2 - 2m_1 x + m_0 x^2 \right] +$$

$$+ \frac{n^2}{2!} \left[m_4 - 4m_3 x + 6m_2 x^2 - 4m_1 x^3 + m_0 x^4 \right] - \cdots =$$

$$= P_n(x) \qquad [2]$$

$\overset{\text{en (1)}}{\text{Reemplazando,}}$ obtenemos finalmente:

$$\boxed{h(x) - h(0) = \lim_{n\to\infty} \int_0^x P_n(x) dx} \qquad [3]$$

Como la función $P_n(x)$ se conoce en función de los momentos, de acuerdo con la fórmula (2), hemos obtenido la funcion $h(t)$ a menos de la constante aditiva $h(0)$ en función de sus momentos, conocidos por hipótesis.

Aplicación a la Teoría de las Probabilidades

23- Haremos una última aplicacion de nuestro teorema (XV)

TEOREMA XVII .

Sea $\{h_r(t)\}$ una sucesión de funciones de repartición, y $h(t)$ una función de repartición. Sea $K_n(t-x)$ un núcleo de una integral singular que cumpla las condiciones de nuestro teorema (XV). Se verifica entonces: condición necesaria y suficiente para que se cumpla.

$$\lim_{r\to\infty} h_r(t) = h(t) \qquad [a]$$

en todo punto de continuidad de $h(t)$, es que sea válida la igualdad

$$\boxed{\lim_{r\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty} K_n(t-x)\,d h_r(t) = \int_{-\infty}^{\infty} K_n(t-x)\,d h(t)} \quad (b)$$

La condicion es necesaria. Supongamos, en efecto, que se cumpla la (a), Debemos probar que, dado un ε positivo arbitrario, se verifica, para cada **n** y **x** fijos, y a partir de un **r** suficientemente grande:

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} K_n(t-x)\,d h_r(t) - \int_{-\infty}^{\infty} K_n(t-x)\,d h(t) \right| < \varepsilon$$

Para probarlo, dividamos el intervalo de integración en tres partes:

$$(-\infty, -a), \quad (-a, a), \quad (a, \infty),$$

con lo que la desigualdad anterior se transforma en la siguiente:

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} \right| = \left| \int_{-\infty}^{-a} K_n\,dh_r + \int_{-a}^{a} K_n\,dh_r + \int_{a}^{\infty} K_n\,dh_r - \int_{-\infty}^{-a} K_n\,dh - \int_{-a}^{+a} K_n\,dh - \int_{a}^{\infty} K_n\,dh \right| < \varepsilon$$

$$[1]$$

Ahora bien, como $K_n(t-x) \to 0$ para cada **n** y cada **x** y $|t| \to \infty$, podemos elegir $|a|$ suficientemente grande para que los dos primeros y los dos últimos integrales que figuran en (1) sean en valor absoluto menores, cada uno de ellos, que $\frac{\varepsilon}{5}$, y tal que

$$\lim_{r \to \infty} h_r(-a) = h(-a), \quad \lim_{r \to \infty} h_r(a) = h(a).$$

Obtenemos, pues,

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} K_n(t-x)\,d h_r(t) - \int_{-\infty}^{\infty} K_n(t-x)\,d h(t) \right| <$$

$$< \frac{4\varepsilon}{5} + \left| \int_{-a}^{a} K_n(t-x)\,d h_r(t) - \int_{-a}^{a} K_n(t-x)\,d h(t) \right|.$$

Ahora bien, como la sucesión $\left\{h_r(t)\right\}$ cumple todas las condiciones para la validez del teorema de Helly, podremos tomar r suficientemente grande para que se verifique

$$\left| \int_{-a}^{a} K_n(t-x)\, d h_r(t) - \int_{-a}^{a} K_n(t-x)\, d h(t) \right| < \frac{\varepsilon}{5},$$

con lo que queda demostrada la necesidad de la condición.

La condición es suficiente. Supongamos, en efecto, que se verifique, y que exista un punto s , de continuidad de $h(t)$ en el que $h_r(s)$ no tienda a $h(s)$. De esta sucesión podemos extraer una sucesión parcial $\left\{h_j(t)\right\}$ tal que

$$\lim_{j \to \infty} h_j(s) = A \neq h(s).$$

De esta sucesión parcial podemos extraer otra $\left\{h_k(t)\right\}$, en virtud del teorema de selección de Helly que tantas veces utilizamos, que tiende hacia una función no decreciente $\bar{h}(t)$ en todos los puntos de continuidad de esta última. Demostraremos que la sucesión $h_k(t)$ cumple la condición

$$\lim_{k \to \infty} \int_{-\infty}^{\infty} K_n(t-x)\, d h_k(t) = \int_{-\infty}^{\infty} K_n(t-x)\, d \bar{h}(t) \quad [1]$$

En efecto, para ello basta con repetir, para la sucesión $\left\{h_k(t)\right\}$, idéntico razonamiento al que acabamos de hacer con la sucesión $h_r(t)$ para demostrar que la condición es necesaria.-

Por otra parte, como $\{h_k(t)\}$ es una sucesión parcial de $\{h_r(t)\}$, se verifica también, en virtud de la hipótesis

$$\lim_{k\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}K_n(t-x)\,d\,h_k(t)=\lim_{r\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}K_n(t-x)\,d\,h_r(t)=$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}K_n(t-x)\,d\,h(t)\,. \qquad [2]$$

Por lo tanto, de (1) y (2) se deduce

$$\int_{-\infty}^{\infty}K_n(t-x)\,d\,h(t)=\int_{-\infty}^{\infty}K_n(t-x)\,d\,\bar{h}(t) \qquad [3]$$

para todo n y para todo x.

Integrando ambos miembros entre 0 y x, resulta, tomando límites para $n\to\infty$:

$$\lim_{n\to\infty}\int_{0}^{X}dx\int_{-\infty}^{\infty}K_n(t-x)\,d\bar{h}(t)=\lim_{n\to\infty}\int_{0}^{X}dx\int_{-\infty}^{\infty}K_n(t-x)\,d\,h(t) \qquad [4]$$

Invocando ahora o nuestro teorema (XV) , resulta pues,

$$\bar{h}(x)-\bar{h}(0)=h(x)-h(0)$$

Es decir, que $h(t)$ y $\bar{h}(t)$ defieren sólo en una constante. Pero, $h(t)$, como función límite de funciones de repartición, es ≥ 0 y ≤ 1; de la igualdad anterior se deduce, por lo tanto que esa constante es necesariamente nula, y por lo tanto:

$$h(t) \equiv \bar{h}(t) .$$

Se verifica, pues,

$$\lim_{k \to \infty} h_k(t) = h(t)$$

en todo punto de continuidad de $h(t)$, y, en especial

$$\lim_{k \to \infty} h_k(s) = h(s) .$$

Por otra parte, como $\{h_k(t)\}$ es sucesión parcial de $\{h_j(t)\}$ también se verifica:

$$\lim_{k \to \infty} h_k(s) = \lim_{j \to \infty} h_j(s) = A \neq h(s) .$$

Contradicción que demuestra finalmente nuestro teorema

El teorema que acabamos de demostrar comprende, como caso muy particular, a un teorema límite debido ~~de~~ Jacob[†]

Jacob, 1, pag 455.

TERCERA PARTE

LAS FUNCIONES DE HERMITE Y EL TEOREMA LIMITE

Esta tercera parte consta de dos capítulos. En el primero damos vario teoremas que permiten establecer cuando los coeficientes de una serie d Hermite vienen dados por las fórmulas de Euler-Fourier. En el segundo demostramos un teorema límite análogo al de Lévy y al de Liapunoff,pero que no utiliza la función característica ni la teoría de los momentosk, sino un teorema de identidad,que creemos también nuevo,para series de H Hermite-Stieltjes.

Primer capítulo.

Algunos teoremas sobre series de funciones de Hermite

24-Llamaremos serie de Hermite a toda serie de la forma

$$(1)\qquad \sum_{n=0}^{\infty} a_n \Psi_n(x)$$

sonde las $\Psi_n(x)$ son las funciones de Hermite

$$[2]\qquad \Psi_n(x) = \frac{(-1)^n e^{\frac{x^2}{2}} D^n e^{-x^2}}{(2^n \cdot n! \sqrt{\pi})^{1/2}}$$

Como es bien sabido,estas funciones constituyen un sistema ortonormal en $(-\infty, \infty)$.

Diremos que la serie de Hermite (1) cumple la condición F,cuando su coeficientes tienen las forma

(3) $$a_n = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\Psi_n(t)\,dt,$$

perteneciendo $f(t)$ a una cierta categoria de funciones.

La serie se llamará de Hermite-Stieltjes, si los coeficientes a_n vienen dados por las fórmulas

(4) $$a_n = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi_n(t)\,d\,h(t)$$

siendo $h(t)$ una funcion de variación acotada en el intervalo $(-\infty, \infty)$.

Para las series de Hermite valen, como es bien sabido, los teoremas de Parseval y de Riesz-Fischer.

Teorema de Parseval. Dada una funcion $f(t)$ de L^2, cuyos coeficientes vengan dados por las fórmulas (3), se verifica:

[4'] $$\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2 = \int_{-\infty}^{\infty} [f(t)]^2\,dt$$

Teorema de Fischer-Riesz. Dados numeros $a_1, a_2 \cdots a_n \cdots$, tales que la serie $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n)^2$ sea convergente, existe una función $f(t)$, perteneciente a L^2, tal que se verifican las fórmulas (3).

La validez de los teoremas de Parseval y Riesz-Fischer, permite enunciar inmediatamente la siguiente proposicion: Condición necesaria y suficiente para que una serie de Hermite cumpla la condición F, con $f(t) \in L^2$, es que los coeficientes cumplan la condición

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2 \text{ convergente.}$$

El teorema anterior resuelve completamente para las funciones de L2, el problema de saber cuándo una serie cumple la condición F. En esta parte de nuestro trabajo abordamos el mismo problema para otras categorias de funciones; sumables, acotadas, de variacion acotada, de variación acotada y contínuas, y monótonas no decrecientes acotadas. Damos, finalmente, una expresion del salto de una funcion, dado por su desarrollo de Hermite-Stieltjes.

XXV.- Antepondremos algunos teoremas que utilizaremos a menudo en lo que sigue:

Teorema 6 (').- Para $|t| < 1$ se verifica

$$K(x,r,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \Psi_n(x)\Psi_n(t)r^n =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi(1-r^2)}}\,\grave{e}xp\left[\frac{x^2-t^2}{2} - \frac{(x-rt)^2}{1-r^2}\right]. \qquad [5]$$

La funcion K (x,t,r) es evidentemente simétrica respecto a x y a t; es, además, positiva y goza de las propiedades siguientes, que hacen de ella un núcleo positivo de una integral singular

$$\int_{-\infty}^{\infty} K(x,r,t)\,dt$$

$$= \left(\frac{2}{1+r^2}\right)^{\frac{1}{2}} exp\left[-\frac{(1-r^2)x^2}{2(1+r^2)}\right] \xrightarrow[r\to1]{} 1 \quad , \qquad [6]$$

Análogamente

$$\int_{-\infty}^{\infty} K(x,t,r)\,dx =$$

$$= \left(\frac{2}{1+r^2}\right)^{1/2} exp\left[-\frac{(1-r^2)t^2}{2(1+r^2)}\right] \xrightarrow[r\to1]{} 1 \quad ; \qquad [7]$$

$$\lim_{r\to1} K(x,t,r) = 0 \qquad [8]$$

(') Ver Wiener (1) pag. 64 y 65; ver tambien Watson, 1. Ver asimismo Titchmarsh, (1) pag. 28.

uniformemente para todo x y todo t tal que $|x-t| > \varepsilon$.

Se verifica tambien, para r ⟶ 1:

$$\lim_{r\to 1}\int_{-\infty}^{x-\varepsilon} K(x,t,r)\,dt = 0 , \qquad [9]$$

$$\lim_{r\to 1}\int_{x+\varepsilon}^{\infty} K(x,t,r)\,dt = 0 . \qquad [10]$$

Sea f (t) una funcion perteneciente a L^1. Se verifica, para $r \to 1$:

$$\lim_{r\to 1}\int_{-\infty}^{\infty} K(x,t,r)\,f(t)\,dt = f(x) \qquad [10']$$

en todo punto en el que se verifique

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_{0}^{h}|f(x+t)-f(x)|\,dt = 0 .$$

[illegible] Hardy? [illegible] Fourier [illegible]

Estos resultados nos serán muy útiles, sobre todo para la demostracion del teorema 25-

----

Otro resultado que utilizaremos repetidamente en lo que sigue es el siguiente:

TEOREMA 19.- <u>Los coeficientes de una serie de Hermite o de Hermite-Stieltjes, tienden a cero para $n \to \infty$</u> .

La demostración es inmediata; tomemos el caso de una función de L^1;

¡Ojo! [illegible]
hasta [illegible] [illegible]
original anotado [illegible]

---

(2) Kogbetlianz, p. 153.

$$[10''] \qquad a_n = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi_n(t) f(t)\, dt$$

Utilizando la conocida acotación *

$$H_n(x) = O\left[e^{\frac{x^2}{2}} \sqrt{2^n n!} \cdot n^{-\frac{1}{4}}\right],$$

resulta para las funciones de Hermite en virtud de 2, la acotacion siguiente:

$$(11) \qquad \Psi_n(x) = O\left(\frac{1}{\sqrt[4]{n}}\right)$$

Como la funcion $f(t)$ es sumable, y por lo tanto absolutamente sumable, resulta fácilmente, dividiendo el intervalo de integracion en 10" en 3 partes, y utilizando (11), que $a_n \to 0$ para $n \to \infty$ El razonamiento es valido para coeficientes de una serie de Fourier-Stieltjes:

$$a_n = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi_n(t)\, d\, h(t),$$

siendo la funcion $h(t)$ de variacion acotada en $(-\infty, \infty)$.

XXVI- TEOREMA 10 - La condicion necesaria y **suficiente** para que una serie de Hermite cuyos coeficientes tienden a cero cumpla la condición de F , con $h(t)$ de variación acotada en $(-\infty, \infty)$, es que se verifique:

$$[12] \qquad \int_{-\infty}^{\infty} |A(r,x)|\, dx < M \qquad (0 \leq r < 1),$$

---

* Ver Hogbetlianz, pag. 153.

con

$$A(r,x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \Psi_n(x) r^n \qquad (0 \leq r < 1) \qquad [13]$$

DEMOSTRACION.- La condicion es necesaria. En efecto, si

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \Psi_n(x) \qquad [14]$$

cumple la condición F, esto, es, si verifican las infinitas igualdades

$$a_n = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi_n(t)\, d\,h(t) \quad , \quad \left[n=0,1, \right] \qquad [15]$$

se verifica también

$$A(r,x) = \int_{-\infty}^{\infty} K(r,x,t)\, d\,h(t) \, , \qquad [16]$$

siendo K (r,x,t) el núcleo de Hermite cuyas propiedades hemos expuesto anteriormente.

Se verificara, pues:

$$\left| A(r,x) \right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} K(r,x,t) \left| d\,h(t) \right| \qquad [17]$$

Integrando esta desigualdad entre limites finitos a y --a, obtenemos

$$\int_{-a}^{a} \left| A(r,x) \right| dx \leq \int_{-a}^{a} dx \int_{-\infty}^{\infty} K(r,x,t) \left| d\,h(t) \right| . \qquad [18]$$

Es fácil ver que en el segundo miembro es lícito invertir el orden de integración. Para ello basta observar que, en virtud de la forma exponencial del nucleo K (r,x,t), las dos integrales

$$\int_{-a}^{a} dx \int_{N}^{\infty} K(x,r,t) \left| d\,h(t) \right| \, , \; y \; \int_{-a}^{a} dx \int_{-\infty}^{-N} K(x,r,t) \left| d\,h(t) \right|$$

pueden hacerse tan pequeñas como se quiera, eligiendo |N| suficientemente grande. En la integral

$$\int_{-a}^{a} dx \int_{-N}^{N} K(x,r,t)|dh(t)| , \qquad [19]$$

siendo la función K (u) continua, y los limites de integración finitos, no hay ningun inconveniente para invertir el orden de integracion, y obtenemos así :

$$\int_{-a}^{a} |A(r,x)|dx \le \int_{-a}^{a} |dh(t)| \int_{-\infty}^{\infty} K(x,r,t)dx \qquad [20]$$

Tomando ahora límites para $|a| \to \infty$, obtenemos

$$\int_{-\infty}^{\infty} |A(r,x)|dx \le \int_{-\infty}^{\infty} |dh(t)| \int_{-\infty}^{\infty} K(r,x,t)dx . \qquad [21]$$

En virtud de la acotación uniforme de la integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} K(r,x,t)dx$$

(fórmula 7), obtenemos de (21)

$$\int_{-\infty}^{\infty} |A(r,x)|dx \le c \int_{-\infty}^{\infty} |dh(t)| \qquad [0 \le r < 1] \qquad [22]$$

con lo que queda demostrada la necesidad de la condicion.

La condicio~~n~~es suficientes Consideremos, en efecto, la función

$$F(r,x) = \int_{-\infty}^{x} A(r,x)dx \qquad [23]$$

Las funciones F_r (x) son, en virtud de la hipótesis, de variación uniformemente acotada con respecto a r, y por lo tanto constituyen, en virtud de un conocido teorema de Helly (3), un conjunto compacto; es decir, que existe una sucesion parcial F_{r_j} (x), tal que

$$\lim_{j\to\infty} F_{r_j}(x) = g(x), \qquad [24)$$

donde g (x) es una función de variación acotada, y la igualdad se verifica en todos los puntos de continuidad de g (x).

Consideremos ahora las integrales

$$\int_{-\infty}^{\infty}\Psi_m(x)\,d\,F_{r_j}(x) \qquad [j=1,2,3 \qquad]. \quad [25]$$

Aplicando el clásico teorema de Helly (4) resulta:

$$\lim_{j\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\Psi_m(x)\,d\,F_{r_j}(x) = \int_{-\infty}^{\infty}\Psi_m(x)\,d\,g(x); \quad [26]$$

por otra parte

$$\int_{-\infty}^{\infty}\Psi_m(x)\,d\,F_{r_j}(x) = \int_{-\infty}^{\infty}\Psi_m(x)\,A(r_j,x)\,dx\ ; [27]$$

en virtud de (23), y la segunda integral es igual a

$$\int_{-\infty}^{\infty}\Psi_m(x)\left[\sum_{n=0}^{\infty}a_n\,\Psi_n(x)\,r_j^n\right]dx\,. \qquad [28]$$

Demostraremos que es lícito integrar esta expresión término a término, es decir, que es exacta la igualdad

---

(3) Helly, 1

(4) Helly, 1.

$$\int_{-\infty}^{\infty}\Psi_m(x\left[\sum_{n=0}^{\infty} a_n\Psi_n(x)\, z_j^{\,n}\right]dx = \sum_{n=0}^{\infty}\left[a_n\, z_j^{\,n}\int_{-\infty}^{\infty}\Psi_m(x)\Psi_n(x)\,dx\right] \qquad [29]$$

Para ello es condición suficiente, en virtud de un clásico teorema, que converja la serie de módulos, es decir, que se verifique

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left[|a_n|\, z_j^{\,n}\int_{-\infty}^{\infty}|\Psi_n(x)||\Psi_m(x)|\,dx\right] < \infty \qquad [30]$$

Acotemos la integral que figura dentro del signo $\sum$.
Aplicando la acotacion de **Kogbetlianz** (5), consignada anteriormente, , o aun la menos precisa de Cramer (6).

$$|H_n(x)| < K\sqrt{n!}\; 2^{\frac{n}{2}}\, e^{\frac{x^2}{2}}, \qquad [31]$$

o lo que es lo mismo

$$|\Psi_n(x)| < \frac{K}{\sqrt[4]{\pi}} \qquad [32]$$

resulta

$$\int_{-\infty}^{\infty}|\Psi_m(x)||\Psi_n(x)|\,dx < K\sqrt[4]{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|\Psi_m(x)|\,dx = C \qquad [33]$$

---

(5) **Kogbetlianz**, l. p. 153
(6) Cramer, l. Ver Charlier pp. 52 y 57

En la segunda integral, m es fija y la integral es por lo tanto convergente, dado que Ψ_m es el producto de un polinomio por el factor $e^{-\frac{x^2}{2}}$.

Resulta pues,

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left[|a_n|r_j^n\int_{-\infty}^{\infty}|\Psi_m(x)|\cdot|\Psi_n(x)|dx\right] <$$

$$< C\sum_{n=0}|a_n|r_j^n \qquad [34]$$

Como por hipótesis los coeficientes a_n tienden a cero, y $r_j < 1$, también por hipótesis, la serie de potencias del segundo miembro es convergente y por lo tanto también es convergente la serie del primer miembro, con lo que queda demostrada nuestra aserción, y por consiguiente la exactitud de la fórmula (29). Volvamos a considerar esta misma fórmula. En el segundo miembro de la misma figura la integral

$$\int_{-\infty}^{\infty}\Psi_m(x)\,\Psi_n(x)\,dx \qquad [35]$$

que en virtud de la ortogonalidad y normalidad de las funciones de Hermite, es igual a cero para $m \neq n$, y a uno para $m = n$. La fórmula (29) nos da, pues

$$\int_{-\infty}^{\infty}\Psi_m(x)\left[\sum_{n=0}^{\infty}a_n\Psi_n(x)r_j^n\right] =$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left[a_n r_j^n\int_{-\infty}^{\infty}\Psi_m(x)\Psi_n(x)\,dx\right] = a_m r_j^m \qquad [36]$$

Substituyendo este valor en la fórmula (26), obtendremos:

$$\lim_{j\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\Psi_m(x)\,dF_{r_j}(x) = \lim_{j\to\infty} a_m r_j^m =$$

$$= a_m = \int_{-\infty}^{\infty}\Psi_m(x)\,dg(x), \therefore \qquad [37]$$

$$a_m = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi_m(x)\, d\, g(x) \qquad [38]$$

con lo que queda demostrada la segunda parte de nuestro teorema.

XXVII- TEOREMA 21- Condicion necesaria ysuficiente para que una serie de Hermite cuyos coeficientes tienden a cero, cumpla a condición F con $h(t)$ moñotona no decreciente y acotada en $(-\infty, \infty)$, es que se verifique

$$A(r,x) \geq 0 \qquad 0 \leq r < 1,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} A(r,x)\,dx \geq 0 \qquad 0 \leq r < 1. \qquad [39]$$

Este teorema es fácil corolario del anterior.

Las condiciones son necesarias. En efecto, si

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \Psi_n(x) \qquad [40]$$

es una serie de Hermite-Stieltjes de una funcion acotada no decreciente, se verifica

$$A(r,x) = \int_{-\infty}^{\infty} K(r,x,t)\, d h(t). \qquad [41]$$

Siendo K (r,x,t) positivo, y la funcion $h(t)$ no decreciente, el integrando es positivo, y obtenemos

$$A(r,x) \geqslant 0 \qquad [42]$$

La segunda condición se verifica también, en virtud del teorema anterior, pues $h(t)$, moñotona no decreciente, y acotada, es de variación acotada.

Las condiciones son suficientes. En efecto, todos los razonamientos que hemos hecho para demostrar el teorema anterior subsisten. Pero,en el caso actual, las funciones

$$F(r,x) = \int_{-\infty}^{x} A(r,x)\,dx \;, \qquad [43]$$

dado que el integrando es positivo, son , no sólo de variación uniformemente acotada, sino tambien no decrecientes y uniformemente acotadas. La funcion limite g (x), que en el teorema anterior resultaba de variacion acotada, es en este caso no decreciente y acotada. Repitiendo todos los pasos del razonamiento anterior, se demuestrafinalmente que

$$a_m = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_m(t)\, dg(t), \qquad [44]$$

con g (t) acotada no decreciente, con lo que queda demostrada la segunda parte del teorema.

XXVIII.- **TEOREMA 22**· <u>Condición necesaria y suficiente para que una serie de Hermite cuyos coeficientes tienden a cero cumpla la condición F , con $h(t)$ contínua de variación acotada, es que se verifique</u>

$$a) \quad \int_{-\infty}^{\infty} |A(r,x)|\,dx < M \qquad 0 \leq r < 1,$$

$$b) \quad \lim_{r \to 1} \pi^{\frac{1}{2}} (1-r^2)^{\frac{1}{2}} A(r,x) = 0 \qquad [45]$$

Este teorema es fácil corolario del teorema 21. En efecto, la condición (a) nos dice que la serie dada es el desarrollo de Hermite-Stieltjes de una funcion de variacion acotada. Veremos que la condición b, determina que esa funcion de variación acotada, es contínua. Para ello, nos valdremos del siguiente teorema, muy análogo a un teorema de <u>Khintchine</u> (*).

(*) Khintchine, 1.

Sea una funcion S (x,r,t), que satisfaga a las condiciones :

1) $|S(x,r,t)| < M,$

[46]

2) $\lim_{r\to 1} S(x,r,t) = 0$ para todo x tal que $|x-t| > \delta,$

3) $\lim_{r\to 1} S(x,r,t) = 1$ para $x=t$

Se verificará entonces, para $r \to 1$

$$\lim_{r\to 1}\int_{-\infty}^{\infty} S(x,r,t)\,d\,h(t) = h(x+0)-h(x-0),$$

siendo h(t) de variacion acotada en $(-\infty, \infty)$.

Comprobemos que la expresion

$$\pi^{\frac{1}{2}}(1-r^2)^{\frac{1}{2}}K(x,r,t) \qquad [47]$$

satisface a las condiciones del teorema anterior.
La condición 1) se satisface evidentemente en virtud de la fórmula (5). Tambien está satisfecha la condicion 2), pues

$$\pi^{1/2}(1-r^2)^{1/2}K(r,x,t) = \exp\left(\frac{x^2-t^2}{2} - \frac{(x-rt)^2}{1-r^2}\right). \qquad [48]$$

Para $|x-t| > \delta$, el exponente tiende a $-\infty$ para $r \to 1$, y por lo tanto

$$\lim_{r\to 1}\pi^{1/2}(1-r^2)^{1/2}K(r,x,t) = 0 \quad \text{para } |x-t|>\delta \qquad [49]$$

Para x = t, la expresion (48) se reduce a

$$\pi^{1/2}(1-r^2)^{1/2}K(r,x,x) = \exp\left[-\frac{x^2(1-r^2)}{1-r^2}\right] =$$

$$= \exp\left[-\frac{x^2(1-r)(1-r)}{(1-r)(1+r)}\right] \xrightarrow[r\to 1]{} 1 \qquad [50]$$

Se verificará, pues, en virtud del teorema recién enunciado:

$$\lim_{r\to 1} \pi^{1/2}(1-r^2)^{1/2}\int_{-\infty}^{\infty} K(r,x,t)\,dh(t) = \qquad [51]$$

$$= \lim_{r\to 1} \pi^{1/2}(1-r^2)^{1/2}A(r,x) = h(x+0)-h(x-0).$$

Si en todo punto x se verifica que a $h(x+0)-h(x-0)=0$,

quiere decir que la funcion $h(x)$ es continua, ya que su salto es nulo para todo x.

La validez de la condicion a) de 45, nos aseguraba que la función $h(t)$ es de variación acotada. Acabamos de ver que el verificarse de la condicion b), de (45), es necesario y suficiente para que la funcion $h(t)$, de variación acotada, sea continua. El teorema 22 queda así completamente demostrado.

XIX — TEOREMA 23- Condición necesaria y suficiente para que una serie de Hermite cuyos coeficientes tienden a cero cumpla la condicion F , con $f(t) \varepsilon L^p$, $(p \geq 2)$, es que se verifique

$$\int_{-\infty}^{\infty} |A(r,x)|^p\,dx < M \quad (0 \leq r < 1). \qquad [52]$$

La condición es necesaria. En efecto, si la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \Psi_n(x) \qquad [53]$$

cumple la condición F , se verificará:

$$a_n = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi_n(t) f(t) dt , \qquad [54]$$

$$A(r,x) = \int_{-\infty}^{\infty} K(r,x,t) f(t) dt , \qquad [55]$$

siendo K (r,x,t) el varias veces mencionado núcleo de Hermite. Aplicando la clásica desigualdad de Hölder a la fórmula (55), obtenemos:

$$|A(r,x)| \leq \left[\int_{-\infty}^{\infty} |K(r,x,t)| \, |f(t)|^p dt \right]^{1/p} \cdot \left[\int_{-\infty}^{\infty} K(r,x,t) dt \right]^{1/p'} \qquad [56]$$

$$\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1 \right) .$$

Elevemos ambos miembros a la potencia p e integremos:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |A(r,x)|^p dx \leq \int_{-\infty}^{\infty} dx \left[\left\{ \int_{-\infty}^{\infty} K(r,x,t) |f(t)|^p dt \right\} \cdot \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} K(r,x,t) dt \right\}^{p/p'} \right] \qquad [57]$$

Pero

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} K(r,x,t) dt \right)^{p/p'} < C^{p/p'} = \text{constante} \qquad [58]$$

en virtud de la fórmula 6) varias veces citada .

De (57) y (58) deducimos

$$\int_{-\infty}^{\infty}|A(r,x)|dx < \tau^{p/p'}\int_{-\infty}^{\infty}d\,x\int_{-\infty}^{\infty}K(r,x,t)|f(t)|^p dt. \qquad [59]$$

La integral doble del segundo miembro (de integrando positivo), cumple las condiciones del clásico teorema de Fubini, y por lo tanto es lícito invertir el orden de integración, con lo que obtenemos:

$$\int_{-\infty}^{\infty}dx\int_{-\infty}^{\infty}K(r,x,t)|f(t)|^p dt = \int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|^p dt\int_{-\infty}^{\infty}K(r,x,t)\,dx \qquad [60]$$

$$\leq \tau\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|^p dt \qquad [61]$$

Substituyendo este resultado en la fórmula (59), obtenemos en definitiva:

$$\int_{-\infty}^{\infty}|A(r,x)|^p dx \leq \tau^{(p/p'+1)}\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|^p dt = B\tau^{(\frac{p}{p'}+1)} = M, \qquad [62]$$

con lo que queda demostrada la primera parte del teorema.

La condicion es suficiente. Supongamos, en efecto, que se cumpla la hipótesis, esto es

$$\int_{-\infty}^{\infty}|A(r,x)|^p dx < M \qquad (0 \leq r < 1) \qquad [63]$$

Entonces, en virtud de un clásico teorema de Riesz (8), el conjunto de funciones $A(r,x)$ contiene una sucesion parcial débilmente convergente $A(r_j,x)$, es decir, tal que para toda funcion $g(t) \varepsilon L^{p'}, \left(\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1\right),$ se verifica:

---

(8) Riesz 2.

$$\lim_{j\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty} A(r_j,x)g(x)\,dx=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(x)\,dx \qquad [64]$$

siendo f (X) una funcion de L^p. Ahora bien, las funciones $\varphi_m(X)$ son acotadas e integrables en $(-\infty,\infty)$ y por lo tanto pertenecen a la categoría L^p, cualquiera que sea $p\geq 1$. Por lo tanto

$$\lim_{j\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi_m(x)\,A(r_j,x)\,dx=\int_{-\infty}\varphi_m(x)f(x)\,dx. \qquad [65]$$

Una vez en posesión de este resultado, el resto es fácil. En efecto, sólo queda por demostrar que la integral del primer miembro de la igualdad anterior es igual a $a_m r_j^m$. Pero los razonamientos que hemos hecho para demostrar idéntico resultado en el teorema (20), siguen siendo válidos sin modificación alguna en el caso actual. Nos queda, pues

$$\lim_{j\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi_m(x)A(r_j,x)\,dx=\lim_{j\to\infty} a_m r_j^m = \qquad [66]$$

$$=a_m=\int_{-\infty}\varphi_m(x)f(x)\,dx,$$

con lo que queda demostrada la 2a. parte del teorema.

XXI. TEOREMA 24- Condicion necesaria y suficiente para que una serie de Hermite

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n\varphi_n(x) \qquad [67]$$

cuyos coeficientes tienden a cero cumpla la condicion F con $f(t)$ acotada e integrable en $(-\infty, \infty)$, es que se verifique

$$|A(r,x)| < M \qquad 0 \leq r < 1. \quad [68]$$

La condicion es necesaria. En efecto, razonando como en los teoremas anteriores, resulta que si el desarrollo (67) es la serie de Hermite, de una funcion acotada, se verifica

$$A(r,x) = \int_{-\infty}^{\infty} K(r,x,t) f(t)\, dt \quad [69]$$

Ahora bien, como por hipótesis $|f(t)| < M$, se verificará

$$|A(r,x)| < M \int_{-\infty}^{\infty} K(r,x,t)\, dt < MC, \quad [70]$$

en virtud de la propiedad fundamental del nucleo de Hermite, que tantas veces hemos utilizado. La necesidad de la condición queda así demostrada.

La condicion es suficiente. El razonamiento es idéntico al de los teoremas anteriores. En el caso actual, la hipótesis

$$(A(r,x)) < M, \quad [71]$$

nos permite asegurar, en virtud de otro conocido teorema de Riesz (9) que el conjunto de funciones $A(r,x)$ contiene una sucesión parcial débilmente convergente.

Una vez asegurado este punto fundamental de la demostración, la parte

---

(9) Riesz, 2.

restante es idéntica a la de los teoremas anteriores.

31- **TEOREMA 25**- Condición necesaria y suficiente para que una serie de Hermite

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \varphi_n (x) \qquad [72]$$

cuyos coeficientes tienden a cero, cumpla la condicion F con $f(t)$ sumable, es que se verifique para $r \to 1$, $p \to 1$

$$[73] \quad \lim_{\substack{r \to 1 \\ p \to}} \int_{-\infty}^{\infty} |A(r,x) - A(p,x)| \, dx = 0$$

La condición es suficiente. En efecto, si la hipótesis se verifica, existe, en virtud del teorema fundamental sobre convergencia en promedio, debido a Riesz (10), una funcion g (x) tal que para

$$[74] \quad \lim_{j \to \infty} \int_{-\infty}^{\infty} |A.(r_j, x) - g(x)| \, dx = 0$$

Pero segun es bien sabido, la convergencia fuerte lleva aparejada la convergencia debil (10); por lo tanto se verificará para

$$[75] \quad \lim_{j \to \infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x) A(r_j, x) \, dx = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f(x) \, dx \; ,$$

para toda funcion g (x) sumable acotada, y en particular

$$[76] \quad \lim_{j \to \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_m (x) A(r_j, x) \, dx = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_m (x) \, f(x) \, dx.$$

---

(10) Riesz, 2.

La demostración de la suficiencia sigue ahora idénticamente que en casos anteriores.

La condición es necesaria. En efecto, si la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \psi_n(x) \qquad [77]$$

es el desarrollo de Hermite de una funcion sumable, se verifica

$$A(n,x) = \int_{-\infty}^{\infty} K(n,x,t) f(t)\, dt. \qquad [78]$$

Recordando las propiedades 6, 7, 9, 1 y 10ª del núcleo K (x,t,r) consignadas anteriormente, se comprueba que el mismo satisface a todas las condiciones del siguiente teorema de Hahn (11)

Sea $F(t,x,n)$ medible en todo el plano Xt, para todo n. Sea $F(t,x,n)$ integrable con respecto t en $(-\infty,\infty)$, para todo x, con excepción cuando más de un conjunto de medida nula, igualmente sea integrable con respecto a x en $(-\infty,\infty)$ para todo t, con excepción cuando mas de un conjunto de medida nula; además satisfaga $F(t,x,n)$ a las siguientes condiciones:

1) Existe un M tal que, para casi todo x y todo n, se verifica

$$\int_{-\infty}^{\infty} |F(t,x,n)|\, dt < M;$$

2) Existe un M tal que, para casi todo t y todo n se verifica

$$\int_{-\infty}^{\infty} |F(t,x,n)|\, dx < M;$$

---

(11) Hahn, L. pag. 667

$$3)\quad f(x) = \lim_{n \to \infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(t,x,n)\, f(t)\, dt, \qquad [3]$$

para $n \to \infty$, **en todo punto donde se verifique** para

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \int_{0}^{h} | f(x+t) - f(x) |\, dt = 0,$$

4) Para todo $h > 0$ **y todo** t **se verifica**

$$\lim_{n \to \infty} \int_{-\infty}^{t-h} | F(t,x,n) |\, dX = 0,$$

$$\lim_{n \to \infty} \int_{t+h}^{\infty} | F(t,x,n) |\, dx = 0$$

Entonces se **verifica,** para **toda funcion f (x) sumable** en $(-\infty \ \infty)$, **la relación**

$$\lim_{n \to \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left| f(x) - \int_{-\infty}^{\infty} F(t,x,n)\, f(t)\, dt \right| dx = 0$$

Del anterior **teorema de Hahn, aplicado a nuestro** caso se **deduce:**

9]

$$\lim_{r \to 1} \int_{-\infty}^{\infty} | f(x) - A(r,x) |\, dx = 0, \qquad [79]$$

es decir que **la funcion** A **(r,x)** converge **en promedio de** primer **orden,hacia f (x). En virtud del teorema fundamental sobre convergencia en** promedio, se **verificará también, en virtud de** la **relación anterior:**

$$\lim_{\substack{r \to 1 \\ \rho \to 1}} \int_{-\infty}^{\infty} | A(r,x) - A(\rho,x) |\, dx = 0. \qquad [80]$$

Nuestro teorema queda así finalmente demostrado

Capitulo Segundo

UN TEOREMA DE UNICIDAD PARA SERIES DE HERMITE

32- Sea $\psi_n(x)$ la enésima función de Hermite:

$$\psi_n(x) = (2^n \cdot n! \sqrt{\pi})^{-\frac{1}{2}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} H_n(x), \qquad [1]$$

donde $H_n(x)$ es el polinomio de Hermite de grado n

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \left(\frac{d}{dx}\right)^n e^{-x^2}. \qquad [2]$$

La sumatriz Abel de una serie de Hermite-Stieltjes,

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \psi_n(x), \quad \text{con} \qquad [3]$$

$$a_n = \int_{-\infty}^{\infty} \psi_n(x)\, dh(x), \quad \text{es} \qquad [4]$$

$$A(r,t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \psi_n(t) r^n. \qquad [5]$$

Reemplazando (4) en (5) se obtiene

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \psi_n(x) r^n = \sum_{n=0}^{\infty} \psi_n(x) r^n \int_{-\infty}^{\infty} \psi_n(y)\, dh(y) =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \psi_n(y) \psi_n(x) r^n \right] dh(y) \qquad [6]$$

El núcleo

$$\sum_{n=0}^{\infty} \psi_n(x)\,\psi_n(y)\,r^n = K(x,y,r$$

ha sido objeto de múltiples investigaciones (*)

Nos proponemos demostrar en lo que sigue el siguiente teorema acerca de este núcleo:

Sea $h(x)$ una función de repartición. Se verifica entonces:

TEOREMA (26)

$$\lim_{r\to 1}\int_0^a dy \int_{-\infty}^{\infty} K(r.x.y)\,dh(x) = h(a)-h(0)$$

La dificultad de este teorema reside en que el núcleo no es de la forma

$$K_n(y-x)$$

es decir, no es función de la diferencia $y-x$, como hemos supuesto en los teoremas demostrados anteriormente; y por lo tanto esos teoremas no se aplican. Daremos de él una demostración directa.

(*) Ver Hille, l. Watson, l., Wiener, l., Titchmarsh, l.

Consideremos, pues, la expresión:

$$] \quad \int_{-\infty}^{\infty} K(r;x,y)\,dh(x) \qquad [7]$$

Integrando esta funcion entre cero y a y cambiando el orden de integracion, lo cual es lícito pues se cumplen con exceso las condiciones del teorema de Fubini (ver, por ej. Saks, 1, página 77 , donde figura una generalización del clásico teorema de Fubini, para integrales de Lebesgue-Stieltjes), obtenemos:

$$[8] \quad \int_0^a dy \int_{-\infty}^{\infty} K(r,y,x)\,dh(x) = \int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_0^a K(r,y,x)\,dy\right] dh(x) \qquad [8]$$

Integremos por partes la igualdad anterior:

$$[9] \quad \int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_0^a K(r,y,x)\,dy\right] dh(x) = \Big| h(x) \int_0^a K(r,y,x)\,dy \Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} h(x)\left[\frac{\partial}{\partial x}\int_0^a K(r,y,x)\,dy\right] dx \qquad [9]$$

La parte integrada tiende a cero, pues, introduciendo el cambio de variable

$$[10] \quad Z = y - \frac{2xr}{1+r^2} \qquad [10]$$

se obtiene, despues de cálculos faciles:

$$[11] \quad \int_0^a K(r,x,y)\,dy = \frac{e^{-\frac{1}{2}\frac{1-r^2}{1+r^2}x^2}}{\sqrt{\pi(1-r^2)}} \int_{-\frac{2xr}{1+r^2}}^{a-\frac{2xt}{1+r^2}} e^{-\frac{1+r^2}{2(1-r^2)}Z^2}\,dZ \qquad [11]$$

Esta expresión tiende evidentemente a cero para $|X| \to \infty$.
Por otra parte $h(-\infty) = 0, \; h(\infty) = 1$ **La parte integrada tiende pues efectivamente a cero, y por lo tanto nos queda**

$$[12] \quad \int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_0^a K(r,x,y)\,dy\right] dh(x) = \\ = -\int_{-\infty}^{\infty} h(x)\left[\frac{\partial}{\partial x}\int_0^a K(r,x,y)\,dy\right] dx \quad [12]$$

Efectuando la derivación indicada, teniendo en cuenta (11), obtenemos

$$\frac{\partial}{\partial x}\int_0^a K(x,y,r)\,dy = \left(\frac{-x(1-r^2)\exp\left(-\frac{(1-r^2)x^2}{2(1+r^2)}\right.}{(1+r^2)\sqrt{\pi(1-r^2}}\right) \cdot$$

$$\cdot \int_{-\frac{2xr}{1+r^2}}^{a-\frac{2xr}{1+r^2}} e^{-\frac{1+r^2}{2(1-r^2)}Z^2}\,dZ + \frac{1}{\sqrt{\pi(1-r^2}}\exp\left\{-\frac{(1-r^2)x^2}{2(1+r^2)}\right\} \cdot$$

$$[13] \cdot \left\{-\frac{2r}{1+r^2}\left[e^{-\frac{(1+r^2)}{2(1-r^2)}\left(a-\frac{2xr}{1+r^2}\right)^2} - e^{-\frac{1+r^2}{2(1-r^2}\left(\frac{2xr}{1+r^2}\right)^2}\right]\right)$$

Al primer sumando del segundo miembro de (13) lo llamaremos $A(x,a,r)$ y al segundo, $B(x,a,r)$

$$\frac{\partial}{\partial x}\int_0^a K(x,\eta,r)\,d\eta = A(x,a,r)+B(x,a,r)\cdot \qquad [14]$$

Reemplazando en (12) obtenemos:

$$\int_{-\infty}^{\infty}[K(x,\eta,r)\,dh(x) =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} A(x,a,r)h(x)\,dx - \int_{-\infty}^{\infty} B(x,a,r)h(x)\,dx \qquad [15]$$

Tomando límites en esta igualdad, obtenemos, siempre naturalmente que existan los límites considerados

$$[16] \qquad \lim_{r\to 1}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_0^a K(r,x,\eta)\right]dh(x) =$$

$$= \lim_{r\to 1}\left[-\int_{-\infty}^{\infty} A(x,a,r)h(x)\,dx\right] - \lim_{r\to 1}\int_{-\infty}^{\infty} B(x,a,r)h(x)\,dx\,.$$

Recordemos ahora que se verifica

$$[17] \qquad -\int_{-\infty}^{\infty} A(x,a,r)h(x)\,dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} h(x)\left[\frac{x(1-r^2)\exp\left[-\frac{(1-r^2)x^2}{2(1+r^2)}\right.}{(1+r^2)\sqrt{\pi(1-r^2)}}\int_{-\frac{2xr}{1+r^2}}^{a-\frac{2xr}{1+r^2}} e^{-\frac{(1+r^2)z^2}{2(1-r^2)}}\,dz\right]dx$$

$$[18] \quad -\int_{-\infty}^{\infty} B(x,a,r)h(x)dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} h(x)dx \int \left\{ e^{-\frac{1+r^2}{2(1-r^2)}\left(a-\frac{2xr}{1+r^2}\right)^2} - e^{-\frac{1+r^2}{2(1-r^2)}\left(\frac{2xr}{1+r^2}\right)^2} \right\} \frac{2r\, e^{-\frac{(1-r^2)x^2}{2(1+r^2)}}}{(1+r^2)\sqrt{\pi(1-r^2)}}$$

Consideremos la primera integral. Résulta evidentemente

$$(19) \quad \left| \int_{-\infty}^{\infty} h(x)A(x,a,r)dx \right| \leq$$

$$\leq \int_{-\infty}^{\infty} |h(x)||A(x,a,r)|dx = \int_{-\infty}^{0} | \quad | dx + \int_{0}^{\infty} | \quad | dx$$

Calculemos la primera integral. Teniendo en cuenta que

$$[20] \quad \int_{-\frac{2xr}{1+r^2}}^{a-\frac{2xr}{1+r^2}} e^{-\frac{(1+r^2)z^2}{2(1-r^2)}} dz < $$

$$< a e^{-\frac{1+r^2}{2(1-r^2)}\left(\frac{2xr}{1+r^2}\right)^2},$$

tenemos por lo tanto

$$[21] \quad \int_{-\infty}^{0} | \quad | dx <$$

$$< \frac{(1-r^2)a}{(1+r^2)\sqrt{\pi(1-r^2)}} \int_{-\infty}^{\infty} x e^{-x^2\left(\frac{1-r^2}{2(1+r^2)} + \frac{(1+r^2)4r^2}{2(1-r^2)(1+r^2)^2}\right)} dx$$

La integral de la derecha se avalúa fácilmente, y obtenemos en definitiva:

$$\int_{-\infty}^{0} |h(x)|\,|A(x,a,r)|\,dx <$$

$$< \frac{(1-r^2)a}{2(1+r^2)\sqrt{\pi(1-r^2)}\cdot\left(\frac{1}{2}\,\frac{1-r^2}{1+r^2}+\frac{(1+r^2)4r^2}{2(1+r^2)^2(1-r^2)}\right)}, \qquad [22]$$

y el segundo miembro tiende a cero para $r \to 1$.

Con razonamiento perfectamente análogo se demuestra que también tiende a cero la segunda integral del segundo miembro de (19), y por lo tanto:

$$\lim_{r\to 1}\int_{-\infty}^{\infty} A(x,a,r)\,h(x)\,dx = 0 \qquad [23]$$

Recordando la igualdad (14) nos queda, pues:

$$\lim_{r\to 1}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{0}^{a} K(r,x,y)\,dy\right] d\,h(x) = -\lim_{r\to 1}\int_{-\infty}^{\infty} B(x,a,r)\,h(x)\,dx =$$

$$\lim_{r\to 1}\frac{2r}{(1+r^2)\sqrt{\pi(1-r^2)}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\,\frac{1-r^2}{1+r^2}x^2}\cdot e^{-\frac{1+r^2}{2(1-r^2)}\left(a-\frac{2xr}{1+r^2}\right)^2} h(x)\,dx =$$

$$\lim_{\to 1}\frac{2r}{(1+r^2)\sqrt{\pi(1-r^2)}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1-r^2}{2(1+r^2)}x^2}\, e^{-\frac{1+r^2}{2(1-r^2)}\left(0-\frac{2xr}{1+r^2}\right)^2} h(x)\,dx.$$

$$[24]$$

Llamemos $\mathcal{G}(x,r,a)$,

$\mathcal{G}(x,r,0)$, los factores que multiplican a

$e^{-\frac{1}{2}\frac{1-r^2}{1+r^2}x^2}$ en los núcleos de las 2 integrales que aparecen en el segundo miembro de 24:

$$\mathcal{G}(x,r,a)=\frac{2r}{(1+r^2)\sqrt{\pi(1-r^2)}}\cdot e^{-\frac{1+r^2}{2(1-r^2)}\left(a-\frac{2xr}{1+r^2}\right)^2}; \qquad [25]$$

$$\mathcal{G}(x,r,0)=\frac{2r}{(1+r^2)\sqrt{\pi(1-r^2)}}\cdot e^{-\frac{1+r^2}{2(1-r^2)}\left(\frac{2xr}{1+r^2}\right)^2}.$$

A fin de calcular los límites (24), mostraremos primeramente que se verifica

$$\lim_{r\to 1}\left(\frac{2r}{(1+r^2)\sqrt{\pi(1-r^2)}}\cdot\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{(1+r^2)}{2(1-r^2)}\left(a-\frac{2(xr)}{1+r^2}\right)^2}h(x)\,dx\right)=$$

$$=\frac{h(a+0)+h(a-0)}{2}=h(a) \qquad [26]$$

Esto es casi evidente, pues el núcleo que aparece en (26) se convierte, con el cambio de variable

$$a\sqrt{\frac{1+r^2}{2}} - x\sqrt{\frac{2r^2}{1+r^2}} = a-u \;, \qquad [27]$$

en el siguiente

$$G^*(a,u,r) = \frac{2r}{1+r^2}\,\frac{1}{\sqrt{\frac{2r^2}{1+r^2}}}\,\frac{1}{\sqrt{\pi(1-r^2)}}\,e^{-\frac{1}{1-r^2}(a-u)^2} \;, \qquad [28]$$

que no es otro que el núcleo de la integral singular de Weierstrass, ('') a menos del factor, que tiende a 1:

$$\frac{2r}{1+r^2}\,\frac{1}{\sqrt{\frac{2r^2}{1+r^2}}}$$

Por lo tanto, se verifica:

$$\lim_{r\to 1}\int_{-\infty}^{\infty} G^*(a,u,r)\,h(u)\,du = \frac{h(a+0)+h(a-0)}{2} = h(a) \;, \qquad [29]$$

y por lo tanto, tambien se verifica la fórmula 26.

Volvamos a la fórmula 24), que puede escribirse, con las notacio-

---

('') VER Lebesgue, (1), p. 90 , 17
Hobson, (1) vol II, página 460.

nes (25);

$$\lim_{r\to 1}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_0^a K(x,r,y)\,dy\right]dh(x) = \lim_{r\to 1}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\frac{1-r^2}{1+r^2}x^2}\,\mathcal{G}(x,r,a)\,h(x)\,dx -$$

$$-\lim_{r\to 1}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\frac{1-r^2}{1+r^2}x^2}\,\mathcal{G}(r,x,0)\,h(x)\,dx \qquad [30]$$

Investiguemos sobre la base de lo que antecede, el primero de estos límites. Como, en virtud de la equivalencia de nuestro núcleo con el núcleo de Weierstrass, se verifica

$$\lim_{r\to 1}\int_{a+\delta}^{\infty}\mathcal{G}(x,r,a)\,dx < \varepsilon \,,$$

$$[31]$$

$$\lim_{r\to 1}\int_{-\infty}^{a-\delta}\mathcal{G}(x,r,a)\,dx < \varepsilon \,.$$

también se verificará, teniendo en cuenta que

$$e^{-\frac{1}{2}\frac{1-r^2}{1+r^2}x^2} \leq 1 \,, \qquad [32]$$

$$\lim_{r\to 1}\int_{-\infty}^{a-\delta} e^{-\frac{1}{2}\frac{1-r^2}{1+r^2}x^2} g(x,r,a)\,h(x)\,dx = 0\;;$$

$$[33]$$

$$\lim_{r\to 1}\int_{a+\delta}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\frac{1-r^2}{1+r^2}x^2} g(x,r,a)\,h(x)\,dx = 0\,.$$

Nos queda, pues, el límite

$$\lim_{r\to 1}\int_{a-\delta}^{a+\delta} e^{-\frac{1}{2}\frac{1-r^2}{1+r^2}x^2} g(x,r,a)\,h(x)\,dx\,. \qquad [34]$$

Pero, como se verifica

$$\lim_{r\to 1}\int_{a-\delta}^{a+\delta} g(x,r,a)\,h(x)\,dx = h(a)\,, \qquad [35]$$

y la función

$$e^{-\frac{1}{2}\frac{1-r^2}{1+r^2}x^2}\cdot h(x)$$

tiende uniformemente hacia la función $h(x)$ en todo el intervalo $(a-\delta,\ a+\delta)$, también se verifica, en virtud de un conocido teorema de Lebesgue ('')

$$\lim_{r\to 1}\int_{a-\delta}^{a+\delta} e^{-\frac{1}{2}\frac{1-r^2}{1+r^2}x^2}\, G(x,r,a)\, h(x)\, dx = h(a) \qquad [36]$$

Por idéntica razon, para el punto $a = 0$

$$\lim_{r\to 1}\int_{a-\delta}^{a+\delta} e^{-\frac{1}{2}\frac{1-r^2}{1+r^2}}\, G(x,r,0)\, h(x)\, dx = h(0). \qquad [37]$$

Con las fórmulas 36, 37, el teorema queda finalmente demostrado.

El teorema que acabamos de demostrar admite el siguiente corolario importante:

Teorema XXVII

[illegible] Dos funciones de repartición cuyos coeficientes de Hermite-Stieltjes son iguales para todo n, son iguales.

En efecto, si se verifica, para dos funciones de reparti-

('') Lebesgue, 1, pag. 73.

sión

$h(x), \bar{h}(x)$:

$$\tau_n = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_n(x)\, dh(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_n(x)\, d\bar{h}(x) = \tau_n'.$$

$$r = 0, 1, 2, 3, \ldots\ldots$$

también se verificará

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n \varphi_n(x)\, x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \bar{C}_n \varphi_n(x)\, x^n$$

donde $\varphi_n(x)$ es la enésima función de Hermite, definida en la página (41). Se verificará, pues, teniendo en cuenta la fórmula de Watson, consignada en la página (64)

$$\frac{1}{\sqrt{\pi(1-r^2)}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[\frac{x^2-t^2}{2} - \frac{(x-rt)^2}{1-r^2}\right] d\,h(x) =$$

~~Integrando la igualdad anterior entre [illegible] obtenemos~~

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi(1-r^2)}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[\frac{x^2-t^2}{2} - \frac{(x-rt)^2}{1-r^2}\right] d\,\bar{h}(x)$$

Integrando la igualdad anterior entre cero y a, obtenemos:

$$\int_0 dt \int_{-\infty} K(r,x,t)\, d\, h(x) = \int_0^{a} dt \int_{-\infty}^{\infty} K(r,x,t)\, d\bar{h}(X);$$

y, tomando límites para $r \to 1$, obtenemos, de acuerdo con nuestro teorema 26

$$\bar{h}(a) - \bar{h}(0) = h(a) - h(0)$$

para todo a, lo cual implica que las funciones $h(x)$, $\bar{h}(X)$ difieren sólo en una constante; pero, como $h(\infty) = \bar{h}(\infty) = 1$, resulta, para $a = \infty$,

$$0 = \bar{h}(0) - h(0).$$

Luego la constante es nula, y por lo tanto

$$h(x) \equiv \bar{h}(x)$$

Hemos demostrado, pues, el teorema de unicidad para las series de Hermite-Stieltjes.

UN NUEVO TEOREMA LIMITE

Como aplicación del teorema anterior, demostraremos, como último resultado de nuestro trabajo, el siguiente

TEOREMA 28

Condición necesaria y suficiente para que una sucesión de funciones de repartición $\left\{f_n(x)\right\}$, tienda hacia una función de repartición $f(x)$,es que se verifique

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\psi_r(x)\,d\,f_n(x)=\int_{-\infty}^{\infty}\psi_r(x)\,d\,f(x)$$

$$r=0,1,2\ldots\ldots$$

donde $\psi_r(x)$ es la <u>función</u> de Hermite de grado , definida por nuestra fórmula (2) de página (62)

La condición es necesaria. En efecto, como las funciones de Hermite satisfacen a la acotación (°).

$$|\;\psi_r(x)\;|<K=1,084635\cdots\cdots$$

podrá elegirse $|a|$ suficientemente grande para que se verifique

$$\left|\int_{a}^{\infty}\psi_r(x)\,d\,f_n(x)-\int_{a}^{\infty}\psi_r(x)\,d\,f(x)\right|<\varepsilon,$$

$$\left|\int_{-\infty}^{-a}\psi_r(x)\,d\,f_n(x)-\int_{-\infty}^{-a}\psi_r(x)\,d\,f(x)\right|<\varepsilon$$

(°) Ver Vitali-Sansone, 1,pagina 204

verificándose, además

$$\lim_{n\to\infty} f_n(a) = f(a),$$

$$\lim_{n\to\infty} f_n(-a) = f(-a)$$ nuestra aserción estará, pues, demostrada, si logramos mostrar que

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-a}^{a}\psi_k(x)\,df_n(x)=\int_{-a}^{a}\psi_k(x)\,df(x);$$

lo cual se verifica, en virtud del tantas veces utilizado teorema de Helly, para intervalo finito.

La condición es suficiente. Supongamos, en efecto, que se cumpla, y exista un punto de continuidad S de $f(t)$ donde $f_n(S)$ no tienda a $f(S)$. Extraigamos de $f_n(t)$ una sucesión parcial $f_j(t)$, tal que

$$\lim_{j\to\infty} f_j(S) = A \neq f(S)$$

De la sucesion $\{f_j(t)\}$ de funciones monótonas, uniformemente acotadas, podemos extraer una sucesion parcial $\{f_K(t)\}$ tal que

$$\lim_{K\to\infty} f_K(t) = \bar{f}(t)$$

en todo punto

de continuidad de $\bar{f}(t)$, siendo $\bar{f}(t)$ monótona, no decreciente.

Probaremos que se verifica

$$\lim_{K\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\psi_r(t)\,d f_K(t)=\int_{-\infty}^{\infty}\psi_r(t)\,d\bar{f}(t).$$

En efecto:

$$\left|\int_{-\infty}^{\infty}\psi_r(t)\,d f_K(t)-\int_{-\infty}^{\infty}\psi_r(t)\,d\bar{f}(t)\right| =$$

$$=\left|\int_{-\infty}^{-a}\psi_r\,d f_K+\int_{-a}^{a}\psi_r\,d f_K+\int_{a}^{\infty}\psi_r\,d f_K-\int_{-\infty}^{-a}\psi_r\,d\bar{f}\right.$$

$$\left.-\int_{-a}^{a}\psi_r\,d\bar{f}-\int_{a}^{\infty}\psi_r\,d\bar{f}\right|\leq$$

$$\leq\left|\int_{-\infty}^{-a}\psi_r\,d f_K-\int_{-\infty}^{-a}\psi_r\,d\bar{f}\right|+$$

$$+\left|\int_{-a}^{a}\psi_r\,d f_K-\int_{-a}^{a}\psi_r\,d\bar{f}\right|+$$

$$+\left|\int_{a}^{\infty}\psi_r\,d f_K-\int_{a}^{\infty}\psi_r\,d\bar{f}\right| \qquad [1]$$

Elijamos $|a|$ de manera que se verifique

$$\lim_{K\to\infty} f_K(a) = \bar{f}(a),$$

$$\lim_{K\to\infty} f_K(-a) = \bar{f}(-a).$$

y suficientemente grande para que

$$|\Psi_r(x)| < \varepsilon, \quad \text{para } |x| \geq |a|;$$

se verificará entonces:

$$\left| \int_{-\infty}^{-a} \Psi_r(x)\, df_K(x) - \int_{-\infty}^{-a} \Psi_r(x)\, d\bar{f}(x) \right| \leq 2\varepsilon$$

$$\left| \int_{a}^{\infty} \Psi_r(x)\, df_K(x) - \int_{a}^{\infty} \Psi_r(x)\, d\bar{f}(x) \right| \leq 2\varepsilon \quad [2]$$

Nos queda por acotar la expresión

$$\left| \int_{-a}^{a} \Psi_r(x)\, df_K(x) - \int_{-a}^{a} \Psi_r(x)\, d\bar{f}(x) \right|.$$

Pero, en esta expresión $|a|$ es junto, y fijo; y la sucesión $\{f_K(x)\}$ cumple las cóndiciones

$$f_K(-a) \to \bar{f}(-a), \quad f_K(a) \to \bar{f}(a),$$

$$(a) \lim_{K \to \infty} f_K(x) = \bar{f}(x)$$

para todo punto de continuidad de $\bar{f}(x)$ interior al intervalo $(-a, +a)$; se cumplen por lo tanto, las condiciones del teorema de Helly; tantas veces utilizado en este trabajo, y por lo tanto, puede elegirse K suficientemente grande para que se verifique

$$\left| \int_{-a}^{a} \Psi_r(x)\, d f_K(x) - \int_{-a}^{a} \Psi_r(x)\, d\bar{f}(x) \right| < \varepsilon,$$

para $K > K(\varepsilon)$ [3]

Teniendo en cuenta (1), (2), y (3), resulta

$$\lim_{K \to \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Psi_r(x)\, d f_K(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi_r(x)\, d\bar{f}(x), \quad [4]$$

como afirmamos en la página (99).

Pero, por otra parte, como $\{f_K(x)\}$ es sucesión parcial de $\{f_n(x)\}$ se verifica tambien

$$\lim_{K\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\psi_r(x)\,d\,f_K(x) = \qquad [5]$$

$$= \lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\psi_r(x)\,d\,f_n(x) = \int_{-\infty}^{\infty}\psi_r(x)\,d\,f(x);$$

por lo tanto, teniendo en cuenta (4) y (5)

$$\int_{-\infty}^{\infty}\psi_r(x)\,d\,f(x) = \int_{-\infty}^{\infty}\psi_r(x)\,d\,\bar{f}(x)$$

Es decir que las funciones $f(x)$, $\bar{f}(x)$ tienen iguales todos sus coeficientes de Hermite-Stieltjes; por lo tanto, de acuerdo con nuestro teorema de unicidad que hemos demostrado en la pag (96) estas funciones difieren cuando mas en una constante

$$f(x) - \bar{f}(x) = \text{constante} \qquad [6]$$

constante

Pero, como $\bar{f}(x)$, siendo función limite de funciones de repartición es $\geqslant 0$ y ≤ 1, se vé inmediatamente que esta constante es nula y se tiene

$$f(x) \equiv \bar{f}(x) \qquad [7]$$

Por lo tanto, en virtud de la relación (a), de página (101), se verificará

$$\lim_{K\to\infty} f_K(x) = f(x) \qquad [7]$$

en todo punto de continuidad de $f(x)$ y en especial

$$\lim_{K\to\infty} f_K(s) = f(s) \qquad [8]$$

Pero, siendo $\{f_K(t)\}$ una sucesión parcial de $\{f_j(t)\}$, también se verifica:

$$\lim_{K\to\infty} f_K(s) = \lim_{j\to\infty} f_j(s) = A \neq f(s).$$

Pero esta fórmula es contradictoria con la anterior, y nuestro teorema Límite queda finalmente demostrado.

A. González Domínguez

Junio de 1929.

-BIBLIOGRAFIA-

BANACH E. Théorie des Opérations linéaires. Varsovia, 1932.

BOCHNER S. Verlesungen uber Fourierschen Integrale. Leipsig, 1932.

BRAY, H.E. Elementary Properties of the Stieltjes Integral.- Ann of Math. 20, (1918,1919), pp. 177,186.

CARATHÉODORY C. Uber die Fourierschen Koeffizienten monotoner Funktionen, Ber. preuss. Akad Wiss. 1920.

CAHRLIER C.V.L. Les aplications de la théorie des Probabilités aux Sciences Mathématiques, et aux Sciences Phisiques: Aplications de la théorie des probabilités à l'astronomie. Paris, 1930.

CRAMER H. Random Functions and Probability Distributions.- Cambridge, 1934.

FICHTENHOLZ G. Sur les opérations linéaires dans l'espace des fonctions continues.- Bull. Acad. Belgique, (22), 1936.

FRECHET-SHOAT A generalised statement of the Second Limit-Therem of the Theory of Probability. Annals of mathematics, 1932.

GLIVENKO V. Sul teorema limite della teoria delle funzioni caratteristiche.- Giorn. Ist. Ital. Attuari., 7.(1936), pp. 160-167.

GONZALEZ DOMINGUEZ, A.- Sur un théorème de M. Glivenko.- C.R., 203 (1936). pp. 577.

HAHN H. Uber die Darstellung gegebener Funktionen durch singuläre Integrale.- Denkschriften der Kais. Ak. der Wiss. 93, Wien, 1916.