Biblioteca Digital
F C E N - U B A

BIBLIOTECA CENTRAL LUIS F LELOIR
BIBLIOTECA CENTRAL LELOIR
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES UBA

Tesis de Posgrado

Singularidades de las funciones analíticas de una y de varias variables y el problema general de la prolongación analítica

Biggeri, Carlos

1936

Tesis presentada para obtener el grado de Doctor en Ciencias Matemáticas de la Universidad de Buenos Aires

Este documento forma parte de la colección de tesis doctorales y de maestría de la Biblioteca Central Dr. Luis Federico Leloir, disponible en digital.bl.fcen.uba.ar. Su utilización debe ser acompañada por la cita bibliográfica con reconocimiento de la fuente.

This document is part of the doctoral theses collection of the Central Library Dr. Luis Federico Leloir, available in digital.bl.fcen.uba.ar. It should be used accompanied by the corresponding citation acknowledging the source.

Cita tipo APA:
Biggeri, Carlos. (1936). Singularidades de las funciones analíticas de una y de varias variables y el problema general de la prolongación analítica. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad de Buenos Aires.
http://digital.bl.fcen.uba.ar/Download/Tesis/Tesis_0211_Biggeri.pdf

Cita tipo Chicago:
Biggeri, Carlos. "Singularidades de las funciones analíticas de una y de varias variables y el problema general de la prolongación analítica". Tesis de Doctor. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad de Buenos Aires. 1936.
http://digital.bl.fcen.uba.ar/Download/Tesis/Tesis_0211_Biggeri.pdf

EXACTAS UBA
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales

UBA
Universidad de Buenos Aires

Dirección: Biblioteca Central Dr. Luis F. Leloir, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Universidad de Buenos Aires.
Intendente Güiraldes 2160 - C1428EGA - Tel. (++54 +11) 4789-9293

Contacto: digital@bl.fcen.uba.ar

CARLOS BIGGERI

SINGULARIDADES DE LAS FUNCIONES ANALITICAS DE UNA Y DE VARIAS VARIABLES Y EL PROBLEMA GENERAL DE LA PROLONGACION ANALITICA.

Tesis 211

EX-LIBRIS BIBLIOTECA FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS FISICAS Y NATURALES UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES

T E S I S

Buenos Aires 1936.

I N D I C E:

	pág.
Prólogo.....	1
Parte Ia.: Singularidades de las funciones analíticas de una sola variable independiente.....	9
" IIa.: Singularidades de las funciones de varias variables complejas independientes.....	133
" IIIa.: Algoritmos de convergencia asociados a funciones de varias variables independientes y algoritmos de sumación asociados a series e integrales múltiples...	163
" IVa.: Sobre las integrales determinantes ordinarias y generalizadas.....	232
" Va.: Integrales simples numéricas y funcionales.....	300
" VIa.: Una teoría general sobre las series e integrales múltiples de Dirichlet y sus aplicaciones.....	326

Carlos Biggeri

EX-LIBRIS
BIBLIOTECA
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS FISICAS Y NATURALES
UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES

PROLOGO.

He aquí reunidas las investigaciones que, sobre diversos tópicos, hemos efectuado en estos últimos años.

El presente trabajo consta de varias partes y un apéndice.

La primera parte se refiere a las singularidades de las funciones analíticas de una variable definidas por series potenciales o integrales determinantes, situadas sobre la circunferencia de convergencia o sobre la recta de convergencia, respectivamente.

Damos en ella un criterio que constituye una condición necesaria y suficiente para que un punto tomado sobre la circunferencia de convergencia de una serie o integral potencial o sobre la recta de convergencia condicional de una serie o integral de Dirichlet (en particular de una integral determinante ordinaria o de Laplace) sea regular o singular para la función analítica que define dicha serie o dicha integral.

Varios geómetras han dado criterios de tales categorías.

En efecto: Hadamard("Essai sur l' étude des fonctions données par leur développment de Taylor"; Journal de Mathématiques, 4 série, 1892); Fabry ("Sur les points singuliers d' une fonction donnée par son développement en série et sur impossibilité du prolongement analytique dans les cas très généraux" Annales scientifiques de l' Ecole Normale supérieures, 3 série, t.(3) y Pringsheim ("Ueber einige Funktionenth . Anwendungen der Euler. Reinent.; Sitzungs. der Kgl. Bayr. AK.(1912) han demostrado que: Dada la serie potencial:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n . z^n$$

cuyo radio, R, de convergencia, es igual a la unidad, es condición necesaria y suficiente para que el punto z, con $|z|=1$ sea singular para la función $f(z)$ definida por dicha serie, que se tenga:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\left|\sum_{\frac{n}{3}\leq\nu\leq\frac{2}{3}n} C_n^{\nu} . a_\nu . z^\nu\right|} = 2$$

donde es:

$$C_n = -\frac{1}{2\pi} . \int_{-\infty}^{+\infty} f(z) . z^{-n} . \varphi^{-2} . d\varphi$$

y:

$$\varphi = Arg. z$$

evidentemente. la hipótesis R=1 no restringe la generalidad.

Ahora bien, la ventaja de nuestro criterio reside en que: en él no intervienen integrales entre límites infinitos ni sumatorios entre límites infinitos, sino sumas o integrales entre límites finitos (aunque variables y contienen ciertos parámetros que pueden variar en ciertos intervalos, lo que, en la práctica, puede simplificar notablemente los cálculos, mediante una elección adecuada de los valores particulares de dichos parámetros . Desde un punto de vista geométrico, Rey Pastor ha dado en "Esquema de una teoría geométrica de las singularidades de las funciones analíticas" publicado en el Boletín del Seminario Matemático Argentino, condiciones necesarias y suficientes para que un punto de la circunferencia de convergencia de una seriepotencial sea singular para la función definida por dicha serie, a saber:

Sea la serie de potencias en z^{-1} :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{z^{n+1}}$$

convergente en el exterior del círculo de centro en el origen, z=o y de radio R=o. La función analítica f(z) definida por dicha serie, posee sus puntos singulares en el contorno y en el interior del círculo $|z|\leq R$;

y además f(z) es expresable en forma de integral determinante:

$$f(z) = \int_0^\infty e^{-tz} \cdot \varphi(t) \cdot dt$$

donde:

$$\varphi(t) = \sum_0^\infty a_n \cdot \frac{t^n}{n!}$$

Si es φ (t)(función generatriz) función entera a saber:

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{\frac{|a_n|}{n!}} = 0$$

la abscisa α de convergencia de la anterior integral determinante es:

$$\alpha = \overline{\lim_{t \to \infty}} \frac{\log|\varphi(t)|}{t}$$

(por lo tanto en dicha integral, las abscisas de convergencia: condicional absoluta y uniforme, coinciden).

Tomemos la función :

$$h(\omega) \equiv \overline{\lim_{t \to \infty}} \frac{\log|\varphi(t.e^{\omega i})|}{t}.$$

Luego: la condición necesaria y suficiente para que el punto z = A de la circunferencia de convergencia sea singular es que verifique:

$$h(\omega) = R$$

es decir:

$$\overline{\lim_{t \to \infty}} \frac{\log|\varphi(t)|}{t} = \overline{\lim_{n \to \infty}} \sqrt[n]{|a_n|}.$$ »

Pero este criterio tan elegante y fecundo vale con una hipótesis restrictiva, esto es, cuando la función generatriz de la integral de Laplace con la cual se puede representar la función analítica dada, sea una función analítica entera.

Un colorario interesantísimo del criterio de Rey Pastor y que a su vez, aunque enunciado en forma particular, puede tomarse como criterio fundamental general es el siguiente:

« Es condición necesaria y suficiente para que el punto −1 sea singular para f(z), definida por una serie de potencias de radio 1, que se verifique:

$$\overline{\lim_{n \to \infty}} \sqrt[n]{|\Delta^n a_0|} = 2.$$ »

Este teorema admite un análogo para las integrales determinantes, sin ninguna hipótesis restrictiva, (salvo la derivabilidad de la función generatriz), a saber:

Sea $f(z)$ función analítica definida por la integral determinante:

$$\int_0^\infty a(t).e^{-tz}.dt$$

es condición necesaria y suficiente para que el punto en el infinito del plano $z=x+iy$ sea singular para $f(z)$ que se verifique:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|D^n a(0)|} = \rho^{>}.$$

Con nuestro criterio se demuestran inmediatamente todos los teoremas ya clásicos sobre las singularidades situadas sobre la circunferencia de convergencia, como ser: los teoremas de Vivanti-Borel-Pringsheim, Bienaymé, Tauji, Szász, Lössier, Leau, Faber, Vigert, Le Roy, Lindelöf, Carlson, V. Bernstein, Fabry, Boula, Hadamard, Borel, Pólya, Mandelbrojt, Lunitz-Pincherle, Ostrowski, etc, etc..

Y no solamente se prueban, como colorarios, estos teoremas, sino que se obtienen teoremas análogos, convenientemente transformados, para las funciones definidas por integrales determinantes y aún por series de Dirichlet y por integrales determinantes generalizadas (que llamaremos integrales de Dirichlet y que, a veces, diremos brevemente, integrales D.).

Se obtienen algunos teoremas nuevos sobre singularidades de funciones definidas por integrales determinantes y que no tienen su correlativo para las series potenciales.

Los resultados de Weierstrass, Fredholm, Hadamard, Borel, Fabry, Kraitzoff, Subbotin, Pólya, Pringsheim, Fatou-Pólya, Ostrowski, Mandelbrojt, Tauji, Obrechkoff, Schimizu, Izumi, Narumi, Eisenstein, von Koch, Subbotin, Carlson, Hausdorf, etc, sobre la series lagunares son extendibles, convenientemente transformados, mediante nuestro criterio, a las integrales determinantes.

Ahora bién, la importancia que le atribuimos a nuestro criterio, no la hacemos residir precisamente en las mencionadas generalizaciones sino en otra otra, que es sin duda alguna, quizás, la más importante. En efecto, nuestro criterio necesario y suficiente para reconocer si un punto situa-

do en la circunferencia de convergencia o en la recta de convergencia de una serie potencial o integral determinada, respectivamente, es regular o singular para $f(z)$, es de carácter arbitrario, es decir, aparece en el límite superior de oscilación de una cierta suma o integral finita y bien conocido cuando la fórmula, que constituye el criterio se aplica a una función analítica de varias variables complejas independientes; luego puede tomarse dicho criterio así generalizado como definición de regularidad o singularidad de un punto del hiperespacio para una función de varias variables.

Logramos de este modo, resolver un problema capital en la teoría, que está en la base de las funciones de varias variables, a saber: definir cuando un punto es regular o singular para una función de varias variables. Esto es lo que tratamos en la segunda de nuestro trabajo. No solamente logramos tal establecer sino que también con ésta, se pueden demostrar la mayor parte de los teoremas clásicos sobre las singularidades de las funciones de unavariable para las funciones de varias variables, obteniendo de paso algunos teoremas nuevos.

Hace está, que para los puntos exteriores a los recintos asociados de convergencia condicional de una serie múltiple o de una integral múltiple pueden definir la definición de regularidad o singularidad de un punto de la noción de prolongación analítica, conocida correctamente para el caso de varias variables.

La noción de serie o integral múltiple convergente que adoptaremos en el presente trabajo es la convergencia, que llamaremos, acotada, y que es mucho más general que las definiciones dadas en los tratados clásicos de Goursat, Picard, Jordan, Pringsheim, etc.

Como lo hacemos notar en la segunda parte del presente trabajo, la definición general de Frigstein no la tomamos en cuenta precisamente a causa de su excesiva generalidad. En efecto, tomando tal definición no se conservan las propiedades topológicas del campo de convergencia de las series o integrales simples potenciales; en cambio, con nuestra definición de convergencia los conjuntos asociados en los cuales converge un algoritmo múltiple(serie, integral, producto infinito, etc.) son siempre conjuntos superficiales simplemente conexos, esto es, para una serie múltiple de orden n se tienen n círculos asociados, para una integral múltiple determinante generalizada de orden n se tienen n semiplanos asociados, etc.etc.

Las clásicas definiciones antes mencionadas coinciden, en cierto modo, con nuestra definición de convergencia absoluta.

Hardy, Bromwich, toman la definición, llamada por ellos de convergencia regular, es más general que la de Goursat, Picard, pero menos general que la nuestra. Robinson, Adams, en "Transations of the American Matematical Society" adoptan nuestra definición; pero, de paso, diremos que del trabajo de Adams no se infiere la existencia de dos semiplanos asociados para las series dobles de Dirichlet, como dicho autor dice en su memoria.

El esquema geométrico, que tomamos, para representar el campo de variabilidad de un sistema de n variables independientes es el clásico, a saber, n planos-esféricos.

La tercera parte de este trabajo se refiere a una teoría general de los algoritmos múltiples de convergencia asociados a funciones de varias variables independientes y algoritmos múltiples de sumación asociados a series e integrales múltiples divergentes.

Sea una función de varias variables reales o complejas independientes

que no sea convergente, cuando las variables tienden hacia un punto propio o impropio, se plantea el problema de asignarle un valor límite el cual goce de la mayor parte de las propiedades aritméticas y funcionales de los límites ordinarios, cuando éstos existen.

Inspirándonos en la teoría ya completamente desarrollada de las series e integrales simples divergentes sumables por algún procedimiento, damos un método universal generador de convergencia originándose una teoría de los algoritmos lineales múltiples de convergencia y desumación para funciones de cualquier número de variables, sean reales o complejas.

Definimos el límite generalizado de una función mediante el límite ordinario de una cierta función, llamada generatriz, cuando un cierto parámetro tiende a un punto propio o impropio. La función generatriz se forma mediante la función dada y ciertos núcleos, los cuales contienen dichos parámetros y éstos pueden variar en conjuntos muy generales, del espacio de cualquier número de dimensiones, ser reales o complejos, continuos o discontinuos, tender a un punto propio o impropio. Damos las condiciones necesarias y suficientes a las cuales debe satisfacer el núcleo para que el límite generalizado coincida con el límite ordinario, cuando éste exista. Según cual sea el núcleo, se obtiene un algoritmo generador de convergencia y es así como enunciamos las generalizaciones de los algoritmos de Abel, Borel, Euler, Le Roy, Lambert, Cesàro, etc., para las sucesiones dobles ya Robinson, antes citado, estudió escuetamente el problema, imponiendo a los factores de convergencia y a las sucesiones, ciertas condiciones restrictivas. De la teoría desarrollada para las funciones deducimos otra, que por otra parte se puede edificar independientemente, por la cual se generaliza la noción de suma de una integral múltiple impropia, esto es, logramos resolver el problema

de la sumación de integrales múltiples no convergentes. Después de desarrollar estas dos teorías indicamos diversas generalizaciones. Nos hemos limitado en el desarrollo del texto al caso de funciones de dos variables y al caso de integrales dobles; por razones de comodidad en las notaciones, pues las entidades, definiciones, propiedades, etc. se definen mutatis mutandis al caso de n variables independientes. Nos desistimos de incorporar al texto muchas de las diversas y lejanas aplicaciones que de estas se puede hacer a múltiples ramas del análisis. Entre otras aplicaciones se puede citar, por su interesante y escasa, una teoría de las integrales singulares múltiples, análoga a la debida a Lebesgue para el caso de una variable. Aplicando la noción de límite generalizado múltiples a las series dobles e integrales dobles generales e introduciendo la idea de sumación [illegible] la convergencia [illegible], se resuelve el problema de [illegible] de una función de varias variables complejas independientes, abarcando de paso, [illegible] de prolongación analítica, a los cuales llamaremos algoritmos integrales. También los desarrollos en serie de polinomios de las funciones analíticas de varias variables, se pueden obtener ampliando las teorías [illegible] en la tercera parte del presente trabajo. No desarrollamos a dos columnas la tercera parte, poniendo en una la teoría referente a las series y en otra la teoría correspondiente a las integrales, como se pudo haber hecho para no alargar demasiado el texto. También excluimos del presente volumen la generalización de los resultados de Hardy Littlewood y de Knopp referentes a los factores de convergencia y de sumación sobre caminos complejos. También cabe hacer otro tipo de aplicaciones de la teoría de los factores de convergencia y de sumación, aunque de carácter más modesto, como ser extender a las series o integrales múltiples los criterios que demostramos

en el apéndice para el reconocimiento de divergencia o convergencia de integrales simples numéricas y muchas otras propiedades de las series e integrales simples numéricas, como por el producto de series e integrales (teoremas de Cauchy, Mertens, Abel, Cesáro, Frobenius), etc. etc.

Es interesante la íntima vinculación que se puede establecer entre la noción de punto singular y de punto regular, dada en la segunda parte, y la noción de convergencia generalizada de una serie o integral múltiple potencial, dada en la tercera parte.

La cuarta parte se refiere a las integrales de Dirichlet, es decir, a las integrales determinantes generalizadas (que, a veces por razones de comodidad llamaremos integrales D.) Aunque podíamos habernos referido simplemente a las integrales ordinarias (Laplace-Abel), puesto que en todo caso utilizando integrales de Stieltjes, las integrales determinantes generalizadas se reducen a integrales ordinarias, no lo hemos hecho expresamente porque las demostraciones de los teoremas enunciados que exponemos son idénticas en ambos casos, salvo un simple cambio de notaciones.

Damos en esta parte diversas fórmulas para el cálculo de las tres abscisas de convergencia que posee una integral de Dirichlet, a saber: la condicional, la absoluta y la uniforme, obteniendo fórmulas mucho más cómodas y generales que la clásica de Landau-Pincherle, para el cálculo de las abscisas de convergencia condicional. Claro está, que el cálculo de la abscisa de convergencia absoluta no implica, en lo más mínimo, ninguna dificultad, una vez obtenida la fórmula para la de convergencia condicional; pero el cálculo de la abscisa de convergencia uniforme exige un estudio distinto (el que por otra parte es en general, más complicado). Hemos demostrados varios teoremas sobre los puntos singulares de las funciones definidas por tales integrales, algunos correlativos de teoremas ya establecidos para

las series potenciales y otros completamente nuevos y que no tienen su análogo en la teoría de las funciones analíticas definidas por series de Dirichlet(o en particular, por series potenciales). Introducimos la noción de orden sobre una recta, sobre un semiplano, sobre una faja,etc.y demostramos teoremas análogos a los de Lidelof, y otros diversos teoremas. Diversos teoremas tauberianos hemos logrado demostrar para tales integrales.

La quinta parte se refiere a una serie extensa de teoremas sobre integrales numéricas y funcionales.

La sexta parte estudia las series e integrales múltiples de Dirichlet. Desarrollamos en ella, a dos columnas, lo que unifica ambas teorías,la teoría general de las series e integrales múltipes de Dirichlet, obteniendo los campos asociados de convergencia, diversas y variadas propiedades sobre el orden de crecimiento de las secciones de tales series e integrales numerosos teoremas sobre las singularidades de las funciones analíticas que ellas definen, sobre los ceros de dichas funciones, obteniendo las fórmulas de inversión correspondientes,etc. etc...

Finalmente en un apéndice insertamos otros resultados sobre diversos tópicos: criterios de convergencia para integrales numéricas, teoremas sobre integrales dobles numéricas, singularidades de las funciones analíticas definidas por integrales de Laplace, inversión de la integral general de Dirichlet, propiedades del orden de crecimiento de las secciones de una integral generalizada, etc. etc...

Extrañará, quizás, las pocas citas bibliográficas durante el curso del presente trabajo, pero, hemos adoptado tal temperamento, porque todos los resultados que aquí exponemos son completamente originales, con la única

excepción de un teorema de Lindelöf, que consignamos en la cuarta parte. Y es para no tener que mencionar, a cada paso, cual es la parte personal que hemos decidido no insertar aquellos resultados que constituyen simplemente un avance milimétrico respecto de trabajos ya clásicos. Queda para publicaciones posteriores la solución de todos los problemas planteados durante el curso del presente trabajo.

Carlos Biggeri

Carlos Biggeri.

PARTE PRIMERA.

SINGULARIDADES DE LAS FUNCIONES ANALÍTICAS DE UNA SOLA VARIABLE INDEPENDIENTE.

Carlos Biggeri.

SOBRE LOS PUNTOS SINGULARES DE LAS FUNCIONES ANALÍTICAS DEFINIDAS POR INTEGRALES DETERMINANTES ORDINARIAS Y GENERALIZADAS, SITUADOS SOBRE SUS RECTAS DE CONVERGENCIA CONDICIONAL Y SOBRE LOS PUNTOS SINGULARES DE LAS FUNCIONES ANALÍTICAS DEFINIDAS POR SERIES POTENCIALES, SITUADOS SOBRE SUS CIRCUNFERENCIAS DE CONVERGENCIA. CORRELACION ENTRE AMBAS TEORIAS.

Una condición necesaria y suficiente para que un punto, tomado sobre la recta de convergencia condicional de una integral determinante, ordinaria o generalizada, sea regular o singular para la función analítica definida por dicha integral determinante.

Comencemos por un caso particular al cual reduciremos después todos los otros casos, a saber: cuál es una condición necesaria y suficiente para qué el origen, $s=0$, sea un punto singular o regular para la función definida por una integral cuya abscisa de convergencia condicional es igual a cero?

Sea, la integral de Dirichlet:

$$(1) \qquad \int_0^\infty a(t).e^{-\lambda(t).z}.dt$$

cuya abscisa de convergencia condicional la suponemos igual a cero. (Si es: $\lambda(t)=t$, se tiene la integral determinante ordinaria:

$$\int_0^\infty a(t).e^{-tz}.dt.),$$

Luego en el semiplano: $R(z)>0$, la integral (1) define una función analítica $f(z)$; de modo que: $f(z)=\int_0^\infty a(t).e^{-\lambda(t).z}.dt.$

Obtengamos una condición necesaria y suficiente para que el origen, $z=0$, sea regular o singular para $f(z)$.

Sea σ un número positivo arbitrario pero al que supondremos fijo; luego la función $f(z)$ es desarrollable en series de potencias de $z-\sigma$, desarrollo válido en un círculo de centro $z=\sigma$, y cuyo radio R es por lo menos igual a σ; es decir, se tiene:

$$f(z)=\sum_{n=0}^{n=\infty}\frac{f^{(n)}(\sigma)}{n!}\cdot(z-\sigma)^n.$$

El radio, R, de convergencia de esta serie es:

$$R=\frac{1}{\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{\left|\frac{f^{(n)}(\sigma)}{n!}\right|}}$$

y como dijimos es:

$$R\geq\sigma.$$

Si es: $R=\sigma$ el punto $z=0$ es singular para $f(z)$; y si es: $R>\sigma$ el punto $z=0$ es regular para $f(z)$.

También puede escribirse que: $\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{\left|\frac{f^{(n)}(\sigma)}{n!}\right|}=\frac{1}{R}.$ (2)

Recordemos que la derivada $f^{(n)}(\sigma)$ se calcula por las fórmulas:

$$(3)\qquad f^{(n)}(\sigma)=(-1)^n\cdot\int_0^\infty a(t)\cdot\lambda^n(t)\cdot e^{-\lambda(t)\cdot\sigma}\,dt$$

De (2), (3) y de lo dicho más arriba se tiene que; si es:

$$\overline{\lim}\sqrt[n]{\frac{1}{n!}\left|\int_0^\infty a(t)\cdot\lambda^n(t)\cdot e^{-\lambda(t)\cdot\sigma}\cdot dt\right|}=\frac{1}{\sigma}\qquad(4)$$

el punto $z=0$ es singular para $f(z)$; y si es:

$$\overline{\lim}\sqrt[n]{\frac{1}{n!}\left|\int_0^\infty a(t)\,\lambda^n(t)\,e^{-\lambda(t)\cdot\sigma}\cdot dt\right|}<\frac{1}{\sigma}\qquad(5)$$

el punto $z=0$ es regular para $f(z)$.

Sea ω un número positivo arbitrario, pero menor que la unidad; y consideremos la expresión:

$$\rho = \frac{n}{\sigma}\cdot(1-\omega),$$

donde es:

$$n > \frac{\sigma\cdot\lambda(0)}{1-\omega}. \qquad (6)$$

Fijado n de modo que satisfaga a la condición (6), como es:

$$\lim_{t\to+\infty}\lambda(t)=+\infty$$

a partir de un valor de t suficientemente grande, que llamaremos $t_0 \equiv t_0(n,\sigma,\omega)$ ($t_0 \equiv$ fijo), se tiene:

(7) $$\lambda(t) > \frac{n}{\sigma}(1-\omega)$$

y como según (6) es:

(8) $$\lambda(0) < \frac{n}{\sigma}(1-\omega)$$

se deduce; de (7) y (8) y teniendo en cuenta la continuidad de $\lambda(t)$ en todo el semieje real y positivo ($0 \leq t < +\infty$) (ya que, por hipótesis, $\lambda(t)$ es monótona creciente y admite función inversa) que existe un valor de t t, al que llamaremos τ, tal que es:

(9) $$\lambda(\tau) = \frac{n}{\sigma}(1-\omega),$$

de modo que para $t < \tau$ es:

$$\lambda(t) < \lambda(\tau) = \frac{n}{\sigma}(1-\omega),$$

y para $t > \tau$ es:

$$\lambda(t) > \lambda(\tau) = \frac{n}{\sigma}(1-\omega).$$

Pongamos:

$$R(\tau) \equiv \int_0^{\tau} a(t)\cdot\lambda^n(t)\cdot e^{-\lambda(t)\cdot\sigma}\cdot dt$$

$$A(t) \equiv a(t)\cdot\lambda^n(t) \equiv \vartheta \int_0^{t} A(t)\cdot dt$$

$$B(t) \equiv e^{-\lambda(t)\cdot\sigma}$$

luego:

$$R(\tau) \equiv \int_0^{\tau} A(t).B(t).dt.$$

Transformemos esta última integral, integrando por partes:

$$R(\tau) = \int_0^{\tau} \left(B(t).d\int_0^t A(t).dt\right) = \left[B(t).\int_0^t A(t).dt\right]_0^{\tau} +$$

$$+\sigma\int_0^{\tau}\left(\int_0^t A(t).dt\right).e^{-\lambda(t).\sigma}.d\lambda(t)$$

$$\therefore R(\tau) = B(\tau)\int_0^{\tau} A(t).dt + \sigma\int_0^{\tau}\left(\int_0^t A(t).dt\right).e^{-\lambda(t).\sigma}.d\lambda(t)$$

$$\therefore (11)\ R(\tau) = -\int_0^{\tau}\left(\int_0^t a(t)\lambda'(t).dt\right).e^{-\lambda(t)\sigma} + e^{-\lambda(\tau)\sigma}\int_0^{\tau} a(t).\lambda'(t).dt$$

Ahora bien, el teorema de Cahen-Landau; (o mejor dicho: el teorema correlativo del de Cahen-Landau) sobre la abscisa de convergencia condicional de una integral de Dirichlet dice: si la expresión:

$$(12) \qquad \overline{\lim_{t\to+\infty}} \frac{\log\left|\int_0^t a(t)dt\right|}{\lambda(t)}$$

es positiva; la abscisa, C, de convergencia condicional de la integral (1) es:

$$C = \overline{\lim_{t\to+\infty}} \frac{\log\left|\int_0^t a(t).dt\right|}{\lambda(t)};$$

entonces como hemos supuesto, por hipótesis que es:

$$\underline{C = 0}$$

se tiene que: la expresión (12) o bien es igual a $-\infty$; o bien es finita pero negativa, pues si fuese igual a $+\infty$ o tuviera un valor finito y positivo la abscisa C sería positiva, contra la hipótesis.

Por consiguiente dado arbitrariamente un número positivo ε existe un $t_1 \equiv t_\varepsilon$ tal que para todo $t \geq t_1$ es:

$$\frac{\log\left|\int_0^t a(t).dt\right|}{\lambda(t)} < \varepsilon$$

o bien:

$$(13) \qquad \left|\int_0^t a(t)dt\right| < e^{\varepsilon.\lambda(t)}$$

Consideremos el extremo superior de todos los valores que la función:

$$\left|\int_0^t a(t).dt\right|$$

toma en él intervalo $(0,t_1)$ y llamémosle M, luego es M función de t_1 y por lo tanto de ε, esto es:

$$M \equiv M(\varepsilon) \geq 0;$$

de modo que para todo t del intervalo $(0,t_1)$ es : $\left|\int_0^t a(t).dt\right| \leq M(\varepsilon)$

y con mayor razón en $(0,t_1)$ se verifica:

$$(14) \qquad \left|\int_0^t a(t).dt\right| < M(\varepsilon) + e^{\varepsilon.\lambda(t)};$$

pero esta desigualdad también se verifica, según (13), para todo valor de t; y transformando la relación (14) se tiene que: para todo t del intervalo $(0 \leq t < t_1)$ se tiene que:

$$(15) \qquad \left|\int_0^t a(t)dt\right| < e^{\varepsilon.\lambda(t)}.\left[1+\frac{M(\varepsilon)}{e^{\varepsilon.\lambda(t)}}\right]$$

pero por ser:

$$\lambda(t) \geq \lambda(0)$$

llamando:

$$K(\varepsilon) \equiv 1+\frac{M(\varepsilon)}{e^{\varepsilon.\lambda(0)}}$$

según (15) se tiene que: para todo valor de t es:

$$(16) \qquad \left|\int_0^t a(t).dt\right| < K(\varepsilon).e^{\varepsilon.\lambda(t)}.$$

Con estas acotaciones obtenidas tratemos de mayorar la función R (τ).

A tal efecto tenemos:

$$\int_0^t a(t).\lambda^n(t).dt = \int_0^t\left(\lambda^n(t).d\int_0^t a(t)dt\right) =$$

$$= \lambda^n(t).\int_0^t a(t)dt - \int_0^t\left(\int_0^t a(t)dt\right).d\left(\lambda^n(t)\right)$$

y combinando esta última igualdad con la desigualdad (16) se tiene:

$$(17) \quad \left|\int_0^t a(t).\lambda^n(t)dt\right| < \lambda^n(t).K(\varepsilon).e^{\varepsilon.\lambda(t)} + K(\varepsilon).e^{\varepsilon.\lambda(t)}.\int_0^t\left|d\lambda^n(t)\right|.$$

Como $\lambda(t)$ es positiva y monótona creciente, también lo es: $\lambda^n(t)$ luego:

(18) $$d\lambda^n(t) > 0.$$

Luego de (17) y (18) se tiene que:

$$\left|\int_0^t a(t).\lambda^n(t).dt\right| < k(\varepsilon).e^{\varepsilon\lambda(t)}.\left[\lambda^n(t)+\int_0^t d(\lambda^n(t))\right]=$$

$$=k(\varepsilon).e^{\varepsilon\lambda(t)}.\left[\lambda^n(t)+\lambda^n(t)-\lambda^n(0)\right]\leq$$

(19) $$\leq 2.k(\varepsilon).\lambda^n(t).e^{\varepsilon\lambda(t)}.$$

De (11) y (19) se tiene:

$$|R(\tau)|\leq\int_0^\tau\left|\int_0^t a(t).\lambda^n(t).dt\right|.\left|de^{-\lambda(t)\sigma}\right|+e^{-\lambda(\tau)\sigma}.\left|\int_0^\tau a(t).\lambda^n(t)dt\right|$$

(20) $$|R(\tau)|<\int_0^\tau 2.k(\varepsilon).\lambda^n(t).e^{\varepsilon\lambda(t)}.\left|de^{-\lambda(t)\sigma}\right|+2e^{-\lambda(\tau)\sigma}.k(\varepsilon).\lambda^n(t).e^{\varepsilon.\lambda(t)};$$

pero:

$$de^{-\lambda(t)\sigma}=-e^{-\lambda(t)\sigma}.\sigma.d\lambda(t)$$

$\therefore$

(21) $$\left|de^{-\lambda(t)\sigma}\right|=\sigma.e^{-\lambda(t)\sigma}.d\lambda(t).$$

De (20) y (21) se deduce que:

(22) $$|R(\tau)|<2.k(\varepsilon).\lambda^n(\tau).e^{-(\sigma-\varepsilon).\lambda(\tau)}+2.k(\varepsilon).\sigma.\int_0^\tau\lambda^n(t).e^{-(\sigma-\varepsilon)\lambda(t)}.d\lambda(t)$$

Veamos ahora que la expresión:

(23) $$\lambda^n(t).e^{-(\sigma-\varepsilon).\lambda(t)}$$

es creciente en el intervalo $0\leq t\leq\tau$, para ello formemos su derivada:

$$\partial\left\{\lambda^n(t).e^{-(\sigma-\varepsilon)\lambda(t)}\right\}=n.\lambda^{n-1}(t).e^{-(\sigma-\varepsilon).\lambda(t)}.\partial\lambda(t)-$$

$$-\lambda^n(t).e^{-(\sigma-\varepsilon)\lambda(t)}.(\sigma-\varepsilon).\partial\lambda(t)=$$

$$=\lambda^{n-1}(t).e^{-(\sigma-\varepsilon).\lambda(t)}.\partial\lambda(t).\left[n-\lambda(t).(\sigma-\varepsilon)\right];$$

pero como en el intervalo $0\leq t\leq\tau$ es:

$$\lambda(t)\leq\lambda(\tau)=\frac{n}{\sigma}(1-\omega)<\frac{n}{\sigma}<\frac{n}{\sigma-\varepsilon}$$

se tiene:

$$\lambda(t)\cdot(\sigma-\varepsilon)<n$$

luego:

$$\vartheta\left\{\lambda^n(t).e^{-(\sigma-\varepsilon)\lambda(t)}\right\}>0$$

esto es, la función (23) es monótona creciente en el intervalo $0\leq t\leq\tau$, luego en (22) se tiene:

$$|R(\tau)|<2.K(\varepsilon).\lambda^n(\tau).e^{-(\sigma-\varepsilon).\lambda(\tau)}+2.K(\varepsilon).\sigma\int_0^\tau\lambda^n(\tau).e^{-(\sigma-\varepsilon).\lambda(\tau)}.d\lambda(t).$$

luego:

$$|R(\tau)|<2.K(\varepsilon).\lambda^n(\tau).e^{-(\sigma-\varepsilon).\lambda(\tau)}+2.K(\varepsilon).\sigma.\lambda^n(\tau).e^{-(\sigma-\varepsilon).\lambda(\tau)}.\int_0^\tau d\lambda(t).$$

luego:

$$|R(\tau)|<2.K(\varepsilon)\lambda^n(\tau).e^{-(\sigma-\varepsilon).\lambda(\tau)}+2.K(\varepsilon).\sigma.\lambda^n(\tau).e^{-(\sigma-\varepsilon).\lambda(\tau)}.(\lambda(\tau)-\lambda)$$

de donde:

$$(24)\quad |R(\tau)|<2.K(\varepsilon).\sigma.\lambda^{n+1}(\tau).e^{-(\sigma-\varepsilon)\lambda(\tau)}+2.K(\varepsilon).\lambda^n(\tau).e^{-(\sigma-\varepsilon)\lambda(\tau)};$$

si tomamos ahora n de modo que:

$$n>\frac{\sigma}{1-\omega}$$

se tiene:

$$1<\frac{n}{\sigma}(1-\omega)=\lambda(\tau)$$

según (24) es:

$$(25)\quad |R(\tau)|<2.K(\varepsilon).\sigma.\lambda^{n+1}(\tau).e^{-(\sigma-\varepsilon)\lambda(\tau)}+2.K(\varepsilon).\lambda^{n+1}(\tau).e^{-(\sigma-\varepsilon).\lambda(\tau)}$$

y como es: $\sigma<1$; según (25) se tiene:

$$|R(\tau)|<4K(\varepsilon).\lambda^{n+1}(\tau).e^{-(\sigma-\varepsilon).\lambda(\tau)}$$

sustituyendo en esta última desigualdad $\lambda(\tau)$ por su valor $\frac{n}{\sigma}(1-\omega)$, se tiene:

$$|R(\tau)| < 4.K(\varepsilon)\cdot\frac{n}{\sigma}(1-\omega)\cdot\left(\frac{n}{\sigma}\right)^{n}\cdot(1-\omega)^{n}\cdot e^{-\left(1-\frac{\varepsilon}{\sigma}\right)(1-\omega)\cdot n}$$

luego:

$$|R(\tau)| < 4.K(\varepsilon)\cdot\frac{n}{\sigma}(1-\omega)\cdot\left(\frac{n}{\sigma}\right)^{n}\cdot\left[(1-\omega)\cdot e^{-\left(1-\frac{\varepsilon}{\sigma}\right)(1-\omega)}\right]^{n}$$

luego:

$$|R(\tau)| < 4.K(\varepsilon)\cdot\frac{n}{\sigma}(1-\omega)\cdot\left(\frac{n}{\sigma}\right)^{n}\cdot\left[(1-\omega)\cdot e^{-\left(1-\frac{\varepsilon}{\sigma}\right)(1-\omega)}\right]^{n}$$

pero:

$$-\left(1-\frac{\varepsilon}{\sigma}\right)\cdot(1-\omega) = -1-\omega+\frac{\varepsilon}{\sigma}+\omega\cdot\frac{\varepsilon}{\sigma} = -\left(1-\frac{\varepsilon}{\sigma}\right)$$

luego de (26) y (27) se infiere que:

$$|R(\tau)| < 4.K(\varepsilon)\cdot\frac{n}{\sigma}(1-\omega)\cdot\left[(1-\omega)\cdot e^{\omega+\frac{\varepsilon}{\sigma}}\right]^{n}$$

o bien:

$$(28)\quad |R(\tau)| < 4.K(\varepsilon)\frac{n}{\sigma^{n+1}}\cdot n^{n}\cdot e^{-n}\cdot\left[(1-\omega)\cdot e^{\omega+\frac{\varepsilon}{\sigma}}\right]^{n}.$$

Ahora bien, recordemos que:

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\cdot n^{n}\cdot e^{-n}$$

luego:

$$\frac{n^{n}\cdot e^{-n}}{\sigma^{n}\cdot n!} \sim \frac{n^{n}\cdot e^{-n}}{\sigma\sqrt{2\pi n}\cdot n^{n}\cdot e^{-n}} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi n}} \longrightarrow 0$$

luego a partir de un valor de <u>n</u> (suficientemente grande) es:

$$(29)\qquad n^{n}\cdot e^{-n} < n!\,\sigma$$

Por lo tanto según (28) y (29) a partir de un valor fijo de <u>n</u> en adelante se tiene:

$$(30)\qquad |R(\tau)| < 4.K(\varepsilon)\cdot n\cdot\frac{n!}{\sigma^{n}}\cdot\left[(1-\omega)\cdot e^{\omega+\frac{\varepsilon}{\sigma}}\right]^{n}.$$

Ahora bien, por un razonamiento análogo al seguido para establecer la existencia de τ se prueba que existe un valor de t, al que llamaremos ρ, tal que

$$\lambda(\rho)=\frac{n}{\sigma}(1+\omega);$$

y pongamos:

$$S(\rho)=\int_{\rho}^{\infty} a(t)\cdot\lambda^{n}(t)\cdot e^{-\lambda(t)\cdot\sigma}\cdot dt$$

(la función $S(\rho)$ existe, es decir, la integral que la define converge en virtud de la convergencia de la integral:

$$\int_{0}^{\infty} a(t)\cdot\lambda^{n}(t)\cdot e^{-\lambda(t)\sigma}\cdot dt,$$

cuyo valor es:

$$(-1)^{n}\cdot f^{(n)}(\sigma)).$$

Tratemos de mayorar la función $S(\rho)$.

A tal efecto, consideremos la integral:

$$(31)\qquad \int_{\rho}^{t} a(t)\cdot\lambda^{n}(t)\cdot dt$$

para todo $t>\rho$. Se tiene:

$$\int_{\rho}^{t} a(t)\cdot\lambda^{n}(t)\cdot dt=\int_{0}^{t} a(t)\cdot\lambda^{n}(t)\,dt-\int_{0}^{\rho} a(t)\cdot\lambda^{n}(t)\cdot dt$$

de donde se deduce teniendo en cuenta la acotación (19) que:

$$\left|\int_{\rho}^{t} a(t)\cdot\lambda^{n}(t)\cdot dt\right|<2\cdot K(\varepsilon)\cdot\lambda^{n}(t)\cdot e^{\varepsilon\lambda(t)}+2K(\varepsilon)\cdot\lambda^{n}(\rho)\cdot e^{\varepsilon\lambda(\rho)}$$

o bien, en virtud de la monotonia de $\lambda(t)$:

$$(32)\qquad \left|\int_{\rho}^{t} a(t)\cdot\lambda^{n}(t)\cdot dt\right|<4\cdot K(\varepsilon)\cdot\lambda^{n}(t)\cdot e^{\varepsilon\lambda(t)}.$$

Transformando mediante integración por partes la integral (31) se tiene que

$$\int_{\rho}^{t} a(t)\cdot\lambda^{n}(t)\cdot e^{-\lambda(t)\sigma}\cdot dt=\int_{\rho}^{t}\left(d\int_{\rho}^{t} a(t)\cdot\lambda^{n}(t)\,dt\right)\cdot\left(e^{-\lambda(t)\sigma}\right)=$$

$$=e^{-\lambda(t)\sigma}\cdot\int_{\rho}^{t} a(t)\cdot\lambda^{n}(t)\cdot dt-\int_{\rho}^{t}\left(\int_{\rho}^{t} a(t)\cdot\lambda^{n}(t)\cdot dt\right)\cdot d\,e^{-\lambda(t)\sigma};$$

luego teniendo en cuenta esta última igualdad y la cotación (32)se tiene que:

$$\left|\int_{\rho}^{t} a(t).\lambda^{m}(t).e^{-\lambda(t)\sigma}.dt\right| < 4.K(\varepsilon).\lambda^{m}(t).e^{-(\sigma-\varepsilon).\lambda(t)} +$$

$$+4.K(\varepsilon).\sigma.\int_{\rho}^{t}\lambda^{m}(t).e^{-(\sigma-\varepsilon)\lambda(t)}.d\lambda(t)$$

Luego si tomamos límites para $\underline{t\to+\infty}$ en ambos miembros de esta desigualdad y teniendo en cuenta que:

$$\lim_{t\to+\infty}\left\{\lambda^{m}(t).e^{-(\sigma-\varepsilon)\lambda(t)}\right\}=0, \quad \text{pues es } \underline{\sigma>\varepsilon},$$

se tiene que:

$$\left|\delta(\rho)\right| \leq 4.K(\varepsilon).\sigma.\int_{\rho}^{\infty}\lambda^{m}(t).e^{-(\sigma-\varepsilon)\lambda(t)}.d\lambda(t)$$

o bien:

$$(33)\quad \left|\delta(\rho)\right| \leq 4.K(\varepsilon).\sigma.\int_{\rho}^{\infty}\lambda^{m}(t).e^{-(\sigma-2\varepsilon).\lambda(t)-\varepsilon.\lambda(t)}.d\lambda(t).$$

Veamos que la funeión:

$$(34)\qquad \lambda^{m}(t).e^{-(\sigma-2\varepsilon)\lambda(t)}$$

es monótona decreciente en el intervalo: $\rho\leq t<+\infty$;

para ello calculemos su derivada:

$$D\left\{\lambda^{m}(t).e^{-(\sigma-2\varepsilon)\lambda(t)}\right\}=m\lambda^{m-1}(t).e^{-(\sigma-2\varepsilon)\lambda(t)}.D\lambda(t)-$$

$$-(\sigma-2\varepsilon).\lambda^{m}(t).e^{-(\sigma-2\varepsilon)\lambda(t)}.D\lambda(t)=$$

$$=\lambda^{m-1}(t).e^{-(\sigma-2\varepsilon).\lambda(t)}.D\lambda(t).\left[m-(\sigma-2\varepsilon)\lambda(t)\right];$$

tomando $\underline{\varepsilon}$ de modo que sea: $\varepsilon<\frac{\sigma\omega}{2(1+\omega)}$,

es:

$$\sigma-2\varepsilon>\sigma-\frac{\sigma\omega}{1+\omega}=\frac{\sigma}{1+\omega}$$

o bien:

$$\frac{n}{\sigma-2\varepsilon} < \frac{n}{\frac{\sigma}{1+\omega}} = \frac{n}{\sigma}(1+\omega)$$

y como es;para $t \geq \rho$:

$$\lambda(t) \geq \lambda(\rho) = \frac{n}{\sigma}(1+\omega) < \frac{n}{\sigma-2\varepsilon}$$

o bien:

$$(\sigma-2\varepsilon).\lambda(t) \geq n$$

por lo tanto la derivada de la función (34) es negativa,para: $\rho \leq t < +\infty$, luego dicha función (34) es monótona decreciente;por consiguiente teniendo en cuenta ésto y la acotación (33) se tiene que:

$$|\delta(\rho)| < 4.K(\varepsilon).\sigma.\int_{\rho}^{\infty} \lambda^{n}(\rho).e^{-(\sigma-2\varepsilon).\lambda(\rho)}.e^{-\varepsilon\lambda(t)}.d\lambda(t)$$

luego:

$$(35)\quad |\delta(\rho)| < 4.K(\varepsilon).\sigma.\lambda^{n}(\rho).e^{-(\sigma-2\varepsilon).\lambda(\rho)}.\int_{\rho}^{\infty} e^{-\varepsilon\lambda(t)}.d\lambda(t).$$

Pero:

$$(36)\qquad \int_{\rho}^{\infty} e^{-\varepsilon\lambda(t)}.d\lambda(t) = \left[\frac{e^{-\varepsilon\lambda(t)}}{-\varepsilon}\right]_{\rho}^{\infty} = \frac{e^{-\varepsilon\lambda(\rho)}}{\varepsilon}.$$

De (35) y (36) se deduce que:

$$|\delta(\rho)| < 4.K(\varepsilon).\sigma.\lambda^{n}(\rho).e^{-(\sigma-2\varepsilon).\lambda(\rho)}.\frac{1}{\varepsilon}.e^{-\varepsilon\lambda(\rho)}$$

luego:

$$|\delta(\rho)| < 4K(\varepsilon).\frac{\sigma}{\varepsilon}.\lambda^{n}(\rho).e^{-(\sigma-\varepsilon).\lambda(\rho)}.$$

Sustituyendo en ésta última acotación $\underline{\lambda(\rho)}$ por su valor $\underline{\frac{n}{\sigma}(1+\omega)}$, se tiene que:

$$|\delta(\rho)| < 4.K(\varepsilon).\frac{\sigma}{\varepsilon}.\left(\frac{n}{\sigma}\right)^{n}.(1+\omega)^{n}.e^{-(\sigma-\varepsilon).\frac{n}{\sigma}(1+\omega)}$$

luego:

$$\left|\delta(\rho)\right| < 4K(\varepsilon)\cdot\frac{\sigma}{\varepsilon}\cdot\frac{n^n}{\sigma^n}\cdot\left[(1+\omega)\cdot e^{-(\sigma-\varepsilon)\cdot\frac{1+\omega}{\sigma}}\right]^n$$

luego:

$$(37)\quad \left|\delta(\rho)\right| < 4K(\varepsilon)\cdot\frac{\sigma}{\varepsilon}\cdot\frac{n^n}{\sigma^n}\cdot\left[(1+\omega)\cdot e^{\frac{\varepsilon(1+\omega)}{\sigma}-\omega}\right]^n\cdot e^{-n}.$$

Pero:

$$\frac{n^n\cdot e^{-n}}{n!}\sim\frac{n^n\cdot e^{-n}}{\sqrt{2\pi n}\cdot n^n\cdot e^{-n}}=\frac{1}{\sqrt{2\pi\cdot n}}\longrightarrow 0$$

luego a partir de un valor de n (suficientemente grande) en adelante es:

$$n^n\cdot e^{-n} < n!$$

por lo tanto en (37) se tiene:

$$(38)\quad \left|\delta(\rho)\right| < 4\cdot K(\varepsilon)\cdot\frac{\sigma}{\varepsilon}\cdot\frac{n!}{\sigma^n}\left[(1+\omega)\cdot e^{\frac{\varepsilon(1+\omega)}{\sigma}-\omega}\right]^n.$$

Consideremos ahora la funeión:

$$F(\omega)\equiv(1+\omega)\cdot e^{-\omega}-(1-\omega)e^{\omega};$$

y calculemos su derivada:

$$\mathcal{D}F(\omega)=e^{-\omega}-e^{-\omega}\cdot(1+\omega)+e^{\omega}-(1-\omega)e^{\omega}=$$

$$=e^{-\omega}-e^{-\omega}-\omega e^{-\omega}+e^{\omega}-e^{\omega}+\omega e^{\omega}=\omega(e^{\omega}-e^{-\omega});$$

luego para $\underline{\omega>0}$ es: $\mathcal{D}F(\omega)>0$

Por lo tanto F (ω) es monótona creciente para $\underline{\omega>0}$ y como es:

$$F(0)=0;$$

se tiene que para $\omega>0$ es:

$$F(\omega)>0;$$

esto es, para $\omega>0$, es:

$$(39)\quad (1+\omega)e^{-\omega}>(1-\omega)e^{\omega}.$$

De (30) y (39) se infiere que:

$$|R(\tau)| < 4.K(\varepsilon).n.\frac{n!}{\sigma^n}\left[(1+\omega).e^{-\omega+\frac{\varepsilon}{\sigma}}\right]^n$$

o bien:

$$(40)\quad |R(\tau)| < 4.K(\varepsilon).n.\frac{n!}{\sigma^n}\left[(1+\omega).e^{-\omega+2\frac{\varepsilon}{\sigma}}\right]^n.$$

Como es:

$$1+\omega < 1+1 = 2,$$

en (38) se tiene:

$$(41)\quad |S(\rho)| < 4K(\varepsilon).\frac{\sigma}{\varepsilon}.\frac{n!}{\sigma^n}\left[(1+\omega)^{-\omega+2\frac{\varepsilon}{\sigma}}\right]^n.$$

De (40) y(41) se deduce que:

$$|R(\tau)+S(\rho)| \leq |R(\tau)|+|S(\rho)| <$$

$$< 4.K(\varepsilon).\frac{n!}{\sigma^n}\left[(1+\omega).e^{-\omega+2\frac{\varepsilon}{\sigma}}\right]^n\left(n+\frac{\sigma}{\varepsilon}\right).$$

o bien:

$$(42)\quad |R(\tau)+S(\rho)| < 4.K(\varepsilon).\left(1+\frac{\sigma}{n\varepsilon}\right).n.\frac{n!}{\sigma^n}\left[(1+\omega)e^{-\omega+2\frac{\varepsilon}{\sigma}}\right]^n.$$

Ahora bien,se tiene que:

$$e^{-\omega} = 1-\frac{\omega}{1!}+\frac{\omega^2}{2!}-\frac{\omega^3}{3!}+\cdots+(-1)^n.\frac{\omega^n}{n!}+\cdots$$

luego:

$$\omega.e^{-\omega} = \omega-\frac{\omega^2}{1!}+\frac{\omega^3}{2!}-\frac{\omega^4}{3!}+\cdots+(-1)^{n-1}.\frac{\omega^n}{(n-1)!}+\cdots$$

luego:

$$(1+\omega)e^{-\omega} = e^{-\omega}+\omega.e^{-\omega} = 1-\frac{1}{2}\omega^2+\frac{2}{3!}\omega^3+\cdots(-1)^{n-1}.\frac{\omega^n}{(n-1)!}\left[(-1)\frac{1}{n}+\right.$$

luego:

$$(43)\quad (1+\omega)e^{-\omega} = 1-\frac{1}{2}\omega^2+\frac{2}{3!}\omega^3+\cdots+(-1)^{n-1}.\frac{n-1}{n!}\omega^n+\cdots$$

para que esta serie sea alternada se requiere que se verifique:

$$\frac{n-1}{n!}\omega^n > \frac{n}{(n+1)!}\omega^{n+1} = \frac{\omega^n}{n!}.\frac{n}{n+1}.\omega$$

o bien:

(44) $$(n-1)(n+1) = n^2 - 1 > n\omega$$

pero como es:

$$n > n\cdot\omega$$

se cumplirá la desigualdad (44),es decir,la serie (43) será alternada si se tiene que:

$$n^2 - 1 > n$$

o bien:

$$n^2 - n - 1 > 0$$

pero:

$$n^2 - n - 1 = \left[n + \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)\right]\cdot\left[n - \frac{1}{2}(\sqrt{5} + 1)\right]$$

por lo tanto la serie (43) será alternada si es:

$$n > \frac{1}{2}(\sqrt{5} + 1)$$

para lo cual basta que sea:

$$n \geq 2.$$

Luego es:

(45) $$(1+\omega)\cdot e^{-\omega} < 1 - \frac{\omega^2}{2}$$

De (42) y (45) se tiene que:

$$\left|R(\tau) + S(\rho)\right| < 4\cdot K(\varepsilon)\cdot\left(1 + \frac{\varepsilon}{n\cdot\varepsilon}\right)\cdot n\cdot\frac{n!}{\sigma^n}\cdot\left(1 - \frac{\omega^2}{2}\right)^n\cdot\left(e^2\frac{\varepsilon}{\sigma}\right)^n$$

de donde:

$$\sqrt[n]{\frac{1}{n!}\left|R(\tau) + S(\rho)\right|} < \sqrt{4\cdot K(\varepsilon)\cdot\left(1 + \frac{\sigma}{n\varepsilon}\right)}\cdot\sqrt[n]{n}\cdot\frac{1}{\sigma}\cdot\left(1 - \frac{\omega^2}{2}\right)\cdot e^2\frac{\varepsilon}{\sigma}$$

tomando límites en ambos miembros de esta desigualdad,para $\underline{n \to \infty}$,se tiene:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{\frac{1}{n!}\left|R(\tau) + S(\rho)\right|} \leq \frac{1}{\sigma}\cdot\left(1 - \frac{\omega^2}{2}\right)\cdot e^2\frac{\varepsilon}{\sigma}$$

y tomando,ahora,límites para $\underline{\varepsilon \to 0}$,se tiene que:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{\frac{1}{n!}\left|R(\tau) + S(\rho)\right|} \leq \frac{1}{\sigma}\left(1 - \frac{\omega^2}{2}\right)$$

pero por ser:

$$1-\frac{\omega^2}{2}<1$$

se tiene que:

$$(46)\qquad \overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{\frac{1}{n!}\left|R(\tau)+S(\rho)\right|}<\frac{1}{\sigma}.$$

(Esta desigualdad es en sentido estricto,esto es,no se verifica jamás el signo igual).

Pongamos ahora:

$$(47)\qquad H(\tau,\rho)\equiv\int_{\tau}^{\rho}a(t).\lambda(t).e^{-\lambda(t).\sigma}.dt$$

luego es:

$$(48)\qquad \int_{0}^{\infty}a(t).\lambda^n(t).e^{-\lambda(t)\sigma}.dt\equiv\left[R(\tau)+S(\rho)\right]+H(\tau,\rho).$$

Ahora bien,supongamos que se verifique la desigualdad (5),es decir,que $z=0$ sea un punto regular para $f(z)$.

Por lo tanto,si tomamos un cierto número positivo fijo,l,menor que $\frac{1}{\sigma}$;a partirde un valor de n,suficientemente grande,es:

$$\sqrt[n]{\frac{1}{n!}\left|\int_{0}^{\infty}a(t).\lambda^n(t).e^{-\lambda(t)\sigma}.dt\right|}<l$$

o bien:

$$(49)\qquad \frac{1}{n!}\left|\int_{0}^{\infty}a(t).\lambda^n(t).e^{-\lambda(t)\sigma}.dt\right|<l^n.$$

Según (46) a partir de un valor de n suficientemente grande se tiene:

$$\sqrt[n]{\frac{1}{n!}\left|H(\tau)+S(\rho)\right|}<l$$

o bien:

$$(50)\qquad \frac{1}{n!}\left|H(\tau)+S(\rho)\right|<l^n.$$

De (48),(49) y (50) se deduce que a partir de un valor de n suficientemente grande es:

$$\frac{1}{n!}\left|H(\tau,\rho)\right| < 2.\ell^{n}$$

o Bien:

$$\sqrt[n]{\frac{1}{n!}\left|H(\tau,\rho)\right|} < \sqrt[n]{2.\ell}$$

o bien:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{\frac{1}{n!}\left|H(\tau,\rho)\right|} \leq \ell$$

de donde:

$$(51)\qquad \overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{\frac{1}{n!}\left|H(\tau,\rho)\right|} < \frac{1}{\sigma}.$$

Es decir:si se verifica (5) se verifica (51) y con un razonamiento análogo se prueba que:si se verifica (51) se verifica (5).

Luego podemos enunciar el siguiente teorema.

Teorema 1°:

Es condición necesaria y suficiente para que el origen, $z = 0$, sea regular para la función:

$$f(t) = \int_0^{\infty} a(t).e^{-\lambda(t).z}.dt\ ;$$

(con $C=0$) que se tenga:

$$(52)\qquad \overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{\frac{1}{n!}\left|H(\tau,\rho)\right|} = \overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{\frac{1}{n!}\left|\int_{\tau}^{\infty} a(t).\lambda^{n}(t).e^{-\lambda(t)\sigma}.dt\right|} < \frac{1}{\sigma}$$

A esta condición (52) se le puede dar otra forma, aplicando la fórmula de Stirling:

$$(53)\qquad n! \sim \sqrt{2\pi n}.\frac{n^{n}}{e^{n}}, \qquad \text{para } n\to\infty$$

En efecto,si se verifica (52) teniendo en cuenta la (53) se infiere que:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\frac{c^n}{n^n}\cdot|H(c,\rho)|\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi n}}} < \frac{1}{\sigma}$$

o bien:

$$(54) \qquad \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt{\left(\frac{\sigma e}{n}\right)^n\cdot|H(c,\rho)|} < 1.$$

Recíprocamente si se verifica (54) se verifica (52).

Luego el teorema anterior se puede enunciar en la siguiente forma,que lega completamente equivalente.

<u>Teorema 1º.</u>

<u>Si ponemos:</u>

$$(55) \qquad O_n \equiv \left(\frac{\sigma e}{n}\right)^n\cdot\int_c^\rho a(t)\cdot\lambda^n(t)\cdot e^{-\lambda(t)\cdot\sigma}\cdot dt;$$

<u>es condición necesaria y suficiente para que el origen,z=0,sea regular para f(z) que se verifique:</u>

$$(56) \qquad \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|O_n|} < 1$$

<u>Nota</u>: Nótese que en (55) figuran dos parámetros arbitrarios,a saber:

$$\underline{0<\omega<1}; \qquad y; \qquad \underline{\sigma>0}.$$

<u>Caso particular</u>:

Supongamos que $\omega n(1)$ sea integral determinante ordinaria, esto es:

$$\lambda(t)=t$$

Luego en este caso la relación (55) se reduce a:

$$(57) \qquad O'_n \equiv \left(\frac{\sigma e}{n}\right)^n\cdot\int_{\frac{n}{\sigma}(1-\omega)}^{\frac{n}{\sigma}(1+\omega)} a(t)\cdot t^n\cdot e^{-\sigma t}\cdot dt.$$

Luego podemos enunciar el siguiente corolario.

Corolario 1º.

Es condición necesaria y suficiente para que el origen, $z=0$, sea un punto regular de la función analítica $f(z)$, definida por la integral:

$$\int_0^\infty a(t).e^{-tz}.dt,$$

cuya abscisa de convergencia condicional es $C=0$, que se verifique:

$$(57) \qquad \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|C_n'|} < 1.$$

Como los parámetros σ y ω que figuran en (57) son arbitrarios, pero satisfacen a las condiciones ya mencionadas, podemos tomarlos tales que:

$$\left.\begin{aligned} \frac{1-\omega}{\sigma} &= 1 \\ \frac{1+\omega}{\sigma} &= 2 \end{aligned}\right\}$$

o sea:

$$\underbrace{\omega=\frac{1}{3}}\ ; \quad y \quad \underbrace{\sigma=\frac{2}{3}}$$

luego la (57) se transforma en:

$$(59) \qquad C_n' \equiv \left(\frac{2e}{3n}\right)^n . \int_n^{2n} a(t).t^n.e^{-\frac{2}{3}t}.dt$$

y la (58) en:

$$(60) \qquad \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\left(\frac{2e}{3n}\right)^n . \left| \int_n^{2n} a(t).t^n.e^{-\frac{2}{3}t}.dt \right|} < 1.$$

Entonces, según el teorema primero (enunciado en la segunda forma), por exclusión, se tiene el siguiente teorema.

Teorema 1º bis.

Es condición necesaria y suficiente para que

el origen, z 0, sea singular para f(z) que se tenga:

$$(61) \qquad \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|D_n|} \geq 1.$$

Veamos ahora que en (61) no se puede verificar el signo mayor, es decir, debe ser:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|D_n|} = 1.$$

En efecto, supongamos que $z=0$ sea singular para f(z), esto es, que se cumpla la igualdad (4).

Sea δ un número positivo arbitrario pero fijo y l un cierto número fijo positivo menor que $\frac{1}{\sigma}$; según (4) y (46) a partir de un valor de n suficientemente grande, se tiene, respectivamente, que:

$$\sqrt[n]{\frac{1}{n!}\left|\int_0^\sigma a(t)\cdot\lambda^n(t)\cdot e^{-\lambda(t)\tau}\cdot dt\right|} < \frac{1}{\sigma}+\delta$$

$$\sqrt[n]{\frac{1}{n!}\left|R(\tau)+S^n(\tau)\right|} < l$$

y por lo tanto:

$$\frac{1}{n!}\left|H(\tau,\rho)\right| < \left(\frac{1}{\sigma}+\delta\right)^n + l^n = \left(\frac{1}{\sigma}+\delta\right)^n\cdot\left[1+\left(\frac{l}{\frac{1}{\sigma}+\delta}\right)^n\right]$$

luego:

$$(62) \qquad \sqrt[n]{\frac{1}{n!}\left|H(\tau,\rho)\right|} < \left(\frac{1}{\sigma}+\delta\right)\cdot\sqrt[n]{1+\left(\frac{l}{\frac{1}{\sigma}+\delta}\right)^n}.$$

Teniendo en cuenta que:

$$\frac{l}{\frac{1}{\sigma}+\delta} < \frac{\frac{1}{\sigma}}{\frac{1}{\sigma}} = 1$$

tomando límites en (62) para $\delta \to \sigma$ se tiene:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\frac{1}{n!}|H(\tau,\rho)|} \leq \frac{1}{\sigma}+\delta$$

y tomando límites para $\delta \to 0$:

$$(63) \qquad \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\frac{1}{n!}|H(\tau,\rho)|} \leq \frac{1}{\sigma}.$$

Pero si en (63) se verifica el signo menor en virtud de lo demostrado más arriba no se verificaría (4),sino la (5),contra la hipótisis.Luego si el punto $z=0$ es singular para f(z) se verifica que:

$$(64) \qquad \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\frac{1}{n!}|H(\tau,\rho)|} = \frac{1}{\sigma};$$

y por lo tanto:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|Q_n|} = 1.$$

Recíprocamente:veámos que si se verifica (64) se verifica la (4).

En efecto:por un raciocinio análogo para demostrar el teorema directo se tiene que:si se verifica la (64) se verifica también que:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\frac{1}{n!}\left|\int_0^\infty a(t)\cdot\lambda^n(t)\cdot e^{-\lambda(t)\sigma}\cdot dt\right|} \leq \frac{1}{\sigma}$$

pero si en esta igualdad se verifica el signo menor,se tiene en realidad la (51) y por lo tanto se verifica la (51),esto es,no se verifica la (64), contra la hipótesis.

En resumen,podemos enunciar el siguiente teorema.

Teorema 2º.

Es condición necesaria y suficiente para que el origen,$z=0$,sea un punto singular de la función analítisa f(z):

$$f(z)=\int_0^\infty a(t)\cdot e^{-\lambda(t)z}\cdot dt \qquad (\sigma=0)$$

que se tenga:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|O_n|} = 1.$$

Es interesante el siguiente corolario.

Corolario 2º.

Es condición necesaria y suficiente para que el origen, $z=0$, sea un punto singular de la función analítica definida por la integral de Laplace:

$$\int_0^\infty a(t).e^{-tz}.dt$$

cuya abscisa de convergencia condicional, C, es nula, que se verifique:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\left(\frac{\sigma e}{n}\right)^n . \left| \int_{\frac{n}{\sigma}(1-\omega)}^{\frac{n}{\sigma}(1+\omega)} a(t).t^n.e^{-\sigma t}.dt \right|} = 1.$$

En particular:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\left(\frac{2e}{3n}\right)^n \left| \int_n^{2n} a(t).t^n.e^{-\frac{2}{3}t}.dt \right|} = 1.$$

Observación: Luego en ningún caso, que sea $z=0$ regular o singular para $f(z)$ puede ser:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|O_n|} > 1$$

o, en otra forma:

$$(65) \qquad \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\frac{1}{n!}|H(\tau,\rho)|} > \frac{1}{\sigma}.$$

Veamos directamente porqué no se puede verificar esta última desigualdad.

En efecto, supongamos que se verifique la (65).

Sea δ un cierto número positivo pero fijo, entonces para <u>infinitos</u> valores de n se tiene:

$$\sqrt[n]{\frac{1}{n!}\left|H(\tau,\rho)\right|} > \frac{1}{\sigma}+\delta$$

luego:

$$(66) \qquad \frac{1}{n!}\left|H(\tau,\rho)\right| > \left(\frac{1}{\sigma}+\delta\right)^n$$

y según (46) <u>a partir de un valor de n suficientemente grande es, sin excepción:</u>

$$\sqrt[n]{\frac{1}{n!}\left|R(\tau)+S(\rho)\right|} < \frac{1}{\sigma}-\delta$$

luego:

$$(67) \qquad \frac{1}{n!}\left|R(\tau)+S(\rho)\right| < \left(\frac{1}{\sigma}-\delta\right)^n.$$

Pero según (48) es:

$$(68) \quad \left|\int_0^\infty a(t).\lambda^n(t).e^{-\lambda(t)\sigma}.dt\right| = \left|H(\tau,\rho)+\left(R(\tau)+S(\rho)\right)\right|$$

Teniendo en cuenta la (66) y la (67) se tiene que para <u>infinitos</u> valores de n es:

$$(69) \qquad \left|H(\tau,\rho)\right| > \left|R(\tau)+S(\rho)\right|.$$

De (68) y (69) se deduce que existen <u>infinitos</u> valores de n tales que es:

$$(70) \quad \left|\int_0^\infty a(t).\lambda^n(t).e^{-\lambda(t)\sigma}.dt\right| \geq \left|H(\tau,\rho)\right| - \left|R(\tau)+S(\rho)\right|.$$

De (66), (67) y (70) se deduce que existen <u>infinitos</u> valores de n para los cuales es:

$$\frac{1}{n!}\left|\int_0^\infty a(t).\lambda^n(t).e^{-\lambda(t)\sigma}.dt\right| > \left(\frac{1}{\sigma}+\delta\right)^n - \left(\frac{1}{\sigma}-\delta\right)^n =$$

$$= \left(\frac{1}{\sigma}+\delta\right)^n.\left[1-\left(\frac{\frac{1}{\sigma}-\delta}{\frac{1}{\sigma}+\delta}\right)^n\right]$$

de donde:

$$\overline{\lim_{n\to\sigma}} \sqrt[n]{\frac{1}{n!}\left|\int_0^\infty a(t)\cdot\lambda^n(t)\cdot e^{-\lambda(t)\sigma}\cdot dt\right|} \geq \frac{1}{\sigma}+\sigma$$

es decir:

$$\overline{\lim_{n\to\sigma}} \sqrt[n]{\frac{1}{n!}\left|\int_0^\infty a(t)\cdot\lambda^n(t)\cdot e^{-\lambda(t)\sigma}\cdot dt\right|} > \frac{1}{\sigma}$$

es decir, el radio, R, de convergencias de la serie:

$$\sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{f^{(n)}(\sigma)}{n!}\cdot(z-\sigma)^n$$

es:

$$R < \frac{1}{\frac{1}{\sigma}} = \sigma,$$

lo que es un absurdo. Luego es imposible que se verifique la relación (65).

Resuelto el problema en un caso particular ($\sigma = 0$), pasemos ahora al caso general, es decir, supongamos que la abscisa de convergencia condicional, C, de la integral (1), supuesta evidentemente finita, sea cualquiera, $C = 0$.

Ante todo, gamos notar que suponemos que C es finita, pues si es $C = +\infty$ no existe función f(z) y si es $C = -\infty$ es f(z) una función <u>entera</u> y el problema de que tratamos deja de existir.

Tomemos un punto cualquiera sobre la recta de convergencia condicional:

$$R(\pm) = b = \alpha \begin{cases} > 0 \\ < 0 \\ = 0 \end{cases}$$

de la integral:

$$(1) \qquad f(z) = \int_0^\infty a(t)\cdot e^{-\lambda(t)z}\cdot dt$$

al que llamaremos:

$$b + i\gamma.$$

Entonces:

$$(1) \qquad f(z+C+i\gamma)=\int_0^{\infty} a(t).e^{-\lambda(t).(z+C+i\gamma)}.dt \equiv$$

$$\equiv \int_0^{\infty} a(t)e^{-(C+i\gamma)\lambda(t)}.e^{-\lambda(t)z}.dt$$

o Bien,si ponemos:

$$b(t)\equiv a(t).e^{-(C+i\gamma).\lambda(t)}$$

se tiene:

$$f(z+C+i\gamma)=\int_0^{\infty} b(t).e^{-\lambda(t)z}.dt$$

y llamando:

$$g(t)\equiv f(z+C+i\gamma)$$

se tiene:

$$(72) \qquad g(z)=\int_0^{\infty} b(t).e^{-\lambda(t)z}.dt.$$

Ahora bien,si la integral (1) converge para todo z tal que:

$$R(z)>C$$

la integral (71) converge para todo z tal que:

$$R(z+C+i\gamma)=R(z)+C>C$$

o sea:

$$R(z) > 0$$

es decir: si la abscisa de convergencia de ~~una~~(1) es C,la abscisa de convergencia de (72) es nula;recíprocamente,si la abscisa de convergencia de (72) es $R(z)=0$ la de (1) es $R(z)=C$;en efecto,si la integral (72) converge para todo z tal que sea:

$$R(z) > 0$$

la integral (1) convergerá para todo z tal que:

$$R(z+C+i\gamma)=R(z)+C>0+C=C.$$

Luego:

La condición de ser C la abscisa de convergencia de la integral (1) es completamente equivalente a la condición de ser nula la abscisa de convergencia de la integral (72).

Pero además por ser:

$$f(z+C+i\gamma)\equiv g(z)$$

para:

$$R(z)>0$$

es decir, la f(z) se obtiene de la g(z) sometiendo a la variable z a una transformación lineal y viceversa, se ve que:

Si $z=C+i\gamma$ es un punto singular de f(z), z=0 es un punto singular de g(z), y recíprocamente.

Y según el teorema segundo: es condición necesaria y suficiente para que el origen, z=0, sea un punto singular de g(z) que se verifique:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{\left(\frac{\sigma_\tau}{n}\right)^n\cdot\left|\int_\tau^\rho c(t).t^n.e^{-\lambda(t).\sigma}.dt\right|}=1;$$

luego, recordando el significado de b(t) se puede enunciar el siguiente teorema.

Teorema 3º.

Dada la función analítica f(z) definida por la integral determinante generalizada: $\int_0^\infty a(t).e^{-\lambda(t).z}.dt$

cuya abscisa de convergencia condicional es C (C es finita), es condición necesaria y suficiente para que el punto $C+i\gamma$ (γ=real), de su recta de convergencia, sea singular para f(z) que se verifique:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{\left(\frac{\sigma_\tau}{n}\right)^n\cdot\left|\int_\tau^\rho a(t).e^{-(C+i\gamma).\lambda(t)}.t^n.e^{-\lambda(t).\sigma}.dt\right|}=1;$$

donde es:

$$\left.\begin{aligned}\lambda(\tau)&=\frac{n}{\sigma}(1-\omega)\\ \text{y:}\quad \lambda(\rho)&=\frac{n}{\sigma}(1+\omega)\end{aligned}\right\}$$

siendo σ y ω números arbitrarios reales tales que:

$$\sigma>0 \quad , \quad \gamma \quad , \quad 0<\omega<1.$$

Análogamente, teniendo en cuenta el teorema primero y observando que la condición de que el punto $z=c+i\gamma$ es regular para f(z) es completamente equivalente a la condición de ser regular el origen, $z=0$, para g(z), se puede enunciar el siguiente teorema.

Teorema 4º.

Dada la función analítica f(z) definida por la integral determinante generalizada:

$$\int_0 a(t).e^{\lambda(t)z}.dt\,;$$

cuya abscisa de convergencia condicional es C (C es finita), es condición necesaria y suficiente para que el punto: $c+i\gamma$ ($\gamma=$ real), de su recta de convergencia condicional, sea regular para f(z) que se tenga:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{\left(\frac{\sigma e}{n}\right)^n\left|\int_\tau^\rho a(t).e^{-(c+i\gamma).\lambda(t)}.t^n.e^{-\lambda(t)\sigma}.dt\right|}<1\,;$$

donde τ y ρ son los valores de t para los cuales es:

$$\left.\begin{aligned}\lambda(\tau)&=\frac{n}{\sigma}(1-\omega)\\ \lambda(\rho)&=\frac{n}{\sigma}(1+\omega)\end{aligned}\right\}$$

siendo σ y ω valores reales tales que: $\sigma>0$, γ , $0<\omega<1$

(Estos valores de y son arbitrarios).

Obsérvese que, como en el caso restringido $c+i\gamma=0$, tampoco en ningún caso, ya sea $z=c+i\gamma$ regular o singular para f(z), se verifica la desigualdad:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{\left(\frac{\sigma e}{n}\right)^n\cdot\left|\int_{\tau}^{s}a(t).e^{-(c+i\gamma).\lambda(t)}.t^n.e^{-\lambda(t)c}.dt\right|}>1.$$

Casos particulares:

Es interesante enunciar los teoremas tercero y cuarto para el caso de las integrales determinantes ordinarias(a las cuales desde aquí en adelante, llamaremos simplemente "integrales determinantes"). Es decir, haciendo:

los teoremas tercero y cuarto permiten enunciar los siguientes teoremas.

Teorema 5º.

Dada la función analítica f(z) definida por la integral determinante:

$$\int_0^{\infty}a(t).e^{-tz}.dt$$

cuya abscisa de convergencia condicional es C (C es finita), es condición necesaria y suficiente para que el punto $C-i\gamma$ ($\gamma\equiv$ real), tomado arbitrariamente sobre su recta de convergencia condicional, R(M)>C, sea singular para f(z) que sea:

$$(73)\quad \overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{\left(\frac{\sigma e}{n}\right)^n\cdot\left|\int_{\frac{n}{\sigma}(1-\omega)}^{\frac{n}{\sigma}(1+\omega)}a(t).e^{-(c+i\gamma)t}.t^n.e^{-\sigma t}.dt\right|}=1;$$

siendo σ y ω valores reales arbitrarios tales que:

$$\sigma>0\ ,\quad y\quad 0<\omega<1.$$

Particularizando,como hicimos más arriba,los valores de σ y ω en la forma:

$$\sigma=\frac{2}{3}\ ,\qquad \gamma\ ,\qquad \omega=\frac{1}{3}\ ;$$

las fórmula (73) adquiere las siguiente forma:

$$(74)\qquad \overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{\left(\frac{2e}{3n}\right)^n\cdot\left|\int_n^{2n}a(t)\,e^{-(\sigma+i\gamma)}\cdot t^n\cdot e^{-\frac{2}{3}t}\cdot dt\right|}=1$$

que hemos de usar con frecuencia.

Haciendo en (73) $\gamma=0$ se obtiene la condición necesaria y suficiente para que el punto,$z=C$,en que la recta de convergencia simple corta al eje real $R(z)=x$,$(z=x+iy)$,sea singular para $f(z)$,a saber:

Corolario 1º.

Es condición necesaria y suficiente para que el punto:

$$R(z)=C$$

en que la recta de convergencia simple de la integral:

$$\int_0^\infty a(t)\cdot e^{tz}\cdot dt$$

corta al eje real:

$$R(z)=x$$

siendo:

$$z=x+iy$$

sea singular para $f(z)$,que se verifique:

$$(75)\qquad \overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{\left(\frac{\sigma e}{n}\right)^n\cdot\left|\int_{\frac{n}{\sigma}(1-\omega)}^{\frac{n}{\sigma}(1+\omega)}a(t)\cdot e^{-\sigma t}\cdot t^n\cdot e^{-\sigma t}\cdot dt\right|}=1$$

o en particular:

$$(76)\qquad \overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{\left(\frac{2e}{3n}\right)^n\cdot\left|\int_n^{2n}a(t)\cdot e^{-\sigma t}\cdot t^n\cdot e^{-\frac{2}{3}t}\cdot dt\right|}=1.$$

Corolario 2º.

Suponiendo que la recta de convergencia condicional, C, de la integral:

$$f(z)=\int_0^\infty a(t).e^{-zt}.dt;$$

es igual a 0, C=0, es condición necesaria y suficiente para que el punto: $i\gamma$ (γ real), tomado arbitrariamente sobre su recta de convergencia simple:

$$R(z)=C=0,$$

sea singular para f(z) es que se tenga:

$$(77)\quad \overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{\left(\frac{\sigma e}{n}\right)^n\cdot\left|\int_{\frac{n}{\sigma}(1-\omega)}^{\frac{n}{\sigma}(1+\omega)} a(t).e^{-i\gamma t}.t^n.e^{-\sigma t}.dt\right|}=1$$

o en particular:

$$(78)\quad \overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{\left(\frac{2e}{3n}\right)^n\cdot\left|\int_n^{2n} a(t).e^{-i\gamma t}.t^n.e^{-\frac{2}{3}t}.dt\right|}=1.$$

Teorema 6º.

Dada la función analítica f(z) definida por la integral determinante:

$$f(z)=\int_0^\infty a(t).e^{-tz}.dt$$

cuya abscisa es C (C es finita), es condición necesaria y suficiente para que el punto $C+i\gamma$ de su recta de convergencia simple sea regular para f(z) que sea:

$$(79)\quad \overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{\left(\frac{\sigma e}{n}\right)^n\cdot\left|\int_{\frac{n}{\sigma}(1-\omega)}^{\frac{n}{\sigma}(1+\omega)} a(t).e^{-(C+i\gamma)t}.t^n.e^{-\sigma t}.dt\right|}<1$$

o bien, en particular, que sea:

$$(80)\quad \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\left(\frac{2e}{3n}\right)^n \cdot \left| \int_n^{2n} a(t).e^{-(\varrho+i\gamma).t}.t^n.e^{-\frac{2}{3}t}.dt \right|} < 1.$$

Corolario 1º.

Es condición necesaria y suficiente para que el punto, $z = C$, en que la recta de convergencia simple de la integral:

$$\int_0^\infty a(t).e^{-tz}.dt$$

corta al eje real, sea regular para $f(z)$ que se tenga:

$$(81)\quad \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\left(\frac{\sigma e}{n}\right)^n \cdot \left| \int_{\frac{n}{\sigma}(1-\omega)}^{\frac{n}{\sigma}(1+\omega)} a(t).e^{-\sigma t}.t^n.e^{-\sigma t}.dt \right|} < 1$$

o bien, en particular:

$$(82)\quad \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\left(\frac{2e}{3n}\right)^n \cdot \left| \int_n^{2n} a(t).e^{-\varrho t}.t^n.e^{-\frac{2}{3}t}.dt \right|} < 1.$$

Corolario 2º.

Suponiendo que la integral:

$$f(z) = \int_0^\infty a(t).e^{-zt}.dt;$$

tiene por abscisa de convergencia, $C = 0$, es condición necesaria y suficiente para que el punto $i\gamma$, (γ = real), sea regular para $f(z)$ que se tenga:

$$(83)\quad \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\left(\frac{\sigma e}{n}\right)^n \cdot \left| \int_{\frac{n}{\sigma}(1-\omega)}^{\frac{n}{\sigma}(1+\omega)} a(t).e^{-i\gamma t}.t^n.e^{-\sigma t}.dt \right|} < 1$$

o bien, en particular:

$$(84)\quad \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\left(\frac{2e}{n}\right)^n \cdot \left| \int_n^{2n} a(t) \cdot e^{-i\gamma t} \cdot t^n \cdot e^{-\frac{2}{3}t} \cdot dt \right|} < 1.$$

Observación:

Obsérvese que en ningún caso, ya sea: $z = c + i\gamma$, singular para f(z) o regular para f(z) se verifica que:

$$(85)\quad \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\left(\frac{\sigma e}{n}\right)^n \cdot \left| \int_{\frac{n}{\sigma}(1-\omega)}^{\frac{n}{\sigma}(1+\omega)} a(t) \cdot e^{-(c+i\gamma)t} \cdot t^n \cdot e^{-\sigma t} \cdot dt \right|} > 1.$$

Observación:

La fórmula (73), esto es, el teorema quinto se puede utilizar, entre otras aplicaciones, para construir funciones determinantes tales que todos los puntos de su recta de convergencias sean singulares para f(z). Tal aplicación la haremos más adelante.

Es interesante y a veces conveniente enunciar los teoremas anteriores para las integrales potenciales, es decir, para las integrales determinantes:

$$f(z) = \int_0^\infty a(t) \cdot (e^{-z'})^t \cdot dt$$

cuando hacemos la transformación:

$$(86)\qquad z \equiv e^{-z'} \qquad \therefore\ |z| \equiv e^{-R(z')};$$

de modo que:

$$(87)\qquad f(z) = \int_0^\infty a(t) \cdot z^t \cdot dt.$$

Ante todo tengamos presente que la transformación (86) hace corresponder:

al semiplano:

$$R(z') > c$$

el interior del círculo:

$$|z| < e^{-c} \equiv R \qquad c = lg\left(\frac{1}{R}\right) = -lg\, R;$$

al punto:

$$z' = \sigma$$

el punto:

$$z = 0;$$

al punto:

$$z' = c$$

el punto:

$$z = R = e^{-c};$$

a la recta:

$$R(z') = c$$

la circunferencia:

$$|z| = R = e^{-c};$$

al semieje real y positivo:

$$0 \leq z \leq R \equiv c$$

el segmento:

$$0 \leq z \leq R = e^{-c};$$

al número real y positivo:

$$z' = \sigma' > 0$$

el número real, positivo y menor que uno:

$$0 < \eta = e^{-\sigma'} < 1.$$

Además el campo de convergencia de la integral potencial (87) es el círculo

$$|z| < R$$

Excluido el punto:

$$z = 0.$$

El radio,R,de convergencia de la integral potencial (87) viene dado por las fórmulas deducidas de las de Landau-Pincherle que dan abscisa de convergenciadde las integrales determinantes, haciendo en ésta la transformación (86).

Respecto del valor de R,téngasé en cuenta que:

"Si la función generatriz,(a(t)),de la integral potencial:

$$(87) \qquad \int_0^{\infty} a(t).z^t.dt$$

es función entera,a saber:

$$a(t)=\sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{a^{(n)}(0)}{n!}.t^n \;;$$

con:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{|a^{(n)}(0)|}{n!}}=0 \;;$$

entonces el radio,R,de convergencia de la integral (87) viene dado por la fórmula:

$$(88) \qquad R=\frac{1}{\overline{\lim_{t\to\infty}}\sqrt[t]{|a(t)|}}=\overline{\lim_{t\to+\infty}}\left\{|a(t)|^{\frac{1}{t}}\right\}.$$

En cuanto a la integral determinante se tiene:

"Si la función generatriz,a(t),de la integral determinante:

$$(87') \qquad \int_0^{\infty} a(t).e^{-tz}.dt \;;$$

es función analítica entera,a saber,si es:

$$a(t)=\sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{a^{n}(0)}{n!}.t^n \;;$$

con:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{|a^{(n)}(0)|}{n!}} = 0$$

es decir:

$$\sqrt[n]{|a^{(n)}(0)|} = o\left(\frac{n}{e}\right)$$

o bien:

$$\sqrt[n]{|a^{(n)}(0)|} = o(n);$$

entonces la abscisa, C, de convergencia de la integral (87') viene dada por la fórmula:

$$(91) \qquad C = \overline{\lim_{t\to+\infty}} \frac{\log|a(t)|}{t}.$$

Obsérvese que las fórmulas (88) y (89) son estrictamente correlativas de la de Cauchy-Hadamard; para el radio de convergencia de las series potenciales. Como importantísimo corolario de las fórmulas (88) y (89) se tiene que:

"Si la generatriz a(t) de una integral potencial o integral determinante es función analítica entera, las abscisas de convergencias condicional, de convergencia uniforme y de convergencia absoluta, coinciden"

Pero si la función generatriz a(t) no es entera, lo único que en general puede afirmarse es:

$$(90) \qquad C \leq \overline{\lim_{t\to+\infty}} \frac{\log|a(t)|}{t}.$$

En efecto:

$$(91) \qquad \int_0^\infty |a(t).e^{-xt}.dt| \leq \int_0^\infty |a(t)|\, e^{-xt}.dt;$$

fijado x tomemos un número positivo arbitrario tal que:

$$\varepsilon < x - C$$

para lo cual suponemos que es:

$$x > C.$$

Si se verifica (90) se tiene quees:

$$\frac{\log|a(t)|}{t} < C+\varepsilon$$

a partir de un:

$$t_0 \equiv t_0(\varepsilon)$$

en adelante.Luego:

$$(92) \qquad |a(t)| < e^{(C+\varepsilon).t}$$

Luego de (91) y (92) para:

$$t \geq t_0 \equiv t_0(\varepsilon)$$

es:

$$\int_{t_0}^{\infty} \left| a(t).e^{-xt}.dt \right| < \int_{t_0}^{\infty} e^{(C+\varepsilon)t}.e^{-xt}.dt =$$

$$= \int_{t_0}^{\infty} e^{-(x-C-\varepsilon)t}.dt = \left[\frac{e^{-(x-C-\varepsilon)t}}{-x-C-\varepsilon} \right]_{t_0}^{\infty} = \frac{e^{-(x-C-\varepsilon)t_0}}{x-C-\varepsilon} = \alpha \; ;$$

pues es:

$$x-C-\varepsilon = (x-C)-\varepsilon > 0$$

luego la integral:

$$\int_{t_0}^{\infty} \left| a(t).e^{-xt}.dt \right|$$

converge;por lo tanto la integral:

$$\int_{0}^{\infty} \left| a(t).e^{-xt} \right| dt$$

converge en el semiplano:

$$R(z) > \overline{\lim} \frac{\lg|a(t)|}{t}$$

por lo tanto esta demostrada la desigualdad (90).

De cuanto hemos dicho se pueden enunciar los siguientes teoremas.

Teorema 7º.

Es condición necesaria y suficiente para que el punto $z=1$, sea un punto regular de la función analítica $f(z)$, definida por la integral:

$$\int_0^\infty a(t).z^t.dt;$$

cuyo radio de convergencia condicional es:

$$R=1;$$

que se verifique:

$$(93) \quad \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\left(\frac{\sigma e}{n}\right)^n . \left| \int_{\frac{n}{\sigma}(1-\omega)}^{\frac{n}{\sigma}(1+\omega)} a(t).t^n.e^{-\sigma t}.dt \right|} < 1$$

siendo σ y ω números reales arbitrarios tales que: $0<\sigma<1$, y $0<\omega<1$.

O bien, en particular la (93) se puede escribir:

$$(93') \quad \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\left(\frac{2e}{3n}\right)^n . \left| \int_n^{2n} a(t).t^n.e^{-\frac{2}{3}t}.dt \right|} < 1.$$

Teorema 8º.

Es condición necesaria y suficiente para que el punto, $z=1$, sea un punto singular de la función analítica, $f(z)$, definida por la integral potencial:

$$\int^\infty a(t).z^t.dt;$$

cuyo radio de convergencia condicional es: $R=1$;

que se verifique:

$$(94)\quad \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\left(\frac{\sigma e}{n}\right)^n \cdot \left| \int_{\frac{n}{\sigma}(1-\omega)}^{\frac{n}{\sigma}(1+\omega)} a(t).t^n.e^{-\sigma t}.dt \right|} = 1$$

siendo σ y ω números reales arbitrarios tales que: $0<\sigma<1$, y, $0<\omega<1$.

O bien, en particular la (94) se puede escribir en la forma:

$$(94')\quad \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\left(\frac{2e}{3n}\right)^n \cdot \left| \int_{n}^{2n} a(t)t^n.e^{-\frac{2}{3}t}.dt \right|} = 1$$

Observación:

Obsérvese que en ningún caso, ya sea el punto $z=1$ regular o singular para $f(z)$, si $R=1$, se puede verificar:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\left(\frac{\sigma e}{n}\right)^n \cdot \left| \int_{\frac{n}{\sigma}(1-\omega)}^{\frac{n}{\sigma}(1+\omega)} a(t).t^n.e^{-\sigma t}.dt \right|} > 1$$

cualesquiera que sean los valores de σ y ω tales que: $0<\sigma<1$, y, $0<\omega<1$.

Teorema 9ª.

Dada la función analítica, $f(z)$, definida por la integral potencial:

$$f(z) = \int_0^\infty a(t).z^t.dt;$$

cuyo radio, R, de convergencia condicional es finito y no nulo, se tiene que:

a)es condición necesaria y suficiente para que el punto:

$$z \equiv R.e^{i\varphi} \equiv R(\cos\varphi + i.\operatorname{sen}\varphi);$$

tomado arbitrariamente sobre su circunferencia de convergencia condicional sea regular para f(z) que sea:

$$(95)\quad \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\left(\frac{\sigma e}{n}\right)^n \left| \int_{\frac{n}{\sigma}(1-\omega)}^{\frac{n}{\sigma}(1+\omega)} a(t).R^t.e^{i\varphi t}.t^n.e^{-\sigma t}.dt \right|} < 1;$$

b)es condición necesaria y suficiente para que el punto:

$$z \equiv R.e^{i\varphi}$$

sea singular para f(z) que se tenga:

$$(96)\quad \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\left(\frac{\sigma e}{n}\right)^n \left| \int_{\frac{n}{\sigma}(1-\omega)}^{\frac{n}{\sigma}(1+\omega)} a(t).R^t.t^n.e^{-(\sigma - i\gamma)t}.dt \right|} = 1;$$

siendo arbitrarios σ y ω y tales que: $0 < \sigma < 1$, y; $0 < \omega < 1$.

Análogas consecuencias,particularizaciónes,corolarios y aplicaciones a las hechas en el caso de las integrales determinantes caben hacer de los teoremas séptimo,octavo y noveno,para las integrales potenciales.

APLICACIONES.

Es útil en algunas aplicaciones que luego haremos de los teoremas anteriores conocer el valor de:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\left(\frac{\sigma e}{n}\right)^n \cdot \int_{\frac{n}{\sigma}(1-\omega)}^{\frac{n}{\sigma}(1+\omega)} t^n \cdot e^{-\sigma t} \cdot dt}$$

para:

$$\sigma > 0, \quad y, \quad 0 < \omega < 1.$$

Para ello observemos que la abscisa, C, de convergencia de la integral determinante:

$$\int_0^\infty e^{-tz} \cdot dt = \left[\frac{e^{-tz}}{-z}\right]_0^\infty = \frac{1}{z},$$

donde es: $a(t) \equiv 1,$

es: $C = 0,$

y como el (único) punto singular de la función, $f(z) = \frac{1}{z}$, que define, situado sobre su recta de convergencia:

$$R(z) = 0$$

es el origen:

$$z = 0;$$

en virtud del teorema segundo es:

$$(97) \qquad \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\left(\frac{\sigma e}{n}\right)^n \cdot \int_{\frac{n}{\sigma}(1-\omega)}^{\frac{n}{\sigma}(1+\omega)} t^n \cdot e^{-\sigma t} \cdot dt} = 1;$$

y en particular:

$$(97') \qquad \overline{\lim} \sqrt[n]{\left(\frac{2e}{3n}\right)^n \cdot \int_{\frac{n}{3}}^{\frac{2n}{3}} t^n \cdot e^{-\frac{2}{3}t} \cdot dt} = 1.$$

Fácil es ahora demostrar el teorema correlativo del de Vivanti para las integrales doterminantes, a saber:

"Si la función generatriz, a(t), de la integral:

$$(98) \qquad f(z) = \int_0^\infty a(t).e^{-tz}.dt;$$

es positiva, o mejor dicho, es real y no-negativa, a partir de un $(t_0 \equiv \text{fijo})$ en adelante; el punto en que la recta de convergencia simple corta al eje real, es singular para f(z)"

En efecto, sin restringir la generalidad, podemos suponer que la abscisa, C, de convergencia de (98), es nula:

$$C = 0.$$

supongamos además que C venga dada por la fórmula:

$$(99) \qquad C = \overline{\lim_{t \to +\infty}} \frac{\log|a(t)|}{t} \equiv \overline{\lim_{t \to +\infty}} \frac{\log a(t)}{t}; \qquad [a(t) > 0].$$

(Esta hipótesis se verifica seguramente si a(t) es función analítica entera)

Luego, de (99) y sabiendo que es C=0 se tiene que:

$$\overline{\lim_{t \to +\infty}} \frac{\log a(t)}{t} = 0$$

luego:

$$(100) \qquad \overline{\lim_{t \to +\infty}} \sqrt[t]{a(t)} = 1.$$

Por lo tanto, aplicando el teorema de la media a la integral:

$$O_n \equiv \left(\frac{2e}{3n}\right)^n . \int_n^{2n} a(t).t^n.e^{-\frac{2}{3}t}.dt$$

es:

$$O_n \equiv a(\xi).\left(\frac{2e}{3n}\right)^n . \int_n^{2n} t^n.e^{-\frac{2}{3}t}.dt; \qquad \text{para } n > t_0;$$

luego:

$$\sqrt[n]{|Q_n|} \equiv \sqrt[n]{Q_n} = \sqrt[n]{a(\xi)} \cdot \sqrt[n]{\left(\frac{2e}{3n}\right)^n \cdot \int_n^{2n} t^n \cdot e^{-\frac{2}{3}t} \cdot dt}$$

y según §97') es:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|Q_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a(\xi)}$$

pues existe <u>límite ordinario</u> de $\sqrt[n]{a(\xi)}$;para $n\to\infty$,según (100) y además es

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|Q_n|} = 1;$$

esto es,el punto $z=0$ es singular para $f(z)$.

Aplicando este teorema a las integrales cuya generatriz es:

$$a(t) \equiv t^p > 0;$$

siendo p un número real cualquiera;que por consiguiente su abscisa es:

$$C = \overline{\lim_{t\to+\infty}} \frac{\log|t^p|}{t} = p \cdot \lim_{t\to+\infty} \frac{\log t}{t} = 0$$

se deduce que:

$$(101) \quad \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\left(\frac{\sigma e}{n}\right)^n \cdot \int_{\frac{n}{\sigma}(1-\omega)}^{\frac{n}{\sigma}(1+\omega)} t^{n+p} \cdot e^{-\sigma t} \cdot dt} = 1$$

o bien,en particular que:

$$(102) \quad \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\left(\frac{2e}{3n}\right)^n \cdot \int_n^{2n} t^{n+p} \cdot e^{-\frac{2}{3}t} \cdot dt} = 1.$$

Análogamente tomando:

$$a(t) \equiv e^{\alpha t} > 0;$$

siendo α un número real cualquiera,y entonces:

$$C = \overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{\log(e^{\alpha t})}{t} = \lim_{t\to\infty} \frac{\alpha t}{t} \equiv \alpha$$

Es decir que:

$$\lim_{r\to\infty} \sqrt{\left(\frac{\sigma_r}{\sigma_1}\right)} \frac{\frac{n}{2}(1+\cos\theta)}{\frac{n}{2}(1+\cos\theta)} = \frac{d\theta}{d\theta}$$

es decir, la misma fórmula (97).

SERIES POTENCIALES.

Las propiedades demostradas en las páginas anteriores para las integrales determinantes y potenciales valen, así como su demostración, para las funciones analíticas definidas por series potenciales.

A este respecto se tiene:

Teorema 10°.

Dada la función analítica, f(z), definida por la serie potencial:

$$f(z)=\sum_{n=0}^{n=\infty} a_n z^n=\sum_{n=0}^{n=\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}\cdot z^n \qquad (103)$$

cuyo radio de convergencia es:

$$R=\frac{1}{\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}}=\frac{1}{\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{\left|\frac{f^{(n)}(0)}{n!}\right|}}\left.\begin{matrix}>0\\=\infty\end{matrix}\right\}$$

se tiene:

a) es condición necesaria y suficiente para que el punto:

$$z=R.e^{\varphi i}=R(\cos\varphi+i\,\mathrm{sen}\,\varphi)$$

tomado arbitrariamente sobre la circunferencia de convergencia de la serie (103) sea singular para la función f(z) que sea:

$$(104)\quad \overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{\left(\frac{\sigma e}{n}\right)^n\cdot\left|\sum_{\frac{n}{\sigma}(1-\omega)\le m\le\frac{n}{\sigma}(1+\omega)} a_m\cdot R^m\cdot e^{m\varphi i}\cdot m^n\cdot e^{-m\sigma}\right|}=1;$$

b) es condición necesaria y suficiente para que el punto:

$$z=Re^{\varphi i}$$

sea regular para f(z) que sea:

$$(105)\quad \overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{\left(\frac{\sigma e}{n}\right)^n\cdot\left|\sum_{\frac{n}{\sigma}(1-\omega)\le m\le\frac{n}{\sigma}(1+\omega)} a_m\cdot(Re^{\varphi i})^m\cdot m^n\cdot e^{-m\sigma}\right|}<1;$$

siendo σ y ω valores reales arbitrarios tales que:

$$1>\sigma>0, \quad y, \quad 0<\omega<1.$$

En particular, las condiciones (103) y (104), dan, respectivamente:

$$(104') \quad \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\left(\frac{2e}{3n}\right)^n \cdot \left|\sum_{m=n}^{m=2n} a_m \cdot (Re^{\varphi i})^m \cdot m^n \cdot e^{-m\sigma}\right|} = 1;$$

y:

$$(105') \quad \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\left(\frac{2e}{3n}\right)^n \cdot \left|\sum_{m=n}^{m=2n} a_m \cdot (Re^{\varphi i})^m \cdot m^n \cdot e^{-m\sigma}\right|} < 1.$$

Haciendo en (103) y (104), $\varphi=0$, se obtienen las condiciones necesarias y suficientes para que el punto en que la circunferencia de convergencia corta al semieje real y positivo, sea regular o singular, respectivamente, para f(z). Caso particular importante es el siguiente:

Teorema 11.

Suponiendo que la serie:

$$(103') \quad f(z)=\sum_{n=0}^{n=\infty} a_n z^n;$$

tenga la unidad por radio de convergencia, es decir:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\frac{|f^{(n)}(0)|}{n!}} = 1;$$

se tiene:

a) es condición necesaria y suficiente para que el punto:

$$z=1;$$

sea regular para f(z) que sea:

$$(105'') \quad \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\left(\frac{\sigma e}{n}\right)^n \cdot \left|\sum_{m=n}^{m=2n} a_m \cdot m^n \cdot e^{-m\sigma}\right|} < 1;$$

Es condición necesaria y suficiente para que el punto:

$$z=1;$$

sea singular para f(z) que sea:

$$(104'')\quad \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\left(\frac{\sigma e}{n}\right)^n \cdot \left|\sum_{\frac{n}{\sigma}(1-\omega)\leq m\leq \frac{n}{\sigma}(1+\omega)} a_m \cdot m^n \cdot e^{-m\sigma}\right|} = 1.$$

Como caso particular (105'') y (104'') se tiene, respectivamente:

$$(104''')\quad \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\left(\frac{2e}{3n}\right)^n \cdot \left|\sum_{m=n}^{m=2n} a_m \cdot m^n \cdot e^{-\frac{2}{3}m}\right|} = 1;$$

Y:

$$(105''')\quad \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\left(\frac{2e}{3n}\right)^n \cdot \left|\sum_{m=n}^{m=2n} a_m \cdot m^n \cdot e^{-\frac{2}{3}n}\right|} < 1.$$

Considerando la serie geométrica:

$$f(z)=\frac{1}{1-z}=\sum_{n=0}^{\infty} z^n$$

donde es:

$$R=1, \quad y, \quad a_n \equiv 1$$

de (104''') se deduce:

$$(104^{IV})\quad \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\left(\frac{2e}{3n}\right)^n \cdot \sum_{m=n}^{m=2n} m^n \cdot e^{-\frac{2}{3}m}} = 1;$$

y considerando:

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} n^p \cdot z^n; \qquad p\equiv \text{real};$$

siendo p un número real;donde es:

$$\underline{R=1}, \quad y, \quad \underline{a_n=n^p}$$

se tiene:

$$(104^{V}) \quad \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\left(\frac{2e}{3n}\right)^n \cdot \sum_{m=n}^{m=2n} m^{n+p} \cdot e^{-\frac{2}{3}m}} = 1.$$

Como aplicación interesante del teorema once demostremos el teorema de Vivanti;a saber:

"Si a partir de un valor de n(n_0),en adelante todos los coeficientes a_n de la serie:

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n;$$

son mayores o iguales a 0; es decir:

para: $n \geq n_0$

es: $a_n \geq 0$;

el punto: $z=R$

en que la circunferencia de convergencia:

$$|z|=R$$

de la serie corta al semieje real y positivo es singular para f(z)".

Ante todo,más adelante completaremos la fórmula (104^{IV})probando que se tiene:

$$(104^{VI}) \quad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{2e}{3n}\right)^n \cdot \sum_{m=n}^{m=2n} m^n \cdot e^{-\frac{2}{3}m}} = 1.$$

Pasemos a la demostración del teorema de Viventi:

Sin restringir en absoluto la generalidad podemos suponer que:

$$R=\frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}}=\frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{a_n}}=1$$

es decir:

(106) $$\overline{\lim}\sqrt[n]{a_n}=1.$$

Pongamos:

$$O_n\equiv\left(\frac{2e}{3n}\right)^n\cdot\sum_{m=n}^{m=2n}a_m\cdot m^n\cdot e^{-\frac{2}{3}m}\ ;$$

llamemos a_ν, $n\leq\nu\leq 2n$, al menor (en sentido amplio) de todos los términos

$$a_n,\quad a_{n+1},\ ----,\ a_{2n-1},\quad a_{2n}$$

por lo tanto:

$$\nu\equiv\nu(n)\ ;$$

se tiene:

$$O_n\geq a_\nu\cdot\left(\frac{2e}{3n}\right)^n\cdot\sum_{m=n}^{m=2n}m^n\cdot e^{-\frac{2}{3}m}$$

y según (104^{VI}) es:

(107) $$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{O_n}\geq\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{a_\nu}$$

Pero, es:

$$\overline{\lim_{\nu\to\infty}}\sqrt[\nu]{a_\nu}=1$$

y como $\sqrt[\nu]{a_\nu}$ está comprendido entre $\sqrt[n]{a_\nu}$ y $\sqrt[2n]{a_\nu}=\sqrt{\sqrt[n]{a_\nu}}$, y es además:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{a_\nu}=\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[2n]{a_\nu}$$

luego:

(108) $$\overline{\lim}\sqrt[n]{a_\nu}=1.$$

De (107) y (108) se deduce que:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{O_n} \geq 1 .$$

luego el punto:

$$z=1$$

es singular para f(z).

También el teorema once permite demostrar el teorema de Pérate (llamado por algunos de Dienes),generalización del de Viventi,a saber:

"Si a partir de un valor de n (n_0),en adelante todoslos coeficientes, a_n, de la serie :

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n ;$$

satisfacen a la condición:

$$\left| Arg\, a_n \right| \leq \tau < \frac{\pi}{2} , \qquad (\tau \equiv fijo),$$

el punto:

$$z=R$$

en que la circunferencia de convergencia:

$$|z|=R$$

de la serie corta al semieje real y positivo es singular para f(z)".

Supongamos,lo que no restringe la generalidad:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = 1.$$

pongamos:

$$a_n \equiv a'_n + i a''_n \equiv \rho_n (\cos\varphi_n + i \operatorname{sen}\varphi_n) ; \qquad a'_n \geq 0 ;$$

$$O_n \equiv \left(\frac{2e}{3n}\right)^n \cdot \sum_{n}^{2n} a_m \cdot m^n \cdot e^{-\frac{2}{3}m}$$

$$O'_n = \left(\frac{2e}{3n}\right)^n \cdot \sum_n^{2n} a'_m m^n \cdot e^{-\frac{2}{3}m}$$

$$O''_n = \left(\frac{2e}{3n}\right)^n \cdot \sum_n^{2n} a''_m \cdot m^n \cdot e^{-\frac{2}{3}m}$$

luego:

$$O_n = O'_n + i\,O''_n \quad ; \qquad O'_n \geq 0;$$

de donde:

$$|O_n| \geq \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \left\{ O'_n + |O''_n| \right\}$$

obien:

$$(109) \qquad |O_n| \geq \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot O'_n .$$

Por hipótesis, para $\underline{m \geq n_0}$ es:

$$(110) \qquad a'_m = \rho_m \cdot \cos\varphi_m > \rho_m \cdot \cos\tau .$$

De(109) y (120), para $\underline{m \geq n_0}$ se deduce:

$$|O_n| > \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \cos\tau \cdot \left(\frac{2e}{3n}\right)^n \cdot \sum_n^{2n} \rho_m \cdot m^n \cdot e^{-\frac{2}{3}m}$$

y según el desarrollo del teorema anterior, por ser:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\rho_n} = 1$$

se tiene:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|O_n^*|} \geq \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{\cos\tau}{\sqrt{2}}} = 1;$$

luego el punto:

$$z=1$$

es singular para f(z).

El teorema once permite generalizar aún más el teorema de Fekete pues éste exige que: a partir de un valor de n en adelante todos los coeficientes ésten comprendidos en el interior de un ángulo de vértice en el origen, simétrico respecto del semieje real y positivo, de amplitud menor que π y que contenga al semieje real y positivo; y es fácil ver que en condiciones más amplias vale la conclusión del teorema, como se estipula en el siguiente teorema.

Teorema 12.

Si el argumento del coeficiente de la de la serie:

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n,$$

satisface a la condición:

$$(11) \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{\log \cos \varphi_n}{n} = 0$$

(o bien: $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\cos\varphi_n}=1$),

y además es:

$$(112) \qquad R(a_n)\geq 0;$$

el punto:

$$z=R;$$

en que la circunferencia de convergencia:

$$|z|=R,$$

corta al semieje real y positivo:

$$R(z)>0$$

es singular para f(z); siempre que exista el límite ordinario de la raíz enés

sima del coeficiente _____.

Supongamos, lo que no restr-inge la generalidad:

$$R=\frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}}=1.$$

Con las mismas notaciones del teorema anterior y teniendo en cuenta (112) se tiene:

$$(113)\qquad |O_n|\geq\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\left(\frac{2e}{3n}\right)^n\cdot\sum_{n}^{2n}\rho_m\cos\varphi_m\cdot m^n\cdot e^{-\frac{2}{3}m}.$$

Llamemos ρ_ν ,al menor (en sentido amplio) de los valores:

$$\rho_n,\ \rho_{n+1},\ ----,\ \rho_{2n},$$

por lo tanto es:

$$n\leq\nu\equiv\nu(n)\leq 2n;$$

luego según (113) es:

$$(114)\qquad |O_n|\geq\frac{\rho_\nu}{\sqrt{2}}\cdot\left(\frac{2e}{3n}\right)^n\cdot\sum_{n}^{2n}\cos\varphi_m\cdot m^n\cdot e^{-\frac{2}{3}m}$$

Llamemos $\cos\varphi_\mu$ al menor (en sentido amplio) de todos los valores:

$$\cos\varphi_n,\ \cos\varphi_{n+1},\ ------,\ \cos\varphi_{2n},$$

por lo tanto es:

$$n\leq\mu\equiv\mu(n)\leq 2n;$$

luego según (114) es:

$$(115)\qquad |O_n|\geq\frac{\rho_\nu\cos\varphi_\mu}{\sqrt{2}}\cdot\left(\frac{2e}{3n}\right)^n\cdot\sum_{n}^{2n}m^n\cdot e^{-\frac{2}{3}m}.$$

De (115) y (114^{VI}) se deduce:

$$(116)\qquad \overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|O_n|}\geq\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{\rho_\nu\cos\varphi_\mu}$$

Según (111) es:

$$(117)\qquad \lim_{n\to\infty}\sqrt[\mu]{\cos\varphi_\mu}=1$$

Pero es:

$$\sqrt[2n]{\cos\varphi_\mu}=\sqrt{\sqrt[n]{\cos\varphi_\mu}}\geq\sqrt[\mu]{\cos\varphi_\mu}\geq\sqrt[n]{\cos\varphi_\mu}$$

luego:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[2n]{\cos\varphi_\mu}\geq\lim_{n\to\infty}\sqrt[\mu]{\cos\varphi_\mu}\geq\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{\cos\varphi_\mu}$$

y según (117):

$$(118)\qquad \overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[2n]{\cos\varphi_\mu}\geq 1\geq\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{\cos\varphi_\mu}$$

pero como:

$$(119)\qquad \overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[2n]{\cos\varphi_\mu}=\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{\cos\varphi_\mu}$$

de (118) y (119) se deduce que:

$$(120)\qquad \overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{\cos\varphi_\mu}=1$$

Además:

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{\cos\varphi_\mu}\leq\lim_{n\to\infty}\sqrt[\mu]{\cos\varphi_\mu}\leq\underline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[2n]{\cos\varphi_\mu}$$

y según (117) es:

$$(121)\qquad \underline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{\cos\varphi_\mu}\leq 1\leq\underline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[2n]{\cos\varphi_\mu}$$

pero como es:

$$(122)\qquad \underline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{\cos\varphi_\mu}=\underline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[2n]{\cos\varphi_\mu}$$

de (121) y (122) se deduce que:

$$(123)\qquad \lim\sqrt[n]{\cos\varphi}=1$$

Luego según (120) y (123) se infiere la existencia de límite ordinario, para $n \to \infty$, de $\sqrt[n]{\cos\varphi_\mu}$; y de modo tal que:

$$(124) \qquad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\cos\varphi_\mu} = 1$$

Teniendo en cuenta que es:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\rho_\nu \cdot \cos\varphi_\mu} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\rho_\nu} \cdot \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\cos\varphi_\mu}$$

de (116) y (124) se deduce que:

$$(125) \qquad \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|Q_n|} \geq \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\rho_\nu}$$

Ahora bien, si es:

$$\rho_\nu \leq 1$$

se tiene que:

$$(126) \qquad \sqrt[2n]{\rho_\nu} \geq \sqrt[n]{\rho_\nu} \geq \sqrt[n]{\rho_\nu}$$

y si es:

$$\rho_\nu \geq 1$$

se tiene que:

$$(126') \qquad \sqrt[2n]{\rho_\nu} \leq \sqrt[n]{\rho_\nu} \leq \sqrt[n]{\rho_\nu}$$

Pero por hipótesis es:

$$(127) \qquad \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\rho_\nu} = 1$$

De (126) y (127), se deduce que si es:

$$\rho_\nu \leq 1$$

se tiene:

$$(128) \qquad \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[2n]{\rho_\nu} \geq 1 \geq \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\rho_\nu}$$

y de (126') y (127), se deduce que si es:

$$\rho_\nu \geq 1$$

se tiene:

$$(128') \qquad \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[2n]{\rho_\nu} \leq 1 \leq \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\rho_\nu}$$

Pero es:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[2n]{\rho_\nu} = \sqrt{\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\rho_\nu}}$$

llamando:

$$l = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\rho_\nu}$$

y además:

$$\underline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[2n]{\rho_\nu} = \sqrt{\underline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\rho_\nu}}$$

llamando:

$$l' = \underline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\rho_\mu} \quad \text{siendo} \quad l' \leq l;$$

se tiene, si es:

$$\rho_\nu \leq 1$$

de (128) que:

$$\sqrt{l} \geq 1 \geq l$$

ó bien:

$$(129) \qquad l \geq 1 \geq l^2$$

y si es:

$$\rho_\nu \geq 1$$

de (128') que es:

$$\sqrt{l} \leq 1 \leq l$$

ó bien:

$$(129') \qquad l \leq 1 \leq l^2$$

Repitiendo consideraciones análogas para el límite superior se deduce en

todos los casos que es:

$$(130) \qquad \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\rho_\nu} \geq 1.$$

Luego de (125) y (130) se deduce que es:

$$(131) \qquad \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} \geq 1;$$

y como el signo mayor no se puede verificar en (131), pues si se verificase no sería uno el radio de convergencia de la serie dada, se tiene:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = 1;$$

lo que demuestra el teorema doce, en virtud del teorema once.

Como dijimos, el teorema de Fekete-Dienes; y por ende, el teorema de Vivanti (llamado por algunos de Borel y por otros de Pringsheim) es un caso particular del teorema doce, pues si es:

$$\varphi_n \leq \tau < \frac{\pi}{2}, \qquad (\tau \equiv fijo),$$

para:

$$n \geq n_0, \qquad (n_0 \equiv fijo)$$

(siendo n_0 fijo), se tiene:

$$1 \geq \cos\varphi_n \geq \cos\tau$$

luego:

$$\log\cos\tau \leq \log\varphi_n \leq 0$$

de donde:

$$0 \leftarrow \frac{\log\cos\tau}{n} \leq \frac{\log\cos\varphi_n}{n} \leq 0$$

y la condición (111) se cumple, con exceso.

Obsérvese, que el teorema doce no exige la existencia de límite del argumento φ_n, para $n\to\infty$. Pero supongamos, ahora que el argumento φ_n tenga límite, para $n\to\infty$. Pueden suceder dos casos, a saber:

$$1^\circ) \quad \lim_{n\to\infty} \varphi_n = \alpha < \frac{\pi}{2}, \qquad 2^\circ) \quad \lim_{n\to\infty} \varphi = \frac{\pi}{2}.$$

Si se verifica el primer caso,a partir de un valor de n suficientemente grande,pero fijo, φ_n ,es menor que:

$$\alpha+\frac{\frac{\pi}{2}-\alpha}{2}\equiv\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=fijo$$

es decir,se cumple la condición requerida por el teorema de Fekete,y el teorema actual no da nada nuevo;pero si se verifica el segundo caso no se cumple la condición de Fekete y sin embargo el punto:

$$z=R$$

será singular si se cumple la condición (111),la cual en este caso se puede expresar en otra forma.En efecto:

$$\cos\varphi_n=\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}-\varphi_n\right)\sim\frac{\pi}{2}-\varphi_n\,;$$

para $n\to\infty$,y además:

$$\log\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}-\varphi_n\right)}{\frac{\pi}{2}-\varphi_n}=\log\cos\varphi_n-\log\left(\frac{\pi}{2}-\varphi_n\right)\longrightarrow 0\,;$$

luego:

$$(132)\qquad \frac{\log\cos\varphi_n}{\log\left(\frac{\pi}{2}-\varphi_n\right)}\equiv\frac{\log\cos\varphi_n-\log\left(\frac{\pi}{2}-\varphi_n\right)}{\log\left(\frac{\pi}{2}-\varphi_n\right)}+1\longrightarrow 0+1=1\,;$$

y como se tiene:

$$(133)\qquad \frac{\log\cos\varphi_n}{n}\equiv\frac{\log\cos\varphi_n}{\log\left(\frac{\pi}{2}-\varphi_n\right)}\cdot\frac{\log\left(\frac{\pi}{2}-\varphi_n\right)}{n}\,;$$

la condición (111),según (132) y (133) es completamente equivalente a la siguiente:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\log\left(\frac{\pi}{2}-\varphi_n\right)}{n}=0$$

y ésta a la siguiente:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{\pi}{2}-\varphi_n}=1.$$

Por lo tanto,podemos enunciar el siguiente teorema,interesante corolario del teorema doce,a saber:

Teorema 13.

Si el argumento φ_n del coeficiente a_n de la serie:

$$f(z)=\sum_{n=0}^{n=\infty} a_n \cdot z^n$$

con:

$$R(a_n)\geq 0$$

para $n\geq n_0$ (n_0 = fijo); tiendo al límite $\frac{\pi}{2}$, para $n\to\infty$, pero satisfaciendo a la condición:

$$(11') \qquad \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{\pi}{2}-\varphi_n}=1,$$

el punto:

$$z=R;$$

en que la circunferencia de convergencia:

$$|z|=R$$

de la serie, corta al semieje real y positivo:

$$R(z)>0;$$

es singular para la función f(z); pero siempre que exista límite ordinario de la raiz enésima del módulo del coeficiente del término general de la serie dado en el punto unidad.

El teorema de Fekete no está comprendido en el teorema trece, pero si lo está el teorema de Vivanti (téngase en cuenta la existencia del límite ordinario de) que exige que sea:

$$\varphi_n\equiv 0$$

para $n\geq n_0$ (n_0 fijo), en cuyo caso se cumple evidentemente la condición (11)

Aplicación: El punto:

$$z=R$$

es singular para las funciones:

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot z^n$$

con:

$$R=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{|a_n|}},$$

y:

$$R(a_n)=0$$

tales que:

$$\varphi_n=\frac{\pi}{q}-\frac{k}{n^p}$$

cualesquiera que sean los valores reales de k y de p.

Tratemos de sustituir la condición (111) por otra equivalente desprovista de funciones trigonométricas.

En efecto: la condición (111) es equivalente a la siguiente:

$$-\varepsilon<\frac{\log \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{q}-\varphi_n\right)}{n}<\varepsilon$$

para: $n\geq n_0\equiv n_0(\varepsilon)$;

y ésta a la siguiente:

$$\left(e^{-\varepsilon}\right)^n<\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{q}-\varphi_n\right)<e^{n\varepsilon}$$

para: $\geq n_0\equiv n_0(\varepsilon)$;

y ésta a la siguiente:

$$1>\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{q}-\varphi_n\right)>\left(e^{-\varepsilon}\right)^n$$

para: $n\geq n_0\equiv n_0(\varepsilon)$,

y ésta a la siguiente:

$$(111'')\qquad \frac{\pi}{q}-\varphi_n\doteq \operatorname{arc\,sen}\left(a^n\right)$$

para: $n \geq n_1 \equiv n_1(a)$,

para <u>todo a positivo y menor que la unidad</u>.

Veamos que se puede decir de la parte real de a_n, supuesta siempre positiva si se cumple la condición (111).

Pongamos antetodo:

$$a_n \equiv a'_n + i\,a''_n \qquad a'_n > 0$$

Por ser:

$$a'_n \leq \rho_n$$

es:

$$\frac{\log a'_n}{n} \leq \frac{\log \rho_n}{n}$$

luego:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\log a'_n}{n} \leq \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\log \rho_n}{n}$$

y por ser:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\log \rho_n}{n} = 0$$

(por ser: $\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\rho_n} = 1$)

se tiene que:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\log a'_n}{n} \leq 0. \tag{134}$$

Esta desigualdad (134) que se verifica en todos los casos se transforma en igualdad en caso de cumplirse la igualdad (111).

En efecto, se tiene por ser: $\underbrace{a'_n = \rho_n \cdot \cos\varphi_n}$

que:

$$\frac{\log a'_n}{n} = \frac{\log \rho_n}{n} + \frac{\log \cos\varphi_n}{n} \tag{135}$$

pero,según (111) y la fórmula de Cauchy-Hadamard,se tiene que para todo:

$$n \geq n_0 \equiv n_0(\varepsilon)$$

es:

$$(136) \qquad -\frac{\varepsilon}{2} < \frac{\log \cos \varphi_n}{n} < \frac{\varepsilon}{2}$$

y:

$$(137) \qquad \frac{\log \rho_n}{n} < \frac{\varepsilon}{2}$$

y para infinitos valores de n es:

$$(138) \qquad \frac{\log \rho_n}{n} > -\frac{\varepsilon}{2}.$$

Luego,de (135),(136) y (137) se deduce que para todo:

$$n \geq n_0 \equiv n_0(\varepsilon)$$

es:

$$\frac{\log a'_n}{n} > \varepsilon$$

y de (135),(136) y (138) que existen infinitos valores de n para los cuales es:

$$\frac{\log a'_n}{n} > -\varepsilon;$$

es decir que:

$$(139) \qquad \overline{\lim_{n \to \infty}} \frac{\log a'_n}{n} = 0.$$

Esto es: es condición necesaria para que se verifique (111) que se verifique (139).Pero si se cumple (139) lo único que puede afirmarse es que: un límite de oscilación de $\frac{\log \cos \varphi_n}{n}$,para $n \to \infty$,es cero,en otras palabras: no se infiere de (139) la (111).

Pero si aún se cumple que:

$$(139') \qquad \lim_{n \to \infty} \frac{\log a'_n}{n} = 0$$

tampoco se puede asegurar que se verifica (111) sino solamente que:

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} \frac{\log \cos \varphi_n}{n} = 0.$$

Fácil es obtener de (111) el recinto en que el teorema doce permite variar el punto de afijo $\underline{a_n}$; al cual podemos tomarlo con vértice en el origen:

$$z' = 0$$

y simétrico del semieje real y positivo:

$$R(z') > 0;$$

representando con z' el punto variable del plano complejo en el cual se representan los términos de la sucesión:

$$a_0, \quad a_1, \quad a_2, \text{----} a_n, \text{----}$$

Para ello, basta observar que es:

$$\frac{\log \cos \varphi_n}{n} = \frac{-\frac{1}{2} \cdot \ell\left(1 + tg^2 \varphi_n\right)}{n} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{\ell\left(1 + \frac{a''^2_n}{a'^2_n}\right)}{n}$$

según la cual la condición (111) es completamente equivalente a la siguiente

$$(111''') \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{\ell\left(1 + \frac{a''^2_n}{a'^2_n}\right)}{n} = 0$$

y ésta a la siguiente:

$$(111^{IV}) \qquad \left(e^{-\varepsilon}\right)^n < 1 + \frac{a''^2_n}{a'^2_n} < \left(e^{\varepsilon}\right)^n$$

para: $n \geq n_1 \equiv n_0(\varepsilon)$.

Indicando con un valor cualquiera mayor que uno, la condición (111), según (111^{IV}), es equivalente a la siguiente:

$$\frac{1}{\alpha^n} < 1 + \frac{a''^2_n}{a'^2_n} < \alpha^n;$$

para: $\underline{n \geq n_1 \equiv n_1(\alpha)}$,

o bien a:

$$\left|\frac{a''_n}{a'_n}\right| < \sqrt{\alpha^n - 1}$$

Luego: el punto:

$$z=R$$

es singular para f(z) si a_n (real o complejo) a partir de un valor de n suficientemente grande es decir:

$$n \geq n_1 \equiv n_1(\alpha);$$

varía en el interior del recinto simétrico respecto del semieje real y positivo limitado por las curvas:

$$y=\sqrt{\alpha^2-1};$$

$$y=-\sqrt{\alpha^2-1}.$$

Multitud de consecuencias y aplicaciones se pueden hacer del teorema doce. El teorema doce es susceptible de generalizarse aún más si los coeficientes satisfacen a la condición de que existe límite ordinario de $\sqrt[n]{|a_n|}$, para $n \to \infty$ de modo que entonces el radio de convergencia de la serie viene dado por la fórmula de D'Alambert, a saber:

$$R=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}\right);$$

obteniendo a tal efecto el siguiente teorema.

Teorema 14.

Dada la función analítica f(z) definida por la serie:

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

con:

$$R(a_n) \equiv a_n > 0;$$

para: $n \geq n_0$; ($n_0 \equiv$ fijo);

cuyos coeficientes a_n satisfacen a las dos siguientes condiciones:

1ª) existe límite ordinario, para $n \to \infty$, de la sucesión:

$$\sqrt[n]{|a_n|};$$

para: $n = 1, 2, 3, \ldots$

2ª) el argumento, φ_n, de a_n es tal que:

$$\overline{\lim_{n \to \infty}} \frac{\log \cos \varphi_n}{n} = 0;$$

entonces se verifica que el punto:

$$z = R$$

en que la circunferencia de convergencia de la serie, corta al semieje real y positivo:

$$R(z) > 0;$$

es singular para la función f(z).

La demostración es análoga a la del teorema doce, teniendo en cuenta ahora que de la desigualdad (116) y en virtud de la hipótesis primera es:

$$\overline{\lim_{n \to \infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = \overline{\lim_{n \to \infty}} \sqrt[n]{\cos \varphi_n}$$

En realidad el teorema catorce no es un caso particular ni una generalización del teorema doce, es decir, la relación entre ellos no es de inclusión sino de imbricación.

De la fórmula (104) y teniendo en cuenta los desarrollos del teorema doce se deduce el siguiente teorema.

Teorema 15.

Sea la función analítica:

$$f(z) = \sum_0^\infty a_n z^n;$$

con:

$$R(a_n) > 0;$$

e indiquemos con φ_0 el menor (en sentido amplio) de los valores de φ_n, tales

que:

$$\frac{n}{\sigma}(1-\omega) \leq m \leq \frac{n}{\sigma}(1+\omega) \quad ;$$

y con $\int_m^{\infty}$ el mayor (en sentido amplio) de los valores de φ_μ ,tales que:

$$\mu \equiv \mu(n)$$

Supongamos además que se tenga:

1º)

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\log \cos \varphi_n}{n} = 0 ; \qquad (140)$$

(o bien: $\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\cos\varphi_n} = 1$)

2º)

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\rho_\nu \cdot \cos\varphi_\mu} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\rho_\nu} \cdot \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\cos\varphi_\mu} . \qquad (141)$$

En tales hipótesis,el punto:

$$z = R$$

es singular para f(z).

Además,la conclusión de este teorema quince subsiste reemplazando las condiciones (140) y (141) por la única siguiente:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\rho_\nu \cdot \cos\varphi_\mu} = 1 .$$

OBSERVACION:

Ahora bien, en vista de la gran generalidad de los teoremas doce, trece, catorce y quince, cabe preguntarse lo contrario: cuándo se podrá asegurar que el punto:

$$z = R$$

será regular para f(z)?

Es decir se plantea el siguiente problema:

Obtener condiciones suficientes para el argumento φ_n de a_n, bajo las cuales se puede asegurar que el punto:

$$z = R$$

es regular para f(z).

He aquí como resolveremos tal problema.

Supongamos lo que no restringe la generalidad, en absoluto, que sea:

$$R = \lim_{n \to \infty} \left\{ |a_n|^{-\frac{1}{n}} \right\} = 1$$

o bien:

$$\overline{\lim_{n \to \infty}} \sqrt[n]{|a_n|} \equiv \overline{\lim_{n \to \infty}} \sqrt[n]{\rho_n} = 1.$$

Pongamos como siempre:

$$a_n \equiv a'_n + i\, a''_n \equiv \rho_n \left(\cos \varphi_n + i \operatorname{sen} \varphi_n \right)$$

$$O_n \equiv \left(\frac{2e}{3n}\right)^n \cdot \sum_{n}^{2n} a_m m^n \cdot e^{-\frac{2}{3}n}$$

$$O'_n \equiv \left(\frac{2e}{3n}\right)^n \cdot \sum_{n}^{2n} \rho_m \cdot \cos \varphi_m \cdot m^n \cdot e^{-\frac{2}{3}m}$$

$$O''_n \equiv \left(\frac{2e}{3n}\right)^n \cdot \sum_{n}^{2n} \rho_m \cdot \operatorname{sen} \varphi_m \cdot m^n \cdot e^{-\frac{2}{3}m}$$

$$O'''_n \equiv \left(\frac{2e}{3n}\right)^n \cdot \sum_{n}^{2n} m^n \cdot e^{-\frac{2}{3}m} \qquad \therefore \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{O'''_n} = 1;$$

luego:

(142) $$|O_n| \leq |O'_n| + |O''_n| .$$

imponiéndole al argamento φ_m la condición de pertenecer al primer cuadrante, esto es:

(143) $$0 \leq \varphi_m \leq \frac{\pi}{2}$$

la desigualdad (142) se transforma en la siguiente:

(144) $$|O_n| \leq O'_n + O''_n .$$

llamando $\rho_{\nu'}$ al mayor de todos los valores de ρ_m, para m comprendido entre n y 2n, es decir:

para: $$n \leq \nu' \equiv \nu'(n) \leq 2n$$

es: $$\rho_{\nu'} \geq \rho_m ;$$

llamando $\cos\varphi_{\mu'}$ al mayor de todos los valores de $\cos\varphi_m$, para m comprendido entre n y 2n, es decir:

para: $$n \leq \mu' \equiv \mu'(n) \leq 2n$$

es: $$\cos\varphi_{\mu'} \geq \cos\varphi_m ;$$

y llamando $\operatorname{sen}\varphi_{\mu''}$ al mayor de todos los valores de $\operatorname{sen}\varphi_m$, para m comprendido entre n y 2n, es decir:

para: $$n \leq \mu'' \equiv \mu''(n) \leq 2n$$

es: $$\operatorname{sen}\varphi_{\mu''} \geq \operatorname{sen}\varphi_m ;$$

se tiene, según (144) que:

$$|O_n| \leq \left(\frac{2e}{3n}\right)^n \rho_{\nu'} \cos\varphi_{\mu'} \sum_n^{3n} m^n e^{-\frac{2}{3}m} +$$

$$+ \left(\frac{2e}{3n}\right)^n \rho_{\nu'} \operatorname{sen}\varphi_{\mu'} \sum_n^{3n} m^n e^{-\frac{2}{3}m} =$$

$$= \left(\rho_{\nu'} \cos\varphi_{\mu'} + \rho_{\nu'} \operatorname{sen}\varphi_{\mu'}\right) \cdot O_n'''$$

luego según (144):

$$|O_n| \leq O_n''' \cdot \rho_{\nu'} \left(\cos\varphi_{\mu'} + \operatorname{sen}\varphi_{\mu'}\right)$$

Luego:

$$\sqrt[n]{|O_n|} \leq \sqrt[n]{O_n'''} \cdot \sqrt[n]{\rho_\nu} \cdot \sqrt[n]{\cos\varphi_{\mu'} + \operatorname{sen}\varphi_{\mu'}}$$

Luego:

$$(145) \quad \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|O_n|} \leq \overline{\lim_{n\to\infty}} \left(\sqrt[n]{\rho_\nu} \cdot \sqrt[n]{\cos\varphi_{\mu'} + \operatorname{sen}\varphi_{\mu'}}\right)$$

Suponiendo para simplificar que haya límite ordinario de $\sqrt[n]{\rho_n}$, para $n\to$

y sea:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\rho_n} = 1$$

luego:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[\nu]{\rho_\nu} = 1$$

luego:

$$(146) \quad \lim_{n\to\infty} \frac{\log \rho_\nu}{\nu} = 0$$

y por ser:

$$\sqrt[n]{\rho_\nu} \equiv \left(\sqrt[\nu]{\rho_\nu}\right)^{\frac{\nu}{n}}$$

o bien:

$$(147) \quad \log\left(\sqrt[n]{\rho_\nu}\right) = \frac{\nu}{n} \cdot \frac{\log \rho_\nu}{\nu}$$

Por ser:

$$1 \leq \frac{p}{n} \leq q,$$

se deduce de (146) y (147) que es:

$$\lim_{n\to\infty} \log\left(\sqrt[n]{\rho_\nu}\right) = 0$$

o bien:

$$(148) \qquad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\rho_\nu} = 1$$

Según (145)y (148) es:

$$(149) \qquad \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} \leq \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\cos\varphi_{\mu'} + \operatorname{sen}\varphi_{\mu'}}$$

Ahora bien,los casos en que el punto:

$$\tau = R = \frac{1}{\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}}$$

es singular para f(z),hay que buscarlos en aquellas series:

$$\sum_0^\infty a_n z^n$$

tales que es:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \varphi_n = \tau < \frac{\pi}{q},$$

(τ=fijo);y aún para éstas entre aquéllas tales que:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\log\cos\varphi_n}{n} = 0,$$

Luego como buscamos condiciones suficientes para que el punto:

$$z = R,$$

sea regular para f(z),podemos suponer que:

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n = \frac{\pi}{q}$$

o bien:

$$(150) \qquad \lim_{n\to\infty} (\operatorname{sen} \varphi_n) = 1$$

Pero suponiendo que es:

a)
$$\lim_{n\to\infty} \cos \varphi_{n'} = -1$$

b)
$$\lim_{n\to\infty} \operatorname{sen} \varphi_{n''} = 1$$

c)
$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\log(\cos \varphi_{n'} + \operatorname{sen} \varphi_{n''})}{n} < 0$$

según (149) es:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1,$$

lo que nos dice que el punto:

$$z = R$$

es regular para f(z).

Un caso en que se puede asegurar que el punto:

$$z = R$$

es singular para f(z), cuando a_n varía en el primer cuadrante, es decir, cuando es:

$$0 \leq \varphi_n \leq \frac{\pi}{2},$$

lo constituye el siguiente teorema.

<u>Teorema 16.</u>

<u>Sea la serie:</u>

$$f(z) = \sum_{n=0}^{n=\infty} a_n \cdot z^n$$

, en la cual es:

$$0 \leq \varphi_n \leq \frac{\pi}{2}.$$

Llamemos φ_p al mayor(en sentido lato) de los términos de la sucesión:

$$\varphi_n, \quad \varphi_{n+1}, \quad \varphi_{n+2}, \text{-----}, \varphi_{2n};$$

y φ_q al menor (en sentido lato) de los términos de la misma sucesión.

Llamemos ρ_μ al menor (en sentido amplio) de los términos de la sucesión:

$$\rho_n, \quad \rho_{n+1}, \quad \rho_{n+2}, \text{----}, \rho_{2n}.$$

Supongamos que sea:

$$(151) \qquad \overline{\lim_{n \to \infty}} \sqrt[n]{\rho_\mu (\cos \varphi_p + \operatorname{sen} \varphi_q)} = 1.$$

En tales hipótesis es:

$$z = R$$

punto singular para f(z).

Conservando las notaciones anteriores se tiene:

$$|O_n| \geq \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|O'_n| + |O''_n| \right)$$

pero por ser:

$$0 \leq \varphi_n \leq \frac{\pi}{2}$$

se tiene:

$$(152) \qquad |O_n| \geq \frac{1}{\sqrt{2}} (O'_n + O''_n)$$

Pero según las hipótesis hechas se tiene:

$$(153) \qquad O'_n \geq \rho_\mu \cdot \cos \varphi_p \cdot O'''_n$$

$$(154) \qquad O''_n \geq \rho_\mu \cdot \operatorname{sen} \varphi_q \cdot O'''_n$$

De (152),(153) y (154) se infiere que:

$$|O'_n \geq \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot O'''_n (\rho_\mu \cdot \cos \varphi_p + \rho_\mu \cdot \operatorname{sen} \varphi_q)$$

luego:

$$\sqrt[n]{|O_n|} \geq \frac{1}{\sqrt[n]{2}} \cdot \sqrt[n]{O_n'''} \cdot \sqrt[n]{\rho_\nu(\cos\varphi_p + \operatorname{sen}\varphi_q)}$$

Luego:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|O_n|} \geq \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\rho_\nu(\cos\varphi_p + \operatorname{sen}\varphi_q)}$$

y según la hipótesis (151) es:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|O_n|} \geq 1.$$

esto es; el punto:

$$z = R$$

es singular para f(z).

Nótese que si no se verifica (151) se verifica necesariamente:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\rho_\nu(\cos\varphi_p + \operatorname{sen}\varphi_q)} < 1$$

pues si se verificáse que:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\rho_\nu(\cos\varphi_p + \operatorname{sen}\varphi_q)} > 1$$

se tendría que:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|O_n|} > 1,$$

lo que;como ya dijimos,es un absurdo.

Multitud de casos particulares y econsecuencias interesantes se pueden inferir de este último teorema.

666----------

PUNTOS SINGULARES Y PUNTOS REGULARES DE LAS FUNCIONES DETERMINANTES.

Todo lo que hemos dicho respecto de los puntos singulares y regulares de las funciones analíticas definidas por series potenciales vale, *mutatis mutandis*, para las funciones analíticas definidas por integrales potenciales e integrales determinantes.

Pero conviene enunciar y demostrar directamente tales teoremas para las funciones determinantes. Esto es lo que hacemos a continuación, obteniendo de paso algunos teoremas nuevos, que no tienen su correlativo para las series ~~o~~ integrales potenciales.

Por lo pronto el teorema correlativo del de Vivanti fué demostrado en páginas anteriores.

Para abreviar en todo lo que sigue, pongamos:

$$(155)\quad O_n \equiv \left(\frac{2e}{3n}\right)^n \cdot \int_n^{2n} a(t) \cdot t^n \cdot e^{-\frac{2}{3}t} \cdot dt$$

$$(156)\quad O'_n \equiv \left(\frac{2e}{3n}\right)^n \cdot \int_n^{2n} a'(t) \cdot t^n \cdot e^{-\frac{2}{3}t} \cdot dt \equiv \left(\frac{2e}{3n}\right)^n \cdot \int_n^{2n} \rho \cdot \cos\varphi \cdot t^n \cdot e^{-\frac{2}{3}t} \cdot dt$$

$$(157)\quad O''_n \equiv \left(\frac{2e}{3n}\right)^n \cdot \int_n^{2n} a''(t) \cdot t^n \cdot e^{-\frac{2}{3}t} \cdot dt \equiv \left(\frac{2e}{3n}\right)^n \cdot \int_n^{2n} \rho \cdot \operatorname{sen}\varphi \cdot t^n \cdot e^{-\frac{2}{3}t} \cdot dt$$

$$(158)\quad O'''_n \equiv \left(\frac{2e}{3n}\right)^n \cdot \int_n^{2n} t^n \cdot e^{-\frac{2}{3}t} \cdot dt; \quad \left(\text{segun } (104^{\text{VI}}) \text{ es: } \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{O'''_n} = 1\right)$$

$$(159)\quad a(t) \equiv a'(t) + i\, a''(t) \equiv \rho(t) \cdot [\cos\varphi(t) + i \operatorname{sen}\varphi(t)] \equiv \rho \cdot e^{\varphi i}$$

(se conoce que:

$$\mathcal{R}(a(t)) \equiv a'(t) \equiv \rho \cdot \cos\varphi$$

$$y: \quad \mathcal{I}(a(t)) \equiv a''(t) \equiv \rho \cdot \operatorname{sen}\varphi).$$

De (155),(156),(157) y (159) se deduce que:

$$O_n \equiv O'_n + i\,O''_n$$

luego:

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\left(|O'_n|+|O''_n|\right) \leq |O_n| \leq |O'_n|+|O''_n| .$$

Tengamos presente que la abscisa, σ, de convergencia de la integral:

$$f(z) \equiv \int_0^\infty a(t).e^{-tz}.dt$$

viene dada por la fórmula:

$$\sigma = \overline{\lim_{t\to+\infty}} \frac{\log \rho(t)}{t} = \overline{\lim_{t\to+\infty}} \log \sqrt[t]{\rho(t)}$$

El teorema análogo al de Fekete es:

Teorema 17.

Si a partir de un valor de t en adelante, el argumento $\varphi(t) \equiv \varphi$ de la función generatriz a(t) de la integral determinante:

$$\int_0^\infty a(t).e^{-tz}.dt;$$

satisface a la condición:

$$(160) \qquad -\tau \leq \varphi(t) \leq \tau < \frac{\pi}{2};$$

($\tau \equiv$ fijo), para $t \geq t_0$; el punto:

$$z = \sigma;$$

en que la recta de convergencia:

$$R(z) \equiv x = \sigma;$$

corta al eje real:

$$R(z) = x;$$

es singular para la función f(z).

Antecedido, si se verifica la condición de Fekete, es decir, la (160), como contamos los argumentos entre 0 y $+\pi$, y entre 0 y $-\pi$, se verifica que:

$$R(a(t)) \equiv a'(t) > 0$$

para $t \geq t_0$, t_0 fijo; luego:

$$\cos\varphi > 0,$$

para $t \geq t_0$; luego:

$$O'_n > 0,$$

para $t \geq t_0$; y por ser:

$$|O_n| \geq \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \left[|O'_n| + |O''_n| \right]$$

se tiene:

$$|O_n| \geq \frac{\sqrt{2}}{2} \left[O'_n + |O''_n| \right]$$

y con mayor razón:

$$(161) \qquad |O_n| \geq \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot O'_n,$$

para $t \geq t_0$.

Aplicando en (156) el teorema de la media:

$$O'_n = \left(\frac{2e}{3n}\right)^n \cdot \rho(\xi) \cdot \cos\varphi(\xi) \cdot \int_n^{2n} t^n \cdot e^{-\frac{2}{3}t} \cdot dt$$

o bien:

$$(162) \qquad O'_n = \rho(\xi) \cdot \cos\varphi(\xi) \cdot O''_n$$

de (161) y (162) se ve que para $t \geq t_0$ se tiene:

$$(163) \qquad |O_n| \geq \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \rho(\xi) \cdot \cos\varphi(\xi) \cdot O''_n,$$

donde es:

$$n < \xi \equiv \xi(n) < 2n$$

Luego tomando:

$$n > t_0$$

es:

$$\varphi(\xi) \leq \tau$$

luego:

$$\cos\varphi(\xi) \geq \cos\tau \equiv \text{fijo y} \geq 0 \tag{164}$$

Luego, según (163) y (164), para $t \geq t_0$ se tiene:

$$|O_n| \geq \frac{\sqrt{2}}{2} \cos\tau \cdot O_n'' \rho(\xi) \tag{165}$$

Teniendo en cuenta que:

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{\frac{\sqrt{2}}{2} \cos\tau} = 1$$

y la (158), de (165), se deduce que:

$$\overline{\lim_{n \to \infty}} \sqrt[n]{|O_n|} \geq \overline{\lim_{n \to \infty}} \sqrt[n]{\rho(\xi)} \tag{166}$$

Ahora bien, sin restringir en absoluto la generalidad, podemos suponer que es

$$c = 0$$

es decir:

$$\overline{\lim_{t \to +\infty}} \frac{\log \rho(t)}{t} = 0$$

o bien:

$$\overline{\lim_{t \to +\infty}} \log \sqrt[t]{\rho(t)} = 0 \tag{167}$$

Pero si:

$$\xi \to +\infty$$

luego:

$$n \to +\infty$$

y recíprocamente si:

$$n \to +\infty \qquad \xi \to +\infty,$$

luego:

$$\xi \to +\infty;$$

y según (167) es:

$$(168) \qquad \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\log \rho(\xi)}{\xi} = 0.$$

Además:

$$\frac{\log \rho(\xi)}{n} \equiv \frac{\xi}{n} \cdot \frac{\log \rho(\xi)}{\xi}$$

luego:

$$(169) \qquad \left|\frac{\log \rho(\xi)}{\xi}\right| < \left|\frac{\log \rho(\xi)}{n}\right| \equiv \frac{\xi}{n} \cdot \left|\frac{\log \rho(\xi)}{\xi}\right| < 2 \cdot \left|\frac{\log \rho(\xi)}{\xi}\right|.$$

De (168) y (169) se deduce que:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\log \rho(\xi)}{n} \equiv \overline{\lim_{n\to\infty}} \log \sqrt[n]{\rho(\xi)} = 0$$

luego:

$$(170) \qquad \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\rho(\xi)} = 1.$$

De (166) y (170) se infiere que:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|O_n|} \geq 1;$$

luego el punto:

$$z = \mathcal{C};$$

es singular para f(z).

Este teorema es susceptible de ampliarse mucho más, permitiendo al punto de afijo a(t) variar en dos ángulos opuestos por el vértice, siendo (0,0) dicho vértice como lo estipula el siguiente teorema.

Teorema 18.

Si a partir de un valor de t (que llamaremos

t_0 en adelante, el argumento, $\varphi(t)$, de $a(t)$, es tal que las diferencias:

$$\left|\frac{\pi}{2}-\varphi(t)\right|$$

y:

$$\left|-\frac{\pi}{2}-\varphi(t)\right| \equiv \left|\frac{\pi}{2}+\varphi(t)\right|;$$

se mantienen superiores a un número positivo δ, el punto:

$$z=0;$$

es singular para $f(z)$.

Tengamos presente que los argumentos los contamos entre $(0, +\pi)$ y $(0, -\pi)$.

Luego las hipótesis hecha equivalen a las siguientes:

$$\left.\begin{array}{ll} (171) & -\frac{\pi}{2}+\delta \leq \varphi(t) \leq \frac{\pi}{2}-\delta \\ (172) & \frac{\pi}{2}+\delta \leq \varphi(t) \leq \frac{3\pi}{2}-\delta \end{array}\right\}$$

para $t \geq t_0$

En otras palabras: los únicos puntos del plano complejo que excluye el teorema son aquéllos cuyos argumentos son tales que:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{\pi}{2}-\delta \leq \varphi(t) \leq \frac{\pi}{2}+\delta \\ -\frac{\pi}{2}-\delta \leq \varphi(t) \leq -\frac{\pi}{2}+\delta \end{array}\right\}$$

para $t \geq t_0$

La condición de Fekete es la (171).

La demostración del teorema es análoga à la del teorema dies y siete, a saber:

por ser:

$$|O_n| \geq \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|O'_n|+|O''_n|\right)$$

se tiene:

173 $$|O_n| \geq \frac{1}{\sqrt{2}}\,|O'_n|$$

para $t \geq t_0$:

Por el teorema de la media es:

$$(174) \qquad O'_n = \rho(\xi) \cdot \cos\varphi(\xi) \cdot O''_n$$

siendo:

$$n < \xi = \xi(n) < 2n$$

Según (173) y (174) es:

$$(175) \qquad |O_n| \geq \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot |\cos\varphi(\xi)| \cdot \rho(\xi) \cdot O''_n$$

Pero según las condiciones (171) y (172) existe un cierto número positivo fijo (al cual llamaremos η) tal que para $t \geq t_0$ es:

$$|\cos\varphi(t)| > \eta$$

luego tomando:

$$n > t_0$$

es:

$$|\cos\varphi(\xi)| > \eta$$

y según (175):

$$|O_n| > \frac{\eta}{\sqrt{2}} \cdot O''_n \, \rho(\xi)$$

luego:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|O_n|} \geq \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{\eta}{\sqrt{2}}} \cdot \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{O''_n} \cdot \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\rho(\xi)}$$

luego:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|O_n|} \geq \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\rho(\xi)}$$

Luego:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|O_n|} = 1$$

Luego:

$$z = \mathcal{C}$$

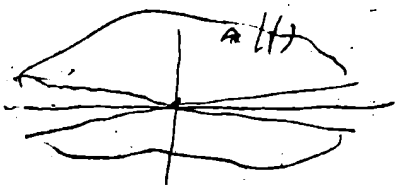
es punto singular para f(z).

Análogamente se prueba el siguiente teorema:

Teorema 19.

Si a partir de un valor de t en adelante, ($t \geq t_0 =$ fijo), el argumento, $\varphi(t)$, de a(t), es tal que su módulo así como el de la diferencia $\pi - \varphi(t)$ se mantiene superior a un número fijo y positivo δ, el punto:

$$z = \mathcal{C}$$



es singular para f(z).

Las hipótesis hechas equivalen a las dos siguientes:

$$\left.\begin{array}{ll} (176) & -\delta \leq \varphi(t) \geq \delta \\ (177) & -\pi + \delta \leq \varphi(t) \geq \pi - \delta \end{array}\right\}$$

para $t \geq t_0$. Es decir, los únicos puntos del plano complejo, afijos de a(t), $0 \leq t < +\infty$ son aquéllos cuyo argumento satisface a alguna de las dos condiciones siguientes:

$$\left.\begin{array}{l} -\delta \leq \varphi(t) \leq \delta \\ \text{o:} \quad -\pi + \delta \geq \varphi(t) \leq \pi - \delta \end{array}\right\}$$

para $t \geq t_0$.

En otras palabras, las hipótesis hechas equivalen a las siguientes:

existe un valor fijo y positivo η', tal que para:

$$t \geq t_0$$

es:

$$|\operatorname{sen} \varphi(t)| \geq \eta' > 0.$$

Luego, teniendo en cuenta que:

$$|a_n| \geq \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \left(|a_n'| + |a_n''|\right)$$

de donde:

$$|O_n| \geq \frac{1}{\sqrt{2}} |O'_n|$$

y aplicando el teorema de la media en (157):

$$O'_n = \left(\frac{2e}{3n}\right)^n \rho(\xi) \sin\varphi(\xi) \int_n^\infty t^n e^{-\frac{3}{2}t} dt$$

luego:

$$|O'_n| = \rho(\xi) \cdot |\sin\varphi(\xi)| \cdot O''_n$$

luego:

$$|O_n| \geq \frac{1}{\sqrt{2}} |\sin\varphi(\xi)| \, O''_n \cdot \rho(\xi)$$

sea:

$$n < \xi \equiv \xi(n) < 9n$$

tomando:

$$n \to \xi$$

se tiene:

$$|\sin\varphi(\xi)| \geq \eta > 0$$

($\eta \equiv$ fijo) y luego:

$$|O_n| \geq \frac{\eta}{\sqrt{2}} O''_n \rho(\xi)$$

luego:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|O_n|} \geq \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{\eta}{\sqrt{2}}} \cdot \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{O''_n} \cdot \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\rho(\xi)}$$

luego:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|O_n|} \geq \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\rho(\xi)}$$

luego:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|O_n|} = 1$$

luego:

$$z = C$$

es singular para f(z).

Los teoremas diez y ocho y diez y nueve no tienen su análogo para las series potenciales.

En efecto:

lo correlativodel punto:

$$z = C = \text{abscisa de convergencia}$$

en que la recta de convergencia:

$$R(z) = C;$$

de la integral: $\int_0^\infty a(t) \cdot e^{-tz} \cdot dt$

corta al eje real:

$$-\infty < R(z) < +\infty$$

en la series de potencias,es el punto:

$$z = R = \text{radio de convergencia}$$

en que la circunferencia de convergencia:

$$|z| = R$$

de la serie potencial: $\sum_0^\infty a_n \cdot z^n$

corta al semieje real y positivo:

$$R(z) > 0.$$

Ahora bien,puede cumplirse la condición del teorema dieciocho para a_n,es decir ser:

$$|\cos \varphi_n| > \eta$$

siendo η un número positivo fijo,para $n \geq n_0 = n_0(\eta)$,y sin embargo el punto

$$z = R$$

ser regular para:

$$f(z)=\sum_{0}^{\infty} a_n z^n$$

Basta ver que en la serie:

$$\sum a_n z^n = \sum_{0}^{\infty}(-1)^n z^n = 1-z+z^2-z^3+\cdots = \frac{1}{1+z}$$

donde es:

$$R=1$$

se tiene:

$$\cos\varphi_n = \begin{cases} \cos 0 = 1 \\ \cos \pi = -1 \end{cases}$$

luego:

$$|\cos\varphi_n| = 1$$

es decir, se cumple la condición del teorema diecisiete y sin embargo:

$$r=R=1$$

es regular para:

$$\frac{1}{1+z}$$

Análogamente para el teorema diecinueve, Consideremos la serie:

$$\sum a_n z^n = i-iz+iz^2-iz^3+\cdots = \frac{i}{1+z} = f(z)$$

donde es:

$$R=1$$

se tiene:

$$\operatorname{sen}\varphi_n = \begin{cases} \operatorname{sen}\frac{\pi}{2} = 1 \\ \operatorname{sen}\frac{3}{2}\pi = -1 \end{cases}$$

luego:

$$|\operatorname{sen}\varphi_m| = 1$$

luego se cumple la condición del teorema diecinueve y sin embargo el punto:

$$z = R = 1$$

es regular para:

$$\frac{i}{i+z}.$$

Es interesante el siguiente teorema:

Teorema20.

Sea la función f(z) definida por la integral

$$f(z) = \int_0^\infty a(t)e^{-tz}.dt.$$

Supongamos que la función generatríz a(t) éste contenida en un cierto recinto convexo,R,finito,demodo que la distancia del origen:

$$z = 0$$

al contorno de R sea mayor que cero,a partir de un valor de t en adelante. En tal hipótesis la abscisa de convergencia de la integral es:

$$C = 0$$

y el punto:

$$z = 0$$

es singular para f(z).

En efecto,la abscisa de convergencia viene dada por la fórmula:

$$C = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\log|a(t)|}{t};$$

pero por estar en R el punto cuyo afijo es a(t),a partir de un valor de t en adelante,se tiene que existen dos números positivos fijos m y M tales que:

$$m < |a(t)| < M$$

Luego:

$$\frac{\log m}{t} < \frac{\log |a(t)|}{t} < \frac{\log M}{t} \longrightarrow 0$$

luego:

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{\log a(t)}{t} = 0$$

es decir, es:

$$C = 0$$

Ahora bien, consideremos la función (que llamaremos $\underline{O_n}$):

$$O_n \equiv \left(\frac{2e}{3n}\right)^n \int_n^{2n} a(t) \cdot t^n e^{-\frac{2}{3}t} \cdot dt,$$

en virtud del teorema de la media de Weierstrass (para funciones complejas se puede poner:

$$O_n \equiv \left(\frac{2e}{3n}\right)^n (u+iv) \int_n^{2n} t^n e^{-\frac{2}{3}t} \cdot dt$$

siendo $\underline{u+iv}$ el afijo de un cierto punto interior a R; luego:

$$|O_n| \equiv |u+iv| \cdot \left(\frac{2e}{3n}\right)^n \int_n^{2n} t^n e^{-\frac{2}{3}t} \cdot dt$$

luego:

$$\sqrt[n]{|O_n|} = \sqrt[n]{|u+iv|} \cdot \sqrt[n]{\left(\frac{2e}{3n}\right)^n \int_n^{2n} t^n e^{-\frac{2}{3}t} \cdot dt}$$

de donde:

$$(178) \quad \sqrt[n]{m} \cdot \sqrt[n]{\left(\frac{2e}{3n}\right)^n \int_n^{2n} t^n e^{-\frac{2}{3}t} \cdot dt} < \sqrt[n]{|O_n|} < \sqrt[n]{M} \cdot \sqrt[n]{\left(\frac{2e}{3n}\right)^n \int_n^{2n} t^n e^{-\frac{2}{3}t} \cdot dt}$$

Pero:

$$(179) \quad \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{m} = 1$$

$$(180) \quad \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{M} = 1$$

$$(181) \quad \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{2e}{3n}\right)^n \int_n^{2n} t^n \cdot e^{-\frac{2}{3}t} \cdot dt} = 1.$$

De (178),(179),(180) y (181) se deduce que:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|O_n|} = 1;$$

es decir, el punto:

$$z = 0$$

es singular para f(z).-

Este teorema no es más general, ni más particular que el análogo de Fekete, es decir, la relación no es de inclusión sino de imbricación.

Análogamente existe un teorema para las series potenciales, a saber:

Teorema 21:

Si los coeficientes a_n de la serie:

$$\sum_{n=0}^{n=\infty} a_n z^n$$

a partir de un valor de n en adelante están contenido en un recinto convexo, R finito tal que la distancia del origen:

$$z = 0$$

a su contorno es mayor que cero.

En tal hipótesis el radio de convergencia de la serie potencial es:

$$R = 1$$

y el punto:

$$z = 1$$

es singular para f(z).

Obsérvese que la condición del que recinto R sea finito equivale a la condición:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$$

o mejor aún:

$$|a_n| < K \equiv \text{constante.}$$

Observación importante:

De acuerdo con este teorema se tiene,como un corolario muy importante.

Teorema22.

Si existe un círculo tangente a los ejes coordenadas situado en el primer cuadrante,de modo que a partir de un valor de n en adelante,los coeficientes a_n sean afijos de puntos situados en el interior o en el contorno de dicho círculo,el punto:

$$z = 1$$

es singular para f(z).

Corolarios muy importantes se podría deducir de los teoremas vêintiuno y veintidós.

Ahora bien,existe como se puede demostrar,para las integrales determinantes un teorema que es en cierto modo análogo al de Fabry para las series potenciales.Recordemos el teorema de Fabry de las series potenciales (en su forma restringida):

"dada la serie:

$$\sum a_n z^n,$$

si existe límite ordinario de:

$$\frac{a_n}{a_{n+1}},$$

para $n \to \infty$ es:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \alpha$$

el punto:

$$z = \alpha,$$

que está situado sobre la circunferencia de convergencia de la serie dada, es singular para f(z)."

Enunciemos ahora el teorema de Fabry para las series determinantes, para lo cual basta contrasformar el enunciado del teorema anterior, teniéndose:

"Dada la serie determinante:

$$f(z)=\sum a_n e^{nz},$$

si existe límite ordinario de:

$$\frac{a_n}{a_{n+1}},$$

para $n\to\infty$ y es:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}}=\alpha, \tag{182}$$

el punto:

$$z=\log\left(\frac{1}{\alpha}\right)=-\log\alpha,$$

que está situado sobre la recta de convergencia de la serie dada, es singular para f(z)"

Ahora bien, el cociente:

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}$$

no tiene sentido, para la función generatriz a(t), de una integral determinante, entonces veámos si la condición (182) se puede poner bajo una forma cuya córelativa para la integral tenga sentido.

En efecto, la condición (182) es equivalente a la siguiente:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{a_n}{a_{n+1}}\right)=1-\alpha$$

es decir, a la

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\Delta a_n}{a_{n+1}}=1-\alpha \tag{182'}$$

(siendo; $\Delta a_n = a_{n+1} - a_n$); luego el teórema de Fabry para la serie determinante se puede enunciar así:

"Dada la serie:

$$f(z) = \sum a_n . e^{-nz};$$

si existe límite ordinario de:

$$\frac{a_n}{a_{n+1}},$$

para $n \to \infty$, y es:

$$(182') \qquad \lim_{n \to \infty} \frac{\Delta a_n}{a_{n+1}} = \beta; \qquad (\beta = 1 - \alpha \therefore \alpha = 1 - \beta);$$

el punto:

$$z = \log\left(\frac{1}{1-\beta}\right) = -\log(1-\beta);$$

que está situado sobre la recta de convergencia de la serie, es singular para f(z)"

Este enunciado del teorema de Fabry tiene sentido para la integral, pues lo correlativo de la diferencia:

$$\Delta a_n = a_{n+1} - a_n,$$

es la derivada de a(t), respecto de t, y por lo tanto lo correlativo del cociente:

$$\frac{\Delta a_n}{a_{n+1}}$$

es la derivada logarítmica de a(t), esto es:

$$\mathcal{D} \log a(t) = \frac{\mathcal{D} a(t)}{a(t)}$$

Por lo tanto el correlativo del teorema de Fabry para la integral sería:

"Dada la integral determinante:

$$f(z) = \int_0^\infty a(t) . e^{-tz} . dt,$$

si existe límite ordinario de $\frac{D\,a(t)}{a(t)}$, para $t \to +\infty$, y es:

(183) $$\lim_{t \to +\infty} \frac{D\,a(t)}{a(t)} = \beta,$$

el punto:

$$z = -\log(1-\beta) = \log\left(\frac{1}{1-\beta}\right);$$

es singular para f(z):

Veámos ante todo si el punto:

$$z = -\log(1-\beta)$$

está situado sobre la recta de convergencia de la integral.

La abscisa, C, de convergencia de la integral viene dada por la fórmula:

$$C = \overline{\lim_{t \to +\infty}} \frac{\log|a(t)|}{t} = \overline{\lim_{t \to +\infty}} \frac{\log \rho(t)}{t}$$

Pero:

$$\log a(t) = \log \rho + i\varphi$$

siendo:

$$\rho = \rho(t) = |a(t)|$$

y:

$$\varphi = \varphi(t) = \arg a(t)$$

luego:

$$D \log a(t) = \frac{D\,a(t)}{a(t)} = D \log \rho + i\,D\varphi$$

y como según (183) es:

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{D\,a(t)}{a(t)} = \beta_1 + i\beta_2$$

siendo:

$$\beta = \beta_1 + i\beta_2 \left\{ \begin{array}{l} \beta_1 = R(\beta) \\ \beta_2 = \mathcal{I}(\beta) \end{array} \right.$$

se tiene:

(184) $$\lim_{t \to \infty} D \log \rho = \beta_1$$

(185) $$\lim_{t \to \infty} D\varphi = \beta_2$$

Por el teorema de L'Hôpital se tiene:

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\log\rho(t)}{t}=\lim_{t\to\infty}\frac{D\log\rho}{Dt}=\lim_{t\to\infty}D\log\rho=\beta_1$$

luego:

$$C=\beta_1=R(\beta)$$

luego para que el punto:

$$z=-\log(1-\beta)$$

éste situado sobre la recta de convergencia de la integral se requiere que sea:

$$R\left[-\log(1-\beta)\right]=R(\beta)$$

o sea:

$$R\left[-\log\left((1-\beta_1)-i\beta_2\right)\right]=\beta_1$$

o sea:

$$-\log\sqrt{(1-\beta_1)^2+\beta_2^2}=\beta_1 \tag{186}$$

<u>lo que no es cierto en genera</u>. Para que (186) sea cierta debe ser:

$$\sqrt{(1-\beta_1)^2+\beta_2^2}=e^{-\beta_1}$$

$$(1-\beta_1)^2+\beta_2^2=e^{-2\beta_1}$$

$$\beta_2=\pm\sqrt{e^{-2\beta_1}-(1-\beta_1)^2} \tag{187}$$

De lo que se deduce que el teorema de Fabry no vale <u>estrictamente</u> para las integrales; cosa que se ve directamente en el ejemplo siguiente:

Sea:

$$\int_0^\infty e^t\,e^{-tz}\,dt=\int_0^\infty e^{t(1-z)}\,dt=\left[\frac{e^{t(1-z)}}{1-z}\right]_0^\infty=\frac{1}{z-1}$$

siendo:

$$c=1$$

y el punto:

$$z=1$$

es singular para:

$$\frac{1}{z-1};$$

y sin embargo es:

$$-\log(1-\beta)=-\log\left[1-\lim_{t\to\infty}\frac{\mathcal{D}a(t)}{a(t)}\right]=-\log\left[1-\lim_{t\to\infty}\frac{e^t}{e^t}\right]=$$

$$=-\log\left[1-1\right]=-\infty$$

luego no vale un teórema correlativo del de Fabry para las integrales determinantes:

El teorema que se aproxima al de Fabry y que es válido es el siguiente:

Teorema 23.

Dada la integral determinante:

$$f(z)=\int_0^\infty a(t).e^{tz}.dt;$$

si existe límite ordinario de la derivada logarítmica de la función generatriz a(t), para $t\to\infty$ es:

$$(188)\qquad \lim_{t\to\infty}\mathcal{D}\log a(t)=\lim_{t\to\infty}\frac{\mathcal{D}a(t)}{a(t)}=\alpha;$$

el punto:

$$z=\alpha$$

que está situado sobre la recta de convergencia:

$$R(z)=C=\lim_{t\to\infty}\frac{\log|a(t)|}{t};$$

de la integral dada, es singular para la función f(z).

Ante todo veámos que el punto:

$$z=\alpha$$

pertenece a la recta de convergencia.

En efecto, la abscisa de convergencia viene dada por la fórmula:

$$C=\overline{\lim_{t\to\infty}}\frac{\log|a(t)|}{t}=\overline{\lim_{t\to\infty}}\frac{\log\rho}{t}.$$

Si es:

$$z=\alpha$$

se tiene:

$$R(z)=R(\alpha)$$

luego para que el punto:

$$z=\alpha$$

pertenezca a la recta de convergencia debe ser:

$$(189)\qquad R(\alpha)=\overline{\lim_{t\to\infty}}\frac{\log\rho}{t}$$

Como es:

$$\log a(t)=\log\rho+i\varphi$$

se tiene:

$$\vartheta\log a(t)=\vartheta\log\rho+i\,\vartheta\varphi$$

de donde:

$$(190)\qquad \lim_{t\to\infty}\vartheta\log a(t)=\lim_{t\to\infty}\vartheta\log\rho+i\lim_{t\to\infty}\vartheta\varphi$$

Según (188) y (190) se tiene:

$$\lim_{t\to\infty}\vartheta\log\rho+i\lim_{t\to\infty}\vartheta\varphi=\alpha=R(\alpha)+i\,\mathcal{Y}(\alpha)$$

luego:

$$\lim_{t\to\infty}\vartheta\log\rho=R(\alpha)$$

o bien:

$$(191)\qquad \lim_{t\to\infty}\frac{\vartheta\log\rho}{\vartheta t}=R(\alpha)$$

Según la regla de L'Hôpital de (191) se deduce (189), es decir, el punto

pertenece á la recta de convergencia de la integral.

Pasemos ahora a la demostración de la segunda parte del teorema; y sin restringir, en absoluto, la generalidad podemos suponer que es:

$$\alpha = 0$$

A tal efecto se tiene:

$$O_n \equiv \left(\frac{2\rho}{3n}\right)^n \int_n^{2n} a(t)\, t^n e^{-\frac{2}{3}t}\, dt$$

$$O'_n \equiv \left(\frac{2\rho}{3n}\right)^n \int_n^{2n} \rho \cos\varphi\, t^n e^{-\frac{2}{3}t}\, dt$$

$$O''_n \equiv \left(\frac{2\rho}{3n}\right)^n \int_n^{2n} \rho \operatorname{sen}\varphi\, t^n e^{-\frac{2}{3}t}\, dt$$

luego:

$$O_n = O'_n + i O''_n$$

de donde:

$$(192) \qquad |O_n^2| = \overline{O'_n}^2 + \overline{O''_n}^2$$

Transformemos integrando por partes las expresiones: O'_n y O''_n

Pongamos para abreviar:

$$(193) \qquad \alpha \equiv \alpha(t) = \int_n^t \rho\, t^n e^{-\frac{2}{3}t}\, dt$$

luego:

$$(194) \qquad \int_n^{2n} \rho \cos\varphi\, t^n e^{-\frac{2}{3}t}\, dt = \int_n^{2n} \cos\varphi\, d\alpha(t) =$$

$$= \Big[\alpha(t) \cos\varphi(t)\Big]_n^{2n} - \int_n^{2n} \alpha(t)\, D\cos\varphi(t)\, dt =$$

$$= \alpha(2n) \cos\varphi(2n) - \int_n^{2n} \alpha(t)\, D\cos\varphi(t)\, dt$$

Por el teorema de la media se tiene:

$$(195)\quad \int_n^{2n} \alpha(t)\, D\cos\varphi(t)\, dt = D\cos\varphi(\xi) \int_n^{2n} \alpha(t)\, dt$$

siendo:

$$n < \xi = \xi(n) < 2n$$

Integrando nuevamente por partes:

$$(196)\quad \int_n^{2n} \alpha(t)\, dt = \left[t\,\alpha(t)\right]_n^{2n} - \int_n^{2n} t\, d\alpha(t) =$$

$$= 2n\,\alpha(2n) - \int_n^{2n} t\, \rho\, t^n e^{-\frac{2}{3}t}\, dt =$$

$$= 2n\,\alpha(2n) - \int_n^{2n} \rho\, t^{n+1} e^{-\frac{2}{3}t}\, dt$$

Llamando:

$$\gamma_n = \int_n^{2n} \rho\, t^n e^{-\frac{2}{3}t}\, dt = \alpha(2n)$$

y:

$$K_n = \int_n^{2n} \rho\, t^{n+1} e^{-\frac{2}{3}t}\, dt$$

de (194),(195) y (196) se tiene que:

$$\int_n^{2n} \rho\cos\varphi\, t^n e^{-\frac{2}{3}t}\, dt = \gamma_n \cos\varphi(2n) - D\cos\varphi(\xi)\left[2n\,\gamma_n - K_n\right] =$$

$$= \gamma_n\left[\cos\varphi(2n) - D\cos\varphi(\xi)\left(2n - \frac{K_n}{\gamma_n}\right)\right]$$

de donde:

$$(197)\quad O'_n = \left(\frac{2e}{3n}\right)^n \gamma_n \left[\cos\varphi(2n) - D\cos\varphi(\xi)\cdot\left(2n - \frac{K_n}{\gamma_n}\right)\right]$$

Análogamente para O''_n se tiene:

$$(198)\quad O''_n = \left(\frac{2e}{3n}\right)^n \cdot J_n \left[\operatorname{sen}\varphi(2n) - \Delta \operatorname{sen}\varphi(\xi)\cdot\left(2n - \frac{k_n}{J_n}\right)\right]$$

siendo:

$$n < \xi' \equiv \xi'(n) < 2n.$$

Según (192),(197) y (198) se tiene que:

$$|O_n^2| = \left(\frac{2e}{3n}\right)^{2n} \cdot J_n^2 \left[1 + \overline{\Delta\cos\varphi(\xi)}^2 \left(2n - \frac{k_n}{J_n}\right)^2 + \overline{\Delta\operatorname{sen}\varphi(\xi')}^2 \left(2n - \frac{k_n}{J_n}\right)^2 - \right.$$

$$- 2\cos\varphi(2n)\cdot\Delta\cos\varphi(\xi)\cdot\left(2n - \frac{k_n}{J_n}\right) -$$

$$\left. - 2\operatorname{sen}\varphi(2n)\cdot\Delta\operatorname{sen}\varphi(\xi')\cdot\left(2n - \frac{k_n}{J_n}\right)\right]$$

luego:

$$(199)\quad |O_n^2| = \left(\frac{2e}{3n}\right)^{2n} \cdot J_n^2 \left[\left(2n - \frac{k_n}{J_n}\right)^2 \cdot \left(\overline{\Delta\cos\varphi(\xi)}^2 + \overline{\Delta\operatorname{sen}\varphi(\xi')}^2\right) - \right.$$

$$\left. - 2\left(2n - \frac{k_n}{J_n}\right)\left(\cos\varphi(2n)\cdot\Delta\cos\varphi(\xi) + \operatorname{sen}\varphi(2n)\cdot\Delta\operatorname{sen}\varphi(\xi')\right) + 1\right].$$

Ahora bien, por hipótesis es:

$$\lim_{t\to\infty} \Delta \log \rho(t) = 0\,;$$

luego dado un número ε positivo arbitrario, existe un valor de t, que llamaremos:

$$t_0 \equiv t_0(\varepsilon)$$

tal que para:

$$t \geq t_0$$

es:

$$-\varepsilon < D \log \rho(t) < \varepsilon$$

integrando entre n y t, tomando:

$$t > n > t_0$$

se tiene:

$$-\varepsilon(t-n) < \log \rho(t) - \log \rho(n) < \varepsilon(t-n)$$

o bien:

$$\rho(n) \cdot e^{-\varepsilon(t-n)} < \rho(t) < \rho(n) \cdot e^{\varepsilon(t-n)}$$

Según esta desigualdad se tiene para J_n que:

$$\int_n^{2n} \rho(n) \cdot e^{\varepsilon n} e^{-\varepsilon t} t^n \cdot e^{-\frac{2}{3}t} \cdot dt < J_n < \int_n^{2n} \rho(n) \cdot e^{-\varepsilon n} \cdot e^{\varepsilon t} \cdot t^n \cdot e^{-\frac{2}{3}t} \cdot dt$$

o bien:

$$(200) \quad \rho(n) \cdot e^{\varepsilon n} \cdot \int_n^{2n} e^{-\varepsilon t} \cdot t^n e^{-\frac{2}{3}t} \cdot dt < J_n < \rho(n) \cdot e^{-\varepsilon n} \int_n^{2n} e^{\varepsilon t} \cdot t^n \cdot e^{-\frac{2}{3}t} \cdot dt.$$

Según el teorema de la media se tiene:

$$(201) \quad \int_n^{2n} e^{\varepsilon t} \cdot t^n e^{-\frac{2}{3}t} \cdot dt = e^{\varepsilon \xi''} \int_n^{2n} t^n e^{-\frac{2}{3}t} \, dt < e^{2n\varepsilon} \cdot \int_n^{2n} t^n e^{-\frac{2}{3}t} \, dt$$

$$(202) \quad \int_n^{2n} e^{-\varepsilon t} \cdot t^n e^{-\frac{2}{3}t} \cdot dt = e^{-\varepsilon \xi''} \cdot \int_n^{2n} t^n \cdot e^{-\frac{2}{3}t} \cdot dt > e^{-2n\varepsilon} \cdot \int_n^{2n} t^n e^{-\frac{2}{3}t} \, dt.$$

Según (200), (201) y (202) se tiene:

$$\rho(n) \cdot e^{-n\varepsilon} \cdot \int_n^{2n} t^n e^{-\frac{2}{3}t} \cdot dt < J_n < \rho(n) \cdot e^{-\varepsilon n} \cdot \int_n^{2n} t^n \cdot e^{-\frac{2}{3}t} \cdot dt$$

luego:

$$\rho(n) \cdot e^{-n\varepsilon} \cdot O''_n < \left(\frac{2e}{3n}\right)^n \cdot J_n < \rho(n) \cdot e^{\varepsilon n} \cdot O''_n$$

luego:

$$(203)\quad \sqrt[n]{\rho(n)}\cdot e^{-\varepsilon}\sqrt[n]{O_n'''} < \sqrt[n]{\left(\frac{2e}{3n}\right)^n \cdot J_n} < \sqrt[n]{\rho(n)}\cdot e^{\varepsilon}\sqrt[n]{O_n'''}$$

Pero:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\log\rho(n)}{n} = \lim_{n\to\infty} \theta\log\rho(n) = 0$$

luego:

$$(204)\quad \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\rho(n)} = 1.$$

Recordemos además que es:

$$(205)\quad \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{O_n'''} = 1$$

Luego según (203),(204) y (205) se tiene:

$$206\quad e^{-\varepsilon} \leq \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{2e}{3n}\right)^n \cdot J_n} \leq e^{\varepsilon}$$

Como el límite, para $n\to\infty$, de:

$$\sqrt[n]{\left(\frac{2e}{3n}\right)^n \cdot J_n}$$

es independiente de ε, tomando límites para $\varepsilon\to 0$, en (206) se tiene:

$$1 \leq \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{2e}{3n}\right)^n \cdot J_n} \leq 1$$

luego:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{2e}{3n}\right)^n \cdot J_n} = 1$$

o bien:

$$(207)\quad \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{2e}{3n}\right)^n \cdot J^2} = 1$$

Según (199) y (207) se tiene:

$$(208)\quad \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{Q} = \lim_{n\to\infty}\left[\left(2n-\frac{k_n}{7_n}\right)^2\left(\vartheta\cos\varphi(\xi)^2 + \vartheta\,\mathrm{sen}\,\varphi(\xi)^2\right) - 2\left(2n-\frac{k_n}{7_n}\right)\left(\cos\varphi(2n)\cdot\vartheta\cos\varphi(\xi) + \mathrm{sen}\,\varphi(2n)\cdot\vartheta\,\mathrm{sen}\,\varphi(\xi)\right) + 1\right]^{\frac{1}{2n}}$$

Además, por hipótesis es:

$$\lim_{t\to\infty} \Delta\varphi(t)=0;$$

luego:

$$\Delta\cos\varphi(t)=-\operatorname{sen}\varphi(t)\cdot\Delta\varphi(t)\longrightarrow 0;$$

$$\Delta\operatorname{sen}\varphi(t)=\cos\varphi(t)\cdot\Delta\varphi(t)\longrightarrow 0;$$

por lo tanto:

$$\left.\begin{array}{l}\overline{\Delta\cos\varphi(\xi)}^2+\overline{\Delta\operatorname{sen}\varphi(\xi')}^2\longrightarrow 0\\ \cos\varphi(2n)\cdot\Delta\cos\varphi(\xi)+\operatorname{sen}\varphi(2n)\cdot\Delta\operatorname{sen}\varphi(\xi')\to 0\end{array}\right\}\text{para } n\to\infty$$

poniendo:

$$0<p\equiv p(n)\equiv\overline{\Delta\cos\varphi(\xi)}^2+\overline{\Delta\operatorname{sen}\varphi(\xi')}^2\longrightarrow 0$$

y:

$$q\equiv q(n)\equiv\cos\varphi(2n)\cdot\Delta\cos\varphi(\xi)+\operatorname{sen}\varphi(2n)\cdot\Delta\operatorname{sen}\varphi(\xi')\to 0$$

según (208) se tiene:

$$(209)\quad \overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[2n]{|a_n|}=\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[2n]{\left(2n-\frac{k_n}{j_n}\right)^2\cdot p-2\left(2n-\frac{k_n}{j_n}\right)\cdot q+1}.$$

Teniendo en cuenta que:

$$0<2n-\frac{k_n}{j_n}<n$$

y que:

$$\lim_{n\to\infty} p=\lim_{n\to\infty} q=0$$

de (209) se infiere que:

$$\overline{\lim_{n \to \infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$$

esto es, el punto:

$$z = 1$$

es singular para f(z).

Todos los teoremas conocidos sobre los puntos singulares situados en la circunferencia de convergencia,así como sus correlativos para las integrales determinantes,con siertas generalizaciones pueden demostrarse mediante los métodos arriba expuestos;cosa que no la haremos expresamente para no extendernos demasiado.

Además,como ya dijimos,el criterio utilizado para el reconocimiento de las singularidades situadas sobre la recta o circunferencia de convergencia de una integral determinante o serie potencial,respectivamente,sirve:para construir series potenciales tales que todos los puntos de su circunferencia de convergencia sean singulares para las funciones que ellas definen;para construir integrales determinantes tales que todos los puntos de su recta de convergencia sean o regulares o singulares para las funciones análiticas que dichas integrales definen.

Como complemento importante al criterio establecido veámos lo que sucede con el límite superior, para $n \to \infty$, de la función Q_n cuando estase aplica a un punto interior del semiplano de convergencia de la integral.

A todo efecto se tiene los siguientes teoremas:

Teorema 24.

Dada la función analítica f(z) definida por la integral determinante:

$$\int_0^\infty a(t).e^{-tz}.dt \;;$$

cuya abscisa de convergencia condicional es C(C es finita) se tiene que:

$$\overline{\lim_{n \to \infty}} \sqrt[n]{\left(\frac{\sigma_1 e}{n}\right)^n . \left| \int_{\frac{n}{\sigma_1}(1-\omega)}^{\frac{n}{\sigma_1}(1+\omega)} a(t).e^{-(C_1+i\gamma_1)t}\, t^n . e^{-t\sigma_1}.dt \right|} > 1$$

donde es:

$$z_1 \equiv C_1 + i\gamma_1$$

un punto cualquiera interior al semiplano de convergencia de la integral, es decir:

$$C_1 > C \;;$$

$\gamma_1 \equiv$ arbitrario; σ_1 un número real arbitrario mayor que C_1 y ω un número positivo aebitrario menor que la unidad.

Teorema 25.

Sea la función analítica f(z) definida por la serie potencial:

$$\sum_{n=0}^{n=\infty} a_n z^n$$

cuyo radio de convergencia es R(R es distinto de cero).

Supongamos que:el punto: $z_1 = R_1 . e^{\varphi_1 i} = R_1(\cos\varphi_1 + i \operatorname{sen}\varphi_1)$;

Sea interior al interior del círculo de convergencia de la serie, es decir:

$$R_1 < R;$$

que: ω sea un número arbitrario positivo y menor que la unidad y que: σ sea un número arbitrario positivo y menor que la unidad.

En tal hipótesis se tiene:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\left(\frac{\sigma e}{n}\right)^n \cdot \left| \sum_{\frac{n}{\sigma}(1-\omega)\leq m\leq \frac{n}{\sigma}(1+\omega)} a_m \cdot R_1^m \cdot e^{m\varphi_1 i} \cdot m^n \cdot e^{-m\sigma_1} \right|} > 1.$$

Las demostraciones de los teoremas veinticuatro y veinticinco son completamente análogas a las del teorema primero, puesto que, en el fondo, éstos dos últimos teoremas expresan, respectivamente, lo siguiente:

a) el radio de convergencia de la serie:

$$\int_0^\sigma a(t) \cdot e^{-tz} \cdot dt = f(z) = \sum \frac{f^{(n)}(z_1+\sigma_1)}{n!} \cdot \left[z-(z_1+\sigma_1)\right]^n$$

es mayor que:

$$\sigma_1 - \varrho_1$$

es decir, el punto:

$$z_1 \equiv \varrho_1 + i\gamma_1$$

es regular para f(z); y:

b) el radio de convergencia de la serie:

$$\sum a_n z^n = f(z) = \sum \frac{f^{(n)}(z_1)}{n!} (z-z_1)^n$$

es mayor que:

$$|z_1 - \sigma_1|$$

es decir, el punto:

$$z_1 \equiv R_1 \cdot e^{\varphi_1 i}$$

es regular para f(z).

Carlos Biggeri.

EL CRITERIO FUNDAMENTAL Y EL TEOREMA DE LA SUMACION DE LAS SINGULARIDADES.

Aplicando el teorema de Hadamard sobre la multiplicación de las singularidades se obtienen siertos teoremas que sería difícil demostrarlos directamente.

Recordemos dicho teorema:

"Dadas las funciones analíticas f(z) y g(z), definidas, respectivamente, por las series potenciales:

$$f(z)=\sum_{n=0}^{n=\infty} a_n z^n ;$$

y:

$$g(z)=\sum_{n=0}^{n=\infty} a_n z^n ;$$

(cuyos radios de convergencia son:

$$R=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}} , \quad y , \quad R'=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|b_n|}} ;$$

si formamos la serie:

$$\sum_{n=0}^{n=\infty}(a_n b_n)\cdot z^n ;$$

(cuyos radios de convergencias es:

$$R''=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n b_n|}} \geq \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}}\cdot\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|b_n|}} = R.R') ;$$

la función analítica h(z) definida por el elemento:

$$\sum_{n=0}^{n=\infty}(a_n b_n)\cdot z^n ;$$

es holomorfa, por lo menos, en la estrella rectilínea cuyos vértices se ob-

tienen multiplicando cada vértice de la estrella de f(z) por cada vértice de la estrella de g(z);dicho en otros términos:

a)el producto de un punto regular para f(z) por un punto regular de g(z) es un punto regular para h(z);

b)el producto de un punto regular para f(z) por un punto singular para g(z),o viceversa,es un punto regular para h(z);

c)y del producto de un punto singular para f(z) por un punto singular para g(z),en general no puede decirse nada.

Enunciado más brevemente sería:

los puntos singulares de h(z) son,a lo sumo,los productos de los puntos singulares de f(z)por los puntos singulares de g(z).

Supongamosa ahora que alguna de las dos funciones:

$$\sqrt[n]{|a_n|}\ ,\quad o,\quad \sqrt[n]{|b_n|}$$

tenga límite ordinario,para $n\to\infty$,en otras palabras,supongamos que la relación:

$$R''\geq R\cdot R'$$

se transforme en igualdad

$$R=R\cdot R'.$$

(En realidad la segunda suposición es más general que la primera pues en algunos casos puede suceder que:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\left(\sqrt[n]{|a_n|}\cdot\sqrt[n]{|b_n|}\right)=\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}\cdot\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|b_n|}\ ).$$

Sin restringir,en absoluto,la generalidad,supongamos que sea:

$$R=R'=1;$$

luego:

$$R''=1.$$

Llamemos:

$$A_n,\ B_n,\ C_n,$$

a las "funciones de singularidades" (véase más adelante) correspondients, respectivamente, a f(z), g(z) y h(z) es decir, pongamos:

$$\left.\begin{aligned} A_n &\equiv \left(\frac{2e}{3n}\right)^n \cdot \sum_{m=n}^{m=2n} a_m \cdot m^n \cdot e^{-\frac{2}{3}n} \\ B_n &\equiv \left(\frac{2e}{3n}\right)^n \sum_{m=n}^{m=2n} b_m \cdot m^n \cdot e^{-\frac{2}{3}n} \\ C_n &\equiv \left(\frac{2e}{3n}\right)^n \sum_{m=n}^{m=2n} a_m \cdot b_m \cdot m^n \cdot e^{-\frac{2}{3}n} \end{aligned}\right\}$$

Por lo tanto, según el teorema de Hadamard, se tiene que:

a) si es:

$$\left.\begin{aligned} &\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|A_n|} < 1 \\ &\text{y:} \\ &\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|B_n|} < 1 \end{aligned}\right\}$$

se verifica que:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|C_n|} < 1;$$

b) si es:

$$\left.\begin{aligned} &\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|A_n|} < 1 \\ &\text{y:} \\ &\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|B_n|} = 1 \end{aligned}\right\} \text{ o bien } \left\{\begin{aligned} &\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|A_n|} = 1 \\ &\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|B_n|} < 1 \end{aligned}\right\}$$

se verifica: que:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|C_n|} < 1;$$

c) se tiene que:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|C_n|} < 1$$

si fuera:

$$\left.\begin{array}{l} \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|A_n|} = 1 \\ \text{y:} \\ \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|B_n|} < 1 \end{array}\right\}$$

d) si es:

$$\left.\begin{array}{l} \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|A_n|} = 1 \\ \text{y:} \\ \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|B_n|} = 1 \end{array}\right\}$$

se tiene que:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|C_n|} \leq 1.$$

Como dijimos, demostrar directamente, las propiedades enunciadas, a, b, c, y d sería sumamente laborioso.

Estas propiedades tambien son válidas para las integrales.

A saber:

"Sean a(t) y b(t) funciones (reales ó complejas) integrables sobre todo intervalo finito del semieje real y positivo:

$$0 \leq t < +\infty.$$

Supongamos que alguna de las dos funciones:

$$\frac{\log|a(t)|}{t}; \quad o; \quad \frac{\log|b(t)|}{t};$$

tenga límite ordinario, para $t \to +\infty$, igual a cero, y que el límite superior de la otra, para $t \to +\infty$, sea también cero; en otras palabras, supongamos que se verifique alguna de las dos hipótesis siguientes:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{\log|a(t)|}{t} = 0 \\ \text{y:} \\ \overline{\lim\limits_{t\to\infty}} \dfrac{\log|b(t)|}{t} = 0 \end{array}\right\}$$

o bien:

$$\left.\begin{array}{l} \overline{\lim\limits_{t\to\infty}} \dfrac{\log|a(t)|}{t} = 0 \\ \text{y:} \\ \lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{\log|b(t)|}{t} = 0 \end{array}\right\}$$

Pongamos:

$$\left.\begin{array}{l} A_n \equiv \left(\dfrac{2e}{3n}\right)^n \cdot \displaystyle\int_n^{2n} a(t)\cdot t^n \cdot e^{-\frac{2}{3}t} \cdot dt \\ B_n \equiv \left(\dfrac{2e}{3n}\right)^n \cdot \displaystyle\int_n^{2n} b(t)\cdot t^n \cdot e^{-\frac{2}{3}t} \cdot dt \\ C_n \equiv \left(\dfrac{2e}{3n}\right)^n \cdot \displaystyle\int_n^{2n} a(t)\cdot b(t)\cdot t^n \cdot e^{-\frac{2}{3}t} \cdot dt \end{array}\right\}$$

En tales hipótesis se tiene:

a) si es:

$$\left.\begin{array}{l} \overline{\lim} \sqrt[n]{|A_n|} < 1 \\ \text{y:} \\ \overline{\lim} \sqrt[n]{|B_n|} < 1 \end{array}\right\}$$

se verifica que:

$$\overline{\lim}\sqrt[n]{|C_n|}<1,$$

b) si es:

$$\left.\begin{array}{l}\overline{\lim}\sqrt[n]{|A_n|}<1\\ \text{y:}\\ \overline{\lim}\sqrt[n]{|B_n|}=1\end{array}\right\}$$

o bien:

$$\left.\begin{array}{l}\overline{\lim}\sqrt[n]{|A_n|}=1\\ \text{y:}\\ \overline{\lim}\sqrt[n]{|B_n|}<1\end{array}\right\}$$

se tiene que:

$$\overline{\lim}\sqrt[n]{|C_n|}<1,$$

c) si es:

$$\left.\begin{array}{l}\overline{\lim}\sqrt[n]{|A_n|}=1\\ \text{y:}\\ \overline{\lim}\sqrt[n]{|B_n|}=1\end{array}\right\}$$

se tiene que:

$$\overline{\lim}\sqrt[n]{|C_n|}\leq 1$$

Este teorema (cuya demostración directa es sumamente laboriosa) es una ap

cación de un teorema análogo al de Hadamard relativo a la multiplicación de las singularidades, y que hemos llamado "teorema de la sumación de las singularidades respecto de funciones analíticas definidas por integrales determinantes".

Ahora bien, como este teorema tiene gran importancia intrínseca (a parte de la aplicación señalada) lo hemos de enunciar explícitamente y daremos su demostración.

TEOREMA DE LA SUMACION DE LAS SINGULARIDADES.

Ante todo introduciremos la noción de estrella paralela de una función analítica en un semiplano, con respecto al punto del infinito.

Sea f(z) una función holomorfa en un semiplano, limitado por una recta paralela al eje imaginario:

$$R(z) \equiv x \equiv k$$

(k = constante);

y que se extiende indefinidamente hacia la derecha, es decir, que contiene puntos de abscisa tan grande, en módulo y signo, como se quiera.

Sea D el conjunto de todos los puntos singulares de f(z).

D puede ser un conjunto de un número finito o infinito de puntos, y en este último caso puede ser numerable o tener la potencia del continuo.

Por cada punto de D tracemos la paralela al semieje real y ~~positivo~~ negativo.

El conjunto de todos los puntos del plano z, excluídos los de éstas semirectas, se llamará, estrella paralela de f(z), respecto del punto impropio.

Es decir, indicando con cualquier punto de D, dicha estrella es el conjunto de todos los puntos z del plano que no satisfacen a la condición doble

$$\left.\begin{array}{l} x \equiv R(z) < R(\alpha) \\ y \equiv \mathcal{J}(z) = \mathcal{J}(\alpha) \end{array}\right\}.$$

Los puntos singulares de f(z) se llamarán vértices de la estrella y las semirectas paralelas al semieje real y negativo trazadas por ellos se llamarán radios de la estrella.

Por consiguiente:la fundión f(z) es holomorfa en su estrella paralela,pero esto no implica que ésta estrella sea el campo máximo en el cual la f(z) es holomorfa;pues puede haber puntos en los radios de ellas(y aún más:pueden ser todos, excepto los vértices) que sean regulares para f(z).

Nótese que de la estrella rectilínea de f(z) respecto del origen:

$$L=0.$$

se pasa a la estrella paralela mediante la sustitución exponencial:

$$Z=e^{-L}$$

Introducida esta noción pasemos al teorema.

Teorema:

Supongamos que las funciones holomorfas f(z) y g(z),en sendos semiplanos,sean expresables en forma de integrales determinantes,a saber:

$$f(z)=\int_0^{\infty} a(t).e^{-tz}.dt \qquad (210)$$

$$g(z)=\int b(t).e^{-tz}.dt. \qquad (211)$$

Sean: C_1 la abscisa de convergencia condicional de la integral (210) y C_2 la abscisa de convergencia condicional de la integral (211),a saber:

$$C_1=\overline{\lim_{t\to\infty}}\frac{\lg|a(t)|}{t},$$

y:

$$C_2=\overline{\lim_{t\to\infty}}\frac{\lg|b(t)|}{t}.$$

Consideremos la integral determinante:

$$\int_0^{\infty} a(t).b(t).e^{-tz}.dt; \qquad (212)$$

(cuya abscisa C de convergencia condicional es:

$$C = \overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{\log|a(t).b(t)|}{t} \equiv \overline{\lim_{t\to\infty}} \left[\frac{\log|a(t)|}{t} + \frac{\log|b(t)|}{t}\right] \leq$$

$$\leq \overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{\log|a(t)|}{t} + \overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{\log|b(t)|}{t} = C_1 + C_2 .\Big).$$

En tales hipótesis se verifica:

La función analítica h(z) definida por la integral elemental (212) es holomorfa, por lo menos, en la estrella paralela cuyos vértices se obtienen sumando cada vértice de la estrella paralela de f(z) con cada vértice de la estrella paralela de g(z); dicho en otros términos:

a) la suma de un punto regular para f(z) con un punto regular para g(z) es un punto regular para h(z);

b) la suma de un punto regular para f(z) con un punto singular para g(z); o bien: la suma de un punto singular para f(z) con un punto regular para g(z) es un punto regular para h(z);

c) y de la suma de un punto singular para f(z) con un punto singular para g(z): en general, no se puede decir nada; pues puede ser regular o singular para h(z).

Enunciado más brevemente:

Los puntos singulares de h(z) son, a lo sumo, las sumas de los puntos singulares de f(z) con los puntos singulares de g(z).

Ejemplo: Sean:

$$\left.\begin{aligned} a(t) &\equiv e^{qt} \\ b(t) &\equiv e^{pt} \end{aligned}\right\}$$

(p y q reales).

Luego: $$f(z) \equiv \int_0^\infty e^{qt}.e^{-tz}.dt = \int_0^\infty e^{(q-z)t}.dt = \left[\frac{e^{(q-z)t}}{q-z}\right]_0^\infty = \frac{1}{z-q};$$

con:

$$c_1 = q;$$

$$g(z) = \int_0^\infty e^{pt} \cdot e^{-tz} \cdot dt = \frac{1}{z-p};$$

con:

$$c_2 = p;$$

$$h(z) = \int_0^\infty e^{(q+p)t} \cdot e^{-tz} \cdot dt = \frac{1}{z-(p+q)};$$

con:

$$c = p+q.$$

luego:

punto singular de $h(z) \equiv p+q$ = punto singular de $f(z)$ + punto singular de $g(z)$.

Pasemos ahora a la demostración del teorema:

Llamemos E y E' a las estrellas paralelas respecto al punto del infinito de las funciones $f(z)$ y $g(z)$, respectivamente. Indiquemos con α un vértice cualquiera de la estrella E y con β un vértice cualquiera de la estrella E' sumando cada punto α con cada punto β construyamos la estrella E'', respecto del punto impropio.

Indiquemos con w un número fijo (real o complejo) cualquiera.

Si es:

$$w = (\alpha+\beta) + k$$

donde k es un número arbitrario real y negativo o nulo; el punto w pertenece a uno de los radios de la estrella E''; y si la diferencia:

$$w - (\alpha+\beta)$$

es compleja y no real; o bien, real pero positiva, el puntow w pertenece al interior de E''.

Consideremos la transformación:

$$z' = w - z.$$

Hagamos describir a z una curva (simple, esto es, sin puntos dobles) situada en el interior de E y que tenga puntos cuyas ordenadas sean tan grandes cómo se quiera en valor absoluto y de ambos signos, a la cual llamaremos Γ.

Es fácil ver que si el punto z describe la curva Γ, el punto:

$$z' = w - z$$

describe una curva Γ' tal que si el punto w pertenece a E'', esta curva (que no poseerá puntos dobles y que se extenderá indefinidamente en el sentido de las y' positivas y negativas, siendo: $z' = x' + iy'$), pertenece al interior de E'.

En efecto; la transformación:

$$z' = w - z$$

hace corresponder al radio de la estrella E cuyo origen es el punto:

$$z = \alpha ;$$

una semirecta de origen:

$$z' = w - z$$

y paralela al semieje real y positivo del plano z'.

Llamemos D a la parte (indefinida) del plano z' que es exterior a dichas semirectas (paralelas al semieje real y positivo y que tienen por orígenes los puntos $\underline{w - \alpha}$).

Si z describe la curva Γ, situada en E, el punto:

$$z' = w - z$$

describe una curva Γ' en D y si la diferencia

$$w - (\alpha + \beta)$$

es nula o real y negativa tal curva Γ' pertenece a E'.

Luego se puede enunciar:

la condición necesaria y suficiente para que el punto:

$$z' = w - z;$$

describa una curva Γ' situada enteramente en E', cuando el puntos z describe una curva Γ, situada en E, es que el punto w pertenezca al interior de la estrella E''.

Si w esta situado en E'', se puede hallar una infinidad de curvas Γ' (simples y que se extienden al infinito en el sentido de las y' positivas y negativas) situadas a la vez en D y en E', y por lo tanto existen una infinidad de curvas Γ, que satisfacen a la condición enunciada.

Sea w un punto interior a E''.

La integral definida (que es la correlativa de la integral de Parseval):

$$J(w) = \int_{\Gamma_w} f(z) \cdot \varphi(w-z) \cdot dt$$

tomada a lo largo de un contorno Γ_w que satis-face a la condición enunciada es una función holomorfa de w en la estrella E''.

En efecto, esta integral tiene un valor determinado para cada punto w de E'' pues si se reemplaza el contorno Γ_w por otro contorno Γ'_w, que satisface a la misma condición, el valor de la integral J (w) no altera, puesto que:

$$f(z) \cdot \varphi(w-z)$$

es holomorfa en una región que encierre a los dos contornos.

Por otra parte, un mismo contorno Γ_w sirve al punto w y a todos los puntos de un recinto suficientemente pequeño que encierre este punto w.

Por lo tanto: la integral J(w) es una función holomorfa de w para todo punto w de E''.

En particular, esta integral es una funciónn holomorfa en el interior del semiplano:

$$R(w) \geq C_1 + C_2$$

Si es:

$$R(w) > c_1 + c_2$$

se pueden tomar por contornos Γ y Γ dos rectas:

$$R(z) = c_1 > C_1, \quad y \quad R(z) = c_2 > C_2;$$

tales que:

$$R(w) = c_1 + c_2 .$$

A lo largo de Γ, las dos funciones:

$$f(z), y, \quad \varphi(w-z)$$

se expresan en forma de integrales determinantes:

$$\left.\begin{aligned} f(z) &= \int_0^\infty a(t) \cdot e^{-tz} \cdot dt \\ \varphi(w-z) &= \int_0^\infty b(t) \cdot e^{-t(w-z)} \cdot dt \end{aligned}\right\}$$

En el recinto definido por las desigualdades:

$$R(w) - c_2 < R(z) < c_1$$

el producto:

$$f(z) \cdot \varphi(w-z)$$

es expresable mediante una integral del tipo:

$$f(z) \cdot \varphi(w-z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(t,w) \cdot e^{zt} \cdot dt$$

tal que:

$$\Phi(0,w) = \int_0^\infty a(t) \cdot b(t) \cdot e^{-wt} \cdot dt . \qquad (213)$$

Esto se ve aplicando la teoría de los factores lineales de convergencia (como se hace para la demostración de los clásicos teoremas de Cauchy y de Mertens, referentes al producto de series simples.

La integral (213) que seguramente es convergente en el semiplano:

$$R(w) > c_1 + c_2$$

según resultados clásicos en la teoría general de funciones es, en dicho semiplano, igual a la integral:

$$\frac{\mathcal{Y}(w)}{2\pi i} = \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{\Gamma} f(z) \cdot \varphi(w-z) \cdot dz$$

y por lo tanto:

<u>la función analítica definida por la integral:</u>

$$\int_{\Gamma_w} f(z) \cdot \varphi(w-z) \cdot dz \, ;$$

<u>es holomorfa en la estrella E''</u>.

Luego:

<u>La función analítica definida por la integral:</u>

$$\int_{\Gamma_w} f(z) \cdot \varphi(w-z) \cdot dz \, ;$$

<u>no puede tener por puntos singulares más que los puntos que se obtienen sumando cada punto singular de f(z) con cada punto singular de g(z)</u>.

Carlos Biggeri.

DIFERENCIA ENTRE LAS SINGULARIDADES DE LAS FUNCIONES ANALITICAS DEFINIDAS POR SERIES POTENCIALES Y LAS SINGULARIDADES DE LAS FUNCIONES DEFINIDAS POR INTEGRALES DETERMINANTES.-

Es sabido que sobre la recta de convergencia condicional de la integral:

$$f(z)=\int_0^\infty a(t).e^{-tz}.dt$$

puede no existir ningún punto singular para f(z).

Este hecho,que marca una notable diferencia entre la teoría de las singularidades de una función analítica definida por integrales determinantes y la teoría de las singularidades de las funciones analíticas definidas por series potenciales,se justifica por la siguiente consideración:

Llamemos r a la recta de convergencia condicional de la integral:

$$f(z)=\int_0^\infty a(t).e^{-tz}.dt;$$

Todos los puntos de r pueden ser regulares porque entonces si bien,a cada uno de estos puntos les corresponde un entorno (que podemos tomar circular) en el cual es f(z) función regular,como el conjunto de todos estos puntos de r no está acotado,y por lo tanto no se lo puede aplicar el teorema de Borel (es decir,el límite inferior de los radios de estos entornos circulares es cero si las ordenadas de sus centros tienden a infinito),no existe un semiplano que contenga al de convergencia simple de la integral:

$$\int_0^\infty a(t).e^{-tz}.dt$$

en cuyos puntos todos sea regular la función f(z).

En cambio, la aplicación de esta consideración a una serie simple potencial conduce a la clásica propiedad:

sobre la circunferencia de convergencia de una serie de potencias existe necesariamente un punto singular de la función analítica definida por la serie.

Esto es:

La razón intrínseca de la diferencia desde el punto de vista de las singularidades, señalada más arriba, existente entre las series potenciales y las integrales determinantes estriba en la siguiente propiedad elemental: la circunferencia es un conjunto, de puntos, acotado y cerrado; y la recta no es un conjunto acotado.

Ahora bien:

Si suponemos que el punto impropio del plano:

$$z = x + iy;$$

es regular para f(z), entonces así que se puede asegurar que:

sobre la recta de convergencia simple de la integral:

$$\int_0^{\infty} a(t) \cdot e^{-tz} \cdot dt \quad ;$$

existe necesariamente un punto singular para f(z).

La demostración de esta clásica propiedad muy importante, se hace aplicando las consideraciones anteriores.

DEFINICION ARITMETICA DE PUNTO SINGULAR PARA UNA FUNCION DE UNA VARIABLE.-

Todo lo dicho hasta acá nossugiere una definición de punto singular de una función analítica de una sola variable independiente, que tiene carácter aritmético, susceptible de ampliarse a una función de varias variables independientes (lo que haremos en la segunda parte del presente trabajo). Refirámosnos en primer lugar a los puntos situadose en el interior o en el contorno del círculo de convergencia de la serie potencial mediante la cual definiremos la función analítica.

DEFINICION:

Sea la función analítica f(z) definida por la serie potencial

$$f(z)=\sum a_n z^n$$

cuyo radio de convergencia, R, lo suponemos mayor que cero.

Tomemos un punto cualquiera:

$$z=r.e^{i\theta}=r(\cos\theta+i\,\mathrm{sen}\,\theta)$$

situado en el interior omen el contorno del círculo de convergencia de la serie:

$$\sum a_n z^n;$$

esto es:

$$r\leq R.$$

Formemos la función:

$$O(n,r,\theta)\equiv\left(\frac{\sigma e}{n}\right)^n\sum_{\frac{n}{\sigma}(1-w)\leq m\leq\frac{n}{\sigma}(1+w)} a_m r^m e^{m\theta i}\cdot m^n\cdot e^{-m\theta}$$

siendo σ y ω números reales arbitrarios tales que:

$$1 > \sigma > 0, \quad y \quad 0 < \omega < 1.$$

Con tal notación diremos que:

el punto:

$$r e^{\theta i}$$

es <u>regular</u> para f(z) si es:

$$\overline{\lim_{n \to \infty}} \sqrt[n]{|O(n, r, \theta)|} < 1;$$

y si es:

$$\overline{\lim} \sqrt[n]{|O(n, r, \theta)|} = 1$$

diremos que el punto:

$$r . e^{\theta i}$$

es <u>singular</u> para f(z).

<u>Nota</u>:

La posibilidad:

$$\overline{\lim_{n \to \infty}} \sqrt[n]{|O(n, r, \theta)|} > 1$$

es irreglizable, pues de lo contrario existiría algún punto:

$$r . e^{\theta i}$$

con:

$$r > R$$

tal que en ese punto la serie sería convergente, lo que es un absurdo.

Para que esta definición de punto singular o regular sea admisible habrá, ante todo, que demostrar que, ella es independiente de los parámetros σ y ω.

Ahora bien, la independencia del límite spérior de:

$$\sqrt[n]{|O(n, r, \theta)|}$$

para $n \to \infty$, respecto de los parámetros σ y ω; así como las siguientes propiedades:

a) para todo:

$$r < R$$

es:

$$\overline{\lim_{n \to \infty}} \sqrt[n]{|O(n, r, \theta)|} < 1 ;$$

cualquiera que sea el valor del argumento θ ; es decir: todo punto interior al círculo de convergencia es regular para f(z);

b) si es:

$$r = R$$

existe, por lo menos, un valor del argumento θ , tal que:

$$\overline{\lim_{n \to \infty}} \sqrt[n]{|O(n, r, \theta)|} = 1$$

es decir, sobre la circunferencia de convergencia de la serie existe, por lo menos, un punto singular para f(z);

c) poniendo:

$$r_1 \cdot e^{\theta_1 i} \equiv r \cdot e^{\theta i} + (\alpha + \beta i)$$

donde:

$$\alpha + \beta i$$

es un complejo cualquiera; si el punto:

$$r e^{\theta i}$$

es regular o singular para f(z), el punto:

$$r_1 \cdot e^{\theta_1 i}$$

es regular o singular, respectivamente para:

$$f(z_1 + \alpha + \beta i)$$

es decir: el hecho que un punto sea regular o singular para una función analítica f(z) es independiente respecto de cualquier sustitución lineal

operada sobre la variable independiente z;ésto

d)si es:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|O(n,R,\theta)|} < 1$$

existe una cierta serie:

$$\sum b_n (z - R.e^{\theta i})^n$$

con:

$$\frac{1}{R'} \equiv \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|b_n|} = \infty$$

tal que para todo punto z pertenociente a los círculos:

$$|z| < R, \quad y \quad |z - Re^{\theta i}| < R'$$

las sumas de las dos series:

$$\sum a_n z^n, \quad y \quad \sum b_n (z - Re^{\theta i})^n$$

coinciden;es decir:si el punto:

$$Re^{\theta i}$$

es regular para f(z),esta función es desarrollable en serie de potencias de:

$$z - Re^{\theta i}$$

desarrollo que es válido en un cierto círculo (con radio no nulo) cuyo centro es el punto:

$$Re^{\theta i}$$

(los coeficientes b_n son las derivadas sucesivas de f(z) en el punto divididas por las factoriales de los números naturales);

e)si es:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|O(n,R,\theta)|} = 1$$

la función f(z) no esdesarrollable en serie de potenciasde:

$$z-Re^{\theta i}$$

en ningún entorno del puntos $Re^{\theta i}$;

se puede hacer directamente o bien observando que nuestra definición de punto regular o singular coincidea con la definición clásica de Cauchy o de Weierstrass,puesto que invirtiendo el orden del desarrollo seguido para la demostración del teorema primero se ve que:

si es:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|O(n,R,\theta)|}=1$$

el radio de convergencia de la serie:

$$\sum b_n\left(z-Re^{\theta i}\right)^n$$

es nulo,cualquiera que sea la sucesión b_n ;y si es:

$$r<R$$

y:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|O(n,r,\theta)|}<1$$

el radio de convergencia de la serie:

$$\sum b_n\left(z-re^{\theta i}\right)$$

con:

$$b_n=\frac{f^{(n)}(re^{\theta i})}{n!}$$

es mayor que:

$$R-r.$$

Para los puntos exteriores al círculo de convergencia emplearemos, como en la teoría clásica, la idea de la prolongación analítica.

Ahora bien, la ventaja de dar la definición clásica de punto singular para una función de una sóla variable independiente bajo forma aritmética, como hemos señalado, reside precisamente en el hecho que, bajo esta forma, dicha definición se extiende perfectamente al caso de varias variables independientes, como pasamos a hacerlo, inmediatamente, en la segunda parte del presente trabajo.-

-.FIN DE LA PRIMERA PARTE.-

-/-/-/-/-/-/-/-/-/-/-/-/-/

Carlos Biggeri

DEFINICION DE PUNTO SINGULAR DE UNA FUNCION ANALITICA DE VARIAS VARIABLES COMPLEJAS INDEPENDIENTES.-

Para mayor brevedad en la exposición,sin restringir en absoluto la generalidad,nos hemos de referir al caso de dos variables independientes.
Nos hemos de limitar,en esta exposición,a la parte exclusivamente personal sin entrar a considerar recientes memorias,para no alargar en demasía el presente trabajo.

Sea,en efecto,una función f(z,z') analítica,de las dos variables complejas independientes,z y z',y supongamos que venga definida por una serie doble de potencias,la cual,por razones de analogía,la expresaremos en forma determinante,es decir,sea la serie doble determinante:

$$\sum_{m=0}^{m=\infty}\sum_{n=0}^{n=\infty} a_{m,n}\cdot e^{-mz-nz'}$$

que posee,en general,infinitos pares de semiplanos asociados de convergencia simple o condicional.
Tomemos entre ellos un par cualquiera y sean $\underline{C}$ y $\underline{C'}$,sus abscisas asociadas de convergencia simple.
Sean:

$$c+id \; ; \; y: \; c'+id'$$

un par de puntos cualesquiera de dichos semiplanos pertenecientes al interior o al contorno,esto es:

$$c \geqslant C \; ; \; y: \; c' \geqslant C'$$

y d y d' números reales cualesquiera.
Formemos la función:

$$O(m,n,c+id,c'+id') \equiv O_{m,n} \equiv$$

$$\equiv \sum_k \sum_j a_{k,j} \cdot \left(\frac{\sigma e}{m}\right)^m \cdot \left(\frac{\sigma' e}{n}\right)^n \cdot e^{-k\sigma - j\sigma'} \cdot e^{-k(c+id)} \cdot$$

$$\cdot e^{-j(c'+id')} \cdot k^m \cdot j^n \equiv$$

$$\equiv \frac{(\sigma e)^m \cdot (\sigma' e)^n}{m^m \cdot n^n} \cdot \sum_k \sum_j a_{k,j} e^{-k\sigma - j\sigma'} \cdot e^{-k(c+id) - j(c'+id')} \cdot k^m \cdot j^n$$

extendiéndose la sumatoria doble a todos los k y a todos los j tales que:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{m}{\sigma}(1-\omega) \leq k \leq \frac{m}{\sigma}(1+\omega) \\ \frac{n}{\sigma'}(1-\omega') \leq j \leq \frac{n}{\sigma'}(1+\omega') \end{array}\right\}$$

donde: σ y σ' son números reales arbitrarios tales que:

$$\sigma > e \geq \mathcal{C}^{\alpha} \; ; \; y : \sigma' > e' \geq \mathcal{C}'_j$$

y ω y ω' son números arbitrarios tales que:

$$0 < \omega < 1 \; ; \; y : 0 < \omega' < 1.$$

Se demuestra que:

$$\overline{\lim_{(m,n)\to(\infty,\infty)}} \sqrt[m+n]{|O_{m,n}|} \leq 1$$

es decir, el límite superior, para $(m,n) \to (\infty,\infty)$, de la función:

$$\sqrt[m+n]{|O_{m,n}|}$$

para todo par de puntos del interior o del contorno de todo par de semiplanos asociados de convergencia condicional, nunca puede ser mayor que la unidad.

Con las notaciones anteriores daremos la siguiente definición primera:

1ª definición:

Diremos que el punto:

$$(z = c + id \; ; \; z' = c' + id')$$

es regular para la función f (z,z') si es:

$$\overline{\lim_{(m,n)\to(\infty,\infty)}} \sqrt[m+n]{|O_{m,n}|} < 1$$

y diremos que el punto:

$$(z = c + id \; ; \; z' = c' + id')$$

es singular para la función f(z,z') si es:

$$\overline{\lim_{(m,n)\to(\infty,\infty)}} \sqrt[m+n]{|O_{m,n}|} = 1$$

Observación:

Antes de seguir adelante, notemos que la definición de límite superior de una sucesión doble $b_{m,n}$ para $(m,n)\to(\infty,\infty)$ que hemos de tomar es la siguiente

a) diremos que es:

$$\overline{\lim_{(m,n)\to(\infty,\infty)}} b_{m,n} = \eta \equiv \phi$$

si: dado arbitrariamente un $\varepsilon > 0$, existen dos números positivos m_0 y n_0, siendo:

$$\left.\begin{aligned} m_0 &\equiv m_0(\varepsilon) \\ n_0 &\equiv n_0(\varepsilon) \end{aligned}\right\}$$

y:

tales que para todo $m \geq m_0$ y para todo $n \geq n_0$ es:

$$b_{m,n} < \eta + \varepsilon$$

y existen infinitos valores de m e infinitos valores de n para los cuales es:

$$b_{m,n} > \eta - \varepsilon.$$

b) Diremos que es:

$$\overline{\lim_{(m,n)\to(\infty,\infty)}} b_{m,n} = \infty$$

si dado un número arbitrario K positivo existen infinitos valores de m e infinitos valores de n para los cuales es:

$$\left| b_{m,n} \right| > K.$$

Observemos que los parámetros σ, σ', ω y ω' que figuran en la función:

$$O_{m,n}$$

son arbitrarios pero satisfacen a las acotaciones impuestas; luego, como en el caso de una sola variable, démosle valores particulares tales que los índice de las sumatorias tengan cotas naturales, por ejemplo:

$$\sigma = \sigma' = \frac{2}{3} \; ; \; y : \; \omega = \omega' = \frac{1}{3} \; ;$$

luego, en tal caso particular se tiene:

$$O_{m,n} \equiv \sum_{k=m}^{2m} \sum_{j=n}^{2n} a_{k,j} \left(\frac{2e}{3m}\right)^m \cdot \left(\frac{2e}{3n}\right)^n \cdot e^{-\frac{2}{3}k - \frac{2}{3}j} \cdot k^m \cdot j^n \cdot e^{-k(c+id)} \cdot e^{-j(c'+id')}$$

o bien:

$$O_{m,n} \equiv \left(\frac{2e}{3}\right)^{m+n} \cdot m^{-m} \cdot n^{-n} \cdot \sum_{k=m}^{2m} \sum_{j=n}^{2n} a_{k,j} \cdot e^{-\frac{2}{3}k - \frac{2}{3}j} \cdot e^{-k(c+id)} \cdot e^{-j(c'+id')} \cdot k^m \cdot j^n \; ;$$

de modo que:

$$\sqrt[m+n]{\left| O_{m,n} \right|} = \frac{2}{3} e \cdot \sqrt[m+n]{m^{-m} \cdot n^{-n}} \cdot \sqrt[m+n]{\left| \sum_{k=m}^{2m} \sum_{j=n}^{2n} a_{k,j} \cdot e^{-\frac{2}{3}k - \frac{2}{3}j - k(c+id) - j(c'+id')} \cdot k^m \cdot j^n \right|} .$$

Agregemos que si $f(z,z')$ viene definida por una serie doble de Dirichlet, a saber:

$$f(z,z') = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} a_{m,n} \cdot e^{-\lambda_m z - \mu_n z'}$$

donde, como es clásico, λ_m y μ_n son sucesiones crecientes (no nesesariamente monótonas) tales que:

$$\lim_{m \to \infty} \lambda_m = \lim_{n \to \infty} \mu_n = +\infty \; ;$$

la función:

$$O_{m,n}$$

se transforma (empleando las mismas notaciones que en el caso anterior) en la siguiente forma:

$$O(m,n,c+id,c'+id') \equiv O_{m,n} =$$

$$= \sum_{\lambda_k} \sum_{\mu_j} a_{k,j} \left(\frac{\lambda_k \cdot \sigma c}{m}\right)^m \cdot \left(\frac{\mu_j \sigma' c}{n}\right)^n \cdot e^{-\lambda_k \sigma - \mu_j \sigma'} \cdot e^{-\lambda_k (c+id) - \mu_j (c'+id')} \equiv$$

$$\equiv \left(\frac{\sigma c}{m}\right)^m \cdot \left(\frac{\sigma' c}{n}\right)^n \cdot \sum_{\lambda_k} \sum_{\mu_j} a_{k,j} \cdot \lambda_k^m \cdot \mu_j^n \cdot e^{-\sigma \lambda_k - \sigma' \mu_j} \cdot e^{-\lambda_k (c+id) - \mu_j (c'+id')}$$

donde la sumatoria doble se extienden a todos los valore de $\underline{k}$ y a todos los valores de $\underline{j}$ tales que:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{m}{\sigma}(1-\omega) \leq \lambda_k \leq \frac{m}{\sigma}(1+\omega) \\ \frac{n}{\sigma'}(1-\omega') \leq \mu_j \leq \frac{n}{\sigma'}(1+\omega') \end{array}\right\}$$

Si la función f(z,z') viene definida por una integral doble determinante ordinaria, a saber:

$$f(z,z') = \int_0^\infty \int_0^\infty a(u,v) \cdot e^{-uz - vz'} \cdot du \cdot dv$$

donde C y C' es un par de abscisas asociadas de convergencia simple; sean c y c' números cualesquiera tales que:

$$c \geq C \quad , \quad y \quad , \quad c' \geq C'$$

y d y d' valores reales cualesquieras; veamos en este caso en que se transforma la función:

$$O_{m,n}$$

Conservando siempre las mismas notaciones se tiene:

$$O_{m,n} \equiv \int_{\frac{m}{\sigma}(1-\omega)}^{\frac{m}{\sigma}(1+\omega)} \int_{\frac{n}{\sigma'}(1-\omega')}^{\frac{n}{\sigma'}(1+\omega')} a(u,v) \cdot (\sigma c)^m \cdot (\sigma' c)^n \cdot e^{-u\sigma - v\sigma'} \cdot m^{-m} \cdot n^{-n} \cdot u^m \cdot v^n \cdot e^{-u(c+id) - v(c'+id')} \cdot du \cdot dv$$

o bien:

$$O_{m,n} \equiv \frac{(\sigma e)^m \cdot (\sigma' e)^n}{m^m \cdot n^n} \cdot \int_{\frac{m}{\sigma}(1-\omega)}^{\frac{m}{\sigma}(1+\omega)} \int_{\frac{n}{\sigma}(1-\omega)}^{\frac{n}{\sigma}(1+\omega')} a(u,v) \cdot e^{-u\sigma - v\sigma'} \cdot e^{-u(c+id)} \cdot e^{-v(c'+id')} \cdot u^m \cdot v^n \cdot du \cdot dv$$

En particular:

$$O_{m,n} \equiv \left(\frac{2}{3}e\right)^{m+n} \cdot m^{-m} \cdot n^{-n} \cdot \int_m^{2m} \int_n^{2n} a(u,v) \cdot u^m \cdot v^n \cdot e^{-\frac{2}{3}u - \frac{2}{3}v} \cdot e^{-u(c+id) - v(c'+id')} \cdot du \cdot dv$$

Supongamos ahora que la función $f(z,z')$ venga definida por una integral doble de Dirichlet, a saber:

$$f(z,z') = \int_0^\infty \int_0^\infty a(u,v) \cdot e^{-\lambda(u) z - \mu(v) z'} \cdot du \cdot dv$$

donde:

$$\lambda(u) \; ; \; y \; : \; \mu(v)$$

son funciones monótonas crecientes tales que:

$$\lim_{u \to \infty} \lambda(u) = \lim_{v \to \infty} \mu(v) = +\infty$$

Conservando las mismas notaciones que para el caso en que $f(z,z')$ venga definida por una serie doble de Dirichlet, se tiene que en el presente caso la función:

$$O_{m,n}$$

se transforma en:

$$O_{m,n} \equiv \iint_{(R)} a(u,v) \cdot \left(\frac{\sigma \cdot e \cdot \lambda(u)}{m}\right)^m \cdot \left(\frac{\sigma' e \cdot \mu(v)}{n}\right)^n \cdot e^{-\sigma \cdot \lambda(u) - \sigma' \cdot \mu(v)} \cdot e^{-\lambda(u)(c+id) - \mu(v) \cdot (c'+id')} \cdot du \cdot dv$$

$$\equiv \left(\frac{\sigma e}{m}\right)^m \cdot \left(\frac{\sigma' e}{n}\right)^n \cdot \iint_{(R)} a(u,v) \cdot \lambda^m(u) \cdot \mu^n(v) \cdot e^{-\sigma \lambda(u) - \sigma' \mu(v)} \cdot e^{-\lambda(u)(c+id) - \mu(v)(c'+id')} \cdot du \cdot dv$$

indicando con(R) el rectángulo del plano de las variables realesindependientes u y v,formado por todos los puntos de coordenadas u y v,tales que:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{m}{\sigma}(1-\omega) \leq \lambda(u) \leq \frac{m}{\sigma}(1+\omega) \\ \frac{n}{\sigma}(1-\omega') \leq \mu(v) \leq \frac{n}{\sigma}(1+\omega') \end{array}\right\}$$

<u>Observación General</u>:

Como todo punto:

$$(z = c + id \,;\, z' = c' + id')$$

mediante la sustitución lineal operada sobre las variables complejas independientes z y z':

$$[z_1 = z - (c + id) \,;\, z'_1 = z' - (c' + id')]$$

se reduce al punto-origen:

$$(z_1 = 0 \,;\, z'_1 = 0)$$

prácticamente el problema de saber si el punto:

$$(z = c + id \,;\, z' = c' + id')$$

es regular o singular para la función f(z,z') es completamente equivalente al problema de reconocer si el punto:

$$(z_1 = 0 \,;\, z'_1 = 0)$$

es regular o singular,respectivamente,para la función:

$$f(z_1, z'_1) \equiv f[z - (c + id) \,;\, z' - (c' + id')]$$

Por lo tanto apliquemos la definición de la función:

$$O_{m,n}$$

al origen:

$$(z = 0 \,;\, z'_1 = 0)$$

en los distintos casos mencionados.

Asaber:

a)sea:

$$c \leq 0 \,;\, c' \leq 0$$

un par de abscisas asociadas de convergencia condicional de la serie doble determinante ordinaria:

$$f(z,z') = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} a_{m,n} \cdot e^{-mz-nz'}$$

Formemos la función:

$$O_{m,n} \equiv \frac{(\sigma e)^m \cdot (\sigma' e)^n}{m^m \cdot n^n} \cdot \sum_k \sum_j a_{kj} \, e^{-k\sigma - j\sigma'} \cdot k^m \cdot j^n$$

extendiéndose la sumatoria doble a todos los pares de valores de k y de j tales que:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{m}{\sigma}(1-\omega) \leq k \leq \frac{m}{\sigma}(1+\omega) \\ \frac{n}{\sigma'}(1-\omega') \leq j \leq \frac{n}{\sigma'}(1+\omega') \end{array}\right\}$$

siendo:

$$\underline{\sigma} \quad y \quad \underline{\sigma'}$$

números reales arbitrarios positivos y:

$$\underline{\omega} \quad y \quad \underline{\omega'}$$

números arbitrarios positivos menores que la unidad.

El punto:

$$[z = 0 \; ; \; z' = 0]$$

será regular o singular, respectivamente, para f(z,z') según que se verifique:

$$\overline{\lim_{(m,n)\to(\infty,\infty)}} \sqrt[m+n]{|O_{m,n}|} < 1$$

$$\overline{\lim_{(m,n)\to(\infty,\infty)}} \sqrt[m+n]{|O_{m,n}|} = 1$$

b) sea:

$$\mathcal{C} \leq 0 \; ; \; \mathcal{C}' \leq 0$$

un par de abscisas asociadas de convergencias condicional de la integral doble determinante ordinaria:

$$f(z,z') = \int_0^\infty\int_0^\infty a(u,v) \cdot e^{-uz-vz'} \cdot du \cdot dv$$

Formemos la función:

$$O_{m,n} \equiv \frac{(\sigma e)^m \cdot (\sigma' e)^n}{m^m \cdot n^n} \cdot \int_{\frac{m}{\sigma}(1-\omega)}^{\frac{m}{\sigma}(1+\omega)} \int_{\frac{n}{\sigma}(1-\omega')}^{\frac{n}{\sigma}(1+\omega')} a(u,v) \cdot e^{-u\sigma-v\sigma'} \cdot u^m \cdot v^n \cdot du \cdot dv$$

siendo:

$$\sigma, \; \sigma', \; \omega, \; \omega'$$

números reales arbitrarios tales que:

$$\sigma > 0 \; , \; \sigma' > 0 \; , \; 0 < \omega < 1 \; , \; 0 < \omega' < 1 .$$

El punto:

$$(z = 0 \; ; z' = 0)$$

será regular o singular para f(z,z') según que, respectivamente, se tenga:

$$\overline{\lim_{(m,n)\to(\infty,\infty)}} \sqrt[m+n]{|O_{m,n}|} < 1$$

$$\overline{\lim_{(m,n)\to(\infty,\infty)}} \sqrt[m+n]{|O_{m,n}|} = 1$$

c) sea:

$$\mathcal{C} \leq 0 \; ; \; \mathcal{C}' \leq 0$$

un par de abscisas asociadas de convergencia condicional de la serie doble ~~de~~

de Dirichlet:

$$f(z,z') = \sum_0^\infty \sum_0^\infty a_{m,n} \cdot e^{-\lambda_m z - \mu_n z'}$$

Formemos la función:

$$O_{m,n} \equiv \left(\frac{\sigma e}{m}\right)^m \cdot \left(\frac{\sigma' e}{n}\right)^n \cdot \sum_{\lambda_k} \sum_{\mu_j} \lambda_k^m \cdot \mu_j^n \cdot e^{-\sigma\lambda_k - \sigma'\mu_j}$$

donde:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{m}{\sigma}(1-\omega') \leq \lambda_k \leq \frac{m}{\sigma}(1+\omega) \\ \frac{n}{\sigma}(1-\omega') \leq \mu_j \leq \frac{n}{\sigma'}(1+\omega') \end{array}\right\}$$

siendo:

$$\sigma, \sigma', \omega, \omega'$$

números reales arbitrarios tales que:

$$\sigma > 0, \quad \sigma' > 0, \quad 0 < \omega < 1, \quad 0 < \omega' < 1.$$

El punto:

$$(z=0, z'=0)$$

será regular o singular para la función f(z,z') según que, respectivamente, se tenga:

$$\overline{\lim_{(m,n)\to(\infty,\infty)}} \sqrt[m+n]{|O_{m,n}|} < 1$$

$$\overline{\lim_{(m,n)\to(\infty,\infty)}} \sqrt[m+n]{|O_{m,n}|} = 1$$

dósea:

$$\mathcal{C} \leq 0 \quad ; \quad \mathcal{C}' \leq 0$$

un par de abscisas asociadas de simple convergencia de la integral doble de Dirichlet:

$$f(z,z') \equiv \int_0^\infty \int_0^\infty a(u,v) \cdot e^{-\lambda(u) z - \mu(v) z'} \cdot du \cdot dv$$

Formemos la función:

$$O_{m,n} \equiv \left(\frac{\sigma . e}{m}\right)^m . \left(\frac{\sigma' e}{n}\right)^n . \iint_{(R)} a(u,v) . \lambda^m(u) . \mu^n(v) . e^{-\sigma\lambda(u) - \sigma'\mu(v)} . du . dv$$

donde (R) es el rectángulo formado por los puntos de coordenadas u y v, tales que:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{m}{\sigma}(1-\omega) \leq \lambda(u) \leq \frac{m}{\sigma}(1+\omega) \\ \frac{n}{\sigma'}(1-\omega') \leq \mu(v) \leq \frac{n}{\sigma'}(1+\omega') \end{array}\right\}$$

siendo:

$$\underline{\sigma}, \underline{\sigma'}, \underline{\omega} \text{ y } \underline{\omega'}$$

números reales arbitrarios tales que:

$$\sigma > 0 \;,\; \sigma' > 0 \;,\; 0 < \omega < 1 \;,\; 0 < \omega' < 1$$

El punto:

$$(z = 0 \;,\; z' = 0)$$

será regular o singular para f(z,z') según que, respectivamente, se tenga:

$$\overline{\lim_{(m,n)\to(\infty,\infty)}} \sqrt[m+n]{|O_{m,n}|} < 1$$

$$\overline{\lim_{(m,n)\to(\infty,\infty)}} \sqrt[m+n]{|O_{m,n}|} = 1$$

<u>Casos particulares:</u>

Dos casos particulares muy interesante son los siguientes:

a) la función f(z,z') es de variables separadas, es decir:

$$f(z,z') \equiv g(z) . h(z')$$

o lo que es lo mismo:

$$a_{m,n} \equiv b_m . c_n$$

si la función viene definida por una serie; y:

$$a(u,v) \equiv a(u) . c(v)$$

si la función viene definida por una integral.

Entonces se tiene:

$$O_{m,n} \equiv \left(\frac{\sigma e}{m}\right)^m \cdot \left(\frac{\sigma' e}{n}\right)^n \cdot \left(\sum_k b_m \cdot k^m \cdot e^{-k\sigma}\right) \cdot \left(\sum_j c_n j^n e^{-\sigma' j}\right) \equiv$$

$$\equiv O'_m \cdot O''_n$$

siendo:

$$\left.\begin{aligned} O'_m &\equiv \left(\frac{\sigma e}{m}\right)^m \cdot \sum_k b_m \cdot k^m \cdot e^{-k\sigma} \\ \text{y:} \quad O'_n &\equiv \left(\frac{\sigma' e}{n}\right)^n \cdot \sum_j c_n \cdot j^n \cdot e^{-j\sigma'} \end{aligned}\right\}$$

cuando la función viene definida por una serie; y si la función viene definida por una integral:

$$O_{m,n} \equiv \left(\frac{\sigma e}{m}\right)^m \cdot \left(\frac{\sigma' e}{n}\right)^n \cdot \left(\int_{\frac{m}{\sigma}(1-\omega)}^{\frac{m}{\sigma}(1+\omega)} b(u) \cdot u^m \cdot e^{-\sigma u} \cdot du\right) \cdot$$

$$\cdot \left(\int_{\frac{n}{\sigma'}(1-\omega')}^{\frac{n}{\sigma'}(1+\omega')} c(v) \cdot v^n \cdot e^{-\sigma' v} \cdot dv\right) \equiv O'_m \cdot O''_n$$

siendo:

$$O'_m \equiv \left(\frac{\sigma e}{m}\right)^m \cdot \int_{\frac{m}{\sigma}(1-\omega)}^{\frac{m}{\sigma}(1+\omega)} b(u) \cdot u^m \cdot e^{-\sigma u} \cdot du$$

y:

$$O'_n \equiv \left(\frac{\sigma' e}{n}\right)^n \cdot \int_{\frac{n}{\sigma'}(1-\omega')}^{\frac{n}{\sigma'}(1+\omega')} c(v) \cdot v^n \cdot e^{-\sigma' v} \cdot dv$$

Huelga, por lo sencillo, considerar explícitamente los casos en que la funció venga definida por una serie doble de Dirichlet o por una integral doble de Dirichlet.

b) la función es de alguna de las formas siguientes:

$$f(z+z') \; ; \; f(z-z') \; ; \; f(zz') \; ; \; f\left(\frac{z}{z'}\right)$$

y en general;

$$f[\varphi(z,z')].$$

Es sencillo formar en cada uno de estos casos la función: $O_{m,n}$; no lo hacemos explícitamente para abreviar la exposición.

Hasta acá hemos definido la irregularidad o singularidad de un punto cuando éste es propio, completemos, entonces, tal definición refiriéndonos al punto del infinito:

2ª. Definición:

Diremos que el punto del infinito:

$$(z=\infty\,;\ z'=\infty)$$

es regular o singular para f(z,z') según, que el origen:

$$(z=0\,;\ z'=0)$$

sea regular o singular, respectivamente, para la función:

$$f\left(\frac{1}{z}\,;\ \frac{1}{z'}\right).$$

3ª Definición:

Diremos que el punto:

$$(z=\infty\,;\ z'=z'_0)$$

es regular o singular para f(z,z') según que el punto;

$$(z=0\,;\ z'=z'_0)$$

sea regular o singular, respectivamente para la función:

$$f\left(\frac{1}{z}\,;\ z'\right)$$

análoga definición para el punto:

$$(z=z_0\,;\ z'=\infty)\quad;\quad(z_0=\infty).$$

Enunciemos explícitamente las definiciones anteriores para el caso en que la función f(z,z') venga definida por serie dobles potenciales.

Definición:

Sea una función analítica f(z,z') definida por una serie doble potencial:

$$f(z,z') \equiv \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} a_{m,n} \cdot z^m \cdot z'^n$$

y sean C y C' un par de círculos asociados de convergencia simple.

Sea R el radio de C y R' el radio de C'.Tomemos un punto z_1 cualquiera perteneciente al interior o al contorno de C,es decir:

$$|z_1| \leq R;$$

y tomemos un punto z'_1 cualquiera perteneciente al interior o al contorno de C',es decir:

$$|z'_1| \leq R'.$$

Sean ω y ω' un par de números arbitrarios positivos y menores que la unidad.Sean σ y σ' un par de números reales arbitrarios tales que:

$$\left.\begin{array}{l} e^{-\sigma} < |z_1| \\ e^{-\sigma'} < |z'_1| \end{array}\right\}$$

y:

es decir:

$$\left.\begin{array}{l} \sigma < -\log|z_1| \\ \sigma' < -\log|z'_1| \end{array}\right\}$$

y:

Formemos la función:

$$O_{m,n} \equiv O(m,n,z_1,z'_1) \equiv$$

$$\equiv \frac{(\sigma e)^m \cdot (\sigma' e)^n}{m^m \cdot n^n} \cdot \sum_k \sum_j a_{k,j} \cdot k^m \cdot j^n \cdot e^{-k\sigma - j\sigma'} \cdot z_1^k \cdot z'^j_1$$

Con tales notaciones,diremos que el punto:

$$(z = z_1 \,;\, z' = z'_1)$$

será regular o singular para f(z,z') según que se verifique:

$$\overline{\lim_{(m,n)\to(\infty,\infty)}} \sqrt[m+n]{|O_{m,n}|} < 1$$

$$\overline{\lim_{(m,n)\to(\infty,\infty)}} \sqrt[m+n]{|O_{m,n}|} = 1$$

respectivamente.

<u>Observación:</u>

Recordemos que con el símbolo:

$$\sum_k \sum_j b_{k,j}$$

indicamos la suma de todas las $b_{k,j}$ extendidas a todos los k y a todos los j tales que:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{m}{\sigma}(1-\omega) \leq k \leq \frac{m}{\sigma}(1+\omega) \\ \frac{n}{\sigma'}(1-\omega') \leq j \leq \frac{n}{\sigma'}(1+\omega') \end{array}\right\}$$

Como siempre el punto:

$$(z=z_1\,;\ z'=z'_1)$$

por una transformación lineal operada sobre las variables independientes se reduce al punto:

$$(z=1\,;\ z'=1)$$

Luego conviene enunciar la definición anterior explícitamente, para el punto (1,1), a saber:

Sea la función analítica f(z,z') definida por una serie doble potencial:

$$f(z,z') \equiv \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} a_{m,n}\cdot z^m \cdot z'^n$$

y llamemos <u>C</u> y <u>C'</u> a un par de círculos asociados de convergencia simple.

Sea R el radio del círculo C y R' el radio delcírculo C'.Sea:

$$R \geq 1 \quad ; \quad y: \quad R' \geq 1$$

Sean ω y ω' un par de números arbitrarios positivos y menores que la unidad

Sean σ y σ' un par de números reales positivos arbitrarios.

Formemos la función:

$$O_{m,n} \equiv \frac{(\sigma e)^m \cdot (\sigma' e)^n}{m^m \cdot n^n} \cdot \sum_k \sum_j a_{k,j} \cdot k^m \cdot j^n \cdot e^{-k\sigma - j\sigma'}$$

.

Con tales notaciones,diremos que el punto:

$$(z_1 = 1 \; ; \; z'_1 = 1)$$

será regular o singular para f(z,z') según que se verifique:

$$\left.\begin{array}{l} \overline{\lim_{(m,n)\to(\infty,\infty)}} \sqrt[m+n]{|O_{m,n}|} < 1 \\ \text{o:} \\ \overline{\lim_{(m,n)\to(\infty,\infty)}} \sqrt[m+n]{|O_{m,n}|} = 1 \end{array}\right\}$$

respectivamente.

Casos particulares de la función:

a)Tomando:

$$\left.\begin{array}{l} \sigma = \sigma' = \frac{2}{3} \\ \text{y:} \\ \omega = \omega' = \frac{1}{3} \end{array}\right\}$$

se tiene:

$$O_{m,n} \equiv \left(\frac{2e}{3m}\right)^m \cdot \left(\frac{2e}{3n}\right)^n \cdot \sum_{k=m}^{k=2m} \sum_{j=n}^{j=2n} a_{k,j} \cdot k^m \cdot j^n \cdot e^{-\frac{2}{3}k - \frac{2}{3}j}$$

b)Tomando:

$$\left.\begin{array}{l} \sigma = \sigma' = e^{-\frac{1}{2}} > 0 \\ 0 < \omega = \omega' = 2 \cdot e^{-\frac{1}{2}} - 1 < 1 \end{array}\right\}$$

se tiene:

$$O_{m,n} = m^{-m} \cdot n^{-n} \sum_k \sum_j a_{k,j} \cdot k^m \cdot j^n \cdot e^{-(k+j)} \cdot e^{-\frac{1}{2}}$$

donde es:

$$\left.\begin{array}{l} m(2\sqrt{e}-2) \leq k \leq em \\ 2n(\sqrt{e}-1) \leq j \leq en \end{array}\right\}$$

Observación importante:

Hemos hablado hasta acá de series dobles convergentes condicionalmente y de integrales dobles convergentes condicionalmente pero conviene decir explícitamente que definición tomamos de convergencia condicional.

La definición clásica de serie doble convergente condicionalmente (definición ddebida a Pringsheim y que es la generalización natural de Cauchy sobre series simples convergentes) es la siguiente:

Diremos que la serie doble (numérica):

$$\sum_{m=0}^{m=\infty}\sum_{n=0}^{n=\infty} a_{m,n}$$

es convergente y tiene por suma el valor S (S es finito) cuando existe y es finito el límite de la sucesión doble:

$$S_{m,n} \equiv \sum_{k=0}^{k=m}\sum_{j=0}^{j=n} a_{k,j}$$

para $(m,n)\to(\infty,\infty)$ y es:

$$\lim S_{m,n} = S = \phi$$

es decir, cuando dado arbitrariamente un número ε positivo, existen dos valores:

$$m_0 \equiv m_0(\varepsilon) \; ; \; y : n_0 \equiv n_0(\varepsilon)$$

tales que para todo par de valores de m y de n tales que:

$$m \geq m_0 \; , \; y : n \geq n_0$$

es:

$$|S_{m,n} - S| < \varepsilon$$

Ahora bien esta definición de Pringsheim tan general, no nos ha de servir, por muchas razones, entre ellas una de las más interesantes es la siguiente: Dada una serie potencial el conjunto (del espacio de cuatro dimensiones), o

mejor dicho,los conjuntos asociados,de puntos de los planos de las variable independientes z y z',en los cuales converge la serie,según la definición de Pringsheim,pueden no ser recintos,como se puede ver con ejemplos ya clásicos (véase Hartogs,Mathematischen Annalen),por lo tanto este hecho que marca ya una profunda diferencia con la teoría de las series simples potenciales,señala la exeesiva generalidad de la definición de Pringsheim.

Ahora bien,entre las infinitas restricciones que se le pueden imponer a la condición de Pringsheim tomaremos la condición de suponer acotadas las sumas ~~acotadas~~:

Por consiguiente,tomaremos la siguiente definición:

<u>Definición</u>:

Diremos que la serie doble (numérica):

$$\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} a_{m,n}$$

converge condicionalmente hacia el valor S (es finito $\mathcal{S}$) cuando se verifican las dos siguientes condiciones:

a)

$$|\mathcal{S}_{m,n} - \mathcal{S}| < \varepsilon$$

($\varepsilon \equiv$ arbittrario),para:

$$\left.\begin{array}{l} m \geq m_0 \equiv m_0(\varepsilon) \\ \\ n \geq n_0 \equiv n_0(\varepsilon) \end{array}\right\}$$

y:

b)

$$|\mathcal{S}_{m,n}| < K$$

(K $\equiv$ constante),para todo <u>m</u> y para todo <u>n</u>.

Con esta definición ya no existe el hecho señalado más arriba,es decir,con esta definición ~~los conj~~ los conjuntos asociados de puntos z y z',en los cuales con-

vengergeuna serie doble potencial:

$$\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} a_{m,n} \cdot z^m \cdot z'^n$$

son dos círculos.

Análogamente,para las integrales dobles,daremos la siguente definición:

Definición:

Diremos que la integral doble (numérica):

$$\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} a(u,v) \cdot du \cdot dv$$

converge condicionalmente hacia el valor S (S es finito) cuando se verifica las dos siguientes condiciones:

a)

$$\left| S - \int_0^{u}\int_0^{v} a(u,v) \cdot du \cdot dv \right| < \varepsilon$$

(ε = arbitrario),para:

$$\left.\begin{array}{l} u \geq u_0 \equiv u_0(\varepsilon) \\ v \geq v_0 \equiv v_0(\varepsilon) \end{array}\right\}$$

y:

b)

$$\left| \int_0^{u}\int_0^{v} a(u,v) \cdot du \cdot dv \right| < K$$

(K = constante),para todo u y para todo v.

Con esta definición los conjuntos asociados de puntos,z y z',en los cuales converge una integral doble determinante:

$$\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} a(u,v) \cdot e^{-zu - z'v} \cdot du \cdot dv$$

son dos semiplanos.

Para las series e integrales múltiples en general,valen,mutatis mutandis,las

Definiciones anteriores.

La anterior definición la hemos de llamar "convergencia acotada".

Otros matemáticos,por ejemplo Hardy,Bromwich,Littlewood,Jordan,toman la definición de"convergencia regular".

La definición adoptada en los tratados clásicos de Goursat,Picard,Forsyth, Severi,etc,es un caso particular de la definición que nosotros adoptaremos. Pues en el fondo estos autores tratan la convergencia absoluta.

En la parte cuarta del presente trabajo,al referirnos a las series e integrales múltiples de Dirichlet,tomaremos exclusivamente la definición de convergencia acotada,que es de paso,la tomada por Robinson y Adams,en sus trabajos publicados en "Transactions of the American Mathematical Society", sobre,series dobles divergentes,y,series dobles de Dirichlet,respectivamente.

(Véase el tratado de London,el de Pringsheim,y la memoria elemental de Severi,publicada en el Periódico di Matematiche).

Más detalles sobre las series dobles van insertos en la parte cuarta de la presente memoria.

Ahora bien, para que la definición dada de punto regular o singular que hemos tomado sea válida hay que demostrar que la condición de regularidad o singularidad de un punto es independiente de la elección de los parámetros:

$$\underline{\sigma}, \underline{\sigma'}, \underline{\omega} \text{ y } \underline{\omega'}$$

A tal efecto se tiene el siguiente teorema.

<u>Teorema 26.</u>

Conservando las notaciones empleadas hasta aquí se tiene que:

a) Si para una cuaterna de valores:

$$\sigma > e \geq \mathcal{C} \; ; \; \sigma' > e' \geq \mathcal{C}' ; \; 0 < \omega < 1 \; ; \; 0 < \omega' < 1$$

que cumpla la condición:

$$\sigma, \sigma', \omega, \omega'$$

se verifica que:

$$\overline{\lim_{(m,n)\to(\infty,\infty)}} \sqrt[m+n]{|O_{m,n}|} < 1$$

para toda cuaterna de valores:

$$\sigma_1, \sigma'_1, \omega_1, \omega'_1$$

que cumpla la condición:

$$\sigma_1 > e \geq \mathcal{C}, \; \sigma'_1 > e' \geq \mathcal{C}' ; \; 0 < \omega_1 < 1 ; \; 0 < \omega'_1 < 1$$

también se verifica que:

$$\overline{\lim_{(m,n)\to(\infty,\infty)}} \sqrt[m+n]{|O'_{m,n}|} < 1$$

b) Si para una cuaterna de valores:

$$\sigma, \sigma', \omega, \omega'$$

que cumpla la condición:

$$\sigma > e \geq \mathcal{C} \; ; \; \sigma' > e' \geq \mathcal{C}' ; \; 0 < \omega < 1 ; \; 0 < \omega' < 1$$

se verifica que:

$$\overline{\lim_{(m,n)\to(\infty,\infty)}} \sqrt[m+n]{|O_{m,n}|} = 1$$

para toda cuaterna de valores:

$$\sigma_1, \sigma'_1, \omega_1, \omega'_1$$

que cumpla la condición:

$$\sigma_1 > c \geqslant C \; ; \; \sigma'_1 > c' \geqslant C' \; ; \; 0 < \omega_1 < 1 \; ; \; 0 < \omega'_1 < 1$$

también se verifica que :

$$\overline{\lim_{(m,n)\to(\infty,\infty)}} \sqrt[m+n]{|O'_{m,n}|} \leqslant 1$$

con O' hemos indicado la función que se obtiene reemplazando en la funció $O_{m,n}$ los parámetros $\underline{\sigma}, \underline{\sigma'}, \underline{\omega}, \underline{\omega'}$ por los parámetros $\underline{\sigma_1}, \underline{\sigma'_1}, \underline{\omega_1}, \underline{\omega'_1}$ respectivamente.

<u>Definición</u>:

A la función $O_{m,n}$ la llamaremos "<u>función de singularidades</u>"

También se verifican los siguientes teoremas:

<u>Teorema 27</u>:

Sean C y C' un par de abscisas asociadas de c convergencia condicional de la serie doble:

$$f(z,z') \equiv \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} a_{m,n} \cdot e^{-mz-nz'}$$

Si:

$$c+id \; ; \; z' : c'+id'$$

son puntos interiores cualesquiera a los semiplanos de convergencia condicional cuyas abscisas son C y C';es decir:

$$c > C \; ; \; z' : c' > C'$$

se tiene que:

$$\overline{\lim_{(m,n)\to(\infty,\infty)}} \sqrt[m+n]{|O_{m,n}|} < 1$$

es decir;el punto:

$$[z = c + id;\ z' = c' + id']$$

es regular para la función f(z,z').

En otras palabras:

La función f(z,z') es regular en todo par de puntos interiores a dos semiplanos asociados de convergencia condicional de la serie doble determinante o en todo par de puntos interiores a dos círculos asociados de convergencia condicional de la serie doble potencial,según que la función f(z,z') venga definida por una serie doble determinante o potencial,respectivamente.

Teorema 28:

Sean:

a)el punto:

$$z = c + id$$

perteneciente a la recta:

$$R(z) = C$$

y el punto:

$$z' = c' + id'$$

perteneciente a la recta:

$$R(z) = C'$$

o bien:

b)el punto:

$$z = c + id$$

perteneciente a la recta:

$$R(z) = C;$$

y el punto:

$$z' = c' + id'$$

perteneciente al interior del semiplano:

$$R(z) > C';$$

o bien:

c)el punto:

$$z=c+id$$

perteneciente al interior del semiplano:

$$R(z)>C$$

y el punto:

$$z'=c'+id'$$

perteneciente a la recta:

$$R(z')=C'$$

en cualquiera de estas tres hipótesis,existen valores de c,c',d,yd',para los cuales es:

$$\overline{\lim_{(m,n)\to(\infty,\infty)}} \sqrt[m+n]{|O_{m,n}|}=1$$

En otras palabras:

Existe,por lo menos,un punto:

$$(z_0;z'_0)$$

tal que:

$$\left.\begin{array}{l} |z_0|=R \;;\; y:\; |z'_0|=R' \\ \text{o bien:} \\ |z_0|<R \;;\; y:\; |z'_0|=R' \\ \text{o bien:} \\ |z_0|=R \;;\; y:\; |z'_0|<R' \end{array}\right\}$$

en el cual la función de singularidades:

$$O_{m,n}$$

cumple la condición:

$$\overline{\lim_{(m,n)\to(\infty,\infty)}} \sqrt[m+n]{|O_{m,n}|}=1$$

o en otros términos:

dada la serie doble potencial:

$$f(z,z') \equiv \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} a_{m,n} \cdot z^m \cdot z'^n$$

y llamándose y C' a un par de círculos asociados de convergencia condicional existe por lo menos un par de puntos z_0 y z'_0 situados ambos sobre los contornos de sus respectivos círculos o bien: uno interior a su círculo y el otro sobre el contorno del suyo, tal que dicho punto:

$$(z = z_0 \; ; \; z' = z'_0)$$

es un punto singular para f(z,z').

Observación:

Téngase en cuenta que si la función f(z,z') viene definida por una serie doble determinante el punto singular para f(z,z'), que puede ser el único, situado en los contornos de sus semiplanos asociados de convergencia, puede ser el punto:

$$(z = \infty \; ; \; z' = \infty)$$

Teorema 29:

Si el punto:

$$(z = z_0 \; ; \; z' = z'_0)$$

es regular para:

$$f(z,z') \equiv \begin{cases} \sum\sum a_{m,n} \cdot z^m \cdot z'^n \\ \sum\sum a_{m,n} \cdot e^{-mz-nz'} \end{cases}$$

la función f(z,z') es desarrollable en serie dobles de potencias de:

$$z - z_0 \; , \; y \; : \; z' - z'_0$$

desarrollo válido en dos ciertos círculos de centros en z_0 y z'_0 y de radios suficientemente pequeños, es decir, se tiene:

$$f(z,z') \equiv \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} b_{m,n} \cdot (z-z_0)^m \cdot (z'-z'_0)^n$$

o bien:

$$f(z,z') \equiv \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} b_{m,n}\, e^{-m(z-z_0)-n(z'-z'_0)}$$

Teorema 30.

Si el punto:

$$(z=z_0\,;\, z'=z'_0)$$

es singular para f(z,z') y

$$f(z,z') \equiv \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} a_{m,n}\, z^m\, z'^n$$

la función f(z,z') no es desarrollable en serie doble de potencias de:

$$\underline{z-z_0}\ ;\ y,\ \underline{z'-z'_0}.$$

Los teoremas 27,28,29 y 30 son las generalizaciones naturales de fundamentales propiedades en la teoría de las funciones analítica de una sola variable.

Pero no solamente tales propiedades fundamentales se conservan en el caso de dos variables independientes,si no también la mayoría de las proposiciones referentes a las singularidades situadas sobre la circunferencia de convergencia de una serie simple potencial,como se estipulan en los siguientes enunciados:

Teorema 31.

Sea la función analítica f(z,z') definida por la serie doble de potencias:

$$f(z,z') \equiv \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} a_{m,n}\, z^m\, z'^n$$

Si existen dos valores de m y n,que llamaremos,respectivamente, m_0 y n_0 tales que para todo $m \geqslant m_0$ y cualquier valor de n,y para $n \geqslant n_0$ y cualquier valor de m es:

$$a_{m,n} \geqslant 0$$

el punto:

$$(z = R \; ; \; z' = R')$$

es singular para f(z,z').

Más general, es el siguiente:

Teorema 32.

Con las notaciones del teorema anterior, si $a_{m,n}$ es complejo pero satisface a la condición:

$$|\arg a_{m,n}| \leq \tau < \frac{\pi}{2}$$

($\tau \equiv$ fijo), para:

$$\left.\begin{array}{l} m \geq m_0 \\ n \equiv \text{cualquiera} \end{array}\right\}$$

y:

y para:

$$\left.\begin{array}{l} m \equiv \text{cualquiera} \\ n \geq n_0 \end{array}\right\}$$

y:

también el punto:

$$(z = R \; ; \; z' = R')$$

es singular para f(z,z').

El teorema 31 es la generalización del teorema de Vivanti y el teorema 32 es la del de Fekete-Dienes.

No solamente valen estas generalizaciones sino la de los teoremas de Fabry, Tsuji, Narumi, Sobimizu, Izumi, Obreshkoff, Leau, Le Roy, Fatou, Lecornu, Eisenstein Hadamard, Poincaré, Picard, Painlevé, Cassoratti, Ostrowski, Mandelbrojt, etc; así como la de todos los teoremas demostrados en la primera parte.

Hasta aquí nos hemos referido a los puntos singulares de las funciones analíticas de dos variables, situados en el contorno de un par de círculos asociados de convergencia simple.

Ahora bien, la condición para que un punto:

$$(z = z_0 \; ; \; z' = z'_0)$$

tal que:

$$|z_0| \geq R \; ; \; y \; |z'_0| \geq R'$$

ó bien:

$$|z_0| > R \; ; \; y \; |z'_0| \equiv R'$$

ó bien:

$$|z'_0| > R' \; ; \; y \; |z_0| \equiv R$$

sea regular o singular para $f(z,z')$ la hacemos depender de la noción de prolongación analítica de una función analítica.

NOTA:

Para mayor ilustración de la primera parte véase:

"Les singularités des fonctánns analytiques définies par une série de Taylòr" de Mandelbrojt, de "Mémorial des Scimncies Mathématiques".

Carlos Biggeri

Cárlos Biggeri.

PARTE TERCERA.

ALGORITMOS DE CONVERGENCIA ASOCIADOS A FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES INDEPENDIENTES Y ALGORITMOS DE SUMACION ASOCIADOS A SERIES E INTEGRALES MULTIPLES.

-.INTRODUCCION.-

Desarrollada completamente la teoría de los algoritmos lineales de convergencia y de sumación,en otras palabras la teoría de las series e integrales simples divergentes,se plantea de modo natural el problema,de estudiar las series e integrales múltiples divergentes,empleando procedimientos generales en los cuales queden comprendidos como casos particulares,cada uno de los procedimientos particulares generadores de convergencia.

Las condiciones necesarias ~~necesarias~~ y suficientes referentes a las sucesiones dobles fueron ya dadas por Robinson en "Transactions of the American Mathematical Society",y por lo tanto fácilmente se resuelve el problema para las series dobles.

En la presente parte nos hemos de referir a las funciones de varias variables y a las integrales múltiples,obteniendo un método general de convergencia y de sumación,en el cual quedan comprendidos,como casos particulares, las generalizaciones de los métodos de Abel,Borel,LeRoy,Stieltjes,Lambert, Vallée-Poussin,Lindelöf,etc,etc.

Para abreviar la exposición nos referiremos a las funciones de dos variables y a las integrales dobles,no habiendo ninguna dificultad,para enunciar y demostrar los teoremas,en el caso general de n variables independientes.

Por razones de comodidad,la numeración de las fórmulas,la haremos independiente de una parte a otra.

DEFINICIONES, PROPIEDADES Y TEOREMAS FUNDAMENTALES.

Sea $\varphi(x,y)$ una función, real o compleja, de las variables reales independientes y no negativas x e y, y $\alpha(x,y,t)$ una función, integrable sobre todo rectángulo de lados paralelos a los ejes x e y, a la cual llamaremos núcleo.
La variable t que puede ser real o compleja, continua o discontinua, varía sobre un conjunto ordenado, C, de infinitos puntos y de cualquier número, finito o infinito, de dimensiones y la haremos tender a un punto límite t_0.
Indicaremos con T_0, un semientorno de t_0 sobre C, esto es, todos los valores de C, a partir desde un t en adelante.

DEFINICION:

Llamaremos sumatríz de $\varphi(x,y)$, con respecto al núcleo $\alpha(x,y,t)$, y la indicaremos con $\Phi(t)$, a la suma de la integral doble:

$$\int_0^\infty\int_0^\infty \varphi(x,y)\,\alpha(x,y,t)\,dx\,dy$$

cuando ésta sea convergente.
Investiguemos cúales son las condiciones necesarias y suficientes que debe cumplir el núcleo $\alpha(x,y,t)$, para que la sumatríz de toda función $\varphi(x,y)$ acotada en el primer cuadrante del plano (x,y) y convergente para: $(x,y)\to(\infty,\infty)$, tenga límite para $t\to t_0$; empezando por el caso más sencillo, en que $\varphi(x,y)$ sea acotada o infinitésima.
Veamos antetodo cúal es la condición necesaria para la existencia de la sumatriz de cualquier función acotada o infinitésima.
A este respecto se tiene:

Teorema 1º.

Si la integral:

$$\int_0^\infty\int_0^\infty \varphi(x,y)\,\alpha(x,y,t)\,dx\,dy$$

es convergente para toda función, $\varphi(x,y)$,acotada e infinitésima, ~~cuando~~ si $(x,y) \to (\infty,\infty)$; ,entonces la integral:

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \alpha(x,y,t).\,dx,dy$$

converge absolutamente en un T_0 ,

En efecto:

Supongamos que la integral:

$$\int_0^\infty \int_0^\infty |\alpha(x,y,t)|\,dx\,dy$$

tenga por suma $+\infty$,en algún punto t,de cualquier T_0 ;entonces existe un par de valores: $x = c$ e $y = d$ (c y d son fijos) tal que la integral de: $|\alpha(x,y,t)|$

sobre el retángulo, R, de vértices:

$$(0,0),(c,0),(c,d),(0,d),$$

es mayor que la unidad.

Llamemos R'' al rectángulo cuyos vértices son:

$$(0,0),(x,0),(x,y),(0,y),$$

siendo:

$$x \geq c \text{ e } y, \geq d$$

y R' al recinto indefinido del primer cuadrante exterior al rectángulo R.

Consideremos la función $\varphi(x,y)$ definida del siguiente modo:

es igual a cero para todo punto de R y para todo punto de R' vale:

$$\varphi(x,y) = \frac{|\alpha(x,y,t)| : \alpha(x,y,t)}{\iint_{(R'')} |\alpha(x,y,t)|\,dx\,dy}$$

La sumatriz $\phi(t)$ de esta función $\varphi(x,y)$ acotada e infinitésima (pues $|\varphi(x,y)|<1$ y para $(x,y) \to (\infty,\infty)$ $\varphi(x,y) \to 0$ ~~tiende a cero~~) es:

$$\phi(t) = \iint_{(R')} \frac{|\alpha(x,y,t)|\,dx\,dy}{\iint_{(R'')} |\alpha(x,y,t)|\,dx\,dy}$$

integral que diverge,sé diverge:

$$\iint_{(R)} |\alpha(x,y,t)|\, dx\, dy.$$

en virtud del teorema generalizado de Dini.

Luego vemos que:

La simple existencia de la sumatriz $\Phi(t)$ de cualquier función acotada e infinitésima,implica la convergencia absoluta de la integral:

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \alpha(x,y,t)\, dx\, dy$$

y por consiguiente:la convergencia de las integrales:

$$\int_0^\infty \int_0^q |\alpha(x,y,t)|.dx.dy$$

y:

$$\int_0^p \int_0^\infty |\alpha(x,y,t)|.dx.dy$$

para todo p y para todo q;en todo t de un T_0 .

Por lo tanto en T_0 existe la función A (t),definida por

$$A(t) = \int_0^\infty \int_0^\infty \alpha(x,y,t)\, dx\, dy$$

Veamos ahora las condiciones necesarias para que el límite de la sumatriz cuando $t \longrightarrow t_0$,sea cero cualquiera que fuese la función $\varphi(x,y)$,acotada e infinitésima.

La condición primera,dada por el teorema anterior,es ya necesaria,pero no es suficiente,como se ve considerando el siguiente núcleo:

$$\alpha(x,y,t) = x.y.\frac{(t-1)^{x+y-2}}{t^{x+y}}$$

siendo t una variable real del intervalo: $(1 \leq t < +\infty)$ y $t_0 = +\infty$; ;cuya integral sobre el primer cuadrante converge absolutamente.

La sumatriz $\Phi(t)$,de la función $\varphi(x,y)$, acotada e infinitésima,que vale ce-

ro para: $0 \leq x \leq 1$, cualquiera que sea y y para $0 \leq xy \leq 1$, cualquiera que sea x, y que vale: $\frac{1}{xy}$ para $x > 1$ e $y > 1$, es:

$$\Phi(t) = \left[t \cdot \log\left(\frac{t-1}{t}\right)\right]^{-2}$$

que tiende a la unidad si $t \to +\infty$.

Nótese que en este ejemplo es:

$$\lim A(t) = \lim \int_0^\infty \int_0^q |\alpha(x,y,t)|\, dx\, dy = \lim \int_0^p \int_0^\infty |\alpha(x,y,t)|\, dx\, dy = +\infty.$$

Vista la insuficiencia de la condición primera, mediante el ejemplo anterior obtengamos otras condiciones más.

A tal efecto se tiene:

Teorema 2ª.

Es condición necesaria para que la sumatriz, $\Phi(t)$, de toda función acotada e infinitésima, $\varphi(x,y)$, tienda a cero, si $t \to t_0$, que se verifique:

$$\lim_{t \to t_0} \int_0^p \int_0^\infty |\alpha(x,y,t)| \cdot dx, dy = 0;$$

cualquiera que sea el valor finito de p.

En efecto:

Supongamos que, para $t \to t_0$, no tienda a cero, dicha integral, entonces considerando la sucesión:

$$1 > \frac{1}{2} > \frac{1}{2^2} > \ldots > \frac{1}{2^n} > \ldots \longrightarrow 0^+.$$

existirá en todo T_0 un punto: $t_n \equiv \left(\frac{1}{2^n}\right)$

en el cual es:

$$\int_0^p \int_0^\infty |\alpha(x,y,t_n)| \cdot dx\, dy > \frac{1}{2^n} \qquad (1)$$

Pero, evidentemente, hay infinitos valores de y, que forman un intervalo, para los cuales es:

$$\int_0^p \int_y^\infty |\alpha(x, y, t_n)| . dx\, dy \leq \frac{1}{4.2^n} \qquad (2)$$

llamamos y_n al extremo superior de dicho intervalo infinito.

De una (1) y (2) se deduce:

$$\int_0^p \int_0^{y_n} |\alpha(x, y, t_n)| . dx\, dy > \frac{3}{4.2^n}$$

Determinada con este criterio la sucesión:

$$0 \leq y_0 < y_1 < \ldots < y_n < \ldots \longrightarrow +\infty,$$

definamos la función $\varphi(x,y)$ del siguiente modo:

$$\varphi(x,y) = |\alpha(x,y,t_n)| : \alpha(x,y,t_n); \text{ si es } \alpha(x,y\,t_n) \neq 0,$$

para: $0 \leq x \leq p$, y, $0 \leq y \leq y_n$;

y:

$$\varphi(x,y) = 0$$

en todos los otros puntos del primer cuadrante.

La sumatriz $\Phi(t)$, de esta Función, $\varphi(x,y)$, acotada e infinitésima en el punto t_n vale:

$$\Phi(t_n) = \int_0^p \int_0^{y_n} |\alpha(x, y, t_n)| . dx\, dy.$$

es decir, existen puntos t_n tan próximos como se quiera a t_0, tales que en ellos es:

$$\Phi(t_n) > \frac{3}{4.2^n}$$

luego $\Phi(t)$, no tiende a cero, contra la hipótesis.

Análogamente se demuestra el siguiente teorema.

Teorema 3ª.

Es condición necesaria para que la sumatriz $\Phi(t)$, de toda función acotada, $\varphi(x,y)$, e infinitésima, si $(x,y)\to(+\infty+\infty)$, tienda al cero, si $t\to t_0$, que se tenga:

$$\lim_{t\to t_0}\int_0^\infty\int_0^q |\alpha(x,y,t)|.dx.dy=0$$

cualquiera que sea el valor positivo y finito de q.

Corolario:

Del teorema segundo o del teorema tercero se deduce que:

Si el límite de la sumatriz, $\Phi(t)$, de toda función acotada, $\varphi(x,y)$, e infinitésima, si $(x,y)\to(\infty\infty)$, es cero, para $t\to t_0$, el límite de la integral del módulo del núcleo sobre todo rectángulo finito de lados paralelos a los ejes x y y, es cero, si $t\to t_0$.

Teorema 4ª:

Es condición necesaria para que el límite, para $t\to t_0$, de la sumatriz, $\Phi(t)$, de toda función acotada, $\varphi(x,y)$, e infinitésima, si $(x,y)\to(+\infty,+\infty)$, sea cero, que exista una constante, K, positiva y un semientorno T_0 de t_0, tal que en todo T sea:

$$\int_0^\infty\int_0^\infty |\alpha(x,y,t)|.dx.dy<K$$

En efecto: supongamos que esta integral no esté acotada en ningún T_0, entonces considerando la sucesión:

$$1<2<3<\ldots<n<n+1<\ldots\to+\infty,$$

existirá en todo T_0 un punto: $t_n\equiv t_n(n+1)$;

en el cual es:

$$\int_0^\infty\int_0^\infty |\alpha(x,y,t_n)|.dx\,dy>n+1$$

siendo n un número natural arbitrariamente grande.

Llamemos R' a todo recinto indefinido formado por los puntos del primer cuadrante exteriores al cuadrado cuyos vértices son:

$$(0,0),(x,0),(x,y),(0,y),$$

siendo: $x = y$.

A dicho cuadrado lo llamaremos "complementario" del recinto R'.

Evidentemente hay infinitos recintos R' tales que:

$$\iint_{(R')} |\alpha(x,y,t_n)|.dx\,dy \leq 1.$$

y de estos infinitos recintos R' tomemos aquel, al cual llamaremos R'', cuyo complementario es mínimo, el que seguramente existe.

Llamemos x_n e y_n a los lados de este cuadrado, R, complementario de R'', siendo:

$$x_n = y_n \equiv x_n(t_n) = y_n(t_n).$$

Luego, en virtud de:

$$\iint_{(R)} |\alpha(x,y,t_n)|.dx\,dy = \int_0^\infty\int_0^\infty |\alpha(x,y,t_n)|.dx\,dy - \iint_{(R')} |\alpha(x,y,t_n)|.dx\,dy$$

se tiene:

$$\iint_{(R)} |\alpha(x,y,t_n)|.dx\,dy > n.$$

Consideremos la función; $\varphi(x,y)$, definida del siguiente modo:

para todo (x,y) de R es:

$$\left.\begin{array}{ll} \varphi(x,y) = |\alpha(x,y,t_n)| : \alpha(x,y,t_n) & ; \text{ si es: } \alpha(x,y,t_n) \neq 0 \\ \varphi(x,y) = 0 & ; \text{ si es: } \alpha(x,y,t_n) = 0 \end{array}\right\}$$

y para todo (x,y) de R'' es:

$$\varphi(x,y) = 0.$$

La sumatriz, $\Phi(t)$,de esta función acotada, $\varphi(x,y)$,e infinitésima, si $(x,y)\to(\infty\infty)$ en el punto t_n vale:

$$\Phi(t_n)=\iint_{(R)}|\alpha(x,y,t_n)|.dx.dy>n$$

luego $\Phi(t)$,no tiende a cero, contra la hipótesis.

Obsérvese, en virtud de esta última desigualdad, que:

Si no se cumple la hipótesis de acotación de la integral:

$$\int_0^\infty\int_0^\infty|\alpha(x,y,t)|.dx.dy;$$

el límite de la sumatriz en caso de existir es $+\infty$.

Por lo tanto:

Las condiciones necesarias a las cuales debe satisfacer el núcleo $\alpha(x,y)$ para que la sumatriz, $\Phi(t)$,de toda función acotada, $\varphi(x,y)$,es infinitésima, si $(x,y)\to(\infty\infty)$,tienda a cero, para $t\longrightarrow t_0$,son:

I) La integral:

$$\int_0^\infty\int_0^\infty|\alpha(x,y,t)|.dx.dy$$

es convergente en todo punto t de un cierto semientorno, T_0 ,de t_0 ;y además dicha integral está acotada en T_0 .

II)

$$\lim_{t\to t_0}\int_0^p\int_0^\infty|\alpha(x,y,t)|.dx.dy=0;$$

cualquiera que sea el valor finito y positivo de p.

III)

$$\lim_{t\to t_0}\int_0^\infty\int_0^q|\alpha(x,y,t)|.dx.dy=0,$$

cualquiera que sea el valor finito y positivo de q.

Fácil es ver que dichas condiciones son también suficientes.

Ante todo,por ser:

$$\left| \varphi(x,y) \right| < K$$

(k = constante),para todo punto(x,y) del primer cuadrante y la integral del módulo del núcleo convergente,la sumatriz, $\Phi(t)$,de $\varphi(x,y)$,existe(y además la integral que la define satisface a la condición de finitud,esto es:

$$\left| \int_0^x \int_0^y \varphi(x,y)\, \alpha(x,y,t)\, dx\, dy \right| < K \int_0^\infty \int_0^\infty \left| \alpha(x,y,t) \right| dx\, dy).$$

Veamos que,si además la función $\varphi(x,y)$ acotada,converge hacia cero,si $(x,y) \to (\infty,\infty)$ se tiene:

$$\lim \Phi(t) = 0 \quad ;$$

en efecto,dado una $\varepsilon > 0$,arbitrario,existe un:

$$p \equiv p(\varepsilon)$$

y un:

$$q \equiv q(\varepsilon)$$

tales que para todo punto (x,y),donde:

$$x \geqslant p$$

y:

$$y \geqslant q$$

es:

$$\left| \varphi(x,y) \right| < \frac{\varepsilon}{3K} \qquad (3)$$

siendo K una cota de la integral:

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \left| \alpha(x,y,t) \right| . dx . dy$$

en T_0 .

Fijados de este modo p y q (ambos funciones de ε), en virtud de las condiciones (II) y (III) existe un semientorno:

$$T_1 \equiv T_1(\varepsilon, p, q) \equiv T_1(\varepsilon),$$

contenido en T_0, tal que en todo él es:

$$\int_0^p \int_0^\infty |\alpha(x,y,t)| \cdot dx \cdot dy < \frac{\varepsilon}{3K}, \qquad (4)$$

y:

$$\int_0^\infty \int_0^q |\alpha(x,y,t)| \cdot dx \cdot dy < \frac{\varepsilon}{3K}; \qquad (5)$$

por lo tanto si descomponemos $\Phi(t)$ en la siguiente forma:

$$\Phi(t) = \int_0^p \int_0^\infty + \int_p^\infty \int_0^q + \int_p^\infty \int_q^\infty$$

(siendo: $\varphi(x,y)\,\alpha(x,y,t)\,dx\,dy$

la función sub-integral común) se tiene según (1), (2) y (3) que en todo un cierto semientorno de t_0 es:

$$|\Phi(t)| < \varepsilon.$$

Supongamos ahora que la función acotada, $\varphi(x,y)$ (llamando k a su cota, en el primer cuadrante), sea convergente, si $(x,y) \to (\infty,\infty)$; y llamemos φ a su límite, que lo supondremos no nulo. Descomponiendo $\varphi(x,y)$ en la forma:

$$\varphi(x,y) = \varphi + \delta(x,y)$$

(donde: $\lim \delta(x,y) = 0$, si $(x,y) \to (\infty\,\infty)$, y además $|\delta(x,y)| < |\varphi| + k$)

se tiene:

$$\Phi(t) - \varphi \cdot A(t) = \int_0^\infty \int_0^\infty \delta(x,y)\,\alpha(x,y,t)\,dx\,dy$$

de donde según lo anterior se tiene:

Las condiciones necesarias y suficientes para que: $\Phi(t) - \varphi \cdot A(t)$

tienda a cero,si $t \to t_0$,son las (I),(II) y (III).

Según esto,como es: $\varphi \neq 0$ y

y:

$$\Phi(t) = [\Phi(t) - \varphi A(t)] + \varphi . A(t) \qquad (6)$$

se deduce que:

Teorema V).

Las condiciones necesarias y suficientes para que la sumatriz, $\Phi(t)$,de toda función acotada, $\varphi(x,y)$,y convergente,si $(x,y) \to (\infty,\infty)$ (con límite distinto o igual a cero),tenga límite finito,si $t \to t_0$ son:(I),(II),(III) y:

IV)la función: $A(t) \equiv \int_0^\infty \int_0^\infty \alpha(x,y,t).dx\,dy$;

tiendo hacia un límite finito,si $t \to t_0$ (el cual designaremos con α y lo llamaremos coeficiente de convergencia).

Además,si se verifican estas cuatro condiciones,según (4) se tiene:

$$\lim_{t \to t_0} \Phi(t) = \varphi . \alpha$$

Observación:

Si el núcleo:

$$\alpha(x,y,t)$$

es real no negativo (o real no positivo) la acotación de la integral:

$$\int_0^\infty \int_0^\infty |\alpha(x,y,t).\,dx.\,dy$$

en un T_0 es,consecuencia de la condición (IV).

Definiciones:

Llamaremos <u>factor de convergencia</u> a todo núcleo: $\alpha(x,y,t)$,

que satisfaga a las cuatro condiciones anteriores.

Cada factor de convergencia origina un <u>algoritmo de convergencia</u>.

Si el coeficiente de convergencia es <u>nulo</u> diremos que el algoritmo es <u>singular</u>, y si es distinto de cero, el algoritmo se llamará <u>regular</u>.

Si el coeficiente de convergencia es igual a la unidad, al algoritmo lo llamaremos <u>unitario</u>.

Son inmediatas las siguientes propiedades:

a) <u>si se divide el factor de convergencia de un algoritmo regular por el coeficiente de convergencia, se obtiene un algoritmo unitario</u>.

b) <u>Todo algoritmo de convergencia cuyo factor es de variables (x,y) separadas respecto de t, es decir, cuyo factor es de la forma</u>:

$$\alpha(x,y,t) \equiv \alpha_1(x,y).\alpha_2(t).$$

<u>es singular</u>.

-.LIMITES GENERALIZADOS.-

Definición:

Llamaremos límites generalizado, para $(x,y) \longrightarrow (\infty,\infty)$, ξ, de una función de dos variables independientes, $\varphi(x,y)$, según el algoritmo regular, de factor $\alpha(x,y,t)$, o más brevemente:

$$(\alpha)-\lim_{(x,y)\to(\infty,\infty)} \varphi(x,y)$$

al límite ordinario de la sumatriz, $\Phi(t)$, dividido por el coeficiente de convergencia; y lo indicaremos así:

$$\alpha-\lim_{(x,y)\to(\infty,\infty)} \varphi(x,y)=\frac{1}{\alpha}\cdot\lim_{t\to t_0}\Phi(t);$$

cuando la sumatriz y este límite ordinario existan.

En virtud del teorema(IV) se verifica el siguiente:

TEOREMA FUNDAMENTAL DE CONSERVACIÓNDE LIMITES FINITOS DE FUNCIONES ACOTADAS.-

Si la función acotada, $\varphi(x,y)$, es convergente; tiene límite finito generalizado según cualquier algoritmo regular, y es:

$$(\alpha)-\lim_{(xy\to(\infty,\infty)} \varphi(x,y)=\lim_{(x,y)\to(\infty,\infty)} \varphi(x,y)$$

Si la función $\varphi(x,y)$ es convergente, para $(x,y)\to(\infty,\infty)$, pero no está acotada en todo el primer cuadrante, no puede asegurarse la existencia de la sumatriz, ni la convergencia de ésta en caso de existir, ni siquiera aún que el límite de ésta, supuesto existente y finito, que sea igual al límite de $\varphi(x,y)$ multiplicado por el coeficiente de convergencia.

Observación:

Hemos tomado en las integrales que define la función A(t) y la función sumatriz, A (t), los orígenes cero y cero, pero pueden tomarse otros orígenes cualesquiera, c y d positivos, cuando la $\varphi(x,y)$ está acotada, pues aunque varíen A(t) y $\Phi(t)$, en virtud de las condiciones segunda y tercera y de la acotación de $\varphi(x,y)$, los límites de estas dos funciones, para $t \to t_0$, no, alterarán.

En cambio; para funciones no acotadas en todo el primer cuadrante del plano (x,y) no puede asegurarse, en general, la independencia del límite generalizado respecto de los orígenes c y d.

PROPIEDADES LINEALES DE LOS ALGORITMOS DE CONVERGENCIA.-

Son inmediatas las siguientes propiedades fundamentales;

a)El (α)-límite de una suma algebraica,con un número finito de sumandos,de funciones,es la suma algebraica,análogamente formada,de los (α)-límites de éstas.

b)El (α)-límite de una constante es ella misma.

c)Si se multiplica una constante por una función,el (α)-límite de ésta queda multiplicado por dicha constante.

d)La suma algebraica de varios factores de convergencia,es también otro factor de convergencia,cuyo coeficiente es la suma algebraica de los coeficientes de aquéllos.

e)Si el núcleo es complejo,la condición necesaria y suficiente para que sea factor de convergencia,es que también lo sean su parte real y su parte imaginaria.

ALGUNOS ALGORITMOS ESPECIALES DE CONVERGENCIA.

a) ALGORITMO DE ABEL-STOLTZ.

El factor de convergencia es:

$$\alpha(x,y,t) \equiv u.v.\, e^{-xu-yv}$$

siendo u y v variables complejas e independientes que tienden simultánea e independientemente a cero, según sendos conjuntos C_1 y C_2, situados a la derecha de los ejes imaginarios.

Veamos como deben ser dichos conjuntos para que el núcleo cumpla las condiciones características de los factores de convergencia.

Pongamos:

$$u = u_1 + i\, u_2 \;,\; y \;,\; v = v_1 + i\, v_2 \;;$$

y:

$$u_1 > 0 \;,\; y \;\; v_1 > 0.$$

donde: $u_1 > 0$, y, $v_1 > 0$.

Ahora bien, se tiene que:

$$\int_0^\infty \int_0^\infty |\alpha(x,y,t)|.\, dx.dy = \frac{|u|}{u_1} \cdot \frac{|v|}{v_1} = \sqrt{1+\left(\frac{u_2}{u_1}\right)^2} \cdot \sqrt{1+\left(\frac{v_2}{v_1}\right)^2} \qquad (7)$$

y además: la función A(t) es idénticamente igual a la unidad, por lo tanto el algoritmo es unitario.

Por lo tanto: la sumatriz de cualquier función acotada, existe en este algoritmo y se cumple la condición (IV).

Para que se cumplan las condiciones (II) y (III) y la integral del módulo del núcleo esté acotada, según (5), es necesario y suficiente que u tienda a cero según un conjunto de puntos interior a un ángulo 2τ de vértice en el origen y simétrico respecto del eje real, u_1, tal que sea: $\tau < \frac{\pi}{2}$, y análogamente para $v \to 0$.

Corolario:

Supongamos que la integral doble de Laplace:

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \beta(x,y)\, e^{-xu-yv}.\, dx\, dy \equiv f(u\, v)$$

sea convergente en el punto: ~~$(x<0, y<0)$~~

$$(x=0\,;\,y=0)$$

y que la integral:

$$\int_0^x\int_0^y \beta(x,y).dx.dy \equiv \varphi(x,y) \longrightarrow \varphi \equiv f(0,0)$$

esté acotada en:

$$(0 \leq x < +\infty)\ y\ (0 \leq y < +\infty).$$

En tales hipótesis se tiene:

$$\lim. f(u,v) = f(0,0)$$

si $(u\ y\ v) \rightarrow (0;0)$ con la condición:

$$|\,Arg.\,u\,| < \tau < \frac{\pi}{2},\ (\tau\text{-fijo}),$$

(τ-fijo), contando los argumentos a partir de cero y recortando el plano a lo largo del semieje real y negativo.

En efecto: en virtud de la acotación de $\varphi(x,y)$, integrando reiteradamente por partes se tiene:

$$f(u,v) = uv\int_0^\infty\int_0^\infty \varphi(x,y).e^{-xu-yv}.dx.dy = \Phi(t)$$

por lo tanto:

$$\lim f(u,v) = \varphi.$$

Si $\varphi(x,y)$ no está acotada, la conclución puede ser falsa.

Si $u \rightarrow 0$, y, $v \longrightarrow 0$, pero por caminos reales, se obtiene el algoritmo de Abel.

Poniendo el factor de convergencia en forma potencial es:

$$\alpha(x,y,t) \equiv u^x.v^y.\log u.\log v.$$

donde u y v tienden simultánea e independientemente a la unidad, según sendos conjuntos de los círculos de centro en el origen y de radios iguales a la unidad, interiores a ángulos de vértice en el punto unidad, simétricos

respecto de los ejes reales y menores que dos rectos.

b)ALGORITMO DE CESÀRO DE ORDENES M Y N,SIENDO M Y N NUMEROS REALES POSITIVOS CUALESQUIERA.-

El factor de convergencia es:

$$\alpha(x,y,t) \equiv \frac{m \cdot n}{u^m v^n} \cdot (u-x)^{m-1} \cdot (v-y)^{n-1}$$

para $x \leq u$, e, $y \leq v$, y:

$$\varphi(x,y,t) \equiv 0$$

para todo punto (x,y) del primer cuadrante exterior al rectángulo, R, de vértices:

$$(0,0),(u,0),(u,v),(0,v);$$

siendo u y v variables reales y positivas que tienden simultánea e independientemente a $(+\infty,+\infty)$.

Para $m = n = 1$ se obtiene el algoritmo de Hölder.

---

6) ALGORITMO $C'_{m,n}$ DE ORDENES M Y N; SIENDO M Y N NUMEROS REALES POSITIVOS CUALESQUIERA.

El factor de convergencia es:

$$\alpha(x,y,t) = \frac{m.n}{u^m.v^n}\, x^{m-1}\, y^{n-1}$$

Para (x,y) cuando es: $x \leq u$, o, $y \leq v$, y:

$$\alpha(x,y,t) = 0$$

en todo punto exterior a R; siendo u y v variables positivas que tienden simultánea o independientemente a $(+\infty, +\infty)$.

Para m=n=1, se obtiene el algoritmo de Hölder.

d) ALGORITMO $G'_{m,n}$ DE ORDENES M Y N SIENDO M Y N NUMEROS REALES POSITIVOS CUALESQUIERA.

El factor de convergencia es:

$$\alpha(x,y,t) = \frac{m.n}{(u+m)^m (v+n)^n} \cdot (u+m-x)^{m-1} \cdot (v+n-y)^{n-1}$$

para $x \leq u$; e, $y \leq v$, y:

$$\alpha(x,y,t) = 0$$

en todo punto exterior a R, siendo u y v variables positivas que tienden simultánea e independientemente a $(+\infty, +\infty)$.

•) ALGORITMO $O''_{m,n,p,q}$ DE ORDENES M,N,P Y Q, SIENDO M,N,P Y Q NUMEROS REALES CUALESQUIERA.

El factor de convergencia es:

$$d(x,y,t) \equiv \frac{(m+n+1)!}{m!\,n!} \cdot \frac{(p+q+1)}{p!\,q!} \cdot \frac{(u-x)^p\, x^q}{u^{p+q+1}} \cdot \frac{(v-y)^n \cdot y^m}{y^{m+n+1}}$$

para $x \leq u$, e, $y \leq v$, y:

$$\alpha(x,y,t) \equiv 0$$

en todo punto exterior a R, siendo u y v variables positivas que tienden simultánea e independientemente a $(+\infty, +\infty)$.

---

f)ALGORITMO DE PERRON DE ORDENES M Y N, SIENDO M Y N NUMEROS REALES POSITIVOS CUALESQUIERA.

El factor de convergencia es:

$$d(x,y,t) = \frac{u^m}{(u+x)^{m+1}} \cdot \frac{v^n}{(v+y)^{n+1}}$$

donde u y v son variables positivas que tienden simultánea e independientemente a $(+\infty, +\infty)$.

g)ALGORITMO DE STIELTJES.

El factor de convergencia es:

$$d(x,y,t) = \frac{u^{x+1}}{x+1} \cdot \frac{v^{y+1}}{y+1} \cdot \frac{1}{li\,u \cdot li\,v}$$

donde u y v son variables positivas tales que:

$$u \longrightarrow 1^-; \quad y: v \longrightarrow 1^-.$$

simultánea e independientemente.

---

h)ALGORITMO DE WIENER.

El factor de convergencia es:

$$\alpha(x,y,t) \equiv \frac{4}{\pi^2 . u . v} \cdot \frac{sen^2(uv)}{x^2} \cdot \frac{sen^2(yv)}{y^2}$$

donde u y v son variables positivas que tienden simultánea e independientemente al punto (0,0).

Nota:

Fácil es comprobar que en los algoritmos b,c,d,e,f,g,h,el núcleo cumple las condiciones características de los factores de convergencia y que todos ellos son algoritmos unitarios.

ALGORITMOS DE CONVERGENCIA CUYO FACTOR ES REAL Y NO NEGATIVO, O REAL Y NO POSITIVO.

Supongamos ahora que los factores de convergencia sean reales y no negativos (o reales y no positivos) siendo por lo tanto el coeficiente de convergencia positivo o nulo (o negativo o nulo), y veamos las propiedades especiales en este caso.

Si el núcleo es real y no cambia de signo para $x \geq c$, e, $y \geq d$ (siendo c y d números fijos), y la función $\varphi(x\,y)$ está acotada, tomarémos como orígenes en las integrales que definen las funciones: ~~[illegible]~~

$$\Phi(t)$$

y:

$$A(t)$$

los valores c y d.

REDUCCION DEL INTERVALO DE OSCIDACION.

Teorema VI.

El algoritmo (α), cuyo factor $\alpha(x,y,t)$, es real y no negativo (o bien, real y no positivo) para $x \geq c$, e, $y \geq d$ (siendo c y d números fijos), y para todo t de un T_0, reduce el intervalo de oscilación de toda función, $\varphi(x,y)$, real oscilante, para $(x,y) \longrightarrow (\infty, \infty)$, y acotada, a otro intervalo contenido en el primero.

Es decir; llamando L y l a los límites de oscilación (finitos), superior y inferior, respectivamente, de $\varphi(x,y)$, para $(x,y) \longrightarrow (+\infty+\infty)$, y B' y l' a los límites de oscilación (que en virtud de la acotación de $\varphi(x,y)$ y de la con-

dición primera, serán finitos) de la función: $\frac{1}{\alpha} \cdot \Phi(t)$

para $t \to t_0$,demostraremos que:

$$l \leq l' \leq L' \leq L.$$

En efecto, supongamos primeramente que l sea positivo o nulo.

Dado un $\varepsilon > 0$ positivo existen:

un: $x_0 \equiv x_0(\varepsilon) \geq c$,

y un: $y_0(\varepsilon) \geq d$

tales que para: $x \geq x_0$

y: $y \geq y_0$

es:

$$\varphi(x,y) < L + \varepsilon$$

y teniendo en cuenta que el núcleo es positivo o nulo, para $x \geq c$, e, $y \geq d$, se verifica:

$$\Phi_1(t) \equiv \int_{x_0}^{\infty}\int_{y_0}^{\infty} \varphi(x,y) \cdot \alpha(x,y,t) \cdot dx\, dy <$$

$$< L \cdot \int_{x_0}^{\infty}\int_{y_0}^{\infty} \alpha(x,y,t) \cdot dx\, dy + \varepsilon \cdot \int_{0}^{\infty}\int_{0}^{\infty} \alpha(x,y,t)\, dx\, dy. \qquad (8)$$

Pero, por ser:

$$\int_{x_0}^{\infty}\int_{y_0}^{\infty} = \int_{c}^{\infty}\int_{d}^{\infty} - \int_{c}^{x_0}\int_{d}^{\infty} - \int_{x_0}^{\infty}\int_{d}^{y_0} \to \alpha$$

(siendo: $\alpha(x,y,t) \cdot dx\, dy$

la función subintegral común); dado un $\varepsilon' > 0$ positivo, arbitrario, existe un:

$$T_0 \equiv T_0(\varepsilon')$$

tal que en todo él es:

$$\int_{x_0}^{\infty}\int_{y_0}^{\infty} \alpha(x,y,t).dx.dy < \alpha+\varepsilon' \qquad (9)$$

Por lo tanto, según (6) y (7), en todo T_0 se tiene:

$$\Phi_1(t) < (L+\varepsilon).\alpha + \varepsilon'.(L+\varepsilon)$$

luego:

$$\frac{1}{\alpha}.\overline{\lim}\,\Phi_1(t) \leq L+\varepsilon$$

y como Φ_1 (t) y Φ (t), tienen los mismos límites de oscilación, se infiere que:

$$L' - L \leq \varepsilon$$

de donde:

$$L' \leq L$$

Con un raciocinio análogo se prueba que:

$$l' \geq l$$

Si, ahora, es L negativo o nulo, o L positivo o nulo y l negativo o nulo, considerando la función: $-\varphi(x,y)$,

se reduce al caso anterior.

Si el factor de convergencia toma valores reales de signos distintos el (α)-intervalo de oscilación de φ (x,y), cuyo intervalo de oscilación no es nulo (esto es: L y l son distintos), pueden no estar contenido en éste.

CONSERVACION DE LOS LIMITES INFINITOS CON SIGNO DETERMINADO.

Según la definición dada más arriba, para que $\varphi(x,y)$ tenga límite generalisado-

zado según el algoritmo regular cuyo factor es $\alpha(x,y,t)$, se requiere:

1º) La existencia de la sumatriz $\Phi(t)$, y:

2º) La existencia de límite (finito o infinito) de esta sumatriz, para $t \to t_0$.

Completemos esta definición con la siguiente:

<u>Definición:</u>

Diremos que el (α)-límite de $\varphi(x,y)$, ($\alpha \neq 0$), para $(x,y) \to (\infty,\infty)$; es $+\infty$ (o bien: $\to \infty$) cuando exista la sumatriz $\Phi(t)$ y sea:

$$\lim \Phi(t) = +\infty$$

(o bien: $\lim \Phi(t) = -\infty$), si $t \to t_0$, o bien, cuando la integral:

$$\int_0^x \int_0^y \varphi(x,y)\,\alpha(x,y,t)\,dx.dy$$

tienda a $+\infty$ (o bien: a $-\infty$), si $(x,y) \to (\infty,\infty)$.

Una condición necesaria para que la integral:

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \varphi(x,y).\alpha(x,y,t).dx,dy$$

no sea convergente es que la función $\varphi(x,y)$ no esté acotada en el primer cuadrante, lo que seguramente se verifica si es: $\lim \varphi(x,y) = \infty$;

para $(x,y) \to (\infty, \infty)$.

Con la definición anterior se demuestra que se conservan, si el factor es real y no cambia de signo, los límites infinitos con signo determinado, mediante el siguiente teorema que completa el teorema fundamental.

<u>Teorema VII)</u>

Si el factor: $\alpha(x,y,t)$

del algoritmo regular (α), es real y no cambia de signo para $x \geq c$, e, $y \geq d$ y el límite ordinario, para $(x,y) \to (\infty,\infty)$, de $\varphi(x,y)$ es $+\infty$ (o bien $-\infty$)

y además $\varphi(x,y)$ está acotada en toda faja horizontal y en toda faja vertical (del primer cuadrante) existe el (α)-límite de $\varphi(x,y)$ y es:

$$(\alpha)-\lim \varphi(x,y) = +\infty$$

(o bien: $(\alpha)-\lim \varphi(x,y) = \longrightarrow \infty$.).

En efecto, supongamos primeramente que sea: $\lim \varphi(x,y) = +\infty$.

Dado arbitrariamente un número H positivo, existe un: $x_0 \equiv x_0(H) > c$

y un: $y_0 \equiv y_0(H) \geq d$,

tales que para:

$$x \geq x_0$$

e:

$$y \geq y_0$$

es:

$$\varphi(x,y) > \frac{2H}{\alpha}; \quad (\alpha > 0)$$

luego:

$$\Phi_1(t) \equiv \int_{x_0}^{\infty}\int_{y_0}^{\infty} \varphi(x,y).d(x,y,t).dx.dy > \frac{2H}{\alpha} \int_{x_0}^{\infty}\int_{y_0}^{\infty} \alpha(x,y,t).dx.dy$$

y como en un T_0 es:

$$\int_{x_0'}^{\infty}\int_{y_0'}^{\infty} d(x,y,t).dx.dy > \frac{d}{2}$$

se tiene:

$$\Phi_1(t) > H;$$

luego:

$$\lim \Phi_1(t) = +\infty,$$

si $t \to t_0$.

Ahora bien, por ser:

$$\Phi(t) \longrightarrow \Phi_1(t) = \int_c^{x_0}\int_d^{\infty} - \int_{x_0}^{\infty}\int_d^{y_0}$$

(siendo: $\underline{(\varphi(x,y).\alpha(x,y,t).dx.dy}$

el integrando común), y por estar, por hipótesis, la $\underline{\varphi\ (x,y)}$ acotada en toda faja vertical y en toda faja horizontal y según las condiciones (2ª) y (3ª) se tiene:

$$\lim \Phi(t) = \lim \Phi_1(t) = +\infty,$$

si $t \to t_0$.

Finalmente, si la integral:

$$\int_{x_0}^{\infty}\int_{y_0}^{\infty} \varphi(x,y).\alpha(x,y,t).dx.dy$$

tiene por suma $\underline{+\infty}$, lo análogo sucede con:

$$\int_c^{\infty}\int_d^{\infty} \varphi(x,y).\alpha(x,y,t).dx.dy;$$

y según la definición dada más arriba es:

$$(\alpha) \longrightarrow \lim \varphi(x,y) = +\infty.$$

Si fuese:

$$\lim \varphi(x,y) = -\infty,$$

se reduce al caso anterior considerando la función:

$$-\varphi(x,y) \longrightarrow +\infty.$$

Si el factor de convergencia toma valores reales de signos distintos, el (α) - límite de una función, cuyo límite es más infinito o menos infinito, puede no existir o bien existir pero ser distinto de más infinito o de menos infinito.

SUMA GENERALIZADA DE UNA INTEGRAL DOBLE IMPROPIA, SOBRE EL PRIMER CUADRANTE DEL PLANO (X,Y).-

Sea la integral doble:

$$\int_0^\infty \int_0^\infty f(x,y).dx,dy$$

donde: f(x,y) es una función real o compleja, integrable sobre todo rectángulo cuyos lados sean paralelos a los ejes (x,y) y supongamos que no es convergente, pero que satisfaga a la condición de finitud, esto es: para cualesquiera que sean los valores positivos de x y de y, se tenga:

$$\left| \int_0^x \int_0^y f(x,y).dx.dy \right| < k$$

siendo k una constante; La definición de integral doble impropia convergente que tomamos es la de Pringsheim.

Veamos como se le puede asignar un valor, al cual llamaremos suma generalizada, a tal integral divergente.

Pongamos:

$$\varphi(x,y) \equiv \int_0^x \int_0^y f(x,y)\, dx\, dy$$

Sea: ~~β(x,y,t)~~

$$\beta(x,y,t)$$

una función, real o compleja, de las variables reales y positivas x e y y de la variable t (la naturaleza de esta variable t es la misma que en la función $\alpha(x,y,t)$ considerada al principio) que admita derivadas parciales primeras y segundas con respecto a x y a y.

Daremos la siguiente definición:

Definición:

Llamaremos sumatriz de la integral doble:

$$\int_0^\infty \int_0^\infty f(x,y).dx.dy$$

con respecto a: $\underline{\beta(x,y,t)}$

y la indicaremos con $\underline{F(t)}$, a la suma de la integral:

$$\int_0^\infty \int_0^\infty f(x,y).\beta(x,y,t).dx.dy$$

cuando ésta sea convergente en un cierto $\underline{T_0}$.

Si hacemos:

$$a(x,y,t) \equiv \frac{\partial^2 \beta(x,y,t)}{\partial x.\partial y} \qquad (10)$$

y suponemos que: $\underline{\beta(x,y,t)}$

y: $\underline{\varphi(x,y)}$

satisfacen a las siguientes condiciones:

a) $\lim \varphi(x,y).\beta(x,y,t) = 0$

b) $\lim \int_0^x \varphi(x,y).\frac{\partial \beta(x,y,t)}{\partial x}.dx = 0$

c) $\lim \int_0^y \varphi(x,y) \frac{\partial \beta(x,y,t)}{\partial y}.dy = 0$

$[\text{si } (x,y) \rightarrow (+\infty, +\infty)]$;

para todo t de un T_0 ;la sumatriz de: $\varphi(x,y)$

con respecto al núcleo: $\alpha(x,y,t)$

está ligada con la sumatriz de la integral:

$$\int_0^\infty \int_0^\infty f(x,y)\,dx\,dy$$

con respecto a: $\beta(x,y,t)$

por la sencillísima relación:

$$F(t) = \Phi(t) \qquad (11)$$

válida en todo un cierto semientorno de t sobre C.

De las igualdades (8) y (9) y teniendo en cuenta las condiciones características de los factores de convergencia, se deduce el siguiente teorema fundamental.

Teorema 8º)

Las condiciones necesarias y suficientes a las cuales debe satisfacer la función: $\beta(x,y,t)$;

para que la sumatriz $F(t)$, con respecto a ella, de toda integral doble impropia convergente que satisface a la condición de finitud, tenga límite finito, si $t \to t_0$ sobre C, son las siguientes:

1º) La integral:

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \left| \frac{\partial^2 \beta(x,y,t)}{\partial x . \partial y} \right| . dx\,dy$$

es convergente en todo punto t de un cierto semientorno T_0, de t_0; y además el dicha integral está acotada en dicho semientorno;

2ª)

$$\lim_{t \to t_0} \int_0^p \int_0^\infty \left| \frac{\partial^2 \beta(x,y,t)}{\partial x \, \partial y} \right| dx \, dy = 0;$$

cualquiera que sea el valor finito y positivo de p;

3ª)

$$\lim_{t \to t_0} \int_0^\infty \int_0^p \left| \frac{\partial^2 \beta(x,y,t)}{\partial x . \partial y} \right| . dx . dy = 0$$

cualquiera que sea el valor finito y positivo de q;

4ª) la función de t:

$$B(t) \equiv \beta(0,0,t) + \lim_{(x,y) \to (\infty,\infty)} [\beta(x,y,t) - \beta(0,y,t) - \beta(x,0,t)]$$

cuya existencia está asegurada por la primera condición, tiendo hacia un límite finito, si $t \to t_0$ (al cual designaremos con β y lo llamaremos coeficiente de sumación).

Además, si se verifican estas cuatro condiciones y la integral:

$$\int_0^\infty \int_0^\infty f(x,y) . dx . dy$$

converge, satisfaciendo a la condición de finitud, se tiene:

$$\lim_{t \to t_0} F(t) = \beta \int_0^\infty \int_0^\infty f(x,y) . dx . dy$$

Obsérvese que si la función: $\dfrac{\partial^2 \beta(x,y,t)}{\partial x . \partial y}$

es real y no negativa (o real y no positiva) la acotación de la integral:

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \left| \frac{\partial^2 \beta(x,y,t)}{\partial x \, \partial y} \right| dx \, dy$$

en un T_0 ,es consecuencia de la cuarta condición.

Definiciones y propiedades análogas a las establecidas para: $\alpha(x,y,t)$;

se pueden formular con respecto a: $\beta(x,y,t)$.

En efecto:

Llamaremos factor de sumación a toda función: $\beta(x,y,t)$

que satisfaga a las cuatro condiciones anteriores,y cada factor de sumación engendra un algoritmo de sumación.

Si el coeficiente de sumación es nulo,diremos que el algoritmo es singular, y si dicho coeficiente es distinto de cero diremos que el algoritmo es regular,etc,etc.

DEFINICION DE SUMA GENERALIZADA DE UNA INTEGRAL.

Llamaremos suma generalizada de una integral doble impropia:

$$\int_0^\infty \int_0^\infty f(x,y)\,dx\,dy$$

según el algoritmo regular de sumación,cuyo factor es: $\beta(x,y,t)$;

o más brevemente: β — suma de $\int_0^\infty \int_0^\infty f(x,y)\,dx\,dy$;

al límite ordinario de la sumatriz $F(t)$,dividido por el coeficiente de su-

mación;cuando la sumatriz y este límite ordinario existen;y lo indicaremos así:

$$(\beta) - \int_0^\infty \int_0^\infty f(x,y)\,dx\,dy = \frac{1}{\beta} \cdot \lim_{t \to t_0} F(t)$$

en virtud del teorema octavo se tiene el siguiente:

TEOREMA FUNDAMENTAL DE CONSERVACION DE SUMAS DE LAS INTEGRALES CONVERGENTES QUE VERIFICAN LA CONDICION DE FINITUD.-

Si la integral:

$$\int_0^\infty \int_0^\infty f(x,y).dx.dy$$

es convergente y satisface a la condición de finitud,tiene suma generalizada según todo algoritmo regular (β) y es:

$$(\beta) - \int_0^\infty \int_0^\infty f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^\infty \int_0^\infty f(x,y)\,dx\,dy$$

Si la integral:

$$\int_0^\infty \int_0^\infty f(x,y).dx.dy$$

es convergente,pero no satisface a la condición de finitud,no puede asegurarse la existencia de la sumatriz,ni la convergencia de ésta en caso de existir,ni siquiera aún que el límite de ésta,supuesto existente y finito; sea igual a la suma de:

$$\int_0^\infty \int_0^\infty f(x,y).dx.dy$$

multiplicada por el coeficiente de sumación.

Si la integral: $\int_0^\infty \int_0^\infty f(x,y)\,dx\,dy$;

satisface a la condición de finitud, su suma generalizada en todo algoritmo regular, (β), es independiente de los origenes s y d, que se tomen en la integral que define F(t).

Complementaremos la anterior definición de suma generalizada con la siguiente:

Definición:

Diremos que la suma generalizada de la integral:

$$\int_0^\infty \int_0^\infty f(x,y).dx.dy.$$

según el algoritmo regular (β) es $+\infty$ (o bien $-\infty$), cuando exista la F(t) y sea:

$$\lim_{t \to t_0} F(t) = +\infty$$

(o bien: $\lim F(t) = -\infty$).), o bien, cuando la integral:

$$\int_0^\infty \int_0^\infty f(x,y)\,\beta(x,y,t)\,dx\,dy$$

tenga por suma $+\infty$ (o bien: $-\infty$).

Una condición necesaria para que esta última integral no sea convergente es que no satisfaga a la condición de finitud, lo que seguramente ocurre si es:

$$\int_0^\infty \int_0^\infty f(x,y).dx.dy = \infty.$$

Las propiedades de los algoritmos de convergencia pueden adaptarse a los algoritmos de sumación, en particular se tiene:

Teorema 9ª)

Si es:

$$\frac{\partial^2 \beta(x,y,t)}{\partial x.\partial y} \geq 0,$$

para: $x \geq c$

e: $y \geq d$

y para todo t de un T_0 ,el (β)-intervalo de oscilación de la integral:

$$\int_0^\infty \int_0^\infty f(x,y).dx.dy$$

que satisface a la condición de finitud, esta contenido en el intervalo de oscilación de: $F(t)$

Teorema 10ª)

Si es:

$$\frac{\partial^2 \beta(x,y,t)}{\partial x.\partial y} \geq 0,$$

para: $x \geq c$

es: $y \geq d$

siendo c y d números fijos, y para todo t de un T_0 ,siendo regular el algoritmo (β), y si:

$$\int_0^\infty \int_0^\infty f(x,y)\,dx\,dy = +\infty,$$

o bien: $\int_0^\infty \int_0^\infty f(x,y)\,dx\,dy = -\infty$),

pero estas integrales satisfacen a la hipótesis de finitud en toda faja horizontal y en toda faja vertical, entonces existe la suma generalizada de estas integrales, según el algoritmo (β) y es:

$$(\beta)-\int_0^\infty\int_0^\infty f(x,y)\,dx\,dy=+\infty$$

o bien:

$$(\beta)-\int_0^\infty\int_0^\infty f(x,y)\,dx\,dy=-\infty.$$

OBSERVACIÓN:

De todo algoritmo regular de sumación se puede deducir uno de convergencia, también regular, mediante la fórmula (8), y recíprocamente: de la fórmula, que se obtiene de (8):

$$\beta(x,y,t) - \beta(0,y,t) - \beta(x,0,t) + \beta(0,0,t) = \int_0^x \int_0^y d(x,y,t)\,dx\,dy;$$

se ve que de todo algoritmo regular de convergencia se puede deducir un algoritmo, también regular, de sumación.

ALGUNOS ALGORITMOS ESPECIALES DE SUMACION.

a) ALGORITMO $C''_{m,n,p,q}$, SIENDO M,N,P Y Q NUMEROS POSITIVOS CUALESQUIERA./

El factor es:

$$\beta(x,y,t) \equiv \frac{(u+p-x)^m}{(u+p)^m} \cdot \frac{(v+q-y)^n}{(v+q)^n}$$

para: $x \leq u$

es $y \leq v$;

y: $\beta(x,y,t) \equiv 0$

para: $x > u$

e y cualquiera y para (x) cualquiera e $y > v$; siendo u y v variables reales independientes que tienden simultánea e independientemente a $(+\infty, +\infty)$.

Para $p = q = 0$, se obtiene el algoritmo generalizado de Cesàro que coincide con la generalización del de Riesz.

b) ALGORITMO C'_{mn}, SIENDO M Y N NUMEROS REALES POSITIVOS CUALQUIERA.

El factor es:

$$\beta(x,y,t) \equiv \left(1-\frac{x^m}{u^m}\right)\cdot\left(1-\frac{y^n}{x^n}\right)$$

para: $x \leq u$

o: $y \leq v$,

y: $\beta(x,y,t) \equiv 0$

en todos los otros puntos del primer cuadrante, siendo: $u \to +\infty$

y: $v \to +\infty$

simultánea e independientemente.

(Abel)

c) ALGORITMO DE ~~ABEL~~.

El factor es:

$$\beta(x, y, t) \equiv u^{x^m} \cdot v^{y^n} \quad ;$$

siendo m y n números positivos cualesquiera; donde: $u \to 1^-$

y: $v \to 1^-$

o bien, en forma exponencial:

$$\beta(x, y, t) \equiv e^{-(xu)^m - (yv)^n}$$

donde: $u \to 0^+$

y: $v \to 0^+$

---

d)ALGORITMO DE PERRON.

El factor es:

$$\beta(x,y,t) \equiv \frac{u^m v^n}{(u+x)^m \cdot (v+y)^n}$$

siendo m y n números positivos arbitrarios, y además: $u \longrightarrow +\infty$

y: $v \longrightarrow +\infty$.

e) ALGORITMO DE HARDY-LITTLEWOOD.

El factor es:

$$\beta(x, y, t) = \frac{1}{\log u \cdot \log v} \cdot \frac{(1 - u^x)(1 - v^y)}{x \cdot y}$$

siendo: $u \longrightarrow 1$

y: $v \longrightarrow 1$

f) ALGORITMO DE LAMBERT.

El factor es:

$$\beta(x,y,t) \equiv \log u . \log v \frac{x . u^x}{1-u^x} \cdot \frac{y . v^y}{1-v^y}$$

siendo: $u \longrightarrow 1$

y: $v \longrightarrow 1$

simultánea e independientemente.

---

g) ALGORITMO DE LINDELÖF.

El factor es:

$$\beta(x,y,t) = x - xu \quad y - yv$$

siendo u y v tales que:

$$u \to 0^+$$

y:

$$v \to 0^+$$

simultánea e independientemente;

EQUIVALENCIA DE ALGORITMOS REGULARES.-

Definición:

Diremos que dos algoritmos regulares, (α) y (α'), son equivalentes, cuando toda función acotada, $\varphi(x,y)$, que tenga (α)-límite y (α')-límite, verifique la igualdad:

$$(\alpha)-\lim \varphi(x,y) = (\alpha')-\lim \varphi(x,y).$$

Se plantea ahora, en virtud de la existencia de los numerosos algoritmos de covergencia, el siguiente problema: si bien los distintos algoritmos regulares dan el mismo límite generalizado para toda función acotada y convergente, aplicados a funciones acotadas no convergentes pueden conducir a límites distintos.

¿Qué nuevas condiciones restrictivas hay que imponerle a los factores de convergencia para que dos algoritmos sean equivalentes, respecto de las funciones acotadas?.

Los siguientes teoremas nos servirán para responder a esta pregunta.

Teorema XI)

Es condición necesaria y suficiente para que la sumatriz, $\Phi(t)$, de toda función acotada y convergente tenga límite nulo, si $t \to t_0$, que (α) sea un algoritmo singular.

En efecto, la condición es suficiente si el núcleo satisface a las cuatro condiciones características y es igual a cero el coeficiente de convergencia, en virtud del primer teorema fundamental, se tiene:

$$\lim_{t \to t_0} \Phi(t) = 0.$$

En virtud de un teorema anterior, las condiciones primera, segunda y tercera son ya necesarias, puesto que entre las funciones acotadas y convergentes se hallan las acotadas e infinitésimas y la necesidad de la condición cuar-

ta,con el coeficiente de convergencia igual a cero,se deduce tomando:

$$\varphi(x, y) = 0$$

cuya sumatriz es:

$$\Phi(t) = A(t).$$

Teorema XLI).

Es condición necesaria y suficiente para que la sumatriz, $\Phi(t)$,de toda función acotada $\varphi(x,y)$,tenga límite nulo, para $t \to t_0$,que sea:

$$A_1(t) \equiv \int_0^\infty \int_0^\infty |a(x, y\, t)| . dx . dy \longrightarrow 0$$

para $t \to t_0$.

Ante todo,observemos que si se cumple esta condición el algoritmo es singular.

La condición es suficiente,pues:

$$|\Phi(t)| < k . A_1(t)$$

La condición es necesaria. En efecto,supongamos que, para $t \to t_0$,no tiende a cero la función:

$$A_1(t) \quad ;$$

luego si consideramos la sucesión:

$$1 > \frac{1}{2} > \frac{1}{2^2} > \ldots > \frac{1}{2^n} > \ldots \longrightarrow 0+,$$

en todo T_0 hay puntos: $t_n \equiv t_n(n)$;

tal que en ellos es: $A_1(t_n) \geq \frac{7}{2^n}$.

Fijado de este modo los t_n ,determinemos dos sucesiones:

$$0 \leq x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n < \ldots \to +\infty$$

y:

$$0 \leq y_0 < y_1 < y_2 < \ldots < y_n < \ldots \longrightarrow +\infty$$

siendo:

$$x_0 = y_0 ; x_1 = y_1 ; \ldots ; x_n = y_n ; \ldots$$

de modo tal que se tenga:

$$\iint_{(R)} |\alpha(x,y,t_n)| . dx . dy \leq \frac{1}{2^n} ; \qquad (12)$$

siendo R el recinto (indefinido) formado por los puntos del primer cuadrante exteriores al cuadrado, complementario, de vértices:

$$(0,0) ; (x_n,0) ; (x_n,y_n) ; (0,y_n).$$

Los valores que tomamos como x_n e y_n, son los extremos inferiores de los conjuntos de los valores de x y de y, con x igual a y, los cuales forman sendos intervalos, tales que la integral de:

$$|\alpha(x,y,t)|$$

sobre el recinto formado por los puntos del primer cuadrante exteriores al cuadrado de vértices:

$$(0,0),(x,0),(x,y),(0,y),$$

es menor o igual que: $\frac{1}{2^n}$.

Indiquemos con R_0 el cuadrado de vértice:

$$(0,0) ; (x_0,0) ; (x_0,y_0) ; (0,y_0);$$

con R_n el recinto cuyo contorno, rectilíneo, tiene por vértice:

$$(x_n-1,0) ; (x_n,0); (x_n,y_n); (0,y_n); (0,y_n-1); (x_n-1,y_n-1) ;$$

y llamemos R' al recinto formado por la suma de los recintos:

$$R_1 + R_2 + \ldots + R_{n-1}.$$

Descompongamos la función $A_1(t)$ en la siguiente forma:

$$A_1(t) = \iint_{(R_0)} + \iint_{(R')} + \iint_{(R_n)} + \iint_{(R)} \qquad (13)$$

(siendo: $|\alpha(x,y,t_n)|.dx.dy$,

la función subintegral común).

Según un corolario anterior, es necesario, para que el límite de $\Phi(t)$ sea cero, si $t \neq t_0$, que sea:

$$\lim_{t\to t_0} \iint_{(R_0)} |\alpha(x,y,t)|.dx.dy = \lim_{t\to t_0} \iint_{(R')} |a(x,y,t)|.dx.dy = 0,$$

luego tomando t_n suficientemente próximo a t_0 las integrales: $\iint_{(R_0)}$

y: $\iint_{(R')}$

son menores que: $\frac{1}{2^n}$

(siendo:

$$t_n = t_n(x_0\,;y_0\,;n) \equiv t_n(n)$$

para la primera, y:

$$t_n \equiv t_n(x_0;y_0;x_{n-1};y_{n-1};n) \equiv t_n(n)$$

para la segunda).

Por lo tanto para esos valores t_n se tiene, según (10) y (11):

$$\iint_{(R_n)} |a(x,y,t_n)|\,dx\,dy > \frac{4}{2^n} \qquad (14)$$

Fijado de este modo las tres sucesiones:

$$t_0 < t_1 < t_2 < t_3 < \cdots < t_n < \ldots \to t_0$$

$$0 \leq x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n < \ldots \to +\infty$$

$$0 \leq y_0 < y_1 < y_2 < \cdots < y_n < \ldots \to +\infty$$

(con $x_n = y_n$) , formemos una función $\varphi(x,y)$ del siguiente modo:

$$\varphi(x,y) \equiv \text{sg.}\ \alpha\ (x,y,t_0\ ) \text{ en } R_0 \quad ;$$

$$\varphi(x,y) \equiv \text{sg.}\ \alpha\ (x,y,t_1\ ) \text{ en } R_1 \quad ;$$

.....

.....

.....

.....

$$\varphi(x,y) \equiv \text{sg.}\ \alpha\ (x,y,t_n\ ) \text{ en } R_n \quad ;$$

$$\varphi(x,y) \equiv \text{sg.}\ \alpha\ (x,y,t_{n+1}) \text{ en } R_{n+1} \quad ;$$

.....

.....

La sumatriz,de esta función acotada en el punto t_n se puede expresar en la forma:

$$\Phi(t_n) = \iint_{(R_0)} + \iint_{(R')} + \iint_{(R_n)} + \iint_{(R)}$$

siendo: $\varphi(x,y).\alpha(x,y,t_n)\,dx.dy$,

la función subintegral común,de donde:

$$\left|\Phi(t_n)\right| \geq \iint_{(R_n)} \left|\alpha(x,y,t_n)\right|.dx.dy - \left| \iint_{(R_0)} \varphi(x,y).\alpha(x,y\,t_n).dx.dy + \right.$$

$$\left. + \iint_{(R')} \varphi(x,y).\alpha(x,y,t_n).dx.dy + \iint_{(R)} \varphi(x,y,t_n).\alpha(y,x,t_n).dx.dy \right| ;$$

De esta relación y de la (12) se deduce que:

$$\left|\Phi(t_n)\right| > \frac{1}{2^n};$$

por lo tanto la sumatriz no puede tender a cero,si no tiende a cero la función $A_1(t)$.

Corolario:

Si el factor de convergencia es real y no negativo,o real y no positivo, para todo punto del primer cuadrante exterior al rectángulo cuyo vértices son:

(0,0),(x, = c,0),(x = c,y = d),(0,y = d);

siendo c y d valores fijos,la condición nesesaria y suficiente para que la sumatriz de toda función acotada tenga límite nulo,para $t \to t_0$,es que el algoritmo sea singular.

Pasemos ahora a estudiar el problema de la equivalencia de algoritmos. Supongamos que la función acotada, $\varphi(x,y)$,tenga límite generalizado,según dos algoritmos,(α_1) y (α_2),regulares de convergencia con coeficientes iguales: $\alpha_1 = \alpha_2$.

Esto es:

$$\Phi_1(t) = \int_0^\infty\int_0^\infty \varphi(x,y).\alpha_1(x,y,t).dx.dy \to \Phi_1 \equiv (\alpha_1) - \lim \varphi(x,y) \; ;$$

$$\Phi_2(t) \equiv \int_0^\infty\int_0^\infty \varphi(x,y).\alpha_2(x,y,t).dx.dy \to \Phi_2 = (\alpha_2) - \lim \varphi(x,y).$$

y:

El núcleo:

$$\alpha(x,y,t) \equiv \alpha_1(x,y,t) - \alpha_2(x,y,t)$$

es también un factor de convergencia,cuyo coeficiente es nulo.

La sumatriz, $\Phi(t)$,de la función acotada $\varphi(x,y)$ en este algoritmo,(α), singular es:

$$\Phi(t) = \Phi_1(t) - \Phi_2(t),$$

y tiende al límite: $\Phi_1 - \Phi_2$;

esto es: la sumatriz, $\Phi(t)$, en este algoritmo singular (α), tiende hacia un límite finito, pero no puede asegurarse que sea nulo, es decir, no puede asegurarse que la igualdad:

$$(\alpha_1) - \lim.\varphi(x,y) = \alpha_2 - \lim\varphi(x,y); \qquad (1.5)$$

sea cierta;

Ahora bien: la condición necesaria y suficiente para que se verifique la igualdad (13), supuestos existentes ambos miembros, es que la sumatriz $\Phi(t)$ tienda a cero para $t \to t_0$.

Un caso en el cual se puede asegurar la equivalencia de dos algoritmos regulares lo constituye el siguiente teorema.

Teorema XIII).

Es condición suficiente para la equivalencia de dos algoritmos regulares, (α_1) y (α_2), cuyos coeficientes son iguales, respecto de toda función acotada que se verifique:

$$\lim_{t \to t_0} \int_0^\infty \int_0^\infty |\alpha_1(x,y,t) - \alpha_2(x,y,t)| . dx . dy = 0 .$$

En efecto, el límite de la sumatriz $\Phi(t)$ de la función acotada, $\varphi(x,y)$, respecto del algoritmo cuyo factor es: $\alpha(x,y,t) \equiv \alpha_1(x,y,t) - \alpha_2(x,y,t)$;

tiende a cero, para $t \to t_0$; esto es:

$$\lim_{t \to t_0} [\Phi_1(t) - \Phi_2(t)] = 0$$

De esta igualdad y teniendo en cuenta que es: $\alpha_1 = \alpha_2$;

se deduce: si existe (α_1)-lim. $\varphi(x,y)$, existe también (α_2)-lim. $\varphi(x,y)$, y dichos límites son iguales, y recíprocamente.

La condición (14) no es necesaria.Cabe,en efecto,que dos algoritmos regulares,con igual coeficiente,sean completamente equivalentes para funciones acotadas o no,y no cumplan,sin embargo,la condición (14);como veremos con el siguiente ejemplo:

Sea el algoritmo de Abel,para caminos reales:

$$\alpha_1(x,y,t) \equiv u.v.\, e^{-xu-yv};\ (u \to 0^+;\ y,v \to 0^+)$$

con:

$$u \to 0^+$$

y:

$$v \to 0^+$$

y el algoritmo cuyo factor es:

$$\alpha_2(x,y,t) \equiv 4.u.v.\, e^{-2xu-2yv}$$

con:

$$u \to 0^+$$

y:

$$v \to 0^+.$$

Evidentemente estos dos algoritmos unitarios,son completamente equivalentes y veamos que,sinembargo,no se cumple la condición (15).

En efecto,se tiene:

$$\alpha(x,y,t) \equiv \alpha_1(x,y,t) - \alpha_2(x,y,t) = u.v.\, e^{-xu-yv}.(1-4e^{-xu-yv}).$$

Este factor: $\underline{\alpha(x,y,t)}$

es real no negativo en el interior y en el contorno del triángulo A B O que designaremos con (R),del plano (x,y),cuyo vértices son:

O(0,0),A (log 4 /u,0),B (0,log 4 / v)

y positivo en el exterior,que designaremos con (R'),de dicho triángulo, luego:

$$\int_0^\infty\int_0^\infty |a(x,y,t)|.dx.dy = \iint_{(R)} u.v.e^{-xu-yv}.(4e^{-xu-yv}-1).dx.dy +$$

$$+ \iint_{(R')} u.v.e^{-xu-yv}.(1-4e^{-xu-yv});$$

calculando estas dos integrales se tiene:

$$\int_0^\infty\int_0^\infty |a(x,y,t)|.dx.dy = \frac{93}{16} - \frac{7}{8}.\log 4 > 0$$

esto es, no se cumple la condición (14).

Esta aparente contradicción con el teorema trece lo explica el hecho de que el algoritmo de Abel (como ningún otro algoritmo regular) no asigna límites generalizado a <u>todas</u> las funciones acotadas, como es fácil de probar.

ALGUNAS GENERALIZACIONES DE LOS FACTORES DE CONVERGENCIA.-

Estudiaremos ahora ciertas transformaciones que sin satisfacer al principio de conservación de límites finitos de las funciones acotadas, determinan ciertas relaciones interesantes entre la sumatriz, $\Phi(t)$,y su núcleo, $\alpha(x,y,t)$,cuando éste cumple ciertas condiciones.

Teorema XIV).

Si el núcleo, $\alpha(x,y,t)$,tiene límite finito, para $t \to t_0$,en todo punto (x,y) del primer cuadrante,es condición suficiente,para que la sumatriz, $\Phi(t)$,de toda función, $\varphi(x,y)$,acotada e infinitésima sea convergente,para $t \to t_0$,que el núcleo satisfaga a la condición primera de los factores de convergencia.

En efecto;por hipótesis existe en todo punto (x,y) del primer cuadrante la función:

$$\gamma(x,y) \equiv \lim_{t \to t_0} \alpha(x,y,t) \qquad (16)$$

y además existe una constante positiva K y un semientorno T_0 de t_0 ,en todo el cual es:

$$\int_0^x \int_0^y |\alpha(x,y,t)| . dx . dy \leq K$$

pues si existiese algún punto (ξ , η) del primer cuadrante tal que:

$$\int_0^\xi \int_0^\eta |\alpha(x,y,t)| . dx . dy > K \qquad (17)$$

la integral:

$$\int_0^\infty \int_0^\infty |\alpha(x,y,t)| . dx . dy$$

no estaría acotada en T_0 ;

Tomando límites, para $t \to t_0$, en (16) y teniendo en cuenta la (15) se tiene

$$\int_0^\infty \int_0^\infty |\gamma(x,y)| . dx . dy \leq K$$

esto es, la integral:

$$\int_0^\infty \int_0^\infty |\gamma(x,y)| . dx . dy$$

es convergente y su suma es menor o igual que K, por lo tanto la integral:

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \varphi(x,y) . \alpha(x,y) . dx . dy$$

es convergente absolutamente, ya que $\varphi(x,y)$ está acotada.

Ahora bien, por ser $\varphi(x,y)$ infinitésima, para $(x,y) \to (\infty, \infty)$, dado un ε positivo, arbitrario, en el exterior, R, de un cierto rectángulo de vértices:

$$(0,0); (x_0,0); (x_0,y_0); (0,y_0)$$

siendo: $x_0 \equiv x_0(\varepsilon)$

y: $y_0 \equiv y_0(\varepsilon)$

es: $|\varphi(x,y)| < \varepsilon / K$;

por lo tanto el resto de la integral que define $\Phi(t)$ es en todo T_0 ,

$$\left| \iint_{(R)} \varphi(x,y) . \alpha(x,y,t) . dx . dy \right| < \varepsilon$$

es decir, la integral:

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \varphi(x,y) . \alpha(x,y,t) . dx . dy$$

converge uniformemente en T_0 , luego:

$$\lim_{t \to t_0} \Phi(t) = \int_0^\infty \int_0^\infty \varphi(x,y) . \gamma(x,y) . dx . dy$$

Además se verifica que:

$$\left| \Phi(t) \right| < k.K$$

siendo k una cota de $\varphi(x,y)$ de

Mediante un raciocinio análogo al seguido para establecer el teorema (13) y en virtud del teorema anterior y de la observación al teorema cuarto, se puede establecer el siguiente teorema.

Teorema XV).

Si el núcleo $\varphi(x,y,t)$ tiene límite finito, $\gamma(x,y)$, para $t \to t_0$, en todo punto (x,y), las condiciones necesarias y suficientes para que la sumatriz $\Phi(t)$, de toda función acotada e infinitésima, exista y tenga límite finito, para $t \to t_0$, es que el núcleo satisfaga a las condiciones primeras, segunda y tercera de los factores de convergencia.

Teniendo en cuenta la igualdad (h) y un teorema anterior se puede enunciar el siguiente teorema.

Teorema XVI).

Si el núcleo $\alpha(x,y,t)$ tiene límite finito, en todo punto (x,y), y la sumatriz $\Phi(t)$ de toda función $\varphi(x,y)$ acotada y convergente, tiene límite finito, para $t \to t_0$, entonces es condición necesaria y suficiente para que el límite de $\Phi(t)$ sea finito que el núcleo satisfaga a las condiciones primera y cuarta de los factores de convergencia.

Por otra parte, si se cumple estas condiciones el límite de la sumatriz $\Phi(t)$ es:

$$\lim_{t \to t_0} \Phi(t) = \varphi.\alpha - \varphi\gamma + \int_0^\infty \int_0^\infty \varphi(x,y)\gamma(x,y).dx.dy; \qquad (18)$$

llamando, como hasta ahora, φ al límite de $\varphi(x,y)$, para $(x,y) \to (\infty,\infty)$, y

y al valor de la integral:

$$\gamma \equiv \int_0^\infty \int_0^\infty \gamma(x,y).dx.dy.$$

En efecto, basta considerar el núcleo:

$$\alpha_1(x,y,t) \equiv \alpha(x,y,t) - \gamma(x,y); \left(\lim_{t\to t_0} \alpha_1(x,y,t) = 0\right)$$

donde es:

$$\lim_{t\to t_0} \alpha_1(x,y,t) = 0$$

y ver que cumple las cuatro condiciones características de los factores de convergencia. El coeficiente, $\underline{\alpha_1}$, de convergencia en este algoritmo ($\underline{\alpha_1}$) es:

$$\alpha_1 = \alpha - \alpha.$$

Por lo tanto:

$$\lim_{t\to t_0} \int_0^\infty \int_0^\infty \varphi(x,y,t).\alpha_1(x,y,t).dx.dy = \varphi.(\alpha - \gamma)$$

deedonde se deduce la (18).

Son interesantes los siguientes teoremas.

<u>Teorema XVII).</u>

Si el núcleo $\underline{\alpha(x,y,t)}$ tiene límite finito, $\underline{\gamma(x,y)}$, para $\underline{t \to t_0}$, en todo punto $(\underline{x,y})$, es condición necesaria y suficiente para que sea:

$$\lim_{t\to t_0} \int_0^\infty \int_0^\infty |\alpha(x,y,t)|\, dx.dy = \int_0^\infty \int_0^\infty |\gamma(x,y)|.\, dx.dy$$

que la integral:

$$\int_0^\infty \int_0^\infty |\alpha(x,y,t)|.dx.dy;$$

sea convergente uniformemente en un $\underline{T_0}$.

<u>Teorema XVIII).</u>

Si el núcleo $\underline{\alpha(x,y,t)}$ tiene límite finito,

$\gamma(x,y)$ para $t \to t_0$, en todo punto (x,y) las condiciones necesarias y suficientes para que la sumatriz $\Phi(t)$ de toda función acotada tenga límite (finito o infinito con signo determinado), para $t \to t_0$, el núcleo satisfaga a las condiciones primera y cuarta de los factores de convergencia y además que sea:

$$\lim \Phi_1(t) \equiv \int_0^\infty \int_0^\infty |\alpha(x,y)| . dx . dy$$

indicando con: $\underline{\Phi(t)}$

la integral:

$$\int_0^\infty \int_0^\infty |\alpha(x,y,t)| . dx . dy .$$

Hasta aquí hemos desarrollado escuetamente la teoría aritmética de las funciones divergentes a las cuales se les puede asignar un límite y de las integrales múltiples divergentes pero sumables por algún procedimiento generalizado de alguno conocido en las series e integrales simples divergentes.

Todo lo dicho vale, mutatis mutandis, para las funciones de un número cualquiera de variables independientes y para las integrales múltiples cualquiera que sea su orden de multiplicidad. No enunciamos las definiciones, propiedades y teoremas, para el caso de n variables, explícitamente, para abreviar la exposición, puesto que no hay, en absoluto, dificultad en hacerlo.

Además, en el texto precedente nos hemos referido al caso de que la función f (x,y) se estudia en el entorno del punto impropio del plano complejo: $z=x+iy$; pero la teoría se extiende inmediatamente cuando la función se estudia en el entorno de un punto cualquiera, es decir: cuando las dos variables (x,y) tiendan a un punto propio o bien, una de ellas tienda a un punto propio y la otra a un punto impropio. Un simple cambio de palabras en los enunciados y en las demostraciones anteriores resuelve este problema.

Además fácil es, por otra parte, el generalizar la teoría anterior cuando x e y son complejas, logrando de este modo una generalización notable de la teoría desarrollada por Knopp en el caso de una variable.

La teoría anterior es susceptible de ampliarse en muchas y variadas direcciones,

Una de ellas,y quizás la más importante,es la señalada en la página 231.

Las aplicaciones que de la teoría desarrollada pueden hacerse son múltiples y muy variadas.

La más importante de ellas son las obtenidas considerando las series potenciales obtenie do,con este modo,el potente método de los algoritmos funcionales,que da origen a la noción de escudos asociados de convergencia según un algoritmo particular,así como se pueden lograr diversas aplicaciones,entre ellas el desarrollo en serie doble de polinomios de dos variable independientes de las funciones analíticas deedos variables.

También se obtienen algoritmos integrales de prolongación analítica.

Pero la más importante,quizás de las aplicaciones,es la generalización de las integrales singulares,teoría edificada por Lebesgue,para el caso de una variable.

Todas estas generalizaciones y aplicaciones así como la relación existente entre esta teoría y la de las singularidades de una función analítica de varias variables independientes,será el tema de un próximo trabajo.

-.FIN DE LA TERCERA PARTE.-

Carlos Biggeri

Algunos teoremas sobre funciones definidas por integrales determinantes ordinarias y generalizadas.-

Damos algunos teoremas sobre los ceros de una función definida por una integral determinante ordinaria o generalizada, situados sobre la recta de convergencia . Luego nos referimos a las abcisas de convergencia condicional, absoluta y uniforme.--

Teorema I):

Sea la función $f(z)$ definida por la integral de Dirichlet:

$$(1) \qquad f(z) = \int_0^\infty e^{a(r)} \cdot e^{-\lambda(r) z} \cdot dr$$

SIENDO:

$$z = x + iy;$$

y sea:

$$R(z) = x = \alpha;$$

su abscisa de convergencia condicional.

Supongamos que:

a) la funcion generatriz $a(r)$ satisface a la condición:

$$|\operatorname{Arg} a(r)| < \tau < \frac{\pi}{2};$$

b) el logaritmo de $f(z)$ sea:

$$\log f(z) = k + \int_0^\infty b(r) \cdot e^{-\mu(r) z} \cdot dr$$

o bien:

$$f(z) = e^k \cdot e^{\int_0^\infty b(r) \cdot e^{-\mu(r) z} \cdot dr};$$

donde es:

k = constante real arbitraria;

vi

$$b(\gamma) \geq 0;$$

c) el punto:

$$\xi = \alpha$$

es singular para $f(\xi)$; pero para:

$$\xi = \alpha + t i;$$

con:

$$t \neq 0$$

es regular para $f(\xi)$;

d) y finalmente supongamos que:

$$0 \leq (x - \alpha) . f(x);$$

esté acotado en un semientorno a la derecha de:

$$x = \alpha;$$

sobre el eje real.

En tales hipótesis es:

para:

$$\xi = \alpha + t i$$

con:

$$t \neq 0$$

$$f(\xi) = f(\alpha + t i) \neq 0. -$$

Demostración): Se tiene que:

$$f(\xi) = f(x + i y) = e^{k + \int_0^\infty b(\gamma) . e^{-\mu(\gamma) x} . d\gamma} . e^{\int_0^\infty b(\gamma) . e^{-\mu(\gamma) y i} . d\gamma} =$$

$$= e^{k + \int_0^\infty b(\gamma) . e^{-\mu(\gamma) x} . \cos[y . \mu(\gamma)] \, d\gamma} \times$$

$$\times e^{-i \int_0^\infty b(\gamma) . e^{-\mu(\gamma) x} . \operatorname{sen}[y . \mu(\gamma)] \, d\gamma}$$

de donde:

$$|f(x + i y)| \equiv |f(\xi)| = e^{k \int_0^\infty b(\gamma) . e^{-\mu(\gamma) x} . \cos[y . \mu(\gamma)] . d\gamma};$$

luego:

$$|f(x+2iy)| = e^{k+\int_0^\infty b(r).e^{-\mu(r)x}.\cos[2y.\mu(r)].dr};$$

y luego:

$$|f(x)| = f(x) = e^{k+\int_0^\infty b(r).e^{-\mu(r)x}.dr}.$$

de donde:

$$|f(x+iy)|^4.|f(x+2iy)|.|f(x)|^3 =$$

$$= e^{8k+\int_0^\infty b(r).e^{-\mu(r)x}[3+4.\cos(y.\mu(r)+\cos(2y\mu(r)].dr}.$$

pero:

$$3+4.\cos(y.\mu(r))+\cos(2y.\mu(r)) =$$

$$= 3+4.\cos(y.\mu(r)+2\cos^2(y.\mu(r))-1 =$$

$$= 2.\cos^2(y.\mu(r))+4.\cos(2y.\mu(r))+2 =$$

$$= 2[\cos(y.\mu(r)+1]^2 \geqslant 0;$$

de donde es:

$$[f(x+iy)|^4.|f(x+2iy)|.|f(x)|^3 \geqslant e^{8k};$$

de donde:

$$|f(x+iy)| \geqslant \frac{e^{2k}}{|f(x)|^{\frac{3}{4}}.|f(x+2iy)|^{\frac{1}{4}}};$$

y por ser:

$$x > \alpha;$$

se tiene:

$$\frac{|f(x+iy)|}{x-\alpha} \geqslant \frac{e^{2k}}{(x-\alpha).|f(x)|^{\frac{3}{4}}.|f(x+2iy)|^{\frac{1}{4}}}.$$

$$= \frac{e^{2k}.(x-\alpha)^{\frac{3}{4}}}{(x-\alpha).|(x-\alpha).f(x)|^{\frac{3}{4}}.|f(x+2iy)|^{\frac{1}{4}}} =$$

$$= \frac{e^{2k}}{|(x-\alpha)\cdot f(x)|^{\frac{3}{4}}} \cdot \frac{1}{|(x-\alpha)\cdot f(x+2iy)|^{\frac{1}{4}}};$$

pero:

$$0 < (x-\alpha)\cdot f(x) < K \equiv \text{constante}.$$

luego:

$$\frac{e^{2k}}{|(x-\alpha)\cdot f(x)|^{\frac{3}{4}}} > \frac{e^{2k}}{K^{\frac{3}{4}}} \equiv K' \equiv \text{constante} > 0;$$

luego:

$$\frac{|f(x+iy)|}{x-\alpha} > K' \cdot \frac{1}{(x-\alpha)^{\frac{1}{4}} \cdot |f(x+2iy)|^{\frac{1}{4}}} \qquad (2)$$

Como porhipótesis, todos los puntos de la recta de convergencia:

$$x = \alpha$$

son regulares para $f(z)$, salvo el: $z = \alpha$; luego:

si $y \neq 0$ es:

$$\lim_{x \to \alpha} f(x+2iy) = f(\alpha+2iy) = \phi$$

luego:

$$\lim_{x \to \alpha} \left[(x-\alpha)^{\frac{1}{4}} \cdot |f(x+2iy)|^{\frac{1}{4}} \right] = 0$$

Luego de (2) se tiene que

$$\lim_{x \to \alpha} \frac{|f(x+iy)|}{x-\alpha} = \infty;$$

siempre que sea:

$$y \neq 0$$

Tomemos un punto :

$$z_0 = \alpha + iy$$

cualquiera sobre la recta de convergencia, salvo el:

$$z = \alpha;$$

como en z_0 la $f(z)$ es regular , se tiene:

$$f(z) = f(z_0) + (z-z_0)\cdot f'(z_0) + (z-z_0)^2 \cdot \frac{f''(z_0)}{2!} + \text{------};$$

o bien, por ser:

$$z = x + iy \quad ; \quad z_0 \equiv \alpha + iy;$$

$$f(x+iy) = f(\alpha+iy) + (x-\alpha).f'(z_0) + (x-\alpha)^2.\frac{f''(z_0)}{2!} + \text{----};$$

luego:

$$(3)\ \frac{f(x+iy)}{x-\alpha} = \frac{f(\alpha+iy)}{x-\alpha} + f'(z_0) + (x-\alpha).\frac{f''(z_0)}{2!} + \text{----} \equiv$$

$$\equiv \frac{f(\alpha+iy)}{x-\alpha} + R;$$

como es:

$$\lim_{x\to\alpha} R \equiv f'(z_0) = \phi;$$

y el límite, para $\underline{x \longrightarrow \alpha.}$, del primer miembro de (3) es ∞, , se tiene que:

$$\lim_{x\to\alpha} \frac{f(\alpha+iy)}{x-\alpha} = \infty$$

de donde:

$$f(\alpha+iy) \neq 0;$$

pues si fuese:

$$f(\alpha+iy) = 0$$

sería:

$$\lim_{x\to\alpha} \frac{f(\alpha+iy)}{x-\alpha} = \lim_{x\to\alpha} \left(\frac{0}{x-\alpha}\right) = 0. -$$

Otro teorema más general que el anterior y cuya demostración es análoga es el:

<u>TeoremaII)</u>: Sea: $f(z) = \int_0^\infty a(\tau).e^{-\lambda(\tau)z}.d\tau;$

una función tal que todos los puntos de la recta de convergencia distintas del :

$$z = \alpha;$$

(el cual puede ser regular o singular) sean regulares ; y además que se verifiquen las condiciones:

a)

$$|(x-\alpha).f(x)| < K = \text{constante};$$

en un semiento(o sobre el eje de las x a la derecha del punto:

$$x = \alpha;$$

b) en un semiento(o lateral de cada punto de la recta de convergencia, sea:

$$\log f(z) = \varphi(z) + \int_0^\infty b(r).e^{-\mu(r)z}.dr;$$

donde es:

$$b(r) \geq 0;$$

y $\varphi(z)$ una función compleja o real , o constante, nula o no)tal que:

$$\lim_{x \to \alpha} R[\varphi(z)] > -\infty;$$

es decir: que la parte real de $\varphi(z)$ esté acotada inferiormente en todo semiento(o, paralelo al eje real , de todo punto de la recta de convergencia.

En tales hipótesis es:

$$f(z) = f(\alpha + ti) \neq 0;$$

para:

$$t \neq 0.-$$

Demostración):

Por hipótesis es:

$$f(z) = e^{\varphi(z) + \int_0^\infty b(r).e^{-\mu(r)z}.dr}$$

y llamando:

$$\varphi(z) = \varphi_1(z) + i.\varphi_2(z)$$

se tiene

$$f(z) = e^{\varphi_1(z) + \int_0^\infty b(r).e^{-\mu(r)x}.\cos[y.\mu(r)]\,dr}$$

$$e^{i\varphi_2(z) - i\int_0^\infty b(r).e^{-\mu(r)x}.\operatorname{sen}[y.\mu(r)].dr};$$

luego:

$$|f(x+iy)| = |f(z)| = e^{\varphi_1(x+iy) + \int_0^\infty b(r).e^{-\mu(r)x}.\cos[y.\mu(r)].dr};$$

luego:

$$|f(x+2iy)| = e^{\varphi_1(x+2iy) + \int_0^\infty b(r).e^{-\mu(r)x}.\cos[2.y\mu(r)].dr};$$

luego

$$|f(x)| = e^{\varphi_1(x) + \int_0^\infty b(r).e^{-\mu(r)x}.dr};$$

de donde:

$$|f(x+iy)|^4.|f(x+2iy)|.|f(x)|^3 =$$

$$= e^{4\varphi_1(x+iy) + \varphi_1(x+2iy) + 3\varphi_1(x)}.e^{2\int_0^\infty b(r).e^{-\mu(r)x}.[\cos(y.\mu(r))+1]^2.dr} \geqslant$$

$$\geqslant e^{4\varphi_1(x+iy) + \varphi_1(x+2iy) + 3\varphi_1(x)};$$

pero es:

$$4\varphi_1(x+iy) + \varphi_1(x+2iy) + 3\varphi_1(x) > k > -\infty; \quad \underline{(k \equiv \text{constante})};$$

por hipótesis; se tiene:

$$|f(x+iy)|^4.|f(x+2iy)|.|f(x)|^3 > e^k;$$

$$|f(x+iy)| > \frac{e^{\frac{k}{4}}}{|f(x)|^{\frac{3}{4}}.|f(x+2iy)|^{\frac{1}{4}}};$$

y por ser

$$x > \alpha,$$

se tiene:

$$\frac{|f(x+iy)|}{x-\alpha} > \frac{e^{k}}{(x-\alpha)\cdot|f(x)|^{\frac{3}{4}}\,|f(x+2iy)|^{\frac{1}{4}}},$$

de esta desigualdad en adelante se repite el raciocinio del teorema anterior.---

---

En la primera parte de este trabajo, al referirnos a las singularidades de una función analítica de una sola variable, demostramos como un simple corolario el teorema de Fekete, respecto de las integrales determinantes ordinarias y de Dirichlet.

Demostraremos directamente el teorema de Fekete, de donde veremos por comparación, la ventaja que desde el punto de vista de la síntesis, reporta nuestro criterio.

Teorema III):

Sea la integral:

$$f(\tau) = \int_0^\infty \varphi(\gamma)\, e^{-\lambda(\gamma)\tau}\, d\tau$$

si para

$$\gamma \geqslant \gamma_0 \equiv \text{constante};$$

es:

$$\varphi_1(\gamma) \geqslant 0;$$

y:

$$|\operatorname{Arg} \varphi(\gamma)| < \tau < \frac{\pi}{2}\ ; \quad (\tau \equiv \text{fijo});$$

siendo:

$$\varphi(\gamma) = \varphi_1(\gamma) + i\,\varphi_2(\gamma);$$

el punto, en que la recta de convergencia corta al eje real, es singular para $f(\tau)$. .-

Demostración):

Ante todo, por hipótesis es:

$$\varphi_1(\gamma) \geqslant 0; \quad y; \quad \left|\frac{\varphi_2(\gamma)}{\varphi_1(\gamma)}\right| < K \equiv \text{constante};$$

luego:

$$|\varphi_2(\gamma)| < K.\varphi_1(\gamma).$$

Por ser:

$$\int_{[\gamma]}^{\gamma} \varphi(\rho).d\rho = \int_{[\gamma]}^{\gamma} \varphi_1(\rho).d\rho + i \int_{[\gamma]}^{\gamma} \varphi_2(\rho).d\rho;$$

se tiene:

$$\left| \int_{[\gamma]}^{\gamma} \varphi(\rho).d\rho \right| \geqslant \left| \int_{[\gamma]}^{\gamma} \varphi_1(\rho).d\rho \right|;$$

pero como es:

$$\varphi_1(\rho) \geqslant 0$$

se tiene:

$$\left| \int_{[\gamma]}^{\gamma} \varphi(\rho).d\rho \right| \geqslant \int_{[\gamma]}^{\gamma} \varphi_1(\rho).d\rho \geqslant 0$$

para:

$$\rho \geqslant r_0 + 1.$$

Pero:

$$\int_{[\gamma]}^{\gamma} |\varphi(\rho)|.d\rho = \int_{[\gamma]}^{\gamma} \sqrt{\overline{\varphi_1(\rho)}^2 + \overline{\varphi_2(\rho)}^2}.d\rho \leq$$

$$\leqslant \int_{[\gamma]}^{\gamma} \sqrt{\overline{\varphi_1(\rho)}^2 + K^2.\overline{\varphi_1(\rho)}^2}.d\rho = \sqrt{1+K^2} \int_{[\gamma]}^{\gamma} \varphi_1(\rho).d\rho;$$

por lo tanto; tomando:

$$\rho \geqslant r_0 + 1;$$

$$\frac{\log \int_{[\gamma]}^{\gamma} |\varphi(\rho)|.d\rho}{\lambda(\gamma)} \leq \frac{\frac{1}{2}.\log(1+K^2)}{\lambda(\gamma)} + \frac{\log \int_{[\gamma]}^{\gamma} \varphi_1(\rho)\,d\rho}{\lambda(\gamma)} \leq$$

$$\leq \frac{\log \left| \int_{[\gamma]}^{\gamma} \varphi(\rho).d\rho \right|}{\lambda(\gamma)} + \frac{\frac{1}{2}.\log(1+K^2)}{\lambda(\gamma)}$$

Como es:

$$\lim_{r\to\infty} \frac{\frac{1}{2}\log(1+K^2)}{\lambda(r)} = 0;$$

se tiene:

$$\overline{\lim_{\gamma\to\infty}} \frac{\log \int_{[\gamma]}^{\gamma} |\varphi(\rho)|\cdot d\rho}{} \leq \overline{\lim_{\gamma\to\infty}} \frac{\log \int_{[\gamma]}^{\gamma} \varphi_1(\rho)\cdot d\rho}{\lambda(\gamma)} \leq$$

$$\leq \overline{\lim_{\gamma\to\infty}} \frac{\log \left| \int_{[\gamma]}^{\gamma} \varphi(\rho)\cdot d\rho \right|}{\lambda(\gamma)};$$

pero puesto que:

$$\frac{\log \left| \int_{[\gamma]}^{\gamma} \varphi(\rho)\, d\rho \right|}{\lambda(\gamma)} \leq \frac{\log \int_{[\gamma]}^{\gamma} |\varphi(\rho)|\cdot d\rho;}{\lambda(\gamma)}$$

es:

$$\overline{\lim_{\gamma\to\infty}} \frac{\left|\log \left| \int_{[\gamma]}^{\gamma} \varphi(\rho)\cdot d\rho \right|\right.}{\lambda(\gamma)} \leq \overline{\lim_{\gamma\to\infty}} \frac{\log \int_{[\gamma]}^{\gamma} \varphi_1(\rho)\cdot d\rho}{\lambda(\gamma)} +$$

luego:

$$\overline{\lim_{\gamma\to\infty}} \frac{\log \int_{[\gamma]}^{\gamma} |\varphi(\rho)|\cdot d\rho}{\lambda(\gamma)} = \overline{\lim_{\gamma\to\infty}} \frac{\log \int_{[\gamma]}^{\gamma} \varphi_1(\rho)\cdot d\rho}{\lambda(\gamma)} =$$

$$= \overline{\lim_{\gamma\to\infty}} \frac{\log \left| \int_{[\gamma]}^{\gamma} \varphi(\rho)\cdot d\rho \right|}{\lambda(\gamma)};$$

luego las abcisas de convergencia de las tre siguientes integrales:

(a) $\int_0^\infty |\varphi(r)|\cdot e^{-\lambda(r)\xi}\cdot dr;$

(b) $\int_0^\infty \varphi_1(r)\cdot e^{-\lambda(r)\xi}\cdot dr;$

(c)

$$\int_0^\infty \varphi(r).e^{-\lambda(r)\varepsilon}.dr;$$

son iguales.

La condición:

$$|\varphi_2(r)| < K.\varphi_1(r);$$

es excesiva, pues basta que sea:

$$\left|\frac{\varphi_2(r)}{\varphi_1(r)}\right| = O\left(e^{\varepsilon.r}\right);$$

para $\varepsilon > 0$;

pues:

$$\frac{|\varphi_2(r)|}{\varphi_1(r).e^{\varepsilon r}} < K_1 \equiv \text{constante};$$

para

$$r \geqslant r_0 \equiv r_0(K_1);$$

luego:

$$|\varphi_2(r)| < K_1.\varphi_1(r).e^{\varepsilon r};$$

como:

$$|\varphi(\rho)| = \sqrt{|\varphi_1(\rho)|^2 + |\varphi_2(\rho)|^2} < \varphi_1(\rho).\sqrt{1+K^2.e^{2.\varepsilon.\rho}} <$$

$$< \varphi_1(\rho).\sqrt{1+K^2.e^{2.\varepsilon.r}};$$

si es:

$$r \geqslant \rho;$$

luego:

$$\int_{[r]}^{r} |\varphi(\rho)|.d\rho < \sqrt{1+K^2.e^{2.\varepsilon.r}}.\int_{[r]}^{r} \varphi_1(\rho).d\rho \leqslant$$

$$\leq \sqrt{1+K^2.e^{2.\varepsilon r}}.\left|\int_{[r]}^{r} \varphi(\rho).d\rho\right|;$$

luego de aquí se deduce como más arriba la igualdad buscada).--

Si $\varphi(r)$ cumple la condición:

$$-\tau < \operatorname{Arg}\varphi(r) < \tau$$

siendo:

$$\text{constante} \equiv \tau < \frac{\pi}{2};$$

para:

$$r \geqslant r_0 \equiv \text{constante};$$

el punto:

$$x_0 \equiv \text{abs. de conv.};$$

es singular para $f(z)$; ; habiendo puesto:

$$z \equiv x + i y.$$

En efecto; el punto:

$$z = x_0 + 1;$$

es interior al semientomo de convergencia; y por lo tanto es regular; y se tiene entonces:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{(z - x_0 - 1)^n}{n!} \cdot f^{(n)}(x_0 + 1).$$

Pero es:

$$f^{(n)}(z) = \int_0^\infty \varphi(r) . e^{-\lambda(r) z} . (-1)^n . \lambda^n(r) . dr;$$

luego:

$$f^{(n)}(x_0 + 1) = (-1)^n . \int_0^\infty \varphi(r) . e^{-\lambda(r) . (x_0 + 1)} \lambda^n(r) . dr;$$

luego:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{(z - x_0 - 1)^n}{n!} . (-1)^n . \int_0^\infty \varphi(r) . e^{-\lambda(r) . (x_0 + 1)} . \lambda^n(r) . dr;$$

o bien:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{(x_0 + 1 - z)^n}{n!} . \int_0^\infty \varphi(r) . e^{-\lambda(r) . (x_0 + 1)} . \lambda^n(r) . dr.$$

Si fuese regular, el punto:

para $f(z)$; tomando $z = x_0$; $\gamma > 1$ y un punto z_0 tal que:

$$x_0 + 1 - \gamma < z_0 < x_0 ;$$

se tiene:

$$f(z_0) = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{(x_0 + 1 - z_0)^n}{n!} \cdot \int_0^\infty \varphi(\gamma) \cdot \lambda^n(\gamma) \cdot e^{-(x_0+1) \cdot \lambda(\gamma)} \cdot d\gamma .$$

Pongamos:

$$u_n(\gamma) \equiv \frac{(x_0 + 1 - z_0)^n}{n!} \cdot \varphi(\gamma) \cdot \lambda^n(\gamma) \cdot e^{-(x_0+1) \cdot \lambda(\gamma)} ;$$

y se tiene que:

$$\sum_{n=0}^{n=\infty} u_n(\gamma) = \varphi(\gamma) \cdot e^{-(x_0+1) \cdot \lambda(\gamma)} \cdot \sum_{n=\infty}^{n=\infty} \frac{(x_0 + 1 - z_0)^n}{n!} \cdot \lambda^n(\gamma).$$

Sea c un número positivo pero fijo; la serie:

$$\sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{(x_0 + 1 - z_0)}{n!} \cdot \lambda^n(\gamma) ;$$

converge uniformemente en el intervalo $[0; c]$, pues:

$$\frac{(x_0 + 1 - z_0)^n}{n!} \cdot \lambda^n(\gamma) \leq \frac{(x_0 + 1 - z_0)^n}{n!} \lambda^n(c) ;$$

y la serie:

$$\sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{(x_0 + 1 - z_0)^n}{n!} \cdot \lambda^n(c) \equiv \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{\left[(x_0 + 1 - z_0) \cdot \lambda(c)\right]^n}{n} ;$$

es una serie numérica convergente (con suma:

$$e^{(x_0 + 1 - z_0) \cdot \lambda(c)}) ;$$

y aplicando el criterio de Weierstrass, se tiene que la serie:

$$\sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{(x_0 + 1 - z_0)^n}{n!} \cdot \lambda^n(\gamma) ;$$

converge uniformemente en el intervalo:

$$0 \leq \gamma \leq C = \text{fijo}.$$

Luego es lícito poner:

$$\int_0^C \left(\sum_{n=0}^{n=\infty} u_n(\gamma) \right) d\gamma = \sum_{n=0}^{n=\infty} \left(\int_0^C u_n(\gamma)\, d\gamma \right); \text{ para todo:}$$

$$C \geqslant 0.$$

La serie:

$$\sum_{n=0}^{n=\infty} \left(\int_0^\infty u_n(\gamma) . d\gamma \right);$$

es convergente; pues es:

$$f(z_0) = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{(x_0+1-z_0)^n}{n!} \cdot \int_0^\infty \varphi(\gamma) . \lambda^n(\gamma) . e^{-(x_0+1) . \lambda(\gamma)} . d\gamma =$$

$$= \sum_{n=0}^{n=\infty} \left(\int_0^\infty \frac{(x_0+1-z_0)^n}{n!} . \varphi(\gamma) . \lambda^n(\gamma) . e^{-(x_0+1) . \lambda(\gamma)} . d\gamma \right) \equiv$$

$$\equiv \sum_{n=0}^{n=\infty} \left(\int_0^\infty u_n(\gamma)\, d\gamma \right).$$

Por lo tanto, la parte real de esta última serie que es:

$$\sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{(x_0+1-z_0)^n}{n!} \int_0^\infty \varphi_1(\gamma) . \lambda^n(\gamma) . e^{-(x_0+1) . \lambda(\gamma)} . d\gamma;$$

es también convergente.

Como esta última serie es de términos positivos, y siendo:

$$0 < C \equiv \phi;$$

será, por lo tanto, también convergente la siguienteserie:

$$\sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{(x_0+1-z_0)^n}{n!} \cdot \int_C^\infty \varphi_1(\gamma) - \lambda^n(\gamma) . e^{-(x_0+1) . \lambda(\gamma)}\, d\gamma.$$

Pero:

$$\left|\varphi(\gamma)\right| < \sqrt{1+K^2}\,.\varphi_1(\gamma);$$

y por lo tanto la siguiente integral:

$$\int_0^\infty \left|\varphi(\gamma)\right|.\lambda^n(\gamma).e^{-(x_0+1).\lambda(\gamma)}.d\tau.$$

es convergente.

Por lo tanto la serie:

$$\sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{(x_0+1-\tau_0)^n}{n!}.\int_c^\infty \left|\varphi(\gamma)\right|.\lambda^n(\gamma).e^{-(x_0+1).\lambda(\gamma)}.d\tau;$$

es convergente; esto es, la serie:

$$\sum_{n=0}^{n=\infty} \int_0^\infty u_n(\gamma).d\tau;$$

converge absolutamente.

Luego se tiene:

$$\left|\sum_{n=0}^{n=\infty} \int_0^\infty u_n(\gamma)\,d\tau - \sum_{n=0}^{n=\infty} \int_0^c u_n(\gamma)\,d\tau\right| = \left|\sum_{n=0}^{n=\infty} \int_c^\infty u_n(\gamma)\,d\tau\right| \leqslant$$

$$\leq \sum_{n=0}^{n=\infty} \int_c^\infty \left|u_n(\gamma)\right| d\tau = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{(x_0+1-\tau_0)^n}{n!}.\int_c^\infty \left|\varphi(\gamma).\lambda^n(\gamma).e^{-(x_0+1)\lambda(\gamma)}.d\tau\right. =$$

$$= \sum_{n=0}^{n=N} \frac{(x_0+1-\tau_0)^n}{n!}.\int_c^\infty \left|\varphi(\gamma)\right|.\lambda^n(\gamma).e^{-(x_0+1).\lambda(\gamma)}.d\tau +$$

$$+ \sum_{n=N}^{n=\infty} \frac{(x_0+1-\tau_0)^n}{n!}.\int_c^\infty \left|\varphi(\gamma)\right|.\lambda^n(\gamma).e^{-(x_0+1).\lambda(\gamma)}.d\tau.$$

Sea $\varepsilon > 0$ arbitrario; luego existe un:

$$N \equiv N(\varepsilon);$$

tal que:

$$\sum_{n=N}^{n=\infty} \frac{(x_0+1-\tau_0)^n}{n!}.\int_c^\infty \left|\varphi(\gamma)\right|.\lambda^n(\gamma)\,e^{-(x_0+1)\lambda(\gamma)}\,d\tau < \frac{\varepsilon}{2};$$

para:

$$\mathcal{C} \geqslant 0$$

cada una de las $\underline{N+1}$ integrales convergentes:

$$\int_{\mathcal{C}}^{\infty} |\varphi(\tau)| . \lambda^{n}(\tau) . e^{-(x_0+1)\lambda(\tau)} . d\tau .$$

para:

$$n = 0, 1, 2, 3, \text{------}, N-1, N);$$

puede hacerse menor que:

$$\frac{\varepsilon}{2 e^{x_0+1-\xi_0}};$$

tomando $\underline{\underline{\mathcal{C}}}$ suficientemente grande.

luego:

$$\sum_{n=0}^{n=N} \frac{(x_0+1-\xi_0)^n}{n!} . \int_{\mathcal{C}}^{\infty} |\varphi(\tau)| . \lambda^{n}(\tau) . e^{-(x_0+1).\lambda(\tau)} . d\tau <$$

$$< \frac{\varepsilon}{2 . e^{x_0+1-\xi_0}} . \sum_{n=0}^{n=N} \frac{(x_0+1-\xi_0)^n}{n!} < \frac{\varepsilon}{2 . e^{x_0+1-\xi_0}} . \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{(x_0+1-\xi_0)^n}{n!} =$$

$$= \frac{\varepsilon}{2 e^{x_0+1-\xi_0}} . e^{x_0+1-\xi_0} = \frac{\varepsilon}{2};$$

luego:

$$\left| \sum_{n=0}^{n=\infty} \left(\int_0^{\infty} u_n(\tau)\, d\tau \right) - \sum_{n=0}^{n=\infty} \left(\int_0^{\mathcal{C}} u_n(\tau)\, d\tau \right) \right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon;$$

tomando $\underline{\underline{\mathcal{C}}}$ suficientemente grande.

Luego tenemos que:

para todo $\underline{\mathcal{C} > 0}$ es lícito poner:

$$\int_0^{\mathcal{C}} \left(\sum_{n=0}^{n=\infty} u_n(\tau) \right) d\tau = \sum_{n=0}^{n=\infty} \left(\int_0^{\mathcal{C}} u_n(\tau) . d\tau \right)$$

para $\mathcal{C} > 0$;

y: $$\lim_{\mathcal{C} \to \infty} \left\{ \sum_{n=0}^{n=\infty} \left(\int_0^{\mathcal{C}} u_n(\tau) . d\tau \right) \right\} = \sum_{n=0}^{n=\infty} \left(\int_0^{\infty} u_n(\tau)\, d\tau \right);$$

luego por un teorema clásico es sabido que la integral:

$$\int_0^\infty \left(\sum_{n=0}^{n=\infty} u_n(\tau) \right) . d\tau$$

es convergente; y su valor es:

$$\int_0^\infty \left(\sum_{n=0}^{n=\infty} u_n(\tau) \right) d\tau = \sum_{n=0}^{n=\infty} \left(\int_0^\infty u_n(\tau) . d\tau \right);$$

por lo tanto:

$$f(z_0) = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{(x_0+1-z_0)^n}{n!} \int_0^\infty \varphi(\tau) . \lambda^n(\tau) . e^{-(x_0+1).\lambda(\tau)} . d\tau =$$

$$= \int_0^\infty \varphi(\tau) . e^{-(x_0+1).\lambda(\tau)} . \left(\sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{(x_0+1-z_0)^n}{n!} \lambda^n(\tau) \right) . d\tau =$$

$$= \int_0^\infty \varphi(\tau) . e^{-(x_0+1).\lambda(\tau)} . e^{(x_0+1-z_0).\lambda(\tau)} . d\tau =$$

$$= \int_0^\infty \varphi(\tau) . e^{-\lambda(\tau)(x_0+1-x_0-1+z_0)} . d\tau =$$

$$= \int_0^\infty \varphi(\tau) . e^{-\lambda(\tau).z_0} . d\tau;$$

luego la integral:

$$\int_0^\infty \varphi(\tau) . e^{-\lambda(\tau) z} . d\tau$$

es convergente (con suma: $f(z_0)$) en:

$$z = z_0 < x_0 ;$$

lo que contradice la hipótesis.

Luego el punto: $z = x_0$;

es singular para $f(z)$.---

Abscisas de convergencias condicional y absoluta.

Son interesantes los siguientes teoremas sobre el cálculo de las abscisas de convergencias condicional y absoluta .

Bastará referirnos a la abscisa de convergencia condicional, pues la de convergencia absoluta de la integral:

$$\int_0^\infty a(\tau).e^{-\lambda(\tau)\xi}.d\tau$$

es la de convergencia (condicional) de:

$$\int_0^\infty |a(\tau)|.e^{-\lambda(\tau)\xi}.d\tau$$

Teorema IV):

Sea la integral:

$$\int_0^\infty a(\tau).e^{-\lambda(\tau).\xi}.d\tau;$$

y llamemos $\mathcal{C}$ a la abscisa de su recta de convergencia condicional.

Se tiene:

$$\mathcal{C}=\overline{\lim_{x\to\infty}}\frac{\log\left|\int_{[x]}^{x} a(\tau)\,d\tau\right|}{x};$$

o bien:

$$\mathcal{C}=\overline{\lim_{\tau\to\infty}}\frac{\log\left|\int_{[\tau]}^{\tau} a^*(\rho)\,d\rho\right|}{\tau};$$

indicando con:

$$\int_{[\tau]}^{\tau} a^*(\rho).d\rho;$$

la integral de la función $a(\rho)$ entre los límites tales que:

$$[x]\leq\lambda(\rho)\leq x;$$

o bien:

$$[\tau]\leq\lambda(\rho)\leq\tau;$$

Demostración:)

Pongamos:

$$k\equiv\overline{\lim_{\tau\to\infty}}.\frac{\log\left|\int_{[\tau]}^{\tau} a^*(\rho).d\rho\right|}{\tau};$$

supongamos primeramente que sea :

$$k = \phi;$$

y demostraremos primeramente que ; la integral:

$$\int_0^\infty a(\gamma).e^{-\lambda(\gamma)\xi}.d\gamma;$$

es convergente para:

$$\xi = k + \delta;$$

siendo δ un número positivo cualquiera.

Puesto que es:

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{x\to\infty} \frac{x}{[x]} = 1. \\ y: \quad &\lim_{x\to\infty} \frac{x}{[x]+1} = 1 \end{aligned}\right\}$$

se puede poner la conclusión del teorema como sigue:

$$\left.\begin{aligned} &\mathcal{C} = \overline{\lim_{x\to\infty}}. \frac{\log\left|\int_{[\gamma]}^{\gamma} a^*(\rho).d\rho\right|}{[\gamma]} \\ \text{ó bien:} \quad &\mathcal{C} = \overline{\lim_{\gamma\to\infty}}. \frac{\log\left|\int_{[\gamma]}^{\gamma} a^*(\rho).d\rho\right|}{[\gamma]+1} \end{aligned}\right\}$$

Puesto que la función $\lambda(\gamma)$ es monótona creciente y:

$$\lim_{\gamma\to\infty} \lambda(\gamma) = +\infty;$$

existe un número $\mathcal{L}$, fijo tal que para:

$$\gamma \geqslant \mathcal{L};$$

es:

$$\lambda(\gamma) > 0.$$

Teniendo en cuenta que :

$$k = \phi = \overline{\lim_{x\to\infty}}. \frac{\log\left|\int_{[x]}^{x} a^*(\rho).d\rho\right|}{[x]} = \overline{\lim_{x\to\infty}}. \frac{\log\left|\int_{[x]}^{x} a^*(\rho).d\rho\right|}{[x]+1};$$

se tiene que:

dado un valor arbitrario, $\delta > 0$, existe un:

$$X_1 \equiv X_1(\delta);$$

, tal que para:

$$x \geqslant X_1 \equiv X_1(\delta);$$

es:

$$\left| \int_{[x]}^{x} a^*(\rho).d\rho \right| < e^{[x].\left(k+\frac{\delta}{2}\right)};$$

y:

$$\left| \int_{[x]}^{x} a^*(\rho)\, d\rho \right| < e^{([x]+1).\left(k+\frac{\delta}{2}\right)};$$

para:

$$x > X_2 \equiv X_2(\delta).$$

Considerando la integral:

$$\int_{\gamma}^{\gamma'} a(\gamma).e^{-\lambda(\gamma).(k+\delta)}$$

donde es:

$$\left.\begin{array}{l} \lambda(\gamma) > K_1 \\ \lambda(\gamma) > K_2 \end{array}\right\}$$

y :

esto es: tomando $\underline{\gamma > K}$;

y donde $\underline{\gamma'}$ es un número real arbitrario mayor que $\underline{\gamma}$, la demostración el teorema se continúa como ya es ya clásico.--

---

Demostración):,Lo que restringe, en absoluto la generalidad (pues en caso contrario se utilizarán integrales de Stieljes), podemos suponer que $\underline{\lambda(\gamma)}$ es derivable.

Supongamos que la integral:

$$\int_0^{\infty} a(\gamma).e^{-\lambda(\gamma)\tau}.d\gamma$$

sea convergente para:

$$\tau = \sigma;$$

siendo $\underline{\sigma}$ un cierto número real y positivos o nulo; y pongamos:

$$\varphi(\gamma) \equiv \int_0^{\gamma} a(\gamma).e^{-\lambda(\gamma)\sigma}.d\gamma;$$

la integral:

$$f(\sigma) \equiv \int_0^\infty a(r).e^{-\lambda(r)\sigma}.dr;$$

converge, por hipótesis.

Introduzcamos ahora la siguiente hipótesis restrictiva:

$$\frac{a(r).e^{\lambda(r)k}}{r^{-1-\varepsilon}} \longrightarrow 0;$$

para:

$$r \longrightarrow \infty;$$

esto es:

$$a(r) = o\left(r^{-1-\varepsilon}.e^{-k.\lambda(r)}\right) =$$

$$= o\left(e^{-k.\lambda(r)-(1+\varepsilon).\log r}\right);$$

o bien:

$$a(r).e^{k.\lambda(r)}.r^{1+\varepsilon} =$$

$$= a(r).e^{k.\lambda(r)+(1+\varepsilon).\log(r)} = o(1);$$

para <u>todo:</u>

$$k > 0;$$

y para <u>algún</u> :

$$\varepsilon > 0$$

Por ser:

$$\lim_{r \to \infty} e^{k.\lambda(r)} = +\infty; \qquad (k > 0);$$

y si se verifica la condición anterior es:

$$\lim_{r \to \infty} \frac{a(r)}{r^{-1-\varepsilon}} = 0; \qquad (k > 0);$$

para <u>algún</u>:

$$\varepsilon > 0;$$

y si <u>$k < 0$</u> ; como es:

$$\lim_{r \to \infty} e^{k.\lambda(r)} = 0;$$

luego:

$$\frac{a(r).e^{k.\lambda(r)}}{r^{-1-\varepsilon}} \to 0; \qquad (k<0);$$

se deduce que:

la condición:

$$a(r).e^{k.\lambda(r)}.r^{1+\varepsilon} \to 0$$

se verifica para todo $k =$ n.º real, y algún $\varepsilon > 0$.

La hipótesis restrictiva anterior es excesiva, es suficiente exigir que sea:

$$a(r).e^{k.\lambda(r)} = O\left(r^{-1-\varepsilon}\right)$$

o sea:

$$a(r).e^{k.\lambda(r)}.r^{1+\varepsilon} = O(1);$$

es decir:

$$\left| a(r).e^{k\lambda(r)}.r^{1+\varepsilon} \right| < K;$$

para:

$$r \geqslant r_0 \equiv r_0(K))$$

Llamemos $\alpha(r)$ y $\beta(r)$, a las partes real e imaginaria de $a(r)$, respectivamente, luego:

$$a(r) \equiv \alpha(r) + i\,\beta(r).$$

Por ser:

$$|\alpha(r)| \leq |a(r)|;$$

y:

$$|\beta(r)| \leq |a(r)|;$$

se tiene que:

$$\left| \frac{\alpha(r).e^{k.\lambda(r)}}{r^{-1-\varepsilon}} \right| \leq \left| \frac{a(r).e^{k\lambda(r)}}{r^{-1-\varepsilon}} \right| ;$$

y:

$$\left| \frac{\beta(r).e^{k.\lambda(r)}}{r^{-1-\varepsilon}} \right| \leq \left| \frac{a(r).e^{k\lambda(r)}}{r^{-1-\varepsilon}} \right| ;$$

y por lo tanto es: $\alpha(r).e^{k.\lambda(r)} = o\left(r^{-1-\varepsilon}\right);$

y:

$$\beta(r).e^{k.\lambda(r)} = o\left(r^{-1-\varepsilon}\right).$$

Supongamos ahora que:

$$\sigma < o;$$

luego:

$$-\sigma > o;$$

y pongamos:

$$-\sigma = \sigma' = k > o;$$

como es:

$$\lim_{r \to \infty} \left[\frac{\alpha(r).e^{\lambda(r)\sigma'}}{r^{-1-\varepsilon}}\right] = o;$$

dado $\underline{\varepsilon' > o}$, existe un:

$$r_o \equiv r_o(\varepsilon');$$

tal que para:

$$r \geqslant r_o = r_o(\varepsilon');$$

es:

$$\left|\frac{\alpha(r).e^{\lambda(r).\sigma'}}{r^{-1-\varepsilon}}\right| < \varepsilon' ;$$

o bien

$$\frac{|\alpha(r)|.e^{\lambda(r).\sigma'}}{r^{-1-\varepsilon}} < \varepsilon' ;$$

luego para:

$$r \geqslant r_o ;$$

es:

$$|\alpha(r)|.e^{\lambda(r)\sigma'} < \varepsilon'.r^{-1-\varepsilon};$$

por lo tanto, para:

$$r \geqslant r_o ;$$

es:

$$\int_{r_o}^{r} |\alpha(r)|.e^{\lambda(r)\sigma'}.dr \leq \varepsilon'.\int_{r_o}^{r} r^{-1-\varepsilon}.dr = \varepsilon'\left(\frac{r^{-\varepsilon}}{-\varepsilon}\right)_{r_o}^{r} =$$

$$= \frac{\varepsilon'}{\varepsilon}\left(\frac{1}{r_o^{\varepsilon}} - \frac{1}{r^{\varepsilon}}\right) < \frac{\varepsilon'}{\varepsilon}.\frac{1}{r_o^{\varepsilon}};$$

y por ser:

$$\left| \int_{r_0}^{r} \alpha(r).e^{\lambda(r)\sigma'}.dr \right| \leq \int_{r_0}^{r} |\alpha(r)|.e^{\lambda(r)\sigma'}.dr;$$

se infiere que:

$$\left| \int_{r_0}^{r} \alpha(r).e^{\lambda(r)\sigma'}.dr \right| < \varepsilon'.\frac{1}{\varepsilon.r_0^{\varepsilon}};$$

y análogamente para $\beta(r)$; si es:

$$r \geqslant r_1(\varepsilon') \equiv r_1 \quad es;$$

$$\left| \int_{r_1}^{r} \beta(r).e^{\lambda(r)\sigma'}.dr \right| < \varepsilon'.\frac{1}{\varepsilon.r_1^{\varepsilon}};$$

luego por ser:

$$|a(r)| \leq |\alpha(r)| + |\beta(r)|;$$

para todo r tal que:

$$\left.\begin{array}{l} r \geqslant r_0 \equiv r_0(\varepsilon) \\ \text{y:} \\ r \geqslant r_1 \equiv r_1(\varepsilon) \end{array}\right\}$$

se verifica que:

$$\left| \int_{r_0}^{r} a(r).e^{-\lambda(r)\sigma}.dr \right| \leq \int_{r_0}^{r} |a(r)|.e^{-\lambda(r)\sigma}.dr < \frac{\varepsilon'}{\varepsilon}\left(\frac{1}{r_0^{\varepsilon}} + \frac{1}{r_1^{\varepsilon}}\right).$$

Luego; para todo valor real de σ , está acotada la integral:

$$\int_{r_0}^{r} a(r).e^{-\lambda(r)\sigma}.dr;$$

en el intervalo:

$$r_0 \leq r < +\infty.$$

Veamos si lo está en el intervalo:

$$0 \leq r \leq +r_0.$$

En efecto: por difinición de integral de Dirichlet, la función generatriz $a(r)$ está acotada en todo intervalo finito, luego si es:

$$0 \leq r \leq r_0;$$

se tiene:

$$|a(r)| < K \equiv \text{constante};$$

luego:

$$\left| \int_0^r a(r).e^{-\lambda(r)\sigma}.dr \right| \leq \int_0^r |a(r)|.e^{-\lambda(r)\sigma}.dr <$$

$$< K.\int_0^r e^{-\lambda(r)\sigma}.dr.$$

Ahora bien, si es:

$$\sigma = 0;$$

se tiene que:

$$\left| \int_0^r a(r).e^{-\lambda(r)\sigma}.dr \right| < K.\int_0^r e^{-\lambda(r).0}.dr = Kr \leq K.r_0 \equiv K';$$

si: $\underline{\sigma > 0}$, es:

$$\left| \int_0^r a(r).e^{-\lambda(r)\sigma}.dr \right| < K.\int_0^r e^{\lambda(r)\sigma}.dr < K.\int_0^r dr = Kr \leq Kr_0 \equiv K';$$

y si es:

$$\sigma < 0$$

poniendo:

$$-\sigma \equiv \sigma' > 0;$$

se ve que:

$$\left| \int_0^r a(r).e^{-\lambda(r)\sigma}.dr \right| < K.\int_0^r e^{-\lambda(r)\sigma}.dr = K.\int_0^r e^{\lambda(r)\sigma'}.dr \leq$$

$$\leq K.\int_0^r e^{\lambda(r_0)\sigma'}.dr \equiv K.e^{\lambda(r_0)\sigma'}.r \leq K'.e^{\lambda(r_0)\sigma'} \equiv K'' \equiv \text{constante}.$$

Resumiendo:

si la integral:

$$\int_0^\infty a(r).e^{-\lambda(r)\xi}.dr;$$

converge para:

$$\xi = \sigma \equiv \text{real};$$

; y si se verifican algunas de las condiciones restrictivas se verifica que:

existe un cierto valor positivo, $\underline{M}$, independiente de $\underline{\gamma}$ tal que:

$$\left| S(\gamma) \right| \equiv \left| \int_0^{\gamma} a(\gamma).e^{-\lambda(\gamma)\sigma}.d\tau \right| < M$$

Además es:

$$\mathcal{D}\, S(\gamma) \equiv \frac{d\, S(\gamma)}{d\tau} \equiv a(\gamma).e^{-\sigma.\lambda(\gamma)} \;;$$

luego:

$$a(\gamma) = e^{\sigma.\lambda(\gamma)}.\mathcal{D}\, S(\gamma)$$

Reemplazando este valor de $\underline{a(\gamma)}$ en la integral:

$$\int_0^{\gamma} a(\gamma).e^{\overline{\lambda(\gamma)}^2} d\tau;$$

se tiene que:

$$\int_0^{\gamma} a(\gamma).e^{\overline{\lambda(\gamma)}^2}.d\tau \equiv \int_0^{\gamma} e^{\overline{\lambda(\gamma)}^2}.e^{\lambda(\gamma)\sigma}.\mathcal{D}\, S(\gamma).d\tau =$$

$$= \int_0^{\gamma} d\, S(\gamma).e^{\lambda(\gamma).(\lambda(\gamma)+\sigma)} = S(\gamma).e^{\lambda(\gamma)(\lambda(\gamma)+\sigma)} -$$

$$- \int_0^{\gamma} S(\gamma).\, d\, e^{\lambda(\gamma).(\lambda(\gamma)+\sigma)}$$

Pero:

$$d\, e^{\lambda(\gamma).(\lambda(\gamma)+\sigma)} = e^{\lambda(\gamma).(\lambda(\gamma)+\sigma)}.\, d\left[\lambda(\gamma).(\lambda(\gamma)+\sigma)\right] =$$

$$= e^{\lambda(\gamma).(\lambda(\gamma)+\sigma)}.\left[\mathcal{D}\lambda(\gamma).(\lambda(\gamma)+\sigma) + \lambda(\gamma).\mathcal{D}\lambda(\gamma)\right].d\tau =$$

$$= e^{\lambda(\gamma).(\lambda(\gamma)+\sigma)}.\mathcal{D}\lambda(\gamma).\left[2\lambda(\gamma)+\sigma\right] d\tau;$$

y por ser:

$$\mathcal{D}\lambda(\gamma) > 0$$

(ya que $\underline{\lambda(\gamma)}$ es derivable y monótona creciente) y:

$$2.\lambda(\gamma)+\sigma > 0$$

para $\underline{\gamma}$ suficientemente grande (aún si es $\underline{\sigma < 0}$;

luego:

$$\left| d\, e^{\lambda(\gamma).(\lambda(\gamma)+\sigma)} \right| = d\, e^{\lambda(\gamma).(\lambda(\gamma)+\sigma)};$$

luego: $\left| -\int_0^{\gamma} S(\gamma).\, d\, e^{\lambda(\gamma).(\lambda(\gamma)+\sigma)} \right| \leq \int_0^{\gamma} \left| S(\gamma) \right|.\left| d\, e^{\lambda(\gamma).(\lambda(\gamma)+\sigma)} \right| <$

$$< M \cdot \int_0^r d\, e^{\lambda(r)\cdot(\lambda(r)+\sigma)} = M\left[e^{\lambda(r)\cdot(\lambda(r)+\sigma)} - e^{\lambda(0)\cdot(\lambda_0+\sigma)}\right] <$$

$$< M\, e^{\lambda(r)\cdot(\lambda(r)+\sigma)};$$

y además es :

$$\left| S(r)\cdot e^{\lambda(r)\cdot(\lambda(r)+\sigma)} \right| < M \cdot e^{\lambda(r)\cdot(\lambda(r)+\sigma)};$$

luego:

$$\left| \int_0^r a(\rho)\cdot e^{\overline{\lambda(\rho)}^2}\cdot d\rho \right| < 2\, M \cdot e^{\lambda(r)\cdot(\lambda(r)+\sigma)};$$

si es $\delta > 0$ arbitrario y r es suficientemente grande, se tiene:

$$2 \cdot M \cdot e^{\lambda(r)\cdot(\lambda(r)+\sigma)} < e^{\lambda(r)\cdot(\lambda(r)+\sigma+\delta)};$$

luego, es:

$$\left| \int_0^r a(\rho)\cdot e^{\overline{\lambda(\rho)}^2}\cdot d\rho \right| < e^{\lambda(r)\cdot(\lambda(r)+\sigma+\delta)} = e^{\overline{\lambda(r)}^2}\, e^{\lambda(r)\cdot(\sigma+\delta)};$$

luego:

$$\left| \int_0^r a(\rho)\cdot e^{\overline{\lambda(\rho)}^2 - \overline{\lambda(r)}^2}\, d\rho \right| < e^{\lambda(r)\cdot(\sigma+\delta)};$$

Luego:

$$\frac{\log \left| \int_0^r a(\rho)\cdot e^{\overline{\lambda(\rho)}^2 - \overline{\lambda(r)}^2}\cdot d\rho \right|}{\lambda(r)} < \sigma + \delta;$$

Luego:

$$\overline{\lim_{r\to\infty}} \cdot \frac{\log \left| \int_0^r a(\rho)\cdot e^{\overline{\lambda(\rho)}^2 - \overline{\lambda(r)}^2} \right.}{\lambda(r)} \leq \sigma + \delta;$$

luego:

$$\mathcal{C} \geq \overline{\lim_{r \to \infty}} \cdot \frac{\log \left| \int_0^r a(\rho) \cdot e^{\overline{\lambda(\rho)}^2 - \overline{\lambda(r)}^2} \cdot d\rho \right|}{\lambda(r)}$$

Análogamente se prueba que:

$$\mathcal{C} \leq \overline{\lim_{r \to \infty}} \frac{\log \left| \int_0^r a(\rho) \cdot e^{\overline{\lambda(\rho)}^2 - \overline{\lambda(r)}^2} \cdot d\rho \right|}{\lambda(r)}$$

Asociando las dos dos últimas relaciones se tiene demostrado el teorema.---

---

---. Recta de convergencia uniforme.---

Es sabido que la integral:

$$\int_0^\infty a(r) \cdot e^{-\lambda(r) \cdot z} \cdot dr;$$

con:

$$z = x + i\,y;$$

posee dos rectas de convergencia:

$$R(z) \equiv x = \alpha$$

y:

$$R(z) \equiv x = \beta;$$

tal que la primera limita la región de convergencia condicional, mientras que la segunda la de convergencia absoluta. Recordemos que, en el recinto:

$$\begin{cases} R(z) \equiv x > \alpha + \varepsilon > \alpha \quad ; \quad (\varepsilon > 0) \\ |z| \equiv |x + i\,y| = \sqrt{x^2 + y^2} < K \equiv \text{constante} \end{cases}$$

la integral:

$$\int_0^\infty a(r) \cdot e^{-\lambda(r)\, z} \cdot dr.$$

converge uniformemente, lo que en general, no se verifica en todo el semiplano :

$$R(z) > x > \alpha + \varepsilon > \alpha.$$

Introduciremos una nueva recta de convergencia:

que llamaremos recta de convergencia uniforme, tal que la integral:

$$\int_0^\infty a(r)\, e^{-\lambda(r)\,\tau}\, dr$$

converge uniformemente para:

$$x > \gamma + \varepsilon$$

y no para:

$$x \geqslant \gamma - \varepsilon$$

Respecto de la recta de convergencia uniforme, se tienen los siguientes teoremas.

Teorema VI):

Supongamos que sea:

$$0 < l \equiv \overline{\lim_{r \to \infty}} \frac{\log r}{\lambda(r)} < +\infty;$$

y:

$$\frac{1}{\Phi\lambda(r)} = \frac{1}{\frac{d\lambda(r)}{dr}} = \frac{dr}{d\lambda(r)} = O\left[e^{\lambda(r).(l+\delta)}\right];$$

luego en tal caso se verifica que:

la integral:

$$\int_0^\infty a(r).e^{-\lambda(r)\,\tau}.dr;$$

converge uniformemente, siempre que la función:

$$f(\tau) = f(x+iy);$$

sea regular y finita. Esto es: si el número c estal, que la función $f(\tau)$ es finita y regular, para:

$$x > c + \varepsilon;$$

y no para:

$$x \geqslant c - \varepsilon;$$

se tiene que:

$$\gamma = c.$$

Teorema VII):

La función $f(\tau)$; toma en cada faja:

$$\gamma - \varepsilon < R(\tau) \equiv x < \gamma + \varepsilon;$$

para todo:

$$\varepsilon > 0;$$

una infinidad de veces, cualquier valor arbitrario prefijado, con excepción a lo sumo de uno.-

Este teorema es, en cierta forma, parecido al de Picard sobre las singularidades esenciales aisladas.

Teorema VIII):

Supongamos: que $\rho(r)$ sea una función monótona creciente y positiva; que la función $\lambda(r)$ sea derivable y que exista una cierta K constante positiva tal que:

$$0 \leq \lambda(r) + K - \lambda(r + \rho(r)) < \mathcal{D}\,\lambda(r + \rho(r)).$$

Designemos con:

$$T(r;\rho) \equiv T(r;\rho(r));$$

el extremo superior de la integral:

$$\left| \int_r^{r+\rho} a(\rho) . e^{-\lambda(\rho) t i} . d\rho \right| ;$$

para:

$$0 \leq \rho \leq \rho(r);$$

cuando la variable t varía entre:

$$-\infty \text{ y } +\infty;$$

luego es:

$$\gamma = \lim_{r \to \infty} \frac{\log T(r;\rho)}{\lambda(r)}.$$

TeoremaIX):

Supongamos que $\lambda(r)$ en la integral:

$$\int_0^\infty a(r) . e^{-\lambda(r) t} . dr;$$

admita función inversa: $r \equiv r(\lambda)$.

Designemos con:

$$T(x);$$

el extremo superior de:

$$\left| \int_{\gamma_1}^{\gamma_2} a(\rho).e^{-\lambda(\rho).ti}.d\rho \right|;$$

siendo:

$$\left.\begin{array}{l} \gamma_1 \equiv \gamma([x]) \\ \gamma_2 \equiv \gamma(x) \end{array}\right\}$$

y:

cuando t varía en el intervalo infinito: $-\infty < t < +\infty$.

Luego la abscisa, $\mathcal{C}$ de convergencia uniforme de la integral es:

$$\mathcal{C} = \overline{\lim_{x \to \infty}} \frac{\log T(x)}{x}.$$

Teorema X):

Si con:

$$T(\gamma);$$

designemos el extremo superior de:

$$\left| \int_0^{\gamma} a(\gamma).e^{-\lambda(\gamma)ti}.d\gamma \right|;$$

cuando t varía desde $-\infty$ a $+\infty$, y , si la abscisa, $\mathcal{C}$ de convergencia uniforme de la integral:

$$\int_0^{\infty} a(\gamma).e^{-\lambda(\gamma)t}.d\gamma;$$

es positiva; luego es:

$$\mathcal{C} = \overline{\lim_{\gamma \to \infty}} \frac{\log T(\gamma)}{\lambda(\gamma)}$$

TeoremaXI):

Si $\varphi(x)$ es una función real derivable para todo:

$$x = \lambda(\rho);$$

y satisface a las condiciones:

a) $$\lim_{x \to \infty} \mathcal{D}(x) \equiv \lim_{x \to +\infty} \frac{d\varphi(x)}{dx} = +\infty;$$

b) $$\lim_{x \to \infty} \frac{\mathcal{D}\varphi(x)}{x^k} = 0;$$ (donde k es un cierto número positivo);

(de la condición a) se deduce que:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\varphi(x)}{x} = +\infty);$$

si con:

$$T(r);$$

designa el extremo superior de:

$$\left| \int_0^r a(\rho) . e^{\varphi[\lambda(\rho)] - \varphi[\lambda(r)] - \lambda(\rho).ti} . d\rho \right|;$$

cuando t varía entre $-\infty$ y $+\infty$; ; se tiene:

$$\mathcal{C} = \overline{\lim_{r \to \infty}} \frac{\log T(r)}{\lambda(r)}.$$

Demostremos el teorema XI.--

Supondremos que $\lambda(r)$ es derivable.

Pongamos:

$$S(r;t) \equiv \int_0^r a(r).e^{\varphi(\lambda(r)) - t.\lambda(r)}.dr;$$

y con:

$$T(r);$$

designemos el extremo superiorde:

$$\left| S'(r;t,i) e^{-\varphi(\lambda(r))} \right| =$$

$$= \left| \int_0^{r} a(\rho) . e^{\varphi[\lambda(\rho)] - \varphi[\lambda(r)] - t i . \lambda(\rho)} . d\rho \right|;$$

en el intervalo:

$$-\infty < t < +\infty;$$

y pongamos:

$$\mathcal{L} \equiv \overline{\lim_{r \to \infty}} \frac{\log T(r)}{\lambda(r)};$$

y su pongamos:

$$\mathcal{L} \equiv \phi.$$

Sea δ un mímero positivo arbitrario, demostraremosque la integral:

$$\int_0^{\infty} a(r) . e^{-\lambda(r) \xi} . dr;$$

converge uniformemente para:

$$\Re(\xi) \equiv x \geqslant \mathcal{L} + \delta$$

Para todo δ hay un:

$$r_0 \equiv r_0(\delta);$$

; tal que para:

$$r \geqslant r_0 \equiv r_0(\delta) \geqslant 0;$$

es:

$$\frac{\log T(r)}{\lambda(r)} < \mathcal{L} + \frac{\delta}{2};$$

y si es:

$$\lambda(r) > 0$$

(lo que siempre se puede suponer) es:

$$T(r) < e^{\lambda(r) . [\mathcal{L} + \frac{\delta}{2}]}.$$

Por la hipótesis se tiene:

$$\left| S'(r; t, i) . e^{-\varphi(\lambda(r))} \right| \leq T(r);$$

o bien, para todo r es:

$$\left| S'(r; t, i) \right| \leq T(r) . e^{\varphi(\lambda(r))};$$

para todo t tal que:

$$-\infty < t < +\infty;$$

y para:

$$r \geqslant r_0 = r_0(\delta);$$

es:

$$|S'(r;t,i)| < e^{\varphi[\lambda(r)] + \lambda(r)(\mathcal{L} + \frac{\delta}{2})}$$

Por hipótesis es:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\varphi(x)}{x} = +\infty;$$

y como $\lambda(r)$ es monótona creciente y:

$$\lim_{r \to \infty} \lambda(r) = +\infty;$$

se tiene que:

$$\lim_{r \to \infty} \frac{\varphi[\lambda(r)]}{\lambda(r)} = +\infty;$$

o bien:

$$\lim_{r \to \infty} \left[\frac{\varphi[\lambda(r)]}{\lambda(r)} + \mathcal{L} \right] = +\infty;$$

luegoa partir de un valor de:

$$r \geqslant r'_0(\delta) \equiv r'_0;$$

(que podemos suponer:

$$r'_0 = r_0);$$

es:

$$\frac{\varphi[\lambda(r)]}{\lambda(r)} + \mathcal{L} > 0;$$

de donde:

$$\varphi[\lambda(r)] + \mathcal{L}.\lambda(r) > 0;$$

pero:

$$\varphi[\lambda(r)] + \lambda(r).\delta \geqslant \varphi[\lambda(r)] + \lambda(r).[\mathcal{L} + \delta] =$$

luego:

$$= \varphi[\lambda(r)] + \lambda(r).\mathcal{L} + \lambda(r).\delta > \varphi[\lambda(r)] + \mathcal{L}.\lambda(r) > 0;$$

Tomemos:

$$\varphi[(r)] + \sigma . \lambda(r) > 0.$$

luego:

$$r' > r > r_0 = r_0(\delta) \geqslant 0;$$

$$\left| \int_r^{r'} a(r) . e^{-\lambda(r).(\sigma+ti)} . dr \right| = \left| \int_r^{r'} a(r) . e^{-\lambda(r) ti} . e^{-\lambda(r)\sigma} . dr \right|;$$

pero se tiene:

$$\frac{d\, S'(r;ti)}{dr} = a(r) . e^{\varphi[\lambda(r)]} . e^{\lambda(r) ti};$$

luego:

$$a(r) . e^{-\lambda(r) . ti} = \frac{d\, S'(r;ti)}{dr} e^{-[\lambda(r)]};$$

luego:

$$\left| \int_r^{r'} a(r) . e^{-\lambda(r).(x+iy)} . dr \right| = \left| \int_r^{r'} d\, S'(r;ti) . e^{-\varphi[\lambda(r)] - x.\lambda(r)} \right| \leq$$

$$\leq \left| \left[S'(r;iy) . e^{-\varphi[\lambda(r)] - x\lambda(r)} \right]_r^{r'} \right| +$$

(en todo esto cámbiese: $\underline{\sigma}$ por $\underline{x}$ y $\underline{t}$ por $\underline{y}$);

$$+ \left| \int_r^{r'} S'(r;iy) . d\, e^{-\varphi[\lambda(r)] - x.\lambda(r)} \right| \leq$$

$$\leq \left| S'(r';iy) \right| . e^{-\varphi[\lambda(r')] - x.\lambda(r')} +$$

$$+ \left| S(r';iy) \right| . e^{-\varphi[\lambda(r)] - x.\lambda(r)} +$$

$$+ \left| \int_r^{r'} S(r';iy) . d\, e^{-\varphi[\lambda(r)] - x.\lambda(r)} \right| <$$

$$< e^{\lambda(r').(\mathcal{L} + \frac{\delta}{2} - x)} + e^{\lambda(r).(\mathcal{L} + \frac{\delta}{2} - x)} +$$

$$+ \int_r^{r'} e^{\varphi(\lambda(r)) + \lambda(r).(\mathcal{L} + \frac{\delta}{2})} . \left| d\, e^{-\varphi(\lambda(r)) - x.\lambda(r)} \right| .$$

Pero según(a) es:

$$\frac{\varphi(x)}{x} > \sigma;$$

y:

$$\varphi'(x) + \sigma > 0;$$

para todo $\underline{x}$ tal que:

$$x \geqslant \lambda(r_0);$$

siendo:

$$r_0 \equiv r_0(\sigma);$$

por lo tanto:

$$\varphi[\lambda(r)] + \sigma.\lambda(r);$$

es positiva y monótona creciente con $\underline{r}$; para:

$$r \geqslant r_0 \equiv r_0(\sigma).$$

Además es:

$$\left| d\, e^{-\varphi[\lambda(r)] - \sigma.\lambda(r)} \right| = e^{-\varphi[\lambda(r)] - \sigma.\lambda(r)}. \left| \mathcal{D}\varphi[\lambda(r)].\mathcal{D}\lambda(r) + \right.$$
$$\left. + \sigma.\mathcal{D}\lambda(r) \right|.dr;$$

luego:

$$\left| \int_r^{r'} a(\rho).e^{-\lambda(\rho)(x+iy)}.dr \right| < e^{-\lambda(r')(x-\mathcal{L}-\frac{\delta}{2})} +$$
$$+ e^{-\lambda(r).(x-\mathcal{L}-\delta/2)} + \int_r^{r'} e^{\varphi[\lambda(r)] + \lambda(r).(\mathcal{L}+\frac{\delta}{2})}.$$
$$.\, e^{-\varphi[\lambda(r)] - x\lambda(r)} dr +$$

$$+ \mathcal{D}\lambda(r).\mathcal{D}\varphi[\lambda(r)] + \sigma.\mathcal{D}\lambda(r) =$$
$$= e^{-\lambda(r').(x-\mathcal{L}-\frac{\delta}{2})} + e^{-\lambda(r).(x-\mathcal{L}-\frac{\delta}{2})} +$$
$$+ \int_r^{r'} e^{-\lambda(r).(x-\mathcal{L}-\frac{\delta}{2})}.\mathcal{D}\lambda(r).\left| \mathcal{D}\varphi[\lambda(r)] + x \right|.dr <$$
$$< e^{-\lambda(r').(x-\mathcal{L}-\frac{\delta}{2})} + e^{-\lambda(r).(x-\mathcal{L}-\frac{\delta}{2})} +$$
$$+ \int_r^{r'} e^{-\lambda(r).(x-\mathcal{L}-\frac{\delta}{2})}.\mathcal{D}\lambda(r).(\mathcal{D}\varphi[\lambda(r)] + x).dr;$$

para;

$$r \geqslant r_0 \equiv r_0(\delta; x).$$

Como:

$$r' > r;$$

y:

$$x - \mathcal{L} - \frac{\delta}{2} \geqslant (\mathcal{L} + \delta) - \left(\mathcal{L} + \frac{\delta}{2}\right) = \frac{\delta}{2} > 0;$$

se tiene:

$$e^{-\lambda(r')\cdot\left(x - \mathcal{L} - \frac{\delta}{2}\right)} + e^{-\lambda(r)\left(x - \mathcal{L} - \frac{\delta}{2}\right)} <$$

$$< 2e^{-\lambda(r)\cdot\left(x - \mathcal{L} - \frac{\delta}{2}\right)} < 2e^{-\lambda(r)\cdot\frac{\delta}{2}};$$

luego:

$$\left| \int_r^{r'} a(r)\cdot e^{-\lambda(r)\cdot(x+iy)}\cdot dr \right| < 2e^{-\lambda(r)\cdot\frac{\delta}{2}} +$$

$$+ \int_r^{r'} e^{-\lambda(r)\left(x - \mathcal{L} - \frac{\delta}{2}\right)}\cdot \mathcal{D}\lambda(r)\cdot\left[\mathcal{D}\varphi[\lambda(r)] + x\right]\cdot dr;$$

como es:

$$e^{-\lambda(r)\cdot\left(x - \mathcal{L} - \frac{\delta}{2}\right)}\cdot \mathcal{D}\lambda(r)\cdot\left[\mathcal{D}\varphi[\lambda(r)] + x\right] \geqslant 0;$$

se tiene:

$$\int_r^{r'} e^{-\lambda(r)\left(x - \mathcal{L} - \frac{\delta}{2}\right)}\cdot \mathcal{D}\lambda(r)\cdot\left[\mathcal{D}\varphi[\lambda(r)] + x\right] \leq$$

$$\leq \int_r^{\infty} e^{-\lambda(r)\left(x - \mathcal{L} - \frac{\delta}{2}\right)}\cdot \mathcal{D}\lambda(r)\cdot\left[\mathcal{D}\varphi[\lambda(r)] + x\right]\cdot dr;$$

pero:

$$\mathcal{J} \equiv \int_r^{\infty} e^{-\lambda(r)\cdot\left(x - \mathcal{L} - \frac{\delta}{2}\right)}\cdot \mathcal{D}\lambda(r)\cdot\left[\mathcal{D}\varphi(\lambda(r)) + x\right]\cdot dr =$$

$$= x\int_r^{\infty} e^{-\lambda(r)\cdot\left(x - \mathcal{L} - \frac{\delta}{2}\right)}\cdot \mathcal{D}\lambda(r)\cdot dr +$$

$$+ \int_r^{\infty} e^{-\lambda(r)\cdot\left(x - \mathcal{L} - \frac{\delta}{2}\right)}\cdot \mathcal{D}\lambda(r)\cdot \mathcal{D}\varphi(\lambda(r))\cdot dr =$$

$$= -\frac{x}{x - \mathcal{L} - \frac{\delta}{2}}\cdot e^{\lambda(r)\cdot\left(x - \mathcal{L} - \frac{\delta}{2}\right)} + \int_r^{\infty} e^{-\lambda(r)\left(x - \mathcal{L} - \frac{\delta}{2}\right)}\cdot$$

$$\cdot\, \mathcal{D}\lambda(r)\cdot\left(x - \mathcal{L} - \frac{\delta}{2}\right);$$

poniendo:

$$y_1 \equiv -\frac{x}{x-\mathcal{L}-\frac{\delta}{2}} \cdot e^{-\lambda(r)\left(x-\mathcal{L}-\frac{\delta}{2}\right)};$$

$$y_2 \equiv \int_r^{\infty} e^{-\lambda(r)\cdot\left(x-\mathcal{L}-\frac{\delta}{2}\right)} \cdot \mathcal{D}\lambda(r) \cdot \mathcal{D}\varphi(\lambda(r)) \cdot dr;$$

se tiene que:

$$y \equiv y_1 + y_2.$$

Se verifica:

$$\left|\frac{x}{x-\mathcal{L}-\frac{\delta}{2}}\right| < \frac{|x|}{\frac{\delta}{2}};$$

para:

$$\frac{|x-(\mathcal{L}+\delta)+(\mathcal{L}+\delta)|}{|x-(\mathcal{L}+\frac{\delta}{2})|} \leq \frac{|x-(\mathcal{L}+\delta)|+|\mathcal{L}+\delta|}{|x-\mathcal{L}-\frac{\delta}{2}|};$$

$$x = \mathcal{L}+\delta;$$

se tiene:

$$\left|\frac{x}{x-\mathcal{L}-\frac{\delta}{2}}\right| = \frac{|x|}{\frac{\delta}{2}} = \frac{|\mathcal{L}+\delta|}{\frac{\delta}{2}};$$

luego:

$$y_1 = \frac{|\mathcal{L}+\delta|}{\frac{\delta}{2}} e^{-\lambda(r)\cdot\left(x-\mathcal{L}-\frac{\delta}{2}\right)} = \frac{|\mathcal{L}+\delta|}{\frac{\delta}{2}} e^{-\lambda(r)\cdot\frac{\delta}{2}};$$

y por ser:

$$\frac{|x|}{|x-\mathcal{L}-\frac{\delta}{2}|} = \left|\frac{(x-\mathcal{L}-\frac{\delta}{2})+(\mathcal{L}+\frac{\delta}{2})}{x-\mathcal{L}-\frac{\delta}{2}}\right| =$$

$$= \left|1+\frac{\mathcal{L}+\frac{\delta}{2}}{x-(\mathcal{L}+\frac{\delta}{2})}\right| < 1+\frac{|\mathcal{L}+\frac{\delta}{2}|}{\frac{\delta}{2}} = 1+\frac{|2\mathcal{L}+\delta|}{\delta};$$

es:

$$|y_1| < \left[1+\frac{|2\mathcal{L}+\delta|}{\delta}\right] \cdot e^{-\lambda(r)\cdot\left(x-\mathcal{L}-\frac{\delta}{2}\right)} \leq$$

$$\leq \left[1+\frac{|2\mathcal{L}+\delta|}{\delta}\right] \cdot e^{-\lambda(r)\cdot\frac{\delta}{2}}.$$

Como es:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\mathcal{D}\varphi(x)}{x^k} = 0;$$

para:

$$k > 0;$$

luego en:

$$y_2 \equiv \int_{\gamma}^{\infty} e^{-\lambda(\gamma).(x-\mathcal{L}-\frac{\delta}{2})}.\mathcal{D}\lambda(\gamma).\mathcal{D}\varphi(\lambda(\gamma))d\gamma;$$

dado un $\underline{\varepsilon > 0}$ existe un:

$$\gamma_0 \equiv \gamma_0(\varepsilon) \geqslant 0;$$

tal que para:

$$\lambda(\gamma) \geqslant \lambda(\gamma_0);$$

es:

$$\left|\frac{\mathcal{D}\varphi(\lambda(\gamma))}{\overline{\lambda(\gamma)}^k}\right| < \varepsilon;$$

luego:

$$|\mathcal{D}\varphi(\lambda(\gamma))| < \varepsilon.\overline{\lambda(\gamma)}^k;$$

pero como:

$$\lim_{\gamma \to \infty} \mathcal{D}\varphi(\lambda(\gamma)) = +\infty;$$

es:

$$\mathcal{D}\varphi(\lambda(\gamma)) > 0;$$

luego:

$$0 < \mathcal{D}\varphi(\lambda(\gamma)) < \varepsilon.\overline{\lambda(\gamma)}^k;$$

luego:

$$y_2 < \int_{\gamma}^{\infty} e^{-\lambda(\gamma).(x-\mathcal{L}-\frac{\delta}{2})}.\mathcal{D}\lambda(\gamma).\varepsilon.\overline{\lambda(\gamma)}^k.d\gamma =$$

$$= \frac{\varepsilon}{x-\mathcal{L}-\frac{\delta}{2}}.\int_{\gamma}^{\infty} e^{-\lambda(\gamma).(x-\mathcal{L}-\frac{\delta}{2})}.d\left[\lambda(\gamma).(x-\mathcal{L}-\frac{\delta}{2})\right].\overline{\lambda(\gamma)}^k;$$

si ponemos:

$$y \equiv \lambda(\gamma).(x-\mathcal{L}-\frac{\delta}{2});$$

se tiene:

$$y_2 < \frac{\varepsilon}{x-\mathcal{L}-\frac{\delta}{2}} \int_{\gamma_\lambda}^{\infty} e^{-y}\frac{y^k}{(x-\mathcal{L}-\frac{\delta}{2})^k}.dy =$$

$$= \varepsilon.(x-\mathcal{L}-\frac{\delta}{2})^{-(k+1)}.\int_{\lambda(\gamma).(x-\mathcal{L}-\frac{\delta}{2})}^{\infty} e^{-y}.y^k.dy <$$

$$< \varepsilon.\left(\frac{\delta}{2}\right)^{-(k+1)}.\int_0^{\infty} y^k.e^{-y}.dy \equiv \frac{\varepsilon}{\left(\frac{\delta}{2}\right)^{k+1}}k!;$$

luego:

$$\left| \int_{r}^{r'} a(r).e^{-\lambda(r).(x+iy)}.dr \right| < 2.e^{-\lambda(r).\frac{\delta}{2}} + \frac{\varepsilon k!}{\left(\frac{\delta}{2}\right)^{k+1}} + \left[1+\frac{|2\mathcal{L}+\delta|}{\delta}\right].e^{-\lambda(r).\frac{\delta}{2}};$$

luego:

$$\left| \int_{r}^{r'} a(r).e^{-\lambda(r).(x+iy)}.dr \right| < \frac{\varepsilon k!}{\left(\frac{\delta}{2}\right)^{k+1}} + \left[3+\frac{|2\mathcal{L}+\delta|}{\delta}\right].e^{-\lambda(r)\frac{\delta}{2}}.$$

El segundo miembro de esta desigualdad es independiente de $\underline{\underline{x}}$ y de $\underline{\underline{t}}$ y como $\underline{\underline{\varepsilon}}$ puede hacerse tan pequeña como se quiera, y por ser:

$$\lim_{r\to\infty}\left[\frac{\varepsilon k!}{\left(\frac{\delta}{2}\right)^{k+1}} + \left(3+\frac{|2\mathcal{L}+\delta|}{\delta}\right).e^{-\lambda(r).\frac{\delta}{2}}\right] = 0;$$

por lo tanto:

para todo $\underline{\varepsilon > 0}$ existe un:

$$r_0 \equiv r_0(\varepsilon);$$

tal que si es:

$$r \geqslant r_0 \equiv r_0(\varepsilon);$$

y cualesquiera que sean $\underline{x}$ e $\underline{y}$ se tiene:

$$\left| \int_{r}^{r'} a(r).e^{-\lambda(r).(x+iy)}.dr \right| < \varepsilon.$$

Luego la integral:

$$\int_0^\infty a(r).e^{-\lambda(r)t}.dr;$$

converge uniformemente para:

$$x \geqslant \mathcal{L}+\delta;$$

luego:

$$\mathcal{C} \leq \mathcal{L}.$$

Veamos ahora que es:

$$\mathcal{C} \geq \mathcal{L}.$$

Hemos visto que si la integral:

$$\int_0^\infty a(r).e^{-\lambda(r)t}.dr;$$

converge uniformemente para: $x > x_0$;

se tiene:

$$\left| S(\gamma; x_0 + iy) \right| = \left| \int_0^{\gamma} a(\gamma) . e^{-\lambda(\gamma).(x_0+iy)} . d\gamma \right| < S;$$

donde $\underline{S}$ es una cierta constante finita, independiente de $\underline{x}$ y de $\underline{y}$.

Ahora bien:

$$\left| \int_0^{\gamma} a(\gamma) . e^{\varphi[\lambda(\gamma)] - \lambda(\gamma).iy} . d\gamma \right| =$$

$$= \left| \int_0^{\gamma} (d\, S(\gamma; x_0 + iy)) . e^{\varphi[\lambda(\gamma)] + x_0 . \lambda(\gamma)} \right| ;$$

pues:

$$a(\gamma) . e^{\varphi[\lambda(\gamma)] - iy\lambda(\gamma)} =$$

$$= d\left(S(\gamma; x_0 + iy)\right) . e^{\varphi[\lambda(\gamma)] + x_0 . \lambda(\gamma)} ;$$

luego:

$$\left| \int_0^{\gamma} a(\gamma) . e^{\varphi[\lambda(\gamma)] - iy.\lambda(\gamma)} . d\gamma \right| \leq \left| S(\gamma; x_0 + iy) . e^{\varphi[\lambda(\gamma)] + x_0 . \lambda(\gamma)} \right| +$$

$$+ \int_0^{\gamma} S(\gamma; x_0 + iy) . d e^{\varphi[\lambda(\gamma)] + x_0 . \lambda(\gamma)} \Big| <$$

pero: $< S . e^{\varphi[\lambda(\gamma)] + x_0 . \lambda(\gamma)} + S . \int_0^{\gamma} \left| d\, e^{\varphi[\lambda(\gamma)] + x_0 . \lambda(\gamma)} \right| ;$

y a partir de un: $\lambda(\gamma) > 0$; $\gamma_0 \equiv \gamma_0(x_0)$ es: $\varphi[\lambda(\gamma)] + x_0 . \lambda(\gamma) > 0$;

y como la derivada de: $\varphi[\lambda(\gamma)] + x_0 . \lambda(\gamma)$;

con respecto a $\underline{\lambda(\gamma)}$ $\varphi'[\lambda(\gamma)] + x_0 > 0$;

a partir de: $\gamma_0 \equiv \gamma_0(x_0)$; se tiene que:

$\varphi[\lambda(\gamma)] + x_0 . \lambda(\gamma)$

es creciente positiva y tiene $\underline{a + \infty}$, para $\underline{\gamma \longrightarrow +\infty}$; pues:

$$\frac{\varphi[\lambda(\gamma)] + x_0 . \lambda(\gamma)}{\lambda(\gamma)} = \frac{\varphi[\lambda(\gamma)]}{\lambda(\gamma)} + x_0 \longrightarrow +\infty.$$

Por lo tanto es:

$$\int_0^{\gamma} \left| d\, e^{\varphi[\lambda(\gamma)] + x_0 . \lambda(\gamma)} \right| = \int_0^{\gamma_0} \left| d\, e^{\varphi[\lambda(\gamma)] + x_0 . \lambda(\gamma)} \right| +$$

$$+ \int_{\gamma_0}^{\gamma} \left| d\, e^{\varphi[\lambda(\gamma)] + x_0 . \lambda(\gamma)} \right| = \int_0^{\gamma_0} \left| d\, e^{\varphi[\lambda(\gamma)] + x_0 . \lambda(\gamma)} \right| +$$

$$+ \int_{\gamma_0}^{\gamma} \left| e^{\varphi[\lambda(\gamma)] + x_0 . \lambda(\gamma)} . \left[\varphi'[\lambda(\gamma)] + x_0 \right] . \lambda'(\gamma) \right| . d\gamma ;$$

y por ser:

$$\begin{cases} e^{\varphi[\lambda(r)]+x_0.\lambda(r)} > 0 \\ \varphi'[\lambda(r)]+x_0 > 0 \; ; \quad \text{para } \underline{r \geqslant r_0}; \\ \lambda'(r) \geqslant 0 ; \end{cases}$$

se tiene que:

$$\int_{r_0}^{r} \left| e^{\varphi[\lambda(r)]+x_0.\lambda(r)}.\left[\varphi'(\lambda(r))+x_0\right].\left[\lambda'(r)\right]\right| . dr =$$

$$= \int_{r_0}^{r} e^{\varphi[\lambda(r)]+x_0.\lambda(r)}.\left[x_0+\varphi'(\lambda(r)\right].\lambda'(r).dr =$$

$$= \left[e^{\varphi[\lambda(r)]+x_0.\lambda(r)}\right]_{r_0}^{r} = e^{\varphi[\lambda(r)]+x_0.\lambda(r)} - e^{\varphi[\lambda(r_0)]+x_0.\lambda(r_0)} < e^{\varphi[\lambda(r)]+x_0.\lambda(r)} ;$$

luego:

$$\int_{r_0}^{r} \left| d\, e^{\varphi[\lambda(r)]+x_0\lambda(r)}\right| < \int_{0}^{r_0} \left| d\, e^{\varphi[\lambda(r)]+x_0.\lambda(r)} + \right.$$

$$+ e^{\varphi[\lambda(r)]+x_0.\lambda(r)} ;$$

como la integral:

$$\int_{0}^{r_0} \left| d\, e^{\varphi[\lambda(r)]+x_0.\lambda(r)}\right| ;$$

tiene un valor finito por ser fijo $\underline{r_0}$; y es;

$$\lim_{r \to \infty} \left\{ e^{\varphi[\lambda(r)]+x.\lambda(r)} \right\} = +\infty ;$$

tomando r_0 suficientemente grande pero fijo:

$$\int_{0}^{r_0} \left| d\, e^{\varphi[\lambda(r)]+x_0.\lambda(r)}\right| < e^{\varphi[\lambda(r)]+x_0.\lambda(r)} ;$$

luego:

$$\int_{0}^{r} \left| d\, e^{\varphi[\lambda(r)]+x_0\lambda(r)}\right| < 2.e^{\varphi[\lambda(r)]+x_0.\lambda(r)} ;$$

para: $\quad r \geqslant r_0 \equiv r_0(x_0)$.

luego:

$$\left| \int_{0}^{r} a(r).e^{\varphi[\lambda(r)]-\lambda(r)y^i} dr \right| < S.e^{\varphi[\lambda(r)]+x_0.\lambda(r)} +$$

$$+ S\, 2 e^{\varphi[\lambda(r)]+x_0.\lambda(r)} =$$

$$= 3\, S.e^{\varphi[\lambda(r)]+x_0.\lambda(r)}$$

Se S un número positivo arbitrario pero fijo.

Se tiene que:

$$\lim_{r \to \infty} \frac{3.S.e^{\varphi[\lambda(r)]+x_0.\lambda(r)}}{e^{\varphi[\lambda(r)]+(x_0+\delta).\lambda(r)}} = 0 ;$$

luego a partir de un valor fijo de $\underline{r}$ pero suficientemente grande es:

$$3.\delta.e^{\varphi[\lambda(r)]+x_0.\lambda(r)} < e^{\varphi[\lambda(r)]+(x_0+\delta).\lambda(r)};$$

luego:

$$\left|\int_0^r a(r).e^{\varphi[\lambda(r)]-\lambda(r).iy}.dr\right| < e^{\varphi[\lambda(r)]+(x_0+\delta).\lambda(r)};$$

y dividiendo ambos miembros por:

$$e^{\varphi[\lambda(r)]} \quad ; es;$$

$$\left|\int_0^r a(\rho).e^{\varphi[\lambda(\rho)]-\varphi[\lambda(r)]-\lambda(\rho).iy}.d\rho\right| <$$

$$< e^{(x_0+\delta).\lambda(r)}.$$

luego dado un $\underline{\delta > 0}$ existe un:

$$r_0 \equiv r_0(\delta);$$

tal que para

$$r \geqslant r_0 \equiv r_0(\delta) \quad ; es:$$

$$T(r) \leq e^{\lambda(r).(x_0+\delta)};$$

se tiene que:

$$\frac{\log T(r)}{\lambda(r)} \leq x_0+\delta;$$

y por lo tanto:

$$\overline{\lim_{r\to\infty}}.\frac{\log T(r)}{\lambda(r)} \leq x_0+\delta;$$

luego:

$$\mathcal{A} \leq \mathcal{B};$$

y como era

$$\mathcal{A} \geqslant \mathcal{B};$$

resulta que:

$$\mathcal{A} = \mathcal{B};$$

es decir:

$$\mathcal{B} = \overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\log T(r)}{\lambda(r)}.$$

Pasemos a la demostración del teorema X.---

Demostración:

Pongamos:

$$S(r;t) \equiv \int_0^r a(\rho).e^{-\lambda(\rho).t}.d\rho.$$

luego:

$$T(r) \geqslant |S(r;iy)|.$$

Pongamos:

$$\overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\log T(r)}{\lambda(r)} \equiv \mathcal{L};$$

y supongamos que sea:

$$\mathcal{L} = \phi;$$

y es:

$$\mathcal{L} \geqslant 0.$$

Si es:

$$\lim_{r\to\infty} T(r) = 0;$$

prefijado arbitrariamente un $\delta > 0$; si es:

$$r \geqslant r_0 \equiv r_0(\delta);$$

se tiene que:

$$T(r) < \delta;$$

tomando:

$$r' > r \geqslant r_0;$$

luego es:

$$\left|\int_r^{r'} a(\rho).e^{-\lambda(\rho)iy}.d\rho\right| = |S(r';iy) - S(r;iy)| \leq$$

luego:

$$\leq |S(r';iy)| + |S(r;iy)| \leq T(r') + T(r) < 2\delta;$$

$$\left|\int_r^{r'} a(\rho).e^{-iy\lambda(\rho)}.d\rho\right| < 2\delta;$$

para:

$$r' > r > r_0;$$

y para todo t del intervalo:

$$-\infty < t < +\infty;$$

es decir, la integral:

$$\int_0^\infty a(r).e^{-\lambda(r).t}.dr;$$

converge uniformemente para: $x = 0$; por lo tanto es:

$$C \leq 0$$

contra la hipótesis que sea:

$$C > 0$$

Como es:

$$T(r) \geqslant 0;$$

debe ser:

$$\overline{\lim_{r\to\infty}} T(r) \geqslant 0;$$

pero la igualdad:

$$\overline{\lim_{r\to\infty}} T(r) = 0;$$

no puede verificarse, pues de lo contrario sería:

$$\mathcal{L} \leq 0$$

contra lo supuesto; luego es:

$$\overline{\lim_{r\to\infty}} T(r) > 0;$$

por lo tanto el límite superior del $\log T(r)$ no puede ser $= \infty$.

y por lo tantosi $\mathcal{L}$ es finito debe ser: $\mathcal{L} \geqslant 0$.

Sea δ un número arbitrariopositivo, probaremos que la integral converge uniformemente para: $x \geqslant \mathcal{L} + \delta$.

Se tiene que para:

$$r \geqslant r_0 \equiv r_0(\delta); \text{ es:}$$

luego:

$$\frac{\log T(r)}{\lambda(r)} < \mathcal{L} + \frac{\delta}{2};$$

$$T(r) < e^{\lambda(r).\left(\mathcal{L} + \frac{\delta}{2}\right)};$$

siempre que:

$$\lambda(r) > 0;$$

cosa siempre posible.

Además se tiene que:

$$\left| \int_r^{r'} a(r).e^{-\lambda(r)(x+iy)} dr \right| = \left| \int_r^{r'} a(r).e^{-\lambda(r)iy}.e^{-\lambda(r)iy}.e^{-\lambda(r)x}.dr \right| =$$

$$= \left| \int_r^{r'} [dS(r;iy)].e^{-\lambda(r)x} \right| = \left| \left[S(r;iy).e^{-x\lambda(r)} \right]_r^{r'} + \right.$$

$$\left. + \int_r^{r'} S(r;iy).e^{-\lambda(r)x}.x.\lambda'(r).dr \right| =$$

$$= \left| -\int_r^{r'} S(r;iy).de^{-x\lambda(r)} \right| + \left| S(r;iy).e^{-x\lambda(r)} \right]_r^{r'} \Bigg| \leq$$

$$\leq \left| S(r';iy).e^{-x\lambda(r')} \right| + \left| S(r;iy).e^{-xy(r)} \right. +$$

$$+ \int_r^{r'} |S(r;iy)|.\left| de^{-x\lambda(r)} \right|;$$

pero:

$$\left.\begin{array}{l} |S(r';iy)| \leq T(r') \\ |S(r;iy)| \leq T(r) \end{array}\right\}$$

y:

luego:

$$|S(r';iy)|.e^{-x\lambda(r')} + |S(r;iy)|e^{-x.\lambda(r)} \leq$$

$$\leq T(r').e^{-x\lambda(r')} + T(r).e^{-x.\lambda(r)} \quad ;$$

luego:

$$\int_{\gamma}^{\gamma'} |S(x+iy)| \cdot |d e^{-x\lambda(\gamma)}| < \int_{\gamma}^{\gamma'} T(\gamma) \cdot |d e^{-x\lambda(\gamma)}|;$$

luego:

$$\left| \int_{\gamma}^{\gamma'} a(\gamma) \cdot e^{-\lambda(\gamma)} \cdot (x+iy) \cdot d\tau \right| \leq \int_{\gamma}^{\gamma'} T(\gamma) \cdot |d e^{-x\lambda(\gamma)}| + T(\gamma') \cdot e^{-x\lambda(\gamma')} + T(\gamma) \cdot e^{x\lambda(\gamma)} <$$

$$< \int_{\gamma}^{\gamma'} e^{\lambda(\gamma)\cdot(\mathcal{L}+\frac{\delta}{2})} \cdot d e^{-x\lambda(\gamma)} + e^{\lambda(\gamma')\cdot(\mathcal{L}+\frac{\delta}{2})} e^{-x\lambda(\gamma')} +$$

$$+ e^{\lambda(\gamma)\cdot(\mathcal{L}+\frac{\delta}{2})} \cdot e^{-x\lambda(\gamma)} =$$

$$= \int_{\gamma}^{\gamma'} e^{\lambda(\gamma)\cdot(\mathcal{L}+\frac{\delta}{2})} \cdot |d e^{-x\lambda(\gamma)}| + e^{-\lambda(\gamma')\cdot(x-\mathcal{L}-\frac{\delta}{2})} +$$

$$+ e^{-\lambda(\gamma)\cdot(x-\mathcal{L}-\frac{\delta}{2})} < \int_{\gamma}^{\gamma'} e^{\lambda(\gamma)\cdot(\mathcal{L}+\frac{\delta}{2})} \cdot |d e^{-x\lambda(\gamma)}| +$$

$$+ 2 \cdot e^{-\lambda(\gamma)\cdot(x-\mathcal{L}-\frac{\delta}{2})} \leq 2 e^{-\lambda(\gamma)\cdot\frac{\delta}{2}} + \int_{\gamma}^{\gamma'} e^{\lambda(\gamma)\cdot(\mathcal{L}+\delta)} |d e^{-x\lambda(\gamma)}|;$$

pero es:

$$e^{\lambda(\gamma)\cdot(\mathcal{L}+\frac{\delta}{2})} \cdot d e^{-x\lambda(\gamma)} = e^{\lambda(\gamma)\cdot(\mathcal{L}+\frac{\delta}{2})} e^{-x\lambda(\gamma)} \cdot x \cdot \lambda'(\gamma) \cdot d\tau =$$

$$= e^{-\lambda(\gamma)\cdot(x-\mathcal{L}-\frac{\delta}{2})} \cdot \lambda'(\gamma) \cdot x \cdot d\tau;$$

luego:

$$\int_{\gamma}^{\gamma'} e^{\lambda(\gamma)\cdot(\mathcal{L}+\frac{\delta}{2})} \cdot |d e^{-x\lambda(\gamma)}| =$$

$$= \left| -\frac{x}{x-\mathcal{L}-\frac{\delta}{2}} \int_{\gamma}^{\gamma'} e^{-\lambda(\gamma)\cdot(x-\mathcal{L}-\frac{\delta}{2})} \cdot d\left[\lambda(\gamma)\cdot(x-\mathcal{L}-\frac{\delta}{2})\right] \right| =$$

$$= \left| \frac{x}{x-\mathcal{L}-\frac{\delta}{2}} \right| \cdot \left[-e^{-\lambda(\gamma)\cdot(x-\mathcal{L}-\frac{\delta}{2})} + e^{-\lambda(\gamma)\cdot(x-\mathcal{L}-\frac{\delta}{2})} \right] =$$

$$= \left| \frac{x}{x-\mathcal{L}-\frac{\delta}{2}} \right| \cdot \left[e^{-\lambda(\gamma)\cdot(x-\mathcal{L}-\frac{\delta}{2})} - e^{-\lambda(\gamma)\cdot(x-\mathcal{L}-\frac{\delta}{2})} \right];$$

pero:

$$\left| \frac{x}{x-\mathcal{L}-\frac{\delta}{2}} \right| = \left| 1 + \frac{\mathcal{L}+\frac{\delta}{2}}{x-\mathcal{L}-\frac{\delta}{2}} \right| \leq 1 + \frac{|2\mathcal{L}+\delta|}{\delta};$$

luego:

$$\int_{\gamma}^{\gamma'} e^{\lambda(\gamma)\cdot(\mathcal{L}+\frac{\delta}{2})} \cdot |d e^{-x\lambda(\gamma)}| < \frac{x}{x-\mathcal{L}-\frac{\delta}{2}} e^{\lambda(\gamma)\cdot(x-\mathcal{L}-\frac{\delta}{2})} \leq$$

$$\leq \frac{x}{x-\mathcal{L}-\frac{\delta}{2}} e^{-\lambda(\gamma)\cdot\frac{\delta}{2}} \leq \left(1+\frac{2\mathcal{L}+\delta}{\delta}\right) \cdot e^{-\lambda(\gamma)\frac{\delta}{2}} = 2(1+\mathcal{L}) \cdot e^{-\lambda(\gamma)\frac{\delta}{2}};$$

luego:

$$\left| \int_{\gamma}^{\gamma'} a(\gamma) \cdot e^{-\lambda(\gamma)} \cdot (x+iy)\, d\tau \right| < 2 e^{-\lambda(\gamma)\cdot\frac{\delta}{2}} + 2(1+\mathcal{L}) e^{-\lambda(\gamma)\frac{\delta}{2}} =$$

$$= e^{-\lambda(\gamma)\frac{\delta}{2}} \cdot (4+2\mathcal{L});$$

el segundo miembro de esta igualdad tiende a $\underline{0}$ si $\underline{r \longrightarrow \infty}$, es indépendiente de $\underline{x}$, $\underline{y}$ y $\underline{r'}$; luego dado arbitrariamente un $\underline{\varepsilon > 0}$; por ser

$$\lim_{r \longrightarrow \infty} \lambda(r) = +\infty;$$

a partir de un:

$$r \geqslant r_0 \equiv r_0(\varepsilon);$$

será:

$$\lambda(r) > \frac{2}{\delta} \cdot \log\left(\frac{4+2\mathcal{L}}{\varepsilon}\right);$$

luego:

$$\lambda(r) \cdot \frac{\delta}{2} > -\log\left(\frac{\varepsilon}{4+2\mathcal{L}}\right);$$

luego:

$$-\lambda(r) \cdot \frac{\delta}{2} < \log\left(\frac{\varepsilon}{4+2\mathcal{L}}\right);$$

luego:

$$e^{-\lambda(r) \cdot \frac{\delta}{2}} < \frac{\varepsilon}{4+2\mathcal{L}};$$

luego:

$$2 \cdot e^{-\lambda(r) \frac{\delta}{2}} \cdot (2+\mathcal{L}) > \varepsilon;$$

luego: para todo:

$$r \geqslant r_0 \equiv r_0(\varepsilon) \geqslant 0;$$

y cualquiera que sea: $\underline{r' > r}$, $\underline{y}$, $\underline{x \geqslant \mathcal{L} + \delta}$, será :

$$\left| \int_r^{r'} a(r) \cdot e^{-\lambda(r) \cdot (x+iy)} \cdot dr \right| < \varepsilon;$$

luego la integral:

$$\int_0^\infty a(r) \cdot e^{-\lambda(r) \cdot \xi} \, dr;$$

converge uniformemente en el semiplano:

$$x \geqslant \mathcal{L} + \delta;$$

es decir:

$$\mathcal{C} \leq \mathcal{L}.$$

Probaremos ahora que si la integral:

$$\int_0^\infty a(r) \cdot e^{-\lambda(r) \cdot \xi} \, dr;$$

converge uniformemente en el semiplano:

$$x \geqslant x_0 > 0;$$

dado arbitrariamente un $\underline{\delta > 0}$, existe un: $r_0 \equiv r_0(\delta)$;

tal que si es:

$$r \geqslant r_0 \equiv r_0(\delta);$$

es:

$$\frac{\log T(r)}{\lambda(r)} \leqslant x_0 + \delta;$$

es decir: $\mathcal{L} \leq \mathcal{C}$.

En efecto bajo tal hipótesis existe un r_0 fijo tal que para todo: $r \geqslant r_0$ y cualquiera que sea y (real) es:

$$\left| \int_{r_0}^{r} a(r).e^{-\lambda(r).(x_0+iy)}.dr \right| < 1;$$

luego:

$$\left| S(r;x_0+iy) \right| \leq \left| \int_{r}^{r_0} a(r).e^{-\lambda(r).(x_0+iy)}.dr \right| +$$

$$+ \left| \int_{r_0}^{r} a(r).e^{-\lambda(r).(x_0+iy)}.dr \right| <$$

$$< \left| \int_{0}^{r_0} a(r).e^{-\lambda(r).(x_0+iy)}.dr \right| + 1 \leq$$

$$\leq \int_{0}^{r_0} |a(r)|.e^{-\lambda(r).x_0}.dr + 1 \leq$$

$$\leq \int_{0}^{r_0} |a(r)|.e^{-\lambda(0).x_0}.dr + 1 = e^{-\lambda(0).x_0} \int_{0}^{r_0} |a(r)|\,dr +$$

$$+ 1 \leq \int_{0}^{r_0} |a(r)|.\,dr + 1;$$

como es finito r_0 y la integral:

$$\int_{0}^{r_0} |a(r)|.\,dr;$$

es (por definición) tambien finita, se tiene:

$$\left| S(r;x_0+iy) \right| < S \equiv \int_{0}^{r_0} |a(r)|\,dr + 1;$$

para:

$$r \geqslant r_0 \equiv r_0 \quad (1)$$

Sea ahora:

$$r \leq r_0;$$

luego:

$$\left| S(r;x_0+iy) \right| = \left| \int_{0}^{r} a(r).e^{-\lambda(r).(x_0+iy)}\,dr \right| \leq$$

$$\leq \int_{0}^{r} |a(r)|.e^{-\lambda(r).x_0}.dr \leq \int_{0}^{r} |a(r)|.e^{-\lambda(0).x_0}.dr \leq$$

$$\leq \int_{0}^{r} |a(r)|\,dr \leq \int_{0}^{r_0} |a(r)|\,dr;$$

lupgra todo r y para todo y es:

$$\left| S(r;x_0+iy) \right| < S \equiv \text{constante}.$$

Ahora bien, es:

$$\left| S(r,iy) \right| \equiv \left| \int_{0}^{r} a(r).e^{-\lambda(r).iy}.dr \right|;$$

y como es:

$$dS(r;z) = a(r).e^{-\lambda(r).(x_0+iy}.dr = a(r).e^{-\lambda(r)\,yi}.dr.e^{-x_0.\lambda(r)};$$

se tiene:

$$d\,S(r,t)\,e^{x_0\lambda(r)} = a(r).e^{-\lambda(r)\,iy}.dr;$$

luego:

$$|S(r,iy)| = \left|\int_0^r dS(r,t).e^{x_0\lambda(r)}\right| \leq$$

$$\leq |S(r,t)e^{x_0.\lambda(r)}| + \left|\int_0^r S(r,t).e^{x_0\lambda(r)}.x_0.\lambda'(r).dr\right| <$$

$$< S.e^{x_0\lambda(r)} + S.\int_0^r |d\,e^{x_0\lambda(r)}| =$$

$$= S.e^{x_0\lambda(r)} + S.e^{x_0\lambda(r)} - S.e^{x_0\lambda(0)} \leq 2.S.e^{x_0.\lambda(r)};$$

y por ser: $2.S.e^{x_0\lambda(r)} < e^{\lambda(r).(x_0+\delta)}$;

tomando:

$$r \geqslant r_0 \equiv r_0(\delta) \geqslant 0;$$

se tiene que:

$$|S(r,iy)| < e^{\lambda(r).(x_0+\delta)}$$

luego dado un $\delta > 0$, arbitrario, existe un valor positivo $r_0 \equiv r_0(\delta)$ tal que:

$$r \geqslant r_0 \equiv r_0(\delta);\ \text{es}$$

para:

$$T(r) \leq e^{\lambda(r).(x_0+\delta)};$$

de donde:

$$\frac{\log T(r)}{\lambda(r)} \leq x_0 + \delta;$$

y luego:

$$\overline{\lim_{r\to\infty}}.\frac{\log T(r)}{\lambda(r)} \leq x_0 + \delta;$$

luego:

$$\mathcal{L} \leq \mathcal{C};$$

y como era:

$$\mathcal{L} \geqslant \mathcal{C};$$

se tiene que:

$$\mathcal{L} = \mathcal{C} > 0;$$

lo que demuestra el teorema X .—

El orden de $f(\tau)$ para $R(\tau)=\beta$ y para $R(\tau)\geq\beta$.--

Supongamos que $f(\tau)$ es una función de $\tau=x+iy$ regular para ~~$R(\tau)\geq\beta$~~ $x>\gamma$.

Si es:

$$\beta>\gamma;$$

y ξ es un número real cualquiera, puede suceder que sea cierto o no que:

$$(1) \qquad f(x+iy)=O(y^{\xi})\equiv O(|y|^{\xi});$$

esto es que:

$$(1') \qquad \left|\frac{f(x+iy)}{y^{\xi}}\right|<K\equiv \text{constante};$$

cuando:

$$x=\beta \quad ; \quad y : y\to\infty;$$

esto es: que para valores suficientemente grandes de y sea:

$$\left|\frac{f(\beta+iy)}{y^{\xi}}\right|<K$$

Si la igualdad (1) es cierta para un valor particular de ξ, también es cierta para otro valor ξ' tal que:

$$\xi'<\xi$$

En efecto: si es:

$$\xi'>\xi;$$

se tiene:

$$\left|\frac{f(x+iy)}{y^{\xi'}}\right|=\frac{|f(x+iy)|}{|y|^{\xi'}}<\frac{|f(x+iy)|}{|y|^{\xi}}=\left|\frac{f(x+iy)}{y^{\xi}}\right|<K;$$

esto es:

$$f(x+iy)=O(|y|^{\xi'})$$

La igualdad (1) puede ser cierta para cualquier valor ξ, o para algunos cierta y para otras falsa, o bien puede ser falsa para todo ξ . Por un razonamiento clásico se deduce la existencia de un número real μ tal que la igualdad (1) se verifique para:

$$\xi>\mu;$$

y no se verifica para:

$$\xi<\mu.$$

En el primer caso escribiremos convencionalmente:

$$\mu=-\infty;$$

y en el tercero:

$$\mu=+\infty.$$

Se obtiene de este modo una función $\mu(x)$ definida para $x>\gamma$ y diremos que $\mu(\beta)$ es el orden de $f(\tau)$ para $x=\beta$.

Cuando μ sea:

$$\mu(\beta)=\phi;$$

diremos que: $f(z)$ es de orden finito para $x = \beta$.

Además, la igualdad (1) puede o no verificarse uniformemente para $x \geq \beta$; esto es: si existe un número K fijo independientemente de x y de y) tal que para valores suficientemente grandes en módulo es:

$$\left| \frac{f(x+iy)}{y^{\xi}} \right| < K;$$

cualquiera que sea:

$$x \geq \beta;$$

diremos que la (1) se verifica uniformemente para: $x \geq \beta$;

y en caso contrario que no se verifica uniformemente. Si aplicamos el clásico raciocinio de la cortadura se obtiene una función $\nu(\beta)$ a la cual llamaremos el orden de $f(z)$ para $x \geq \beta$

Evidentemente es:

$$\nu(\beta) \geq \mu(\beta).$$

Cuando sea:

$$\nu(\beta) = \infty;$$

diremos que $f(z)$ es de orden finito para $x \geq \beta$.

Si $f(z)$ es de orden finito para: $x \geq \beta + \varepsilon$,

para todo $\varepsilon > 0$, pero no necesariamente para: $x \geq \beta$;

diremos que: $f(z)$ es de orden finito para $x > \beta$.

Finalmente, la igualdad (1), puede no verificarse uniformemente para: $x \geq \beta_1$; pero si verificarse uniformemente para: $\beta_1 \leq x \leq \beta_2$.

Entonces como se hizo más arriba, se define el orden de $f(z)$ para:

$$\beta_1 \leq x \leq \beta_2.$$

Si la (1) se verifica uniformemente para:

$$\beta_1 - \varepsilon < x \leq \beta_2 - \varepsilon$$

para todo $\varepsilon > 0$, pero no necesariamente para:

$$\beta_1 \leq x \leq \beta_2;$$

se definiría análogamente el orden de $f(z)$ para:

$$\beta_1 < x < \beta_2.$$

En esta teoría es de capital importancia el siguiente teorema debido a Lindelöf; a saber:

(*) Este es el único teorema no original (debido a Lindelöf) entre todos los del texto.

(*) Teorema): Si se cumplen las condiciones:

1º) $f(z)$ es regular y de orden finito para:

$$\beta_1 \leq x \leq \beta_2;$$

2º)

$$f(z) = O\left(|y|^{k_1}\right);$$

para:

$$x = \beta_1;$$

3º)

$$f(z) = O\left(|y|^{k_2}\right);$$

para:

$$x = \beta_2;$$

en tales hipótesis es:

$$f(z) = O\left(|y|^{k(x)}\right)$$

uniformemente para:

$$\beta_1 \leq x \leq \beta_2$$

siendo $k(x)$ la función lineal de x que toma el valor k_1 para:

$$x = \beta_1;$$

y toma el valor k_2 para:

$$x = \beta_2 \text{ »}$$

Calculemos previamente la función $k(x)$.

En efecto se tiene que:

$$\frac{k(x) - k_1}{k_1 - k_2} = \frac{x - \beta_1}{\beta_1 - \beta_2};$$

luego:

$$k(x) = x\,\frac{k_1 - k_2}{\beta_1 - \beta_2} + \left(k_1 - \beta_1 \cdot \frac{k_1 - k_2}{\beta_1 - \beta_2}\right)$$

Caso particular:

si es:

$$k_1 = k_2 = 0;$$

es:

$$k(x) \equiv 0$$

luego es:

$$f(z) = O(1)$$

para:

$$x = \beta_1;$$

y para:

$$x = \beta_2$$

Luego se puede enunciar el siguiente corolario:

«Si $f(z)$ es de orden finito, para:

$$\beta_1 \leq x \leq \beta_2;$$

y está acotada sobre las rectas:

$$x = \beta_1$$

y:

$$x = \beta_2$$

dicha función $f(z)$ estará acotada en la faja del plano comprendido entre dichas rectas paralelas al eje imaginario»

Para demostrar el teorema podemos fijarnos en el caso que sea:

$$y > 0.$$

Primeramente, supongamos que:

$$k_1 = 0 \quad ; \quad y \quad k_2 = 0;$$

de modo que:

$$k(x) \equiv 0;$$

y:

$$f(z) = O(1);$$

para:

$$x = \beta_1;$$

y para:

$$x = \beta_2.$$

Sea M el extremo superior de los valores de $|f(z)|$ sobre estas rectas:

$$x = \beta_1;$$
$$x = \beta_2;$$

y:

y sobre el segmento ~~siguiente~~:

$$[\beta_1; \beta_2]$$

del eje real.

Pongamos:

$$g(z) \equiv e^{\varepsilon . z . i} . f(z) \quad ; \quad (\varepsilon > 0) ;$$

luego es:

(2) $$|g(z)| = |e^{\varepsilon . (x+iy) i} . f(z)| =$$

$$= e^{-\varepsilon y} . |f(z)| \leq |f(z)| ;$$

de modo que es:

$$g(z) = O.(1) ;$$

para:

$$x = \beta_1 ;$$

y para:

$$x = \beta_2 .$$

Como $f(z)$ es de orden finito para:

$$\beta_1 < x \leq \beta_2 ;$$

existe un valor fijo $\underline{\xi}$ independiente de $\underline{x}$ tal que para todo $\underline{x}$ tal que:

$$\beta_1 \leq x \leq \beta_2 ;$$

es:

$$\left| \frac{f(z)}{y^{\xi}} \right| < K ;$$

de donde:

$$|f(z)| < K . |y|^{\xi} ;$$

y en (2) se tiene:

$$|g(z)| = e^{-\varepsilon y} . |f(z)| < K . e^{-\varepsilon y} . |y|^{\xi} ;$$

y por ser:

$$y > 0 ;$$

es:

$$|g(z)| < K . e^{-\varepsilon y} . y^{\xi} = K \frac{y^{\xi}}{e^{\varepsilon y}} ;$$

como cualesquiera que sean ε y ξ es:

$$\lim_{y \to \infty} \left(\frac{y^{\xi}}{e^{\varepsilon y}} \right) = 0 \; ;$$

se tiene que:

$$\lim_{y \to \infty} g(z) = 0;$$

uniformemente para:

$$\beta_1 \leq x \leq \beta_2$$

Por lo tanto, dado un arbitrariamente pequeño $\varepsilon > 0$, existe un:

$$y_0 \equiv y_0(\varepsilon) \; ;$$

tal que es:

$$|g(z)| < M \equiv \text{constante} \; ;$$

para:

$$\beta_1 \leq x \leq \beta_2 ;$$

y:

$$y > y_0 .$$

Se deduce de esto y de las hipótesis hechas, que todo punto z cuya abscisa esté comprendida entre β_1 y β_2, puede encerrarse en un contorno en cuyos puntos todos sea:

$$|g(z)| < M ;$$

siendo el contorno, un rectángulo formado por las rectas:

$$x = \beta_1 ;$$
$$x = \beta_2 ;$$

el eje real y una paralela a este eje a suficiente distancia de él.

Luego por un conocido teorema es:

$$|g(z)| < M ;$$

y por lo tanto de (2) se deduce que:

$$|f(z)| = |g(z)| . e^{\varepsilon y} < M . e^{\varepsilon t} ;$$

luego:

$$|f(z)| < M . e^{\varepsilon t}$$

Como esta desigualdad se verifica para todo $\varepsilon > 0$, por pequeño que sea se deduce que:

$$|f(z)| \leq M;$$

lo que demuestra el teorema.

Si en lugar de usar el factor $e^{\varepsilon z i}$ hubiésemos usado el factor $e^{\varepsilon z^2}$ se puede probar un poco más, a saber:

"Si $|f(z)|$ es menor que M para: $x = \beta_1$; ; para: $x = \beta_2$;

; será $|f(z)| < M$; para: $\beta_1 \leq x \leq \beta_2$."

Supongamos ahora que $k(x)$ no sea idénticamente nula, y considerando la función:

$$h(z) \equiv (-zi)^{k(z)} = e^{k(z) \cdot \log(-zi)}$$

donde el logaritmo tiene su valor principal.

Siendo:

$$z = x + iy;$$

se tiene:

$$h(z) = e^{k(z) \cdot \log(-xi+y)} = e^{k(z) \cdot \left[\log\sqrt{x^2+y^2} + i\,\mathrm{Arg}(y-xi)\right]};$$

luego por ser:

$$k(z) = (x+iy) \cdot \frac{k_1 - k_2}{\beta_1 - \beta_2} + \frac{\beta_1 \cdot k_2 - k_1 \beta_2}{\beta_1 - \beta_2} =$$

$$= x\frac{k_1 - k_2}{\beta_1 - \beta_2} + \frac{\beta_1 k_2 - k_1 \beta_2}{\beta_1 - \beta_2} + y \cdot \frac{k_1 - k_2}{\beta_1 - \beta_2} \cdot i;$$

se tiene:

$$k(z) = k(x) + y \cdot \frac{k_1 - k_2}{\beta_1 - \beta_2} \cdot i;$$

poniendo:

$$c \equiv y \cdot \frac{k_1 - k_2}{\beta_1 - \beta_2}; \text{ (valor real)};$$

se tiene:

$$k(z) = k(x) + c \cdot y \cdot i.$$

Si:

$$\beta_1 \leq x \leq \beta_2;$$

es:

$$|x| \leq |\beta_1| + |\beta_2| ;$$

luego:

$$x^2 \leq (|\beta_1| + |\beta_2|)^2 \equiv \overline{k'}^2 \equiv \text{constante};$$

luego:

$$\sqrt{x^2+y^2} = y \cdot \sqrt{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2} ;$$

y:

$$\log\left(\sqrt{x^2+y^2}\right) = \log y + \frac{1}{2} \cdot \log\left(1+\left(\frac{x}{y}\right)^2\right);$$

y además es:

$$|\operatorname{Arg}(y - x.i)| < \tau \equiv \text{fijo};$$

luego

$$h(\tau) = e^{[k(x)+c.y.i]} \cdot \left[\log y + \frac{1}{2} \cdot \log\left(1+\left(\frac{x}{y}\right)^2\right) + i \operatorname{Arg}(y-ci)\right] =$$

$$= e^{k(x).\log y} \cdot e^{c.y.\log(t.i)} \cdot e^{k(x).\frac{1}{2}.\log\left(1+\left(\frac{x}{y}\right)^2\right)} \cdot$$

$$\cdot e^{c.y.i.\frac{1}{2}.\log\left(1+\left(\frac{x}{y}\right)^2\right)} \cdot e^{-c.y.\operatorname{Arg}(y-ci)};$$

luego:

$$|h(\tau)| = y^{k(x)} \cdot e^{\frac{1}{2} \cdot k(x).\log\left[1+\left(\frac{x}{y}\right)^2\right] - c.y.\operatorname{Arg}(y-ci)};$$

pero:

$$\operatorname{Arg}(y-ci) = -\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{x}{y}\right);$$

luego:

$$|\operatorname{Arg}(y-ci)| = \left|\operatorname{arc\,tag}\left(\frac{x}{y}\right)\right| = \operatorname{arc\,tg}\left|\frac{x}{y}\right| < \operatorname{arc\,tg}\frac{k'}{y};$$

luego:

$$|c.y.\operatorname{Arg}(y-ci| < |c|.y.\operatorname{arc\,tg}\frac{k'}{y} \sim |c|.y.\frac{k'}{y} = |c|.k';$$

luego:

$$c.t.\operatorname{Arg}(y-ci) = O(1);$$

y como:

$$k(x);$$

está acotada entre:

$$\beta_1 \leq x \leq \beta_2;$$

y es:

$$\lim_{y \to \infty} \log\left[1+\left(\frac{x}{y}\right)^2\right] = 0 \;;$$

se tiene:

$$|h(z)| = y^{k(x)} \cdot O(1)$$

De modo que el cociente:

$$\frac{|h(z)|}{y^{k(x)}} \;;$$

permanece para:

$$\beta_1 \leq x \leq \beta_2 \;;$$

comprendida entre dos números fijos positivos.

Luego la función :

$$F(z) \equiv \frac{f(z)}{h(z)} \;;$$

satisface sobre la recta:

$$x = \beta_1 \;;$$

a la desigualdad:

$$|F(z)| = \frac{\left|\frac{f(z)}{y^{k_1}}\right|}{\left|\frac{h(z)}{y^{k_1}}\right|} < \frac{K}{K'} \equiv K'' \equiv \text{constante};$$

y sobre la recta:

$$x = \beta_2 \;;$$

a la condición:

$$|F(z)| = \frac{\left|\frac{f(z)}{y^{k_2}}\right|}{\left|\frac{h(z)}{y^{k_2}}\right|} < \frac{K''}{K''} \equiv K^{IV} \equiv \text{constante};$$

luego la función $F(z)$ se halla en las condiciones del caso particular.

Luego para:

$$\beta_1 \leq x \leq \beta_2 \;;$$

se tiene uniformemente:

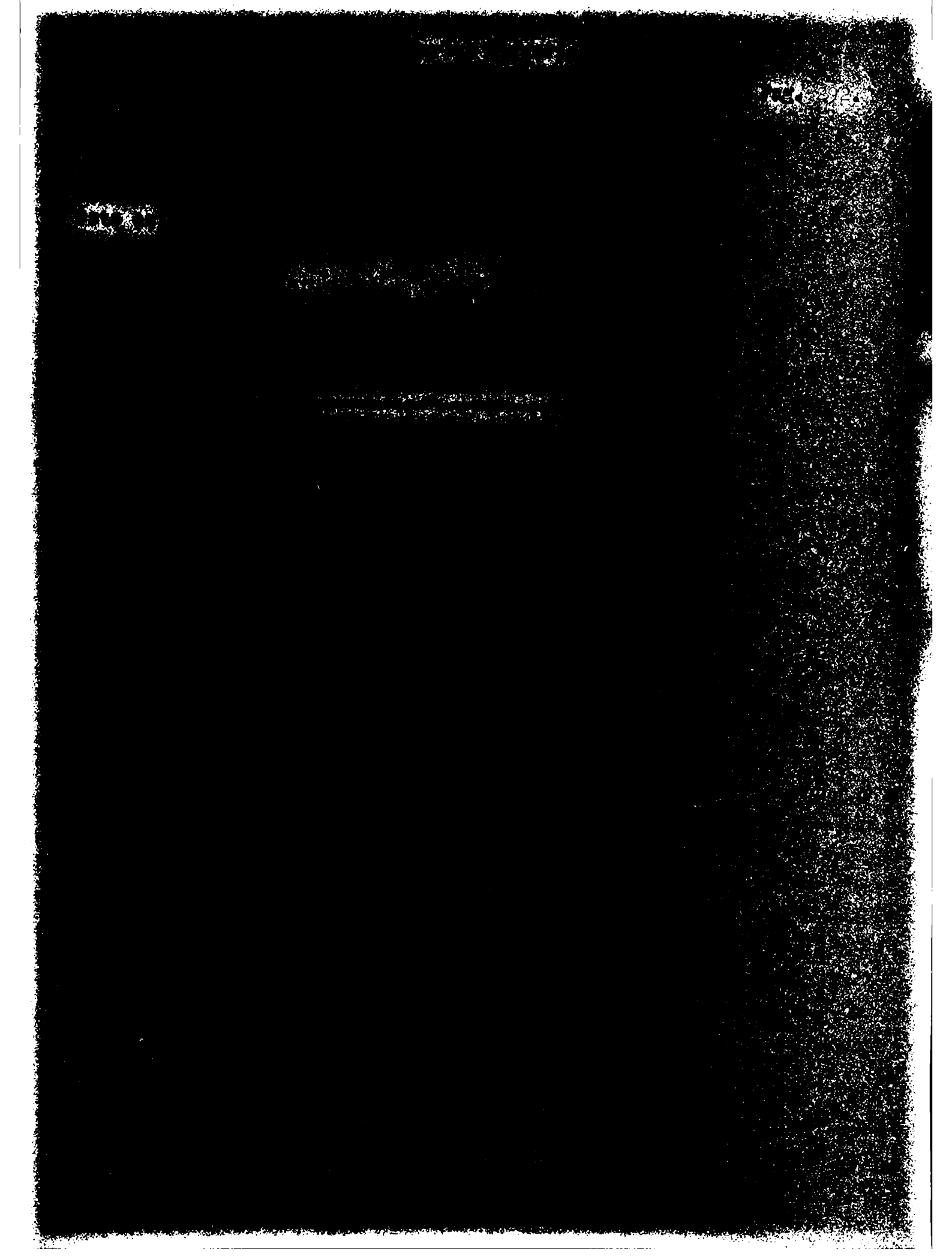
$$F(z) = O(1) \;;$$

esto es:

$$\frac{|f(z)|}{|h(z)|} < K \;;$$

luego:

$$\left|\frac{f(z)}{y^{h(x)}}\right| = \left|\frac{f(z)}{h(z)}\right| \cdot \left|\frac{h(z)}{y^{k(x)}}\right| < K.K_1 \equiv K_2 \;;$$



Propiedades de la función $\mu(x)$ asociada a una función $f(\tau)$; definida por una integral de Dirichlet; cuando este posee un semiplano de convergencia absoluta.--

Teorema):

Supongamos que la abscisa de convergencia absoluta de la integral:

$$f(\tau) = \int_0^\infty a(r).e^{-\lambda(r).\tau}.dr;$$

sea $\mathcal{C}$; y que la función $f(\tau)$ sea regular y de orden finito para $x > \mathcal{C}'$, donde es: $\mathcal{C}' < \mathcal{C}$.

luego la función $\mu(x)$ posee las propiedades siguientes:

1º) $\mu(x)$ es una función convexa de x ;para: $x > \mathcal{C}'$;

2º)en el semiplano de convergencia absoluta: $x > \mathcal{C}$;

la función $\mu(x)$ es idénticamente nula;

3º) en la faja: $\mathcal{C}' < x < \mathcal{C}_0 \leq \mathcal{C}$;

es una función nula o positiva y en este último caso es monótona decreciente:

4º) $\mu(x)$ es una función continua de x ; para: $x > \mathcal{C}'$.—

Demostración:

Demostremos primeramente que es convexa la función $\mu(x)$ para $x > \mathcal{C}'$.

Tomemos dos números cualesquiera mayores que $\mathcal{C}'$; sean β_1 y β_2 tales que: $\beta_2 > \beta_1 > \mathcal{C}'$.

Sea μ_1 el valor de $\mu(x)$ para $x = \beta_1$ y μ_2 el valor de $\mu(x)$ para $x = \beta_2$;

esto es: $\left.\begin{array}{l}\mu_1 \equiv \mu(\beta_1)\\ \mu_2 \equiv \mu(\beta_2)\end{array}\right\}$

Luego siendo $\varepsilon > 0$ arbitrario se tiene que:

$$\left.\begin{array}{l} f(\beta_1 + iy) = O(y^{\mu_1+\varepsilon}) \\ f(\beta_2 + iy) = O(y^{\mu_2+\varepsilon}) \end{array}\right\}$$

según el teorema anterior, para todo x tal que:

$$\beta_1 \leq x \leq \beta_2 \;;$$

es:

$$f(x) = O\left(y^{k(x)}\right);$$

donde:

$$k(x) = x\,\frac{(\mu_2+\varepsilon)-(\mu_1+\varepsilon)}{\beta_2-\beta_1} + \frac{(\mu_1+\varepsilon).\,\beta_2-(\mu_2+\varepsilon)\beta_1}{\beta_2-\beta_1} =$$

$$= \mu_1 . \frac{\beta_2-x}{\beta_2-\beta_1} + \mu_2\,\frac{x-\beta_1}{\beta_2-\beta_1} + \varepsilon < \frac{\beta_2-x}{\beta_2-\beta_1}\,\mu_1 + \frac{x-\beta_1}{\beta_2-\beta_1}\cdot\mu_2;$$

y por ser:

$$\mu \equiv \mu(x) \leq k(x);$$

se tiene que para:

$$\beta_1 \leq x \leq \beta_2;$$

es:

$$\mu(x) \equiv \mu \leq \frac{\beta_2-x}{\beta_2-\beta_1}.\mu_1 + \frac{x-\beta_1}{\beta_2-\beta_1}.\mu_2;$$

desigualdad que constituye la definición de convexidad.

Consideremos ahora el semiplano de convergencia absoluta.

Sea:

$$x \begin{cases} \geq \beta \\ \geq \beta_j \end{cases} > \mathcal{C};$$

luego si es:
se tiene que:

$$\left| f(z) \right| \leq \int_0^\infty |a(r)|.e^{-\lambda(r)x}.dr \leq \int_0^\infty |a(r)|.e^{-\lambda(r).\beta}\,dr \equiv K;$$

esto es:

$$\left| f(z) \right| \leq K \equiv \text{constante};$$

pero:

$$\mu(x) = \overline{\lim_{y\to\infty}}\,\frac{\log\left|f(x+iy)\right|}{\log|y|} \leq \overline{\lim_{y\to\infty}}\,\frac{\log K}{\log|y|} = 0;$$

de donde

$$\mu(x) \leq 0;$$

para:

$$x \geq \beta > \mathcal{C}.$$

La otra parte del teorema se continúa análogamente.-

Otro teorema importante en este orden de ideas es el siguiente:

Teorema I:

Supongamos que existe un número fijo:

$$\tau_0 = x_0 + i y_0;$$

(el cual puede ser real) tal que para todo r del intervalo:

$$0 \leq r < +\infty;$$

se verifiquen las desigualdades:

$$|a(r).e^{-\lambda(r).\tau_0}| < K_1 \equiv \text{constante}$$

y:

$$|A(r)| < K_2 \equiv \text{constante}$$

siendo:

$$A(r) \equiv \int_0^r a(r).e^{-\lambda(r)\tau_0}.dr;$$

y:

$$\lambda(0) \geqslant 0.$$

Con estas hipótesis se tiene que:

$$g(r,\tau) \equiv \int_0^r a(\rho).e^{-\lambda(\rho)\tau}.d\rho = o(y);$$

uniformemente en el semiplano:

$$R(\tau) = x > x_0 + \varepsilon;$$

(cualquiera que sea $\varepsilon > 0$) y para todo valor de r; esto es: dados arbitrariamente dos números positivos ε y δ ; existe un:

$$y_0 \equiv y_0(\varepsilon,\delta) \geqslant 0;$$

tal que todo τ tal que:

$$R(\tau) = x > x_0 + \varepsilon;$$

y para todo r del intervalo:

$$0 \leq r < +\infty;$$

se tiene que:

$$\left|\frac{g(r,\tau)}{y}\right| < \delta;$$

siempre que sea:

$$|y| > y_0$$

Como caso particular muy interesante se tiene que:

$$|f(\tau)| \leq \delta;$$

es decir:

$$f(z) = o(y);$$

uniformemente en el semiplano:

$$\Re(z) = x > x_0 + \varepsilon > x_0;$$

luego:

$$\mu(x) \leq 1;$$

para todo:

$$x > x_0.$$

Llamando $\nu(x_0)$ al orden de la función $f(z)$ en el semiplano:

$$\Re(z) = x > x_0;$$

esto es:

$$\nu(x_0) \equiv \overline{\lim_{y \to \infty}} \frac{\log E(y)}{\log |y|};$$

donde $E(y)$ es el extremo superior de $f(z)$ en dicho semiplano; se tiene que:

$$\nu(x_0) \leq 1.$$

La demostración de este teorema la hemos publicado en el "Bolletim dell' Unione Matematica Italiana" en Octubre de 1932 (Anno XI N°4).--

---

Es interesante la relación entre el valor de la función $\mu(x)$ y las tres abscisas de convergencia; a saber: la condicional, la uniforme y la absoluta, que las indicaremos con α, β, y γ respectivamente.

A tal efecto, se tiene que:

Teorema):

Si la función derivable $\lambda(\nu)$ satisface a la condición:

$$\log D\lambda(\nu) = O\left(e^{\delta \cdot \lambda(\nu)}\right);$$

cualquiera que sea δ y si es:

$$\alpha = \phi;$$

el semiplano de convergencia uniforme y el semiplano donde $f(z)$ está

acotada con coincidentes.

Más general que éste es el siguiente:

Teorema):

Supongamos que la función $\lambda(r)$ sea derivable y tal que la expresión:

$$\lim_{r \to \infty} \frac{\log D\lambda(r)}{\lambda(r)};$$

sea finita.

Supongamos además que para todo r y cualquier $\delta > 0$; sea:

$$a(r) = O\left(e^{\delta . \lambda(r)}\right);$$

y que $f(t)$ sea a lo sumo de orden igual a k; para:

$$x \geq \rho(k).$$

En tales hipótesis, se tiene:

$$\gamma \leq \frac{\rho(k) + k . l}{1 + k};$$

donde es:

$$l \equiv \lim_{r \to \infty} \frac{\log D\lambda(r)}{\lambda(r)}.$$

Estos teoremas los hemos publicado, conjuntamente con algunos de los que, más abajo mencionaremos en "Instituto Matematico Hispano Americano", (Congreso de Lisboa-- Madrid 1932).--

Son interesantes los siguientes teoremas de daracter tauberiano.--

Teorema):

Supongamos que la función $\lambda(r)$ sea derivable y satisfaga a la condición:

$$a(r) = o\left(\frac{D\lambda(r)}{\lambda(r)}\right) = o\left(D \log \lambda(r)\right);$$

y que la integral:

$$\int_0^\infty a(r) . e^{-\lambda(r) t} . dr;$$

(supuesta convergente para $x > 0$) tienda a un limite finito η. ;

cuando $\tau \to 0$, según el eje real:

$$\Re(\tau) \equiv x \geqslant 0;$$

en tal hipótesis, la integral:

$$\int_0^\infty a(r).dr;$$

es convergente y tiene por suma η .

Más general aún es el :

Teorema):

Si las funciones $a(r)$ y $\lambda(r)$, satisfacen a la condición

$$\int_0^r \lambda(\rho).a(\rho).d\rho = o\left[\lambda(r)\right];$$

y si la integral:

$$\int_0^\infty a(r).e^{-\lambda(r)\tau}.dr;$$

(supuesta convergente para $x > 0$) tiende a un límite finito, η cuando $\tau \to 0$ a lo largo del eje real; entonces la integral:

$$\int_0^\infty a(r).dr;$$

es convergente y tiene por suma η.

Teorema):

Supongamos que sea $\lambda(r)$ derivable y que satisfaga a las condiciones:

$$\left.\begin{aligned} &\Phi\,\lambda(r) = o\left[\lambda(r)\right] \\ \text{y:}\quad &a(r) = O\left[\frac{\Phi\,\lambda(r)}{\lambda(r)}\right] \end{aligned}\right\}$$

y consideremos además que la integral:

$$\int_0^\infty a(r).e^{-\lambda(r)\tau}.dr;$$

(supuesta convergente para $x > 0$) tienda a un límite finito, η , para $\tau \to 0$ a lo largo del eje real, en tales hipótesis la integral: .

$$\int_0^\infty a(r).dr;$$

es convergente y tiene por suma η .

Una generalización importante de un ya clásico teorema de Fatou la constituye el siguiente:

Teorema):

Supongamos que para cualquier número real $k \geq 0$ se verifique:

$$\int_0^{r} a(\rho).d\rho = o\left(e^{k.\lambda(r)}\right);$$

y supongamos además que la integral:

$$\int_0^{\infty} a(\rho).e^{-\lambda(\rho)\lambda}.d\rho;$$

represente una función $f(\tau)$ regular en el punto:

$\tau_0 = k + i y_0$.

En tal hipótesis la integral:

$$\int_0^{\infty} a(r).e^{-\lambda(r).\tau_0}.dr;$$

es convergente y su suma es $f(\tau_0)$.

Importantes teoremas sobre los ceros de las secciones de una integral de Dirichlet y sobre las abscisas de convergencia y sobre las singularidades de tales integrales hemos publicado en el Instituto Matemático Hispano Americano" y en el Boletin del Seminario Matemático Argentino".--

---

Otros teoremas sobre integrales de Laplace van consignados en el apéndice al presente trabajo.

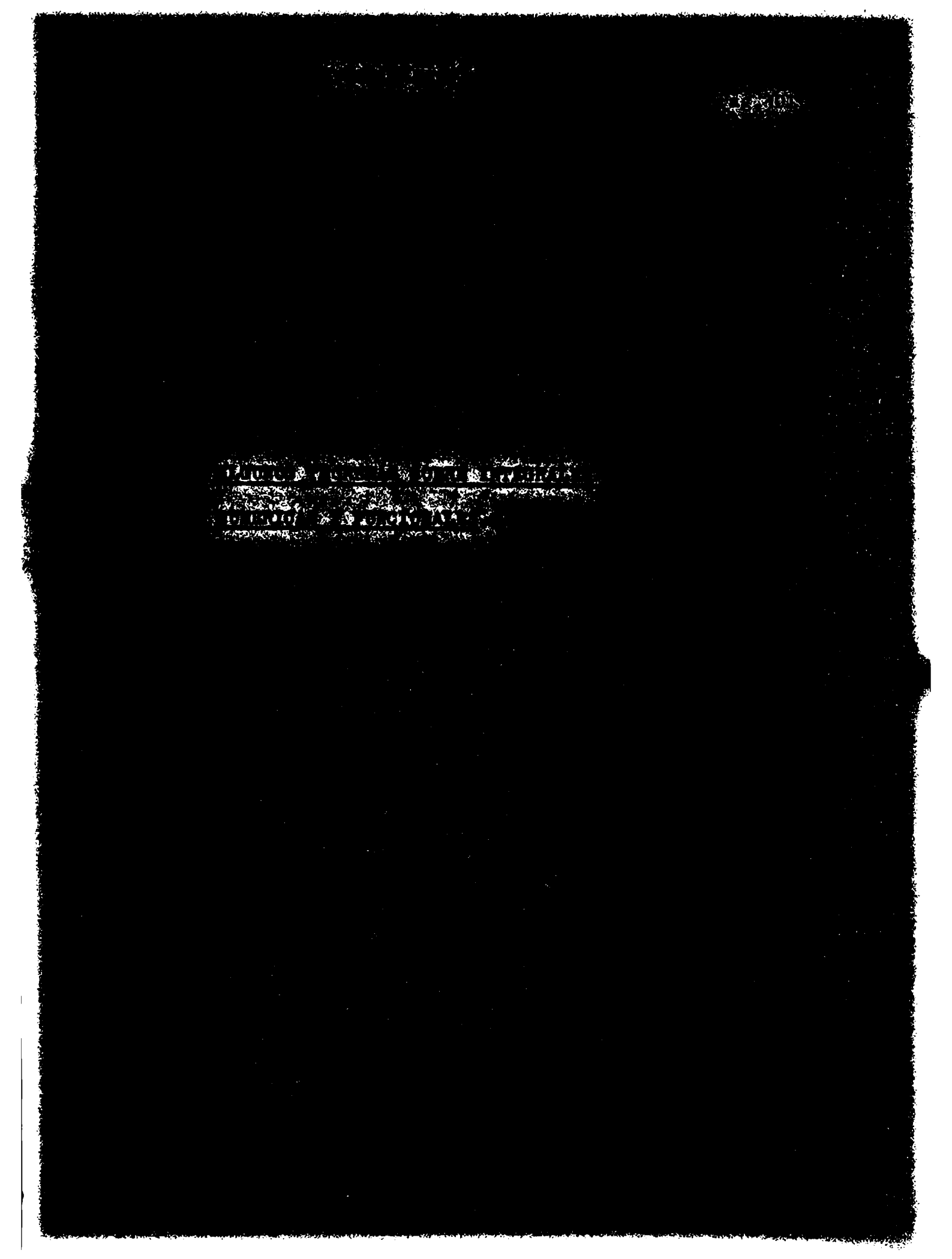
FIN DE LA CUARTA PARTE.

Carlos Biggeri

Carlos Biggeri.

PARTE QUINTA.-

-.INTEGRALES SIMPLES NUMERICAS Y FUNCIONALES.-



- .INTEGRALES NUMERICAS.-

Teorema I).

Sean: $\varphi(x)$ una función compleja (o real) de la variable real x, derivable y tal que la integral:

$$(1) \qquad \int_0^\infty |\varphi'(x)|.dx$$

sea convergente; $f(x)$ una función compleja (o real) integrable y α un número complejo (o real) cualquiera.

Llamemos a a al extremo superior de la función:

$$(2) \qquad |F(x) - \alpha|$$

siendo:

$$F(x) = \int_0^x f(x).dx$$

en el intervalo: $0 \leq x \leq \beta$;

y a (β) al extremo superior de la función (2) en el intervalo:

$\beta \leq x \leq \gamma$

siendo β y γ valores reales cualesquiera.

Llamemos:

$$(3) \qquad \Phi(x) = \int_x^\infty |\varphi'(x)|.dx + \lim_{x \to \infty} |\varphi(x)|.$$

en tales hipótesis se verifica que:

$$(4) \left| \int_0^\gamma f(x).\varphi(x).dx - \alpha.\varphi(0) \right| \leq a[\Phi(0) - \Phi(\beta)] + a(\beta).\Phi(\gamma)$$

Demostración:

Por hipótesis la integral (1) converge, luego converge la integral:

$$\int_0^\infty \varphi'(x)\,dx;$$

por lo tanto existe límite finito de: $|\varphi(x)|$,

para $x \to \infty$; además la integral: $\int_x^\infty |\varphi'(x)| . dx$,

es convergente, por consiguiente la función $\Phi(x)$ existe.

De (3) se deduce:

$$(4) \qquad \Phi(x) - \Phi(\xi) = \int_x^\xi |\varphi'(x)| . dx .$$

siendo ξ un número real mayor que x.

De (4) se deduce:

$$(5) \qquad \Phi(x) - \Phi(\xi) \geq |\varphi(\xi) - \varphi(x)|$$

y por ser:

$$\lim_{\xi \to +\infty} \Phi(\xi) = \lim_{\xi \to +\infty} |\varphi(\xi)|$$

se tiene:

$$(6) \qquad \Phi(x) \geq |\varphi(x)| .$$

Además según (3) es:

$$\Phi(x) = \int_0^\infty |\varphi'(x)| . dx + \lim_{x \to \infty} |\varphi(x)| - \int_0^x |\varphi'(x)| . dx$$

de donde:

$$(7) \qquad D\,\Phi(x) = -|D\,\varphi(x)| .$$

Por otra parte es:

$$(8) \qquad \int_0^\gamma f(x) . \varphi(x) . dx = F(\gamma) . \varphi(\gamma) - \int_0^\gamma F(x) . D\varphi(x) . dx .$$

y:

$$(9) \qquad \alpha . \varphi(0) = \alpha . \varphi(\gamma) - \int_0^\gamma \alpha . D\varphi(x) . dx .$$

De (8) y (9) se tiene:

$$(10)\quad \left| \int_0^\gamma f(x).\varphi(x).dx - \alpha.\varphi(0) \right| \leq |\varphi(\gamma)|.|F(\gamma)-\alpha| +$$

$$+ \int_0^\beta |F(x)-\alpha|.|D\varphi(x)|\,dx + \int_\beta^\gamma |F(x)-\alpha|.|D\varphi(x)|\,dx \leq$$

$$\leq a(\beta).|\varphi(\gamma)| + a.\int_0^\beta |D\varphi(x)|.dx + a(\beta).\int_\beta^\gamma |D\varphi(x)|.dx.$$

De (6),(7) y (10) se deduce la (4).

Teorema 2ª)

Supongamos que la integral:

$$\int_0^\infty f(x)\,dx$$

es convergente y tiene por suma α ,donde $f(x)$ es una función compleja de la variable independiente real x,que $\varphi(x,z)$ es una función compleja de x y de la variable compleja z,derivable respecto de x,sujeta a las condiciones siguientes:

1ª) $\lim_{z\to 0} \varphi\ (0,z) = 1$;

2ª) $\lim_{z\to 0} \dfrac{\delta\varphi(x,z)}{\delta x} = 0$;

3ª)la integral:

$$\Phi(0,z) = \int_0^\infty \left| \frac{\delta\varphi(x,z)}{\delta x} \right| dx.$$

es convergente y el límite superior de $\Phi(0,z)$,para $z\to 0$,sea finito;

En tales hipótesis es:

$$\lim_{z\to 0} \int_0^\infty f(x).\varphi(x,z).dx = \int_0^\infty f(x)\,dx = \alpha.$$

Demostración:

Según la tercera condición en un entorno del punto $z=0$ es:

(11) $$0 \leq \Phi(0,z) < K \qquad (K = \text{constante}).$$

siendo K una constante.

Con las mismas notaciones del teorema anterior y en virtud de (11) se tiene:

(12) $$\Phi(\beta,z) < K$$

Dado un $\varepsilon > 0$ arbitrario, por ser:

$$\lim_{x \to \infty} F(x) = \int_0^\infty f(x)\, dx = \alpha.$$

para: $x \geq \beta \equiv \beta(\varepsilon)$;

será:

(13) $$|\alpha(\beta)| < \varepsilon$$

Fijado de este modo β, según la segunda condición es:

(14) $$\lim_{t \to 0} [\Phi(0,z) - \Phi(\beta,z)] = 0.$$

Como a es fijo, en un entorno suficientemente pequeño de $t = 0$, según (14) será:

(15) $$a.[\Phi(0,z) - \Phi(\beta,z)] < \varepsilon.$$

Según (12), (13) y (15) es:

(16) $$a.[\Phi(0,z) - \Phi(\beta,z)] + \alpha(\beta)\Phi(\beta,z) < \varepsilon + K\varepsilon;$$

del teorema anterior y de (16) se deduce que:

(17) $$\left| \int_0^\gamma f(x).\varphi(x,z).dx - \alpha.\varphi(0,z) \right| < \varepsilon + K\varepsilon.$$

Según (17):

(18) $$\left| \int_0^\gamma f(x).\varphi(x,z)\, dx - \alpha \right| \leq \left| \int_0^\gamma f(x).\varphi(x,z)\, dx - \alpha.\varphi(0,z) \right| +$$

$$+ |\alpha|.|\varphi(0,z) - 1| < \varepsilon + K.\varepsilon + |\alpha|.|\varphi(0,z) - 1|.$$

En virtud de (18) y según la primera condición, en un entorno suficientemente pequeño de $z = 0$ es:

$$(19) \qquad \left| \int_0^{\gamma} f(x) . \varphi(x,z) . dx - \alpha \right| < \varepsilon + K . \varepsilon + |\alpha| . \varepsilon .$$

Tomando límites en (19), para: $\gamma \to +\infty$;

se tiene:

$$\left| \int_0^{\infty} f(x) . \varphi(x,z) \, dx - \alpha \right| \leq \varepsilon [1 + K . |\alpha|]$$

en un entorno suficientemente pequeño de $z = 0$.

Como aplicación de este teorema consideremos la siguiente integral determinante generalizada:

$$(20) \qquad G(z) = \int_0^{\infty} f(x) . e^{-\lambda(x) . z} . dx$$

donde $\lambda(x)$ es derivable, creciente positiva y no acotada.

La función:

$$\varphi(x,z) = e^{-\lambda(x) z} .$$

cumple evidentemente las condiciones primera y segunda. En cuanto a la tercera se tiene:

$$\Phi(0,z) = \frac{|z|}{\alpha} . e^{-\lambda(0) . \alpha} = \sqrt{1 + \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2} . e^{-\lambda(0) . \alpha}$$

llamando: $z = \alpha + \beta i$;

y supuesto que α es positivo. Si $z \to 0$, de modo que el módulo de su argumento sea menor que un ángulo fijo positivo menor que $\frac{\pi}{2}$; el límite superior

de $\Phi(0,z)$ es finito. De donde resulta la propiedad clásica:

"Si la integral (20) converge en el punto $z=z_0$, existe límite finito de $G(z)$ y es igual a $G(z_0)$, cuando $z \to z_0$ de modo que:

$|Arg(z-z_0)| \leq \tau < \frac{\pi}{2}$ (τ fijo);

siendo τ un número fijo."

Teorema 32).

Sean: $f(x)$ una función compleja y $\varphi(x)$ otra función compleja derivable, respecto de x, tales que las integrales:

$$\int_0^\infty f(x).dx$$

y:

$$\int_0^\infty |D\varphi(x)|.dx$$

sean convergentes.

En tales hipótesis la integral:

$$\int_0^\infty f(x).\varphi(x).dx.$$

es convergente.

Demostración:

Llamando:

$$F_1(x) = \int_\beta^x f(x)\,dx$$

se tiene:

$$(21)\quad \left|\int_\beta^\gamma f(x).\varphi(x)\,dx\right| \leq |F_1(\gamma).\varphi(\gamma)| + |F_1(\beta)\varphi(\beta)| + \int_\beta^\gamma |F_1(x).D\varphi(x)|.dx.$$

Llamando $M(\beta)$ al extremo superior de: $\left|\int_\beta^\delta f(x)\,dx\right|$

En el intervalo: $\beta \leq \delta \leq \gamma$;

se tiene según (21):

$$(22) \quad \left| \int_\beta^\gamma f(x).\varphi(x).dx \right| \leq M(\beta).|\varphi(x)| + M(\beta).\int_\beta^\gamma |D\varphi(x)|.dx.$$

De (6) y (22) se deduce que:

$$(23) \qquad \left| \int_\beta^\gamma f(x).\varphi(x)\, dx \right| < M(\beta).\Phi(0).$$

Como por hipótesis la integral: $\int_0^\infty f(x)\, dx$

es convergente, dado un $\varepsilon > 0$ arbitrario, para: $\gamma > \beta \geq \beta(\varepsilon)$

es: $M(\beta) < \varepsilon.$ (24)

De (23) y (24) se deduce que:

$$\left| \int_\beta^\gamma f(x).\varphi(x).dx \right| < \varepsilon.\Phi(0).$$

Teorema 148.

Sean: $f(x)$ una función compleja tal que la integral:

$$\int_0^x f(x).dx$$

esté acotada en el intervalo $(0, +\infty)$; $\varphi(x)$ una función compleja derivable tal que la integral:

$$(25) \qquad \int_0^\infty |D\varphi(x)|.dx$$

sea convergente y tal que:

(26) $$\lim_{x \to +\infty} \varphi(x) = 0.$$

En tales hipótesis, la integral:

$$\int_0^\infty f(x) \cdot \varphi(x) \cdot dx$$

es convergente.

<u>Demostración</u>:

Por hipótesis es:

(27) $$M(\beta) < K$$

siendo K una constante.

Según (3), (26) (y-(28)-para) y por ser convergente la integral (25) es:

(28) $$\lim_{\beta \to \infty} \Phi(\beta) = 0.$$

Según (22), (27) y (28) para: $\gamma > \beta \geq \beta(\varepsilon)$

es: $$\left| \int_\beta^\gamma f(x) \cdot \varphi(x) \cdot dx \right| < \varepsilon \cdot K$$

-.INTEGRALES FUNCIONALES DE VARIABLE COMPLEJA.-

INTEGRALES FUNCIONALES DE VARIABLES COMPLEJA.-

Teorema V).

Si la integral:

$$\int_0^\infty f(x,z).\,dx$$

donde f(x,z) es una función compleja de la variable real x y de la compleja z, es uniformemente convergente en un recinto R y las funciones:

$$\int_0^\infty \left| \frac{\partial \varphi(x,z)}{\partial x} \right| .\,dx$$

y:

$$\lim_{x \to \infty} |\varphi(x,z)|$$

están acotadas en R, la integral:

$$\int_0^\infty f(x,z).\varphi(x,z).\,dx$$

converge uniformemente en R.

Demostración:

Por hipótesis, se deduce que:

$$\Phi_1(0,z) < 2K$$

para todo z de R, llamando:

$$\Phi_1(x,z) = \int_x^\infty \left| \frac{\partial \varphi(x,z)}{\partial x} \right| dx + \lim_{x \to \infty} |\varphi(x,z)|.$$

Por consiguiente, en todo R se verifica:

$$(29) \qquad \left| \int_\beta^x f(x,z).\varphi(x,z).\,dx \right| < 2.\Omega(\beta).K$$

siendo $\Omega(\beta)$ el extremo superior de: $\left| \int_\beta^x f(x,z)\,dx \right|$

en R y en el intervalo: $\beta \leq x \leq \gamma$.

Según la hipótesis, dado un $\varepsilon > 0$ arbitrario, para: $\beta \geq \beta(\varepsilon)$

es:

(30) $$\Omega(\beta) < \varepsilon.$$

Luego, según (29) y (30), para todo z de R, y: $\gamma > \beta \geq \beta(\varepsilon)$;

es: $$\left| \int_{\beta}^{\gamma} f(x,z) \cdot \varphi(x,z) \cdot dx \right| < 2 \cdot K \cdot \varepsilon.$$

Teorema VI).

Supongamos que la integral:

(31) $$\int_0^x f(x,z) \cdot dx$$

esté acotada en el intervalo: $0 \leq x < +\infty$;

y para todo z de un recinto R, que la integral:

(32) $$\int_0^{\infty} \left| \frac{\partial \varphi(x,z)}{\partial x} \right| \cdot dx$$

sea convergente normalmente en R y que $\varphi(x,z)$ tienda a cero, para $x \to +\infty$, uniformemente en R. En tales hipótesis la integral:

$$\int_0^{\infty} f(x,z) \cdot \varphi(x,z) \cdot dx$$

converge uniformemente en R.

Demostración:

De la acotación de la integral (31) se deduce que para: $\beta > \gamma$

es:

$$\left| \int_{\beta}^{\gamma} f(x,z).dx \right| < 2K$$

de donde:

(33) $$\Omega(\beta) < 2K$$

De la convergencia normal de (32) se deduce que para todo z de R es:

(34) $$\Phi_1(\beta,z) \leq \int_{\beta}^{\infty} \lambda(x).dx + \lim_{x \to \infty} |\varphi(x,z)|;$$

siendo $\lambda(x)$ una cierta función positiva tal que: $\int_0^{\infty} \lambda(x).dx$;

es convergente.

Sea (positivo) $\varepsilon > 0$ arbitrario, para β suficientemente grande es:

(35) $$\int_{\beta}^{\infty} \lambda(x).dx < \frac{\varepsilon}{2}.$$

y puesto que $\varphi(x,z)$ tiende a 0, si $x \to +\infty$, uniformemente en R, a partir de un valor de x que podemos suponer $\leq \beta$, será:

(36) $$\lim_{x \to \infty} |\varphi(x,z)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Luego, para todo z de R, según (34), (35) y (36) es:

(37) $$\Phi_1(\beta,z) < \varepsilon.$$

De (33) y (37), se tiene:

$$\left| \int_{\beta}^{\gamma} f(x,z).\varphi(x,z).dx \right| < 2.K.\varepsilon$$

para todo $\gamma > \beta$ y para todo z de R.

Carlos Biggeri.

-.CONVERGENCIA UNIFORME Y CUASI-UNIFORME DE INTEGRALES FUNCIONALES DE VARIABLE REAL.-

CONVERGENCIA UNIFORME Y CUASI-UNIFORME DE INTEGRALES FUNCIONALES, DE VARIABLE REAL.-

Teorema VII).

Sea $f(r,s)$ una función real de las variables reales independientes r y s, derivable respecto de r e integrable respecto de s.

Supongamos que:

$$\left| \int_0^{\xi} \frac{\partial f(r,s)}{\partial r} . ds \right| < K; \qquad (K = \text{constante});$$

para todo r del intérvalo $(a \leq r \leq b)$ y para todo valor ξ de s del intervalo $(0 \leq s \leq \infty)$; y supongamos además que la integral:

$$F(r) \equiv \int_0^{\infty} f(r,s) . ds.$$

sea convergente para todo r del intervalo $(a \leq r \leq b)$.

En tales hipótesis la integral:

$$\int_0^{\infty} f(r,s) . ds$$

converge uniformemente en el intervalo $(a \leq r \leq b)$.

Demostración:

Sea ε un número positivo arbitrario. Dividamos el intervalo (a,b) en p sub-intervalos iguales tal que cada uno tenga por longitud $l = \frac{\varepsilon}{4K}$; de modo que se obtiene una sucesión de puntos:

$$a \equiv r_0 < r_1 < r_2 < {}_3 < \text{------} < r_n < \text{----} < r_p < r_{p+1} \equiv b.$$

En virtud de la condición necesaria y suficiente de convergencia de una integral impropia y teniendo en cuenta que $p+1$ es finito, existe un valor de s, que llamaremos: $\xi \equiv \xi(r,\varepsilon)$;

tal que para todo: $\xi' > \xi$;

es: $|\Phi(r)| < \frac{\varepsilon}{4}$;

(1) $\cancel{\Phi(r) = \int_{\xi}^{\xi'} f(r,s).ds}$

para todos los r de la sucesión: $r_0, r_1, \ldots, r_{p+1}$.

llamando:

$$\Phi(r) \equiv \int_{\xi}^{\xi'} f(r,s).\,ds.$$

Sea r un punto cualquiera del intervalo $(a \leq r \leq b)$, luego: r o coincide con algún punto r_n o dista de él una longitud menor que $\frac{h}{2}$; por otra parte se tiene:

(2) $$\Phi(r) - \Phi(r_n) = (r - r_n).\frac{d}{dr}\,\Phi[r_n + \theta(r - r_n)]$$

siendo θ un cierto número tal que: $0 < \theta < 1$;

(3) $$|\Phi(r) - \Phi(r_n)| \leq \frac{1}{2}.\left|\frac{d}{dr}\,\Phi(r_n + \theta(r - r_n))\right| \equiv \frac{1}{2}.\left|\frac{d}{dr}\,\Phi(q)\right|.$$

De (2) se deduce:

llamando:

$$q \equiv r_n + \theta(r - r_n).$$

Por otra parte es:

$$\Phi(r) = \int_0^{\xi'} f(r,s).ds - \int_0^{\xi} f(r,s).\,ds$$

de donde:

$$\frac{d\,\Phi(r)}{dr} = \int_0^{\xi'} \frac{\partial f(r,s)}{\partial r}.ds - \int_0^{\xi} \frac{\partial f(r,s)}{\partial r}.ds$$

y por la hipótesis de la acotación se tiene:

$$\left| \frac{d\,\Phi(r)}{dr} \right| < 2K$$

luego:

$$(4) \qquad \left| \frac{d\,\Phi(q)}{dr} \right| < 2K.$$

Según (3) y (4) se verifica:

$$(5) \qquad |\Phi(r) - \Phi(r_n)| < \ell . K \equiv \frac{\varepsilon}{4K} . K \equiv \frac{\varepsilon}{4}$$

Descomponiendo $\Phi(r)$ en la siguiente forma:

$$\Phi(r) = [\Phi(r) - \Phi(r_1)] + \Phi(r_n)$$

y teniendo en cuenta la (1) y la (5) se deduce:

$$|\Phi(r)| < \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} < \varepsilon$$

para cualquier r del intervalo $(a \leq r < b)$, lo que prueba el teorema.

Teorema VIII).

Sea $f(r,s)$ una función real de las variables reales independientes r y s, continua en el punto $r = a$, e integrable en el intervalo $(0 \leq s < +\infty)$. Sea:

$$F(r) = \int_0^\infty f(r,s) . ds.$$

En tal hipótesis, la condición necesaria y suficiente para que la función $F(r)$ sea continua en el punto $r = a$ es que la integral:

$$\int_0^\infty f(r,s) . ds;$$

sea convergente cuasi-uniformemente a lo Dini en el punto $r = a$.

Demostración:

Veamos primeramente que la condición es necesaria.

En efecto; se tiene que:

$$(6) \quad \left| F(x) - \int_0^b f(r,s) . ds \right| \leq |F(r) - F(a)| + \left| F(a) - \int_0^b f(a,s) . ds \right| + \left| \int_0^b f(a,s) . ds - \int_0^b f(r,s)\, ds. \right|$$

Como es, por ser continua la $F(r)$ en el punto $r = a$:

$$\lim_{r \to a} F(r) = F(a)$$

existe un: $\delta = \delta(a, \varepsilon)$;

cualquiera que sea $\varepsilon > 0$, tal que para todo r del intervalo:

$$a - \delta \leq r \leq a + \delta$$

se verifica que:

$$(7) \qquad \left| F(r) - F(a) \right| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Como es:

$$F(a) = \lim_{b \to +\infty} \int_0^b f(a, s) . ds.$$

cualquiera que sea el valor C, positivo, existe un: $b = b(a, \varepsilon, C) > C$;

tal que para $b > C$ es:

$$(8) \qquad \left| F(a) - \int_0^b f(a, s) . ds \right| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Fijado de este modo $b > C$ (por ejemplo: $b = C + 1$) como:

$$\lim_{x \to a} \int_0^b f(r, s) . ds = \int_0^b f(a, s) . ds.$$

existe un: $\delta_1 = \delta_1(a, b, \varepsilon) < \delta$;

(y por lo tanto: $\delta_1 = \delta_1(a, b, C) < d$);

tal que para r del intervalo: $a - \delta_1 \leq r \leq a + \delta_1$;

es:

$$(9) \qquad \left| \int_0^a f(r, s)\, ds - \int_0^a f(a, s) . ds \right| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

De las igualdades (6),(7),(8) y (9) se deduce que para $b > C$ y en el intervalo: $a - \delta_1 \leq r \leq a + \delta_1$;

es:
$$\left| F(r) - \int_0^b f(r,s) \cdot ds \right| < \varepsilon$$

es decir, la integral: $\int_0^\infty f(r,s) \cdot ds$,

converge cuasi-uniformemente a lo Dini en el punto $r = a$.

Veamos ahora que la condición es suficiente.

En efecto, por hipótesis es:

$$\left| F(r) - \int_0^b f(r,s) \cdot ds \right| < \frac{\varepsilon}{3} \tag{10}$$

para todo r del intervalo: $a - \delta \leq r \leq a + \delta$;

y para $b > C$, siendo: $\delta = \delta(a, \varepsilon, C)$;

y: $b = b(a, \varepsilon, C) > C$.

Tomando p en el intervalo: $(a - \delta ; a + \delta)$;

es:
$$\left| F(p) - \int_0^b f(p,s) \cdot ds \right| < \frac{\varepsilon}{3} . \tag{11}$$

Pero por otra parte se tiene:

$$\left| F(r) - F(p) \right| \leq \left| F(p) - \int_0^b f(p,s)\, ds \right| + \left| \int_0^b f(r,s)\, ds - F(r) \right| +$$
$$+ \left| \int_0^b f(p,s)\, ds - \int_0^b f(r,s)\, ds \right| .$$

Fijado $b > C$, de modo que se cumpla la desigualdad (10), se tiene:

$$\lim_{r \to a} \int_0^b f(r,s)\, ds = \int_0^b f(a,s)\, ds \; ;$$

por lo tanto tomando p suficientemente próximo al valor a es:

$$(12) \qquad \left| \int_0^b f(p,s)\, ds - \int_0^b f(r,s)\, ds \right| < \frac{\varepsilon}{3}$$

y de (10), (11) y (12) se infiere que:

$$\left| F(r) - F(p) \right| < \varepsilon$$

en todo un cierto entorno de $p = a$; con lo que el teorema queda probado.

Teorema IX).

Supongamos que $F(r,s)$ sea positiva para todo r de un cierto entorno del punto $r = a$, y para todo s del intervalo: $(0 \leq s < +\infty)$.

Entonces, si la integral: $\int_0^\infty f(r,s)\, ds$;

converge cuasi-uniformemente en el punto $r = a$, converge también uniformemente en dicho punto.

Demostración:

En efecto, dados arbitrariamente ε y C existe un:

$$\delta \equiv \delta(\varepsilon, a, C)$$

y un:

$$b \equiv b(\varepsilon, a, C) > C$$

tales que para todo r del intervalo: $a - \delta \leq r \leq a + \delta$;

y para $b > C$, se verifica:

$$(13) \qquad \left| \int_0^\infty f(r,s)\, ds - \int_0^b f(r,s)\, ds \right| < \varepsilon .$$

Por ser, según la hipótesis, positiva (o nula) la función $f(r,s)$, para un d cualquiera (mayor o igual que b), se verifica:

$$\int_0^b f(r,s)\,ds \leq \int_0^d f(r,s).\,ds \leq \int_0^\infty f(r,s).\,ds$$

de donde:

$$(14) \qquad 0 \leq \int_0^d f(r,s)\,ds - \int_0^b f(r,s)\,ds. \leq \int_0^\infty f(r,s)\,ds - \int_0^b f(r,s)\,ds.$$

De (13) y (14), se deduce que para cualesquiera que sean d y b, tales que $d > b > C$, y para cualquier valor de r del intervalo: $a - \delta \leq r \leq a + \delta$;

se verifica que:

$$0 \leq \int_0^d f(r,s).\,ds - \int_0^b f(r,s).\,ds \leq \varepsilon$$

es decir, la integral:

$$\int_0^\infty f(r,s).\,ds.$$

converge uniformemente en todo un cierto entorno del punto $r = a$.

Aplicando el teorema de Borel a la conclusión del teorema tercero, se deduce el siguiente teorema.

Teorema X).-

Si la función $f(r,s)$ es positiva o nula para todo r del intervalo $a < r < b$ y para todo s del intervalo $0 < s < +\infty$ y si la integral:

$$\int_0^\infty f(r,s).\,ds$$

converge cuasi-uniformemente en el intervalo $a < r < b$, también converge

[redacted]

uniformemente en dicho intervalo.

De la combinación de los teoremas tercero y cuarto se deduce el siguiente teorema.

Teorema XI).

Supongamos que la función $f(r,s)$ sea positiva o nula en los intervalos $a \leq r \leq b$ y $0 \leq s < +\infty$, continua respecto de r e integrable respecto de s.

En tal hipótesis, si la función $F(r)$, definida por:

$$F(r) \equiv \int_0^\infty f(r,s) \cdot ds \; ;$$

es continua en el intervalo $a \leq r \leq b$, entonces la integral:

$$\int_0^\infty f(r,s) \cdot ds$$

converge uniformemente en dicho intervalo.

Teorema XII).

Sean $f(r,s)$ y $\varphi(r)$ funciones reales, la una de las variables independientes r y s y la otra de r.

Si la integral:

$$(15) \qquad \int_0^\infty f(r,s) \cdot ds$$

converge uniformemente en el intervalo $(a < r < b)$ y si la integral:

$$\int_a^b |\varphi(r)| \cdot dr$$

es convergente (a cuya suma llamaremos S), entonces se verifica:

$$\int_a^b \varphi(r) \cdot \left(\int_0^\infty f(r,s) \cdot ds \right) \cdot dr = \int_a^b \left(\int_0^\infty f(r,s) \cdot \varphi(r) \cdot ds \right) \cdot dr =$$

$$= \int_0^\infty ds \cdot \left(\int_a^b \varphi(r) \cdot f(r,s) \cdot dr \right) .$$

Demostración:

Puesto que, por hipótesis, la integral (15) converge uniformemente en el intervalo $a \leq r \leq b$, existe un: $s_0 = s_0(\varepsilon)$;

tal que para todo: $s' > s \geq s_0 = s_0(\varepsilon)$;

y cualquiera que sea r del intervalo $a \leq r \leq b$ se tiene:

$$\left| \int_s^{s'} f(r,s)\, ds \right| < \varepsilon \tag{16}$$

(por pequeño que sea $\varepsilon > 0$).

Pero por otra parte se tiene:

$$\int_s^{s'} ds \cdot \left(\int_a^b \varphi(r) \cdot f(r,s) \cdot dr \right) = \int_a^b \varphi(r) \cdot dr \cdot \left(\int_s^b f(r,s) \cdot ds \right). \tag{17}$$

De (16), (17) y teniendo en cuenta que:

$$\int_a^b |\varphi(r)| \cdot dr = S$$

se deduce que:

$$\left| \int_s^{s'} ds \cdot \left(\int_a^b \varphi(r) \cdot f(r,s) \cdot dr \right) \right| < \varepsilon \cdot S$$

para: $s' > s > s_0 = s_0(\varepsilon)$;

es decir, la integral:

$$\int_0^\infty ds \left(\int_a^b \varphi(r) \cdot f(r,s) \cdot dr \right)$$

es convergente, y además es:

$$\left| \int_s^\infty ds \cdot \left(\int_a^b \varphi(r) \cdot f(r,s) \cdot dr \right) \right| < \varepsilon \cdot S \tag{18}$$

Además se tiene:

$$(19)\quad \left| \int_a^b \varphi(r).dr.\left(\int_0^\infty f(r,s).ds - \int_0^s ds.\left(\int_a^b \varphi(r).f(r,s).dr\right)\right| \leq$$

$$\leq \int_a^b |\varphi(r)|.dr.\left(\left|\int_s^\infty f(r,s)\,ds\right|\right) < \varepsilon.S$$

para: $\underline{s \geq s_0 = s_0(\varepsilon)}$;

y para todo $\underline{r}$ del intervalo $\underline{a \leq r \leq b}$.

Luego de (18) y (19) se deduce que:

$$(20)\quad \left| \int_a^b \varphi(r).dr.\left(\int_0^\infty f(r,s).ds\right) - \int_0^\infty ds.\left(\int_a^b \varphi(r).f(r,s)\,dr\right)\right| \leq$$

$$\leq \left| \int_a^b \varphi(r).dr\left(\int_0^\infty f(r,s).ds\right) - \int_0^s ds.\left(\int_a^b \varphi(r).f(r,s).dr\right)\right| +$$

$$+ \left| \int_s^\infty ds.\left(\int_a^b \varphi(r).f(r,s).dr\right)\right| < 2.\varepsilon.S$$

Ahora bien, esta desigualdad (20) se verifica para todo: $\underline{s \geq s_0 \equiv s_0(\varepsilon)}$;

y para todo $\underline{r}$ del intervalo $\underline{a \leq r \leq b}$, y como el minuendo y el sustraendo de su primer miembro son constantes, se deduce que:

$$\int_a^b \varphi(r).dr.\left(\int_0^\infty f(r,s).ds\right) = \int_0^\infty ds.\left(\int_a^b \varphi(r).f(r,s)\,dr\right)$$

puesto que según (20) la diferencia entre estos dos valores puede hacerse tan pequeña, en valor absoluto, como se quiera.

-.FIN DE LA PARTE QUINTA.-

Carlos Biggeri

Carlos Biggeri.

.PARTE SEXTA.

UNA TEORIA GENERAL SOBRE LAS SERIES E INTEGRALES MÚLTIPLES DE DIRICHLET.

SOBRE SUMACION DE SERIES E INTEGRALES MULTIPLES DIVERGENTES POR EL METODO DE LAS MEDIAS TIPICAS SOBRE LOS DIAGRAMAS CONJUGADOS ASOCIADOS DE LAS FUNCIONES ANALITICAS, POR INTEGRALES DE LA PLACE.

Series e Integrales Múltiples de Dirichlet

I.-- Propiedades Generales :

Nos proponemos, en el presente trabajo, demostrar algunas propiedades relativas a las series e integrales míltiples de Dirichlet (que enseguida hemos de definir), limitándonos, para brevedad de la exposición al caso de las series e integrales dobles, no habiendo ninguna dificultad para el caso general.

Llamaremos integral doble de Dirichlet a la siguiente:

$$f(z;w) \equiv \int_0^\infty \int_0^\infty \varphi(r,s)\, e^{-\lambda(r)z-\mu(s)w} \cdot dr\, ds \qquad (1)$$

donde: $\varphi(r,s)$ es una función compleja (o real) de las variables reales independientes r y s integrable sobre todo rectángulo de vértices: $(0,0)$, $(0,r)$, $(0,s)$, (r,s); $\lambda(r)$ y $\mu(s)$ son funciones reales positivas, derivables, crecientes (no necesariamente monótonas) en los intervalos $(0 \leq r < +\infty)$ y $(0 \leq s < +\infty)$ y tales que:

$$\lim_{r \to +\infty} \lambda(r) = \lim_{s \to +\infty} \mu(s) = +\infty ;$$

$z = x + i.y$, $w = u + i.v$ son variables complejas independientes.

Análogamente: llamaremos serie doble de Dirichlet a la siguiente:

$$f_1(z,w) \equiv \sum_0^\infty \sum_0^\infty \varphi_{r,s} \cdot e^{-\lambda_r z - \mu_s w} \qquad (1')$$

donde: $\varphi_{r,s}$ es una sucesión doble compleja (O REAL); λ_r y μ_s son sucesiones simples positivas, crecientes (no necesariamente monótonas) y tales que: $\lim_{r\to\infty} \lambda_r = \lim_{s\to\infty} \mu_s = +\infty$; $z = x + iy$ y $w = u + iv$ son variables complejas independientes.

Análogas definiciones pueden formularse para las series e integrales míltiples con más de dos variables.

Llamando $z_0 = x_0 + i.y_0$ y $w_0 = u_0 + i.v_0$ a dos números complejos fijos, pongamos:

$$\alpha(r,s) \equiv \varphi(r,s).e^{-\lambda(r).x_0-\mu(s).w_0}$$

$$\beta(r,s) \equiv e^{-\lambda(r).(x-x_0)-\mu(s)(w-w_0)}$$

$$\Phi(r,s) \equiv \int_0^r\int_0^s \alpha(\rho,\sigma).d\rho.d\sigma$$

$$g(r,s,x,w) \equiv$$

$$\equiv \int_0^r\int_0^s \varphi(\rho,\sigma)e^{-\lambda(\rho)x-\mu(\sigma)w}.d\rho.d\sigma$$

$$\alpha_{r,s} \equiv \varphi_{r,s}.e^{-\lambda_r.x_0-\mu_s.w_0}$$

$$\beta_{r,s} \equiv e^{-\lambda_r(x-x_0)-\mu_s(w-w_0)}$$

$$\Phi_{r,s} \equiv \sum_0^r \sum_0^s \alpha_{r,s}$$

$$g_{r,s}(x,w) \equiv \sum_0^r \sum_0^s \varphi_{r,s}.e^{-\lambda_r x-\mu_s.w}$$

por lo tanto:

$$g(r,s,w) \equiv \int_0^\infty\int_0^\infty \alpha(r,s).\beta(\rho,\sigma).d\rho.d\sigma;$$

$$f(x,w) \equiv \int_0^\infty\int_0^\infty \alpha(r,s).\beta(r,s).dr.ds.$$

$$g_{r,s}(x,w) \equiv \sum_0^r \sum_0^s \alpha_{r,s}.\beta_{r,s} \quad ;$$

$$f_1(x,w) \equiv \sum_0^\infty \sum_0^\infty \alpha_{r,s}.\beta_{r,s}.$$

Las funciones $\Phi(r,s)$ y $g(r,s,x,w)$ existen en virtud de las hipótesis de integrabilidad hecha sobre $\varphi(r,s)$.

Introduzcamos las siguientes funciones:

$$h(p,q,m,n) \equiv \int_p^m\int_q^n \alpha(\rho,\sigma).\beta(\rho,\sigma).d\rho.d\sigma \qquad h_{p,q,m,n} \equiv \sum_p^m \sum_q^n \alpha_{r,s}.\beta_{r,s} \quad ;$$

donde m, n, p y q son valores arbitrarios tales que $m > p \geq 0$ y $n > q \geq 0$.

Por otra parte se tiene:

(2) $$\left|\frac{\partial\beta(\rho,\sigma)}{\partial\rho}\right|.d\rho = -\frac{|x-x_0|}{x-x_0}.$$
$$.e^{-\mu(\sigma)(w-w_0)}.de^{-\lambda(\rho)(x-x_0)}$$
para $x \neq x_0$;

$$|\Delta_\rho\beta(\rho,\sigma)| \leq -\frac{|x-x_0|}{x-x_0}.$$
$$.e^{-\mu_\sigma(w-w_0)}.\Delta e^{-\lambda_\rho(x-x_0)}$$

(3) $$\left|\frac{\partial\beta(\rho,\sigma)}{\partial\sigma}\right|.d\sigma = -\frac{|w-w_0|}{w-w_0}.$$
$$.e^{-\lambda(\rho).(x-x_0)}.de^{-\mu(\sigma).(w-w_0)}$$
para $w \neq w_0$;

$$|\Delta_\sigma\beta(\rho,\sigma)| \leq -\frac{(w-w_0)}{w-w_0}.$$
$$.e^{-\lambda_\rho(x-x_0)}.\Delta e^{-\mu_\sigma(w-w_0)}$$

(4) $$\left|\frac{\partial^2\beta(\rho,\sigma)}{\partial\rho.\partial\sigma}\right|.d\rho.d\sigma =$$
$$= \frac{|x-x_0|}{x-x_0}.\frac{|w-w_0|}{w-w_0}.$$
$$.de^{-\lambda(\rho).(x-x_0)}.de^{-\mu(\sigma).(w-w_0)}$$

$$|\Delta^2_{\rho,\sigma}\beta(\rho,\sigma)| \leq$$
$$\leq \frac{|x-x_0|}{x-x_0}.\frac{|w-w_0|}{w-w_0}$$
$$\Delta e^{-\lambda_\rho(x-x_0)}.\Delta e^{-\mu_\sigma(w-w_0)}$$

para $x \neq x_0$ y $u \neq u_0$.

Integrando reiteradamente por partes, la función $h(p, q, m, n)$ se transforma del modo siguiente:

$$(5)\quad h(p,q,m,n) = \beta(m,n).\Phi(m,n) - \beta(p,n).\Phi(p,n) - \beta(m,q).\Phi(m,q) + \beta(p,q).\Phi(p,q) - \int_p^m \Phi(\rho,n)\frac{\partial\beta(\rho,n)}{\partial\rho}d\rho + \int_p^m \Phi(\rho,q).\frac{\partial\beta(\rho,q)}{\partial\rho}.d\rho - \int_q^n \Phi(m,\sigma).\frac{\partial\beta(m,\sigma)}{\partial\sigma}.d\sigma + \int_q^n \Phi(p,\sigma).\frac{\partial\beta(p,\sigma)}{\partial\sigma}.d\sigma + \int_p^m\int_q^n \Phi(\rho,\sigma).\frac{\partial^2\beta(\rho,\sigma)}{\partial\rho.\partial\sigma}.d\rho.d\sigma.$$

Una expresión análoga se logra para $h_{p,q,m,n}$, sumando reiteradamente por partes.

Teorema I.--

Supongamos que exista un par de puntos x_0, w_0 y un número ξ positivo, tales que se verifique:

$$(6)\quad |\Phi(r,s)| < K.e^{\xi\lambda(r)+\xi\mu(s)} \qquad\qquad (6')\quad |\Phi_{r,s}| < K.e^{\xi\lambda_r+\xi\mu_s}$$

(K = constante)

para: $0 < r < +\infty$, $0 < s < +\infty$ — para: $r = 0,1,2,3\ldots\ldots$, $s = 0,1,2,3\ldots\ldots$

Sea ε un número positivo arbitrario mayor que ξ. En tal hipótesis la integral doble (I) | la serie doble (I') converge uniformemente en los recintos D y D' ; definidos, el primero por las relaciones:

$$\left.\begin{array}{l} x \geqslant x_0 + \varepsilon \\ 0 \leq |y - y_0| \leq k.(x - x_0) \end{array}\right\}$$

y el segundo por:

$$\left.\begin{array}{l} u \geqslant u_0 + \varepsilon \\ 0 \leq |v - v_0| \leq k.(x - x_0) \end{array}\right\}$$

siendo k una constante positiva arbitraria.

Demostración: Vamos a desarrolar la demostración para la integral doble

puesto que para la serie doble es completamente análoga.

Pongamos: $d = \varepsilon - \xi > 0$; $d_1 = x - x_0 - \xi \geq d$ y $d_2 = u - u_0 - \xi \geq d$.

Tomando z en D_1 y w en D_1' vamos a mayorar cada uno de los términos del segundo miembro de (5). En efecto:

$$(7) \quad |\beta(m,n).\Phi(m,n)| < K.e^{-\lambda(m)(x-x_0)-\mu(n)(u-u_0)}.e^{\xi\lambda(m)+\xi\mu(n)} \leq$$

$$\leq K.e^{-d_1.\lambda(p)-d_2\mu(q)} ;$$

análogamente se tiene:

$$|\beta(p,n).\Phi(p,n)| < K.e^{-d_1\lambda(p)-d_2\mu(q)} \qquad (8)$$

$$|\beta(m,q).\Phi(m,q)| < K.e^{-d_1\lambda(p)-d_2\mu(q)} \qquad (9)$$

$$|\beta(p,q).\Phi(p,q)| < K.e^{-d_1\lambda(p)-d_2\mu(q)} \qquad (10)$$

en cuanto a las integrales se tiene según (2) y (3):

$$\left|\int_p^m \Phi(\rho,n)\frac{\partial\beta(\rho,n)}{\partial\rho}.d\rho\right| < K.\frac{|z-z_0|}{x-x_0}.e^{-d\mu(n)}.\int_m^p e^{\xi\lambda(\rho)}.de^{-\lambda(\rho)(x-x_0)} <$$

$$< K.\frac{|z-z_0|}{x-x_0}.e^{-d_1\lambda(p)-d_2\mu(q)}.\frac{\varepsilon}{d} ; \qquad (11)$$

análogamente se verifica:

$$\left|\int_p^m \Phi(\rho,q).\frac{\partial\beta(\rho,q)}{\partial\rho}.d\rho\right| < K.\frac{|z-z_0|}{x-x_0}.e^{-d_1\lambda(p)-d_2\mu(q)}.\frac{\varepsilon}{d} \qquad (12)$$

$$\left|\int_q^n \Phi(m,\sigma).\frac{\partial\beta(m,\sigma)}{\partial\sigma}.d\sigma\right| < K.\frac{|w-w_0|}{u-u_0}.e^{-d_1\lambda(p)-d_2\mu(q)}.\frac{\varepsilon}{d} \qquad (13)$$

$$\left|\int_q^n \Phi(p,\sigma).\frac{\partial\beta(p,\sigma)}{\partial\sigma}.d\sigma\right| < K.\frac{|w-w_0|}{u-u_0}.e^{-d_1\lambda(p)-d_2\mu(q)}.\frac{\varepsilon}{d} \qquad (14)$$

y finalmente, teniendo en cuenta la [4] es:

$$\left|\int_p^m\int_q^n \Phi(\rho,\sigma).\frac{\partial^2\beta(\rho,\sigma)}{\partial\rho.\partial\sigma}.d\rho.d\sigma\right| < K.\frac{|z.z_0|}{x-x_0}.\frac{|w-w_0|}{u-u_0}.$$

$$.\int_m^p e^{\xi\lambda(\rho)}.de^{-\lambda(\rho)(x-x_0)}.\int_n^q e^{\xi\mu(\sigma)}.de^{-\mu(\sigma)(u-u_0)} <$$

$$< K.\frac{|z-z_0|}{x-x_0}.\frac{|w-w_0|}{u-u_0}.e^{-d_1\lambda(p)-d_2\mu(q)}.\left(\frac{\varepsilon}{d}\right)^2 \qquad (15)$$

Según las relaciones [5], (7), (8), (9), (10), (11), (12), (13), (14) y (15), se deduce:

$$\left|h(p,q,m,n)\right| < K.\frac{|z-z_0|}{x-x_0}.\frac{|w-w_0|}{u-u_0}.$$

$$.\left[4+4\left(\frac{\varepsilon}{d}\right)+\left(\frac{\varepsilon}{d}\right)^2\right].e^{-d_1.\lambda(p)-d_2.\mu(q)}. \qquad (16)$$

En los recintos D_1 y D'_1 se verica que:

$$\frac{|z-z_0|}{x-x_0}.\frac{|w-w_0|}{u-u_0} \leq 1+k^2 ;$$

por lo, tanto llamando:

$$K_1 \equiv K.(1+k^2).\left[4+4\left(\frac{\varepsilon}{d}\right)+\left(\frac{\varepsilon}{d}\right)^2\right]$$

se tienen en dichos recintos que:

$$\left|h(p,q,m,n)\right| < K_1.e^{-d_1\lambda(p)-d_2\mu(q)} \leq K_1.e^{-d.\lambda(p)-d.\mu(q)} \qquad (17)$$

y por lo tanto:

$$\left|h(0,q,p,n)\right| < K_1\,e^{-d_2.\mu(q)} \leq K_1.e^{-d.\mu(q)} \qquad (18)$$

$$\left|h(p,0,m,q)\right| < K_1.e^{-d_1.\lambda(p)} \leq K_1.e^{-d.\lambda(p)} \qquad (19)$$

Según las acotaciones (17), (18), (19), la integral doble de $\alpha(\rho,\sigma).\beta(\rho,\sigma)$ sobre el recinto, E, de ~~los~~ lados paralelos a los ejes r y s y cuyos vértices son: $(0,q)$, (p,q), $(p,0)$, $(m,0)$ (m,n) y $(0,n)$ es menor que:

$$K_1.\left[e^{-d.\lambda(p)-d.\mu(q)}+e^{-d.\mu(q)}+e^{-d.\lambda(p)}\right]$$

y como esta función de p y de q tiende a cero si p y q tienden simultánea o independientemente a $+\infty$, se tiene que es:

$$\lim_{(p,q)\to(+\infty+\infty)}\left(\int_0^m\int_0^n-\int_0^p\int_0^q\right)\alpha(\rho,\sigma).\beta(\rho,\sigma).d\rho.d\sigma=0$$

cualesquiera que sean $m>p$ y $n>q$, uniformemente en D_1 y D'_1; lo que demuestra el teorema.

Carolarios I):

Si la desigualdad [6] (o la [6']) se verifica para todo valor positivo de ξ el número $\varepsilon>0$ puede tomarse tan pequeño como se quiera; por lo tanto:

si $\Phi(r,s)$ está acotada en z_0, w_0 (hipótesis que se verifica si la integral [1] converge en $[z_0, w_0]$), la integral [1] converge uniformemente,

si $\Phi_{r,s}$ está acotada en z_0, w_0 (hipótesis que se verifica si la serie [1] convege en $[z_0, w_0]$), la serie [1'] converge uniformemente;

en los recintos D_2 y D'_2, definidos respectivamente por:

$$\left.\begin{array}{l} x \geq x_0 + \delta \\ 0 \leq |y - y_0| \leq k_1(x - x_0) \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l} u \geq u_0 + \delta \\ 0 \leq |v - v_0| \leq k_1(u - u_0) \end{array}\right\}$$

siendo δ un valor positivo arbitrariamente pequeño.

Más general:

II): Si existe un factor (z_0, w_0) y un rectángulo, en el plano (r,s) de vértices $(0,0), (r_0,0), (0,s_0), (r_0,s_0)$; siendo r_0 y s_0 ciertos valores fijos; tal que para todo par de valores de r y de s exteriores a él, se verique:

$$|\Phi(r,s)| < K_2 . \pi(r) . \theta(s)$$

$(K_2 = \text{constante})$;

siendo $\pi(r)$ y $\theta(s)$ funciones positivas tales que:

$$\pi(r) = o\left(e^{\xi \lambda(r)}\right)$$

y

$$\theta(s) = o\left(e^{\xi \mu(s)}\right)$$

para todo valor positivo de ξ;

la integral [1] converge uniformemente en D_2 y D'_2.

$$|\Phi_{r,s}| < K_2 . \pi_r . \theta_s$$

siendo π_r y θ_s funciones positivas tales que:

$$\pi_r = o\left(e^{\xi \lambda_r}\right)$$

y

$$\theta_s = o\left(e^{\xi \mu_s}\right)$$

la serie [1]

Demostremos esto para las integrales.

En efecto, a partir de un cierto valor $r_1 \geq r_0$ es $\pi(r) < e^{\xi . \lambda(r)}$ y para $s \geq s_1 \geq s_0$ es $\theta(s) < e^{\xi \mu(s)}$; luego en el exterior del rectangulo E_1, de vértices:

$$(0,0);(0,s_1);(r_1,s_1);(r_1,0)$$

se verifica:

$$|\Phi(r,s)| < K_2 \cdot e^{\xi\lambda(r)+\xi\mu(s)} \qquad (2_0)$$

Llamando K_3 a una constante cualquiera mayor que el extremo superior de $|\Phi(r,s)|$ sobre el rectángulo E_1, según [20] para todo r y todo s de los intervalos $(0 \leq r < +\infty)$ y $(0 \leq s < \beta < +\infty)$ se verifica:

$$|\Phi(r,s)| < (K_2 + K_3)\, e^{\xi\lambda(r)+\xi\mu(s)}$$

luego, según esta desigualdad, como ξ es arbitrariamente pequeño, en virtud del teorema 1.°), resulta lo que deseábamos probar.

Por consiguiente:

La función $f(x,w)$ $(f_1(x,w))$ definida por la integral 1 (por la serie [1]) es holomorfa en los semiplanos $x \geqslant x_0+\varepsilon$, $u \geqslant u_0+\varepsilon$, por pequeña que sea $\varepsilon > 0$, si $\Phi(r,s)$ $(\Phi_{r,s})$, está acotada en (x_0, w_0) o más general: si $\Phi(r,s)$ $(\Phi_{r,s})$ cumple la hipótesis del corolario II. Las derivadas parciales de $f(x,w)$ $(f_1(x,w))$ se obtienen derivando bajo el signo integral (bajo el signo sumatorio), en los semiplanos

$x \geqslant x_0+\varepsilon$, $u \geqslant u_0+\varepsilon$; a saber:

$$\frac{\partial^{m+n} f(x,w)}{\partial x^m \cdot \partial w^n} = (-1)^{m+n} \cdot \int_0^\infty \int_0^\infty \varphi(r,s) \cdot \lambda^m(r) \cdot \mu^n(s) \cdot e^{-\lambda(r)\cdot x - \mu(s) w} \cdot dr \cdot ds$$

y análogamente:

$$\frac{\partial^{m+n} f'(x,w)}{\partial x^m \cdot \partial w^n} = (-1)^{m+n} \cdot \sum_0^\infty \sum_0^\infty \varphi_{r,s} \cdot \lambda_r^m \cdot \mu_s^n \cdot e^{-\lambda_r x - \mu_s \cdot w}.$$

Un caso particular interesante en el cual se verifica la hipótesis del corolario II, en el caso de la integral, es aquél en que:

$$|\Phi(r,s)| < K_2 \cdot \lambda^h(r) \cdot \mu^{h'}(s)$$

siendo h y h' valores reales arbitrarios positivos.

Si la [1] es determinante ordinaria, esto es si se tiene:

$$\lambda(r) = r \qquad y \qquad \mu(s) = s.$$

y supongamos que existe un punto (x_0, w_0), en el cual es:

$$|\alpha(r,s)| < K_5$$

luego:

$$|\Phi(r,s)| < K_5 . r.s. ; \text{ para } r \geq 0 \text{ y } s \geq 0;$$

luego: Si $\alpha(r,s)$ está acotada en (x_0, w_0), la integral doble determinante ordinaria converge en todo punto (x_1, w_1) tal que: $x_1 \gtrless x_1$ y $y_1 > v_1$.

La propiedad correlativa de ésta es un clásico teorema de series dobles de potencias.

III).-- Si la integral [1] (la serie [1]) no converge en (x_0, w_0) pero en dichos puntos está acotada $\Phi(r,s)$ $(\Phi_{r,s})$, la integral [1] (la serie [1]) no converge uniformemente en los recintos D_3 y D'_3, definidos respectivamente por:

$$\left.\begin{array}{l} x > x_0 \\ 0 \leq |y - y_0| \leq k_1(x - x_0) \end{array}\right\}$$

y:

$$\left.\begin{array}{l} u > u_0 \\ 0 \leq |v - v_0| \leq k(u - u_0) \end{array}\right\}$$

pero la función $f(x,w)$ $(f_1(x,w))$ está en ellos acotada. En efecto, en D_2 y D'_2 en virtud del corolario I, $f(x,w)$ está acotada, luego será menester probar que también lo está en los recintos-diferencias $D_3 - D_2$; $D'_3 - D'_2$; para lo cual será suficiente ver que en éstos la función $g(r,s,x,w)$ está acotada uniformemente respecto de r y de s; lo que se deduce de [5]

pues por ser $x - x_0 > 0$ y $u - u_0 > 0$ se tiene :

$$|g(r,s,x,w)| < K + K \int_0^r \frac{|x - x_0|}{x - x_0} . e^{-\mu(s).(u - u_0)} \, de^{-\lambda(\rho)(x - x_0)} +$$

$$+ K . \int_0^s \frac{|w - w_0|}{u - u_0} . e^{-\lambda(r).(x - x_0)} \, de^{-\mu(\sigma).(u - u_0)} +$$

$$+ K . \int_0^r \int_0^s \frac{|x - x_0|}{x - x_0} . \frac{|w - w_0|}{u - u_0} . de^{-\lambda(\rho)(x - x_0)} . de^{-\mu(\sigma)(u - u_0)} <$$

$$< K + K \frac{|x - x_0|}{x - x_0} + K \frac{|w - w_0|}{u - u_0} + K \frac{|x - x_0|}{x - x_0} . \frac{|w - w_0|}{u - u_0} \leq$$

$$\leq 1 K . \frac{|x - x_0|}{x - x_0} . \frac{|w - w_0|}{u - u_0} .$$

luego según esta desigualdad, $q(r,s,z,w)$ está acotada uniformemente respecto de r y de s pues $\frac{|z-z_0|}{x-x_0}$ está acotada en D_3-D_2 y $\frac{|w-w_0|}{u-u_0}$ está acotada en $D'_3-D'_2$; la demostración para el caso de la serie doble [1] es completamente análoga.

Teorema II.

Supongamos que exista un par de puntos z_0, w_0 (cuyas partes reales sean iguales) y un número positivo ξ tales que se verifique:

$$|\Phi(r,s)| < K.e^{\xi\lambda(r)+\xi\mu(s)} \qquad | \qquad |\Phi_{r,s}| < K.e^{\xi\lambda(r)+\xi\mu(s)}$$

($K =$ constante) para todo $r \geqslant 0$ y todo $s \geqslant 0$. Sea ε un número positivo arbitrario mayor que ξ.

En tal hipótesis, la integral doble [1] (la serie doble [1']) converge uniformemente en los recintos D_4 y D'_4, definidos respectivamente por:

$$\left.\begin{array}{l} x \geqslant x_0+\varepsilon \\ 0 \leq |y-y_0| \leq e^{M(x-x_0)}-1 \end{array}\right\}$$

y:

$$\left.\begin{array}{l} u \geqslant u_0+\varepsilon \\ 0 \leq |v-v_0| \leq e^{M(u-u_0)}-1 \end{array}\right\}$$

siendo M una constante positiva arbitraria siempre que se tome: $x=u$.

Demostración:

Conservemos las notaciones del teorema I.

Si tomamos z en D_4 y w en D'_4 se tiene:

$$|z-z_0| \leq (x-x_0)+|y-y_0| < \frac{M(x-x_0)}{M}+e^{M(x-x_0)} <$$
$$< e^{M(x-x_0)}.\left(1+\frac{1}{M}\right)$$

según (16) se tiene:

$$|h(p,q,m,n)| < \frac{K}{\varepsilon^2}\cdot\left[4+4\left(\frac{\varepsilon}{d}\right)+\left(\frac{\varepsilon}{d}\right)^2\right]\cdot$$
$$\cdot\left(1+\frac{1}{M}\right)^2.e^{M(x-x_0)}.e^{M(u-u_0)}.e^{-d_1\lambda(p)-d_2\mu(q)}. \qquad (21)$$

Sean p_0 y q_0 valores fijos suficientemente grandes, tales, que para $p \geqslant p_0$ y $q \geqslant q_0$ las diferencias $\lambda(p)-2M$ y $\mu(q)-M$ sean positivas; luego según [21] se tiene:

$$|h(p,q,m,n)| < K_4.e^{-d_1\lambda(p)-d_2\mu(q)} \qquad (22)$$

siendo:

$$K_4 \equiv \frac{K}{\varepsilon^2}\cdot\left(1+\frac{1}{M}\right)^2\cdot\left[4+4\left(\frac{\varepsilon}{d}\right)+\left(\frac{\varepsilon}{d}\right)^2\right].e^{2\varepsilon M}$$

Si ahora hacemos intervenir la hipótesis $x = u$ y $x_0 = u_0$, se obtiene en virtud de [21] :

$$|h(0,q,p,m)| < K_4 . e^{-d\mu(q)} \qquad (23)$$

$$|h(p,0,m,q)| < K_4 . e^{-d\lambda(p)} \qquad (24)$$

De [22], [23], y [24] se deduce que:

$$\left(\int_0^m\int_0^n - \int_0^p\int_0^q\right) \alpha(p,\sigma).\beta(p,\sigma).dp.d\sigma <$$

$$< K_4 \left[e^{-d\lambda(p)-d\mu(q)} + e^{-d\lambda(p)} + e^{-d\mu(q)}\right]$$

de donde:

$$\lim_{(p,q)\to(+\infty,+\infty)} \left(\int_0^m\int_0^n - \int_0^p\int_0^q\right) \alpha(p,\sigma).\beta(p,\sigma).dp.d\sigma = 0$$

cualesquiera que sean $m > p$ y $n > q$, uniformemente en D_4 y D'_4 siempre que se tome $x = u$.

Para la serie doble la demostración es análoga.

Definiciones:

A la función $g(r,s,z,w)$ la llamaremos sección entre $(0,0)$ y (r,s) de la integral [1] o más brevemente sección.

A la función $g_{r,s}(z,w)$ la llamaremos sección entre $(0,0)$ y (r,s) de la serie [1'] o más brevemente sección.

Demostremos a continuación un teorema sobre el orden del crecimineto de dichas secciones, cuando las partes imaginarias de z y de w tienden a ∞.

Teorema III)

Supongamos que exista un par de valores (z_0, w_0) en el cual se

verifique:

1º) $|\alpha(r,s)| < K_5$

2º) $|\Phi(r,s)| < K_6$

(pues la condición $|\Phi_{r,s}| < K_6$; correlativa de la 1ª $|\alpha_{r,s}| < K_5$; para el caso de la integral es aquí una consecuencia de la acotación de $\Phi_{r,s}$);

siendo K_5 y K_6 constantes. Sea ε un número positivo arbitrariamente pequeño. En tal hipótesis, se verifica:

$$\lim\left(\frac{g_{r,s}(z,w)}{yv}\right) = \lim\left(\frac{g(r,s,z,w)}{y.v}\right) = 0; \text{ para } (y,v) \to (\infty,\infty);$$

uniformemente en los semiplanos $x \geqslant x_0+\varepsilon$; $u \geqslant u_0+\varepsilon$ y en los intervalos $(0 \leq r < +\infty)$, $(0 \leq s < +\infty)$.

Demostración:

Tomemos z en el semiplano $x \geqslant x_0+\varepsilon$ y w en el semiplano $u \geqslant u_0+\varepsilon$. Sean R y S dos valores arbitrarios, y supongamos primeramente que es:

$$\left.\begin{array}{l} 0 \leq R \leq r \\ \text{y: } 0 \leq S \leq s \end{array}\right\}$$

Descompongamos $g(r,s,z,w)$ en la siguiente forma:

$$g(r,s,z,w) = h(0,0,R,S) + h(R,S,r,s) + h(R,0,r,S) + h(0,R,S,s) \qquad (25)$$

Evidentemente se tiene:

$$|h(0,0,R,S)| < K_5.R.S. \qquad (26)$$

Además:

$$\begin{aligned}
|h(R,S,r,s)| < {} & K_6.e^{-\lambda(r)\varepsilon-\mu(s).\varepsilon} + K_6.e^{-\lambda(R)\varepsilon-\mu(s)\varepsilon} + \\
& + K_6.e^{-\lambda(r)\varepsilon-\mu(S)\varepsilon} + K_6.e^{-\lambda(R)\varepsilon-\mu(S)\varepsilon} + \\
& + K_2\int_R^r \frac{|z-z_0|}{x-x_0}.e^{-\mu(s)(u-u_0)}.de^{-\lambda(\rho)(x-x_0)} + \\
& + K_2\int_R^r \frac{|z-z_0|}{x-x_0}.e^{-\mu(S)|(u-u_0)}.de^{-\lambda(\rho)(x-x_0)} + \\
& + K_6\int_S^s \frac{|w-w_0|}{u-u_0}.e^{-\lambda(r)(x-x_0)}de^{-\mu(\sigma)(u-u_0)} + \\
& + K_6\int_S^s \frac{|w-w_0|}{u-u_0}e^{-\lambda(R)(x-x_0)}.de^{-\mu(\sigma)(u-u_0)} + \\
& + K_6\int_R^r\int_S^s \frac{|z-z_0|}{x-x_0}.\frac{|w-w_0|}{u-u_0}.de^{-\lambda(\rho)(x-x_0)}de^{-\mu(\sigma)(u-u_0)}
\end{aligned}$$

$$\left\{ \begin{aligned} &\left| h(R,S,r,s) \right| < K_6 \cdot e^{-\lambda(R)\varepsilon - \mu(S)\varepsilon} \cdot \left[4 + 2\sqrt{1+\frac{(y-y_0)^2}{\varepsilon^2}} + \right. \\ &\left. + 2\sqrt{1+\frac{(v-v_0)^2}{\varepsilon^2}} + 2\sqrt{1+\frac{(y-y_0)^2}{\varepsilon^2}} \cdot \sqrt{1+\frac{(v-v_0)^2}{\varepsilon^2}} \right] \end{aligned} \right. \qquad (27)$$

Pág. 339,

o bien:

análogamente se deduce:

$$\begin{aligned} \left| h(R,0,r,S) \right| &< K_6 \cdot e^{-\lambda(R)\varepsilon - \mu(S)\varepsilon} \left[2 + \sqrt{1+\frac{(y-y_0)^2}{\varepsilon^2}} \right] + \\ &+ K_6 \cdot e^{-\lambda(R)\varepsilon} \cdot \left[\sqrt{1+\frac{(y-y_0)^2}{\varepsilon^2}} + 2\sqrt{1+\frac{(v-v_0)^2}{\varepsilon^2}} + \right. \\ &\left. + \sqrt{1+\frac{(y-y_0)^2}{\varepsilon^2}} \cdot \sqrt{1+\frac{(v-v_0)^2}{\varepsilon^2}} \right] \end{aligned} \qquad (28)$$

y finalmente, por el mismo procedimiento, se ve que:

$$\begin{aligned} \left| h(0,S,R,s) \right| &< K_6 \cdot e^{-\lambda(R)\varepsilon - \mu(S)\varepsilon} \cdot \left[2 + \sqrt{1+\frac{(v-v_0)^2}{\varepsilon^2}} + \right. \\ &+ K_6 \cdot e^{-\mu(S)\varepsilon} \cdot \left[2\sqrt{1+\frac{(y+y_0)^2}{\varepsilon^2}} + \sqrt{1+\frac{(v+v_0)^2}{\varepsilon^2}} + \right. \\ &\left. + \sqrt{1+\frac{(y-y_0)^2}{\varepsilon^2}} \cdot \sqrt{1+\frac{(v-v_0)^2}{\varepsilon^2}} \right] \end{aligned} \qquad (29)$$

De las acotaciones [26], [27], 28] y [29], , y teniendo en cuenta la igualdad [25], se infiere:

$$\begin{aligned} \left| g(r,s,x,w) \right| &< K_5 \cdot R \cdot S + K_6 \cdot e^{-\lambda(R)\varepsilon - \mu(S)\varepsilon} \left[8 + 3\sqrt{1+\frac{(y-y_0)^2}{\varepsilon^2}} + \right. \\ &\left. + 3\sqrt{1+\frac{(v-v_0)}{\varepsilon^2}} + 2\sqrt{1+\frac{(y-y_0)^2}{\varepsilon^2}} \cdot \sqrt{1+\frac{(v-v_0)^2}{\varepsilon^2}} \right] + \\ &+ K_6 \cdot \sqrt{1+\frac{(y-y_0)^2}{\varepsilon^2}} \left(e^{-\lambda(R)\varepsilon} + 2e^{-\mu(S)\varepsilon} \right) + \\ &+ K_6 \sqrt{1+\frac{(v-v_0)^2}{\varepsilon^2}} \left(2e^{-\lambda(R)\varepsilon} + e^{-\mu(S)\varepsilon} \right) + \\ &+ K_6 \cdot \sqrt{1+\frac{(y-y_0)^2}{\varepsilon^2}} \cdot \sqrt{1+\frac{(v-v_0)^2}{\varepsilon^2}} \cdot \left(e^{-\lambda(R)\varepsilon} + e^{-\mu(S)\varepsilon} \right) \end{aligned} \qquad (30)$$

Supongamos ahora que es:

$$y: \quad \left. \begin{aligned} 0 \leq r \leq R \\ 0 \leq s \leq S \end{aligned} \right\}$$

entonces descompongamos $g(r,s,r,w)$ del siguiente modo:

$$g(r,s,z,w) = h(0,0,R,S) - h(0,s,r,S) - h(r,0,R,s) - h(r,s,R,S)$$

de donde se deduce inmediatamente que:

$$|g(r,s,z,w)| < 2K_5 . R . S \qquad (31)$$

Supongamos ahora que sea:

$$y: \left.\begin{array}{l} 0 \leq R \leq r \\ 0 \leq s \leq S \end{array}\right\}$$

descompongamos la función $g(r,s,z,w)$ en la siguiente forma:

$$g(r,s,z,w) = h(0,0,R,s) + h(R,0,r,s),$$

en cuanto a $h(0,0,R,s)$ | se tiene que:

$$|h(0,0,R,s)| < K_5 . R . s \leq K_5 . R . S. \qquad (33)$$

Además, siguiendo el mismo procedimiento que para llegar a la [27] se tiene:

$$|h(R,0,r,s)| < K_6 . e^{-\lambda(R)\varepsilon} . \left[2 + 2\sqrt{1 + \frac{(y-y_0)^2}{\varepsilon^2}} + \right.$$

$$\left. + 2\sqrt{1 + \frac{(v-v_0)^2}{\varepsilon^2}} + \sqrt{1 + \frac{(y-y_0)^2}{\varepsilon^2}} . \sqrt{1 + \frac{(v-v_0)^2}{\varepsilon^2}} \right] \qquad (34)$$

De [32], [33] y [34] se tiene:

$$|g(r,s,z,w)| < K_5 . R . S + K_6 . e^{-\lambda(R)\varepsilon} . \left[2 + 2\sqrt{1 + \frac{(y-y_0)^2}{\varepsilon^2}} + \right.$$

$$\left. + 2\sqrt{1 + \frac{(v-v_0)^2}{\varepsilon^2}} + \sqrt{1 + \frac{(y-y_0)^2}{\varepsilon^2}} . \sqrt{1 + \frac{(v-v_0)^2}{\varepsilon^2}} \right] \qquad (35)$$

Supongamos que se tenga:

$$\left.\begin{array}{l} 0 \leq r \leq R \\ 0 \leq S \leq s \end{array}\right\}$$

Análogamente al método seguido para establecer la (35) se prueba que:

$$|g(r,s,z,w)| < K_5 . R . S + K_6 . e^{-\mu(S)\varepsilon} \left[2 + 2\sqrt{1 + \frac{(y-y_0)^2}{\varepsilon^2}} + \right.$$

$$\left. + 2\sqrt{1 + \frac{(v-v_0)^2}{\varepsilon^2}} + \sqrt{1 + \frac{(y-y_0)^2}{\varepsilon^2}} . \sqrt{1 + \frac{(v-v_0)^2}{\varepsilon^2}} \right] \qquad (36)$$

Tenemos ahora:

$$R = +\sqrt{|y|} \quad y \quad s = +\sqrt{|v|}$$

entonces los cocientes de los segundos miembros de [30],[33],[35] y [36] por $y.v$ tienden a cero si y y v tienden ∞, luego dado un $\delta > 0$ arbitrario, existen un $y_1 \equiv y_1(\varepsilon, \delta) \geq 0$ y un $v_1 \equiv v_1(\varepsilon\, \delta) \geq 0$; tales que dichos cocientes son menores que δ para $|y| \geq y_1$ y $|v| \geq v_1$; por consiguiente, llamando $R_1 = +\sqrt{y_1}$; $S_1 = +\sqrt{v_1}$ se tiene que:

$$\left| \frac{g(r,s,x,w)}{y.v} \right| < \delta \qquad (15)$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{según [30], si es } 0 \leq R_1 \leq r \text{ y } 0 \leq S_1 \leq s, \\ \text{según [33], si es } 0 \leq r \leq R_1 \text{ y } 0 \leq s \leq S_1 \\ \text{según [35], si es } 0 \leq R_1 \leq r \text{ y } 0 \leq s \leq S_1 \\ \text{y según [36], si es } 0 \leq r \leq R_1 \text{ y } 0 \leq S_1 \leq s \end{array}\right\}$$

Tomando límites para $(r,s) \to (+\infty, +\infty)$ en ambos mimbros de [15] (el límite del primer miembro existe en virtud del corolario I del teorema I), se tiene:

$$\lim \frac{f(x-w)}{y.v} = 0, \text{ para } (y,v) \to (\infty, \infty).$$

uniformementes en los semiplanos $x \geq x_0 + \varepsilon$; $u \geq u_0 + \varepsilon$.

2.-- Integrales y series ordinarias.

Definición: Diremos que la integral [1] es una integral doble determinante ordinaria, cuando sea:

$$\lambda(r) = r \qquad y \qquad \mu(s) = s. \quad .$$

La serie doble correlativa de una integral doble determinante ordinaria será entonces:

$$\sum_0^\infty \sum_0^\infty \varphi_{r,s} \cdot e^{-r.z - s.w} = \sum_0^\infty \sum_0^\infty \varphi_{r,s} \cdot (e^{-z})^r \cdot (e^{-w})^s =$$

$$= \sum_0^\infty \sum_0^\infty \varphi_{r,s} \cdot z'^r \cdot w'^s.$$

esto es, es una serie doble de potencias en z' y w' siendo:

$$z' = e^{-z} \qquad y \qquad w' = e^{-w}$$

Un caso sencillo y muy frecuente en el cual se puede asegurar la existencia de dos semiplanos en los cuales converge la integral doble determinante ordinaria:

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \varphi(r,s) . e^{-rz - s.w} . dr . ds$$

es cuando existe un punto (z_0, w_0) tal que en él la función :

$$\alpha(r,s) \equiv \varphi(r,s) \cdot e^{-rz_0 - s.w_0}$$

esté acotada respecto de r y de s . En efecto, en tal hipótesis es:

$$|\Phi(r,s)| < K . r . s \qquad (K = \text{constante})$$

esto es, estamos en el teorema I. Más general aún, es suficiente que se verifique:

$$|\alpha(r,s)| < K_1 . r^k . s^{k'}$$

(siendo K_1; k y k' constantes cualesquiera positivas)

La propiedad correlativa para las series dobles de potencias constituye un resultado clásico, a saber: si la sucesión doble:

$$\varphi_{r,s} \cdot z'^r_0 \cdot w'^s_0$$

está acotada la serie doble:

$$\sum_{0}^{\infty}\sum_{0}^{\infty} \varphi_{r,s} \cdot z'^{r} \cdot w'^{s}$$

converge absolutamente en todo punto (z', w') tal que:

$$|z'| < |z'_0| \qquad y \qquad |w'| < |w'_0|;$$

de cuyo resultado, como es sabido, se deduce la existencia de los radios asociados de convergencia absoluta.

Teorema IV):

La función $f(z,w)$ definida por una integral doble determinante ordinaria, cumple la condición:

$$\lim_{(y,v)\to(\infty,\infty)} \frac{f(x,w)}{y^{k} \cdot v^{k'}} = 0$$

La función $f_1(z,w)$ definida por una serie doble de potencias (en e^{-z} y e^{-w}) cumple la condición:

$$\lim_{(y,v)\to(\infty,\infty)} \frac{f(x,w)}{y^{k} \cdot v^{k'}} = 0$$

por pequeños que sean los números positivos k y k' uniformemente en los semiplanos $x \geqslant x_0 + \varepsilon$ y $u \geqslant u_0 + \varepsilon$.

Demostración: Como la desigualdad [35] se verifica uniformemente en los semiplanos $x \geqslant x_0 + \varepsilon$ y $u \geqslant u_0 + \varepsilon$ y en los intervalos $(0 \leq r < +\infty)$ y $(0 \leq s < +\infty)$, tomando $R = S = |y|^{\frac{k}{4}} + |v|^{\frac{k}{4}}$, y haciendo tender r y s simultánea e independientemente a $+\infty$; se deduce que:

$$\left| \frac{f(x,w)}{y^{k} \cdot v^{k'}} \right| \leq$$

$$\leq K_5 \left(\frac{1}{|y|^{\frac{k}{2}} \cdot |v|^{k'}} + \frac{1}{|y|^{k} \cdot |v|^{\frac{k'}{2}}} + \frac{2}{|y|^{\frac{3}{4}k} \cdot |v|^{\frac{3}{4}k'}} \right) +$$

$$+ K_6 \cdot e^{-2\varepsilon\left(|y|^{\frac{k}{4}} + |v|^{\frac{k'}{4}}\right)} \cdot |y|^{-k} \cdot |v|^{-k'} \cdot$$

$$\cdot \left(8 + 3\sqrt{1 + \frac{(y-y_0)^2}{\varepsilon^2}} + 3\sqrt{1 + \frac{(v-v_0)^2}{\varepsilon^2}} + \right.$$

$$\left. + 2\sqrt{1 + \frac{(y-y_0)^2}{\varepsilon^2}} \sqrt{1 + \frac{(v-v_0)^2}{\varepsilon^2}} \right) +$$

$$+ 3K_6 \cdot \frac{e^{-\varepsilon\left(|y|^{\frac{k}{4}} + |v|^{\frac{k'}{4}}\right)}}{|y|^{k} \cdot |v|^{k'}} \cdot \sqrt{1 + \frac{(y-y_0)^2}{\varepsilon^2}} +$$

$$+ 3K_6 \cdot \frac{e^{-\varepsilon\left(|y|^{\frac{k}{4}} + |v|^{\frac{k'}{4}}\right)}}{|y|^{k} \cdot |v|^{k'}} \cdot \sqrt{1 + \frac{(v-v_0)^2}{\varepsilon^2}} +$$

$$+ 2K_6 \cdot e^{-\varepsilon\left(|y|^{\frac{k}{4}} + |v|^{\frac{k'}{4}}\right)} \cdot \sqrt{1 + \frac{(y-y_0)^2}{\varepsilon^2}}$$

$$\sqrt{1 + \frac{(v-v_0)^2}{\varepsilon^2}} \cdot |y|^{-k} \cdot |v|^{-k'}$$

el segundo miembro de esta desigualdad tiende a cero si $(y,v) \to (\infty,\infty)$, ~~$(\infty,\infty)$~~, uniformemente en los semiplanos $x \geqslant x_0 + \varepsilon$ y $u \geqslant u_0 + \varepsilon$, luego en ellos mismos se verifica uniformemente que:

$$\lim_{(y,v)\to(\infty,\infty)} \left(\frac{f(x,w)}{y^k \cdot v^{k'}}\right) = 0. \qquad (39)$$

La demostración del teorema para la serie doble es exactamente análoga.

Teorema V): En el recinto D' del plano de las w, definido por:

$u \geqslant u_0 + \varepsilon$; $0 \leq |v - v_0| \leq k(u - u_0)$ y en el semiplano $x \geqslant x_0 + \varepsilon$, se verifica uniformemente que:

$$(40) \qquad \lim_{y\to\infty} \left(\frac{f(x,w)}{y^k}\right) = 0 \quad \Bigg| \quad \lim_{y\to\infty} \left(\frac{f_1(x,w)}{y^k}\right) = 0 \qquad (40')$$

y análogamente: en el recinto D del plano z, definido po: $x \geqslant x_0 + \varepsilon$; $0 \leq |y - y_0| \leq k(x - x_0)$, y an el semiplano $u \geqslant u_0 + \varepsilon$, se verifica uniformemente que:

$$(41) \qquad \lim_{v\to\infty} \left(\frac{f(x,w)}{v^{k'}}\right) = 0 \quad \Bigg| \quad \lim_{v\to\infty} \left(\frac{f_1(x,w)}{v^{k'}}\right) = 0 \qquad (41')$$

cualesquiera que sean los valores $k \geqslant 1$ y $k' \geqslant 1$.

Demostración: Demostremos la —igualdad [40]; puesto que análogamente

se prueba la [41] para $k=1$, puesto que si ella se verifica para este valor de k se verifica evidentemente para todo valor mayor. Con un raciocinio casi idéntico al seguido para obtener la relación [35] se tiene:

$$
\begin{aligned}
|f(x,w)| \leq K_5 . R . S &+ K_6 . e^{-\lambda(R)\varepsilon} e^{-\mu(S)\varepsilon} \Big[8 + 3\sqrt{1+k^2} + \\
&+ 3\sqrt{1+\frac{(y-y_0)^2}{\varepsilon^2}} + 2\sqrt{1+k^2} . \sqrt{1+\frac{(y-y_0)^2}{\varepsilon^2}} \Big] + \\
&+ K_6 . \sqrt{1+\frac{(y-y_0)^2}{\varepsilon^2}} \left(e^{-\lambda(R)\varepsilon} + 2 e^{-\mu(S)\varepsilon} \right) + \\
&+ K_6 . \sqrt{1+k^2} \left(2 e^{-\lambda(R)\varepsilon} + e^{-\mu(S)\varepsilon} \right) + \\
&+ K_6 . \sqrt{1+k^2} \sqrt{1+\frac{(y-y_0)^2}{\varepsilon^2}} \left(e^{-\lambda(R)\varepsilon} + e^{-\mu(S)\varepsilon} \right)
\end{aligned}
$$

Ahora bien, tomando: $R = +\sqrt{|y|}$ y $S = 1$, de esta última desigualdad se deduce que:

$$\lim_{y \to \infty} \left(\frac{f(x,w)}{y} \right) = 0$$

uniformemente en el semiplano $x \geqslant x_0 + \varepsilon$ y en el recinto D'.

Si la integral [1] es determinante ordinaria, se verifica que:

$$\lim_{y \to \infty} \left(\frac{f(x,w)}{y^k} \right) = 0$$

para todo $k > 0$ uniformemente en el semiplano $x \geqslant x_0 + \varepsilon$ y en el recinto D y además:

$$\lim_{v \to \infty} \left(\frac{f(x,w)}{v^{k'}} \right) = 0$$

para todo $k' > 0$; uniformemente en semiplano $u \geqslant u_0 + \varepsilon$ y en el recinto D.

En efecto, basta tener en cuenta en la desigualdad [35] que: $\lambda(R) = R$ y: $\mu(S) = S$ y tomar en ella $R = |y|^{\frac{k}{2}}$ y $S = 1$.

Análogamente, si la serie [1] es una serie doble de potencias en e^{-x} y e^{-w}, se verifica que:

$$\lim_{y \to \infty} \left(\frac{f_1(x,w)}{y^k} \right) = 0$$

para todo $k > 0$ uniformemente en el semiplano $x \geqslant x_0 + \varepsilon$ y en el recinto D' y además:

$$\lim_{y \to \infty} \left(\frac{f_1(z, w)}{v^k} \right) = 0$$

para todo $k > 0$; uniformemente en el semiplano $x \geqslant x_0 + \varepsilon$ y en el recinto D' .

Teorema VI): Tomando $x - x_0 \geqslant u - u_0$ se tiene que:

$$\lim_{y \to \infty} \left(\frac{f(z, w)}{y} \right) = 0 \qquad \Bigg| \qquad \lim_{y \to \infty} \left(\frac{f_1(z, w)}{y} \right) = 0$$

uniformemente en el semiplano $x \geqslant x_0 + \varepsilon$ y en el recinto D'_1 de plano w , definido por $u \geqslant u_0 + \varepsilon$; $0 \leq |v - v_0| \leq e^{M(u - u_0)} - 1$;
y análogamente:

$$\lim_{v \to \infty} \left(\frac{f(z, w)}{v} \right) = 0 \qquad \Bigg| \qquad \lim_{v \to \infty} \left(\frac{f_1(z, w)}{v} \right) = 0$$

uniformemente en el semiplano $u \geqslant u_0 + \varepsilon$ y en el recinto D' del plano z definido por $x \geqslant x_0 + \varepsilon$; $0 \leq |y - y_0| \leq e^{M(x - x_0)} - 1$.
La demostración se deduce fácilmente de ( )
Los teoremas III, IV. V y VI nos sugieren la oportunidad de las siguientes definiciones, para funciones cualesquiera que posean semiplanos de holomorfismo.

3.-- Orden de una función

Orden de $f(z, w)$ sobre las rectas $x = \alpha$, $u = \beta$.
Supongamos que la función $f(z, w)$ sea holomorfa en los semiplanos $x_0 > x_0$ y $u > u_0$; y sean α y β valores reales mayores que x_0 y u_0 respectivamente.
Consideramos la función:

$$F(y, v, \theta) \equiv \left| \frac{f(\alpha + i y; \beta + i v)}{(y v)^{\theta}} \right|$$

donde θ es un número real.

Si existe un valor η, tal que para $\theta = \eta$ el límite superior de oscilación de $F(y, v, \theta)$, si $(y, v) \to (\infty, \infty)$, es finito, para todo valor de $\theta > \eta$ el límite superior de $F(y, v, \theta)$, si $(y, v) \to \infty, \infty)$, será, evidentemente, también finito, Además si existe un valor η_1 tal quepara $\theta = \eta_1$ límite superior $F(y, v, \theta)$, si $(y, v) \to (\infty, \infty)$ es infinito, para todo valor de $\theta < \eta_1$ el límite superior de $F(y, v, \theta)$, si $(y, v) \to (\infty, \infty)$, será también evidentemente infinito. Luego, por un razonamiento clásico se deduce la existencia de un número real finito, ξ, $(\eta_1 \leq \xi \leq \eta)$, tal que para $\theta > \xi$ el límite superior de $F(y, v, \theta)$, si $(y, v) \to (\infty, \infty)$, es finito, y dicho límite para $\theta < \xi$ es infinito. A este número ξ lo llamaremos orden de $f(x w)$ sobre las rectas $x = \alpha$ y $u = \beta$.

El número ξ que, evidentemente es función de α y de β puede expresarse algorítmicamente en la forma:

$$\xi(\alpha, \beta) = \xi = \overline{\lim_{(y,v) \to (\infty,\infty)}} \cdot \frac{\log |f(\alpha + iy; \beta + iv)|}{\log |yv|}.$$

Si el límite superior de $F(y, v, \theta)$, para $(y, v) \to (\infty, \infty)$, cualquiera que sea θ es infinito, diremos que el orden de $f(x, w)$ sobre las rectas $x = \alpha$ y $u = \beta$ es $+\infty$ esto es: $\xi = +\infty$; y si dicho límite, cualquiera que sea θ es finito, diremos que el orden de $f(x, w)$ sobre las rectas $x = \alpha$ y $u = \beta$ es $-\infty$ esto es: $\xi = -\infty$.

Orden de $f(x, w)$ en los semiplanos $x \geq \alpha$ y $u \geq \beta$.

Si el orden de $f(x, w)$ sobre las rectas $x = \alpha$ y $u = \beta$ es finito o $-\infty$ existe, en virtud de la definición una constante positiva K, tal que para valores suficientemente grandes de y y de v se verifica:

$$\left| \frac{f(x + iy; u + iv)}{(yv)^{\eta}} \right| < K \qquad (42)$$

siempre que x y w varien sobre las rectas $x = \alpha$ y $u = \beta$.

Ahora bién, puede suceder que la acotación [42] se verifique uniformemente en los semiplanos $x \geqslant \alpha$ y $u \geqslant \beta$; esto es: que exista una constante K (independiente de x, u, y, v)) tal que cualesquiera que sean $x \geqslant \alpha$; $u \geqslant \beta$; $|y| \geqslant y_0 \equiv y_0(K) \geqslant 0$; $|v| \geqslant v_0 \equiv v_0(K) \geqslant 0$ se tenga:

$$\left| \frac{f(z,w)}{(y,v)^{\eta}} \right| < K \qquad (43)$$

por lo tanto, por las mismas consideraciones de más arriba, se deduce la existencia de un valor real γ (que es evidentemente función de α y de β) tal que la acotación [42] se verifica para $\eta > \gamma$, uniformemente en dichos semiplanos para $\eta < \gamma$. A este número $\gamma \equiv \gamma(\alpha, \beta)$ que satisface a la relación $\gamma(\alpha, \beta) \geqslant \xi(\alpha, \beta)$ lo llamaremos orden de la función $f(z,w)$ en los semiplanos $x \geqslant \alpha$ y $u \geqslant \beta$.

Cuando la acotación [42] se verifica uniformemente en los semiplanos $x \geqslant \alpha$ y $u \geqslant \beta$ para todo valor de η diremos que el orden de $f(z,w)$ en dichos semiplanos es $-\infty$, esto es: $\gamma(\alpha, \beta) = -\infty$ y si la acotación [42] no se verifica uniformemente en los semiplanos $x \geqslant \alpha$ y $u \geqslant \beta$ para ningún valor de η diremos que el orden de $f(z,w)$ en tales semiplanos es $+\infty$ esto es: $\gamma(\alpha, \beta) = +\infty$.

El número $\gamma \equiv \gamma(\alpha, \beta)$ puede expresarse algorítmicamente en la forma:

$$\gamma(\alpha, \beta) \equiv \gamma \equiv \overline{\lim_{(y,v) \to (\infty, \infty)}} \frac{\log E(\alpha + iy; \beta + iv)}{\log |y \cdot v|}$$

donde con $E(\alpha + iy; \beta + iv)$ indicamos el extremo superior de la función $f(x + iy; u + iv)$ para $x \geqslant \alpha$ y $u \geqslant \beta$.

Se puede definir en forma análoga el orden de $f(z,w)$ para $x > \alpha$ y $u > \beta$ o $x \geqslant \alpha$ y $u > \beta$ o $x > \alpha$ y $u \geqslant \beta$ o $\alpha \leq x \leq \alpha'$ y $\beta \leq u \leq \beta'$, etc.

Cabe hacer análogas consideraciones tomando la acotación:

$$\left| \frac{f(x + iy; u + iv)}{y^{\eta} \cdot v^{\eta}} \right| < K.$$

en lugar de la [42], siendo η y η' distintos (o como caso particular iguales). En tal caso se presentarían las nociones de órdenes asociados para $f(z,w)$. Más general aún cabría considerar la acotación:

$$\left| \frac{f(x+iy;\, u+iv)}{\pi(y,v)} \right| < K.$$

para $(y,v) \to (\infty,\infty)$, siendo $\pi(y,v)$ una función de y y de v tal que:

$$\lim_{(y,v)\to(\infty,\infty)} \pi(y,v) = \infty \qquad y \qquad \lim_{(y,v)\to(0,0)} \pi(y,v) = 0 .$$

Pero estos puntos de vista tan generales no los hemos de tomar en cuenta

En virtud del teoremaIII se deduce que:

Si $f(z,w)$ está definida por una integral doble de Dirichlet (por una serie doble de Dirichlet) tal que en un punto (x_0, w_0) se verifican las dos condiciones del teorema III (la condición del teorema III) se tiene:

$$\gamma(x_0+\varepsilon;\, u_0+\varepsilon) \leq 1$$

$\varepsilon > 0$; y por lo tanto el orden de $f(z,w)$ en los semiplanos $x \geqslant x_0$ y $u > u_0$ (excluyendo la igualdad) es menor o igual que uno.

Cuando $f(z,w)$ viene definida por una integral doble o por una serie doble de Dirichlet la función - orden de $f(z,w)$ en las fajas $\alpha \leq x \leq \alpha'$ y $\beta \leq u \leq \beta'$ goza de una propiedad interesante, a saber:

Teorema VII)

Supongamos que la función $f(z,w)$ definida por la integral [1] (por la serie [1']) además de verificar las dos hipótesis del teorema III (la hipótesis del teorema III), cumple las condiciones siguientes: existen dos pares de valores reales (α_2, α_1) y (γ_2, γ_1) siendo:

$$y: \quad \left.\begin{array}{l} \alpha_2 > \alpha_1 > x_0 \\ \gamma_2 > \gamma_1 > u_0 \end{array}\right\}$$

tales que sobre las rectas $x = \alpha_1$; $u = \gamma_1$, $x = \alpha_2$, $u = \gamma_2$, la función $f(z,w)$ está acotada. En tales hipótesis $f(z,w)$ está también acotada en las fajas $\alpha_1 \leq x \leq \alpha_2$; $\gamma_1 \leq u \leq \gamma_2$.

Demostración : Sin restringir la generalidad podemos suponer que α_1 y γ_1 son positivos. Sea ε una constante positiva menor que las diferencias $\alpha_1 - x_0$ y $\gamma_1 - u_0$. Sea τ un valor positivo (que luego haremos tender a $+\infty$) y construyamos en el plano de las z un rectángulo E de vértices:

$$\alpha_1 + i\tau;\ \alpha_1 - i\tau;\ \alpha_2 - i\tau;\ \alpha_2 + i\tau;$$

y en el plano de las w otro rectángulo E' de vértices:

$$\gamma_1 + i\tau;\ \gamma_1 - i\tau;\ \gamma_2 - i\tau;\ \gamma_2 + i\tau.$$

Sea δ un número positivo arbitrario y consideremos la función:

$$t(z,w) = e^{\delta x^2 + \delta w^2} \cdot f(z,w);$$

que es homorfa en los semiplanos $x \geqslant x_0 + \varepsilon$ y $u \geqslant u_0 + \varepsilon$ (por serlo en ellos mismos la $f(z,w)$).

Según [44] es:

$$|t(z,w)| = e^{\delta(x^2 - y^2) + \delta(u^2 - v^2)} \cdot |f(z,w)| = e^{-\delta y^2 - \delta v^2} \cdot |f(z,w)| \cdot e^{\delta x^2 + \delta u^2}. \qquad [45]$$

Si z y w varían en las fajas mencionadas, es decir si es:

$$\left.\begin{array}{l} 0 < \alpha_1 \leq x \leq \alpha_2 \\ \text{y:}\ \ 0 < \gamma_1 \leq u \leq \gamma_2 \end{array}\right\}$$

se tiene:

$$h' \equiv e^{\delta \alpha_1^2 + \delta \gamma_1^2} \leq e^{\delta x^2 + \delta u^2} < e^{\delta \alpha_2^2 + \delta \gamma_2^2} \equiv k \qquad (k \text{ y } k' = \text{constantes})$$

por lo tanto, según [45] en las fajas (incluso sus contornos) se tiene:

$$|t(z,w)| \leq k \cdot e^{-\delta y^2 - \delta v^2} \cdot |f(z,w)| \leq k \cdot |f(z,w)| \qquad [46]$$

Probemos que la funcion $t(z,w)$ está acotada sobre los contornos de los rectángulos E y E' tomando τ suficientemente grande.

Por hipótesis, si z y w varían sobre los lados verticales de dichos rectángulos el módulo de $f(z,w)$ se mantiene inferior a una constante K, luego según [46] sobre los mismos lados será:

$$|t(z,w)| < K \cdot k.$$

Como la desigualdad [35] se verifica uniformemente en los semiplanos $x \geqslant x_0 + \varepsilon$ y $u \geqslant u_0 + \varepsilon$ y en los intervalos $(0 \leq r < +\infty)$ y $(0 \leq s < +\infty)$,

si tomamos límites en ambos miembros de ella para $(r,s)\to(+\infty,+\infty)$;

se tiene uniformemente en dichos semiplanos que:

$$|f(z,w)| \le K_5 \cdot R.S + K_5 \cdot e^{-\lambda(R)\varepsilon - \mu(S)\varepsilon}$$
$$\left[8+3\sqrt{1+\frac{(y-y_0)^2}{\varepsilon^2}}+3\sqrt{1+\frac{(v-v_0)^2}{\varepsilon^2}}+\right.$$
$$\left.+2\sqrt{1+\frac{(y-y_0)^2}{\varepsilon^2}}\cdot\sqrt{1+\frac{(v-v_0)^2}{\varepsilon^2}}\right]+$$
$$+K_6\sqrt{1+\frac{(y-y_0)^2}{\varepsilon^2}}\cdot\left(e^{-\lambda(R)\varepsilon}+2e^{-\mu(S)\varepsilon}\right)+$$
$$+K_6\sqrt{1+\frac{(v-v_0)^2}{\varepsilon^2}}\cdot\left(2e^{-\lambda(R)\varepsilon}+e^{-\mu(S)\varepsilon}\right)+$$
$$+K_6\cdot\sqrt{1+\frac{(y-y_0)^2}{\varepsilon^2}}\sqrt{1+\frac{(v-v_0)^2}{\varepsilon^2}}\cdot\left(e^{-\lambda(R)\varepsilon}+e^{-\mu(S)\varepsilon}\right) \qquad [47]$$

Si hacemos variar sobre el lado $\alpha_1+i\tau$; $\alpha_1-i\tau$ y w sobre el lado $\gamma_1-i\tau$; $\gamma_2-i\tau$, y tenemos en cuenta que sobre el primer lado es: $|y-y_0|\le|\tau-y_0|$ de [47] se deduce tomando $R=S=+\sqrt{\tau}$ que:

$$\lim_{\tau\to+\infty}\frac{f(z,w)}{\tau^2}=0;$$

de donde si τ es mayor que una cierta constante τ_0 se deduce:

$$|f(z,w)|<\tau^2$$

y según: [46]:

$$|t(z,w)|<k_1 e^{-\delta y^2-\delta\tau^2}\cdot\tau^2\le k\cdot\frac{\tau^2}{e^{\delta_0\tau^2}}$$

de donde:

$$\lim_{\tau\to+\infty} t(z,w)=0$$

por lo tanto para todo τ mayor que un cierto valor fijo $\tau_1(\tau_1>\tau_0)$ es:

$$|t(z,w)|<K.k$$

y análogamente se demuestra que esta acotación se verifica sobre los otros pares de lados de los rectángulos E y E'.

Ahora bién, sea z_1 un punto cualquiera interior a la fàja, $\alpha_1\le x\le\alpha_2$, del plano z y w_1 otro punto cualquiera interior a la faja, $\gamma_1\le u\le\gamma_2$ del plano w; si tomamos τ_1 mayor que $|y_1|$ y que $|v_1|$ el punto z_1 es interior al rectángulo E y el w_1 interior al E', y como sobre los contornos de estos rectángulos la función $t(z,w)$ está acotada, según hemos demostrado más arriba, por un resultado clásico se tiene: $|t(z_1,w_1)|<K.k$

y como de [45] se deduce:

$$|f(z_1,w_1)| < K.k.e^{\delta(y_1^2 - x_1^2 + \frac{2}{1}u_1^2)}$$

si tomamos límites en esta desigualdad para $\delta \to 0$, se tiene:

$$|f(z_1,w_1)| \leq K.k$$

Es decir la función $f(z,w)$ está acotada en el interior de las fajas $\alpha_1 \leq x \leq \alpha_2$ y $\gamma_1 \leq u \leq \gamma_2$.

Supongamos ahora que una de las variables está en el contorno de su faja correspondiente y la otra en el interior de la suya; por ejemplo sea z_2 un punto cualquiera de abscisa α_1 y w_1 un punto cuya abscisa esté comprendida entre γ_1 y γ_2. Tomando z_1 en un entorno suficientemente pequeño de z_2 interior a la faja del plano z, en virtud de la continuidad de $f(z,w)$ se tiene:

$$|f(z_2,w_1) - f(z_1,w_1)| < 1$$

y por ser:

$$f(z_2,w_1) = \left(f(z_2,w_1) - f(z_1,w_1)\right) + f(z_1,w_1)$$

se deduce que:

$$|f(z_2,w_1)| < 1 + K.k$$

El teorema queda, pues, completamente probado.

Nota: Si se sabe que $f(z,w)$ está acotada, y su cota, es K cuando x varía sobre las rectas $x = \alpha_1$, $x = \alpha_2$ y sobre el segmento (α_1,α_2) del eje real x, y w varía sobre las rectas $u = \gamma_1$, $u = \gamma_2$; y sobre el segmento (γ_1,γ_2) del eje real u usando la función:

$$t_1(z,w) = e^{\delta z i + \delta w i}.f(z,w)$$

se prueba, siguiendo el mismo raciocinio que en este último teorema, que en las fajas (contornos exclusos):

$$\left.\begin{array}{ll} & \alpha_1 < x < \alpha_2 \\ y: & \gamma_1 < u < \gamma_2 \end{array}\right\}$$

es:

$$|f(z,w)| \leq K$$

y si incluimos sus contornos es:

$$|f(z,w)| < K+1,$$

En cambio, usando la misma función, $t(z,w)$, que la del teorema se deduce que en dichas fajas sin contornos es: $|f(z,w)| < K$ (excluyendo el caso de igualdad) y en las fajas mencionadas incluyendo sus respectivas contornos es:

$$|f(z,w)| < K+k$$

siendo k un número positivo tan pequeño como se quiera, donde:

$$|f(z,w)| \leq K$$

4.-- Inversión de la Integral y Serie Doble de Dirichlet.--

Se plantea ahora el problema, análogo al Riemann, para la integral determinante ordinaria y al de Hadamard-Perron para la serie simple general de Dirichlet, de invertir la integral [1] y la serie [1'] esto es: conociendo la función $f(z,w)$ (la función $f_1(z,w)$) y las funciones $\lambda(r)$ y $\mu(s)$ (y las sucesiones λ_r y μ_s) calcular la función generatriz $\Phi(r,s)$ (la sucesión generatriz φ_{rs}).

Resolveremos el problema primero para la serie con una hipótesis restrictiva (que haya un par de puntos ($z=p$ y $w=q$ en el cual la serie converge absolutamente) y luego en general y para las integrales.

Teorema VIII):

Supongamos que la serie doble de Dirichlet:

$$f_1(z,w) \equiv \sum_0^\infty \sum_0^\infty \varphi_{rs} \cdot e^{-\lambda_r \cdot z - \mu_s \cdot w}$$

en la cual λ_r y μ_s son sucesiones monótonas crecientes) sea convergente absolutamente para $z=p$ y $w=q$, p y q reales.

Sean $\omega_1 \equiv \omega_r$ y $\omega_2 \equiv \omega_s$ sucesiones tales que:

$$\lambda_r < \omega_1 < \lambda_r+1 \quad y \quad \mu_s < \omega_2 < \mu_s+1.$$

(por ejemplo: $\omega_1 = \frac{\lambda_r+\lambda_r+1}{2}$ y $\omega_2 = \frac{\mu_s+\mu_s+1}{2}$)

Sean c y d números reales positivos tales que:

$$0 < c > p \qquad y \qquad 0 < d > q.$$

En tales hipótesis es:

$$\sum_{0}^{r}\sum_{0}^{s} \varphi_{r,s} = -\frac{1}{4\pi^2}\cdot \lim_{N\to-\infty}\int_{c-iN}^{c+iN}\int_{d-iN}^{d+iN} f_1(z,w)\cdot e^{\omega_1 z+\omega_2 w}\cdot \frac{dz}{z}\cdot\frac{dw}{w}. \qquad (48)$$

De donde, tomando la diferencia segunda primero con respecto a r y luego con respecto a s, o viceversa, se deduce la expresión de $\varphi_{r,s}$.

Demostración: Construyamos en el plano de las z un rectángulo $F_{r,s}$ que tenga por vértices:

$$c+iN;\ c-iN;\ \sqrt{N}-iN;\ \sqrt{N}+iN$$

y otro rectángulo F', en el plano de las w de vértices.

$$d+iN;\ d-iN;\ \sqrt{N}-iN;\ \sqrt{N}+iN$$

siendo N un número(que luego haremos tender a $+\infty$) mayor que $(c+1)^2$ y que $(d+1)^2$.

Consideremos primeramente la integral:

$$I_1 = -\frac{1}{4\pi^2}\cdot \lim_{N\to+\infty}\int_{c-iN}^{c+iN}\int_{d-iN}^{d+iN} e^{\alpha z+\beta}\cdot\frac{dz}{z}\cdot\frac{dw}{w} = \frac{1}{4\pi^2}\lim_{N\to+\infty} I_1'$$

donde α y β son ciertos parámetros.

La función I_1 puede descomponerse en la forma(por ser integral doble de variables separadas):

$$I_1' = \frac{1}{4\pi^2}\cdot\int_{c-iN}^{c+iN}\int_{d-iN}^{d+iN} e^{\alpha z+\beta}\cdot\frac{dz}{z}\cdot\frac{dw}{w} =$$

$$= \left[\frac{1}{2\pi i}\int_{c-iN}^{c+iN} e^{\alpha z}\cdot\frac{dz}{z}\right]\cdot\left[\frac{1}{2\pi i}\int_{d-iN}^{d+iN} e^{\beta w}\cdot\frac{dw}{w}\right]$$

Por ser $c>0$ y $d>0$ se tiene como es sabido:

$$\lim_{N \to +\infty} \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{c-iN}^{c+iN} e^{\alpha z} \cdot \frac{dz}{z} = 1$$

si es $\underline{\alpha > 0}$;

$$\lim_{N \to +\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{c-iN}^{c+iN} e^{\alpha z} \cdot \frac{dz}{z} = 0$$

si es $\underline{\alpha < 0}$;

$$\lim_{N \to +\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{d-iN}^{d+iN} e^{\beta z} \cdot \frac{dw}{w} = 1.$$

si es $\underline{\beta > 0}$; y;

$$\lim_{N \to +\infty} \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{d-iN}^{d+iN} e^{\beta z} \cdot \frac{dw}{w} = 0$$

si es $\underline{\beta < 0}$.

Por lo tanto:

$$I_1 = 1$$

si es $\underline{\alpha > 0}$ y $\underline{\beta > 0}$ y

$$I_1 = 0$$

si es $\underline{\alpha < 0}$ y $\underline{\beta < 0}$ ó $\underline{\alpha > 0}$ y $\underline{\beta < 0}$ ó $\underline{\alpha < 0}$ y $\underline{\beta > 0}$.

Pongamos:

$$g(z,w) \equiv e^{\omega_1 z + \omega_2 w} \left[f_1(z,w) - \sum_0^r \sum_0^s \varphi_{r,s} \cdot e^{-\lambda_r \cdot z - \mu_s \cdot w} \right] =$$

$$= f_1(z,w) \cdot e^{\omega_1 z + \omega_2 w} - \sum_0^r \sum_0^s \varphi_{r,s} \cdot e^{(\omega_1 - \lambda_r) z + (\omega_2 - \mu_s) \cdot w}$$

por lo tanto:

$$-\frac{1}{4\pi^2}\cdot\int_{c-iN}^{c+iN}\int_{d-iN}^{d+iN} g(z,w)\cdot\frac{dz}{z}\cdot\frac{dw}{w} = -\frac{1}{4\pi^2}\int_{c-iN}^{c+iN}\int_{d-iN}^{d+iN} f_1(z,w)\cdot e^{\omega_1 z+\omega_2 w}\cdot$$

$$\cdot\frac{dz}{z}\cdot\frac{dw}{w} - \sum_0^r\sum_0^s \varphi_{r,s}\left(-\frac{1}{4\pi^2}\cdot\int_{c-iN}^{c+iN}\int_{d-iN}^{d+iN} e^{(\omega_1-\lambda_r)z+(\omega_2-\mu_s)w}\cdot\frac{dz}{z}\cdot\frac{dw}{w}\right) \quad [49]$$

Como $\omega_1-\lambda_r>0$ para $r=0,1,2,3,\ldots,r-1,r$ y $\omega_2-\mu_s>0$ para $s=0,1,2,\ldots s-1,s$, en virtud de lo dicho más arriba y de la igualdad [49] se deduce:

$$-\frac{1}{4\pi^2}\cdot\lim_{N\to+\infty}\int_{c-iN}^{c+iN}\int_{d-iN}^{d+iN} g(z,w)\cdot\frac{dz}{z}\cdot\frac{dw}{w} = -\frac{1}{4\pi^2}\cdot$$

$$\cdot\lim_{N\to+\infty}\int_{c-iN}^{c+iN}\int_{d-iN}^{d+iN} f_1(z,w)\cdot e^{\omega_1 z+\omega_2 w}\cdot\frac{dz}{z}\cdot\frac{dw}{w} - \sum_0^r\sum_0^s \varphi_{r,s}\cdot$$

Por lo tanto la fórmula [48] de inversión estará demostrada si probamos que:

$$\lim_{N\to+\infty}\int_{c-iN}^{c+iN}\int_{d-iN}^{d+iN} g(z,w)\cdot\frac{dz}{z}\cdot\frac{dw}{w} = 0$$

Ahora bién, por otra parte se tiene:

$$f(z,w)-\sum_0^r\sum_0^s \varphi_{r,s}\cdot e^{-\lambda_r z-\mu_s\cdot w} = \sum_{r+1}^{\infty}\sum_{s+1}^{\infty}\varphi_{r,s}\cdot e^{-\lambda_r\cdot z-\mu_s\cdot w} +$$

$$+\sum_0^{r-1}\sum_{s+1}^{+\infty}\varphi_{r,s}\cdot e^{-\lambda_r\cdot z-\mu_s\cdot w} + \sum_{r+1}^{\infty}\sum_0^{s-1}\varphi_{r,s}\cdot e^{-\lambda_r-\mu_s\cdot w}$$

(esta descomposición es lícita en los semi-planos $x\geqslant p$ y $u\geqslant q$, porque la serie doble [1'] converge absolutamente en el punto (p,q); luego:

$$g(z,w) = G(z,w) + \sum_0^{r-1}\sum_{s+1}^{\infty}\varphi_{\rho,\eta}\cdot e^{-(\lambda_\rho-\omega_1)z-(\mu_\eta-\omega_2)w} +$$

$$+\sum_{r+1}^{\infty}\sum_0^{s-1}\varphi_{\rho,\eta}\cdot e^{-(\lambda_\rho-\omega_1)z-(\mu_\eta-\omega_2)\cdot w}$$

llamando:

$$G(z,w) \equiv \sum_{r+1}^{\infty}\sum_{s+1}^{\infty}\varphi_{\rho,\eta}\cdot e^{-(\lambda_\rho-\omega_1)z-(\mu_\eta-\omega_2)\cdot w}$$

Hagamos:

$$\left.\begin{aligned} \xi_\rho &\equiv \lambda_\rho - \omega_1 \\ \theta_\eta &\equiv \mu_\eta - \omega_2 \end{aligned}\right\} \quad y:$$

para: $\rho \geq r+1$ es $\xi_\rho > 0$; para $\rho \leq r$ es $\xi_\rho < 0$; para $\eta \geq s+1$ es $\theta_\eta > 0$ para $\eta \leq s$ es $\theta_\eta < 0$.

Con estas notaciones la función $g(z, w)$ se descompone del siguiente modo:

$$g(z,w) = G(z,w) + \sum_{0}^{r-1} \sum_{s+1}^{\infty} \varphi_{\rho,\eta} \cdot e^{-\xi_\rho \cdot z - \theta_\eta \cdot w} +$$

$$+ \sum_{r+1}^{\infty} \sum_{0}^{s-1} \varphi_{\rho,\eta} \cdot e^{-\xi_\rho \cdot z - \theta_\eta \cdot w}$$

Tomemos z sobre la recta $x = c$ y w sobre la recta $u = d$, por convergir absolutamente la serie [1'] en el punto $(x = p, w = q)$ tenemos:

$$\sum_{0}^{r-1} \sum_{s+1}^{\infty} |\varphi_{r,s}| \cdot e^{-\lambda_r \cdot x - \mu_s \cdot u} = \sum_{0}^{r-1} \sum_{s+1}^{\infty} |\varphi_{r,s}| \cdot e^{-\lambda_r \cdot c - \mu_s \cdot d} <$$

$$< \sum_{0}^{r-1} \sum_{s+1}^{\infty} |\varphi_{r,s}| \cdot e^{-\lambda_r \cdot p - \mu_s q} = \text{constante finita},$$

luego pueden integrarse término a término las series:

$$\sum_{0}^{r-1} \sum_{s+1}^{\infty} \varphi_{r,s} \cdot e^{-\lambda_r \cdot z - \mu_s \cdot w} \quad y \quad \sum_{r+1}^{\infty} \sum_{0}^{s-1} \varphi_{r,s} \cdot e^{-\lambda_r z - \mu_s \cdot w}$$

y en consecuencia también pueden integrarse término a término ~~a~~ las series:

$$\sum_{0}^{r-1} \sum_{s+1}^{\infty} \varphi_{\rho,\eta} \cdot e^{\xi_\rho \cdot z - \theta_\eta \cdot w} \quad y \quad \sum_{r+1}^{\infty} \sum_{0}^{s-1} \varphi_{\rho,\eta} \cdot e^{-\xi_\rho z - \theta_\eta \cdot w}$$

Por lo tanto:

$$-\frac{1}{4\pi^2} \cdot \lim_{N \to +\infty} \int_{c-iN}^{c+iN} \int_{d-iN}^{d+iN} \left(\sum_{0}^{r-1} \sum_{s+1}^{\infty} \varphi_{\rho,\eta} \cdot e^{-\xi_\rho \cdot z - \theta_\eta \cdot w} \right) \cdot \frac{dz}{z} \cdot \frac{dw}{w} = 0 \quad [51]$$

y:

$$-\frac{1}{4\pi^2}\cdot\lim_{N\to+\infty}\int_{c-iN}^{c+iN}\int_{d-iN}^{d+iN}\left(\sum_{r+1}^{\infty}\sum_{0}^{s-1}\varphi_{\xi,\eta}\cdot e^{-\xi_{e,z}-\theta_{\eta}\cdot w}\right)\cdot\frac{dz}{z}\cdot\frac{dw}{w}=0 \quad [52]$$

De las igualdades [50],[51],[52], y de lo dicho más arriba, se deduce que la formula [48] de inversión estará demostrada si logramos probar que:

$$\lim_{N\to+\infty}\int_{c-iN}^{c+iN}\int_{d-iN}^{d+iN}G(z,w)\cdot\frac{dz}{z}\cdot\frac{dw}{w}=0.$$

Como la función $f(z,w)$ es holomorfa en los semiplanos $x>p$ y $u>q$ también lo es $g(z,w)$ y como en los mismos semiplanos son holomorfas las sumas de las series

$$\sum_{0}^{r-1}\sum_{c+1}^{\infty}\varphi_{e,\eta}\,e^{-\xi_{e}z-\theta_{\eta}\cdot w} \quad \text{y} \quad \sum_{r+1}^{\infty}\sum_{0}^{s-1}\varphi_{\xi,\eta}\cdot e^{-\xi_{e}z-\theta_{\eta}\cdot w}$$

se deduce de [50] que $G(z,w)$ es también holomorfa en dichos semiplanos. Luego llamando R y R' a los contornos descriptos en sentido directo de los rectángulos F y F', respectivamente, se tiene (puesto que dichos rectángulos son interiores a los semiplanos $x>p$ y $u>q$ respectivamente) que:

$$\int_{(R)}\int_{(R')}G(z,w)\cdot\frac{dz}{z}\cdot\frac{dw}{w}=0$$

Por consiguiente:

$$-\int_{c-iN}^{c+iN}\int_{d-iN}^{d+iN}G(z,w)\cdot\frac{dz}{z}\cdot\frac{dw}{w}=Y_1+Y_2+Y_3+Y_4+Y_5+Y_6+Y_7+$$

$$+Y_8+Y_9+Y_{10}+Y_{11}+Y_{12}+Y_{13}+Y_{14}+Y_{15} \quad [53]$$

siendo Y_1 la integral de $\frac{G(z,w)}{z.w}$ sobre los lados $(c+iN, c-iN)$ y $(d-iN, \sqrt{N}-iN)$; Y_2 la integral de la misma función sobre los lados $(c+iN, c-iN)$ y $(\sqrt{N}-iN, \sqrt{N}+iN)$; y así sucesivamente.

Según (53) la fórmula de inversión [48] quedará probada si demostramos que el límite de cada una de estas quince integrales; para $N \to +\infty$ es cero. En efecto; haciendo variar z sobre el lado $(c+iN, c-iN)$ y w sobre el lado $(d-iN, \sqrt{N}-iN)$ se tiene:

$$|G(z,w)| \leq \sum_{r+1}^{\infty}\sum_{s+1}^{\infty} |\varphi_{\rho,\eta}| \cdot e^{-\xi_\rho \cdot c - \theta_\eta \cdot u} \leq$$

$$\leq \sum_{r+1}^{\infty}\sum_{s+1}^{\infty} |\varphi_{\rho,\eta}| \cdot e^{-\xi_\rho c - \theta_\eta \cdot d} \leq \sum_{0}^{\infty}\sum_{0}^{\infty} |\varphi_{\rho,\eta}| \cdot e^{-\xi_\rho \cdot c - \theta_\eta \cdot d} =$$

$$= e^{\omega_1 \cdot c + \omega_2 \cdot d} \cdot \sum_{0}^{\infty}\sum_{0}^{\infty} |\varphi_{\rho,\eta}| e^{-\lambda_\rho \cdot c - \mu_\eta \cdot d} \equiv K$$

$(K \equiv \text{constante})$ por lo tanto:

$$|Y_1| \leq K \cdot \int_{-N}^{N}\int_{d}^{\sqrt{N}} \frac{dy}{\sqrt{c^2+y^2}} \cdot \frac{du}{\sqrt{u^2+N^2}} =$$

$$= K \cdot \log\left[\frac{N+\sqrt{N^2+c^2}}{-N+\sqrt{N^2+c^2}}\right] \cdot \log\left[\frac{\sqrt{N}+\sqrt{N+N^2}}{d+\sqrt{d^2+N^2}}\right]$$

de donde:

$$\lim_{N \to +\infty} Y_1 = 0$$

análogamente se tiene:

$$\lim_{N \to +\infty} Y_3 = \lim_{N \to +\infty} Y_7 = \lim_{N \to +\infty} Y_{12} = 0$$

Si hacemos variar z sobre el lado $(c+iN, c-iN)$ y w sobre el lado $(\sqrt{N}-iN, \sqrt{N}+iN)$ se tiene:

$$|G(z,w)| \leq e^{\omega_1 c + (d+1)\left(\frac{\omega_2 + \mu_s + 1}{2}\right)} \cdot$$

$$\sum_{0}^{\infty}\sum_{0}^{\infty} |\varphi_{\rho,\eta}| \cdot e^{-\lambda_\rho c - \mu_\eta (d+1)} \cdot e^{-\frac{\theta_s+1}{2}\sqrt{N}} \equiv K' \cdot e^{-\frac{\theta_s+1}{2} \cdot \sqrt{N}}$$

$(K' = \text{constante})$

por lo tanto:

$$|Y_2| \leq K' \cdot e^{-\frac{\theta_s+1}{2} \cdot \sqrt{N}} \cdot \int_{-N}^{N} \frac{dy}{\sqrt{c^2+y^2}} \cdot \int_{-N}^{N} \frac{dw}{\sqrt{N+v^2}} =$$

$$= K'_{\cdot} e^{-\frac{\theta_3+1}{2}\cdot\sqrt{N}} \cdot \log\left[\frac{N+\sqrt{N^2+c^2}}{-N+\sqrt{N^2+c^2}}\right] \cdot \log\left[\frac{N+\sqrt{N^2+N}}{-N+\sqrt{N^2+N}}\right]$$

de donde:

$$\lim_{N\to+\infty} Y_2 = 0$$

Análogamente se prueba que las restantes integrales tienden a cero si $N \to +\infty$.

Luego la fórmula [48] de inversión está completamente demostrada.

La fórmula [48] es susceptible de una interesante generalización, esto es, válido el siguiente teorema y cuya demostración es análoga a la del teorema que acabamos de demostrar.

TeoremaIX):

Sean las mismas hipótesis y notaciones del teorema anterior; y h y h' dos números reales arbitrarios positivos (o iguales a cero, ambos o solamente uno de ellos.)

En tal hipótesis se verifica que:

$$\sum_{\lambda_r<Q_1}\sum_{\mu_s<Q_2} \varphi_{r,s}\cdot(\omega_1-\lambda_r)^h\cdot(\omega_2-\mu_s)^{h'} =$$

$$= -\frac{1}{4\pi^2}\cdot\Gamma(h+1)\cdot\Gamma(h'+1)\cdot\lim_{N\to+\infty}\int_{c-iN}^{c+iN}\int_{d-iN}^{d+iN} f_1(z,w)\cdot e^{\omega_1 z+\omega_2 w}\cdot$$

$$\cdot\frac{dz}{z^{1+h}}\cdot\frac{dw}{w^{1+h'}} \qquad [54]$$

Si es: $h = h' = 0$ se obtiene la fórmula de inversión dada por el teórema anterior.

La fórmula [48] de inversión así como su generalización [54] son aún susceptibles de generalizarse, cuando la serie doble (1') converge absolutamente en un punto (p, q) (siendo $p < 0$ y $q < 0$), puesto que entonces pueden tomarse integrales sobre rectas verticales

cuyas abscisas c y d sean negativas.

En la demostración de la fórmula [48] de inversión hemos supuesto que existe un punto (p, q) en el cual la serie doble (1') converge absolutamente. Tal hipótesis puede reemplazarse por esta otra más general. Existe un punto (p, q) en el cual la serie doble:

$$\sum_{0}^{\infty} \sum_{0}^{\infty} \varphi_{r,s} \cdot e^{-\lambda_r \cdot p - \mu_s \cdot q}$$

y las series simples:

$$\sum_{r=\infty}^{r=\infty} \varphi_{r,s} \cdot e^{-\lambda_r \cdot p} \qquad \text{para } s = 0, 1, 2, 3, \ldots\ldots, \infty)$$

$$\sum_{s=0}^{s=0} \varphi_{r,s} \cdot e^{-\mu_s \cdot q} \qquad \text{para } r = 0, 1, 2, 3 \ldots\ldots, \infty)$$

son convergentes; es decir: en el punto (p, q) no sólo converge la serie doble (1') sino quec converge por las filas y por las columnas.

Para las integrales la fórmula de inversión es:

Teorema: X):

Supongamos que la integral doble de Dirichlet:

$$f(z, w) \equiv \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \varphi(r, s) \cdot e^{-\lambda(r) \cdot z - \mu(s) \cdot w} \cdot dr \cdot ds$$

(en la cual $\lambda(r)$ y $\mu(s)$ son funciones monótonas crecientes, además de cumplir la condiciones impuestas a ellas desde el comienzo) sea convergente absolutamente para $z = p$ y $w = q$ siendo p y q valores reales. Sean c y d números reales positivos tales que:

$$0 < c > p \qquad y \qquad 0 < d > q.$$

En tales hipótesis es:

$$\int_0^{r} \int_0^{s} \varphi(r, s) \cdot dr \cdot ds = -\frac{1}{4\pi^2} \cdot \lim_{N \to +\infty} \int_{c-iN}^{c+iN} \int_{d-iN}^{d+iN} f(z, w) \cdot e^{\lambda(r) z + \mu(s) \cdot w} \cdot \frac{dz}{z} \cdot \frac{dw}{w}.$$

Si la integral que figura en el segundo miembro de (55) cumple las condiciones requeridas para poder derivar bajo el signo integral se obtiene:

$$\varphi(r,s) = -\frac{D\lambda(r)\cdot D\mu(s)}{4\pi^2}\cdot \lim_{N\to+\infty}\int_{c-iN}^{c+iN}\int_{d-iN}^{d+iN} f(z,w)\cdot e^{\lambda(r)z+\mu(s)w}\,dz\,dw.$$

(indicando con $D\lambda(r)$ lo derivada de $\lambda(r)$ respecto de r y con $D\mu(s)$ la derivada $\mu(s)$ con rescecto a s).

La demostración de este teorema es completamente análoga a la del (VIII).

Cabe hacer de la fórmula de inversión [55] análogas generalizaciones a las efectuadas con la fórmula (48)

5.-- Casos especiales.--

Caando a la función $f(z,w)$ (o a la $f_1(z,w)$) se le imponen condiciones de holomorfismo sobre ciertos conjuntos infinitos de puntos, se obtienen resultados interesantes sobre el campo de convergencia de la integral (1) (o de la serie (1')) como expresan los siguientes teoremas.

TeoremaXI): Si la función generatriz $\varphi(r,s)$ es positiva o nula, para cualquier valor de r y de s, y la función $f(z,w)$ definida por

$$f(z,w) \equiv \int_0^\infty\int_0^\infty \varphi(r,s)\cdot e^{-\lambda(r)z-\mu(s)w}\,dr\,ds.$$

es holomorfa para todo valor real de z y de w, entonces la integral:

$$\int_0^\infty\int_0^\infty \varphi(r,s)\,e^{-\lambda(r)z-\mu(s)w}\,dr\,ds.$$

es convergente para todo valor de z y para todo valor de w.

Demostración:) Como la función $f(x,w)$ está definida por la integral (1) existe, por lo tanto, un punto (x_0, w_0) (y por consiguiente, dos semiplanos $x > x_0$ y $u > u_0$) en el cual la integral (1) es convergente. Sean x_1 y w_1 dos valores complejos (o reales) cualesquiera tales que $x_1 < x_0$ y $u_1 < u_0$. El teorema quedará demostrado si probamos que la integral (1) converge en el punto (x_1, w_1).

Consideramos los intervalos $x_1 - 1 \leq x \leq x_0$ y $u_1 - 1 \leq u \leq u_0$.

Puesto que $f(x,w)$ es holomorfa para todo valor real de x y para todo valor real, de w por hipótesis existe un número positivo, 2ρ tal que $f(x,w)$ es holomorfa en los interiores de todo par de círculos de radio 2ρ y cuyos centros pertenezcan a los intervalos:

$x_1 - 1 \leq x \leq x_0$ y $u_1 - 1 \leq u \leq u_0$.

Puesto que la función $f(x,w)$ es holomorfa en los semiplanos $x > x_0$ y $u > u_0$, será desarrollable en la serie de Taylor en el punto $(x_0 + \rho, u_0 + \rho)$ y estos desarrollos serán válidos, por lo menos, en círculos cuyos radios (que los supondremos iguales a ρ) son mayores que ρ. Tomemos $\rho' < 3\rho$. Sea γ un número real cualquiera del intervalo $(u_0 + \rho - \rho', u_0)$; evidentemente $\gamma < x_0$ y $\delta < u_0$. Demostremos que la integral (1) es convergente en el punto $(\gamma; \delta)$.

En efecto: desarrollando $f(x,w)$ en el punto $(x_0 + \rho, u_0 + \rho)$ en serie doble de Taylor se tiene:

$$f(x,w) = \sum_0^\infty \sum_0^\infty \left(\frac{\partial^{m+n} f(x,w)}{\partial x^m \cdot \partial w^n} \right)_{\substack{x = x_0 + \rho \\ w = u_0 + \rho}} \cdot$$

$$\cdot \frac{[x - (x_0 + \rho)]^m \cdot [w - (u_0 + \rho)]^n}{m!\, n!} \qquad (56)$$

advirtiendo que:

$$\left(\frac{\partial^{0+0} f(x,w)}{\partial x^0 \cdot \partial w^0} \right)_{\substack{x = x_0 + \rho \\ w = u_0 + \rho}} = f(x_0 + \rho; u_0 + \rho)$$

pero, según lo dicho más arriba, se tiene:

$$\left(\frac{\partial^{m+n} f(z,w)}{\partial z^m . \partial w^n}\right)_{\substack{z = x_0 + e \\ w = u_0 + e}} = \qquad [57]$$

$$= (-1)^{m+n} \int_0^\infty \int_0^\infty \lambda^m(r) . \mu^n(s) . \varphi(r,s) . e^{-\lambda(r)(x_0+e)-\mu(s)(u_0+e)} . dr . ds.$$

De [56] y [57] se infiere:

$$f(z,w) = \sum_0^\infty \sum_0^\infty \frac{[(x_0+e)-z]^m . [(u_0+e)-w]^n}{m!\, n!} .$$

$$. \int_0^\infty \int_0^\infty \lambda^m(r) . \mu^n(s) . \varphi(r,s) . e^{-\lambda(r)(x_0+e)-\mu(s)(u_0+e)} . dr . ds.$$

o bién:

$$f(z,w) = \sum_0^\infty \sum_0^\infty \left(\int_0^\infty \int_0^\infty \varphi(r,s) . e^{-\lambda(r)(x_0+e)-\mu(s)(u_0+e)} .\right.$$

$$\left. . \frac{[(x_0+e)-z]^m . [(u_0+e)-w]^n}{m!\, n!} . \lambda^m(r) . \mu^n(s) . dr . ds \right) \qquad [58]$$

pero la serie doble del segundo miembro de esta igualdad converge en el punto (γ, δ) y puesto que la serie doble:

$$\sum_0^\infty \sum_0^\infty \frac{[(x_0+e)-z]^m . [(u_0+e)-w]^n}{m!\, n!} . \lambda^m(r) . \mu^n(s); \text{ para } \underline{z = \gamma} \text{ y } \underline{w = \delta}$$

que puede transformarse en:

$$\sum_0^\infty \sum_0^\infty \frac{[(x_0+e)-\gamma]^m . [(u_0+e)-\delta]^n}{m!\, n!} . \lambda^m(r) . \mu^n(s) =$$

$$= \left(\sum_0^\infty \frac{[(x_0+e)-\gamma]^m \lambda^m(r)}{m!} \right) . \left(\sum_0^\infty \frac{[(u_0+e)-\delta]^n . \mu^n(s)}{n!} \right) =$$

$$= e^{(x_0+e-\gamma)\lambda(r)} . e^{(u_0+e-\delta)\mu(s)}$$

converge uniformemente, es legítima en [58] la inversión de los signos de sumatoria y de la integral; entonces:

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \varphi(r,s).e^{\lambda(r)(x_0+\rho)-\mu(s)(u_0+\rho)}.e^{(x_0+\rho-\gamma).\lambda(r)+(u_0+\rho-\delta).\mu(s)}.dr.ds =$$

$$= \int_0^\infty \int_0^\infty \varphi(r,s).e^{-\lambda(r)\gamma-\mu(s).\delta}.dr.ds.$$

es convergente y tiene por suma $f(\gamma,\delta)$. Por consiguiente la integral (1) converge en los semiplanos $x > x_0+\rho-\rho'$ y $u > u_0+\rho-\rho'$.

Repitiendo el mismo raciocinio se prueba que dicha integral [1] converge en los semiplanos $x > x_0-2\rho$ y $u > u_0-2\rho$, reiterando nuevamente el procedimiento se ve que [1] converge también en los semiplanos $x > x_0-3\rho$ y $u > u_0-3\rho$ y así sucesivamente. Al cabo de ρ operaciones se tiene que la integral [1] converge en los semiplanos $x > x_0-P.\rho$ y $u > u_0-P.\rho$.

Si tomamos ρ igual al mayor de los valores: parte entera de $\frac{x_0-x_1+1}{\rho}+1$ y parte entera de $\frac{u_0-u_1+1}{\rho}+1$ se tiene que la integral [1] converge en el punto (z_1,w_1) con lo que el teorema queda completamente probado.

El teorema correlativo para las series es:

Teorema XII):

Si la sucesión doble generatriz $\varphi_{r,s}$ es positiva o nula, para todo r y todo s y la función definida por:

$$f_1(z,w) \equiv \sum_0^\infty \sum_0^\infty \varphi_{r,s}.e^{-\lambda_r z-\mu_s.w}$$

es holomorfa para todo valor real de z de w, entonces la serie:

$$\sum^\infty \sum^\infty \varphi_{r,s}.e^{-\lambda_r z-\mu_s.w}$$

es convergente para todo valor de z y para todo valor de w.

Demostración: Conservemos las mismas notaciones que en la demostración del teorema anterior, y demostraremos que la serie [1'] converge en el

punto (δ,γ) . Con tal fin desarrollemos la función $f_1(z,w)$ en el punto $(x_0+\rho, u_0+\rho)$ en serie doble de Taylor.

$$f_1(z,w)=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}\varphi_{r,s}\cdot e^{-\lambda_r(x_0+\rho)-\mu_s\cdot(u_0+\rho)}\cdot\right.$$

$$\left.\cdot\frac{[(x_0+\rho)-z]^m\cdot[(u_0+\rho)-w]^n}{m!\qquad n!}\cdot\lambda_r^m\cdot\mu_s^n\right)$$

pero esta serie en el punto $(z=\gamma;\ w=\delta)$ es convergente, y en este punto cada término de dicha serie es positivo, luego pueden invertirse los signos sumatorios, y entonces se tiene:

$$f_1(\gamma,\delta)=\sum_{r=\infty}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}\varphi_{r,s}\cdot e^{-\lambda_r(x_0+\rho)-\mu_s(u_0+\rho)}\cdot$$

$$\cdot\left(\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{[(x_0+\rho)-\gamma]^m\cdot[(u_0+\rho)-\delta]^n}{m!\qquad n!}\cdot\lambda_r^m\cdot\mu_s^n\right)=$$

$$=\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}\varphi_{r,s}\cdot e^{-\lambda_r(x_0+\rho)-\mu_s(u_0+\rho)}\cdot e^{(x_0+\rho-\gamma)\lambda_r}\cdot e^{(u_0+\rho-\delta)\mu_s}=$$

$$=\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}\varphi_{r,s}\cdot e^{-\lambda_r\gamma-\mu_s\cdot\delta}\ ;$$

es decir; la serie [1'] es convergente en el punto (γ,δ) . De aquí en adelante el razonamiento es el mismo que en el teorema anterior.

Los teoremas (XI) y (XII) también son válidos (y con demostración análoga) aún en el caso en que $f(z,w)$ $(o\ f_1(z,w))$ no es holomorfa para todo valor real de z y para todo valor real de w ; es suficiente que $f(z,w)$ $(o\ f_1(z,w))$ sea holomorfa en todos los puntos de dos curvas de Jordán:

$$y=y(x),\quad \gamma:\quad v=v(u)$$

cuyo campo de variabilidad sean los intervalos $(-\infty<x<+\infty)$ y $(-\infty<u<+\infty)$.

Más general aún: las conclusiones de los teoremas (XI) y (XII) son también válidas cuando $f(z,w)$ $(f_1(z,w))$ es holomorfa en dos conjuntos infinitos de puntos uno del plano z y otro del plano w,

completos (estos es, que contengan sus puntos de acumulación) y que haya puntos en ambos conjuntos que tengan abscisas, x y u, tan grandes como se quiera en valor absoluto y de signo negativo.

Una interesante generalización de los teoremas (XI) y (XII) la constituye el siguiente:

Teorema XIII).

Si la función generatriz $\varphi(r,s)$, de la función $f(x,w)$ cumple la condición:

$$\left| Arg\, \varphi(r,s) \right| \leq \tau < \frac{\pi}{2}$$

para todo valor de r y para todo valor de s

Si la sucesión generatriz $\varphi_{r,s}$ de la función $f_1(x\,w)$ cumple la condición:

$$\left| Arg\, \varphi_{r,s} \right| \leq \tau < \frac{\pi}{2}$$

para todo valor de r y para todo valor de s

(contando el argumento de un número complejo entre $-\pi$ y $+\pi$); siendo τ una constante positiva $\left(y\ \text{menor que}\ \frac{\pi}{2}\right)$ y si existen dos semiplanos P y P' (uno en el plano x y otro en el plano w en los cuales convergen:

la siguientes integrales:

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \varphi_1(r,s) \cdot e^{-\lambda(r)x - \mu(s)w} \cdot dr \cdot ds \qquad [59]$$

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \varphi(r,s) \cdot e^{-\lambda(r)x - \mu(s)w} dr \cdot ds. \qquad [60]$$

siendo $\varphi_1(r,s)$ la parte real de $\varphi(r,s)$;

y si además $f(x,w)$ es holomorfa para todo x real y para todo valor rael de w entonces la integral doble:

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \varphi(r,s)\, e^{-\lambda(r)x - \mu(s)w} dr \cdot ds$$

las siguientes series:

$$\sum_0^\infty \sum_0^\infty \varphi_{1\,r,s} \cdot e^{-\lambda_{r,s} - \mu_s \cdot w} \qquad [59']$$

$$\sum_0^\infty \sum_0^\infty \varphi_{r,s} \cdot e^{-\lambda_r \cdot x - \mu_s \cdot w} \qquad [60']$$

siendo $\varphi_{1\,rs}$ la parte real de $\varphi_{r,s}$.

y si además $f_1(x,w)$ es holomorfa para todo valor real de x y para todo valorreal de w entonces la serie doble:

$$\sum_0^\infty \sum_0^\infty \varphi_{r,s} \cdot e^{-\lambda_{r,s} - \mu_s \cdot w}$$

es convergente para todo valor de z y para todo valor de w.

es convergente para todo valor de z y para todo valor de w.

Demostración: Fijémonos en el caso de la integral, no habiendo luego ninguna dificultad (puesto que se procede en forma completamente análoga) para la serie.

Sea un punto cualquiera interior al semiplanos P y w_0 otro punto cualquiera interior al semiplano P' por hipótesis, las dos integrales [59] y [60] son convegentes en el punto (z_0, w_0). Sea γ un número real menor que x_0 y suficientemente próximo a él. Si logramos comprobar que la integral [1] converge en el punto (γ, δ) el teorema queda demostrado, puesto que entonces no hay más que repetir el raciocinio hecho en los teoremas (XI) y XII).

Desarrollando la función $f(z, w)$ en serie doble de Taylor en el punto $(x_0+1; u_0+1)$ tenemos:

$$f(z,w) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{(x_0+1-z)^m (u_0+1-w)^n}{m!\ n!} \cdot \right.$$

$$\left. \cdot \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \lambda^m(r) \cdot \mu^n(s) \cdot \varphi(r,s) \cdot e^{-\lambda(r)(x_0+1) - \mu(s)(u_0+1)} \cdot dr \cdot ds \right) \qquad [61]$$

Esta serie es convergente en dos círculos cuyos radios son mayores que la unidad, tomando iguales a ρ los radios de estos dos círculos, sea γ un número real cualquier comprendido entre $x_0+1-\rho$ y x_0; y sea δ otro número real cualquiera comprendido entre $u_0+1-\rho$ y u_0; por lo tanto la serie que figura en el segundo miembro de [61] converge para $z = \gamma$ y $w = \delta$.

Poniendo:

$$T_{m,n}(r,s) \equiv \frac{(x_0+1-\gamma)^m (u_0+1-\delta)^n}{m!\ n!} \cdot$$

$$\cdot \lambda^m(r)\,\mu^n(s)\cdot\varphi(r,s)\,e^{-\lambda(r)(x_0+1)-\mu(s)(u_0+1)}$$

se tiene:

$$\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} T_{m,n}(r,s)=\varphi(r,s)\,e^{-\lambda(r)(x_0+1)-\mu(s)(u_0+1)}\cdot$$

$$\cdot\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x_0+1-\gamma)^m\cdot(u_0+1-\delta)^n}{m!\,n!}\cdot\lambda^m(r)\cdot\mu^n(s)\ ;$$

y además:

$$f(\gamma,\delta)=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}T_{m,n}(r,s)\,.\,dr\,.\,ds\right) \qquad [61']$$

por lo tanto la parte real de esta serie, que es:

$$\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x_0+1-\gamma)^m\cdot(u_0+1-\delta)^n}{m!\,n!}\cdot$$

$$\cdot\left(\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\varphi_1(r,s)\,\lambda^m(r)\,\mu^n(s)\,.\,e^{-\lambda(r)(x_0+1)-\mu(s)(u_0+1)}\,.\,dr\,.\,ds\right) \qquad [62]$$

también es convergente (y su suma es la parte real de $f(\gamma,\delta)$).

Sean ahora r_0 y s_0 dos números positivos fijos. La serie doble:

$$\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x_0+1-\gamma)^m(u_0+1-\delta)^n}{m!\,n!}\,.\,\lambda^m(r)\,.\,\mu^n(s) \qquad [63]$$

converge uniformemente en el interior del rectángulo, V, del plano real (r,s), cuyos vértices son:

$$(0,0)\ ;\ (r_0,0)\ ;\ (r_0,s_0)\ ;\ (0,s_0)$$

puesto que en él, la serie [63] está mayorada por la siguiente serie numérica de términos positivos:

$$\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x_0+1-\gamma)^m\cdot(u_0+1-\delta)^n}{m!\,n!}\,\lambda^m(r_0)\,.\,\mu^n(s_0)$$

puesto que según la definición $\lambda(r)$ y $\mu(s)$ es: $\lambda^m(r)\leq\lambda^m(r_0)$ y $\mu^n(s)\leq\mu^n(s_0)$ que es convergente y su suma es $e^{(x_0+1-\gamma)\lambda(r_0)}\,.\,e^{(u_0+1-\delta)\mu(s_0)}$.

Por consiguiente es lícita la siguiente permutación de signos de sumatoria e integral:

$$\int_0^{r_0}\int_0^{s_0}\left(\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} T_{m,n}(r,s)\right).dr.ds =$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\int_0^{r_0}\int_0^{s_0} T_{m,n}(r,s).dr.ds\right) \qquad [64]$$

para cualesquiera que sean los valores de r_0 y de s_0.

Como $\varphi_1(r,s)$ es positiva ó nula (según hipótesis), la serie [62] es de términos positivos (ó nulos), por lo tanto será convergente la siguiente serie:

$$\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x_0+1-\gamma)^m.(u_0+1-\delta)^n}{m!\,n!}$$

$$\left(\iint_{(V')} \varphi_1(r,s).\lambda^m(r).\mu^n(s).e^{-(x_0+1).\lambda(r)-(u_0+1).\mu(s)}.dr.ds; \qquad [65]\right.$$

indicando con el símbolo $\iint_{(V')}$ la integral doble sobre el recinto V', siendo este recinto V' el constituído por los puntos r y s que satisfacen a las relaciones: $r_0 \leq r < +\infty$ y $s_0 \leq s < +\infty$, esto es: V' es el recinto complementario del V respecto del primer cuadrante del plano real (r,s).

Ahora bien, según la hipótesis hecha sobre $\varphi(r,s)$ existe un número fijo positivo h tal que para todo valor de r y todo valor de s es:

$$|\varphi(r,s)| < \sqrt{1+h^2}.\varphi_1(r,s) = K.\varphi_1(r,s)\ , \quad (K = \text{constante}) \qquad [66]$$

(h es la tangente del argumento $\varphi(r,s)$) y como la integral:

$$\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\varphi_1(r,s).e^{-(x_0+1).\lambda(r)-(u_0+1).\mu(s)}.\lambda^m(r).\mu^n(s).dr.ds.$$

es convergente, entonces también será convergente la integral:

$$\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}|\varphi(r,s)|.e^{-(x_0+1).\lambda(r)-(u_0+1).\mu(s)}.\lambda^m(r).\mu^n(s).dr.ds$$

De la convergencia de [65] y según [66] se deduce la convergencia de la serie:

$$\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x_0+1-\gamma)^m.(u_0+1-\delta)^n}{m!\,n!}.$$

$$.\left(\iint_{(V')}|\varphi(r,s)|.e^{-(x_0+1)\lambda(r)-(u_0+1)\mu(s)}.\lambda^m(r).\mu^n(s).dr.ds\right)$$

es decir, la serie:

$$\sum_{0}^{\infty}\sum_{0}^{\infty}\left(\iint_{(V')} T_{m,n}(r,s)\,.\,dr.ds\right)$$

converge absolutamente.

Por lo tanto se tiene:

$$\left|\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} T_{m,n}(r,s)\,.\,dr.ds\right)-\right.$$

$$\left.-\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} T_{m,n}(r,s)\,.\,dr.ds\right)\right|\equiv$$

$$\equiv\left|\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\iint_{(V')} T_{m,n}(r,s)\,.\,dr.ds\right)\right|\leq$$

$$\leq\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x_0+1-\gamma)^m.(u_0+1-\delta)^n}{m!\,n!}\,.$$

$$\left(\iint_{(V')}|\varphi(r,s)|.e^{-(x_0+1-\gamma).\lambda(r)-(u_0+1-\delta)\mu(s)}.\lambda^m(r).\mu^n(s).\,dr.ds\right)=$$

$$=\sum_{m=0}^{M}\sum_{n=0}^{N}+\left(\sum_{m=M+1}^{\infty}\sum_{n=0}^{N}+\sum_{m=0}^{M}\sum_{n=N+1}^{\infty}+\sum_{m=M+1}^{\infty}\sum_{n=N+1}^{\infty}\right)\quad[67]$$

(habiendo omitido por brevedad, en estos cuatro sumatorios el término general:

$$\frac{(x_0+1-\gamma)^m.(u_0+1-\delta)^n}{m!\,n!}\,.$$

$$.\left(\iint_{(V')}|\varphi(r,s)|.e^{-(x_0+1-\gamma).\lambda(r)-(u_0+1-\delta)\mu(s)}.\lambda^m(r).\mu^n(s).\,dr.ds\right).$$

Sea ahora ε un número positivo arbitrario. Luego existen dos valores $M\equiv M(\varepsilon)$ y $N\equiv N(\varepsilon)$ tales que cualesquiera que sean r_0 y s_0 es:

$$\sum_{m=M+1}^{\infty}\sum_{n=0}^{N}+\sum_{m=0}^{M}\sum_{n=N+1}^{\infty}+\sum_{m=M+1}^{\infty}\sum_{n=N+1}^{\infty}<\frac{\varepsilon}{2}\qquad[68]$$

(puesto que el primer miembro es el resto de la serie convergente:

$$\sum_{0}^{\infty}\sum_{0}^{\infty}\left(\iint_{(V')}|T_{m,n}(r,s)|\,dr.ds\right).$$

Fijados de este modo M y N por lo dicho más arriba, tomando r_0 y s_0 suficientemente grandes, cada una de las $(M+1).(N+1)$ integrales:

$$\iint_{(V')}|\varphi(r,s)|.e^{-(x_0+1).\lambda(r)-(u_0+1).\mu(s)}.\lambda^m(r).\mu^n(s).\,dr.ds;$$

que forman parte de la función que figura bajo el signo $\sum_{m=0}^{M}\sum_{n=0}^{N}$

del último miembro de [67] es menor que:

$$\frac{\varepsilon}{2 . e^{\alpha_0+1-\gamma} . e^{\alpha_0+1-\gamma}}$$

por lo tanto se deduce que:

$$\sum_{m=0}^{M} \sum_{n=0}^{N} < \frac{\varepsilon}{2} . \qquad (69)$$

De [67], [68] y [69] se deduce que.

$$\left| \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_0^{\infty} \int_0^{\infty} T_{m,n}(r,s) . dr . ds \right) - \right.$$

$$\left. - \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_0^{r_0} \int_0^{s_0} T_{m,n}(r,s) . dr . ds \right) \right| < \varepsilon \qquad [70]$$

siempre que se tome r_0 y s_0 suficientemente grandes; de donde teniendo en cuenta la [64] y la [70]:

$$\left| \int_0^{r_0} \int_0^{s_0} \left(\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} T_{m,n}(r,s) \right) . dr . ds - \right.$$

$$\left. - \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_0^{\infty} \int_0^{\infty} T_{m,n}(r,s) . dr . ds \right) \right| < \varepsilon$$

esto es:

$$\lim_{(r_0,s_0) \to (+\infty,+\infty)} \int_0^{r_0} \int_0^{s_0} \left(\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} T_{m,n}(r,s) \right) . dr . ds =$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_0^{\infty} \int_0^{\infty} T_{m,n}(r,s) . dr . ds \right)$$

o bién:

$$(71) \qquad \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \left(\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} T_{m,n}(r,s) . dr . ds \right) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_0^{\infty} \int_0^{\infty} T_{m,n}(r,s) . dr . ds \right)$$

es decir la integral:

$$\int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \left(\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} T_{m,n}(r,s) \right) . dr . ds .$$

es convergente y suma según [61] y [71] es:

$$f(\gamma, \delta) .$$

Es decir, la integral [1] converge en el punto (γ, δ). La demostración del teorema se concluye razonando como el teorema (XI).

Análogamente a lo hecho con los teoremas (XI) y (XII), se puede en la hipótesis del teorema (XIII) ampliar la condición de holomorfismo de la función $f(x, w)$ $(o\ f_1(x, w))$.

Nótese que, en realidad, el teorema (XI) es colorario del (XIII), tanto para las integrales como para las series.

En realidad, la existencia de dos semiplanos P y P' en los cuales convergen simultáneamente las integrales [59] y [60] (así como las serie [59'] y [60']) es consecuencia de la hipótesis de finitud de la pendiente del argumento de $\varphi(r,s)$ $(\varphi(r,s))$ como veremos al estudiar el problema de las abscisas asociadas de convergencia absoluta.

Observemos que la existencia de dos semiplanos en los cuales converge la integral [59] lleva consigo la existencia de otros dos semiplanos en los cuales converge la integral [1].

En efecto, si [59] converge en un punto (x_0, w_0) la integral

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \varphi(r,s)^{-\lambda(r)(x_0+1)-\mu(s)(u_0+1)} \cdot dr \cdot ds.$$

también es convergente, de esto y de la desigualdad [66] se deduce la convergencia de:

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \left| \varphi(r,s) \cdot e^{-\lambda(r)(x_0+1)-\mu(s)(w_0+1)} \right| \cdot dr \cdot ds$$

por lo tanto, la integral [1] converge, por lo menos, en los semiplanos $x \geqslant x_0+1$ y $u \geqslant u_0+1$.

Análogamente: si existen dos semiplanos en los cuales es convergente la serie [59'] también existen otros dos semiplanos en los cuales converge la serie doble [1'].

Con leves modificaciones en la demostración del teorema (XIII), se demuestrae el siguiente teorema, que también encierra como un caso particular

al anterior y al teorema (XI).

Teorema XIV.)

Si existe un punto (z_0, w_0) en el cual es convergente la integral :

$$\int_0^\infty \int_0^\infty |\varphi(r,s)|\, e^{-\lambda(r)z-\mu(s)w}\, dr\, ds \qquad [72]$$

y al función $f(z,w)$ definida por [1] es holomorfa para todo valor real de z y para todo valor real de w (o aún más general: $f(z,w)$ es holomorfa en todos los puntos de dos curvas simples abiertas de Jordán :

$$y = y(x) \quad y \quad v = v(u)$$

donde x varía de $-\infty$ a $+\infty$ y análogamente u varía de $-\infty$ a $+\infty$) entonces la integral [1] es convergente para todo z y para todo w (ya sean complejos o reales).

El teorema para las series se enuncia así:

si existe un punto (z_0, w_0) en el cual es convergente la serie

$$\sum_0^\infty \sum_0^\infty |\varphi_{r,s}| \cdot e^{-\lambda_r z - \mu_s \cdot w} \qquad [72]$$

y la función $f_1(z,w)$ definida por [1'] es holomorfa en todos los puntos de dos curvas simples de Jordán:

$$y = y(x) \quad y \quad v = v(u)$$

donde x varía en el intervalo $(-\infty < x < +\infty)$ y u varía en el intervalo $(-\infty < u < +\infty)$, entonces la serie doble [1'] es convergente en todo el plano z y en todo el plano w .

Un caso interesante en que se puede asegurar la existencia de dos semiplanos en los cuales converge la integral [59] (la serie [59]) es cuando existen dos semiplanos en los cuales converge la [72] (la serie [72]) y para cualquier θ positivo (por pequeño que sea) se verifique que:

$$\left| \frac{\varphi_2(r,s)}{\varphi_1(r,s)} \right| = o\left(e^{\theta\lambda(r)+\theta\mu(s)}\right) \qquad (\varphi_1(r,s) > 0)$$

(poniendo: $\varphi(r,s) = \varphi_1(r,s) + i.\varphi_2(r,s)$);
es decir: el límite superior de oscilación, para $(r,s) \to (+\infty, +\infty)$,
del cociente:

$$\frac{\left|\frac{\varphi_2(r,s)}{\varphi_1(r,s)}\right|}{e^{\theta.\lambda(r)+\theta.\mu(s)}}$$ es finito; o bien; para la serie:

el límite superior de oscilación, para $(r,s) \to (+\infty, +\infty)$, de

$$\frac{\left|\frac{\varphi_{2\,r,s}}{\varphi_{1\,r,s}}\right|}{e^{\theta.\lambda_r+\theta.\mu_s}}$$ debe ser finito $(\varphi_{1\,r,s} > 0)$; para todo $\theta > 0$.

Evidentemente el teorema(XI) es un caso particular de éste.

6.-- Sobre los ceros de las secciones y las funciones definidas por integrales y series dobles de Dirichlet.--

Una propiedad interesante sobre los ceros de las secciones:

$$g(r,s,x,w) \equiv \int_0^r \int_0^s \varphi(r,s).e^{-\lambda(r)x-\mu(s)w}\,dr.ds$$

cuando la función generatriz $\varphi(r,s)$ cumple ciertas condiciones, la constituye el siguiente:

Teorema XVI:

Supongamos que la función generatriz $\varphi(r,s)$ sea positiva en los intervalos $(0,r)$ y $(0,s)$; que: fijado $s = s_0$, $\varphi(r,s_0)$ decrece si r crece y fijado $r = r_0$, $\varphi(r_0,s)$ decrece si s crece, además que exista un número positivo ρ tal que $\varphi(r,s)$ sea continua en los intervalos: $-\rho \leq r \leq 0$ y $-\rho \leq s \leq 0$.

En tales hipótesis la función $g(r,s,x,w)$ no se anula en ningún punto (x,w) tal que sea $x > 0$ y $u > 0$.

~~tal que con~~

En particular: si $\varphi(r,s)$ es positiva en los intervalos $(0 \leq r < +\infty)$ y $(0 < s < +\infty)$, si $\varphi(r,s)$ decrece fijando una variable y haciendo crecer la otra y si $\varphi(r,s)$ es continua en ciertos semientornos a la izquierda de $r=0$ y de $s=0$, entonces la función $f(z,w)$ no se anula en los semiplanos $x>0$ y $u>0$.

El teorema correlativo para las secciones $g_1(r,s,z,w)$ de una serie doble de Dirichlet, así como para la función $f(z,w)$ también es válido y su enunciado es análogo.

La demostración del teorema (XV) es inmediata partiendo de la generalización del primer teorema de la media para integrales dobles, válida en las condiciones impuestas a la función generatriz.

Aún más puede probarse que:

Supongamos que la función generatriz cumpla las mismas condiciones del teorema anterior. Supongamos además que la integral [1] sea convergente en los semiplanos $x>x_0$ y $u>u_0$, y que no converja en ningún par de puntos (z,w) tal que $x<x_0$ y $u<u_0$, siendo x_0 y u_0 valores no positivos; esto es: $x_0 \leq 0$; y : $u_0 \leq 0$.

En tales hipótesis todos los ceros de la función $f(z,w)$, si los hay, están en las fajas $x_0 < x \leq 0$ y $u_0 < u \leq 0$.

Análogamente para las series.

Dejamos para una comunicación ulterior el estudio completo de las abscisas asociadas, de una integral doble y de una serie doble de Dirichlet, de convergencia simple y uniforme; del desarrollo en serie doble de factoriales y en series dobles asintóticas de las funciones definidas por tales series e integrales, así como de la generalización de algunos resultados de Lindelöf, sobre el orden de $f(x,w)$ (o de $f_1(x,w)$) ~~de~~ sobre las rectas $x=\alpha$ y $u=\beta$ siendo éstas pertenecientes a los semiplanos de holomorfismo de $f(x,w)$ (o de $f_1(x,w)$) y sobre

del orden de la misma función en dos semiplanos; resultados que se deducen en base del teorema(XII) (tanto para las series como para las integrales.)

SUMACION DE SERIES E INTEGRALES DOBLES POR EL "METODO DE LAS MEDIAS TIPICAS".

La teoría desarrollada en páginas anteriores se aplica, entre otras cosas, al problema de la sumación de series e integrales múltiples divergentes, edificando un algoritmo análogo al que desarrolló Riesz para las series e integrales simples conocido bajo el nombre de "sumación por las medias típicas".

Sin restringir, en absoluto, la generalidad, nos limitaremos, por razónes de comodidad, a las series e integrales dobles, pues no hay ninguna dificultad en enunciar la teoría para el caso general.

Como nos vamos a referir únicamente a series dobles, cambiemos en nuestra notación anterior la r por m y la s por n, y tomemos la sumatoria doble a partir de m igual a la unidad y de n igual a la unidad, esto es, se tiene:

$$f(z,w)=\sum_{m=1}^{m=\infty}\sum_{n=1}^{n=\infty} a_{m,n}\cdot e^{-\lambda_m\cdot z-\mu_n\cdot w}$$

Las sucesiones:

$$\lambda_1, \lambda_2, ----, \lambda_m, ----$$

y:

$$\mu_1, \mu_2, ---, \mu_n, ----$$

las supondremos <u>monótonas</u> <u>crecientes</u> con límites:

$$\lim_{n\to\infty}\mu_n=\lim_{m\to\infty}\lambda_m=+\infty$$

y además:

$$\lambda_1\geqslant 0$$

y:

$$\mu_1\geqslant 0$$

Pongamos:

$$e^{\lambda_m}\equiv l_m;$$

y:

$$e^{\mu_n}\equiv q_n;$$

y además:

$$c_{m,n} \equiv a_{m,n} \cdot e^{-\lambda_m z - \mu_n w} \equiv a_{m,n} \cdot \ell_m^{-z} \cdot \beta_n^{-w}.$$

Sean $\underline{\underline{\tau}}$ y $\underline{\underline{\sigma}}$ dos números reales positivos cualesquiera, luego existen un $\underline{m}$ y un $\underline{n}$ tales que:

(1) $$\lambda_m < \tau \leq \lambda_{m+1}$$

y:

(2) $$\mu_n < \sigma \leq \mu_{n+1}$$

Definamos la siguiente función:

$$\mathcal{C}_{\lambda,\mu}(\tau,\sigma) \equiv \sum_{\lambda_m<\tau} \sum_{\mu_n<\sigma} c_{m,n}.$$

es decir, la sumatoria doble se extiende a todos los $c_{m,n}$ tales que los índicos $\underline{m}$ y $\underline{n}$ satisfagan a las condiciones (1) y (2).

Esto es, se tiene:

$$\left.\begin{aligned}\mathcal{C}_{\lambda,\mu}(\tau,\sigma) \equiv\ & c_{1,1} + c_{2,1} + c_{3,1} + \cdots + c_{m,1} + \\ & + c_{1,2} + c_{2,2} + c_{3,2} + \cdots + c_{m,2} + \\ & + c_{1,3} + c_{2,3} + c_{3,3} + \cdots + c_{m,3} + \\ & + \cdots\cdots\cdots\cdots + \\ & + c_{1,n} + c_{2,n} + c_{3,n} + \cdots + c_{m,n}\end{aligned}\right\}$$

Caso particular: si es:

$$\left.\begin{aligned}\lambda_m &\equiv m \\ \mu_n &\equiv n\end{aligned}\right\}$$

y:

se tiene:

$$\mathcal{C}_{\lambda,\mu}(\tau,\sigma) \equiv \mathcal{C}_{m,n}(\tau,\sigma) \equiv \sum_{m<\tau} \sum_{n<\sigma} c_{m,n}.$$

Análogamente; introduzcamos la siguiente función;

$$\mathcal{C}^{K,K'}_{\lambda,\mu}(\omega,\omega') = \sum_{\lambda_m<\omega}\sum_{\mu_n<\omega'} (\omega-\lambda_m)^{K}\cdot(\omega'-\mu_n)^{K'}\cdot c_{m,n}$$

siendo K y K' dos números reales positivos (enteros o no) cualesquiera, y ω y ω' dos variables reales e independientes positivas;

Es fácil ver que se tiene;

$$(3)\quad \mathcal{C}^{K,K'}_{\lambda,\mu}(\omega,\omega') = -K.K'.\int_0^{\omega}\int_0^{\omega'} \mathcal{C}_{\lambda,\mu}(\tau,\sigma).(\omega-\tau)^{K-1}.(\omega'-\sigma)^{K'-1}.d\tau.d$$

si completamos la definición de la función;

$$\mathcal{C}_{\lambda,\mu}(\tau,\sigma)$$

en la siguiente forma;

para;

$$0 \leq \tau \leq \lambda_1$$

y σ cualquiera es;

$$\mathcal{C}_{\lambda,\mu}(\tau,\sigma) = 0 \;;$$

para τ cualquiera y;

$$0 \leq \sigma \leq \mu_1$$

es;

$$\mathcal{C}_{\lambda,\mu}(\tau,\sigma) = 0 .$$

Con esta convención se tiene que;

para;

$$0 \leq \omega \leq \lambda_1$$

y ω' cualquiera o;

para;

$$0 \leq \omega' \leq \mu_1$$

y ω cualquiera es;

$$\mathcal{C}^{K,K'}_{\lambda,\mu}(\omega,\omega') = 0 .$$

Con la convención anterior se tiene:

$$(3') \qquad \mathcal{C}^{K,K'}_{\lambda,\mu}(\omega,\omega') = -K.K'.\int_{\lambda_1}^{\omega}\int_{\mu_1}^{\omega'} \mathcal{C}_{\lambda,\mu}(\tau,\sigma).(\omega-\tau)^{K-1}.(\omega'-\sigma)^{K'-1}.d\tau d\sigma$$

Demostremos la fórmula (3).

Llamemos $R_{m,n}$ al rectángulo de las variables reales e independientes τ y σ formado por los vértices:

$$(\lambda_{m-1};\mu_{n-1});\ (\lambda_m;\mu_{n-1});\ (\lambda_m;\mu_n);\ (\lambda_{m-1};\mu_n).$$

La función:

$$K.K'.\int_0^{\omega}\int_0^{\omega'} \mathcal{C}_{\lambda,\mu}(\tau,\sigma).(\omega-\tau)^{K-1}.(\omega'-\sigma)^{K'-1}.d\tau.d\sigma$$

se puede escribir del siguiente modo:

$$J \equiv -\int_0^{\omega}\int_0^{\omega'} \mathcal{C}_{\lambda,\mu}(\tau,\sigma).d(\omega-\tau)^{K}.d(\omega'-\sigma)^{K'} =$$

$$= \left(-\iint_{(R_{1,1})} - \iint_{(R_{2,1})} - \cdots - \iint_{(R_{\omega 1})}\right) +$$

$$+ \left(-\iint_{(R_{12})} - \iint_{(R_{13})} - \cdots - \iint_{(R_{1\omega})}\right) +$$

$$+ \cdots\cdots\cdots +$$

$$+ \left(-\iint_{(R_{2\omega'})} - \iint_{(R_{3\omega'})} - \cdots - \iint_{(R_{\omega\omega'})}\right);$$

habiendo omitido en todas estas integrales dobles(para abreviar la escritura) el integrando común:

$$\mathcal{C}_{\lambda,\mu}(\tau,\sigma).\, d(\omega-\tau)^{K}.\, d(\omega'-\sigma)^{K'}$$

Las dos primeras filas son nulas,en virtud de la convención hecha más arriba al completar la definición de la función:

$$\mathcal{C}_{\lambda,\mu}(\tau,\sigma)$$

En cuanto a las otras integrales se tiene:

si:

$$\left.\begin{array}{l}\lambda_1<\tau<\lambda_2\\ \mu_1<\sigma<\mu_2\end{array}\right\}$$

es:

$$\mathcal{C}_{\lambda,\mu}(\tau,\sigma)=c_{1,1}$$

si:

$$\left.\begin{array}{l}\lambda_2<\tau<\lambda_3\\ \mu_1<\sigma<\mu_2\end{array}\right\}$$

es:

$$\mathcal{C}_{\lambda,\mu}(\tau,\sigma)=c_{1,1}+c_{2,1}$$

si:

$$\left.\begin{array}{l}\lambda_3<\tau<\lambda_1\\ \mu_1<\sigma<\mu_2\end{array}\right\}$$

es:

$$\mathcal{C}_{\lambda,\mu}(\tau,\sigma)=c_{1,1}+c_{2,1}+c_{3,1}.$$

.....

.....

.....

.....

si:

$$\left.\begin{array}{l}\lambda_m < \tau < \omega \\ \mu_1 < \sigma < \mu_2\end{array}\right\}$$

es:

$$\mathcal{C}_{\lambda,\mu}(\tau,\sigma) = c_{1,1} + c_{2,1} + \cdots + c_{m,1}.$$

si:

$$\left.\begin{array}{l}\lambda_1 < \tau < \lambda_2 \\ \mu_2 < \sigma < \mu_3\end{array}\right\}$$

es:

$$\mathcal{C}_{\lambda,\mu}(\tau,\sigma) = c_{1,1} + c_{1,2}$$

.....

.....

si:

$$\left.\begin{array}{l}\lambda_1 < \tau < \lambda_2 \\ \mu_n < \sigma < \omega\end{array}\right\}$$

es:

$$\mathcal{C}_{\lambda,\mu}(\tau,\sigma) = c_{1,1} + c_{1,2} + \cdots + c_{1,n}.$$

luego:

$$-\iint_{(R_{22})} c_{1,1}\, d(\omega-\tau)^K d(\omega'-\sigma)^{K'} = -c_{1,1}(\omega-\lambda_1)^K (\omega'-\mu_1)^{K'} - c_{1,1}(\omega-\lambda_2)^K (\omega'-\mu_2)^{K'} + c_{1,1}(\omega-\lambda_1)^K (\omega'-\mu_3)^{K'} + c_{1,1} \cdot (\omega'-\mu_1)^{K'} (\omega-\lambda_2)^K;$$

teniendo en cuenta estas igualdades y las que se deducen para cada una de las otras integrales análogas se tiene demostrada la fórmula (3).

Consideremos la función:

$$\frac{\mathcal{C}_{\lambda,\mu}^{K,K'}(\omega,\omega')}{\omega^{K}\cdot\omega'^{K'}}$$

a la cual llamaremos:

la media típica de órdenes K y K', de primera clase, asociada a la serie doble:

$$\sum_{1}^{\infty}\sum_{1}^{\infty} a_{m,n}\cdot e^{-\lambda_m\cdot z-\mu_n\cdot w}$$

Sean t y v dos números reales positivos cualesquiera, existen un m y un n tales que:

(4) $$l_m < t \leq l_{m+1}$$

y:

(5) $$q_n < v \leq q_{n+1}$$

Definamos la siguiente función:

$$\mathcal{C}_{l,q}(t,v) = \sum_{l_m<t}\sum_{q_n<v} c_{m,n}$$

es decir, la sumatoria doble se extiende a todos los c_{mn} tales que los índices m y n satisfagan a las condiciones (4) y (5), respectivamente.

Completemos la definición de la función:

$$\mathcal{C}_{l,q}(t,v)$$

en la forma siguiente: para:

$$0 \leq t \leq l_1 = e^{\lambda_1} \geq 1$$

y $\underline{v}$ cualquiera; o para: $\underline{t}$ cualquiera, y:

$$0 \leq v \leq q_1 = e^{\mu_1} \geq 1$$

es:

$$\mathcal{C}_{l,q}(t,v) = 0.$$

Sean $\underline{K}$ y $\underline{K'}$ dos números reales positivos (enteros o no) cualesquiera, y w y w' dos variables reales independientes positivas.

Introduzcamos la siguiente función:

$$\mathcal{C}^{K,K'}_{l,q}(w;w') = \sum_{l_m<w} \sum_{q_n<w'} (w-l_m)^K . (w'-q_n)^{K'} . c_{m,n}$$

Es fácil ver que se tiene:

$$\mathcal{C}^{K,K'}_{l,q}(w,w') = -K.K' . \int_0^w \int_0^{w'} \mathcal{C}_{l,q}(t,v) . (w-t)^{K-1} . (w'-v)^{K'-1} . dt.dv$$

$$= -K.K' . \int_1^w \int_1^{w'} \mathcal{C}_{l,q}(t,v) . (w-t)^{K-1} . (w'-v)^{K'-1} . dt.dv =$$

$$= -K.K' . \int_{l_1}^{w} \int_{q_1}^{w'} \mathcal{C}_{l,q}(t,v) . (w-t)^{K-1} . (w'-v)^{K'-1} . dt.dv$$

Consideremos la función:

$$\frac{\mathcal{C}^{K,K'}_{l,q}(w,w')}{w^K . w'^{K'}}$$

a la cual llamaremos:

<u>la media típica de órdenes K y K', de segunda clase, asociada a la serie doble:</u>

$$\sum_1^\infty \sum_1^\infty a_{m,n} . e^{-\lambda_m . z - \mu_n . w}.$$

DEFINICIONES DE SUMABILIDAD.

1º)Si es:

$$\lim_{(w,w')\to(\infty,\infty)} \left\{ \frac{C^{K,K'}_{\lambda,\mu}(w,w')}{w^{K}\cdot w'^{K'}} \right\} = C = \phi$$

(entendiendo que el límite doble es cuando w y w' tienden simultáneamente e indeppndientemente a más infinito) diremos que la serie doble:

$$\sum_{1}^{\infty}\sum_{1}^{\infty} c_{m,n} \equiv \sum_{1}^{\infty}\sum_{1}^{\infty} a_{m,n}\cdot e^{-\lambda_m z-\mu_n w}$$

es sumable (λ, μ ,K,K') consuman C.

2º)Si es:

$$\lim_{(w,w')\to(\infty,\infty)} \left\{ \frac{C^{K,K'}_{l,q}(w,w')}{w^{K}\cdot w'^{K'}} \right\} = C = \phi$$

diremos que la serie doble:

$$\sum_{1}^{\infty}\sum_{1}^{\infty} c_{m,n}$$

es sumable (l,q,K,K') consuma C.

DEFINICIONES DE OSCILACION FINITA GENERALIZADA.

1ª)Si la media típica de primera clase:

$$\frac{\mathcal{C}^{K,K'}_{\lambda,\mu}(w,w')}{w^{K,w'K'}}$$

tiene límites de oscilación finitos,cuando w y w' tienden simultánea e independientemente a más infinito,diremos que la serie doble:

$$\sum_{1}^{\infty}\sum_{1}^{\infty} e_{m,n}$$

oscila finitamente (λ,μ ,K,K').

2ª)Si la media típica de segunda clase:

$$\frac{\mathcal{C}^{K,K'}_{l,q}(w,w')}{w^{K,w'K'}}$$

tiene límites de oscilación finitos,cuando w y w' tienden simultánea e independientemente a más infinito,diremos que la serie doble:

$$\sum_{1}^{\infty}\sum_{1}^{\infty} e_{m,n};$$

oscila finitamente (l,q,K,K').

Ahora bien, introduzcamos la siguiente función:

$$\mathcal{C}(\tau,\sigma) = \sum_{m \leq [\tau]} \sum_{n \leq [\sigma]} e_{m,n}$$

es decir, la sumatoria doble se extiende a todos los $e_{m,n}$ tales que los índices m y n cumplen la condición:

m es menor o igual que la parte entera de τ; y:

n es menor o igual que la parte entera de σ.

Si τ y σ son reales no enteros la función:

$$\mathcal{C}_{m,n}(\tau,\sigma)$$

coincide con:

$$\mathcal{C}(\tau,\sigma)$$

pero si τ y σ son reales y enteros (esto es: $m = \tau$ y $n = \sigma$) se tiene:

$$\mathcal{C}_{m,n}(\tau,\sigma) = \sum_{m=1}^{m-1} \sum_{n=1}^{n-1} e_{m,n}$$

luego difiere de:

$$\mathcal{C}(\tau,\sigma) \equiv \mathcal{C}(m,n)$$

en:

$$(e_{m,1} + e_{m,2} + --- + e_{m,n-1} + e_{m,n} + e_{1,n} + --- + e_{m-1,n}).$$

Análogamente si τ es entero e igual a m pero σ es no entero, se tiene:

$$\mathcal{C}_{m,n}(\tau,\sigma) = \sum_{1}^{m-1} \sum_{1}^{n} e_{m,n}$$

luego difiere de:

$$\mathcal{C}(\tau,\sigma) \equiv \mathcal{C}(m,\sigma)$$

en:

$$e_{m,1} + e_{m,2} + --- + e_{m,n}.$$

Análogamente si τ es no entero pero σ es entero e igual a n, se tiene:

(~~4m-1~~)

$$\mathcal{C}_{m,n}(\tau,\sigma) = \sum_{1}^{m}\sum_{1}^{n-1} e_{m,n}$$

luego difiere de:

$$\mathcal{C}(\tau,\sigma) \equiv \mathcal{C}(\tau,n)$$

en:

$$e_{1,n} + e_{2,n} + \cdots + e_{m,n}.$$

<u>Casos particulares:</u>

Tomemos:

$$\left.\begin{aligned}\lambda_m &\equiv m\\ \mu_n &\equiv n\end{aligned}\right\}$$

y:

entonces la media típica de la primera clase es, siendo w y w' números no enteros:

$$\frac{\mathcal{C}^{K,K'}_{\lambda,\mu}(w;w')}{w^{K}.\,w'^{K'}} \equiv w^{-K}.\,w'^{-K'}.\sum_{m<w}\sum_{n<w'}(w-m)^{K}.\,(w'-n)^{K'}.\,e_{m,n} \equiv$$

$$\equiv -w'^{-K'}.\,w^{-K}.\,K.K'.\int_0^{w}\int_0^{w'}\mathcal{C}_{m,n}(\tau,\sigma).\,(w-\tau)^{K-1}.\,(w'-\sigma)^{K'-1}.\,d\tau\,d\sigma =$$

$$= -w^{-K}.\,w'^{-K'}.\,K.K'.\int_0^{w}\int_0^{w'}\mathcal{C}(\tau,\sigma).\,(w-\tau)^{K-1}.\,(w'-\sigma)^{K'-1}.\,d\tau.\,d\sigma.$$

Supongamos:

$$K = K' = 1$$

y que: w y w' números reales y enteros; entonces dicha media típica es:

$$\frac{1}{w.w'}.\sum_{1}^{w-1}\sum_{1}^{w'-1}(w-m).\,(w'-n).\,e_{m,n} = -\frac{1}{w.w'}.\int_0^{w}\int_0^{w'}\mathcal{C}(m-1;n-1).\,d\tau\,d\sigma =$$

$$= \frac{1}{w.w'} \cdot \Big[\big(C_{1,1} + C_{2,1} + \cdots + C_{m-1,1} \big) + \big(C_{1,2} + \cdots + C_{m-1,2} \big) + \cdots + \big(C_{1,n-1} + C_{2,n-1} + \cdots + C_{m-1,n-1} \big) \Big] \equiv$$

$$\equiv \frac{1}{w.w'} \cdot \sum_{i=1}^{i=m-1} \sum_{j=1}^{j=n-1} C_{i,j} \equiv$$

$$\equiv \frac{1}{m.n} \cdot \sum_{i=1}^{i=i} \sum_{j=1}^{j=j} c_{i,j,j}$$

siendo:

$$C_{i,j} \equiv \sum_{i=1}^{i} \sum_{j=1}^{j} c_{i,j}$$

que es la primera media aritmética de Cesàro.

Suponiendo todavía que w y w' sean reales enteros esto es, w es igual a m y w' es igual a n; tomamos a K y a K' como enteros positivos mayores que la unidad, luego la media típica de la primera clase es:

$$\frac{C^{K,K'}_{\lambda,\mu}(w,w')}{w^{K}.w^{K'}} = -K.K'.w^{-K}.w'^{-K'}.\int_0^{w}\int_0^{w'} C_{m,n}(\tau,\sigma).(w-\tau)^{K-1}.(w'-\sigma)^{K'-1}.d\tau d$$

Ahora bien,consideremos la función:

$$y \equiv y(w, w') \equiv \frac{1}{(K-1)!\,(K'-1)!} \cdot \int_0^{w} \int_0^{w'} \mathcal{C}_{m,n}(\tau,\sigma) \cdot (w-\tau)^{K-1} \cdot (w'-\sigma)^{K'-1} \cdot d\tau\, d\sigma$$

$$\equiv \frac{1}{(K-1)!\,(K'-1)!} \cdot \iint_{0\,0}^{w\,w'} \mathcal{C}(\tau,\sigma) \cdot (w-\tau)^{K-1} \cdot (w'-\sigma)^{K'-1} \cdot d\tau \cdot d\sigma$$

Esta función puede escribirse de los dos siguientes modos:

$$y = \frac{1}{(K-1)!\,(K'-1)!} \cdot \int_0^{w} d\tau \cdot \left(\int_0^{w'} \mathcal{C}(\tau,\sigma) \cdot (w'-\sigma)^{K'-1} \cdot d\sigma \right) \cdot (w-\tau)^{K-1} =$$

$$= \frac{1}{(K-1)!\,(K'-1)!} \cdot \int_0^{w'} d\sigma \cdot \left(\int_0^{w} \mathcal{C}(\tau,\sigma) \cdot (w-\tau)^{K-1} \cdot d\tau \right) \cdot (w'-\sigma)^{K'-}$$

Pongamos:

$$f(w', \tau) \equiv \int_0^{w'} \mathcal{C}(\tau,\sigma) \cdot (w'-\sigma)^{K'-1} \cdot d\sigma \,;$$

luego se tiene:

$$y = \frac{1}{(K-1)!\,(K'-1)!} \cdot \int_0^{w} f(w', \tau) \cdot (w-\tau)^{K-1} \cdot d\tau$$

Teniendo en cuenta que la función:

$$f(w', \tau) \cdot (w-\tau)^{K-1}$$

y sus K-2 primeras derivadas parciales con respecto a w,se anulan para:

$$w = \tau$$

se tiene:

$$\frac{\partial y}{\partial w} = \frac{1}{(K-2)!\,(K'-1)!} \cdot \int_0^w f'(w', \tau) \cdot (w-\tau)^{K-2} \cdot d\tau \,;$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial w^2} = \frac{1}{(K-3)!\,(K'-1)!} \cdot \int_0^w f(w', \tau) \cdot (w-\tau)^{K-3} \cdot d\tau \,;$$

.....

.....

$$\frac{\partial^{K-1} y}{\partial w^{K-1}} = \frac{1}{(K'-1)!} \cdot \int_0^w f^{\bullet}(w', \tau) \cdot d\tau$$

$$\frac{\partial^K y}{\partial w^K} = \frac{1}{(K'-1)!} \cdot f(w', \tau) \,;$$

o bien:

$$\frac{\partial^K y}{\partial w^K} = \frac{1}{(K'-1)!} \cdot \int_0^{w'} \varphi(\tau, \sigma) \cdot (w'-\sigma)^{K'-1} \cdot d\sigma .$$

Ahora bien, teniendo en cuenta que la función:

$$\varphi(\tau, \sigma) \cdot (w'-\sigma)^{K'-1} \,;$$

y sus <u>K'-2</u> primeras derivadas parciales con respecto a w', se anulan para:

$$\sigma = w'$$

se tiene:

$$\frac{\partial^{K+K'} y}{\partial w^K \cdot \partial w'^{K'}} \equiv \varphi(\tau, \sigma) .$$

Por lo tanto, si integramos K-1 veces la función:

$$\varphi(\tau, \sigma)$$

con respecto a τ, entre cero y τ y otra vez entre cero y w; y luego integrando dicha función que resulta, K' veces con respecto a σ, pero K'-1 veces entre cero y σ y la última entre cero y w', se obtiene la función y, esto es:

$$y = \left(\int_0 d\tau\right)^K \cdot \left(\int_0 d\tau\right)^{K'} \cdot \varphi(\tau, \sigma) \,;$$

pero es:

$$\frac{\mathcal{C}^{K,K'}_{\lambda,\mu}(w,w')}{w^{K}.w'^{K'}} = -w^{-K}.w'^{-K'}.K.K'.(K-1)!(K'-1)!\,\gamma\,;$$

luego:

$$(4)\qquad \frac{\mathcal{C}^{K,K'}_{\lambda,\mu}(w,w')}{w^{K}.w'^{+K'}} = -K!\,K'!\,w^{-K}.w'^{-K'}.\left(\int_0 d\tau\right)^{K}.\left(\int_0 d\tau\right)^{K'}.\mathcal{C}(\tau,$$

o bien:

$$(5)\qquad \frac{\mathcal{C}^{K,K'}_{\lambda,\mu}(w,w')}{w^{K}.w'^{+K'}} = -K!\,K'!\,m^{-K}n^{-K'}.\left(\int_0 d\tau\right)^{K}.\left(\int_0 d\tau\right)^{K'}.\mathcal{C}(\tau,$$

Las fórmulas (4) y (5) son de capital importancia en la teoría de sumación que hemos bosquejado.

FIN DE LA TEORIA DE LA SUMACION

POR EL METODO DE LAS MEDIAS TIPICAS.-

Polya en "Matematische Zeitschrift" desarrolló la interesante teoría de los diagramas de la transformación simple de Laplace y una exposición sucinta puede averse en "Lecons sur les series generales de Dirichlet" de Vladimiro Bernstein, de la colección Borel.

La teoría de Polya puede extenderse al caso de dos variables independientes, para lo cual antepondremos los dos siguientes teoremas.

En realidad los resultados de Polya pueden obtenerse por vía sintética empleando los óvalos que constituyen las cápsulas de las singularidades de una función analítica de una sola variable independiente.

Teorema I)

Sea $\varphi(z,z')$ una función (real o compleja) de las variables (reales o complejas) independientes z y z', holomorfa para todo par de valores (z,z') reales y positivos, y que satisface a las dos condiciones siguientes:

1ª) Fijado arbitrariamente un ε positivo, existen un:

$$z_0 \equiv z_0(\varepsilon)$$

y un:

$$z'_0 \equiv z'_0(\varepsilon)$$

tales que para todo par de puntos z y z', exterior al rectángulo de vértices:

$$(0,0)\ ;\quad (z_0,0)\ ;\quad (z_0,z'_0)\ ;\quad (0,z'_0)\ ;$$

se tiene:

$$|\varphi(z,z')| < e^{(c+\varepsilon)z+(d+\varepsilon)z'};$$

siendo c y d constantes reales.

2ª) Para z y z' que tienden simultáneamente e independientemente a (0,0) se tiene:

$$\varphi(z,z') = \sum_{\nu=0}^{\nu=m-1}\sum_{\rho=0}^{\rho=n-1} a_{\nu,\rho}\cdot z^{\lambda_\nu}\cdot z'^{\mu_\rho} + O\left(z^{\lambda_m}\cdot z'^{\mu_n}\right)$$

esto es:

$$\overline{\lim_{(z,z')\to(0,0)}} \left\{ \frac{\varphi(z,z') - \sum_{\nu=0}^{\nu=m-1} \sum_{\rho=0}^{\rho=n-1} a_{\nu,\rho} . z^{\lambda_\nu} . z'^{\mu_\rho}}{z^{\lambda_m} . z'^{\mu_n}} \right\} \equiv K \equiv \infty$$

donde es:

$$\begin{cases} 0 \leq \lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \text{----} < \lambda_m ; \\ 0 \leq \mu_0 < \mu_1 < \mu_2 < \text{----} < \mu_n ; \end{cases}$$

y los:

$$a_{m,n} ;$$

son coefinientes arbitrarios.

En tales hipótesis, la integral :

$$(1) \qquad \Phi(x,x') \equiv \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-zx-z'x'} . \varphi(z,z') . dz . dz'$$

(siendo x y x' dos variables complejas independientes) representa una función de x y x', holomorfa para:

$$\left. \begin{array}{l} R(x) > e \\ \text{y:} \\ R(x') > d \end{array} \right\}$$

y que satisface en cada par de semiplanos:

$$\left. \begin{array}{l} R(x) \geq e' > e \\ \text{y:} \\ R(x') \geq d' > d \end{array} \right\}$$

a la condición:

$$(2) \qquad \Phi(x,x') = \sum_{\nu=0}^{\nu=m-1} \sum_{\rho=0}^{\rho=n-1} \frac{\Gamma(\lambda_\nu+1) . \Gamma(\mu_\rho+1)}{x^{\lambda_\nu+1} . x'^{\mu_\rho+1}} . a_{\nu,\rho} + O\left(x^{-\lambda_{m-1}} . x'^{-\mu_{n-1}}\right)$$

para:

$$\Big(R(x);R(x')\Big)\to(\infty,\ \infty);$$

esto es:

$$\overline{\lim}\left\{x^{\lambda_m+1},x'^{\mu_n+1}\left(\Phi(x,x')-\sum_{\nu=0}^{\nu=m-1}\sum_{\rho=0}^{\rho=n-1}\frac{\Gamma(\lambda_\nu+1).\Gamma(\mu_\rho+1)}{x^{\lambda_\nu+1}.x'^{\mu_\rho+1}}.a_{\nu,\rho}\right)\right\}\equiv\phi$$

<u>Demostración:</u>

En efecto, para:

$$\left.\begin{array}{l} R(x)\geqslant c'>c \\ \text{y:} \\ R(x')\geqslant d'>d \end{array}\right\}$$

se tiene:

$$\left|e^{-zx-z'x'}.\varphi(z,z')\right|<e^{(c+\varepsilon).z+(d+\varepsilon)z'}.e^{-zR(x)-z'R(x')}\leq$$

$$\leq e^{(c+\varepsilon)z+(d+\varepsilon)z'}.e^{-c'z-d'z'}=$$

$$=e^{-(c'-c-\varepsilon)z}.e^{-(d'-d-\varepsilon)z'};$$

luego tomando ε de modo que sea:

$$c'-c-\varepsilon>0$$

y:

$$d'-d-\varepsilon>0;$$

se ve que la integral (1) converge absoluta y uniformemente en todo par de semiplanos:

$$\left.\begin{array}{l} R(x)\geqslant c'>c \\ \text{y:} \\ R(x')\geqslant d'>d \end{array}\right\}$$

luego:

$$\Phi(x,x')$$

es función holomórfa para:

$$\left.\begin{array}{l} R(x) > c \\ \text{y:} \\ R(x') > d. \end{array}\right\}$$

Recordemos que es:

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty t^{s-1} \cdot e^{-t} \cdot dt$$

Pongamos:

$$\varphi_{m,n}(z,z') \equiv \varphi(z,z') - \sum_{\nu=0}^{\nu=m-1} \sum_{\rho=0}^{\rho=n-1} a_{\nu,\rho} \cdot z^{\lambda_\nu} \cdot z'^{\mu_\rho}$$

luego:

$$\varphi(z,z') \cdot e^{-zx-z'x'} = \sum_{\nu=0}^{\nu=m-1} \sum_{\rho=0}^{\rho=n-1} a_{\nu,\rho} \cdot e^{-zx} \cdot z^{\lambda_\nu} \cdot e^{-z'x'} \cdot z'^{\mu_\rho} +$$

$$+ \varphi_{m,n}(z,z') \cdot e^{-zx-z'x'};$$

de donde se deduce que es:

$$\Phi(x,x') = \sum_{\nu=0}^{\nu=m-1} \sum_{\rho=0}^{\rho=n-1} a_{\nu,\rho} \cdot \int_0^\infty e^{-zx} \cdot z^{\lambda_\nu} \cdot dz \cdot \int_0^\infty e^{-z'x'} \cdot z'^{\mu_\rho} \cdot dz' +$$

$$+ \int_0^\infty\int_0^\infty \varphi_{m,n}(z,z') \cdot e^{-zx-z'x'} \cdot dz \cdot dz'.$$

Pero:

$$\int_0^\infty z^{\lambda_\nu} \cdot e^{-zx} \cdot dz = \frac{\Gamma(\lambda_\nu+1)}{x^{\lambda_\nu+1}}$$

y además:

$$\int_0^\infty z'^{\mu_\rho} \cdot e^{-z'x'} \cdot dz' = \frac{\Gamma(\mu_\rho+1)}{x'^{\mu_\rho+1}}$$

luego:

$$\Phi(x,x') = \sum_{\nu=0}^{\nu=m-1}\sum_{\rho=0}^{\rho=n-1} \frac{\Gamma(\lambda_\nu+1).\Gamma(\mu_\rho+1)}{x^{\lambda_\nu+1}.x'^{\mu_\rho+1}}.a_{\nu,\rho} +$$

$$+\int_0^\infty\int_0^\infty \varphi_{m,n}(z,z').e^{-zx-z'x'}.dz.dz'.$$

Llamemos $\underline{R}$ al recinto indefinido del primer cuadrante del plano (z,z'), exterior al rectángulo R' de vértices:

$$(0,0) \quad ; \quad (z_0,0) \quad ; \quad (z_0;z'_0) \quad ; \quad (0;z'_0)$$

luego:

$$\int_0^\infty\int_0^\infty = \iint_{(R')} + \iint_{(R)}$$

siendo:

$$\varphi_{m,n}(z,z').e^{-zx-z'x'}.dz.dz'$$

el integrando común.

Según la primer hipótesis se tiene:

$$\left|\iint_{(R)} \varphi_{m,n}(z,z').e^{-zx-z'x'}.dz.dz'\right| < \iint_{(R)} e^{(c+\varepsilon)z}.e^{(d+\varepsilon)z'}.e^{-zR(x)-z'R(x')}dzdz' \leq$$

$$\leq \iint_{(R)} e^{(c+\varepsilon)z}.e^{(d+\varepsilon)z'}.e^{-zc'}.e^{-z'd'}.dz.dz' \leq$$

$$\leq \frac{e^{-\delta z_0}.e^{-\delta z'_0}}{\delta^2} \equiv \text{constante};$$

siendo:

$$\left.\begin{array}{l} c'-c-\varepsilon \geq \delta > 0 \\ d'-d-\varepsilon \geq \delta > 0 \end{array}\right\}$$

y:

Luego:

$$\iint_{(R)} \varphi_{m,n}(z,z').e^{-zx-z'x'}.dz.dz' = O\left(x^{-\lambda_m-1}.x'^{-\mu_n-1}\right)$$

para:

$$\left[R(x);R(x')\right] \to (\infty, \infty).$$

En cuanto a la integral:

$$\iint_{(R')} \varphi_{m,n}(z,z').e^{-zx-z'x'}.dz.dz'$$

se tiene:según la segunda hipótesis en un par de entornos de:

$$\left.\begin{array}{l} z=0 \\ z'=0 \end{array}\right\};$$

y:

es:

$$\left|\frac{\varphi_{m,n}(z,z')}{z^{\lambda_m}.z'^{\mu_n}}\right| < K \equiv \underline{cte}.;$$

siendo K una constante.Luego:

$$\left|\varphi_{m,n}(z,z').e^{-zx-z'x'}\right| < K.z^{\lambda_m}.z'^{\mu_n}.e^{-z\mathcal{R}(x)-z'\mathcal{R}(x')} =$$

$$= K.z^{\lambda_m}.z'^{\mu_n}.e^{-z\xi}.e^{-z'\xi'};$$

llamando:

$$\mathcal{R}(x) \equiv \xi$$

y:

$$\mathcal{R}(x') \equiv \xi'$$

luego:

$$\left| \iint_{(R')} \varphi_{m,n}(z,z') . e^{-zx - z'x'} . dz . dz' \right| <$$

$$< K . \int_0^{z_0} z^{\lambda_m} . e^{-z\xi} . dz . \int_0^{z'_0} z'^{\mu_n} . e^{-z'\xi'} . dz' <$$

$$< K . \xi^{-(1+\lambda_m)} . \xi'^{-(1+\mu_n)} . \Gamma(1+\lambda_m) . \Gamma(1+\mu_n)$$

luego:

$$\left| \iint_{(R')} \varphi_{m,n}(z,z') . e^{-zx - z'x'} . dz . dz' \right| < K' . \xi^{-(1+\lambda_m)} . \xi'^{-(1+\mu_n)}$$

habiendo puesto:

$$K' \equiv K . \Gamma(1+\lambda_m) . \Gamma(1+\mu_n) \equiv \underline{cte} . ;$$

de donde:

$$\left| \iint_{(R')} \varphi_{m,n}(z,z') . e^{-zx - z'x'} . dz . dz' \right| = O\left[\xi^{-(1+\lambda_m)} . \xi'^{-(1+\mu_n)} \right]$$

y pasando al límite, para:

$$(z_0 ; z'_0) \rightarrow (\infty, \infty)$$

se tiene:

$$\int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \varphi_{m,n}(z,z') . e^{-zx - z'x'} . dz . dz' = O\left[\xi^{-(1+\lambda_m)} . \xi'^{-(1+\mu_n)} \right]$$

pero como, si es:

$$(\xi, \xi') \rightarrow (\infty, \infty)$$

es:

$$(|x|;|x'|)\to(\infty,\infty);$$

se tiene que:

$$\iint_{0\,0}^{\infty\infty}\varphi_{m,n}(z,z').e^{-zx-z'x'}\,dz.dz'=O\left(x^{-1-\lambda_m}.x'^{-1-\mu_n}\right);$$

lo que demuestra el teorema.

<u>Teorema II).</u>

Si la función:

$$\Phi(x,x')\equiv\iint_{0\,0}^{\infty\infty}e^{-zx-z'x'}\,\varphi(z,z').dz.dz';$$

es holomórfa en los semiplanos:

$$\left.\begin{array}{l}R(x)>\delta\\ \text{y:}\\ R(x')>\delta'\end{array}\right\}$$

y satisface en cada par de semiplanos:

$$\left.\begin{array}{l}R(x)\geqslant\delta'>\delta\\ \text{y:}\\ R(x')\geqslant\delta'>\delta'\end{array}\right\}$$

a la condición (2), siendo:

$$\left.\begin{array}{l}\lambda_m>0\\ \text{y:}\\ \mu_n>0\end{array}\right\}$$

entonces la integral:

$$\varphi(z,z')\equiv-\frac{1}{4\pi^2}\int_{\delta'-i\infty}^{\delta'+i\infty}\int_{\delta'-i\infty}^{\delta'+i\infty}e^{zx+z'x'}\,\Phi(x,x').dx\,dx';$$

representa una función de z y de z' que es holomorfa para z y z' reales y positivos y que además satisface a las condiciones primera y segunda del teorema anterior y es además solución de la ecuación (1).

Demostración:

Consideremos en el plano de la variable compleja:

$$x = \xi + i\eta$$

el círculo de centro en el origen:

$$x = 0$$

y de radio R, esto es:

$$|x| \leq R$$

y en el plano de la variable compleja:

$$x' = \xi' + i\eta'$$

el círculo de centro en el origen:

$$x' = 0$$

y de radio R, esto es:

$$|x'| \leq R$$

el radio R lo haremos, luego, tender a más infinito.

Designemos por D la parte del círculo:

$$|x| \leq R,$$

situada en el semiplano:

$$\xi = R(x) \geq e' > e$$

y por D' la parte del círculo:

$$|x'| \leq R$$

situada en el semiplano:

$$\xi' = R(x') \geq d' > d;$$

y llamemos C al contorno de D y C' al contorno de D'.

Para todo punto (x,x') tal que sea x interior a D y x' interior a D', se

tiene:

$$\Phi(x,x') = -\frac{1}{4\pi^2}\cdot\int_{\mathcal{C}}\int_{\mathcal{C}'}\frac{\Phi(u,v)}{(u-x).(v-x')}.du.dv$$

Pongamos:

$$\mathcal{C} \equiv \mathcal{C}_1 + \mathcal{C}_2$$

siendo C_1 la parte curvilínea de C y C_2 la parte rectilínea de C, y:

$$\mathcal{C}' \equiv \mathcal{C}'_1 + \mathcal{C}'_2$$

siendo C'_1 la parte curvilínea de C' y C'_2 la parte rectilínea de C'.

Luego se tiene:

$$\Phi(x,x') = -\frac{1}{4\pi^2}\cdot\left[\int_{\mathcal{C}_1}\int_{\mathcal{C}'_1} + \int_{\mathcal{C}_2}\int_{\mathcal{C}'_2} + \int_{\mathcal{C}_1}\int_{\mathcal{C}'_2} + \int_{\mathcal{C}_2}\int_{\mathcal{C}'_1}\right];$$

siendo en estas cuatro integrales dobles curvilíneas la función:

$$\frac{\Phi(u,v)}{(u-x).(v-x')}.du.dv$$

el integrando común.

En cuanto a la integral:

$$\int_{\mathcal{C}_1}\int_{\mathcal{C}'_1}$$

se tiene que es:

$$\frac{\Phi(u,v)}{(u-x).(v-x')} = \frac{1}{(u-x).(v-x')}\cdot\sum_{\nu=0}^{\nu=m-1}\sum_{\rho=0}^{\rho=n-1}\frac{\Gamma(1+\lambda_\nu).\Gamma(1+\mu_\rho)}{u^{\lambda_\nu+1}.v^{\mu_\rho+1}}.a_{\nu,\rho} +$$

$$+\frac{1}{(u-x)(v-x')}.O\left[u^{-(\lambda_m+1)}.v^{-(\mu_n+1)}\right].$$

Pero:

$$\int_{\mathcal{C}_1}\int_{\mathcal{C}_1'} \frac{\Gamma(\lambda_\nu+1).\Gamma(\mu_\rho+1).a_{\nu,\rho}}{u^{\lambda_\nu+1}.v^{\mu_\rho+1}} \cdot \frac{1}{(u-x).(v-x')} . du.dv =$$

$$= \Gamma(\lambda_\nu+1).\Gamma(\mu_\rho+1).a_{\nu,\rho} \int_{\mathcal{C}_1} \frac{1}{u^{\lambda_\nu+1}(u-x)} dx . \int_{\mathcal{C}_1'} \frac{1}{v^{\mu_\rho+1}(v-x')} dv$$

Pongamos ahora:

$$u = R.e^{i\varphi}$$

luego:

$$du = R.i.e^{i\varphi}.d\varphi$$

luego:

$$|du| = R.d\varphi ;$$

llamando:

$$l \equiv l(R) > 0;$$

la distancia del punto:

$$x = \xi + i\eta$$

a la curva C_1 se tiene (que por ser:

$$|u-x| \geq l)$$

que es:

$$\left| \int_{\mathcal{C}_1} \frac{1}{u^{\lambda_\nu+1}.(u-x)} . du \right| \leq \int \frac{d\varphi}{R^{\lambda_\nu}.l} =$$

$$= \frac{1}{R^{\lambda_\nu}} . \frac{2.\varphi_0.R}{l} ;$$

pero es:

$$R = |x| + l$$

luego:

$$\frac{R}{l} = \frac{|x|}{l} + 1 \longrightarrow 1$$

si:

$$R \to \infty$$

luego:

$$\lim_{R\to\infty} \int_{\mathcal{C}_1} \frac{1}{u^{\lambda_\nu+1}(u-x)} \cdot du = 0$$

por ser:

$$\lambda_\nu > 0.$$

Análogamente se prueba que es:

$$\lim_{R\to\infty} \int_{\mathcal{C}_1} \frac{1}{v^{\mu_\rho+1}(v-x')} \cdot dv = 0$$

si es:

$$\mu_\rho > 0.$$

Veamos ahora que pasa, si es:

$$\lambda_\nu = \mu_\rho = 0$$

o mejor dicho, si es:

$$\lambda_0 = \mu_0 = 0.$$

En efecto:

$$\int_{\mathcal{C}_1} \frac{1}{u(u-x)} du = \frac{1}{x} \cdot \left[l(x-u) - lu \right]_{\mathcal{C}_1} = \frac{1}{x} \cdot \left[l\left(\frac{u-x}{u}\right) \right]$$

$$= \frac{1}{x} \cdot \left[l\left(\frac{Re^{i\varphi_0}-x}{Re^{i\varphi_0}}\right) - l\left(\frac{Re^{-i\varphi_0}-x}{Re^{-i\varphi_0}}\right) \right] =$$

$$= \frac{1}{x} \cdot \left[-2i\varphi_0 + l\left(\frac{Re^{i\varphi_0}-x}{Re^{i\varphi_0}-x}\right) \right] \to \frac{1}{x} \cdot \lim_{R\to\infty} (-2i\varphi_0) =$$

$$= -\frac{\pi i}{x}.$$

Luego;

si es;

y;

$$\left.\begin{array}{l}\lambda_0 > 0\\ \mu_0 > 0\end{array}\right\}$$

se tiene;

$$-\frac{1}{4\pi^2}\cdot\lim_{R\to\infty}\int_{\mathcal{C}_1}\int_{\mathcal{C}_1'}\frac{\Phi(u,v)}{(u-x)(v-x')}\cdot du\cdot dv =$$

$$= -\frac{1}{4\pi^2}\cdot\lim_{R\to\infty}\int_{\mathcal{C}_1}\int_{\mathcal{C}_1'}\frac{du\cdot dv}{(u-x)\cdot(v-x')}\cdot O\left[u^{-(1+\lambda_m)}\cdot v^{-(1+\mu}\right.$$

y si es;

y;

$$\left.\begin{array}{l}\lambda_0 = 0\\ \mu_0 = 0\end{array}\right\}$$

e tiene que es;

$$\frac{1}{4\pi^2}\cdot\lim_{R\to\infty}\int_{\mathcal{C}_1}\int_{\mathcal{C}_1'}\frac{\Phi(u,v)}{(u-x)(v-x')}\cdot du\cdot dv =$$

$$\cdot\frac{1}{4\pi^2}\cdot\left[\lim_{R\to\infty}\int_{\mathcal{C}_1}\int_{\mathcal{C}_1'}\frac{du\cdot dv}{(u-x)(v-x')}\cdot O\left[u^{-(1+\lambda_m)}\cdot v^{-(1+\mu_n)}\right.\right.$$

$$\left.-\Gamma^2(1)\cdot a_{0,0}\cdot\frac{\pi^2}{x\,x'}\right] =$$

$$\frac{a_{0,0}}{4xx'} - \frac{1}{4\pi^2}\cdot\left[\lim_{R\to\infty}\int_{\mathcal{C}_1}\int_{\mathcal{C}_1'}\frac{du\cdot dv}{(u-x)\cdot(v-x)}\cdot O\left(u^{-\lambda_m-1}\cdot v^{-1-\mu_n}\right)\right.$$

En cuanto a:

$$\int_{\mathcal{C}_1}\int_{\mathcal{C}'_1}\frac{du.dv}{(u-x).(v-x')}.O\left(u^{-\lambda_m-1}.v^{-\mu_n-1}\right);$$

se tiene que:

llamemos:

$$g(u,v)\equiv O\left(u^{-\lambda_m-1}.v^{-\mu_n-1}\right)$$

esto es:

$$\left|g(u,v).u^{\lambda_m+1}.v^{\mu_n+1}\right|<K\equiv \underline{cte}.;$$

siendo K una constante, si:

$$\left.\begin{array}{l}|u|\to\infty\\ |v|\to\infty\end{array}\right\}$$

y:

luego:

$$\left|\int_{\mathcal{C}_1}\int_{\mathcal{C}'_1}\frac{du.dv}{(u-x).(v-x')}.O\left(u^{-\lambda_m-1}.v^{-\mu_n-1}\right)\right|\leq$$

$$\leq\int_{\mathcal{C}_1}\int_{\mathcal{C}'_1}\frac{|du|.|dv|}{|u-x|.|v-x'|}.|g(u,v)|<\int_{\mathcal{C}_1}\int_{\mathcal{C}'_1}\frac{|du.dv|}{|u-x|.|v-x'|}\cdot$$

$$\cdot\frac{K}{|u|^{\lambda_m+1}.|v|^{\mu_n+1}}=K.\int_{\mathcal{C}_1}\frac{|du|}{|u|^{\lambda_m+1}.|u-x|}.\int_{\mathcal{C}'_1}\frac{|dv|}{|v|^{\mu_n+1}|v-x'|}\to 0;$$

Luego resumiendo se tiene:

a) si es:

$$\lambda_0>0$$

o:

$$\mu_0>0$$

es:

$$\lim_{R\to\infty}\int_{\mathcal{C}_1}\int_{\mathcal{C}'_1}\frac{\Phi(u,v)}{(u-x)(v-x')}.du.dv=0;$$

b)si es:

$$\lambda_0 = \mu_0 = 0 \; ;$$

es:

$$\lim_{R\to\infty} \int_{\mathscr{C}_1} \int_{\mathscr{C}'_1} \frac{\Phi(u,v)}{(u-x).(v-x')}.du.dv = \frac{a_{0,0}}{4xx'} ;$$

Veamos ahora con:

$$\int_{\mathscr{C}_1} \int_{\mathscr{C}'_2} \frac{\Phi(u,v)}{(u-x)(v-x')}.du.dv.$$

Calculemos primero:

$$\int_{\mathscr{C}'_2} \frac{1}{v^{\mu_\rho+1}.(v-x')}.dv \; ;$$

como su denominador:

$$v^{\mu_\rho+1}.(v-x')$$

es por lo menos de segundo grado en v,es:

$$\lim_{R\to\infty} \int_{\mathscr{C}'_2} \frac{1}{v^{\mu_\rho+1}.(v-x')}.dv = \phi .$$

Luego en definitiva queda:

$$\Phi(x,x') = -\frac{1}{4\pi^2}.\int_{c'-i\infty}^{c'+i\infty} \int_{d'-i\infty}^{d'+i\infty} \frac{\Phi(u,v)}{(x-u)\,(x'-v)}.du.dv =$$

$$= -\frac{1}{4\pi^2}.\lim_{R\to\infty} \int_{c'-iR}^{c'+iR} \int_{d'-iR}^{d'+iR} \frac{\Phi(u,v)}{(x-u)\,(x'-v)}.du.dv \; ;$$

pero es:

$$\int_0^\infty e^{-(x-u)z}.dz = \frac{1}{x-u} \; ;$$

y:

$$\int_0^\infty e^{-(x'-v)z'}.dz' = \frac{1}{x'-v} \; ;$$

luego:

$$(3)\quad \Phi(x,x') = -\frac{1}{4\pi^2}\int_{c'-i\infty}^{c'+i\infty}\int_{d'-i\infty}^{d'+i\infty}\Phi(u,v).du.dv.\left(\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-(x-u)z-(x'-v)z'}.dz\,dz'\right)$$

Invirtiendo el orden de las integraciones se tiene:

$$(4)\quad \Phi(x,x') = \int_0^\infty\int_0^\infty e^{-xz-x'z'}.\varphi(z,z').dz.dz'$$

llamando:

$$(5)\quad \varphi(z,z') = -\frac{1}{4\pi^2}\int_{c'-i\infty}^{c'+i\infty}\int_{d'-i\infty}^{d'+i\infty} e^{zu+z'v}.\Phi(u,v).du.dv.$$

(si fuese:

$$\left.\begin{array}{l}\lambda_0>0\\ \mu_0>0\end{array}\right\}$$

y:

la legitimidad de la inversión del orden de las integraciones en (3) se consecuencia de la convergencia absoluta de la integral cuádruple:

$$\int_{c'-i\infty}^{c'+i\infty}\int_{d'-i\infty}^{d'+i\infty}\int_0^\infty\int_0^\infty$$

de la función:

$$\Phi(u,v).e^{-(x-u)z-(x'-v)z'}.du.dv.dz.dz';$$

pero si fuese:

$$\left.\begin{array}{l}\lambda_0=0\\ \mu_0>0\end{array}\right\}$$

y:

o bien:

$$\left.\begin{array}{l}\lambda_0>0\\ \mu_0=0\end{array}\right\}$$

y:

o bien:

$$\left.\begin{array}{l}\mu_0 = 0\\ \lambda_0 = 0\end{array}\right\}$$

y:

pondríamos en el segundo miembro de (3):

$$\Phi(u,v) \equiv a_{0,0} \cdot u^{-1} \cdot v^{-1} + \Phi_1(u,v);$$

La integral relativa al segundo término $\Phi_1(u,v)$ es también absolutamente convergente en virtud de la fórmula (3) pues es:

$$\left.\begin{array}{l}\lambda_1 > \lambda_0 = 0\\ \mu_1 > \mu_0 = 0\end{array}\right\}$$

y:

y en cuanto a la integral relativa al primer término un simple cálculo prueba que seppuede invertir el orden de las integraciones.

Por lo tanto las integrales (4) y (5) son seguramente convergentes.

La condición primera se cumple,pues,én efecto,pongamos:

$$\left.\begin{array}{l}u = c' + it\\ v = d' + it'\end{array}\right\}$$

y:

luego:

$$\left.\begin{array}{l}du = i\,dt\\ dv = i\,dt'\end{array}\right\}$$

y:

luego en (5) se tiene:

$$\varphi(z,z') = \frac{1}{4\pi^2} \cdot \int_{c'-i\infty}^{c'+i\infty} \int_{d'-i\infty}^{d'+i\infty} e^{zc'+zti+z'd'+z't'i} \cdot \Phi(c'+ti;d'+it') \cdot dt \cdot dt' =$$

$$= O\left(e^{zc'+z'd'}\right)$$

y d' y c' pueden tomarse tan próximos como se quiera a c y a d, respectivamente.

La demostración del teorema se concluye como en el caso del teorema anterior.

Carlos Biggeri

EX-LIBRIS
BIBLIOTECA