Sobre las ecuaciones lineales con derivadas parciales de segundo orden

Baidaff, Bernardo L.

1921

Tesis presentada para obtener el grado de Doctor en Ciencias Físico-Matemáticas de la Universidad de Buenos Aires

Buenos Aires, Noviembre 21 1921

Presentado en la fecha, constando de

57 páginas y acompañado de —

láminas

SECRETARIO

Buenos Aires, Noviembre 21/921

Pase á la Comisión examinadora N°. 17

para que se sirva dar cumplimiento á las disposiciones de los artículos 8°. y 10°. de la Ordenanza sobre pruebas finales profesionales.

DECANO

142

SECRETARIO

Buenos Aires, 20 de diciembre 1921

Señor Decano:

Los miembros de la Comisión examinadora respectiva que firman, certifican haber estudiado el presente proyecto del ex-alumno Bernardo L. Baidaff y, de acuerdo con las disposiciones del art. 3° de la ordenanza sobre PRUEBAS FINALES PROFESIONALES, resuelven aceptarlo para su examen.

Duclout.

Carlos Ma Morales. Ign. Aztiria

E. J. D. Aguirre

[illegible]

FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS, FISICAS Y NATURALES.

[illegible]

Tesis para optar al título de doctor

en ciencias físico-matemáticas.

Buenos Aires, 1931.

P R E L I M I N A R.

EULER tenía para las matemáticas una pasión profunda e inalterable; deseaba que todo el mundo las supiera y las estimara como él. Si no hizo descubrimientos célebres como NEWTON y otros, sinembargo dice BERTRAND, nadie trabajó con más celo, con más empeño, y con mayor provecho, para el progreso de las ciencias que EULER para las matemáticas. Ninguno como él, trató de apartar las nubes que impedían la matemática brillar en todo su esplendor; ninguno empleó los métodos más sencillos y más naturales que él. EN CADA CUESTION ENSEÑABA COMO HABIA LLEGADO A PLANTEARSELA, QUE TENTATIVAS HABIA HECHO PARA LLEGAR A LA SOLUCION QUE EL EXPONÍA CON TODOS LOS DETALLES; Y ENTONCES PROCEDÍA SUAVEMENTE, SOBRE UNA PENDIENTE INSENSIBLE, QUE ASCENDÍA HASTA LAS CUMBRES MAS ELEVADAS DE LA CIENCIA. NUNCA TRATO DE HACERSE EL MISTERIOSO O EL IMPORTANTE EN SUS ESCRITOS; NUNCA TRATO DE PRODUCIR ESTUPEFACCIÓN O ADMIRACION EN SUS LECTORES.

Al emprender el presente estudio me ha determinado a esto ciertas relaciones que aparecen en la teoría de la doble refracción (ver Résal, Physique Mathématique, 1887) que escritas simbolicamente, ofrecen te, ofrecen verdaderas ventajas para dominar más facilmente la andamiada de los largos desarrollos.

Añádase a lo anterior las reminiscencias del método de resolución simbólica de las ecuaciones diferenciales lineales, como se encuentra frecuentemente en los autores ingleses (ver A. R. FORSYTH, A treatise on Differential Equations, III Ed., pág. 55 y siguientes) a lo cual se vinculó la esperanza de hallar algunos resultados que desconocía.

Con estos puntos de partida, mis primeros pasos hanse dirigido hacia la historia de la cuestión a tratar, la cual en si es un tema vastísimo, aunque no ha de buscarse ecuaciones con derivadas parciales antes de un NEWTON (1642 - 1727). En la presente me limitaré tan solo citar los nombres de quienes se ocuparon con las ecuaciones con derivadas parciales:

N. H. ABEL, A. M. AMPERE, P. APPELL, X. ANTOMARI, A. V. BÄCKLUND, D. BERNOULLI, J. BERNOULLI, J. BERTRAND, J. BEUDON, J. P. BINET, O. BIERMANN, M. BOCHER, L. BOLTZMANN, O. BONNET, G. BOOLE, E. BOREL, J. C. BOUQUET, M. BOTTASSO, E. BOUR, C. BOURLET, J. BRILL, E. BRIOSCHI, B. BRISSON, C. A. BRIOT, P. BURGATTI, J. E. CAMPBELL, E. CARTAN, F. CASSORATI,

A. L. CAUCHY,

A. L. CAUCHY, A. CAYLEY, P. CHARPIT, J. CLARIN, A. CLEBSCH, J. COLLET, E. COMBESCURE, N. C. CONDORCET, E. COSSERAT, E. COTTON, R. d'ADHEMAR, G. DARBOUX, J. d'ALEMBERT, F. DEAHNA, TH. de DONDER, E. DELASSUS, A. de MORGAN, de PISTOYE, W. de TANNEBERG, P. G. L. DIRICHLET, W. F. DONKIN, J. DRACH, P. du BOIS-REYMOND, H. DUPORT, V. Z. ELLIOT, F. ENGEL, L. EULER, M. FALK, J. FARKAS, G. FLOQUET, A. R. FORSYTH, J. FOURIER, G. FROBENIUS, L. FUCHS, E. GAU, C. F. GAUSS, PH. GILBERT, F. GOMEZ TEIXEIRA, P. GORDON, E. GOURSAT, J. GRAINDORGE, H. GRASSMANN, A. GULDBERG, J. HADAMARD, M. HAMBURGER, W. R. HAMILTON, E. R. HDERICK, C. HERMITE, O. HESSE, J. HORN, V. G. IMSENECKIJ, C. G. I. JACOBI, W. KAPTEYN, F. KLEIN, E. KNESER, J. KÖNIG, L. KÖNIGSBERGER, A. N. KORKINE, E. E. KUMMER, SOPHIE KOWALEWSKY, J. KÜRSCHACK, S. E. LACROIX, J. L. LAGRANGE, G. LAMÉ, P. S. LAPLACE, H. LAURENT, A. M. LEGENDRE, H. LEMONIER, E. E. LEVI, L. LEVY, M. LEVY, S. LIE, J. LIOUVILLE, R. LIPSCHITZ, H. W. LLOYD TANNER, P. MANSION, A. MAYER, P. MEDOLAGHI, CH. MÉRAY, G. M. MITTAGLEFFLER, G. MONGE, G. MORERA, TH. MOUTARD, L. NATANI, I. NEWTON, O. NICOLETTI, M. OSTROGRADSKY, E. PADOVA, P. PAINLEVÉ, E. PASCAL, G. PEANO, K. M. PETERSON, LUISA

PETREN,

PETREN, J. F. PFAFF, E. PICARD, LAURA PISATI, H. POINCARÉ, S. D. POISSON, G. F. B. RIEMANN, CH. RIQUIER, E. J. ROUTH, J. L. ROUX, J. L. RUSSIJAN, N. N. SALTYKOV, G. SCHEFFERS, L. SCHLESINGER, A. SCHEPP, E. SCHERING, F. SCHUR, J. A. SERRET, V. SERSAVY, N. J. SONIN, H. A. W. SPECKMAN, P. STÄCKEL, V. STEKLOV, E. STEPHAN, J. C. F. STURM, J. TANNERY, B. TAYLOR, L. W. THOME, F. TISSERAND, A. TRESSE, E. VESSIOT, G. VIVANTI, V. VOLTERRA, A. VOSS, G. J. WALLENBERG, E. von WEBER, H. WEBER, K. WEIERSTRASS, A. WEILER, J. ZANTSCHEWSKY, P. ZERVOS,

y que las últimas tésis sobre temas análogos presentados en Paris son las siguientes:

M. JANNET, Sur les systèmes d'équations aux dérivées partielles;

G. CERF, Sur les équations aux dérivées partielles du second ordre;

G. GOOSE, De l'intégration dés équations par la méthode de DARBOUX.

La lista anterior, si puede estimarse como una medida de la extensión del tema, las obras mismas que se relacionan con él, no lo son menos (la razón la da d'ADHEMAR) y el estudio deellas requiriría querría algunos años de dedicación, quizá una extremada especialización, como la de los FORSYTH, GOURSAT, la disposición de bibliotecas muy completas y cierta holgura material de la cual gozan solamente pocas personas en esta vida. Estos factores tan importantes en la producción intelectual de cualquier naturaleza que ella fuese, me han impuesto forzosamente restricciones en los primeros proyectos, y me ocuparé, en primera aproximación hacia las perfecciones y ampliaciones sucesivas invocadas al principio, del estudio de las ecuaciones

$$Rr + Ss + Tt + Pp + Qq + Zz = U$$

en las cuales R, S, T, P, Q, U son polinomios de las variables independientes x e y, y las r, s, t, p, q, z, respectivamente las siguientes funciones de z, x, y:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \quad \frac{\partial z}{\partial x} \quad \frac{\partial z}{\partial y} \quad z$$

definidas mediante ciertas reglas.

Al restringir tanto el problema me ha determinado tambien un sentimiento de desaliento que lo invade a uno al aplicar el poderoso método de la generalización, la cual hace perder del alcance de nuestro conocimiento las bellezas del microcosmo matemático. Este método no obstante no será excluido en las páginas que siguen,

como

como se tendrá la oportunidad de apreciar.

Al someter el presente trabajo al juicio de la Honor. Comisión examinadora del mismo, cuento con la indulgencia y consideración en cuanto a las deficiencias que ha de presentar, por ser el fruto de una investigación propia, sincera y fundada en los escasos recursos actuales.

Buenos Aires, Octubre 1921.

Bernardo Ig. Baidaff

LAS ECUACIONES CON DERIVADAS PARCIALES DE SEGUNDO ORDEN .

L'on peut se poser des problèmes d'intégration très divers.
R. D'ADHEMAR.

G E N E R A L I D A D E S .

CLASIFICACION DE LAS ECUACIONES CON DERIVADAS PARCIALES DE SEGUNDO ORDEN.

1. D e f i n i c i ó n . - La integral completa de una ecuación con derivadas parciales de II orden

$$(1) \qquad E = Rr + Ss + Tt + Pp + Qq + Zz - U = 0$$

es la relación más general posible entre las variables independientes x, y, y la función z de ellas, que nos permite obtener de la misma a z y las derivadas parciales correspondientes, que hagan la (1) una identidad, al ser sustituidos en ella.

2. D e f i n i c i ó n . - Es integral intermediaria de una ecuación (1) toda relación entre x, y, z, p, q, que derivada con respecto a x y a y y luego combinada con ella, nos dé la (1) ; y tambien, es una integral intermediaria general, toda relación entre las mismas cantidades y una función arbitraria de cualquier número de aquellas, cuya eliminación reproduzca la (1).

E J E M P L O S .

E J E M P L O S .

4. La ecuación

(2) $$r = F(x)$$

tiene como integral completa a

(3) $$z = \iint F(x)\,dx^2 + x\,f(y) + g(y)$$

5. La ecuación con derivadas parciales de II orden

(4) $$(B + Cq)^2 r - 2(A + Cp)(B + Cq)s + (A + Cp)^2 t = 0$$

con A; B, C tres constantes, conocidas, admite como integrales generales intermediarias a cualquiera de las siguientes:

(5) $$\frac{A + Cp}{Aq - Bp} = f(Ax + By + Cz)$$

(6) $$\frac{Aq - Bp}{B + Cq} = g(Ax + By + Cz)$$

(7) $$\frac{B + Cq}{A + Cp} = h(Ax + By + Cz)$$

pues la última por ejemplo, nos da

(8) $$B + Cq = (A + Cp)\,h(Ax + By + Cz)$$

(9) $$Cs = Crh + (A + Cp)^2$$

(10) $$Ct = Csh + (A + Cp)(B + Cq)h'$$

(11) $$\begin{vmatrix} B + Cq & A + Cp & 0 \\ Cs & Cr & A + Cp \\ Ct & Cs & B + Cq \end{vmatrix} = 0$$

que coincide con la ecuación (4) .

6. Cambio de

6. C a m b i o d e l a s v a r i a b l e s i n d e p e n d i e n t e s . - Si en la ecuación (1) tomamos las nuevas variables ξ, η y designamos por p', q', r', s', t' las expresiones $\frac{\partial z}{\partial \xi}, \frac{\partial z}{\partial \eta}, \frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2}$.... , la ecuación (1) se transforma en

$$r'\left[R\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2 + S\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \xi}{\partial y} + T\left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)^2\right] + \tag{12}$$

$$+ t'\left[R\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2 + S\frac{\partial \eta}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial y} + T\left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)^2\right] +$$

$$+ s'\left[2R\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial x} + S\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial x}\right) + 2T\frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial y}\right] +$$

$$+ p'\left[R\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + S\frac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial y} + T\frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + P\frac{\partial \xi}{\partial x} + Q\frac{\partial \xi}{\partial y}\right] +$$

$$+ q'\left[R\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + S\frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial y} + T\frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} + P\frac{\partial \eta}{\partial x} + Q\frac{\partial \eta}{\partial y}\right] + Zz = U$$

la cual se reducirá si tomamos para ξ, η las funciones que satisfacen las relaciones

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = m\frac{\partial \xi}{\partial y} \tag{13}$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial x} = n\frac{\partial \eta}{\partial y} \tag{14}$$

siendo <u>m</u>, <u>n</u> las raices de la ecuación auxiliar

$$R\,X^2 + SX + T = 0 \tag{15}$$

Se llega a la forma

$$\frac{\partial^2 z}{\partial \xi \partial \eta} + L\frac{\partial z}{\partial \xi} + M\frac{\partial z}{\partial \eta} + Nz = V \tag{16}$$

conocida bajo el nombre de ecuación referida a sus características.

7. L o s t r e s t i p o s d i f e r e n t e s d e l a s e c u a c i o n e s l i n e a l e s . - Si la expresión

(17)

(17) $$S^2 - 4\,RT$$

es positiva para el punto x°, y°, las características son reales y la ecuación pertenece en este punto al tipo h i p e r b ó l i - c o; la forma indicada en (16) es la forma canónica del tipo hiperbólico.

Si la cantidad (17) es negativa, las características son imaginarias, y la ecuación (1) pertenece al tipo e l i p t i - co cuya forma canónica se obtiene mediante el nuevo cambio de variables independientes

(18) $X = \xi + \eta$ (19) $Y = \frac{\xi - \eta}{i}$

que transforma el término $\frac{\partial^2 z}{\partial\xi\partial\eta}$ en $\frac{\partial^2 z}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial Y^2}$ Se llega asi a la forma canónica

(20) $$\frac{\partial^2 z}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial Y^2} + Pp + Qq + Zz - U = 0$$

Por fin, en el caso de ser $S^2 - 4RT$ igual a cero, la ecuación mediante el cambio ξ dado por la ecuación auxiliar, y la η una función cualquiera, diferente de ξ, contendrá solamente el término en t'. Es el resultado de este cambio de variables

(21) $$\frac{\partial^2 z}{\partial \eta^2} + Pp + Qq + Zz - U = 0$$

que es la forma canónica del último tipo, el p a r a b ó l i c o.

8. O b s e r v a c i ó n . - Una y la misma ecuación puede

pertenecer

pertenecer a todos los tres tipos considerados, según las regiones en las cuales se encuentra el punto representativo de x, y, y que se determinan por

(22) $$S^2 - 4RT \gtrless 0$$

9. La ecuación (1) la escribiremos tambien para abreviar

(23) $$RSTPQZU \gtrless 0$$

y esto nos permitirá escribir la siguiente subclasificación de las mismas:

a) E c u a c i o n e s d e l t i p o h i p e r b ó l i - c o c o n u n s o l o t é r m i n o d e s e g u n d o o r - d e n :

(24) I. S

(25) II. SP SQ SZ SU

(26) III. SPQ SPZ SPU SQZ SQU SZU

(27) IV. SPQZ SPQU SPZU SQZU

(28) V. SPQZU

b) E c u a c i o n e s d e l t i p o p a r a b ó l i c o c o n u n s o l o t é r m i n o d e II o r d e n :

(29) I. R

(30) II. RP RQ RZ RU

(31) III. RPQ RPZ RPU RQZ RQU

(32) IV. RPQZ RPQU RPZU RQZU

(33) V. RPQZU

Hay todavía las ecuaciones que contienen a T , pero debido a la simetría de las derivadas parciales r, t lo que se dirá de las (29 - 33) se transfiere sobre las que contengan a T.

c) E C U A c i o n e s d e l t i p o h i p e r b ó l i c o c o n d o s t é r m i n o s d e II o r d e n :

(34) I. RS

(35) II. RSP RSQ RSZ RSU

(36) III. RSPQ RSPZ RSPU RSQZ RSQU RSZU

(37) IV. RSPQZ RSPQU RSPZU RSQZU

(38) V. RSPQZU

Al mismo tipo pertenecen las ecuaciones caracterizadas por la presencia del par ST.

d) E c u a c i o n e s d e t i p o a m b i g u o c o n d o s t é r m i n o s d e II o r d e n:

(39) I. RT

(40) II. RTP RTQ

(41) III. RTPQ RTPZ RTPU RTQZ RTQU RTZU

(42)

(42) IV. RTPQZ RTPQU RTPZU RTQZU

(43) V. RTPQZU

e) Ecuaciones del tipo ambiguo con los tres términos de II orden:

(44) I. RST

(45) II. RSTP RSTQ RSTZ RSTU

(46) III. RSTPQ RSTPZ RSTPU RSTQZ RSTQU RSTZU

(47) IV. RSTPQZ RSTPQU RSTPZU RSTQZU

(48) V. RSTPQZU

Un primer examen de los cuadros anteriores nos indica 80 tipos de ecuaciones, sin embargo el número se reduce sensiblemente; así de las (24 - 28) pueden suprimirse las

(49) SQ SQZ SQU SQZU ;

de las (39 - 43) las

(50) RTQ RTQZ RTQU RTQZ

y de las últimas

(51) RSTQ RSTQZ RSTQU RSTQZ

10. En lo sucesivo emplearemos las letras f,g,h, ... para designar funciones arbitrarias.

11. Teorema de existencia y el problema

b l e m a d e C A U C H Y . Para las ecuaciones que estudiamos vale el teorema de existencia de CAUCHY:

Si se da una ecuación

$$r = -\frac{1}{R}(Ss + Tt + Pp + Qq + Zz - U) \tag{52}$$

cuyo segundo miembro es una función analítica holomorfa en el entorno de los valores x^o, y^o, z^o, p^o, q^o, s^o, t^o, (puesto que R, S, T, ... U son por nuestra hipótesis polinomios y que además suponemos $R(x^o,y^o) \neq 0$) y si $\varphi_0(y)$ y $\varphi_1(y)$ son dos funciones de y holomorfas en el entorno de $y = y^o$, y tales que

$$\varphi_0(y_0) = z^o \qquad \varphi_0'(y^o) = q^o \qquad \varphi_0''(y^o) = t^o \tag{53}$$

$$\varphi_1(y^o) = p^o \qquad \varphi_1'(y^o) = s^o \tag{54}$$

la ecuación (52) admite una integral z(x,y) holomorfa en el entorno de x^o, y^o, tal, que para $x = x^o$ se tenga

$$z(x^o, y) = \varphi_0(y) \qquad \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_{x^o} = \varphi_1(y) \tag{55}$$

No existe más que una integral que satisface todas estas condiciones.

Hallar esta integral es el problema de CAUCHY.

13. T e o r e m a d e e x i s t e n c i a d e G O U R S A T . - Si R y T son a la vez nulos, no siéndolo S, se tiene el teorema de GOURSAT, que para el caso se enunciará como sigue:

Sea

Sea la ecuación

$$(56) \qquad s = -\frac{1}{S}(Pp + Qq + Zz - U)$$

holomorfa alrededor del punto x°, y°, z°, r°, t° y dos funciones φ y ψ de x y de y respectivamente, tales que

$$(57) \qquad \varphi(x^0) = z^0 \qquad \varphi'(x^0) = p^0 \qquad \varphi''(x^0) = r^0$$

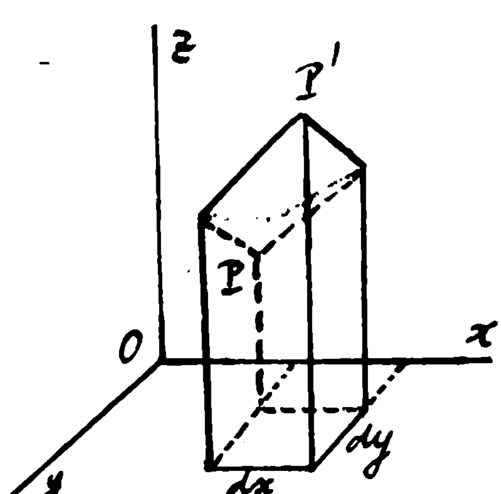
$$(58) \qquad \psi(y^0) = z^0 \qquad \psi'(y^0) = q^0 \qquad \psi''(y^0) = t^0$$

existirá una integral que se reducirá a

$$(59) \qquad z = \varphi(x) \quad \text{para} \quad y = y^0$$

$$(60) \qquad z = \psi(y) \quad \text{"} \quad x = x^0.$$

13. **E l e m e n t o s d e c o n t a c t o y m u l t i p l i c i d a d e s .** - La consideración simultánea de x°, y°, z°, p°, q°, que intervienen en el problema de CAUCHY, conducen a la nueva entidad: el elemento de contacto de SOPHUS LIE, puesto que quedan definidos el punto y el plano tangente correspondiente.



Los cinco números, llamados c o o r d e n a d a s d e l e l e m e n t o, que definen el elemento de contacto, pueden depender de una o varias variables independientes y son llamados u n i d o s o/a s o c i a d o s , cuando satisfacen la relación

(61)

$$dz = p\,dx + q\,dy \tag{61}$$

lo cual significa lo mismo que el punto P_1 de coordenadas $x + dx$ $y + dy$, $z + dz$ se encuentra en el plano tangente (x,y,z,p,q).

Cuando las cinco coordenadas son funciones de una sola variable, el conjunto de todos los elementos de contacto forman una m u l t i p l i c i d a d que se indica por M_1, y si las coordenadas son funciones de $\underset{\sim}{i}$ variables independientes se tiene una multiplicidad M_i.

14. Con la terminología que precede, el problema de CAUCHY enunciado anteriormente para una curva plana $z = \varphi_0(x)$, $x = x^o$ puede ampliarse como sigue:

Dada una multiplicidad M_1, hallar una superficie integral a la cual pertenezcan todos los elementos de la multiplicidad, es decir que contenga la curva y que admita en cada uno de sus puntos de ésta considerados como pertenecientes a la superficie integral, un plano tangente que se confunda con los asociados correspondientes de la multiplicidad dada.

15. E s t u d i o d e l p r o b l e m a d e C A U C H Y p a r a l a e c u a c i ó n d e M O N G E .

Si nos damos la multiplicidad M_1 definida por

(62)

$$x = f_1(\lambda) \qquad y = f_2(\lambda) \qquad z = f_3(\lambda) \tag{62} \quad (C)$$

$$p = g_1(\lambda) \qquad q = g_2(\lambda) \tag{63} \quad (T)$$

una superficie

$$z = F(x,y) \tag{64} \quad (S)$$

será una integral de la ecuación (1) si se tiene idénticamente

$$f_3 = F(f_1, f_2) \tag{65}$$

para cualquier λ que sirve para definir la curva (C) de (62) y además

$$p(x,y) = p(f_1,f_2) = g_1(\lambda) \tag{66}$$

$$q(x,y) = q(f_1,f_2) = g_2(\lambda) \tag{67}$$

Por otra parte, siendo r, s, t, las derivadas segundas de (S) de (64) se tiene

$$dp = r\,dx + s\,dy \tag{68}$$

$$dq = s\,dx + t\,dy \tag{69}$$

y en particular para los elementos de la multiplicidad (C,T) se tendrá

$$dp(\lambda) = r\,dx(\lambda) + s\,dy(\lambda) \tag{70}$$

$$dq(\lambda) = s\,dx(\lambda) + t\,dy(\lambda) \tag{71}$$

que con la ecuación (1) dará un sistema de tres ecuaciones de las cuales se deducirán r, s, t, de la (S) en función de λ, para un

punto

punto de la (C).

16. Discusión del sistema (1, 68, 69).

Siendo de primer grado en r, s, t, se tendrán varios casos previstos por el teorema de ROUCHÉ.

En general, pasará una superficie integral de la ecuación (1) por una faja de elementos de contacto de primer orden, siempre que

$$\Delta = \begin{vmatrix} R & S & T \\ dx & dy & 0 \\ 0 & dx & dy \end{vmatrix} \neq 0 \tag{72}$$

o tambien que

$$R\,dy^2 + T\,dx^2 - S\,dx\,dy \neq 0 \tag{73}$$

Si se tiene $\Delta = 0$, no siéndolo los numeradores Δ_r, Δ_s, Δ_t que resuelven el sistema (1,68,69), el problema de CAUCHY no admite una solución holomorfa, y

si es $\Delta = 0$ y lo mismo $\Delta_r = 0$, $\Delta_s = 0$, $\Delta_t = 0$ el sistema es indeterminado, y hay una infinidad de sistemas de soluciones para r, s, t, para cada punto de la (C) de (64).

Las multiplicidades que satisfacen a tales condiciones se llaman <u>multiplicidades características de primer orden</u> de la ecuación (1).

17. D e t e r m i n a c i ó n d e l a s c a r a c t e r í s t i c a s d e l a e c u a c i ó n (1). -

De lo que precede, para obtener las ecuaciones diferenciales de las características, será menester que se tenga simultáneamente

$$(74) \qquad \Delta = \begin{vmatrix} R & S & T \\ dx & dy & 0 \\ 0 & dx & dy \end{vmatrix} = 0 \qquad \Delta_r = \begin{vmatrix} -V & S & T \\ dp & dy & 0 \\ dq & dx & dy \end{vmatrix} = 0$$

$$(75) \qquad \Delta_s = \begin{vmatrix} R & -V & T \\ dx & dp & 0 \\ 0 & dq & dy \end{vmatrix} = 0 \qquad \Delta_t = \begin{vmatrix} R & S & -V \\ dx & dy & dp \\ 0 & dx & dq \end{vmatrix} = 0$$

en las cuales se ha puesto

$$(76) \qquad V = -Pp - Qq + U,$$

y que son equivalentes a

$$(77) \qquad R\,dy^2 - S\,dy\,dx + T\,dx^2 = 0$$

$$(78) \qquad V\,dy^2 + S\,dp\,dy + T\,dq\,dy - T\,dx\,dp = 0$$

$$(79) \qquad R\,dp\,dy + T\,dx\,dq + V\,dx\,dy = 0$$

$$(80) \qquad V\,dx^2 + R\,dp\,dx + S\,dq\,dx - R\,dq\,dy = 0$$

y que se reducen solamente a dos distintos como se puede verificar por ejemplo, multiplicando la (78) por dx y la (79) por

$-\,dy$

— dy, sumando luego los resultados y dividiendo el nuevo resultado por dp.

Las ecuaciones de las características se obtendrán pues, combinando dos de las ecuaciones (77 - 80) convenientemente. Habrá que distinguir varios casos:

a) $R \neq 0$ y $T \neq 0$. Las características son dadas por los sistemas

$$(81)\quad \begin{cases} dy = \lambda_1 dx & R\,dp + R\lambda_2 dq + V\,dx = 0 \\ & dz - p\,dx - q\,dy = 0 \end{cases}$$

$$(82)\quad \begin{cases} dy = \lambda_2 dx & R\,dp + R\lambda_1 dq + V\,dx = 0 \\ & dz - p\,dx - q\,dy = 0 \end{cases}$$

b) $R = 0$ y $T \neq 0$ o $R \neq 0$ y $T = 0$. Lo que se dirá de la primera hipótesis es aplicable con ligeras modificaciones a la segunda.

La ecuación (77) se reduce a

$$(83)\qquad - S\,dy\,dx + T\,dx^2 = 0$$

$$\therefore \qquad dx = 0 \qquad\qquad - S\,dy + T\,dx = 0$$

La primera de estas ecuaciones combinada con la (78) da las ecuaciones

$$(84)\quad \begin{cases} dx = 0 & T\,dq + S\,dp + V\,dy = 0 \\ & dz - p\,dx - q\,dy = 0 \end{cases}$$

para un

para un sistema de características, y la segunda

$$(85)\quad \begin{cases} -S\,dy + T\,dx = 0 \qquad T\,dq + V\,dy = 0 \\ dz - p\,dx - q\,dy = 0 \end{cases}$$

c) $R = 0$ y $T = 0$ se tiene sencillamente

$$(86)\quad \begin{cases} dx = 0 \qquad V\,dy + S\,dp = 0 \\ dz - p\,dx - q\,dy = 0 \end{cases}$$

$$(87)\quad \begin{cases} dy = 0 \qquad V\,dx + S\,dq = 0 \\ dz - p\,dx - q\,dy = 0 \end{cases}$$

La naturaleza de las características depende de la ecuación auxiliar

$$(88)\qquad R\lambda^2 - S\lambda + T = 0$$

18. **La relación entre las caracte- rísticas de primer orden y las solu- ciones de la ecuación RSTV = 0.**

Supongamos que

$$(89)\qquad z = F(x,y)$$

sea una superficie integral de la ecuación (1) . Sustituyendo z, p, q, r, s, t, por sus expresiones deducidas de (89) en las ecuaciones (81) de las características de un sistema se encontrará

$$(90)\quad dy = \lambda_1 dx \qquad R(r\,dx + s\,dy) + R\lambda_2(s\,dx + t\,dy) + V dx = 0$$

(que son

(que son dos ecuaciones diferenciales de primer orden). Estas ecuaciones son idénticas, pues de las mismas se deduce

$$(91)\qquad \frac{dy}{dx} = \lambda_1 = -\frac{Rr + Rs\lambda_2 + V}{Rs + R\lambda_2}.$$

$$Rs\,\lambda_1 + R\lambda_1\lambda_2 + Rr + Rs\lambda_1 + V = 0$$

y como

$$\lambda_1\lambda_2 = \frac{T}{R} \qquad \lambda_1 + \lambda_1 = \frac{S}{R}$$

por la ecuación (88), se obtiene

$$(92)\qquad Rr + Ss + Tt + V = 0$$

que es una identidad si se tiene presente que $z = f(x,y)$ es una solución de esta ecuación.

Análogamente se demostrará que satisface a las ecuaciones del otro sistema de características.

De lo que precede resulta que una solución de la ecuación (1) satisface las ecuaciones de las características, y que sobre la superficie integral, hay dos familias de curvas, cada una dependiente de un parámetro, y que los elementos de primer orden de sus puntos forman una multiplicidad característica.

Por cada punto de una superficie integral pasan dos <u>curvas</u> (de las diferentes familias) que se llaman <u>curvas características</u>.

La recíproca también es cierta, es decir, si una superficie y los planos tangentes en cada uno de sus puntos se obtiene median-

te una familia

te una familia de multiplicidades características, que dependen de una constante arbitraria, la superficie es una superficie integral.

En efecto, como por cada punto de la superficie pasa una curva tal que la multiplicidad de los elementos correspondientes de la superficie, es una multiplicidad característica, resultará que los valores de x, y, z, p, q, a lo largo de la curva característica deberán satisfacer uno de los sistemas (81 o 82), (84 o 85), (86 o 87), lo cual sucederá tan solo si los valores de r, s, t, correspondientes satisfacen la ecuación (92).

19. O b s e r v a c i ó n . - Las características de cada sistema dependen de una función arbitraria, porque se tienen tres relaciones entre las 5 funciones de una sola variable, y eligiendo una de ellas como variable independiente, quedarán todavía cuatro dependientes a determin r de solotres ecuaciones, así que podrá tomarse por cualquiera de las restantes una función arbitraria de la variable independiente elegida.

E S T U D I O   D E   L A S   E C U A C I O N E S   D E L   T I P O   H I P E R B O L I C O   C O N   U N   S O L O   T E R M I N O   D E   S E G U N D O   O R D E N .

20. En el párrafo 9, se indican las varias ecuaciones que deben considerarse en particular de las cuales se eliminarán las que se indican en (49) pág. 13. Se tiene:

(93) S SP SZ SU SPQ SPZ SPU SZU SPQZ SPQU SPZU SPQZU.

21. Estudiar la integral de la ecuación $s = 0$. Se integra con respecto a x o a y primeramente: por ej. con respecto a y:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f(x) \tag{94}$$

y luego con respecto a la otra variable independiente, y se tiene

$$z = \int f(x)\, dx + g(y) = f_1(x) + g(y) \tag{95}$$

f, f_1, g son funciones arbitrarias.

22. O b s e r v a c i ó n . Nótese que en la solución obtenida, figura una de las funciones arbitrarias bajo el signo integral. En cuanto a la determinación de las funciones mismas, se pueden presentar toda clase de problemas.

23. P r o b l e m a . Determínese las superficies que satisfacen a la ecuación $s = 0$ y que pasan por la cúbica:

(96)

(96) $x = At \qquad y = Bt^2 \qquad z = Ct^3$

S o l u c i ó n . Para que la superficie integral contenga la curva dada, deberá subsistir para cualquier valor de t la igualdad

(97) $$Ct^3 = f(At) + g(Bt^2)$$

de donde resulta, si ponemos

(98) $$f(x) = f_0 + f_1 x + f_2 x^2 + \quad \ldots.$$

(99) $$g(y) = g_0 + g_1 y + g_2 y^2 + \quad \ldots.$$

y si identificamos los coeficientes, el sistema:

(100) $$f_0 + g_0 = 0 \qquad A f_1 = 0$$
$$A^2 f_2 + B g_1 = 0 \qquad A^3 f_3 = 0$$
$$A^4 f_4 + B^2 g_2 = 0 \qquad A^5 f_5 = 0$$

y por consiguiente la solución

(101) $$z = \frac{C}{A^3} x^3 + f_2\left(x^2 - \frac{A^2}{B} y\right) + f_4\left(x^4 - \frac{A^4}{B^2} y^2\right) + \cdots$$

24. La solución anterior depende de una infinidad de constantes arbitrarias, que pueden dar lugar a otros tantos problemas. Por ejemplo,

P r o b l e m a . Determinar la superficie que pasa por las curvas

(102)

(102) $x = At \qquad y = Bt^2 \qquad z = Ct^3$

$x = at \qquad y = bt \qquad z = ct$

y que satisface la ecuación $s = 0$.

S o l u c i ó n . La fórmula (101) debe dar

(103) $$ct = \frac{c}{A^3}a^3t^3 + f_2(a^2t^2 - bkt) + f_4(a^4t^4 - b^2k^2t^2) + \dots$$

en la cual se ha puesto para la brevedad $k = A^2:B$; lo que secumplirá si

$$c = -bkf_2 \qquad 0 = a^2f_2 - b^2k^2f_4$$
$$0 = \frac{c}{A^3}a^3 - b^3k^3f_6 \qquad 0 = a^4f_4 - b^4k^4f_8$$
$$0 = \quad - b^5k^5f_{10} \qquad 0 = a^6f_6 - b^6k^6f_{12}$$

Se obtiene

(104) $$z = \frac{c}{A^3}x^3 - \frac{c}{bk}(x^2 - ky) - \frac{a^2c}{b^3k^3}(x^4 - k^2y^2) + \frac{c}{A^3}\frac{a^3}{b^3k^3}(x^6 - k^3y^3) - \frac{a^6c}{b^7k^7}(x^8 - k^4y^4) + \frac{c}{A^3}\frac{a^9}{b^9k^9}(x^{12} - k^6y^6) \dots$$

De este sencillo problema se ve cuan largos son los cálculos a los cuales conducen los problemas relacionados con las ecuaciones de II orden.

26. H a l l a r l a i n t e g r a l d e l a e c u a - c i ó n $Ss + Pp = 0$.

Se observará que

(105)

(105) $$S s + P p = S \frac{\partial p}{\partial y} + P p = 0$$

(106) $$\frac{\partial p}{p} + \frac{P}{S} dy = 0 \qquad \left(Lg\, p + \int \frac{P}{S} dy = Lg\, f(x) \right)$$

(107) $$p = e^{-\int \frac{P}{S} dy} f(x)$$

(108) $$z = \int e^{-\int \frac{P}{S} dy} f(x)\, dx + g(y)$$

Nótese que en la solución obtenida, una de las funciones arbitrarias aparece bajo el signo de integración.

27. C o r o l a r i o s. I. Si es $P = 0$ se obtiene la solución (95).

II. Si es $P = \frac{\partial S}{\partial y}$ se obtiene

(109) $$z = \int \frac{f(x)}{S} dx + g(y)$$

III. Si es $P = A S$ (A una constante) se tiene la ecuación con coeficientes constantes

(110) $$s + Ap = 0$$

(111) $$z = e^{-Ay} \int f(x)\, dx + g(y)$$

IV. La ecuación de forma

(112) $$Ss + (P + Sq)\, p = 0$$

mediante el cambio de la variable independiente

(113) $$z = Lg\, z'$$

se reduce a una ecuación del tipo tratado en el párrafo 26.

26. La ecuación $Ss + Qq = 0$ tiene como solución

(114)

(114) $$z = \int e^{-\int \frac{a}{s} dx} f(y)\, dy + g(x)$$

29. O b s e r v a c i ó n . Las ecuaciones estudiadas son contenidas todas en el único tipo $s + Pp = 0$, en la cual P es una función racional de x, y: son integrables por el método de LAPLACE, pues tienen un invariante de EULER nulo, el correspondiente a la derivada parcial que falta.

30. L a e c u a c i ó n $Ss + Zz = 0$. Esta ecuación en su generalidad ofrece los carácteres de una ecuación integral y simbolicamente admite como solución a

(115) $$z = -\int \partial x \int \frac{Z}{S} z\, \partial y + \int f(x)\, \partial x + g(y)$$

Nos proponemos en los párrafos siguientes resolver este problema para algunos casos especiales.

31. E n c o n t r a r l a i n t e g r a l c o m p l e t a d e l l a e c u a c i ó n

(116) $$s = Az$$

(En lo sucesivo emplearemos la notación

(117) $$\overline{m,n} = \overline{mn} = \frac{\partial^{m+n} z}{\partial x^m \partial y^n}$$

para designar las derivadas parciales sucesivas, que intervienen en el desarrollo

(118) $$z = z_0 + \frac{1}{1!}\left(\frac{\partial z}{\partial x}x + \frac{\partial z}{\partial y}y\right) + \frac{1}{2!}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}x^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}xy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}y^2\right) + \cdots$$

en el cual se ha puesto x, y para $(x - x^o)$ e $(y - y^o)$ respectivamente.

Calculemos

Calculemos las diferentes derivadas parciales de la función a determinar z .

Para las derivadas sucesivas de z con respecto a x se tiene

(119) $\overline{00}\ \overline{10}\ \overline{20}\ \overline{30}\ \overline{40}\ \ldots\ldots\ \overline{m0}$

las derivadas de éstas con respecto a y son, si se tiene en cuenta a (116)

(120) $\overline{01}\quad \overline{11} = A\overline{00}\quad \overline{21} = A\overline{10}\quad \overline{31} = A\overline{20}\ \ldots\ \overline{m1} = A\overline{m-1,0}$

las derivadas de éstas con respecto a y

(121) $\overline{02}\quad \overline{12} = A\overline{01}\quad \overline{22} = A\overline{11} = A^2\overline{10}\ \ldots\ \overline{m2} = A^2\overline{m-2,0}$

y en general

(122) $\overline{0n}\quad \overline{1n} = A\overline{0,n-1}\quad \overline{2n} = A^2\overline{0,n-2}\quad \overline{3,n} = A^3\overline{0,n-3}\ \ldots\ \overline{nm} = A^n\overline{m-n,0}$

lo cual nos permite ahora escribir la solución

(123) $$z = \overline{00} + \frac{1}{1!}(\overline{10}x + \overline{01}y) + \frac{1}{2!}(\overline{20}x^2 + 2A\overline{00}xy + \overline{02}y^2) +$$
$$+ \frac{1}{3!}(\overline{30}x^3 + 3A\overline{10}x^2y + 3A\overline{01}xy^2 + \overline{03}y^3) +$$
$$+ \frac{1}{4!}(\overline{40}x^4 + 4A\overline{20}x^3y + 6A^2\overline{00}x^2y^2 + 4A\overline{02}xy^3 + \overline{04}y^4) +$$

....

$$+ \frac{1}{n!}(\overline{n0}x^n + C_n^1 A\overline{n-2,0}x^{n-1}y + C_n^2 A^2\overline{n-4,0}\,x^{n-2}y^2 + \ldots)$$

y si agrupamos los términos que tienen a $(\overline{n0}x^n + \overline{0n}y^n)$ en factor

(124) $$z = \overline{00}(1 + \frac{1}{2!}C_2^1 Axy + \frac{1}{4!}C_4^2 A^2x^2y^2 + \ldots) +$$
$$+ (\overline{10}x + \overline{01}y)(\frac{1}{1!} + \frac{1}{3!}C_3^1 Axy + \frac{1}{5!}C_5^2 A^2x^2y^2 + \ldots) +$$
$$+ (\overline{20}x^2 + \overline{02}y^2)(\frac{1}{2!} + \frac{1}{4!}C_4^1 Axy + \frac{1}{6!}C_6^2 A^2x^2y^2 + \ldots) +$$
$$- (\overline{30}x^3 + \overline{03}y^3)$$

$$+(\overline{30}x^3+\overline{03}y^3)\left(\frac{1}{3!}+\frac{1}{5!}C_5^1Axy+\frac{1}{7!}C_7^2A^2x^2y^2+\cdots\right)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

o tambien si ponemos

(125) $$u = A\,xy$$

(126) $$\begin{aligned} z = {} & \overline{00}\left(1+\frac{1}{1!}\frac{1}{1!}u+\frac{1}{2!}\frac{1}{2!}u^2+\cdots\right)+ \\ & +(\overline{10}x+\overline{01}y)\left(\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}\frac{1}{1!}u+\frac{1}{3!}\frac{1}{2!}u^2+\cdots\right)+ \\ & +(\overline{20}x^2+\overline{02}y^2)\left(\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}\frac{1}{1!}u+\frac{1}{4!}\frac{1}{2!}u^2+\cdots\right)+ \\ & +(\overline{30}x^3+\overline{03}y^3)\left(\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}\frac{1}{1!}u+\frac{1}{5!}\frac{1}{2!}u^2+\cdots\right)+ \end{aligned}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

es decir lo mismo como

(127) $$\begin{aligned} z = {} & \overline{00}\,J(1,u)+(\overline{10}x+\overline{01}y)J(2,u)+ \\ & +(\overline{20}x^2+\overline{02}y^2)J(3,u)+\cdots \end{aligned}$$

siendo las $J(\gamma, u)$ dadas por la relación

(128) $$J(\gamma,u)=\frac{1}{1!}+\frac{1}{1!}\frac{1}{\gamma}u+\frac{1}{2!}\frac{1}{\gamma(\gamma+1)}u^2+\cdots$$

Si en el desarrollo (126) se suman los términos que tienen como factor una potencia de la u y se observa que $\overline{00}$ se puede repartir entre las dos funciones arbitrarias f(x) y g(y) cuyos coeficientes en el desarrollo en el punto x°, y° son las $\overline{m0}$ respectivamente $\overline{0n}$ se obtiene la fórmula

(129)

(139) $$z = f(x) + g(y) + \frac{1}{1!}\left[\frac{1}{x}\int f(x)dx + \frac{1}{y}\int g(y)dy\right]u + \frac{1}{2!}\left[\frac{1}{x^2}\iint f(x)dx^2 + \frac{1}{y^2}\iint g(y)dy^2\right]u^2 + \cdots$$ no serie

en la cual se pone en evidencia la intervención de las funciones arbitrarias en la integral completa.

Esta fórmula se reduce para $x - x^{\circ} = 0$, $y - y^{\circ} = 0$ a $f(0) + g(0)$ que se ha elegido en forma que den $\overline{00}$. En su aplicación ofrece las dificultades de la determinación de las funciones arbitrarias.

33. D o s f ó r m u l a s . Al tratar de efectuar la integración de la ecuación

(130) $$s = (Ax + By + C)z$$

encontré la siguiente relación que se demuestra inmediatamente:

(131) $$\overline{m,n} = \frac{1}{2^n}\left(\frac{\partial^n \overline{m-n,n}}{\partial x^n} + C_n^1 \frac{\partial^n \overline{m-n+1,n-1}}{\partial x^{n-1}\partial y} + \cdots\right)$$

para $n < M$, y tambien la siguiente que da la derivada de orden m,n, del producto de dos funciones de dos variables independientes:

(132) $$\begin{aligned}(uv)_{mn} &= u_{00}v_{mn} + u_{mn}v_{00} \\ &+ C_m^1 u_{10} v_{m-1,n} + C_n^1 u_{01} v_{m,n-1} \\ &+ C_m^2 u_{20} v_{m-2,n} + C_m^1 C_n^1 u_{11} v_{m-1,n-1} + C_n^2 u_{02} v_{m,n-2} \\ &+ C_m^3 u_{30} v_{m-3,n} + C_m^2 C_n^1 u_{21} v_{m-2,n-1} + C_m^1 C_n^2 u_{12} v_{m-1,n-2} + C_n^3 u_{03} v_{m,n-3}\end{aligned}$$

. . . .

33.

33. Estudio de la ecuación (130). Esta ecuación mediante el cambio de variables $x = x' - C/A$ se reduce a

$$(133) \qquad s = (Ax + By)z$$

que había estudiado primeramente con respecto a ambas variables independientes y por las dificultades que ofreció la reducí al caso particular

$$(134) \qquad s = Ax\,z.$$

Para hallar los coeficientes del desarrollo indicado en la fórmula (118), apliqué la fórmula (132) sobre la ecuación que precede. Se obtiene la relación de recurrencia

$$(135) \qquad \frac{\partial^{m+n} s}{\partial x^m \partial y^n} = Ax\frac{\partial^{m+n} z}{\partial x^m \partial y^n} + mA\frac{\partial^{m+n-1} z}{\partial x^{m-1}\partial y^n}$$

$$(136) \qquad \overline{m+1,\, n+1} = Ax\,\overline{m,\, n} + mA\,\overline{m-1,\, n}$$

Aplicando esta fórmula repetidamente sobre ella misma, se llega expresar la derivada de orden m,n en función de las derivadas sucesivas de <u>z</u> con respecto de la <u>x</u> y de la <u>y</u> solamente.

$$(137) \qquad \overline{11} = Ax\,\overline{00}$$

$$(138) \qquad \overline{21} = Ax\,\overline{10} + A\,\overline{00}$$

$$(139) \qquad \overline{31} = Ax\,\overline{20} + 2A\,\overline{10}$$

$$(140) \qquad \overline{41} = Ax\,\overline{30} + 3A\,\overline{20}$$

....

(141)

(141) $\overline{12} = Ax\,\overline{01}$

(142) $\overline{22} = Ax\,\overline{11} + A\,\overline{01} = A^2x^2\,\overline{00} + A\,\overline{01}$

(143) $\overline{32} = Ax\,\overline{21} + 2A\,\overline{11} = A^2x^2\,\overline{10} + 3A^2x\,\overline{00}$

(144) $\overline{42} = Ax\,\overline{31} + 3A\,\overline{21} = A^3x^3\,\overline{20} + 5A^2x\,\overline{10} + 3A^2\,\overline{00}$

....

(145) $\overline{13} = Ax\,\overline{02}$

(146) $\overline{23} = Ax\,\overline{12} + A\,\overline{02} = A^2x^2\,\overline{01} + A\,\overline{02}$

(147) $\overline{33} = Ax\,\overline{22} + 2A\,\overline{12} = A^3x^3\,\overline{00} + 3A^2x\,\overline{01}$

(148) $\overline{43} = Ax\,\overline{32} + 3A\,\overline{22} = A^3x^3\,\overline{10} + 6A^3x^2\,\overline{00} + 3A^2\,\overline{01}$

....

(149) $\overline{14} = Ax\,\overline{03}$

(150) $\overline{24} = Ax\,\overline{13} + A\,\overline{03} = A^2x^2\,\overline{02} + A\,\overline{03}$

(151) $\overline{34} = Ax\,\overline{23} + 2A\,\overline{13} = A^3x^2\,\overline{01} + 3A^2x\,\overline{02}$

(152) $\overline{44} = Ax\,\overline{33} + 3A\,\overline{23} = A^4x^4\,\overline{00} + 6A^3x^2\,\overline{01} + 3A^2\,\overline{02}$

Por la exposición de estos primeros 16 coeficientes se ve que los desarrollos son desgraciadamente muy penceos y la convergencia de los mismos tampoco sencilla a estableder.

34. U n a s o l u c i ó n p a r t i c u l a r d e l a (134) y más generalmente de la ecuación

(153)

(153) $$s = F(x)\ G(y)\ z$$

Supongamos que z sea el producto de dos factores cada uno función de una sola variable, es decir

(154) $$z = M(x)\ N(y)$$

(155) $$s = M'(x)\ N'(y)$$

luego sustituyendo estos valores en la (153) y escribiendo la identidad de las funciones en x e y se tendrá

(156) $M' = k\,FM$ (157) $N' = \frac{1}{k}\,GN$

siendo <u>k</u> un número cualquiera independiente de x e y.

Integrando estas ecuaciones se encuentra la solución

(157) $$z = Ce^{k\int F(x)dx + \frac{1}{k}\int G(y)dy}$$

35. C o r o l a r i o s. I. Si $F(x) = Cte.$ y $G(y) = Cte$ se encuentra la solución particular

(158) $$z = Ce^{kAx + \frac{1}{k}y}$$

de la ecuación (116).

II. La solución (158) contiene tambien a la solución evidente $z = 0$ de la ecuación (116) para $C=0$.

36. S o l u c i ó n d e l a e c u a c i ó n (130) p o r e l m é t o d o d e P I C A R D . Hagamos primeramente el

cambio

cambio de variables

(159) $\qquad A\,x + C = \xi \qquad\qquad B\,y = \eta$

Aplicando las fórmulas de transformación (12) se encuentra

(160) $\qquad s'BA + (\xi + \eta)\, z' = 0$

que escribiremos, suprimiendo ápices y poniendo $AB = -1/D$

(161) $\qquad s :: D(\xi + \eta)\, z$

El método que se emplea consiste en determinar las funciones

z_n del desarrollo

(162) $\qquad z = z_0(x,y) + \lambda z_1(x,y) + \;\ldots\ldots\; + \lambda^n z_n(x,y) + \ldots$

que ha de satisfacer formalmente a la ecuación gen~~eral~~

(163) $\qquad z = \lambda D\,(\xi + \eta)\; z$ $\quad$ ojo

en el cual luego se pondrá $\lambda = 1$.

Si nos damos como condiciones iniciales las del teorema de

existencia de GOURSAT , es decir que se tenga

(164) $\qquad z = f\,(x) \qquad$ para $\quad y = y^\circ = 0$

$\qquad\qquad\quad z = g\,(y) \qquad$ " $\quad x = x^\circ = 0$

siendo f y g funciones determinadas respectivamente en los intervalos $(0,\alpha)$, $(0,\beta)$, se tendrá para $\lambda = 0$

(165) $\qquad z_0(x,y) = f(x) + g(y) - f(0)$

La función

La función z_1 es dada por

(166) $$z_1(x,y) = \int_0^x d\xi \int_0^y D(\xi+\eta)\left[f(\xi)+g(\eta)-f(0)\right] d\eta$$

y las siguientes mediante la fórmula de recurrencia

(167) $$z_n(x,y) = \int_0^x d\xi \int_0^y D(\xi+\eta) z_{n-1}(\xi,\eta) d\eta$$

lo que suministra una cómoda solución.

Esta integral es la única que satisface a las condiciones iniciales y es regular en el recinto definido.

37. U n e j e m p l o . Si nos proponemos hallar la integral z que satisface a la ecuación (130) y que se reduzca a $z = 1$ tanto para $x=0$ como para $y = 0$, se encuentra

(168) $$z_0 = 1$$

(169) $$z_1 = \int_0^x d\xi \int_0^y D(\xi+\eta) d\eta = D\,\frac{\xi^2\eta + \xi\eta^2}{2}$$

(170) $$z_2 = \int_0^x d\xi \int_0^y D^2 \frac{\xi^2\eta+\xi\eta^2}{2}(\xi+\eta) d\eta = D^2\,\frac{9\xi^4\eta^2 + 32\xi^3\eta^3 + 9\xi^2\eta^4}{144}$$

. . . .

(171) $$z_n = D^n \underbrace{\int_0^x\int_0^y (x+y)\,dx\,dy \int_0^x\int_0^y (x+y)\,dx\,dy \cdots \int_0^x\int_0^y (x+y)\,dx\,dy}_{n}$$

38. S o l u c i ó n c o m p l e t a d e l a e c u a - c i ó n

(172) $$Se + Ez = 0$$

Los resultados obtenidos anteriormente nos demuestra la gran diferencia de los dos métodos y la ventaja del último, que permite

obtener

obtener en iguales condiciones iniciales que antes, la solución buscada, siguiendo los mismos desarrollos dados anteriormente. Se encuentra

$$(173)\qquad z = f(x) + g(y) - f(0)$$

$$-\int_0^x\int_0^y \frac{Z(\xi,\eta)}{S(\xi,\eta)}\left[f(\xi)+g(\eta)-f(0)\right]d\xi\, d\eta$$

$$+\int_0^x\int_0^y \frac{Z(\xi,\eta)}{S(\xi,\eta)}\,d\xi\, d\eta\int_0^x\int_0^y \frac{Z(\xi,\eta)}{S(\xi,\eta)}\left[f(\xi)+g(\eta)-f(0)\right]d\xi\, d\eta$$

. . . .

39. Antes de pasar al estudio de otras ecuaciones dejemos señalado un último caso particular interesante, el de la ecuación

$$(174)\qquad Ss = S''_{xy}\, z$$

que admite como solución particular a $z = S$; así por ejemplo

$$(Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F)s = 2Bz$$

admite como integral particular el primer factor del primer miembro,

40. Estudio de la ecuación $Ss - U = 0$.

De la misma se puede despejar la derivada de segundo orden, y considerando la x como un parámetro se efectuará la integración con respecto a la variable independiente y . Esto nos introducirá una primera función arbitraria f(x) y luego integrando con respecto a la variable x se obtendrá como resultado general:

(175)

(175) $\quad z = \int dx \int \frac{U}{S} dy + \int f(x) dx + g(y)$

41. A p l i c a c i ó n . Determínese la superficie integral que satisface a la ecuación $Ss - U = 0$, que pasa por un punto x^o, y^o, z^o y que contiene las curvas

(176) $\quad z = f^o(x) \qquad y = y^o$

(177) $\quad z = g^o(y) \qquad x = x^o$

definidas en los intervalos

(178) $\quad x^o \leq x \leq a \qquad y^o \leq y \leq b$

Considerando la integral doble que figura en el segundo miembro de la (175), ella es una solución particular de la ecuación con derivadas parciales $Ss - U = 0$ y si tomamos como límites de integración $\underline{x^o}$, $\underline{x}$ e $\underline{y^o}$, $\underline{y}$ menores respectivamente que $\underline{a}$ y $\underline{b}$ esa integral se anula para $x = x^o$ e $y = y^o$ y para que la función $\underline{z}$ definida por (175) se reduzca a $g^o(y)$ para $x = x^o$ deberá ser

(179) $\quad g(y) = g^o(y).$

En cuanto a la determinación de $f(x)$, haciendo $y = y^o$ la intégral doble se anula y se deberá tener

(180) $\quad z = f^o(x) = \int_{x^o}^{x} f(x) dx + g^o(y)$

(181) $\quad f(x) = f'^o(x)$

y por consiguiente la integral buscada será

(182)

(183) $$z = \int_{x_0}^{x} dx \int_{y_0}^{y} \frac{U}{S}\, dy + f(x) + g(y) - f(x_0)$$

42. R e s o l u c i ó n d e l a e c u a c i ó n c o m - p l e t a

(183) $$Ss + Pp + Qq + Zz - U = 0$$

por e l m é t o d o d e P I C A R D .

La ecuación dada se puede poner tambien bajo la forma

(184) $$s = -\frac{P}{S}p - \frac{Q}{S}q - \frac{Z}{S}z + \frac{U}{S}$$

que escribiremos para abreviar

(184') $$s = ap + bq + cz + h$$

siendo a, b, c, h funciones de x, y.

Para hallar la función z(x,y) que satisface a la ecuación (184') y que se reduce a f(x) para $y = y^o = 0$ y a g(y) para $x = x^o = 0$, se observará que la solución ha de ser un caso particular de la ecuación más general

(185) $$s = \lambda\,(ap + bq + cz) + h$$

en la cual λ figurará como parámetro. -

El artificio del método consiste en admitir que esa solución es desarrollable en una serie de potencias enteras de λ, cuyos coeficientes son funciones de las dos variables independientes x e y, que satisfacen ciertas condiciones; es decir admitir

que

que existe una función z, definida por una relación de la forma

(186) $z(x,y) = z_0(x,y) + \lambda z_1(x,y) + \lambda^2 z_2(x,y) + \cdots$

que satisface a la ecuación (185), que se reduzca a f(x) para $y = 0$ y a g(y) para $x = 0$.

La cuestión así presentada queda reducida a la determinación de las varias funciones parciales: se impondrá que para $\lambda = 0$ la función z se reduzca a la $z_0(x,y)$ que satisface las condiciones iniciales, función que es dada por la fórmula (175). En cuanto a las demás funciones, bastará imponerles la condición de que sean nulas para $x = 0$ cualquiera que fuese y, y para $y = 0$ cualquiera que fuere x.

Sustituyendo la función z(x,y) en la (185), se tiene

(187) $s = \sum_0^\infty \lambda^i s_i = \lambda\left[a\sum_0^\infty \lambda^i p_i + b\sum_0^\infty \lambda^i q_i + c\sum_0^\infty \lambda^i z_i\right] + h(x,y)$

De ésta ecuación, y en la hipótesis expresada por

(188) $z_0(x,y) = f(x) + g(y) - f(c) + \int_c^x \int_c^y h(\xi,\eta)\, d\xi\, d\eta$

resulta

(189) $\sum_1^\infty \lambda^i s_i = \lambda\left[a\sum_0^\infty \lambda^i p_i + b\sum_0^\infty \lambda^i q_i + c\sum_0^\infty \lambda^i z_i\right]$

de donde identificando los coeficientes de las mismas potencias de λ, se obtiene la cadena de ecuaciones

$s_1 =$

(190) $s_1 = ap_0 + bq_0 + cz_0$

(191) $s_2 = ap_1 + bq_1 + cz_1$

(192) $s_3 = ap_2 + bq_2 + cz_2$

de las cuales se obtendrá precisamente las funciones

(193) $z_1 = \int_0^x \int_0^y \left| a(\xi,\eta) \frac{\partial z_0}{\partial \xi} + b(\xi,\eta) \frac{\partial z_0}{\partial \eta} + c(\xi,\eta) z_0(\xi,\eta) \right| d\xi\, d\eta$

(194) $z_2 = \int_0^x \int_0^y \left| a(\xi,\eta) \frac{\partial z_1}{\partial \xi} + b(\xi,\eta) \frac{\partial z_1}{\partial \eta} + c(\xi,\eta) z_1(\xi,\eta) \right| d\xi\, d\eta$

....

(195) $z_n = \int_0^x \int_0^y \left| a(\xi,\eta) \frac{\partial z_{n-1}}{\partial \xi} + b(\xi,\eta) \frac{\partial z_{n-1}}{\partial \eta} + c(\xi,\eta) z_{n-1} \right| d\xi\, d\eta$

que se reducen a 0 para x=0 cualquiera que sea y y viceversa., quedando todavía para terminar la cuestión establecer la convergencia de la serie obtenida.

43. Para convencernos de la convergencia de la serie (186) de integrales dobles (193, 194, ... 195) se hará uso del lema:

Si en la integral doble

(196) $J = \int_0^x dx \int_0^y f(x,y)dy$

en la cual f(x,y) es una función regular en el recinto 0 - x, 0 -y se sustituye la función por otra o por una constante cuyo valor absoluto sea mayor que todos los valores absolutos de f(x,y) en el

mismo

mismo rectángulo, la nueva integral es mayor que la primera.

Con este lema y haciendo las hipótesis

(197) $\quad |a| < k \qquad |b| < k \qquad |c| < k$

(198) y $\quad |z_0| < \frac{l}{3} \qquad |p_0| < \frac{l}{3} \qquad |q_0| < \frac{l}{3}$

en el rectángulo $0 - \alpha$, $0 - \beta$ se obtiene

(199) $\quad z_1 = \int_0^x\int_0^y a p_0 + b q_0 + c z_0 < K \int_0^x\int_0^y p_0 + q_0 + z_0 < K l x y = l \zeta_0$

(200) $\quad p_1 = \int_0^y a p_0 + b q_0 + c z_0 < K \int_0^y p_0 + q_0 + z_0 < K l y = l \frac{\partial \zeta_0}{\partial x} = l \pi_0$

(201) $\quad q_1 = \int_0^x a p_0 + b q_0 + c z_0 < K \int_0^x p_0 + q_0 + z_0 < K l x = l \frac{\partial \zeta_0}{\partial y} = l \chi_0$

que permite escribir para z_2 y sus derivadas

(202) $\quad z_2 = \int_0^x\int_0^y a p_1 + b q_1 + c z_1 < K \int_0^x\int_0^y p_1 + q_1 + z_1 < K l \int_0^x\int_0^y \pi_0 + \chi_0 + \zeta_0 = K l \zeta_1$

(203) $\quad p_2 = \int_0^y a p_1 + b q_1 + c z_1 < K \int_0^y p_1 + q_1 + z_1 < K l \int_0^y \pi_0 + \chi_0 + \zeta_0 = K l \pi_1$

(204) $\quad q_2 = \int_0^x a p_1 + b q_1 + c z_1 < K \int_0^x p_1 + q_1 + z_1 < K l \int_0^x \pi_0 + \chi_0 + \zeta_0 = K l \chi_1$

y en general

(205) $\quad z_n < K^{n-1} l \zeta_{n-1} \qquad p_n < K^{n-1} l \pi_{n-1} \qquad q_n < K^{n-1} l \chi_{n-1}$

en que se ha puesto $\zeta_0 = Kxy$, y

(206) $\quad \zeta_n = \int_0^x\int_0^y \pi_{n-1} + \chi_{n-1} + \zeta_{n-1} \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$

(207) $\quad \pi_n = \frac{\partial \zeta_n}{\partial x} \qquad \chi_n = \frac{\partial \zeta_n}{\partial y}$

Con estas notaciones, la serie z(x,y) es menor en todo el rectángulo $0 - \alpha$, $0 - \beta$ que la nueva serie

$\frac{1}{3}$

(208) $$\frac{\zeta}{3}+\lambda\,l\zeta_0+\lambda^2 k l\zeta_1+\lambda^3 k^2 l\zeta_2+\cdots$$

que será convergente al mismo tiempo con la serie.

(209) $$\zeta_1+k\lambda\zeta_2+k^2\lambda^2\zeta_3+\ \ldots$$

Pero ésta si converge, será la integral de la ecuación

(210) $$\frac{\partial^2\zeta}{\partial x\partial y}=k\lambda\left(\frac{\partial\zeta}{\partial x}+\frac{\partial\zeta}{\partial y}+\zeta\right)+k$$

que se anula para $x=x_0=0$ cualquiera que sea y y para $y=y_0=0$ cualquiera que sea x, porque se ha puesto $\zeta_0=$ k xy.

La cuestion se resuelve ahora facilmente si se hace el cambio de la variable dependiente dado por

(211) $$\zeta=e^{k\lambda(x+y)}V$$

(212) $$P=k\lambda e^{k\lambda(x+y)}V+e^{k\lambda(x+y)}\frac{\partial V}{\partial x}$$

(213) $$Q=k\lambda e^{k\lambda(x+y)}V+e^{k\lambda(x+y)}\frac{\partial V}{\partial y}$$

(214) $$\frac{\partial^2\zeta}{\partial x\partial y}=\left(k^2\lambda^2V+k\lambda\frac{\partial V}{\partial x}+k\lambda\frac{\partial V}{\partial y}+\frac{\partial^2 V}{\partial x\partial y}\right)e^{k\lambda(x+y)}$$

(215) $\therefore$ $$\frac{\partial^2 V}{\partial x\partial y}=(k^2\lambda^2+k\lambda)V+le^{-k\lambda(x+y)}$$

todas las V debiendo anularse sobre los ejes.

El método de las aproximaciones sucesivas aplicado a esta ecuación da

(216) $$V_0=l\int_0^x\int_0^y e^{-k\lambda(x+y)}$$

(217) $$V_1=(k^2\lambda^2+k\lambda)\int_0^x\int_0^y V_0$$

(218)

(218) $$V_2 = (K^2\lambda^2 + K\lambda)\int_0^x\int_0^y V_1$$

....

y si N es el valor máximo de V_0 en el rectángulo $0-\alpha, 0-\beta$ resulta

(219) $$V_0 < N$$

(220) $$V_1 < (K^2\lambda^2 + K\lambda) N \frac{xy}{1!^2}$$

(221) $$V_2 < (K^2\lambda^2 + K\lambda) N^2 \frac{x^2y^2}{2!^2}$$

....

y por consiguiente que la serie V

(222) $$V = V_0 + V_1 + V + \ldots\ldots$$

es uniformemente convergente en el rectángulo $0-\alpha, 0-\beta$.

Basta ahora volver sobre los cálculos hechos y se tiene que la serie (186) es uniformemente convergente en el rectángulo considerado.

44. N o t a . Por razones de brevedad, se ha omitido en los cálculos precedentes las diferenciales correspondientes a las integrales que intervienen en la demostración.

A P U N T E S   F I N A L E S .

Terminados los primeros dos capítulos del presente trabajo, quedaría todavía por desarrollar el estudio de las ecuaciones del tipo parabólico con un sólo término, de las hiperbólicas con dos términos y de las ecuaciones ambiguas con dos y tres términos de segundo orden. Sinembargo, la labor involucrada en la producción de la primera parte que está lejos de agotar el tema, me ha determinado a exponer en las siguientes páginas las faces por las cuales había pasado hasta la fecha, a fin de conocer la evolución de las ideas anteriores y anotar las que abrigo estudiar detenidamente en el futuro.

- - - - - - - - - - - - - -

En primer lugar, la cuestión que se impuso naturalmente, ha sido la de la obtención de las ecuaciones lineales con derivadas parciales de segundo orden.

Consideré una función $\underline{z}$ de dos variables $\underline{x}$ e $\underline{y}$ que depende de 5 parámetros, cuyos coeficientes son otras tantas funciones conocidas de $\underline{x}$ e $\underline{y}$, o sea

(223) $z = f_0 + A_1 f_1 + A_2 f_2 + A_3 f_3 + A_4 f_4 + A_5 f_5$

en la cual las A son constantes arbitrarias y obtuve de las mismas

(224) $p = p_0 + A_1 p_1 + A_2 p_2 + A_3 p_3 + A_4 p_4 + A_5 p_5$

(225) $q = q_0 + A_1 q_1 + A_2 q_2 + A_3 q_3 + A_4 q_4 + A_5 q_5$

(226) $r = r_0 + A_1 r_1 + A_2 r_2 + A_3 r_3 + A_4 r_4 + A_5 r_5$

(227) $s = s_0 + A_1 s_1 + A_2 s_2 + A_3 s_3 + A_4 s_4 + A_5 s_5$

(228) $t = t_0 + A_1 t_1 + A_2 t_2 + A_3 t_3 + A_4 t_4 + A_5 t_5$

de la cual resulta efectivamente una ecuación lineal con derivadas parciales de segundo orden,

(229) $Rr + Ss + Tt + Pp + Qq + Zz = U$

cuyo examen superficial induce a creer que la ecuación depende de 7 funciones diferentes, lo cual se desvanece si se efectua la sencilla transformación

(230) $z = z_1 + z'$

siendo z_1 una solución particular de la (229) quedando reducida esa a una ecuación de la forma

(231) $RSTPQZ = 0$

siendo esta última susceptible todavía de otra reducción al considerar

derar

derar como coeficientes de las diferentes derivadas que entran en la formación de la (231) las relaciones de 5 coeficientes a un sexto, lo cual hace ver que realmente la solución depende de cinco funciones independientes.

Puse luego la ecuación bajo la forma

$$(232) \qquad (RX^2 + SXY + TY^2 + PX + QY + Z)z = 0$$

entendiendo por

$$(233) \qquad (RX^2)z = R\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \quad (SXY)z = S\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \quad \ldots\ldots\ldots$$

más había que definir las operaciones y es facil ver que

$$(234) \qquad (X+A)[(Y+B)z] \neq (Y+B)[(X+A)z]$$

No obstante esto, es de suponer que debe existir una estrecha relación entre la teoría de las cónicas y las ecuaciones con derivadas parciales de segundo orden, relación que ha de investigarse de más cerca.

Asi siendo, y fundado en esta primera aproximación, se me presentó la cuestión cuál sería la "intersección" simbolicamente hablando de la "cónica" (234) con la "recta"

$$(235) \qquad (X + AY)z = B.$$

La contestación

La contestación no es inmediata, pero es de suponer que si s/e tomarían A y B como funciones arbitrarias la solución común al sistema pertenecería a la integral completa de la ecuación (234).

Son todos los ensayos hechos solamente incentivos para proseguir oportunamente con los mismos hasta obtener resultados decisivos en estas direcciones, pues lo obtenido no ha sido sino mudar de dificultad.

Quizá la solución requiera la adopción de algún nuevo símbolo con el cual se operaría como con los ya conocidos del algebra, problema tan viejo como la misma matemática, y que nos permita dar la función z con la aproximación que se quiera. ¿Cuál sería esta fórmula? ¿Será general? ¿Se podría engendrar la solución general mediante cinco soluciones particulares?

Son todas estas preguntas analíticas, preguntas de sucesivas aproximaciones hacia una síntesis de la solución, la que había empezado, partiendo de casos sencillos y ascendiendo a los más complicados, llegando reconocer por ahora el gran valor del método de PICARD , y seguramente (hablando en el optimismo matemático que nos alienta persistir en nuestras investigaciones)

ha de

ha de haber uno mejor y más cómodo, que nos permita estudiar las cuestiones mas amplias, como la siguiente

(236) $$R(x,y)\,r\left[f_r(x,y),g_r(x,y)\right]+S(x,y)\,s\left[f_s(x,y),g_s(x,y)\right]+\cdots=0$$

que ha de entenderse así:

¿Cuál es la función $z = f(xy)$ que admite funciones derivadas (funciones deducidas mediante ciertas reglas que no han de ser precisamente de derivación)

(237) $$p(x,y) \qquad q(x,y) \qquad r(x,y)$$

regulares, unívocas o no, y en las cuales sustituyendo las x, y por las diez funciones dadas

(238) $$f_r,\ g_r\ ;\ f_s,\ g_s\ ;$$

y llevándolas en la ecuación (236) la satisfacen idénticamente.

Así,

(239) $$z=x^2+2xy-y^2$$

es una solución de la ecuación

(240) $$r+t+4x\,p\left[Ax-(A+1)y,\,-(A+1)x-(A+2)y\right] - 4y\,q\left[-(A+1)x-(A+2)y,\,Ax-(A+1)y\right]+8z=0$$

pues

(241) $$p(x,y)=2(x+y)$$

(242) $$p\left[Ax-(A+1)y,\,-(A+1)x-(A+2)y\right]=2\left[-x-(2A+3)y\right]$$

(243)

(243) $$q(x,y) = 2(x-y)$$

(244) $$q\left[-(A+1)x-(A+2)y,\ Ax-(A+1)y\right] = 2\left[-(2A+1)x-y\right]$$

que llevados en la (240) la satisfacen idénticamente.

- - - - - - - - - - - - - - - - - - -

P R O P O S I C I O N E S   A C C E S O R I A S .

I. No existen curvas alabeadas tales que las rectas que unen dos puntos cualesquiera de ellas pasen por un tercero de las mismas curvas.

II. En un plano, supuesto indefinido, si el potencial térmico es dado, las lineas de corrientes son determinables sin cuadratura.

III. Una cadena sin fin suspendida del antebrazo se hace girar por el movimiento uniforme de éste; ¿ Qué trayectoria describen los puntos de la cadena suponiendo que no hay resbalamiento entre ella y su suporte?

IV. Un cuerpo de masa infinitesimal se mueve bajo la atracción de dos masas finitas que describen órbitas circulares. ¿ Qué trayectoria describe aquél suponiendo todos los movimientos coplanares?

Firmados: Jñ Duclout, C. C. Dassen, J. Rey Pastor,

I. Aztiria.