Metafísica de los conceptos matemáticos fundamentales (espacio, tiempo, cantidad, límite) y del análisis llamado infinitesimal

Dassen, Claro Cornelio

1901

Tesis presentada para obtener el grado de Doctor en Ciencias Físico-Matemáticas de la Universidad de Buenos Aires

METAFÍSICA DEL ALTO ANÁLISIS

UNIVERSIDAD NACIONAL DE BUENOS AIRES

Facultad de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales

METAFÍSICA

DE LOS

Conceptos Matemáticos Fundamentales

(ESPACIO, TIEMPO, CANTIDAD, LÍMITE)

Y DEL

ANALISIS LLAMADO INFINITESIMAL

TESIS

Para optar al título de Doctor en Ciencias Físico-Matemáticas

POR

CLARO CORNELIO DASSEN

INGENIERO CIVIL

BUENOS AIRES

EST. TIPOGRÁFICO DE TAILHADE & ROSSELLI, RECONQUISTA 258

1901

UNIVERSIDAD NACIONAL DE BUENOS AIRES

CONSEJO SUPERIOR

Rector: Doctor Leopoldo Basavilbaso.
Vicerrector: Doctor Manuel Obarrio.
Consejero: Doctor Manuel Obarrio.
— Doctor Antonio Bermejo.
— Doctor David de Tezanos Pinto.
— Doctor Enrique E. del Arca.
— Doctor Eliseo Cantón.
Doctor Juan R. Fernández.
Ingeniero Luis Silveyra.
Ingeniero Luis A. Huergo.
— Ingeniero Otto Krause.
Doctor Miguel Cané.
Doctor Manel F. Mantilla.
— Doctor Indalecio Gomez.
Consejero suplente: Doctor Wenceslao Escalante.
— Doctor Leopoldo Montes de Oca.
— Doctor Juan J. J. Kyle.
— Doctor Rodolfo Rivarola.
Secretario general: Doctor Eduardo L. Bidau.

FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS, FISICAS Y NATURALES

DECANO: Ingeniero Luis A. Huergo.
VICEDECANO: Doctor Manuel B. Bahia.
ACADÉMICOS HONORARIOS: Ingeniero Emilio Rosetti.
— Doctor Carlos Berg.
— Ingeniero Francisco Lavalle.
— Ingeniero Jorge Coquet.
ACADÉMICOS TITULARES: Ingeniero Luis A. Huergo.
— Ingeniero Guillermo White.
— Ingeniero Luis Silveyra.
— Ingeniero Santiago Brian.
— Doctor Rafael Ruiz de los Llanos.
— Doctor Juan J. J. Kyle.
— Doctor Manuel B. Bahia.
Doctor Eduardo L. Holmberg.
— Doctor Cárlos M. Morales.
— Doctor Atanasio Quiroga.
— Doctor Ildefonso P. Ramos Mejía.
Ingeniero Otto Krause.
Ingeniero Juan Pirovano.
— Ingeniero Eduardo Aguirre.
— Ingeniero Juan F. Sarhy.
SECRETARIO: Ingeniero Pedro J. Coni.

PROFESORES TITULARES

Complementos de Aritmética y Algebra: Doctor Marcial R. Candioti.
Trigonometría y complementos de Geometría: Ingeniero José S. Sarhy.
Complementos de Física y manipulaciones: Doctor Manuel B. Bahia.
Complementos de Química: Doctor Juan J. J. Kyle.
Dibujo lineal y á mano levantada: Ingeniero Carlos Paquet.
Algebra Superior y Geometría Analítica: Ingeniero Carlos D. Duncau.
Geometría Proyectiva y descriptiva: Ingeniero Juan F. Sarhy.
Cálculo infinitesimal: (primer curso) Doctor Ildefonso P. Ramos Mejía.

INDICE

INTRODUCCIÓN

Necesidad del estudio metafísico objeto de esta tésis

Milhaud, en el prefacio de su traducción de la obra de P. du Bois Raymond *Die Allgemeine Functionentheorie*, dice: « La preocupación demasiada exclusiva del rigor, da á la enseñanza de las matemáticas una forma á menudo dogmática. Los que han recibido esta enseñanza en los » liceos ó facultades, quedan mucho tiempo sin compren- » der como puede haber, á propósito de estas ciencias, » cuestiones capaces de dividir á los pensadores, y toda discusión filosófica es á menudo mal recibida por la » sencilla razón de que se siente dificilmente su necesidad ». Entre nosotros, especialmente, estos estudios han sido completamente descuidados no obstante la gran importancia que han adquirido desde que Gauss, Cauchy, Abel, Lejeune Dirichlet, etc., han empezado á hacer sentir la necesidad de justificar los métodos conocidos anteriormente por simple inducción, y han aplicado el aforismo de Buckle: Las grandes reformas consisten menos en edificar algo nuevo que en destruir algo viejo ». He ahí el motivo de haberlos elegido como tema de esta tésis.

Ante todo, vamos á demostrar brevemente con algunos ejemplos, la necesidad de estos estudios.

Desde las nociones elementales de álgebra dadas en nuestros colegios de enseñanza secundaria, se nota la ausencia de ellos y la imperiosidad de tenerlos en cuenta. Á cada rato vemos emplear, con toda tranquilidad, multiplicadores negativos, olvidándonos que, indicando el multiplicador el número de veces que debe tomarse el multiplicando como sumando, solo se aviene con el con-

Ejemplos en la multiplicación de monomios y en los multiplicadores

cepto de número de objetos y es incompatible con el concepto de dirección ó sentido implicado en el signo negativo. Enseñamos con toda seriedad la regla de los signos para multiplicar dos monomios, basándonos en una definición de multiplicación que consiste en hacer buscar una cantidad llamada producto que sea al multiplicando lo que el multiplicador es á la unidad positiva, definición que engloba simultáneamente á los conceptos de cantidad, de dirección y de proporcionalidad, el último de los cuales presupone la división, operación posterior á la multiplicación; por esto llegamos al absurdo de decir: menos por menos da más, olvidándonos así que esas reglas de los signos tanto de la multiplicación como de la división son simplemente reglas mnemotécnicas aplicadas á los monomios cuando éstos forman parte de polinomios y no cuando están aislados, en cuyo caso nada significan.

En los exponentes é índices

Igualmente enseñamos que el cuadrado de una cantidad negativa es positiva y que la raíz cuadrada de una positiva tiene dos signos, y buscamos también la raíz de una cantidad negativa sin apercibirnos que todo esto es un simple formulismo que ninguna correspondencia tiene con la realidad y que solo mediante una convención previa puede entrar á prestar utilidad en las matemáticas. Lo mismo diremos de los exponentes y de los índices fraccionarios y negativos, etc., etc.

El infinito

En cuanto pasamos á las matemáticas más elevadas nos encontramos desde nuestros primeros pasos con ese fantasma llamado por Wronski: el *Augusto Infinito*, que revoluciona todo aquello en que entra, tanto en su forma de infinitamente grande, como en su forma de infinitamente pequeño. Este Infinito, creador de cuantas paradojas hay en matemáticas, es tomado en general y con toda formalidad, como algo real, como un ser ó una cantidad y decimos: Dos rectas paralelas se cortan en el infinito,—Todas las circunferencias tienen dos puntos en el infinito; hablamos también de cónicas, de fuerzas, de planos, etc. en el infinito, sin apercibirnos de que todo esto no es sino pura fraseología, ó á lo más una manera simbólica de indicar cosas que no existen pero que corresponden á fórmulas deducidas de la aplicación de operaciones aritméticas ó algébricas en casos en que aquéllas ya dejan de ser válidas.

Veamos un poco lo que aprendería aquel que quisiera penetrarse del concepto de infinitamente pequeño consultando á distintos autores.

Definiciones del infinitamente pequeño

Según Lagrange, Euler y d'Alembert han hecho ver que las diferencias llamadas infinitamente pequeñas *son nulas.*

Boussinesc dice: *cero* es el único número, propiamente hablando, infinitamente pequeño.

Laurent, escribe: *cero* puede ser un valor particular del infinito.

Carnot, cree que los infinitamente pequeños tienen una existencia intermedia entre la nada y la cantidad real.

Casi todos los demás lo definen diciendo que es una cantidad eminentemente variable, y como según otros tiene una infinidad de valores principales y también propiedades equívocas y que, finalmente, según Hegel, dicho infinitamente pequeño es « un grandor tomado en el momento en que participa de la fecundidad de ser y de no ser »; no es extraño que diga después de esto Fleury, que para comprender y poner de acuerdo todo lo anterior, necesitaría el lector haber ganado el gran premio de filosofía.

El límite matemático

Generalmente se define el infinitamente pequeño, diciendo que es una cantidad variable que tiene por límite matemático cero. Veamos, pues, lo que es este límite matemático y qué reflexiones motiva.

Dejemos hablar á Paul du Bois Raymond.

« Por concepto de límite, se entiende una manera especial de raciocinar, en virtud de la cual de la naturaleza de una serie de valores susceptibles de ser medidos
» y observados, se llega á la existencia de valores que escapan á toda percepción y cuya existencia no puede jamás demostrarse en el sentido ordinario de la palabra. A pesar de esto, estamos acostumbrados á contentarnos
» sin cejar de esta conclusión que aplicamos constantemente.
» Esta manera de llegar á la existencia efectiva de obje-
» tos que no pueden ser alcanzados por ninguna percep-
» ción mediata ó inmediata es, como se sabe, familiar á ciertas ciencias, en las que se invoca una manera común

» á todos los hombres para concebir por intuición y para
» sentir. Pero, ¿no debe extrañarse que una forma de
pensamiento apenas tan poco rigurosa, deba servir para
consolidar las nociones fundamentales y más indispen-
» sables de las matemáticas, es decir, precisamente de una
ciencia que más que cualquiera otra se hace gloria
» del rigor más meticuloso y más neto, y que se muestra
» cada día más digna de su reputación? ¡Qué matemático
podría negar, que (particularmente en la idea que ordi-
» nariamente se tiene) el concepto de límite y de sus
parientes próximos, lo ilimitado, lo infinitamente grande
y pequeño, las irracionales, etc., carecen aún de solidez!
» El profesor, ya hable ó escriba, tiene la costumbre de
recorrer á pasos rápidos esta peligrosa introducción al
» análisis para pasearse tanto más facilmente por los ca-
minos tan cómodos del cálculo ».

« En verdad, raramente se extravía uno cuando busca
» las cosas más curiosas fuera del camino seguido por el
vulgo y precisamente nos proponemos recorrer esa senda
» evitada por los otros ».

De estas palabras deducimos la poca evidencia en sí del concepto general del límite matemático, el cual, sin embargo, es aceptado ordinariamente como la cosa más sencilla y natural.

El que quiere darse cuenta clara de los conceptos empleados en las matemáticas, encuentra pues grandes dificultades, y facilmente toma estas ciencias en adversión si previamente no estudia su metafísica.

Y francamente existe razón para ello; ya dimos algunos ejemplos, completaremos la tarea indicando otros más, sacados de la aplicación del infinito á las series, al cálculo llamado infinitesimal, etc. y al método de mismo nombre.

A propósito de la serie

Las series infinitas

$$\frac{1}{2} \quad \frac{1}{4} \quad \frac{1}{8}$$

Juan Bernoulli sostenía que tenía un último término, que es infinitamente pequeño. Fontenelle aceptaba esta proposición y la hacía el fundamento de su *Geometría del Infinito.* Leibnitz, en cambio, no aceptaba la existencia de este último término de la serie, basándose en que no pudiendo éste disminuir ni ser cero, sería un absurdo parecido, según él, al átomo de Leucipo. He aquí ahora la explicación que da Bordas Demoulin para sostener la opinión de Leibnitz. Dice: « La serie en cuestión no existe sola, no es sino un miembro de una igualdad el otro » de la cual es uno, es decir, se tiene:

$$1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots\ldots$$

El segundo miembro es igual al primero, no por la suma de sus términos sino por la ley de generación que » los hace salir uno de otro, su esencia es de poder acer» carse indefinidamente al primero sin nunca alcanzarlo. Suponed que lo alcanza, quitadle la posibilidad de acercarse á él indefinidamente, destruireis en ambos casos » esa serie. La unidad del primer miembro es el principio del conjunto indivisible de los términos del segundo, y el conjunto indivisible de los términos del segundo » agota completamente la unidad del primero. La unidad está toda entera en el conjunto, el conjunto en la uni» dad, sin que la unidad pueda resolverse en el conjunto ni el conjunto en la unidad. Existen tal cual y por su » coexistencia necesaria forman la naturaleza de esa igualdad y nos muestran en un caso particular, la del infinito. De donde se vé que el infinito no es ni unidad » solamente como lo creían los metafísicos desde Plotino, » ni número solamente como lo creían los matemáticos desde Eutocio, ni aún menos negación como lo imajinaban Pitágoras y Platón; pero es unidad y número á » la vez..... ».

Este es un ejemplar de las tantas divagaciones que ha originado el infinito, ese ser ideal que como dice Boucharlat parecía haber producido prodigios al ser sometido al cálculo.

Veamos uno poco qué prodigios realiza aún en manos de los más eminentes autores.

Los límites y los infinitamente pequeños

Freycinet, en su notable obra *Métaphysique de l'Analyse infinitésimale*, llega á establecer la siguiente proposición: Dos cantidades fijas entre las que se supone existe

Principios falsos

solamente una diferencia infinitamente pequeña no tienen en realidad diferencia alguna y son rigurosamente iguales.

He aquí la demostración que dá de ella.

«Desde que las cantidades son fijas, su diferencia no
» puede ser igual á una cantidad infinitamente pequeña
» la cual es por su naturaleza eminentemente variable.
» Es necesario deducir pues, que la desigualdad supuesta
» no es sino aparente y que el infinitamente pequeño que
» parece representarla, figura abusivamente en la fórmula
» donde se ha introducido como consecuencia de algún
» error de cálculo pasado desapercibidamente. Si, pues, se
» está bien seguro de que la diferencia en cuestión no es sino
» ese infinitamente pequeño, se estará seguro simultánea-
» neamente de que esta diferencia no existe. Por consi-
» guiente, se tiene no solamente el derecho sino también
» el deber de suprimir los infinitamente pequeños á fin
de restablecer la realidad de las cosas».

Aunque libre por demás, no puedo resistir al deseo de mencionar también el parangón y refutación que hace Fleury de la anterior demostración.

Dice Fleury:

«Me parece que se podría poner este género de de-
» mostración al alcance de todas las inteligencias, diciendo:
El que no tiene sino un mirlo blanco no tiene en rea-
» lidad mirlo alguno, pues siendo todos los mirlos negros,
» es de toda necesidad que su mirlo blanco sea un mirlo
Demostración
» negro. Por consiguiente, se tiene no solamente el dere-
» cho sino también el deber de exterminar todos los mir-
» los blancos, á fin de restablecer la realidad de las cosas.
» El mirlo negro es cero, y el blanco el infinitamente pe-
queño. Es preciso primero que el mirlo sea blanco, por
» ejemplo, en:

$$\left(y = x^3 \therefore y + k = (x + h)^3 \therefore \frac{k}{h} = \frac{3\,x^2\,h + 3\,x\,h^2 + h^3}{h}\right)$$

» pues sino esta última relación tomaría la forma $\frac{0}{0}$ iluso-
ria y desprovista de sentido para $h = 0$. Pero cuando
» la relación se ha reducido á $3\,x^2 + 3\,x\,h + h^2$ es pre-
» ciso que el mirlo sea negro, pues solamente para $h = 0$
» la expresión anterior se reduce á $3\,x^2$. Es entonces

» que se dice: Ya que el mirlo blanco no puede ser sino » un mirlo negro, debe deducirse que aquél figura abusi» vamente en la jaula donde se ha introducido debido á » algún error pasado desapercibidamente. Si, pues, se está » bien seguro que el pájaro en cuestión no puede ser otra » cosa sino un mirlo blanco, se estará bien seguro simul» táneamente que es un mirlo negro ».

Demostraciones falsas de la existencia de un límite

Podrían multiplicarse los ejemplos análogos; para terminar mencionaremos unicamente las proposiciones de Duhamel y de Bertrand para demostrar que: Si una cantidad variable crece sin cesar quedando constantemente inferior á una cantidad determinada, tiene necesariamente un límite. La falsedad de la demostracion de Duhamel está demostrada en el § 4**, capítulo 3.° de la primera parte de esta tésis. En cuanto á la de Bertrand, la vemos inmediatamente al enunciar la demostración: Es claro, dice, que si la suma

$$u_0 \qquad u_1 \qquad\qquad\qquad u_n$$

adquiere un número de términos siempre crecientes, los resultados obtenidos aumentarán constantemente, y si no pueden pasar de cierta cantidad fija, se aproximarán necesariamente tanto como se quiera, al menor de los números que no pueda pasar. Facilmente se vé que la existencia de este mínimum es tan difícil de comprender como el aceptar directamente, sin demostración alguna, la proposición sentada; y que, en resumidas cuentas, el raciocinio equivale á modificar sin explicarla la enunciación del hecho intuitivo en ella encerrada.

Todo lo anterior justifica pues la razon del tema elegido para esta tésis. No pretendo haber importado descubrimientos ó innovaciones transcendentes, los que serían superiores á mis alcances y al tiempo que me ha sido dado invertir en ella: pero, creo sinembargo ser original en la exposición y en muchos puntos de vista, habiendo formulado ideas y modos de ver propios á fin de dejar con todo esto bien esclarecida la metafísica verdadera de los conceptos tratados y del alto análisis tan descuidado entre nosotros.

División del trabajo

He dividido el trabajo en dos partes. La primera trata de los conceptos matemáticos fundamentales: Espacio y

Tiempo, Cantidad y Límite, cada uno de los cuales constituye un capítulo especial. El capítulo referente al espacio y al tiempo es el menos matemático de la obra, por la sencilla razón de que siendo estos los conceptos primitivos, su metafísica es *pura*; puede ser suprimido sin inconveniente todo lo referente á la definición, orígen y naturaleza de estas nociones, pues su índole filosófica cuadra muy poco con la naturaleza rigurosa de las matemáticas; no he querido sin embargo eliminarlo para dar así cuenta completa de las tentativas hechas por el hombre para sondar el misterio de la esencia de las cosas; además, los argumentos de Kant basados en la geometría, hacían obligatorio su mención, siquiera sómera. En el capítulo que trata de la cantidad matemática he desarrollado la parte referente á los grandores lineales, haciendo conocer los trabajos de du Bois Raymond. Este autor también es el seguido en al teoría del argumento y función así como en la división del idealismo y empirismo del tercer capítulo, pues puede considerarse como el principal fundador de todas esas cuestiones. He agregado lo referente á la teoría atómica y demás puntos donde no se cita autores.

Segunda parte

La segunda parte trata del Análisis llamado infinitesimal y la he dividido en cuatro capítulos que tratan respectivamente del método, del cálculo, de las paradojas infinitesimales y de la utilidad de la experiencia en las ciencias exactas, aprovechando para todo ello, á más de mis ideas personales, los trabajos de Freycinet, Duhamel, Fleury, Bois Raymond, Poincarré, etc., con lo que creo haber agotado el tema y dejado bien sentado la verdadera metafísica del Alto Análisis. He agregado á cada capítulo de la primera parte y al final de la segunda una lista bibliográfica de los principales autores y sábios á quien más se debe el progreso de estos estudios.

Al terminar sería mi voto ver iniciar entre nosotros el interés por estas cuestiones tan fundamentales de las ciencias matemáticas, y que este humilde trabajo fuera de utilidad para los que se preocupan sinceramente del estudio de la ciencia pura.

CLARO CORNELIO DASSEN.

Buenos Aires, 15 de Septiembre de 1901.

PRIMERA PARTE

CAPÍTULO PRIMERO

El espacio y el tiempo

Importancia de los conceptos de espacio y de tiempo

Las nociones de espacio y de tiempo son las fundamentales del conocimiento del mundo exterior [1] pues este nos representa cuerpos existentes en el espacio y variando con el tiempo; de ahí que estos conceptos marchen siempre unidos en todos los grandes problemas metafísicos. El espacio y el tiempo son los recipientes donde todo entra.

Caracteres comunes

Desde luego se nos aparecen como ilimitados, pues por más que la imaginación trate de hacer retroceder los límites de aquello que le sirve de auxiliar para representarse el espacio, este siempre se abre más allá; igualmente el tiempo huye á medida que se trata de seguirlo. Y se explica que así sea, pues el espacio y el tiempo son en sí indeterminados no obstante el trabajo del pensamiento que los determina en la medida exigida por las cosas y acontecimientos. Se nos presentan igualmente como

(1) La relación de causa á efecto, *sino-cua-non* de todo conocimiento de la Naturaleza, implica la idea de sucesión ó sea de duración: igualmente las ideas de clasificación y ordenación inherentes á todas las ciencias sacan su claridad de la noción de espacio en donde pueden ordenarse y suponerse los objetos. Particularmente en las ciencias físico-matemáticas estos conceptos son fundamentalísimos pues van implicados en todas las definiciones, y en la Geometría y Mecánica suministran además elementos directos al cálculo. Aún en las ciencias de lógica pura como en el Análisis á pesar de que su existencia se mantiene fuera de todo concepto de espacio y de tiempo no puede negarse que los datos primos han sido sugeridos y sacados del mundo exterior y que sin la existencia de estos sería muy dudosa la de aquellos. (*Véase cap. último*).

necesarios, pues nos parece que aún desapareciendo los cuerpos y los sucesos no por eso se desvanecería el espacio y el tiempo continuando estos siendo el receptáculo de los cuerpos y acontecimientos posibles. Igualmente á la noción de espacio y de tiempo va incluida la de continuidad y homogeneidad.

Caracteres diferenciales

Sinembargo, el espacio y el tiempo tienen carácteres distintivos bien marcados, los cuales pueden reasumirse en los siguientes:

El espacio parece más bien ser la condición de los seres ú objetos, y el tiempo el de los fenómenos ó acontecimientos. El espacio es directamente representable, los sentidos y la percepción exterior nos dan su primera idea, en tanto que para imaginar el tiempo, forzoso es recurrir á la idea de espacio, siendo la memoria y la conciencia las facultades que nos dan la primera noción de él.

Dimensiones del espacio y del tiempo

El espacio tiene tres dimensiones, el tiempo una sola, de manera que para fijar un punto del espacio necesitamos tres datos mientras que un acontecimiento queda determinado por una sola relación con otro. Cualquiera de las dimensiones del espacio puede recorrerse en los dos sentidos, en tanto que la dimensión única del tiempo solo puede recorrerse hácia adelante sin jamás retroceder.

El espacio es el símbolo de inmobilidad y de la invariabilidad, es siempre el mismo; el tiempo en cambio simboliza la variación, la movilidad perpétua. La idea de cambio está ligada con la de tiempo, la de fijeza con la del espacio. Las magnitudes espaciales pueden medirse directamente por superposición y los sentidos son elementos activos en estas medidas; en cambio, las magnitudes temporales solo pueden medirse por procedimientos indirectos y artificiales haciendo intervenir un elemento intermediario de comparación cuya fijeza depende de un principio racional, cual es la creencia en la constancia de las leyes naturales.

Medida del espacio

Las partes del tiempo, si así puede uno espresarse, son sucesivas y se escluyen recíprocamente; en cambio las del espacio son coexistentes de hecho y derecho. De los tres aspectos en que puede tomarse el tiempo, ó sea, presente, pasado y futuro, solo estamos en contacto con el presente pero este ha desaparecido y caído en el pasado antes de que siquiera hayamos podido posesionarnos de él. Por eso, para especular con el tiempo se necesita recurrir á la facultad de la memoria sin la cual la noción del mismo sería bastante vaga, por eso también para medir el tiempo se requiere artificios y premisas apoyados en principios externos. El fundamento de esta medida viene á ser el siguiente: Si bien el presente, como dijimos, se nos escapa y cae en el pasado antes de que lo hayamos poseído, no obstante, la persistencia de las impresiones en los sentidos nos permite observar que en un instante dado, las cosas del espacio se encuentran en un estado determinado, el cual estado ha variado en otro instante de observación. Ahora bien, el espíritu no solamente concibe una sucesión indefinida de esos estados del gran conjunto, sino que, además, se representa la variación de cada uno de esos estados como susceptibles de producirse en muy cortas duraciones igualables entre sí y cuyas magnitudes puede reducir á su albedrio; de lo contrario, solo sería talvez posible medir el tiempo en sus grandes extensiones, pero no dentro de los límites necesarios á los usos prácticos. Tomamos entonces como unidad de medida, la duración de un fenómeno tipo conveniente, y buscamos cuantas veces podrá este fenómeno producirse en el lapso de tiempo á medir

Medida del tiempo

Fundamento en que se basa la medida del tiempo

Esto supone que la duración de dicho fenómeno tipo. es siempre igual, en todas las épocas en que se verifica, pero nada nos asegura de ello, y este es justamente el punto débil de la medida del tiempo. Si se toma, p. ej., para la duración del fenómeno tipo, la de la rotación de la tierra alrededor de su eje ó la del segundo de tiempo deducido de aquella, no podemos comprobar que estas duraciones son siempre iguales en cualquier época ni que en general la duración de los fenómenos al parecer idénticos sea constante en épocas distintas, y tampoco repugna á la razón la idea de que esa variación sea posible. Para constatar la invariabilidad sería preciso superponer las duraciones, y esto es imposible. Si aseguramos sinembargo esta invariabilidad, es solo merced á la convicción general de la constancia de las leyes de la naturaleza que es el principio externo ya indicado anteriormente. Equivale esto á decir que la medida del tiempo está basada sobre una verdad

Imposibilidad de efectuar rigurosamente la medida del tiempo relativa, en tanto que la del espacio que dispone de la posibilidad de superponer las figuras, tiene una certeza absoluta.

Luego pues, la posibilidad de la medida del tiempo está basada en la existencia de fenómenos cuya duración suponemos constante en cualquier época en que se realize, basándonos en el principio racional del orden constante de las cosas; comparando ahora el desarrollo de un acontecimiento con la marcha del fenómeno tipo cuya duración podemos elejir á nuestro albedrío, podemos también completar la nocion de uniformidad ya incluida en

Concepto de uniformidad

la definición de dicho fenómeno-tipo: Un movimiento será llamado uniforme si el espacio recorrido durante la producción del fenómeno-tipo es siempre el mismo. Igualmente se dirá que el caudal de agua que pasa por el cauce de un rio es uniforme, si durante la producción del fenómeno-tipo este caudal es el mismo cualquiera que sea la época en que se realice la constatación dentro de los límites en que se considere la uniformidad. Pero no hay que confundir como lo hace C. de Freycinet en su *Essai sur le phylosophie de Sciences* la uniformidad de la marcha del tiempo deducida de la supuesta duración constante de los fenómenos tipos, suposición que nunca podrá alcanzar á la categoría de certeza por no ser suponibles las duraciones,- con la uniformidad absoluta que ni tiene sentido ni aun teniéndolo podría controlarse. Dice el autor citado que las variaciones que podría notarse en el gasto de una fuente de agua serían conceptuadas como falta de uniformidad de la fuente y no como una seña de que el tiempo ha marchado con desigualdad, pero esto no es sino repetir lo implicitamente supuesto al aceptar el fenómeno-tipo que sirve de unidad de medida. Si el gasto de la fuente

Observaciones sobre la uniformidad de la marcha del tiempo

no es el mismo en las varias épocas en que se compara con la duración del fenómeno-tipo, es evidente que dicha falta de uniformidad deberá ser de la fuente puesto que la duración de aquel ha sido definida como constante. La uniformidad del tiempo depende pues simplemente de la del fenómeno-tipo y no de un absoluto de uniformidad, el cual no tendría sentido; lo mismo sucede cuando, según nuestro estado moral, nos parece el tiempo más ó menos largo ó corto, solo queremos decir al expresarnos así que la duración del fenómeno-tipo cuya invariabilidad es deducida de un principio racional es acusada por nuestra sensibilidad de tal manera que si nos guiáramos por ella estaríamos inducidos á creer que aquella duración no es constante.

Noción de velocidad y de aceleración

La comparación entre la marcha de un fenómeno y la del tiempo así entendida nos lleva á la noción de velocidad; igualmente las comparaciones entre la marcha de las distintas velocidades de un mismo fenómeno observadas en varias épocas con la marcha del tiempo nos lleva á la de aceleración. La velocidad será la relación entre el aumento en la marcha del fenómeno y el del tiempo empleado, cuando este aumento sea tomado suficientemente pequeño. La aceleración será la relación entre el aumento de las velocidades y el del tiempo necesario para ese aumento siempre que este sea tomado suficientemente pequeño. Estas últimas nociones implican simultáneamente los conceptos de espacio y de tiempo, pues los fenómenos se desarrollan en el tiempo y se aplican á cuerpos, los que suponen espacio. El espacio puede por sí solo servir de motivo á especulaciones independientes del tiempo, pero la recíproca no es exacta; y se explica facilmente este hecho, pues la circunstancia de tener el espacio tres dimensiones lo hace apto á toda clase de combinación de figuras. La Geometría y la Estática, por ejemplo, se bastan con la noción de espacio. En cambio, el tiempo con su dimensión única, solo puede desarrollarse en serie lineal y no se presta sino á combinaciones numéricas ya incluidas en el espacio. Pero la combinación del Tiempo con el Espacio posee una fertilidad sin límites prestándose á importantes especulaciones, entre otras especialmente, las que se proponen relacionar las causas con los efectos.

El espacio es especulable, el tiempo nó

Imposibilidad de definir el espacio y el tiempo

En toda esta disertación sobre el espacio y el tiempo no hemos definido estas nociones porqué una definición de esta especie es imposible. Definir algo es relacionar la idea de ese algo con otras ideas ya conocidas; ahora bien, no siempre es posible encontrar ideas tales que relacionadas con las que se quiere definir sean inmediatamente conocidas por aquel á quien se dá la definición, puede pedirse en todos casos una definición prévia de ellas y esta operación es susceptible de continuarse indefinidamente al parecer; es forzoso, sin embargo, asignarle un límite, pues si se observa que el número de palabras de un idioma es necesariamente reducido, la serie de definiciones agotará finalmente las palabras del diccionario y preciso será repetir alguna, en el cuál caso la definición primitiva fallaría convirtiéndose en una tautología ó repetición.

Nociones primas indefinibles

Cuando se trata de definir cosas materiales, esta tautología se evitará mostrando el objeto primitivo con quien está ligado el que se quiere definir, la definición viene á ser entonces definición de nombre y no de cosa y la dificultad desaparece; pero no sucede lo mismo cuando se quiere definir cosas inmateriales y particularmente principios metafísicos, forzoso es para evitar la tautología admitir en esos casos la existencia de ideas aceptadas por todos sin definición, ya sea porqué existen naturalmente en nosotros, ya porqué han sido adquiridas intuitivamente en la primera edad de la inteligencia por efecto de las circunstancias y de las sensaciones personales. Podemos decir en resúmen que: proponiéndose la definición hacer clara una noción oscura y toda vez que el número de nociones que puede poseer el hombre es forzosamente limitado, debe aquella fracasar cuando pretenda versar sobre las nociones más claras entre todas las poseidas. En esta última clase de nociones figuran las del tiempo y espacio, por eso todo lo que se diga para explicarlas no hará sino oscurecerlas introduciendo la tautología. Para definir el tiempo, por ejemplo, deberemos empezar diciendo: *el tiempo es.....* y ya con esto solo se habrá producido la tautología.

Error de Pascal

Cuando Pascal en su *Esprit Geometrique* dice que el verdadero orden consistiría en definir todo, cae al hacerlo evidentemente en una confusión, pues si así fuera, habría que decir, no de que todo está definido, sino de que nada lo está desde que la serie de definiciones nunca terminaría; forzoso sería al contrario llegar á nociones tan claras que no existan otras que lo sean más, viniendo estas así á cerrar la serie en cuestión; y esto no por deficiencia del espíritu humano sino por una verdadera necesidad inherente á la naturaleza del asunto.

Pero la imposibilidad de definir el espacio y el tiempo no obsta á que se trata de averiguar cual es el orígen de las nociones que tenemos de ellos, y cual es su naturaleza. Sobre el orígen de las nociones de tiempo y espacio existen dos escuelas: la empírica ó genética de la cual es fundador Locke y la nativista ó ideal de Kant.

Orígen de nuestras nociones de espacio y de tiempo

Locke en su *Ensayo sobre el entendimiento humano* admite que las nociones de espacio nos vienen empíricamente de la sensibilidad por intermedio de los sentidos del tacto y vista, opinión apoyada por Lotze en su *Teoría de los signos locales* completada por Wund en su *Fisiología psicológica*. Sin embargo Sergi en su *Fisiología experimental* demuestra que el oído y el gusto cooperan á dar más fijeza á la idea de extensión. Esta escuela viene hasta cierto punto á prescindir del espacio vacío, pues es evidente que los sentidos solo nos pueden dar conocimiento de cuerpos, y si bien estos son limitados, pasamos á la noción de lo ilimitado en el espacio por la facultad de repetir la idea que tenemos de una distancia cualquiera y de agregarle á la precedente, lo mismo sucede con el tiempo, pues, de la duración limitada de una cosa, la reflexión nos conduce á la idea de la duración ilimitada del tiempo. Locke confunde en una sola, según esto, la idea de extensión ó de cuerpo con la del espacio y aún con la del lugar. Estas teorías fueron imperantes en todo el siglo XVIII, pero Victor Cousin jefe de la escuela ecléctica demostró que la idea del espacio no puede intelectualmente ser reducida á la idea de cuerpo, pues esta para ser concebida exige ya la idea de sitio ó lugar ó sea de la de un espacio dentro del cual se encuentra el cuerpo; además, la idea del cuerpo es relativa y contingente, mientras que la del espacio es necesaria y absoluta; la noción de cuerpo implica límites, la del espacio nó; de esto saca finalmente Cousin en consecuencia, que la idea de espacio es de entendimiento puro, mientras que la del cuerpo proviene de la sensibilidad.

Teoría empírica ó genética

La escuela naturalista ó ideal profesada por Kant, Shopenhauer, Müller, Weber, Stumpft y otros, admite que

Teoría idealista ó nativista

las nociones de tiempo y espacio las tenemos por una intuición; estas ideas son formas de la sensibilidad, son categorías puramente sugestivas; la experiencia en nada interviene para que las poseamos.

Teoría intermedia

Wund sigue una especie de teoría intermedia, pues admite que esas ideas proceden de una *síntesis de las sensaciones*, es decir de una elaboración ó química mental del conjunto de nuestras impresiones externas (Revista Filosófica, Tomo VI). Reconoce en consecuencia, una predisposición orgánica en la fisiología, —la que constituye el elemento nativista —pero demuestra su desarrollo por medio del estímulo dado por la experiencia — parte genética. — Se ha observado á esta última teoría, que es muy difícil concebir como pueden elaborarse mentalmente las ideas de espacio y de tiempo con el solo hecho de sintetizar sensaciones, al contrario parece más bien que en esa síntesis hay algún resíduo que no puede resolverse en sensaciones. La escuela empírica tiene igualmente que

Objeciones

luchar con la objeción de que las sensaciones solo se conocen mediante las percepciones, y la percepción de la extensión salvo casos especiales y de estudio muy complicados como el vértigo y la apagogía ú horror al vacío, no se caracterizan ni por la graduación en intensidad ni por venir acompañado del placer y dolor inherente á toda sensación percibida. Es muy posible que en la adquisición de la idea del espacio y del tiempo intervengan elementos racionales y por ende universales y absolutos así como elementos sensitivos.

Los principios de identidad y de contradicción que son los directores del conocimiento, implican necesariamente la idea de espacio y de tiempo, y recíprocamente; pero el estímulo externo de la experiencia puede contribuir á darles forma clara pues de las múltiples representaciones que esta nos proporciona, particularmente por medio de los sentidos del tacto, vista y muscular, conocemos la existencia de objetos colocados en diferentes posiciones unos con respecto á los otros separados por distancias medibles; el movimiento relativo de los mismos etc. todo eso nos deja un resíduo que combinado con los elementos racionales ya existentes en nosotros viene á ser el concepto general de espacio, primero, y luego por una última abstracción de naturaleza científica basada en la relatividad de la posición y variabilidad de los objetos, la del espacio vacío. Pero apurando mucho las objeciones se llegaría fatalmente á la discusión general entre el empirismo en sus tres formas con el idealismo.

Naturaleza del espacio y del tiempo

En cuanto á la naturaleza del espacio y del tiempo, se han formado dos doctrinas, una que les dá una existencia real ú objetiva y la otra que les considera como existiendo solamente en nuestro entendimiento.

Teoría objetiva

Newton, Clarke y modernamente Augusto Garnier consideran el espacio y el tiempo como existiendo independientemente de su contenido. Descartes en cambio, si bien les dá una existencia real, considera esta como inseparablemente ligada con las cosas y acontecimientos, de manera que desaparecerían junto con estas últimas.

Teoría subjetiva

Leibnitz observa que las distancias y las medidas son enteramente relativas, de manera que no le es posible al hombre tener de ellas una idea absoluta; por eso considera el espacio y el tiempo, no como algo existiendo en la realidad, sino como un orden ó relación entre las existencias y los acontecimientos posibles, tomando como cosas á relacionar en último término, á las mónadas por él ideadas.

En otras palabras no podemos representarnos un objeto ó un suceso sin considerarlo fuera de los otros objetos ó sucesos, de manera que todos los que seas coexistentes y todos los sucesivos forman una serie numerable aplicando la sucesión de los números enteros.

El orden ó relación entre ellos constituye nuestro espacio ó tiempo y sus caracteres de necesidad y de indefinidad se explica porqué, considerados en abstracto se aplican lo mismo que el número, no solo á lo real sino también á lo posible y no hay *á priori* ninguna razón para limitar la serie.

Kant considera, según dije, el espacio y el tiempo como formas *á priori* de la sensibilidad, el tiempo es la forma del sentido interno, el espacio del externo, por lo tanto uno y otro preexisten virtualmente á los fenómenos y son independientes de ellos, no tienen realidad sino en nuestra manera de representar las cosas externas á las cuales sirve de forma, pero no tienen existencia propia. Aun sin percepciones, es decir vacíos de objetos y sucesos, esas nociones continuarían imaginables; son conceptos trascendentales de nuestro espíritu que se imponen á pesar nuestro en todos los juicios y que provienen de una facultad superior, pero su objeto no existe, sus propiedades y relaciones imperan en los fenómenos, y de allí la certeza de las verdades matemáticas basadas en ellos.

La escuela idealista se ha valido también del argumento clásico siguiente: Si el espacio y el tiempo existieran fuera de nosotros deberían necesariamente ser sustancias ó atributos, pero nos es imposible considerarlos en una ú otra forma, luego no tienen existencia real.

Discusiones y objeciones

Estas teorías han dado lugar á discusiones interminables. La primera, es decir la de Newton, Clarke y Descartes que sostiene la existencia objetiva del espacio y del tiempo no adelantó prueba alguna convincente. La tendencia natural en objetivar es común á todas nuestras representaciones y no asegura la existencia real de las mismas; sin embargo se ha observado, en contra de lo que sostiene la escuela de Kant, que debe necesariamente darse alguna realidad al tiempo y al espacio; así: cuando cambia un cuerpo de forma, cuando de cuadrado se hace redondo, por ejemplo, forzoso es dar á ese cambio una existencia real independiente de nuestro espíritu, pues mientras que en la mayoría de los casos, en presencia de un hecho, unos opinan de una manera otros de otra, ante un cambio de la naturaleza indicada, todos están conforme en que se ha producido, lo cual es un signo evidente de su existencia objetiva, por lo menos este es el único criterio que podemos tener de una tal existencia.

Realidad del tiempo

Lo mismo sucede con el tiempo. Podemos decir que espíritu existe en el tiempo lo mismo que las cosas, pero estas existen por sí y su realidad es independiente de aquel, no necesitan que les de una forma que ya poseen como condición de su realidad.

De las tres faces en que puede considerarse el tiempo, á saber: el pasado, el presente y el futuro, el presente propiamente hablando no existe, pues se nos escapa y cae en el pasado antes de que podamos extraerlo del futuro, pero la realidad en sí de pasado está constantemente acusado por las huellas que va dejando independientemente de nuestro espíritu á quien no puede atribuirsele su existencia, lo mismo podría demostrarlo la realidad en sí de un acontecimiento astronómico anunciado para el futuro.

Objeciones á la teoría de Leibnitz

Por su parte la teoría de Leibnitz, equiparando la serie de cosas, y sucesos á la de los números enteros, no nos habla de la separación entre ellas, la podemos en consecuencia suponer existente ó nula, en el primer caso esa distancia preexiste á la coexistencia de los objetos ó de los acontecimientos, y entonces el espacio y el tiempo de Leibnitz no nos da cuenta de ella: en el segundo caso siendo nula la separación entre objetos y entre los sucesos, los coexistentes se confunden y no hay espacio, los acontecimientos se vuelven coexistentes y desaparece el tiempo.

Es igualmente imposible con esa teoría dar cuenta de la simetría, de la distinción de derecha á izquierda, etc.

Objeciones varias

Hegel al refutar Kant, dice que el hombre no tiene las nociones de tiempo y de espacio sino porque existen dentro y fuera del pensamiento, manteniéndose como una simple forma ó sea una abstracción de la exterioridad.

El pensamiento determina el espacio y el tiempo extrayéndolo de los objetos y de sí mismo.

En cuanto al argumento basado en que si el espacio y el tiempo tuvieran existencia real deberían manifestarse como sustancias ó atributos, siendo así que no es posible considerarlos ni en una ni en otra forma, parece consistir en un juego de palabras.

Por de pronto observa Freycinet en la Nota primera de su obra ya citada, sería necesario empezar por definir lo que se entiende por sustancia. Si se quiere considerar como sustancia unicamente aquello que tiene peso, masa, y cae bajo la acción inmediata de los sentidos, habría que negar ese nombre á los agentes llamados imponderables trasmisores del calor, luz, electricidad y con mayor razón al que trasmite la fuerza de gravitación; sin embargo la existencia real de estos vehículos se impone.

El espacio tiene existencia objetiva

Además, si consideramos por ejemplo un cuarto, podemos imaginar que todo lo existente dentro de él haya desaparecido y si bien es difícil creer que este vacío puede obtenerse algún día practicamente de una manera rigurosa, es decir eliminando hasta los imponderables recien mencionados, no obstante concebimos intelectualmente su posibilidad. Este espacio así obtenido no es ciertamente una sustancia ni un atributo, al contrario es la negación de ellos, pero no por esto deja de ser algo más que una ficción. Además, como la sustancia implica forzosamente un espacio vacío que ha llenado, no hay mayor razón para tomar una más bien que otra de esas dos entidades como caracterizando la existencia.

El espacio vacío

Russell considera el espacio vacío como puramente conceptual, como nacido de una abstracción inevitable del elemento espacial de la percepción sensible, por lo tanto como un principio de relatividad, como la posibilidad lógica de relaciones entre las cosas, como la condición prévia del orden espacial, único objeto de experiencia inmediata. Ese espacio vacío está con respecto al orden espacial, objeto de la Geometría, en la misma relación que un Estado con los ciudadanos que lo componen, estos últimos suponen que la existencia prévia de aquel. Si pues al decir que el espacio no tiene existencia objetiva queremos unicamente afirmar que no existe vacío sino ocupado por las cosas, naturalmente así entendido, el dicho puede ser aceptable, pero como este espacio vacío es algo presupuesto por todo lo demás su existencia, podemos decir en potencia, es indiscutible. El tiempo podría ser objeto de consideraciones parecidas. Hay en todo esto como vemos y repetimos más juegos de palabras que nitidez de ideas.

Estas y muchas otras discusiones han originado el problema metafísico de la naturaleza y orígen del espacio y del tiempo, me he limitado á historiarlas lo más claramente posible sin abrir opinión, porqué es evidente para mí que todas las discusiones de esta índole deben necesariamente fracasar; en estas cuestiones, como bien lo dice Freycinet, cada uno se guía más bien por inclinaciones personales y por un conjunto de impresiones difíciles de

Imposibilidad de resolver el problema

analizar, que por una demostración formal invulnerable á las objeciones. Pero, creo además, que en todas las investigaciones de metafísica pura, el problema queda resuelto negando la posibilidad de resolverlo, no por deficiencia del espíritu humano sino por su misma naturaleza; así como le sería imposible á un punto situado dentro de una esfera salir de ella sin romper su envoltorio, así le es imposible al espíritu franquear los límites que le han sido asignados.

Es indudable que el espacio y el tiempo son necesarios para toda realidad, pues todo lo real existe en el tiempo y en el espacio, es indudable también que nuestras percepciones se nos aparecen ligadas entre sí por relaciones de tiempo y de espacio, y que podemos abstraer de ellos el conjunto de esas relaciones; también lo es de que esas relaciones así abstraídas se nos presentan como necesarias é indefinidas, pero esto es todo lo que efectivamente sabemos.

Ahora que en nuestro espíritu estas relaciones preexistan á la percepción y se apliquen á ella en virtud de la constitución subjetiva de nuestra sensibilidad ó que resulten de la naturaleza propia de esas percepciones, es lo que á mi parecer será siempre irresoluble por la misma naturaleza de problema, ambas hipótesis podrían aceptarse sin repugnar á la razón, pero no está en nosotros saber cual es absolutamente la buena.

Argumento de Kant referente al espacio y á la geometría

Antes de terminar, conviene observar que uno de los argumentos de Kant, para demostrar que el espacio es únicamente una forma de intuición no existiendo nada análogo en el mundo objetivo, es que si el espacio proviniera de la experiencia, originaría juicios contingentes, sin generalizaciones absolutas, de manera que para que así no sea, es forzoso que tengamos una intuición de el, que sea *á priori* antes de toda percepción de un objeto externo; este argumento á primera vista es poderoso, sin embargo analizando detenidamente se vé que equivale á suponer que todos los seres vivientes tienen la misma intuición del espacio como forma necesaria á la representación de los objetos externos así como que esa intuición continnaría siendo igual para todos los seres futuros escapando estos así, en ese particular, á la ley na-

El argumento no es aceptable en sus fundamentos

tural del cambio perpétuo. Estas observaciones fueron igualmente hechas por Lotze en lo referente al argumento de Kant á saber: que toda teoría del espacio distinta de la suya sería incapaz de dar á la Geometría una certeza absoluta. Lotze hace ver que esta teoría del espacio léjos de dar á la Geometría euclídea un valor universal, la haría depender de una investigación empírica de la naturaleza del espacio tal cual tiene cada individuo la intuición de él.

Aun aceptando que todos los hombres actuales y venideros den siempre la misma forma á sus percepciones externas, aun los teoremas de la Geometría carecerían de certeza realmente universal desde que desaparecerían con aquellos. Luego, dicha certeza no se explicaría por la teoría de Kant sobre el espacio. Insistamos en ese tema que tanto afecta los fundamentos de la Geometría. El fundador de la Epistemología ó Filosofía de las ciencias al estudiar la metafísica del espacio sostenía los dos argumentos siguientes para fundar su teoría idealista: La Geometría es reconocida tener una certeza apodíctica, luego su objeto, el espacio, debe ser *á priori;* por otra parte demuestra independientemente de la Geometría, que el espacio es *á priori,* de donde resulta que aquella debe tener una certeza apodíctica. Ahora bien: Gauss, Lobatchewsky Bolyai, Riemann, Cayley, Klein, Lie, etc., al fundar la Metageometría ó Geometría no euclídea han destruído el primer argumento kantiano, pues no es posible actualmente, después de esos trabajos afirmar por razones puramente geométricas la certeza apodíctica de la Geometría euclídea, en cambio, el otro argumento queda en pié, pues si la Metageometría ha conseguido poner en duda la certeza apodíctica de la Geometría euclídea, tampoco ha llegado en negarla en absoluto: pero B. A. W. Russell en su *Ensayos sobre los fundamentos de la Geometría* demuestra bastante satisfactoriamente que la argumentación filosófica de Kant en su *Estética Trascendente* para probar el orígen *á priori* del espacio, solo alcanza á demostrar que la experiencia del mundo externo necesita forzosamente como condición, no el espacio euclídeo sino alguna forma de exterioridad. Helmhotz esta-

La Metageometría destruye uno de los argumentos de Kant

Russell destruye el otro argumento

blece también que todos los espacios homogéneos son posibles *á priori* y que solo la experiencia puede decidir; entre ellos. En un mundo, dice Russell, donde la percepción nos representa cosas diversas con contenidos distintos y diferenciados, es necesario que haya en la percepción por lo menos un principio de diferenciación, es decir, un elemento en virtud del cual las cosas representadas puedan distinguirse unas de las otras. Este elemento tomado aisladamente y abstraído del contenido que diferencia, puede llamarse una forma de exterioridad. Esta forma siendo un concepto creado por el entendimiento puede ser tratado por las matemáticas puras. La ciencia de la extensión que resulte debe ser asertórica pues es necesaria alguna forma de exterioridad para hacer posible la experiencia. Hace ver Russell que esta forma debe ser relativa y homogénea y en consecuencia que debe tener un número finito de dimensiones y necesariamente más de una para que sirva á la experiencia. Demuestra luego que la Geometría Proyectiva que no se ocupa del grandor sino de la comparación espacial cualitativa la cual implica la homogeneidad, relatividad y pasividad del espacio es aplicable á todos los espacios, siendo en consecuencia completamente *á priori*, y sus axiomas aplicables también á todas esas formas de exterioridad recien creadas por el entendimiento puro.

La Geometría Proyectiva es aplicable á todos los espacios

En cambio, la Geometría métrica contiene además un elemento empírico, cual es la medida; esta, para ser posible, exige tres axiomas fundamentales, á saber: la libre mobilidad en el espacio, un número limitado de dimensiones del mismo y la existencia de la distancia, es decir de una magnitud determinable de una manera única por dos puntos cualesquiera (línea recta).

La Geometría métrica supone además un elemento empírico

Sus axiomas

En el último capítulo de su importante obra, estudia Russell cual es la relación existente entre una forma de exterioridad en general y la experiencia; llega á la consecuencia de que esta forma es el concepto genérico que contiene todas las intuiciones posibles de una exterioridad y que esa intuición es necesaria para la experiencia; comparando esta tésis con la de Kant, observa que es menos psicológica, no se preocupa de saber si el espacio es dado en la sensación; implica únicamente que lo que debe ser dado por la percepción sensible no es precisamente el espacio actual sino una forma de exterioridad que haga posible la experiencia, entendiéndose por exterioridad en este caso, no la tomada con respecto al sujeto pensante, sino la existente entre las cosas representadas tomadas entre sí. Demuestra que todo conocimiento postula el reconocer la identidad en la diferencia, lo que supone el tiempo, y además otra forma que permita conocer la diversidad simultánea; pero esto no implica que las nociones primeras ó categorías sean percepciones sensibles, sino que estas percepciones serían incomprensibles explicadas únicamente por las categorías, si ya no encerraban un elemento especial cuya realización es cuestión de metafísica pura.

Las antinomias espaciales nacen de considerar el espacio vacío

Observa finalmente que las antinomias ó contradicciones inherentes al espacio como ser las definiciones de puntos, rectas y otras, no hacen sino probar que la Geometría debe referirse al espacio lleno de alguna materia y no al espacio vacío como sostenía Kant. La Geometría no tiene que ocuparse de las propiedades causales de la materia; debe considerarla compuesta de átomos inextensos que reemplazan los puntos siendo su objeto el estudio del orden espacial; así desaparecen todas las contradicciones. En cuanto al espacio vacío, se le puede considerar como la simple posibilidad lógica de relaciones entre las cosas, como un principio de relatividad, pero entonces es simplemente conceptual y no objeto de experiencia inmediata. La exterioridad tomada solo en sí, en abstracto de las cosas, no es precisamente una relación, es una faz de la relación pues implica el espacio vacío; en cambio el orden espacial que supone una materia, es una relación real.

Es indudable que estos estudios modernos sobre los fundamentos de la Geometría han contribuido poderosamente á esclarecer las relaciones confusas que ligaban la certeza de esa ciencia con las teorías del espacio tal cual lo dejó establecido Kant.

Las distintas teorías sobre el espacio y el tiempo no afectan á la ciencia matemática que se basa en estas nociones

Al tratar del espacio y del tiempo he querido recordar las principales discusiones originadas por las investigaciones metafísicas sobre su naturaleza, pero es indudable que para la creación y desarrollo de las ciencias físico-matemáticas es indiferente la naturaleza subjetiva ú objetiva así como el orígen de las ideas de espacio y del tiempo, y que pueden llegar aquellas á cualquier grado de progreso sin que les afecte las discusiones metafísicas que pueden originarse sobre esas nociones.

Los fundamentos del estudio del espacio y del tiempo han sido establecidos por los siguientes filósofos:

Bibliografía del espacio y del tiempo

Blas Pascal — De l'esprit geometrique (1623-1662).
Juan Locke — Ensayo sobre el entendimiento humano (1652 á 1704).
Renato Descartes — Principios de la filosofía (parte II artículo 25 tomo X, 1644).
Isaac Newton — Optica (Cuestion 31, 1704).
G. G. Leibnitz — Nuevos ensayos sobre el entendimiento humano (libro II cap. XIII, 1704).
Samuel Clarke — Cartas entre Leibnitz y Clarke - Obras de Leibnitz (tomo II) (1715).
Tomás Reid — Obras completas (1710-1796).
Manuel Kant — Crítica de la razón pura (1.ª parte) — Estética trascendental (1724-1804).
Lotze Hermann — Metaphysik, libro II cap. II, Psycología (1852); trad. Peujon (1881).
Jorge G. F. Hegel — Lógica (tomo III libro I, sección 2.ª cap. II, 1770-1831).
Victor Cousin — Curso de historia de la filosofía moral en el siglo XVIII durante el año 1820 (3.ª parte). — Curso de historia de la filosofía en el siglo XVIII (II vol., lección 17.).
Nicolás Ivanovitch Lobatchewsky, (1793-1856) — Nuevos principios de geometría (Memoria de la Universidad de Kasan y Correo de Kasan, 1826, 1829, 1836, 1838); Geometría imaginaria (Journal de Crelle, 1837); Estudios geométricos sobre la teoría de las paralelas (Berlin 1840); Pangeometría (Kasan 1855).
Juan Bolyai — Appendix scientiam spatii absolute verum exhibens (Maros Vasazhely, 1832) — Obras traducidas por Frischauf, Halstad, Houel (Lepzig 1872, Texas 1896, París 1896).
B. Riemann — Ueber der Hypothesen welche der Geometrie zu grunde liegen (Academia de Göllingen, 1867).
A. Cayley — Sixth memoir upon quanties (1859).
Felix Klein — Nicht Euclid (tomo I cap. I, II, 1871).
Sophus Lie — Ueber die Grundlagen der Geometrie (Leipziger Berichte, 1890).

H. Helmholtz — Hechos fundamentales de la Geometría (Heidelberg 1868).
Th. Ribot — La fisiología alemana contemporánea (1879).
G. M. Wund — Fisiología psicológica (1874).
L. M. C. Duhamel — Les methodes dans les sciences de raisonnement (Gauthier Villars, París 1885-96, t. I y II).
Georges Lechalas — Obras varias (1889-96). L'espace et le temps, (1895 Felix Alcan).
P. Mansion — Revista neo-escolástica (mayo y agosto 1896, París, Gauthier Villars).
H. Poincarré — El espacio y la geometría. Revista de matemáticas y moral (Noviembre 1895).
M. Guyau — Genèse de l'idée de temps (T. Alcan).
C. de Freycinet — Essai sur la phylosophie des sciences, cap. 1 (Gauthier Villars, París 1900).
Beltran S. W. Russell — Ensayo sobre los fundamentos de la Geometría, traducción al francés de A. Cadenat (Gauthier Villars 1901).
C. Renouvrier — Dilemas de metafísica pura. Historia y solución de los problemas metafísicos (Félix Alcan, París 1901).

Fragmentos de Roger Collard (tomo III fragmento 4; tomo IV fragmento 9). — Enciclopedía de las ciencias filosóficas (núm. 254-271, 2.ª edición) etc., etc.

CAPÍTULO SEGUNDO

Los grandores ó cantidades matemáticas

Despues de los vastísimos conceptos del espacio y del tiempo soberanos del pensamiento, tienen capital importancia para las ciencias físico-matemáticas el de grandor ó cantidad matemática. En general, llamamos grandor á todo lo susceptible de aumentar y disminuir, pero grandor matemático es un grandor muy particular cuyo concepto es adquirido mediante el siguiente proceso mental: Nuestros sentidos nos hacen conocer la existencia de objetos externos; uno de estos objetos tomado solo puede bastar según vimos para despertar ó producir en nuestro espíritu la idea de existencia y de forma; en cambio varios objetos simultáneos nos sugieren la idea de pluralidad ó de número de objetos; al principio estas nociones de forma extensión y pluralidad nos aparecen ligadas intimamente con los objetos que las han originado, pero poco á poco el espíritu, gracias á su facultad de abstraer, los desliga de los mismos y los considera independientemente de la naturaleza y de la diversidad específica de los objetos en cuestión. De allí resulta que el concepto del número de objetos viene á ser el resíduo que queda en nuestra conciencia cuando todo lo que distingue dichos objetos entre si ha desaparecido; indica cuantas impresiones distintas ha recibido aquella. Por eso la adquisición de este concepto será tanto más fácil cuanto más parecidos sean los objetos que deban originarlo en razón de que se necesitará menos trabajo mental para borrar las impresiones diferenciales. Una vez formado el concepto, queda este fijado en nuestras representaciones y en nuestros

Orígen del concepto de grandor matemático

El concepto de número de objetos

recuerdos con la palabra ó signo que se emplea para designarlo. Puede observarse que este concepto es uno de los que mas facilmente se ha desligado de las representaciones reales originarias en razón de que apenas si podemos mentalmente representarnos más de cinco á siete objetos simultáneos, variando este número según la diferencia de forma, colocación y distribución relativa de los mismos en el momento de la representación. Así puede afirmarse que pasando de ese número de objetos, solo se tiene la representación inmediata de una mayor ó menor pluralidad, pero no de un número determinado de ellos, para conocer este número sería necesario una enumeración prévia, y esta, cuando dicho número pase de diez, doce ó veinte que son los números de dedos de la mano, de las falanges triples en cada mano y de los dedos simultáneos de las manos y del pié requerirá á su vez un sistema de numeración, iniciándose así la faz científica del concepto.

Las ciencias de los números

El conjunto de propiedades y de relaciones que se deduzcan ó dependan del concepto de número, constituye la ciencia del mismo, empezando como se vé por la numeración cuyo orígen recién indicamos, siguiente por la Aritmética y terminando con la Teoría de los Números.

Cantidades contínuas y discontínuas

Según dijimos, el concepto del número de objetos viene á ser el resíduo de la percepción de varios objetos, quedando en nuestra conciencia cuando todos los caracteres distintos han desaparecido; pero cabe distinguir, ahora dos clases de objetos: aquellos de tal naturaleza que no admiten división en partes sin destruir su entidad. es decir sin dejar de responder á su definición, y otros que se prestan á esa división continuando después de divididos á satisfacer á la definición primitiva. Un conjunto de objetos de la primera clase solo puede aumentar por el agregado de uno ó varios objetos más que satisfagan á la definición general de los individuos del conjunto, pero no con porciones de dicho objeto, puesto que estas porciones no satisfacen ya á esta definición general. Igualmente la disminución del conjunto solo podrá realizarse quitando uno ó más individuos pero no sustrayendo porciones de estos, pues la porción restante no poseería los caracteres que son necesarios á su objeto para que pueda pertenecer al conjunto en cuestión.

El conjunto total podrá considerarse como formado por el agregado de sus componentes ó *unidades* como se llaman, pero el grandor de estos siendo fijo por su naturaleza no puede disminuirse.

No sucede lo mismo con los conjuntos de elementos de la segunda clase, como estos elementos pueden aumentar ó disminuir en cantidades tan pequeñas como se quiera, pueden aquellos considerarse como formados no solamente por la agregación de los elementos dados, sino también por la de otros más ó menos pequeños á voluntad, variando únicamente el número de ellos.

Especialidad de los grandores contínuos

Es evidente que los objetos de estos conjuntos pueden ordenarse en serie y combinarse de varias maneras, é igualmente entre ellos y los de otros conjuntos análogos pueden establecerse relaciones determinadas ya de correspondencia ú otras; ahora bien, todos los conjuntos de esta naturaleza, es decir satisfaciendo á las condiciones siguientes: 1ª Cada objeto, elemento ó representación [1] aislada de ese conjunto está suficientemente derminado por sí mismo. 2º Los grandores del conjunto, tanto entre sí, como con respecto á los de otro conjunto igualmente ordenado, guardan relaciones que pueden combinarse y originar nuevas relaciones estos conjuntos ó series decimos, son llamados grandores ó cantidades matemáticas.

Definición de grandor matemático

Un conjunto ó serie de esta clase quedará determinado cuando se nos dé el número de individuos que lo componen y la naturaleza y definición general de estos; si el conjunto pertenece á la primera categoría señalada no hay dificultad ni observación que hacer, pero si corresponde en vez á la segunda categoría, como los individuos pueden variar en grandor de una manera contínua es preciso eligir uno llamado *unidad* [2] é indicar entonces el

El concepto de unidad

(1) Entendemos por representación, de acuerdo con Du Bois Raymond, á quien tomamos también esta definición de grandor ó cantidad matemática, toda apercepción que pueda ser motivo de recuerdo, así como todo recuerdo que por el trabajo mental se ofrece á la conciencia, y en la forma tal cual se presente en el instante en que la memoria lo recibe.

(2) Se vé pues el carácter arbitrario de este caso de la unidad de medida á diferencia de la unidad en las cantidades discontínuas que está de antemano fijada, ella ó sus múltiples.

número de estas unidades existentes en el total. Los grandores matemáticos de la primera especie se llaman discontínuos, numéricos ó discretos, los otros son llamados contínuos ó discretos.

En los discontínuos sucede que la imposibilidad de modificar las magnitudes del individuo-unidad los hace depender únicamente del concepto de *número de objetos*, el cual, por esta razón, ha quedado simbolizando las cantidades discontínuas; en cambio, pudiendose en los conjuntos contínuos, variar el grandor del individuo-unidad, se dá motivo á un estudio especial de esa variación y se origina el concepto de continuidad, base del Análisis. Como se vé, la Teoría de los Números tiene una entidad completamente distinta del Análisis y es permitido suponer que si bien ambos ramos de las matemáticas puras tienen sus puntos de contacto constituyen en realidad ciencias completamente diversas.

Diferencias fundamentales entre el análisis y la teoría de los números

Las cantidades contínuas suministran á la Teoría de los números un elemento importante: el número fraccionario; pues cuando se quiere comparar dos magnitudes de esta especie ó establecer con precisión la variación de las mismas, forzoso es, según vimos, fijar una unidad, es decir una cantidad determinada entre las de su clase que sirve para medirlas por comparación con ella; pero los hechos más elementales de la vida y el desarrollo ulterior de la ciencia de la medida han obligado á efectuar la división indefinida de la unidad cuando esta es demasiado grande para la apreciación que se busca; las partes obtenidas por la división de la unidad podrían considerarse y llamarse nuevamente unidad y así entendida no se habría introducido variación en el fondo de la cuestión, pero si se quiere conservar el carácter y nombre de unidad á la primitiva que se dividió, las partes de estas se llaman fracciones de la misma y se expresan con un *número fraccionario* el cual por su orígen pertenece como se vé enteramente al concepto del número de objetos y acompañan á los números enteros en todos los estudios que estos originan; pero, aquellos suponen una relatividad y estos no.

Concepto de número fraccionario

Las magnitudes matemáticas discontínuas no admitiendo subdivisión de grandor en los individuos componentes, no se prestan tampoco á especulaciones sobre la naturaleza de estos, en cambio las contínuas originan importantes observaciones al respecto. En general, cuando se habla de cantidades contínuas matemáticas, la primera representación que nos hacemos de ellas es la de una línea recta de longitud determinada, entendiéndose aquí por línea recta la imágen invariable que nos dá un hilo tendido, una arista viva ó un rayo luminoso; estas imagenes engendran un concepto que á diferencia del de número de objetos, está intimamente ligado con las representaciones originarias, y como estas son tan simples, tan comunes y familiares, producen en nuestro espíritu enemigo de lo complicado una quietud benéfica; de allí nuestra tendencia en tratar de hacer depender, en lo posible, la apreciación de las cantidades matemáticas contínuas de la de una longitud.

La longitud como tipo más simple de grandor matemático contínuo

Las que se prestan á esa operación son llamadas cantidades matemáticas lineales; no es necesario para que merezcan este nombre la correspondencia con la línea recta en toda su extensión; muchas cantidades solo existen dentro de ciertos límites y basta en esos casos para que sean lineales que dentro de los límites en que existan puedan corresponder á una porción determinada de recta; cuando así sucede estas cantidades á excepción de la extensión poseen las propiedades de los grandores lineales propiamente dichos.

Cantidades matemáticas lineales

Un primer ejemplo de cantidades matemáticas lineales lo tenemos en el área de una superficie plana; por de pronto si esta superficie está igualmente coloreada é iluminada ofrecerá á nuestra vista el mismo aspecto de uniformidad que la línea recta; si ahora introducimos el concepto de área ó sea de la posibilidad de subdividir la superficie limitada en porciones de forma cualquiera, de rectángulos por ejemplo de igual base y transportables de manera á que se acumulen en el sentido del largo formando un nuevo rectángulo de base igual á la común á todos ellos, es evidente que la apreciación del área dependerá de la de una longitud. Lo mismo con los volúmenes.

Hemos visto en el capítulo anterior que el tiempo se derarrolla en serie lineal, y su apreciación depende de una longitud, puede en consecuencia considerarse en ese sentido como cantidad matemática lineal.

Particularidad de las cantidades lineales

Lo mismo sucede con muchos otros grandores matemáticos contínuos, por ejemplo, el peso, el grado de calor, la resistencia mecánica etc. de los cuerpos. Poseyendo los mismos caracteres que las longitudes á los fines de la apreciación, se vé que estas clases de magnitudes son tales que sus variaciones se hacen por aumento ó disminución de cantidades de la misma especie, por ende la diferencia entre dos de sus valores aparece también como otra cantidad de igual especie lo mismo que las longitudes. Todas las cantidades matemáticas graduadas según la intensidad satisfaciendo á las condiciones recien indicadas, son necesariamente lineales. En cambio algunas cantidades como ser el timbre de la voz, el número de combinaciones susceptibles de producirse en los juegos en que el azar desempeñe algún rol etc., no son evidentemente lineales.

Es interesante conocer que esfera abarcan las cantidades matemáticas en los diversos dominios del pensamiento.

Paul du Bois Raymond en su notable obra *Allgemeine functionentheorie* la cual nos ha suministrado algunos importantes datos en lo que ya llevamos escrito en este capítulo, ha efectuado un prolijo estudio sobre este particular y sus resultados merecen ser brevemente recordados.

Las cantidades del mundo exterior son lineales

Empezando por las cantidades del mundo exterior, observa que las causas primeras llamadas fuerzas, producen efectos percibidos por nuestro espíritu mediante los sentidos. Esos efectos consisten en movimientos, tensiones etc., todos de naturaleza lineal. El principio de razón pura: *todo efecto tiene una causa,* en virtud del cual, de estos fenómenos de tensión, movimiento etc. inferimos la existencia de fuerzas productoras, no nos permitiendo saber nada más sobre estas, nos obliga á creer que los fenómenos citados son sus efectos completos y como son cantidades lineales forzoso nos será considerar igualmente como cantidades lineales las fuerzas productoras en cuestión.

Todo nos hace suponer que los grandores del mundo externo manifestándose siempre con variaciones graduadas en intensidad ó en extensión deben poder reducirse á un grandor lineal, en el supuesto sin embargo de que sean susceptibles de una definición precisa.

Las cantidades del mundo interno no siempre son matemáticas pero cuando lo son, son lineales

Entre las cantidades del mundo interno tenemos en primer lugar, las sensaciones graduadas según la intensidad, si estas pueden considerarse como grandores matemáticos son necesariamente lineales según vimos más arriba. Sumando varias exitaciones de la misma especie á cada una de la cual le corresponde una sensación determinada, la excitación total originará una sensación única que puede considerarse como sumas de las primeras. Toda la cuestión está en determinar si estamos en presencia ó no de cantidades matemáticas. Tratándose de las sensaciones del olfato y del gusto se puede contestar negativamente, pues estas sensaciones debido á causas perturbadoras difíciles de explicar y aislar, á su corta duración, á la influencia de la fatiga y á la falta de observaciones metódicas de sí mismo presentan inestabilidades y anomalías (por ejemplo, —ofrecer intensidades diversas para igual excitación) que le quitan el carácter necesario á un grandor matemático tal cual lo hemos más arriba definido.

Es posible, sin embargo, que la paciente investigación científica consiga aislar las causas perturbadoras y dar fijeza á las observaciones; de todas maneras es indudable que en el órgano central debe existir un estado determitado correspondiente de una manera precisa á la excitación externa. Las sensaciones graduadas en intensidad correspondientes á la vista y oído, son en cambio, más abordables á la observación; son más fijas y estables. Podemos considerar como probable la posibilidad de llegar un día á suscitar intensidades de sensaciones especiales que correspondan á cantidades iguales de excitaciones y que nos parezcan también absolutamente iguales.

La psicofísica

Cuando esto suceda quedará establecido el carácter de grandores matemáticos lineales para esa clase de sensaciones. El problema que ordinariamente se presenta en la vida es estimar la excitación por la sensación, pero Fechner el inventor de la psicofísica se ha propuesto lo contrario habiendo llegado á su conocida ley logarítmica la cual á pesar de las varias hipótesis que implica parece haber sido confirmada por Bernstein. [1]

Cantidades no lineales

Las sensaciones no graduadas en intensidad, como ser, la altura del sonido, el color de los cuerpos y el timbre del sonido no son grandores matemáticos lineales psicológicamente hablando, pues la diferencia entre dos alturas ó dos timbres de sonido, ó entre dos colores no son grandores de igual especie sino algo indeterminado. Pero considerando físicamente la altura del sonido ó el color de los cuerpos como vibraciones del aire ó del éter, son ciertamente magnitudes lineales. En cuanto al timbre no obstante algunos trabajos modernos tendente á explicarlos físicamente y darle en consecuencia el carácter lineal, por ahora carece de él.

Los deseos, las voliciones y otras disposiciones del espíritu, si fueran susceptibles de considerarse como cantidades matemáticas, serían ciertamente lineales, así la alegría, la tristeza, la desesperación, etc. puede aumentar por grados, mediante causas que separadas darían una tristeza, ó alegría parcial, y se puede concebir por ende una tristeza doble, un dolor doble etc., pero esta clase de grandores no responden á la definición dada para las cantidades matemáticas.

Cantidades analíticas no lineales

En las ciencias matemáticas puras se crean á veces cantidades que podemos llamar analíticas, tales que no guardan relación alguna con el mundo de la percepción por ejemplo, las designadas con el nombre de imaginarias, precedentes de la aplicación de las operaciones matemáticas en los casos en que ya no son válidas ó las que se han formado por la aplicación indebida de ciertas analogías.

Es ya discutible si pueden llamarse cantidades á estas creaciones, sinembargo se les aplica ese nombre por qué se prestan á algunas combinaciones análogas á las cantidades reales, pero como las nociones de mayor y menor han perdido su significado ordinario, las cantidades en cuestión no pueden considerarse, en consecuencia, como lineales.

(1) En realidad la tentativa de Fechner para hacer de la psicofísica una ciencia exacta ha fracasado (Véase M. Foucault; La Psichophysique).

Finalmente en algunos juegos sabios como el ajedrez, barajas y otros, aparecen combinaciones análogas á las que se encuentran en las operaciones del álgebra, solo que á la parte matemática de la cuestión se unen los errores del pensamiento y el azar. Las cantidades que aparecen en ellas y que podemos llamar *cantidades de juego* no guardan pues relación alguna con la realidad, además consideradas únicamente bajo el punto de vista matemático presentarían un campo muy restringido á las combinaciones las cuales serían á veces complicadísimas y el resultado de su investigación no compensaría el trabajo que exigiría.

Cantidades de juego no lineales

No se trata pues de cantidades matemáticas lineales.

Aquí termina du Bois Raymond su revista de las distintas especies de cantidades del mundo de la percepción y llega á la consecuencia que debe estudiarse con todo rigor posible el concepto de grandor matemático lineal ó sea de aquellas cantidades tales que siendo sus diferencias y múltiplos cantidades de la misma especie, aceptan una medida y pueden finalmente comprenderse como longitudes. La inteligencia de este concepto es de una necesidad *sine-cua-non* para llegar á la de los demás del análisis, particularmente del de límite, motivo del capítulo siguiente.

Desarrollo progresivo de la idea de cantidad matemática

Antes de terminar con el concepto de grandor matemático, creo conveniente indicar brevemente el desarrollo progresivo de la idea de cantidad en las ciencias exactas. Empezando por las cantidades discontínuas recordaremos que las especulaciones hechas con ellas versan únicamente sobre el número que indica cuantos individuos la componen, así que, reconocidas ciertas propiedades combinatorias de estas cantidades, la combinación queda ejecutada efectuandola únicamente sobre los números en cuestión tomados en abstracto, y eso con una certeza absoluta. Es decir que á los efectos combinatorios reemplazaremos las cantidades por los números, pudiendo en cualquier momento volver á las cantidades correspondientes acompañando al número la idea del objeto á que se refiere. En algunos casos, tales como aquellos en que junto con las cantidades interviene separadamente el concepto de número de objetos, pueden suceder confusiones de interpretación que es necesario evitar con mucho cuidado.

Las propiedades combinatorias recién mencionadas se **Suma y Resta** deducen de las siguientes observaciones: Dadas varias cantidades discontínuas de igual individuo-tipo, se concibe facilmente que se pueda reunirlos en una sola, formando así una nueva cantidad de la misma especie; esta operación se llama *adición*. Cuando las cantidades á sumar son todas de igual número de individuos puede considerarse **Multiplicación** cada una de ellas como un nuevo individuo llamado *multiplicando*, y entonces la suma, llamada *producto* en este caso, viene á depender del número de esos nuevos individuos; este número se llama *multiplicador*, y la operación especial que dá orígen: *multiplicación*. Un raciocinio sencillo hace ver que si se tomara como multiplicando un número de objetos igual al que indica el primitivo multiplicador y como multiplicador nuevo, un número igual al de unidades existentes en el primitivo multiplicando, el producto no alteraría.

Esto se expresa diciendo que la multiplicación es conmutativa [1].

Se concibe facilmente que el producto del multiplicando por el multiplicador es una cantidad que puede ser tomada como un nuevo multiplicando lo que permite á su vez repetirlo varias veces como sumando y originar una nueva multiplicación, ahora bien, si en estas multiplicaciones sucesivas el número de objetos del multiplicando primitivo fuera igual al número de veces que debe sumarse, es decir al multiplicador, conservándose además este igual en todas esas multiplicaciones sucesivas, la ope- **Potencias** ración nueva que se origina así se llama *elevación á potencias*, el primitivo multiplicando se llama *base* el número que indica cuantas multiplicaciones se han realizado se llama *exponente*, el resultado *potencia*.

Operaciones inversas Combinadas las cantidades por medio de las operaciones fundamentales en cuestión, se nos ocurre, en virtud de una tendencia natural, invertir el orden y buscar: ya sea un sumando tal que junto con otro conocido dé un

---

(1) Una operación se llama en general conmutativa cuando el resultado que se obtiene con ella no se altera invirtiendo el orden en que se encuentran ligados los objetos que combina. Grassmann usa el símbolo $\frown$ para indicar el resultado de la combinación, luego una operación será conmutativa si $a \frown b \quad b \frown a$: como se vé la adición es también conmutativa.

total igualmente conocido, ya sea un factor del producto conociendo este y el otro factor, ya sea la base ó el exponente de una potencia conociendo esta y el exponente ó la base respectivamente.

La operación que corresponde á la primera investigación se llama *resta ó sustracción*, la segunda *división* la tercera *extracción de raíces*, la cuarta *cálculo de logarítmos*.

Casos de imposibilidad de las operaciones inversas

Solo que mientras la suma, multiplicación y elevación á potencias eran siempre posibles, no sucede lo mismo con estas nuevas. La sustracción por ejemplo no será posible y no dará en consecuencia resultado (*resíduo*) cuando la suma dada (*minuendo*) sea menor que el sumando conocido (*sustraendo*). La división será imposible si el producto dado (*dividendo*) no puede obtenerse multiplicando el factor dado (*divisor*) por ningún número (*cuociente*).

La extracción de raíces no dará la base buscada (*raíz*) cuando la cantidad conocida (*subradical*) no sea potencia de otra.

Finalmente la última operación fallará si no existe un número tal que al repetir la base dada, tantas veces como factor como unidades tiene aquél, reproduzca la potencia conocida.

Cuando estos impedimentos suceden las operaciones inversas carecen de sentido.

Pasemos ahora á las cantidades contínuas.

Posibilidad de las operaciones inversas en las cantidades contínuas

Es evidente que una vez elegida la unidad de medida todo lo anteriormente dicho para las cantidades discontínuas se aplica igualmente á estas, pero ahora se hacen posibles algunas de las operaciones inversas gracias á la introducción del concepto de número fraccionario obtenido como dijimos más arriba, por la partición de la unidad de medida. La división por ejemplo, será siempre realizable dividiendo la unidad en tantas partes como indica el divisor y considerando cada una de estas partes como una nueva unidad.

Como estos números fraccionarios comprenden á cantidades reales (pues su carácter de fracción es solo relativo á la elección arbitraria de la primitiva unidad de medida) son susceptibles de combinarse de la misma manera los enteros, es decir, siguiendo las operaciones directas é inversas; pero cuando esta clase de números figura en un multiplicador, forzoso es darle alguna interpretación especial, por cuanto indicando el multiplicador cuantas veces debe el multiplicando tomarse como sumando, solo se aviene aquél con el concepto abstracto de número entero, la interpretación que debe darse á un multiplicador fraccionario para que sea posible la permanencia de las reglas del cálculo y se conserve la conmutatividad y la teoría de la multiplicación, es que el multiplicando tomado como indivíduo unidad debe dividirse en tantas partes como indica el denominador del multiplicador y luego el resultado multiplicarse por el numerador. La introducción de estos números en la división, una vez interpretada de esa manera la multiplicación, no origina dificultad alguna y esa operación es siempre posible.

Interpretación de un multiplicador fraccionario

Interpretación de la irracionalidad

La extracción de raíces se hace también susceptible de una interpretación en todos los casos gracias á la intervención de los números fraccionarios, es decir de la posibilidad de dividir la unidad de medida. Supongamos, por ejemplo, que se trata de extraer la raíz n de una cantidad a, ó sea encontrar $\sqrt[n]{a}$, y que no haya ningun número entero ni fraccionario que lo satisfaga; el caso más sensible sería: $\sqrt{2}$; se observará entonces que la totalidad de los números racionales, es decir enteros y fraccionarios, pueden dividirse en dos grupos, en uno de ellos estarán los que elevados á la potencia n den una cantidad menor que a, en el otro los que den una mayor que a; se demuestra [1] que en el primer grupo, á la vez que todos sus individuos son más pequeños que cualquiera del segundo, no hay ninguno de ellos que sea especialmente mayor que los demás del mismo, é igualmente en el segundo grupo, todos sus números son mayores que los del primero pero ninguno es especialmente menor que los demás de aquel. Estos dos grupos definen el número llamado irracional $\sqrt[n]{a}$, el primer grupo se llama clase inferior relativa á $\sqrt[n]{a}$, el otro clase superior, y bastan para darle

(1) Véase Jules Tannery. Introduction á la Teorie des fonctions d'une variable. A. Hermann. Paris 1886. Cap. 1º.

un significado permitiendo efectuar el análisis combinatorio del mismo, así como para atribuirle comparativamente á otro la noción de mayor, igual ó menor. No obstante, en todo esto está habilmente disimulado el concepto de límite matemático que es una noción nueva y un grado más elevado del concepto de cantidad.

Lo mismo sucede con la otra operación inversa de la elevación á potencias, es decir la investigación del exponente á que debe elevarse una base para obtener una cantidad determinada, equivale en fórmulas á la expresión $a^x = b$; aquí lo mismo que en la multiplicación, el exponente indica un número en abstracto de objetos y por lo tanto no se aviene con el concepto de número fraccionario; pero si convenimos en interpretar un exponente fraccionario como indicando que la base afectada por él debe elevarse á la potencia indicada por el numerador y luego extraerse la raíz, de índice igual al denominador, del resultado, el problema pedido se hace ahora posible, pues estas dos operaciones combinadas permiten como se podría facilmente demostrarse, hacer variar la cantidad resultante de cantidades tan poco diferente como se quería con solo hacer variar x de muy poco; de manera que, ó encontramos para x un número racional que satisfaga á la cuestión, ó bien podemos formar dos series de números de esta clase definiendo otro irracional de la manera recien indicada, el cual satisface también á la cuestión; solo que las ideas se vuelven cada vez menos nítidas á medida que el efecto perturbador del concepto de límite se hace más notable.

Interpretación de un exponente fraccionario

Nos queda solamente la interpretación de la sustración cuando el sustrayendo es mayor que el minuendo; tomando la cuestión así en absoluto es claro que una operación de esta clase no tiene sentido, pero si á la idea de cantidad le hacemos acompañar también la de dirección ó sentido, la interpretación se hace posible. Tomemos el ejemplo clásico dado por Argand (1806). Si a representa un peso material tal como el *gramo*, la serie de cantidades : $4a$, $3a$, $2a$, a, o, no puede continuarse mas allá, pues si bien puede quitarse un gramo de 3, de 2, ó de 1 gramo, no se puede quitar 1 de o. Así que los términos

Cantidades negativas

que seguirían al o no pueden tener existencia sino en la imaginación, y pueden en consecuencia llamarse *imaginarios*, pero si a representa un cierto grado de pesantez obrando sobre el platillo derecho de una balanza conteniendo pesas en ambos, como es igualmente posible disminuir a, ya sea quitando pesas del platillo derecho, ya aumentando las del izquierdo, la serie en cuestión puede prolongarse más allá del o, solo que las nuevas cantidades en vez de actuar á la derecha actuen á la izquierda y el signo que viene á afectarlas $(-a, -2a, -3a, -4a, \ldots\ldots)$ es simplemente un signo de dirección. Con esta interpretación, una sustracción en la que el minuendo sea menor que el sustraendo significaría que se ha quitado de dicho minuendo una cantidad igual á él, quedando o, y lo que aún faltaría quitar, que sería el resíduo pedido, actuaría en sentido inverso al que actuaba el minuendo. Esta interpretación empero supone que la naturaleza de la cuestión admita esa distinción de dirección, de lo contrario sería realmente imposible y absurda la operación. Los números negativos, cuyo orígen acabamos de ver, corresponden pues á cantidades reales pero dirijidas en sentido inverso á las positivas, por eso pueden combinarse mediante las mismas operaciones que estas últimas, solo que como la noción de dirección es completamente ajena á la de número de objetos, estas cantidades negativas deben necesariamente excluirse de los multiplicadores, exponentes é índices.

Interpretación de estas cantidades

Principio de Hankel

Si no obstante se quiere extender á ellos la nueva noción de números negativos aplicando lo que llama Hankel: *Principio de permanencia de leyes formales*, [1] debemos necesariamente caer en el convencionalismo y dar orígen á cantidades imaginarias, á las que hemos llamado más arriba analíticas, procedentes como se vé de la aplicación de operaciones algebraicas en casos en que ya no son válidas ó en que carecen de sentido. Argand,

(1) Du Bois Raymond observa, con razón, que es ya bastante arriesgado hacer un principio de algo que da, es cierto, resultados aceptables; pero por casualidad, sin haberse aún profundizado la naturaleza de cuestión, y cita el caso de la ley formal $\frac{d}{dx}\sum_{1}^{\infty} u_p = \sum_{1}^{\infty} \frac{d}{dx} u_p$ que es válida en muchos casos y en otros nó.

Français, Gergonne, Servois, Georges, Evrard, Hamilton, Bellavitis, Grassmann asociando á la idea de cantidad la de dirección —esta última no solo en dos sentidos opuestos como lo hemos realizado con las cantidades negativas, sino al rededor de un punto, afectándola de un símbolo de dirección han aprovechado el convencionalismo y las comodidades de interpretación á que por su orígen se prestan las cantidades imaginarias creadas por la aplicación del principio de Hankel, para tomar la reunión de símbolo que así se obtiene como característica de las distintas direcciones, y según la manera como han encarado la cuestión, así como según el grado de generalidad y del número y clases especiales de hipótesis que han suscitado, han dado orígen á las diversas teorías matemáticas llamadas:

Consecuencias del principio de Hankel

Teoría de las cantidades imaginarias (Argand).
Teoría de las acepciones (Georges, Evrard).
Cálculo de las equipolencias (Bellavitis).
Cálculo de los cuaterniones (Hamilton).
Teoría de las cantidades extensivas (Grassmann), etc., etc.

El tema tratado en este capítulo ha sido especialmente estudiado por los siguientes autores:

Bibliografía

R. Argand (1806) -Essai sur une maniére de representer les quantités imaginaires dans les constructions geometriques avec un appendice tiré des Annales de Gergonne et contenant les travaux analogues de J. F. Français, Servois, Gergonne (Gauthier-Villars, París, 1874).
G. Bellavitis Saggio di applicazioni di un nuovo metoto di geometria analitica (Padova 1835).
H. Grassmann- Ausdehnungslehre (Leipzig 1844).
W. R. Hamilton- Lectures on Quaternions (Dublin 1853).
H. Hankel –Theorie der complexen Zahlensystems. Vorlesungen über die complexen Zahlen und ihre functionem, etc. (Leipzig 1867).
J. Hoüel—Considerations elementaires sur la generalisation succesive de l'idée de quantité dans l'analyse mathematique (1883). Cours de cálcul infinitesimal, Tome 1er (Gauthier-Villars, Paris 1878).

J. M. C. Duhamel—Des methodes dans les sciences de raisonnements (Gauthier, Villars, Paris 1885).

Jules Tannery—Introduction á la Theorie des fonctions d'une variable (Hermann, Paris 1886) Cap. 1°.

Paul du Bois Raymond—Theorie generale des fonctions traduction de Milhaud & Girot. (Paris 1887, Hermann, Nice. Imprimerie niçoise).

J. Evrard—Theorie des acceptions (Baudry 1891 Paris)—etc., etc.

CAPÍTULO TERCERO

El límite matemático

§ I. El infinito

Orígen de la noción

La noción del infinito brota de la del espacio, pues cuando tratamos de representarnos mentalmente á este, nuestro espíritu vé sin cesar agrandarse más allá el campo abierto á sus esfuerzos perdiéndose finalmente en una vaguedad flotante, en una nebulosa insalvable dentro de la cual concluye por caer en un cansancio desconsolador debiendo convencerse por último de su impotencia; el resíduo de esta operación es la noción de lo infinito, y como se vé, este último término solo indica en realidad la incapacidad de nuestra mente para representarse aquello á que se aplica, debido á que sus límites reculan incesantemente.

Es un símbolo de indeterminación

Ésta noción, en resúmen, equivale á asociar á la idea de algo la de carencia de límite entendiendo aquí esta última palabra en el sentido usual; como lo que no tiene límite es indeterminado, no debemos ver en esta noción sino un símbolo de indeterminación, de allí las paradojas que puede ocasionar si se le quiere tomar en otro sentido. [1] Pero el hombre en su afán de idealizar y de querer ir más allá de lo que le es dado saber, llega á veces á creer en la realidad de sus ideales, es decir en la existencia objetiva de sus ideas aun cuando estas pasan los límites normales del pensamiento.

El infinito tomado en serio como existiendo objetivamente

Así, suponiendo el espacio descompuesto en porciones limitadas, llega aquél á preguntarse cuantas de

(1) Véase capítulo penúltimo: *Las paradojas del infinito*.

estas porciones hay en el espacio total *independientemente de la existencia de seres que piensan y cuentan;* planteada así la cuestión, no puede evidentemente contestarse diciendo como lo haría cualquiera: este número es ilimitado — por cuanto esta respuesta implica la existencia de un individuo que cuenta y nunca concluye de hacerlo, ya sea porqué esta operación no tiene término, ya porqué si lo tiene nunca puede alcanzarse—sin embargo no podemos tampoco contestar de otra manera, dada nuestra incapacidad de representarnos el espacio absoluto. Existe empero una escuela llamada idealista, que cree poder salir del paso mediante el raciocinio siguiente: Lo ilimitado en grandor es aquello que no puede ser alcanzado con multiplos de una medida fija por grande que esta sea, pues nos la figuramos aumentando incesantemente, ahora bien, si lo consideramos en sí, independientemente de la representación exigida por nuestra mente, entonces lo ilimitado nos sugiere la *noción de algo* que no podemos representarnos pero cuya existencia objetiva no podemos negar y que se caracteriza por ser superior á cualquier cantidad representable. Este algo es el *Infinito.* La contestación á la pregunta anteriormente propuesta es entonces lo siguiente: En la representación el número en cuestión es ilimitado, luego en la realidad es *infinito.*

Escuela idealista

Esta doctrina en resumen pretende salvar la imposibilidad de nuestra mente para comprender aquello que por su esencia le está vedado, dándole, primero un nombre y luego llevando la ilusión hasta creer que existe realmente algo que corresponde á este nombre.

La escuela empirista no acepta una especulación con el infinito el cual tampoco acepta

Este fantasma no es, en cambio, aceptado por el empirista, pues este juzga prudentemente que nada nos autoriza á creer en la realidad de lo que escapa á nuestras representaciones—ya sensibles, ya intelectuales—y en consecuencia cree que debemos contentarnos, por lo menos en la especulación matemática, con lo ilimitado de grandor, es decir, con lo finito susceptible de aumentar ó disminuir á voluntad, pues es el único concepto de esta especie que nos es dado conocer y comprender.

Hemos visto en el capítulo anterior, que las cantidades llamadas discontínuas no se prestan á especulaciones en lo referente á la naturaleza del individuo-unidad por ser este indivisible, pero no sucede así con las cantidades contínuas, la pesibilidad de subdividir en ellas á voluntad la unidad de medida origina otra vez la noción del infinito pero en otra forma más interesante. El espacio y el tiempo son los tipos per excelencia de cantidades contínuas, uno y otro se nos aparece como homogéneas y si bien carecen rigurosamente de partes, para que podamos apreciarlos y determinarlos es necesario concebirlos como divididos en porciones, unidades de medida. Estas porciones son á su vez susceptibles de subdividirse en otras y así sucesivamente sin nunca terminar, exactamente como cuando queríamos contar el número de partes limitadas contenidas en el mismo espacio ó tiempo en cuestión. Se origina pues nuevamente, como dijimos, la noción de lo infinito, y por eso indicamos á la propiedad de no poder terminar nunca la operación que implica la divisibilidad, diciendo que esta es *infinita* viniendo así esta palabra á ser sinónimo de interminable, de ilimitado.

La noción del infinito deducida de la divisibilidad en las cantidades contínuas

Las cantidades que se van obteniendo por la división sucesiva de la unidad de medida se vuelven cada vez más pequeñas y el espíritu al seguir su disminución concluye nuevamente por caer paulatinamente en un marasmo creciente y por tener que renunciar á la tarea; el resíduo que deja este acto es el concepto de lo *infinitamente pequeño*. El idealismo vé en este nuevo elemento algo existente en la realidad, de manera que según él, la cantidad total considerada en sí, es decir independientemente de la existencia de seres que piensan, se compone de un *número infinito de infinitamente pequeños*, es el fruto representable de la conjunción de estos dos fantasmas, forjados como hemos indicado, y que escapan separadamente á toda representación.

Cantidades indefinidamente decrecientes

Concepto del infinitamente pequeño. El idealista cree que es algo existente en la realidad y lo somete al cálculo

Pero otra escuela idealista considera también las cosas bajo otro punto de vista. La divisibilidad al infinito supone la cantidad contínua, fija, inmóvil, como el espacio, y se propone agotarla de una manera discontínua sin conseguir llegar, por su misma naturaleza, al objeto propuesto; pero, la disminución de dicha cantidad contínua puede también efectuar cinemáticamente (apoyándose en

La teoría idealista atomística

el concepto de tiempo) de una manera contínua y progresiva como lo hace por ejemplo la claridad del día desde su máximo hasta anularse en la noche ó como la trayectoria de un móvil desde el punto de partida de

Los átomos

éste hasta su destino. Ahora bien, el entendimiento nos hace concebir la necesidad de que antes de anularse la cantidad en cuestión, deba esta pasar forzosamente por un estado inmediatamente anterior á su anulación y el cual corresponda por lo tanto al menor valor posible de la misma. Este menor valor se llama *átomo* de ella y si bien es una creación eminentemente idealista -por cuanto el átomo como indivisible no es representable ni podemos en consecuencia concebir la cantidad representable como compuesta de una suma de ellos sin suponer que la divisibilidad es limitada, lo cual repugna á la razón no obstante, se distingue del infinitamente pequeño tal cual lo

El átomo y el infinitamente pequeño

hemos interpretado anteriormente en que, mientras este supone el espíritu fatigado siguiendo la operación sin término de la divisibilidad, el átomo como deducido ó mejor dicho presentido por la razón pura, tiene un carácter de fijeza que produce una especie de quietud benéfica en la mente.

La propiedad del átomo en virtud de la cual no es divisible á diferencia de los demás estados representables de la cantidad es explicado, ó más bien inferido, obser-

Propiedades del átomo

vando que como intermediario entre la nada que no puede disminuir ni dividirse y la cantidad ordinaria que admite las dos operaciones, conserva una propiedad de una y otra de la otra, no es divisible como la nada pero puede disminuir como las demás cantidades. En realidad todo esto no es sino un juego de palabras.

La divisibilidad según vimos, no es el sendero que conduce al átomo, pues implicando aquella una disminución discontínua de la cantidad dentro de las porciones restantes que sucesivamente van quedando, jamás podrá llegar al agotamiento de la misma, ahora, si de este carácter de operación indefinida la hacemos pasar á la categoría de infinita y suponemos con el idealista que este nuevo epiteto conduce á algo real como lo es para él el infinitamente pequeño, este no podría sinó ser el átomo, desde que el átomo es el término de la cantidad; el infinito vendría á ser así un especie de factor de prestidigitación que cambiaría la esencia de las cosas haciendo terminar lo que por su naturaleza es interminable. Y es conveniente observar que, inversamente, si partimos del átomo y queremos restituir la cantidad representable, es necesario nuevamente introducir el citado factor de prestidigitación, por cuanto nos es imposible concebir la cantidad en cuestión como compuesta de un número determinado de átomos, sin llegar al absurdo de la divisibilidad limitada, y siéndonos por otra parte forzoso considerar la cantidad como formada por la agrupación de átomos, debemos en consecuencia decir fatalmente que está formada de un número *infinito* de ellos.

Incoherencias de la teoría idealista

En resúmen, la cantidad contínua puede ser estudiada en su disminución progresiva de manera á presentar en ella la existencia de ciertos principios ideales, pero estos en cualquier forma que se consideren escapan á la representación y entran en el dominio de lo incomprensible. -No obstante, el idealista cree en la realidad objetiva de aquellos y los hace entrar en los cálculos.

Según el empirista todo conocimiento cierto debe proceder ó poder reducirse á percepciones

La teoría empirista en cambio, observa que la divisibilidad no puede sino conducirnos á cantidades, pequeñas á voluntad, pero siempre representables, así que los átomos é infinitamente pequeños idealistas no son sino palabras aplicadas á fantasmas misteriosos y en consecuencia impropios para servir de fundamento á algo científico, pues todo conocimiento serio y cierto debe proceder ó poder reducirse á percepciones sensibles ó intelectuales. Reconoce el empirista que es innegable la existencia de la continuidad, y que por ejemplo al recorrer un móvil su trayectoria debe necesariamente pasar por todas las posiciones intermedias antes de terminar su recorrido, motivando así la noción de lo infinito y del átomo, pero si bien estas corresponden á algo, este algo es un enigma, un misterio como el de la esencia de las cosas, el espíritu no puede descifrarlas. Aún en la mecánica analítica para estudiar las trayectorias hay que descomponerlas en porciones limitadas es decir representables. Debemos pues contentarnos con lo pequeño á voluntad.

§ II. Los ideales y la exactitud geométrica

Lo único existente en el espacio son cuerpos

Lo único realmente existente ó posible en el espacio son cuerpos. Las superficies, líneas y puntos tal cual se definen ordinariamente, es decir quitando al cuerpo una, dos ó más dimensiones, son creaciones imaginarias, ficciones con las cuales es imposible demostrar la existencia de otras ficciones igualmente sin sentido (los infinitamente pequeños, por ejemplo) mediante cálculos hechos sobre aquellas.

Las entidades geométricas fundamentales explicadas por la teoría idealista

Estas entidades geométricas son susceptibles de ser comprendidas mediante las dos teorías indicadas. Veamos primero la creación idealista. Esta escuela, según indicamos, se vale de la noción de lo infinito, ya para deducir (por medio de la divisibilidad) de la cantidad fija é innovil, el último elemento de ella que llama infinitamente pequeño; ya para pasar por agregación de átomos, (deducidos de una exhaución cinemática de la cantidad) de estos, á la cantidad representable. Este segundo punto de vista es el más apropiado para concebir los ideales geométricos.

Deducción atómica de las entidades geométricas fundamentales partiendo del cuerpo. Primer camino

Partiendo del cuerpo ordinario pueden deducirse de él las entidades geométricas en cuestión por vía atómica siguiendo á su vez dos caminos distintos.

Si concebimos un cuerpo cualquiera, este debe necesariamente ser limitado, podemos mentalmente suponer que la materia contenida interiormente en ese cuerpo se quite paulatinamente de manera á producir un vacío, entre este y el espacio exterior se encuentra el cuerpo restante;

Noción de espesor

la separación entre ellos origina la noción de espesor, y si hacemos la extracción de la materia de tal manera que el espesor en cuestión sea constante en todas partes, concebimos facilmente que efectuando esta operación de una manera contínua, llegaría un momento en que la materia, y por lo tanto el cuerpo habrían desaparecido. El entendimiento hace comprender que inmediatamente antes de esta desaparición, debe necesariamente haber existido un espesor especial, el menor de todos los posibles, es decir un átomo de él; el cuerpo ideal ó parte de él así obtenido es lo que se llama una superficie; si esta no es cerrada, debe necesariamente tener un borde que la limita y concebimos igualmente que puede quitarse la materia situada dentro de esta superficie sin alcanzar al borde, produciendo así un vacío que producirá otro borde interno; entre ambos bordes estará situado el cuerpo restante, y si suponemos que la separación de ellos, llamado ancho, es igual en todas partes, aumentando el vacío interno llegaría un momento en que habría desaparecido la superficie primitiva; pues bien un raciocinio análogo al anterior hace comprender que debe aquella pasar antes de anularse por un ancho atómico; á la superficie correspondiente ideal se llama línea y como se vé procede de la reducción á un átomo de dos dimensiones ó sentidos de medida del cuerpo primitivo. Finalmente la línea, cuando no es cerrada, tiene necesariamente dos extremidades de manera que acercando estas paulatinamente mediante la extracción de parte de la línea, llegaría un instante en que la separación en cuestión, llamada largo, sería un átomo; á esta línea límite especial se llama punto, y como se vé cualquier disminución dada á este lo anularía, es pues el cuerpo menor posible.

Noción de ancho

Noción de línea

Noción de largo y de punto

En resúmen, el cuerpo representable puede recibir tres clases de disminuciones atómicas; esto se indica diciendo que tiene tres dimensiones; la primera reducción lo transforma en superficie y anula la posibilidad de una reducción transformando en un átomo al espesor; la segunda reducción hace perder, tanto al cuerpo primitivo como á la superficie, una nueva posibilidad de reducción, dándoles un ancho atómico y produciendo una línea, finalmente una última reducción produce un punto llevando á un átomo el largo; el punto tiene pues todas sus dimensiones reducidas á un átomo y no puede disminuir sin anularse.

Noción de dimensiones

La otra marcha que puede seguirse para llegar á los ideales geométricos es inversa á la anterior. Supongamos que las dimensiones de un cuerpo se contraigan paulatinamente hasta anularlo, el cuerpo inmediatamente anterior á la anulación y que corresponde por consiguiente al menor valor de él, se llama un punto, el cual viene á ser pues un átomo de cuerpo. Si al punto así originado lo hacemos mover en el espacio, podemos concebir un nuevo

Deducción atómica de las entidades geométricas fundamentales partiendo del cuerpo. Segundo camino

cuerpo ideal que ocupe el espacio recorrido por aquel — es una línea — y la dimensión motivada por el movimiento se llama largo. El movimiento de esta línea origina una superficie y una nueva dimensión llamada ancho, la superficie viene á ser así el cuerpo ideal que ocuparía el espacio recorrido por la línea en su movimiento. Finalmente un nuevo movimiento determinaría un cuerpo representable y una nueva dimensión llamada espesor ó alto. Este cuerpo representable tiene pues tres dimensiones, en tanto que una de estas en la superficie, dos en la línea y las tres en el punto se han reducido á un átomo.

Deducción idealista de las mismas entidades introduciendo el infinitamente pequeño

Si en vez de engendrar estos ideales geométricos por una série de exhauciones cinemáticas del cuerpo los hubiéramos obtenido por la divisibilidad al infinito de su espesor, de su ancho y de su largo sucesivamente, la palabra átomo anteriormente aplicada sería ahora reemplazada por la de infinitamente pequeño, y definiríamos en consecuencia la superficie, la línea y el punto como cuerpos cuyo espesor, ancho y largo respectiva y simultáneamente sean infinitamente pequeños.

Los individuos geométricos según el empirista

El empirismo en cambio, no viendo en los átomos é infinitamente pequeños sino fantasmas misteriosos impropios para una especulación científica, considera á la superficie, línea y punto como cuerpos de espesor, ancho y largo respectivamente muy pequeños, tan pequeños como nos convenga ó queramos á voluntad considerarlos, pero siempre finitos, es decir representables. Esta separación de vistas tan radical se extiende también al concepto de lo exacto geométrico.

Concepto empirista de la exactitud geométrica

El empirista no acepta el concepto científico de la exactitud ideal, pues según él, no la tenemos ni la podemos tener. Nuestros sentidos, si funcionan normalmente, nos dan percepciones y representaciones exactas, no podemos tener mayor certeza que la que ellos nos proporcionan, y aunque el tiempo borre á veces la nitidez característica de las recientes representaciones, queda siempre un resíduo de estas que es el *concepto de la exactitud en la percepción sensible*, pero, la observación nos hace ver que algunas percepciones aparentemente iguales entre sí, resultan luego diferentes cuando se examinan con aparatos de control apropiados; unas conservan la forma y aspecto primitivo, otras en cambio lo pierden. De allí la distinción entre lo exacto unicamente sensible, y lo exacto á prueba del control más riguroso.

Lo exacto aparente y lo exacto á prueba de control

Si ahora, por analogía á aquellos casos en que una serie progresiva de representaciones tienen por término una representación límite, queremos también suponer un término á la serie de representaciones cuya exactitud aumenta paulatinamente desde la simplemente exacta aparente que no resiste al mínimo análisis, hasta la que alcanza á desafiar el mejor aparato de control, esta representación límite no correspondiendo á nada real, es una simple representación de palabra.

Como en el terreno científico solo podemos aceptar aquellas hipótesis y conceptos susceptibles de ser bien comprendidos, el concepto de lo exacto ideal deberá rechazarse de aquel hasta tanto que no consigamos probar que responde á una representación real. Ahora bien, la realidad, objetiva de los ideales geométricos no puede afirmarse con certeza de ninguna forma de la naturaleza; si, para precisar las ideas, tomamos por ejemplo la representación de la línea recta, es decir de la línea definida en nuestro espacio solamente por dos puntos, vemos que ni aún la arista más precisa responde á una recta de exactitud perfecta, por cuanto la sustancia en donde se encuentra tallada es susceptible de electrizarse, calentarse y sufrir en general acciones físicas y químicas de índole muy diversa y cada una de las cuales ocasiona deformaciones, sino apreciables á simple vista, acusadas en cambio por procedimientos ópticos ú otros de mucha sensibilidad, y por eso, ni de la arista total ni de parte de ella podemos decir que satisface rigurosamente á la definición de línea recta, es decir de que, ya haciéndola girar alrededor de dos puntos, ya moviendo la vista alrededor de dicha arista de manera que la imágen de dos puntos fijos de esta se conserve en los mismos puntos de la retina, ya haciéndole correr entre guías, la imágen de la arista en cuestión no sufra variaciones, cualquiera que sea el control que se haga para asegurarse de esta invariabilidad.

La exactitud geométrica absoluta no puede existir en ningún objeto

Pero, aún suponiendo que dicha imágen consiguiera

Aún cuando la exactitud geométrica absoluta existiera no podría comprobarse

escaparse á esta prueba, nada nos autorizaría á creer que continuaría escapándose al control de otros aparatos ó procedimientos más eficaces que no poseemos pero cuya posibilidad concebimos; y como el poder de estos auxiliares no tiene teoricamente límite, jamás podríamos alcanzar la comprobación definitiva de la existencia de dicha exactitud ideal, con mucha más razón si se observa que los mismos aparatos y procedimientos de control deberían á su vez ser controlados para ver si no nos engañan, y esto solo podría hacerse mediante otros aparatos y procedimientos, cayendo así en un círculo vicioso.

En la naturaleza encontramos imágenes suficientemente exactas de los ideales geométricos

En resúmen, el conocimiento de lo exacto absoluto escapa al espíritu humano, y el concepto de él no respondiendo á una representación debe eliminarse de las ciencias exactas; estas, por otra parte, no necesitan de él, se bastan con la precisión de los elementos que encuentran en la naturaleza; las estrellas, por ejemplo, cuya imágen no varía aún miradas con los telescopios más poderosos bastan plenamente para dar á la noción de punto todo el rigor deseable. Igualmente el rayo luminoso que sale de una estrella y entra en la pupila es una representación de línea recta suficiente para la geometría. Encontraríamos también en el mundo externo datos fehacientes para tener una representación bastante rigurosa de la idea de plano.

El idealista sienta la longitud exacta como fundamento de la ciencia de los grandores

El idealista en cambio, sienta la longitud exacta como fundamento de la ciencia de los grandores, pues, si bien la línea recta ideal no puede obtenerse con la materia que compone los cuerpos á nuestro alcance y que aún suponiéndola realizable nos sería imposible comprobar su exactitud absoluta por los medios en nuestro poder, no obstante, el concepto de la medida exacta está tan encarnado en el pensamiento, que se impone su aceptación so pena de conmover fundamentalmente la estabilidad de las cosas, y lejos de negarla con el pretexto de que no es representable, debemos al contrario tratar de establecerla científicamente.

El idealista pretende justificar y demostrar la existencia de figuras exactas

Partiendo del espacio vacío ó del homogéneo (concebido aquel como lo hemos indicado en el primer capítulo) observa el idealista que dentro de él puede no solamente suponerse sino que existe realmente cualquiera figura exacta, figura que el talento de un escultor podría teoricamente aislar. Igualmente dos átomos determinan una recta que tiene por lo menos sus extremidades exactas y esto basta para establecer la proposición primitivamente indicada ó sea el sentar á la longitud exacta como fundamento de la ciencia de los grandores.

El empirista contesta á estos argumentos observando que se basan en la existencia prévia de otros ideales igualmente criticables; así el espacio vacío y el homogéneo son ya ficciones ideales no representables; además, dentro del primero nada existe y si bien podemos dentro del segundo imaginar todas las imágenes posibles y por lo tanto las que tienen exactitud perfecta, estas, para que correspondan á algo deberían poder obtenerse por desviaciones que no supusieran ya un ideal, lo cual es imposible toda vez que la definición geométrica de aquellas desviaciones presuponen un ideal. Objeciones del empirista

Igualmente siendo los átomos fantasmas ideales, no pueden servir para probar la existencia de otros ideales análogos.

§ III. El idealismo y el empirismo

De todo lo que antecede podemos establecer bien claramente el alcance de estas dos escuelas en la manera de comprender los conceptos y las intuiciones fundamentales de las matemáticas.

El idealismo cree en la verdad de algunas formas límites de las ideas, reclamadas por la inteligencia pero que escapan á toda representación; para él, el dominio del pensamiento no solo se compone de lo perceptible y de las representaciones ó conceptos de el deducidas por un trabajo mental, sino también, y de ello tenemos un convencimiento completo, de algo más que no es representable pero cuya existencia se impone. Así, para esta escuela, el infinito, lo exacto absoluto, el infinitamente pequeño, los átomos, los ideales geométricos, tienen realidad objetiva, y sin pretender Alcance y bases del idealismo demostrar lo que pasa dentro de esos ideales, los admite como elementos directos en los cálculos. Tal es el axioma fundamental del idealismo.

Alcance del empirismo

El empirismo, en cambio, solo admite como científicamente aceptable, aquello que puede reducirse á representaciones de objetos perceptibles ya por los sentidos, ya por la inteligencia; no niega la existencia de lo no representable como los átomos, el infinito, etc., pero para él no constituye aquel objeto de especulaciones matemáticas. A lo exacto perfecto del idealista sustituye lo exacto á voluntad; acepta la idealización, pero recula ante el ideal mismo, concibe que el espesor de un cuerpo disminuya hasta donde la imaginación y la fantasía puede seguirlo, pero no tolera que se dé un término límite á esta disminución, por cuanto no existe una representación de tal naturaleza la cual solo corresponde á un fantasma inaceptable.

A pesar de reducir así singularmente el dominio del pensamiento, está convencido de que su intuición de los conceptos fundamentales de las ciencias exactas basta para llevar á esta hasta cualquier grado de desarrollo y poder en consecuencia alcanzar todos los resultados obtenidos por el idealismo, salvo naturalmente los que se refieren puramente á las relaciones entre las ficciones misma que acepta éste y rechaza aquél.

Todos estos preliminares son necesarios para la comprensión del concepto de límite matemático que paso á tratar inmediatamente.

§ IV. El concepto de límite matemático

* *Preámbulos.*

Definiciones diversas de la palabra límite

La palabra *límite* tiene diversas aceptaciones; en el sentido más lato significa término, barrera, borde, frontera ó línea de demarcación, y el concepto correspondiente ha nacido evidentemente de la observación de los cuerpos naturales los cuales son necesariamente limitados. El otro significado de la palabra es indicar un valor máximo entre los varios que puede tomar una cantidad, así decimos por ejemplo, que el valor límite de un coseno es el radio, que el límite de la vida de una planta, son tantos años etc.; ya sea que desaparezca el objeto después de pasar por ese límite como sucede en el último ejemplo, ya sea que subsista, como en el primero.

El concepto correspondiente á la segunda acepción de la palabra brota de la observación de los fenómenos del mundo externo y del interno, pues mientras unos se nos presentan sin terminar nunca, como sucede con el desarrollo del tiempo y el movimiento de los astros, verificándose ya uniformemente ya periodicamente, otros en cambio, como el crecimiento y desarrollo de los animales y vegetales, el pasage del día á la noche, la desesperación, la tristeza, etc. se producen por grados inseguibles hasta su esencia pero que concluyen por terminar.

Decimos que el desarrollo progresivo de estos fenómenos escapa á nuestros esfuerzos cuando pretendemos seguirlos hasta su esencia porque si imaginamos un fenómeno cualquiera limitado desarrollándose en la forma indicada, su terminación deberá necesariamente producirse dentro de un segundo de tiempo al principiar el cual aún existe, y al terminar nó, igualmente dividiéndose el segundo de tiempo en terceros la terminación del fenómeno se producirá dentro de uno de esos terceros y así sucesivamente sin jamás terminar (vemos asomar nuevamente la noción de lo infinito).

Orígen del concepto de límite matemático

Hasta ahora no hemos empleado en este estudio la palabra límite sino en uno ú otro de las dos acepciones anteriores, pero estos conceptos primitivos sacados por abstracción del mundo exterior ó interior, han sido luego aplicados con modificaciones fundamentales á las representaciones creadas especialmente por el pensamiento, originándose así el *concepto científico de límite matemático.*

Definición de él

El límite matemático no indica un confín, una barrera ordinaria que puede ser alcanzada, al contrario, no solamente es aquel infranqueable como estos, sino que además es intocable, la distancia que falta para alcanzarlo puede ser pequeña á voluntad, pero siempre debe existir, lo mismo como sucede por otra parte con las cantidades resultantes de la divisibilidad indefinida que pueden acercarse á cero, á voluntad por no alcanzarlo. (Cero es pues el límite matemático de las cantidades indefinidamente decrecientes obtenidas por la divisibilidad).

¿Cómo podemos concebir un límite de esta clase á primera vista tan paradojal?

Condición de la existencia de un límite matemático

Imaginemos una representación fija é invariable, y también una serie de otras pertenecientes con la primera á un mismo género de representaciones, pero susceptibles de variar á voluntad y de tal manera que podamos aproximarlas cada vez más y más á aquella; supongamos ahora que ambas representaciones sean de distinta especie dentro del género común á que pertenecen, es evidente entonces que jamás podrán llegar á confundirse no obstante los diversos valores que podrán tomar las segundas, por cuanto habrá en la definición de ellas un elemento que hará incompatible tal identificación.

Resulta así que, por un lado, las representaciones variables se aproximarían indefinidamente á la fija de tal manera que la diferencia entre ellas podrá vencer cualquier grado de pequeñez; y que por otro, este nunca alcanzará á anularse. La representación fija será entonces necesariamente el límite matemático de las variables.

Vice-versa, para que una representación fija sea límite matemático de otras variables es de toda necesidad que en la definición de ambas haya elementos incompatibles que le impida confundirse, y también que en la de las representaciones variables, el elemento que establece esa variación sea de tal naturaleza que permita hacerla indefinidamente aproximar de la fija; esta última condición exige también paridad de naturaleza entre ambas representaciones.

Ejemplo

Tomamos un ejemplo familiar hasta á los geometras de la antigüedad. Supongamos que la representación fija sea una circunferencia de círculo y las variables los perímetros de los polígonos inscriptos ó circunscriptos en ella; se vé que ambas representaciones llenan las condiciones necesarias para que la primera sea límite matemático de la segunda, y efectivamente tanto la circunferencia como los perímetros en cuestión pertenecen al género común de las longitudes, hay entre ellos paridad de naturaleza; pero ambos son de distinta especie, pues mientras la definición de circunferencia excluye por completo la existencia de lados en ella, en los polígonos, al revés, esta condición es *sine-cua-non* para que sean tales; jamás podrán en consecuencia identificarse, ahora bien, el hecho de ser los polígonos inscriptos ó circunscriptos en la circunferencia y de poder indefinidamente aumentar el número de sus lados, nos permite acercarlos indefinidamente á esta última y hacer que la diferencia entre esas dos longitudes, una fija y otra variable caiga debajo de cualquiera cantidad por pequeña que sea.

Otro ejemplo

Otro ejemplo lo tendríamos considerando una curva y la secante que une dos puntos de ella, si consideramos uno de estos puntos como fijo, el otro podrá acercarse á él tanto como se quiera originando en cada una de sus posiciones una secante particular cuyo límite matemático viene á ser la tangente á la curva en el punto fijo, pues, por un lado, la secante variable puede hacerse aproximar indefinidamente á la tangente, por otro no puede identificarse con ella por cuanto si así lo hiciera dejaría de ser secante en contra de lo supuesto.

Observación

Este último ejemplo hace ver además que una representación puede ser ó no el límite matemático de otras variables, según el punto de vista y la acepción en que todas ellas se consideren, así, si en vez de hacer la distinción de secantes y tangentes hacemos simplemente girar una recta al rededor de un punto de una curva, ninguna posición tiene porque ser límite matemático de las otras, desde que nada impide efectuar la rotación completa de la recta, en cuestión.

Al tratar de la metafísica del análisis trascendente aclararemos más esta última observación.

Importancia del concepto de límite matemático

El concepto de límite matemático es un poderoso resorte de las ciencias del mismo nombre, pues permite suplir las deficiencias de nuestro espíritu y su incapacidad de conocer inmediatamente las propiedades de las cosas cuando estas son de alguna complicación reemplazándolas por otras más á nuestro alcance y combinadas de tal manera que la primera sea límite matemático de las auxiliares; se comprende entonces que pudiendo estas aproximarse indefinidamente á aquellas las propiedades que se conservan constantes en las distintas representaciones auxiliares se aplicarán también á su límite, llegándose así por este procedimiento indirecto al resultado que nos proponíamos y que no hubiéramos podido, directamente obtener. Tal es el propósito del análisis llamado infinitesimal. En la habilidad del investigador está el hallar cual es el mejor camino para llegar á este resultado, pues si bien comprendemos inmediatamente que un objeto variable no puede aproximarse simultáneamente de dos límites matemáticos superiores ó inferiores, concebimos en cambio que una representación puede ser límite matemático simultáneamente de varias especies de variables; ya vimos por ejemplo que la circunferencia de círculo puede considerarse tanto como límite de los polígonos inscriptos; en ella, como de los circunscriptos; igualmente la tangente en un punto de una curva puede considerarse como límite tanto de las secantes que giran al rededor de dicho punto, como el de las secantes paralelas á ella.

Conceptos de argumento y de función en toda su generalidad

Llamemos x á los individuos de una serie de representaciones, y $f(x)$ á los de otra serie ligados con x de tal manera que á cada representación x corresponde otra de $f(x)$. Si x y $f(x)$ son cantidades matemáticas y si al aumentar x indefinidamente, ya de una manera contínua, ya por saltos, existe una representación de igual naturaleza X tal que, para valores bastante grandes de x la diferencia $X - f(x)$ se vuelve y queda luego menor que cualquiera cantidad, sin poder anularse, X es, según lo anterior, el límite matemático de $f(x)$ para valores crecientes de x. La serie de representaciones x se llama *argumento* ó *variable independiente* y puede según su naturaleza tomar valores cualesquiera ó solamente discontínuos; $f(x)$ se llama la *funcion* ó *variable dependiente*.

Los números como símbolos y como representando la cantidad

Podemos reemplazar las representaciones mismas por los números que indican su medida pero no debemos olvidar que estos números nada significan por sí solos y que si bien en la resolución de los problemas ordinarios en donde no interviene el concepto de límite matemático es innecesario tener simpre presente las cantidades mismas simbolizadas por los números, en cambio cuando este concepto está de por medio, nunca puede perderse de vista el orígen de esos símbolos ni los conceptos inherentes á ellos; á saber: el de cantidad matemática y el de número de objetos.

Metafísica de las operaciones y mecanismo del cálculo

En el análisis algébrico

Tratándose del análisis algébrico, puede facilmente desarrollarse separadamente la metafísica de las operaciones que comprende y el mecanismo del cálculo. Este último ha sido notablemente perfeccionado por Hamilton, Grassmann, Dedekind, Weierstrass, etc., y consiste en tomar á los números como piezas del juego de ajedrez y combinarlos de una manera lógica sin preocuparse de los conceptos que los han originado; se consigue así reducir á un mínimo las reglas simples entre las indeterminadas del cálculo conservándose en todas las transformaciones las relaciones primitivas, las cuales, tomadas así como datos primos, pueden no depender ya del concepto de cantidad matemática lineal; sin embargo, por interesante y provechoso que sea este mecanismo literal, especialmente en cuanto puede como caso particular avenirse con el concepto de cantidad lineal, tomado así en su generalidad, no produce sino algo artificial y exótico que no correspondiendo á nada real se consume en una esterilidad lamentable.

En el análisis trascendente

Pero tratándose del análisis llamado infinitesimal, el mecanismo del cálculo es perfectamente segundario respecto del problema metafísico, por eso, no es con la simple ayuda del simbolismo que pueden salvarse las dificultades del concepto de límite ni mucho menos tratarse de llegar con él á consecuencias cualesquiera, al contrario, es necesario unir siempre la idea de cantidad al símbolo que la representa, y así lo haremos en todo lo que sigue.

Hemos anteriormente indicado que los antiguos geómetras efectuaban ya especulaciones con el concepto de límite aplicándolo á límites de series discontínuas como lo es la circunferencia de círculo respecto á los polígonos inscriptos y circunscriptos en ella; modernamente la especulación se ha hecho especialmente sobre límites de series continuas como lo es la tangente respecto de las secantes que giran alrededor del punto de tangencia de aquella.

El análisis infinitesimal antiguo y el moderno

Pero, lo que caracteriza verdaderamente el análisis del siglo pasado ha sido el esfuerzo que ha realizado para justificar las medidas y conceptos fundamentales de las ciencias matemáticas; Gauss, Cauchy, Abel, Dirichlet, Diní, Bois Reymond, etc., han sido los principales promotores y á quien más se deben estos estudios.

** *El problema del límite*

Lo primero que se ocurre estudiar en las operaciones ó séries indefinidas, es la investigación de cuando una función $f(x)$ tiene ó no límite matemático creciendo indefinidamente el argumento x. El desarrollo completo de

Condiciones para que una operación ó série indefinida tenga límite al crecer indefinidamente el argumento

este tema no entra en los propósitos de este trabajo; bastará demostrar que los criterios llamados de convergencia ó de divergencia que solucionan la cuestión quedan en último término reducidos á aplicar en todos los casos la siguiente proposición:

Si la diferencia $f(x)-f(x_1)$ siendo $x > x_1$ queda inferior á una cantidad cualquiera para valores bastantes grandes de X, y arbitrarios de $x-x_1$ la función: $f(x)$ tiene un límite determinado; de lo contrario no tendrá.

En la inteligencia completa de este principio reside ese concepto de límite matemático.

Funciones con límites conocidos

Distingamos desde luego dos clases de funciones, unas tales como:

$$f(x) = \sum_{x=1}^{x=n} \frac{1}{2^x} \qquad 1 - \frac{1}{2^{x-1}}$$

$$f(x) = \sum_{x=1}^{x=n} \frac{p}{10^x}$$

$$f(x) = \frac{\cos x}{x}$$

$$f(x) = x^{\frac{1}{x}}$$

en las que procedimientos más ó menos elementales permiten comprobar la existencia de una cantidad X tal que para valores indefinidamente crecientes del argumento x satisface á la condición $X - f(x) < \alpha$, es decir á la de límite matemático (en los ejemplos señalados los valores de X son 1, $\frac{p}{9}$, 0, 1 respectivamente); y otras tales como:

$$f(x) = \sum_{x=1}^{x=n} \frac{1}{x}$$

$$f(x) = 16 \sum_{x=0}^{x=n} (-1)^x \frac{1}{(2x+1)\,5^{2x+1}}$$
$$+ \sum_{x=0}^{x=n} (-1)^x \frac{1}{(2x+1)\,239^{2x+1}}$$

Funciones con límites hipotéticos aunque existentes

las cuales si bien reconocidas convergentes cuando n crece indefinidamente, tienen la particularidad de que su límite hipotético que solemos designar con los símbolos e base del sistema de logaritmos neperianos y π relación de la circunferencia al diámetro (fórmula de Machain) es una cantidad á la cual no corresponde número alguno que la represente.

Lo mismo diremos de la serie de cantidades obtenidas efectuando la operación de extracción de raíces en los casos en que no hay cantidad racional alguna que elevada á la potencia igual al índice de la raíz reproduzca la cantidad subradical, esa serie tiene indudablemente un límite, pero este límite no es representable en números.

Necesidad de estudiar en ellas la metafísica del límite

En ambas clases de funciones es preciso estudiar especialmente el concepto metafísico de límite conocido ó hipotético. En las primeras funciones, por ejemplo, nosotros sabemos la existencia de una cantidad á la cual puede aproximarse los valores de aquellas tanto como se quiera aumentando indefinidamente los valores del argumento, y además conocemos esa cantidad, pero, por cerca que la función esté de ella, siempre hay algo que la separa de su límite y que corresponde á una solución de continuidad de nuestras representaciones, desde que el límite, no pudiendo ser alcanzado, queda eternamente separado de las representaciones que limita; es precisamente este vacío, este abismo por encima del cual saltamos ordinariamente, que debe tratar de sondar la metafísica del concepto; ésta debe buscar que relación debemos representarnos entre los valores aislados de la función y el de su límite.

Con mucha más razón se impone este estudio cuando se considera la segunda clase de funciones, porque aquí el límite matemático no es expresable en números y desde que su existencia se afirma solo merced á la aplicación (aun no penetrada en su esencia) del principio de convergencia antes citado, debemos indicar cómo nos lo explicamos. En esta segunda clase de funciones, podemos únicamente decir que el símbolo $f(x)$ engendra un grandor ignorado hasta entonces y que no tendría razón de existir sin la existencia previa de la $f(x)$. Los simbolistas, Heine el primero, representan con una letra al límite hipotético de una operación indefinida reconocida convergente por la aplicación del principio general, arriba indicado, y continúan sus cálculos con este símbolo como si designara algo conocido y bien definido, eliminando así toda discusión metafísica sobre dicho concepto (véase Jules Tannery, *Introduction à la Theorie des fonctions d'une variable*); pero, según dijimos, el simbolismo puro es incapaz de producir algo útil y fecundo, y no satisface tampoco á nuestra necesidad de profundizar y explicar la razón y esencia de las cosas, por lo menos hasta donde lo permita el alcance de nuestra inteligencia y tanto más cuanto que si el principio de convergencia antes mencionado puede ser aceptado prácticamente sin demostración rigurosa, la inteligencia de él, como ya lo dijimos, presupone la metafísica del concepto de límite matemático.

El límite simbolista

Definición del concepto de límite matemático en su más alto grado de generalidad

Entendida así la cuestión, puede definirse el concepto de límite matemático considerado en su más alto grado, diciendo, como lo hace Du Bois Raymond, que consiste *en una cierta manera de raciocinar en virtud de la cual, basándose en la naturaleza especial de una serie de valores susceptibles de ser medidos y observados, se deduce la existencia de otros valores que escapan á toda percepción y cuya existencia no puede, rigurosamente hablando, demostrarse.*

El límite en cuestión no tiene en estos casos la evidencia de una percepción directa y por lo tanto su existencia debe ser demostrada. Pero, como puede ser tan variada la serie de representaciones $f(x)$, es necesario dar á la cuestión la forma más general y abstracta, buscando un pasaje al límite de naturaleza sencilla, al cual puedan por combinación reducirse todos los demás pasajes; es necesario en consecuencia, que la naturaleza de esa forma general, le permita acercarse de cualquier límite posible. Entre las series indefinidas que satisfacen á esa condición, debe buscarse á su vez la más intuitiva y familiar.

Necesidad de demostrar la existencia del límite en ciertos casos

El tipo de representaciones de la forma

Serie fundamental al límite de la cual pueden reducirse todos los pasages á límite

$$f(x) = \frac{a_1}{b} + \frac{a_2}{b^2} + \frac{a_3}{b^3} + \ldots\ldots + \frac{a_x}{b^x} \text{ siendo } \begin{matrix} a_x > b \\ a,\ b, \text{ enteros} \end{matrix}$$

es indudablemente sencillo y satisface á la segunda cuestión, porqué como las cantidades con ella representadas aumentan indefinidamente quedando siempre menores que la unidad; cualquiera cantidad L puede considerarse límite de esa serie cuando x crece indefinidamente; efectivamente, si tomamos como unidad de medida una cantidad mayor que L, el número que indica la medida de L estará evidentemente comprendido entre dos valores determinados $\frac{\alpha_1}{b}$, $\frac{\alpha_1+1}{b}$ puesto que entre los valores representados por ambos números quedan encerradas cantidades menores que uno y comprendidas entre cero y uno, luego podemos escribir

Cualquier cantidad puede ser límite de una serie de esa clase

$$\frac{\alpha_1}{b} \leqq L \leqq \frac{\alpha_1+1}{b}$$

igualmente dividiendo los intérvalos b en otras b partes iguales, encontraremos otros dos números enteros consecutivos α_2 y α_2+1 tales que se verifique, siendo α_2 y $\alpha_2+1 < b$

$$\frac{\alpha_2}{b^2} \leqq L - \frac{\alpha_1}{b} \leqq \frac{\alpha_2+1}{b^2};$$

siguiendo así la subdivisión encontramos finalmente

$$\frac{\alpha_{x+1}}{b^{x+1}} \leqq L - \left(\frac{\alpha_1}{b} + \frac{\alpha_2}{b^2} + \frac{\alpha_3}{b^3} + \ldots\ldots + \frac{\alpha_x}{b^x}\right) \leqq \frac{\alpha_{x+1}+1}{b^{x+1}}$$

Luego la diferencia $L - \left(\frac{\alpha_1}{b} + \frac{\alpha_2}{b^2} + \ldots\ldots + \frac{\alpha_x}{b^x}\right)$ tiene por límite cero y L viene en consecuencia á ser el límite matemático de $\frac{\alpha_1}{b} + \frac{\alpha_2}{b^2} + \frac{\alpha_3}{b^3} + \ldots\ldots + \frac{\alpha_x}{b^x}$ al crecer x

indefinidamente. Luego finalmente si una función cualquiera tiene un límite, este último puede siempre considerarse como límite también de una expresión de la forma $M + \frac{\alpha_1}{b} + \frac{\alpha_2}{b^2} + \frac{\alpha_3}{b^3} + \ldots + \frac{\alpha_x}{b^x}$ definida como más arriba indicamos. Todo lo anterior es la enunciación en fórmulas del ejemplo tomado en la página 71 relativo al estudio de un fenómeno contínuo, hasta su esencia; en aquel ejemplo b era 60 porque la unidad de medida era el segundo de tiempo; teóricamente el valor más sencillo para b es 2 en cuyo caso los α variarían entre 0 y 1, correspondiendo al sistema de numeración binario, pero practicamente siendo el sistema decimal el usual, será más conveniente hacer $b = 10$; α variará entonces entre 0 y 9.

La fracción decimal como serie fundamental cuando es ilimitada y no periódica

En resúmen, pues, una fracción decimal indefinida puede servir para acercarnos de cualquier límite posible, y si bien es una serie discontínua, su empleo es indispensable aun para determinar los límites de series contínuas por cuanto las cantidades que entran en estas últimas deben, para poder someterse al cálculo matemático, ser previamente medidas, y la noción de medida implica series discontínuas. La continuidad solo se hace, según vimos, de naturaleza especial, introduciendo la noción de movimiento la cual nada tiene que hacer en el problema que buscamos, por lo menos tal cual ha sido planteado.

El pasaje al límite de la serie

$$f(x) = \frac{\alpha_1}{10} + \frac{\alpha_2}{10^2} + \frac{\alpha_3}{10^3} + \ldots + \frac{\alpha_x}{10^x}$$

puede pues considerarse como el más sencillo y el fundamental al cual podrá reducirse, como más adelante veremos, todos los demás pasajes al límite.

Enunciado definitivo del problema del límite

De acuerdo con esto y con lo dicho sobre el simbolismo, el problema que tiene por objeto el concepto del límite, debe en definitiva entenderse de la manera siguiente (Du Bois Raymond).

Todo número decimal

$$0, \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \ldots\ldots \alpha_x = \frac{\alpha_1}{10} + \frac{\alpha_2}{10^2} + \ldots + \frac{\alpha_x}{10^x}$$

se aproxima á un valor límite cuando x *crece indefinidamente* (α_p varía entre 0 y 9).

Los números fraccionarios $\frac{\alpha_1}{10}$; $\frac{\alpha_2}{100}$ ... indican múltiplos de décimos, de centésimos, de milésimos de una cantidad matemática dada, y en particular de una longitud, por cuanto vimos anteriormente que las cantidades matemáticas sobre las cuales nos es dado especular son lineales, es decir, susceptibles de reducirse á longitudes para su apreciación.

Se ve pues, que si sobre una longitud determinada que supondremos igual á la unidad de medida y cuyas extremidades llamaremos o, 1 se llevan las distintas longitudes $\frac{\alpha_1}{10}$; $\frac{\alpha_1}{10} + \frac{\alpha_2}{10^2}$; $\frac{\alpha_1}{10} + \frac{\alpha_2}{10^2} + \ldots \frac{\alpha_x}{10^x}$ á partir de o hacia 1, las extremidades de las mismas se van aglomerando cada vez más y más de manera que la distancia de ellas á la de la longitud límite, si existe, se hace menor que cualquiera cantidad.

Se aplicará á límites de longitudes

Es bueno recordar que no hay que considerar límites numéricos abstractos que nada significan; el límite matemático de una serie de representaciones variables es otra representación de paridad de naturaleza con aquellas, de manera que tratándose aquí de longitudes, el límite de ellas será también una longitud, y no un mero símbolo.

Veamos, pues, si es posible demostrar que la serie indefinida de fracciones decimales o, α_1 α_2 ... α_x se aproxima á un valor límite, creciendo x indefinidamente. Si la serie en cuestión es periódica, la aritmética nos enseña la manera de encontrar un valor expresable por un número racional que satisface á esa condición; igualmente si la serie en cuestión procede de la extracción de raíces de cantidades contínuas expresadas en números enteros ó fraccionarios, podemos geométricamente encontrar una cantidad que satisface á la definición de límite (reduciendo las cantidades á longitudes), si bien esa cantidad así como sus múltiplos no son ahora expresables por números racionales é implican un pasaje al límite previo de cantidades racionales; pero, si la serie en cuestión no está sometida á ley alguna en su desarrollo, por ejemplo, si las cifras sucesivas α_x van colocándose arbitrariamente, entonces es cuando viene el problema de determinar si

Caso en que la existencia de la longitud límite es conocida

Casos en que es hipotética

esta serie tiene ó no un límite al crecer x indefinidamente. Si este límite existe, la longitud que le corresponde no pertenece ni á las racionales ni á las irracionales recien indicadas y por lo tanto su existencia hipotética debe ser demostrada.

Primer resultado de la investigación

Ahora bien, es evidente que por el mero hecho de considerar valores sucesivos de la serie $0, \alpha_1\ \alpha_2 \dots \alpha_x$ jamás obtendremos una longitud límite; á lo más llegaremos al siguiente resultado:

Marquemos sobre la longitud $0 - 1$ una longitud parcial l_p uniendo las extremidades de las dos longitudes:

$$0, \alpha_1\ \alpha_2 \dots\dots \alpha_p\ ; \quad 0, \alpha_1\ \alpha_2 \dots\dots (\alpha_p \quad 1)$$

todas las longitudes pertenecientes á la serie dada $0, \alpha_1\ \alpha_2 \dots\dots \alpha_n$ en las que $n > p$ tendrán su extremo necesariamente comprendido en la longitud l_p [1]; ahora bien esa longitud l_p tiende á anularse á medida que p aumenta, de manera que la extremidad del límite hipotético si existe, estando comprendido dentro de l_p parece á primera vista ser aquella en que se reunen las dos de l_p cuando ésta se anula. Pero, precisamente l_p nunca puede anularse, queda constantemente siendo una longitud con dos extremos tan poco separados como se quiera, pero correspondiendo á una longitud que nunca se agota, pues según ya dijimos, la divisibilidad no haciendo otra cosa sino marcar porciones más pequeñas dentro de otras, es una operación por su esencia interminable y que no llega nunca á un resultado distinto de los anteriores por donde sucesivamente va pasando. La longitud l_p por consiguiente, salvo su tamaño, corresponde constantemente á una representación análoga á la $0 - 1$.

Resultado negativo

Sería necesario introducir la noción de movimiento, como lo hicimos ya constar, para poder conseguir el agotamiento completo de una cantidad.

Errores basados en la aparente demostración superficial de la existencia de un límite sacado de la anulación de una cantidad que decrece indefinidamente

Muchas son las equivocaciones que la anulación aparente de la longitud l_p, creciendo p indefinidamente, ha hecho incurrir á la mayoría de los autores y aún á eminentes, por falta de profundizar la metafísica de la cuestión.

(1) Si todas las cifras que siguieran al α_p fueran 9 (nueves) el valor de la serie en cuestión sería $0, \alpha_1\ \alpha_2 \dots (\alpha_p + 1)$ que correspondería á la longitud límite buscada. pero entonces la serie sería periódica en contra de lo supuesto.

Duhamel, por ejemplo, para demostrar que una cantidad variable que crece sin cesar, pero conservándose inferior á una cantidad determinada, tiene necesariamente un límite, dice en su clásica obra *Des methodes dans les sciences de raisonnement* (II parte, página 413, nota):

« Sea A el valor determinado debajo del cual se mantiene constantemente la cantidad variable; sea B uno » de los que tomará; dividamos el intervalo A — B en partes iguales tan pequeñas como se quiera; bien podrá » la variable alcanzar y pasar todas las divisiones, pero » no llegar, por hipótesis, hasta A; podrá suceder también » que no pase todas las divisiones y entonces existirá necesariamente una primera que no será alcanzada y » otra que será la última en ser pasada, quedando así » la variable encerrada en un intervalo tan pequeño y tan » vecino de cero como se desee, luego hay un valor fijo » entre A y B al cual se aproxima la variable. Tiene, » pues, un límite ».

Esta demostración, como se vé, está basada en la supuesta anulación del intervalo comprendido entre dos divisiones de A—B que reemplaza á nuestro l_p de hoy, é implica el error de creer que el hecho de que un intervalo disminuya indefinidamente por vía de divisibilidad, altere su naturaleza, siendo así que siempre subsiste como representación análoga (salvo su valor) á la primitiva y que nunca podrá salir de él, el extremo de una cantidad lo cual exigiría la introducción de la noción de movimiento. Más adelante veremos la demostración rigurosa de la proposición de Duhamel.

Se comprende facilmente que, indicando la serie de valores $0, x_1\ x_2\ \ldots.\ x_n$ no cantidades sino las medidas de estas relacionadas con la unidad $0 - 1$ de medida, no podrá servir para representar sino las porciones racionales de esa longitud $0 - 1$ y por lo tanto no debe pretenderse hallar entre los valores sucesivos que va adquiriendo, alguno que represente porciones de la unidad de medida que no se presten á esa determinación numérica [1] — Alcance de la divisibilidad

(1) Además, si tal cantidad se encontrara, dejaría de ser límite de la serie por cuanto el límite matemático nunca puede ser alcanzado. Toda la dificultad está en demostrar la existencia de una cantidad L medible ó nó con la unidad $0 - 1$ y que satisfaga á la condición de ser $L - 0,\ x_1\ x_2\ \ldots.\ x_n < \varepsilon$ cuando n aumenta sin cesar.

tales como sucede con las raíces inexactas y las demás longitudes cuya determinación ignoramos, solo que mientras aquellas raíces corresponden á cantidades cuya existencia conocemos por otros procedimientos, las últimas, son hipotéticas y su existencia debe demostrarse préviamente.

Carácter relativo de ella

Elijiendo arbitrariamente una unidad de medida o — 1 y una cantidad cualquiera L la determinación numérica de ésta no tiene porqué deber necesariamente expresarse con un número limitado de términos de la serie o, α_1 α. . α_x pues para hacer esta determinación hay que recurrir á la operación sin término de la divisibilidad obteniéndose así á veces, como vimos, una fracción decimal indefinida; pero justamente esto último nos hace suponer que no obstante la imposibilidad antes demostrada de probar la existencia de un límite á una serie indefinida de valores o, α_1 α_2 . . α_x, esta puede corresponder sin embargo á una longitud de o — 1 y tener en consecuencia un límite cuya única particularidad sería no poder medirse tomando como unidad la longitud o — 1 en cuestión. Todo está en ver si ese límite se impone ó nó.

Posibilidad de que la serie fundamental tenga siempre un límite

La existencia de ese límite además se impone

Hemos llegado al punto álgido del concepto de límite matemático y vamos á ver como salen del paso los idealistas y los empiristas.

Sulución y demostración idealista

La escuela idealista resuelve el punto introduciendo sus conceptos del infinito y de los infinitamente pequeños. Plantea así la cuestión: ¿Sobre la longitud o — 1 existe ó no independientemente de un ser que piensa y mide, una longitud límite de las o, α_1 α_2 . . . α_x, cuando éstas existen? Y contesta diciendo: El número de longitudes existentes en sí sobre la longitud o -- 1 es infinito y teniendo todas el extremo o común, los otros, (que llama impropiamente puntos y que vienen en realidad á ser cortes ó secciones hechas en la longitud o — 1) distan entre sí de cantidades infinitamente pequeñas. Luego pues, cuando en la série, o, α_1 α_2 . . . . α_x, x se ha vuelto infinitamente grande, la longitud l_p de hoy se habrá hecho infinitamente pequeña, no será pues representable y en consecuencia, el extremo de la longitud límite que debe permanecer dentro de l_p se confunde indiferentemente con uno ú otro de los extremos de esa cantidad l_p infinitamente pequeña, pues ambos señalan dos longitudes iguales en el sentido idealista desde que su diferencia escapa á toda representación. Luego el resultado final y la solución idealista es que: *La serie en cuestión tiene un límite y la relación que debemos representarnos entre sus valores aislados y el del límite es que la diferencia entre ellos concluye por dejar de pertenecer al dominio de la representación del hombre.*

Consecuencia á que arriba el idealista

Solución y demostración empirista

El empirista empieza por rechazar los números cuyo desarrollo indefinido no está sometido á una ley, por cuanto no debe entrar en el dominio de las matemáticas aquello que no está de antemano bien definido. Una fórmula, una ley cualquiera es necesaria para que el desarrollo de una fracción decimal pueda ser continuada hasta el infinito, de lo contrario, no hay propiamente hablando un número; pueden estas series desprovistas de leyes corresponder á cantidades, como lo deduce el idealista, pero no son cantidades especulables en las matemáticas por lo mismo que no son expresables en números.

El empirista no admite en la especulación matemática las series desprovistas de ley en su desarrollo

Por otra parte es cierto que cualquiera cantidad L puede ser considerada como límite de una determinada serie $0, \alpha_1\ \alpha_2 \ldots .\ \alpha_x$ pudiendo crecer x indefinidamente y sin haber ley alguna en el desarrollo de las α pero, la demostración de esta proposición (véase pág. 79) supone la exactitud absoluta de los ideales geométricos, en cuanto solamente ella es capaz de permitirnos continuar indefinidamente la investigación; más aún, esa exactitud, como vimos, (pág. 67) escapa á la representación y no es tampoco apta en consecuencia para una especulación matemática.

Concepto de límite empirista

El empirista no admite los infinitamente pequeños sino unicamente lo pequeño á voluntad. Una longitud supone una línea la cual tiene un ancho y espesor iguales y muy pequeños, tan pequeños como se quiera momentáneamente suponerle, pero por pequeños que sean, tendrán siempre un valor determinado, luego pues, el intervalo l_p dentro del cual se encuentra el extremo de la longitud límite llegará, para un valor conveniente de p, á ser de longitud igual al ancho y espesor, que se haya supuesto á la línea, transformándose así en un punto, entonces o, α_1 α_2 .... α_p será el límite buscado con la exactitud que asignamos á nuestra representación momentánea.

Otra demostración

También la existencia del límite en el sentido empirista puede hacerse de la manera siguiente: La longitud o — 1 se compone de una serie de puntos ó de porciones de longitudes de largo igual al ancho y espesor de la línea en cuestión; el número de estos puntos puede ser grande á voluntad según el espesor que momentáneamente queramos dar á la línea el cual según sabemos puede ser pequeño *ad-libitum*. A cada uno de esos puntos corresponde un número; ahora bien, la totalidad de esos puntos puede dividirse en dos grupos; unos que nunca serán alcanzados por la serie o, α_1 α_2 .... α_r y otros que concluirán por ser alcanzados. Estas dos extensiones de puntos como facilmente se comprende, ó se tocan, ó quedan separadas por un punto hipotético del cual no es posible decir si será ó no alcanzado por algún valor de la serie. Este punto, si existe, ú otro ocupando el sitio en donde las dos extensiones parciales se cortan determinan el extremo de la longitud límite buscada.

Consecuencia y solución del problema según el empirista

En resúmen, en el sentido empirista, la serie en cuestión tiene un límite y los valores de aquella concluyen por confundirse con la del límite en una representación única—tal es la solución empirista del problema del límite.

Datos ilustrativos para explicar el alcance de las dos soluciones

Haciendo una explicación gráfica de ambas intuiciones, supongamos que sobre un papel bien liso hayamos trazado con un lápiz de punta muy fina una línea recta muy delgada, el idealista cree en la posibilidad de la existencia de otra línea que sea de una exactitud absoluta, el empirista rechaza esta última en la especulación matemática y se contenta con la línea trazada la cual puede estar más ó menos bien hecha según lo permita nuestros instrumentos y medios; marquemos á partir de un extremo las longitudes o, α_1 ; o, α_1 α_2 ; o, α_1 α_2 α_3 ; o, α_1 α_2 α_3 .... α_x indicando con un trazo de lápiz fino las extremidades de esas longitudes parciales; estos trazos poco á poco se aproximarán más y más mientras nuestros instrumentos nos permitan continuar marcando pero llegará finalmente un momento en que el espesor de la punta del lápiz por fina que sea será aún mayor que la separación entre dos trazos consecutivos, en ese instante el idealista empezará á hacer aparecer sus fantasmas infinitesimales, en cambio, el empirista, visto la imposibilidad de marcar más trazos y que estos persisten en un mismo sitio, señalará este con un trazo final el cual indicará el extremo de la longitud límite de la serie; se comprende que este quedará obtenido con exactitud á voluntad por lo menos hasta donde nuestros recursos nos lo permitan. Según esto, pocas cifras decimales bastarán al empirista para alcanzar el límite: en cambio el idealista las necesita todas; el simbolista prescinde de todos estos raciocinios y designa con una letra al límite hipotético sin preocuparse de explicárselo.

Consideraciones finales

En resúmen, el pasaje riguroso de la serie á su límite matemático es y quedará una enigma, pero ahora debemos contentarnos con los resultados obtenidos por cuanto reducen la cuestión á su expresión psicológica la más simple y quedan necesariamente retenido ante las fronteras de nuestro entendimiento y de nuestro poder de conocimiento. Hemos ya dicho varias veces que el espíritu humano tiene un campo de acción más allá del cual no puede actuar.

Demostración de la proposición anterior de Duhamel

Podemos demostrar ahora la proposición que hemos anteriormente mencionado hablando de Duhamel:

Sean x_1, x_2, x_3, ... los diversos valores de la cantidad variable que aumenta constantemente de una manera contínua ó discontínua sin llegar á ser infinitamente grande; podemos entonces escribir: $x_1 < x_2 < x_3 \ldots < A$ sin poder ser todas las x_p iguales; dividamos el intérvalo AB tomado como unidad de medida en diez partes iguales y sea α_0 y $\alpha_0 + 1$ las dos divisiones entre las cuales se mantiene la cantidad variable, sea β_0 el primero de los x_p que reune la condición

$$(1)\ \frac{\alpha_0}{10} < \beta_0 < \frac{\alpha_0 + 1}{10} \text{ ó } 0,\alpha_0 < \beta_0 < 0,\alpha_0 + 1)$$

todos los $x_p > \beta_0$ satisfarán evidentemente á esta desigualdad. Dividamos el intérvalo: α_0, $\alpha_0 + 1$ en otras diez partes iguales, habrá necesariamente una de esas nuevas divisiones la $\alpha_1 + 1$ por ejemplo, que será la primera en no ser alcanzada por las cantidades $x_1 - \frac{\alpha_0}{10}$ $x_2 - \frac{\alpha_0}{10}$ (las cuales en virtud de la expresión (1) concluirán por ser positivas y por lo tanto por pasar la nueva división α_1). Sea $\beta_1 - \alpha_0$ la primera de esas diferencias que satisface la desigualdad:

$$\frac{\alpha_1}{100} < \beta_1 - \frac{\alpha_0}{10} < \frac{\alpha_1 + 1}{100} \text{ ó bien á la}$$

$$0, \alpha_0 \alpha_1 < \beta_1 < 0, \alpha_0 (\alpha_1 + 1)$$

todas las $x_p > \beta_1$ satisfacen también á esa desigualdad. Siguiendo de esta manera llegaríamos á la expresión: $0, \alpha_0 \alpha_1 \ldots . \alpha_p < \beta_p < 0, \alpha_0 \alpha_1 - (\alpha_p + 1)$ y todas las $x_p > \beta_p$ satisfacen también á esa expresión.

Solución empirista

El empirista ha terminado aquí su demostración por cuanto la serie $0, \alpha_0 \alpha_1 \ldots \alpha_p$ tiene un límite tan exacto como se quiera y este límite no se diferenciará del de los x_p sino en una cantidad menor que $\frac{1}{10_p}$ cantidad que puede hacerse tan pequeña como se desee; luego los x_p tienen un límite que es el mismo de la serie, $0, \alpha_0 \alpha_1 \ldots . \alpha_p$.

Solución idealista

El idealista debe además demostrar que la diferencia entre los límites de la serie $0, \alpha_0 \alpha_1 \ldots . \alpha_p$ y el de los x_p se reduce á un infinitamente pequeño. De la expresión $0, \alpha_0 \alpha_1 \ldots . \alpha_p < x_q < 0, \alpha_0 \alpha_1 \ldots (\alpha_p + 1)$; $(q = r, r + 1 \ldots)$ sacamos, llamando X al límite de $0, \alpha_0 \alpha_1 \ldots \alpha_p$, aumentando en la derecha y restando en la izquierda

$$X - \frac{1}{10_p} < x_q < X + \frac{1}{10_p}$$

haciendo crecer p indefinidamente, la diferencia $X - x_q$ que es inferior á $\frac{1}{10_p}$ se vuelve infinitamente pequeña y por lo tanto el límite $x_p = 0, \alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_p = X$; $(p = \infty)$.

La demostración anterior está especialmente hecha para el caso de que la serie de las x_p es discontínua, pero puede igualmente aplicarse al caso en que la serie en cuestión sea continua y especialmente también al caso de una función $f(x)$. En este último caso se enunciaría la proposición diciendo: *Una función $f(x)$ monótona* (Neumann) *es decir, variando en un solo sentido* [1] *pero que quede comprendida entre valores finitos posee siempre un límite determinado cuando el argumento crece indefinidamente.* Basta reemplazar en la demostración anterior las palabras «sea β_0 ó $\beta_1 - \alpha_q$ el primero de los valores de x_p ó la primera de las diferencias $x_p - \frac{\alpha_{0}}{10}$ que satisface á la desigualdad...» por: «la cantidad variable ó la diferencia entre ella y $\frac{\alpha_{0}}{10}$ concluirá al aumentar aquella por satisfacer á la desigualdad....» dejando lo restante de la demostración idéntico. En el caso de la función, en vez de aumentar y disminuir directamente esta, se hará esta variación aumentando indefinidamente el argumento, lo cual no afecta á la demostración.

Aplicación del principio anterior á las funciones monótonas

Estos últimos ejemplos hacen ver como las cantidades contínuas requieren para el estudio de su pasage al límite, la intervención de las discontínuas; y se comprende que así sea por cuanto la especulación matemática exige ó supone una medida, y esta simboliza la discontinuidad.

Las series contínuas exigen la noción de discontinuidad para entrar en la especulación matemática

El desarrollo de la fracción decimal o, $\alpha_0\ \alpha_1$ . . . recién indicada es lo que se llama: la construcción numérica del límite X de la serie x_p ó de la $f(x)$.

Construcción numérica de los límites

Podemos ahora demostrar el principio general de convergencia antes mencionado, el cual, según díjimos, viene á ser el criterio que sirve de fundamento á todas las reglas y teorías que demuestran la existencia de un límite á la $f(x)$, cuando x crece indefinidamente:

Demostración del principio general de convergencia

Este principio establece, como vimos, que:

Si la diferencia $f(x) - f(x_1)$ se vuelve, para valores bastante grandes de x_1 y para cualesquiera de x mayores que x_1, menor que una cantidad elegida de antemano tan pequeña como se quiera, la función $f(x)$ tiene un límite determinado, es decir, existe una cantidad X tal que $X - f(x)$ para valores convenientes de x se hace tan pequeño como se desee.

Efectivamente, elijamos un valor x_1, tal que todos los

(1) Una función monótona es aquella que no hace sino aumentar ó disminuir cada vez que varia por el aumento indefinido del argumento, aunque puede también quedar fija en algunos intérvalos.

valores x superiores á él hagan la diferencia $f(x) - f(x_1) < \varepsilon_1$ siendo ε_1 una cantidad tan pequeña como se quiera, y fijada de antemano. Según esto los valores de $f(x)$ estarán comprendidos entre:

$$f(x_1) + \varepsilon_1 \text{ y } f(x_1) - \varepsilon_1$$

luego:

$$f(x_1) + \varepsilon_1 > f(x) > f(x_1) - \varepsilon_1$$

Llamando α_1 al intervalo $f(x_1) + \varepsilon_1$ y β_1 al $f(x_1) - \varepsilon$ tendremos $\alpha_1 > f(x) > \beta_1$.

Dando á x_1 un valor mayor x_2 ($x_1 < x_2$) la diferencia $f(x) - f(x_2)$ por hipótesis será menor que ε_1 y la $f(x)$ estará comprendido por grande que sea x, en el intérvalo: $f(x_2) + \varepsilon_2$, $f(x_2) - \varepsilon_2$; este intérvalo puede no estar totalmente comprendido en el $\alpha - \beta = 2\,\varepsilon_1$ por cuanto si bien ε_2 es menor que ε_1 en cambio $f(x_2)$ puede ser mayor ó menor que $f(x_1)$, pero como en total el nuevo intérvalo $2\,\varepsilon_2$ es menor que el primitivo $2\,\varepsilon_1$, se vé que por lo menos que uno de los extremos de $2\,\varepsilon_2$ debe caber dentro de $2\,\varepsilon_1$; en cuanto á $f(x)$ no puede en ningún caso salir fuera de $2\,\varepsilon_1$ Si llamamos entonces α_2 y β_2 á las diferencias $f(x_2) + \varepsilon_2$; $f(x_2) - \varepsilon_2$ cuando las extremidades del nuevo intérvalo $2\,\varepsilon_2$ caen dentro del primitivo ó en su defecto á las diferencias correspondientes que se obtiene reemplazando aquellos extremos por los de la porción común á $2\,\varepsilon_1$ y $2\,\varepsilon_2$; la función $f(x)$ se mantendrá en el intervalo $(\alpha_2, \beta_2) < 2\,\varepsilon_1$.

Luego

$$f(x_2) + \varepsilon_2 > f(x) > f(x_2) - \varepsilon_2 \text{ ó } \alpha_2 > f(x) > \beta_2$$

y así sucesivamente.

Como las cantidades $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \beta_1\, \beta_2 \ldots$ varian siempre en un mismo sentido (pudiendo quedar constantes en ciertos intérvalos) sin aumentar ó disminuir indefinidamente deben, según la proposición anterior tener cada una un límite matemático. Estos dos límites serán idénticos si las cantidades $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ que establecen la diferencia entre las cantidades $\beta_1 - \alpha_1\; \beta_2 - \alpha_2 \ldots$ tienen por límite cero. Justamente esto es lo que se ha supuesto en el enunciado de la proposición. Luego llamando X al límite común de $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \beta_1\, \beta_2 \ldots$; como la $f(x)$ está comprendida entre los α_r y β_r, resultará forzosamente que

X será también el límite de $f(x)$. Con lo que queda demostrado el principio general de convergencia.

Proposición recíproca

Reciprocamente se demuestra sin dificultad que si la $f(x)$ es convergente, es decir si tiene un límite X se verificará que $f(x) - f(x_1) < \varepsilon$; resulta esto de las dos desigualdades

$$X - f(x) \lesseqgtr \varepsilon_1 \quad X - f(x_1) \lesseqgtr \varepsilon_2 \therefore f(x) - f(x_1) < \left|(\varepsilon_2 - \varepsilon_1) = \varepsilon\right|$$

Otros enunciados del principio general

No entra en el plan de esta tésis estudiar doctrinalmente este asunto de convergencia y divergencia de las funciones, sino unicamente en la parte que se relaciona con la metafísica del concepto de límite, sin embargo conviene recordar que el principio general de convergencia recién indicada puede á veces reemplazarse con ventaja por el siguiente:

Si la relación $\dfrac{f(x)}{f(x_1)}$ *tiene por límite la unidad para valores bastante grandes de* x_1 *y cualesquiera de* x *mayores que* x_1, *la función* $f(x)$ *tiene un límite*, y conmás generalidad: $f(x)$ *tendrá límite si* $\dfrac{f(x) + \alpha}{f(x_1) + \alpha}$ (siendo α una cantidad arbitraria) *tiene por límite la unidad.*

Se deduce esto de la identidad:

$$f(x) - f(x_1) = \left[f(x_1) + \alpha \right] \left[\frac{f(x) + \alpha}{f(x) + \alpha} - 1 \right]$$

Divergencia de las funciones é Indeterminación

Conviene igualmente observar que si una función (x) no admite un límite, podrá suceder ó bien que al crecer ó decrecer indefinidamente el argumento, la función no crezca ni decrezca indefinidamente en cuyo caso debe necesariamente existir dos cantidades entre las cuales se mantenga (estas cantidades se llaman límites de indeterminación) ó bien puede suceder que la función aumente ó disminuya indefinidamente junto con su argumento. En estos dos casos la función se llama divergente.

Series convergentes divergentes é indefinidas

Cuando se habla de series se dice á veces, en el primer caso, que es indefinida y á veces también convergente, pero entonces por serie convergente se entiende aquella, en que la suma de sus términos no puede exceder una cantidad finita. (Véase Hall & Knight Higher Algebra).

Ejemplos Funciones convergentes contínuas

Apliquemos, para mejor comprensión, los resultados anteriores á algunos ejemplos.

1° *Funciones convergentes*

a) x *admite valores contínuos.*

Sea $f(x) = \dfrac{c}{x}$

La diferencia $f(x) - f(x_1) = C \dfrac{\frac{x_1}{x} - 1}{x_1}$ dejando x_1 fija

esa espresión tiene por límite $C \dfrac{1}{x_1}$ cantidad que puede ser tan pequeña como se desee tomando x_1 bastante grande, luego $f(x)$ tiene un límite al crecer x indefinidamente y efectivamente dicha función representa las ordenadas de una rama de hipérbola referida á sus asíntotas

Funciones convergentes discontínuas

b) x *solo admite valores discontínuos*

Sea $f(x) = \sum_{x=1}^{x=n} \dfrac{a^{x|1}}{x}$ [1] $a < 1$ (1) Observamos que el principio general de convergencia $\left[f(x_1) \overline{<} \varepsilon \; x_1 \right.$ bastante grande y ε pequeño á voluntad; $\left. x > x_1 \right]$ equivale, al aplicarlo á series á establecer que:

$$S_{n+m} - S_n = u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots\ldots u_{n+m} \overline{<} \varepsilon_1$$

representando $S_{n+m} = fx$ á la suma de los $n + m = x$ primeros términos de la serie y $S_n = f(x_1)$ á la de los $n = x_1$ primeros análogos; ε es como sabemos una cantidad arbitraria y tan pequeña como se quiera. Así expresado el principio general, constituye lo que se llama regla de Cauchy para la convergencia de seres. [2]

Observaciones pertinentes á las series convergentes

Se deduce de esta última proposición que si una serie es convergente, lo es también otra obtenida reemplazando uno ó más términos de la primera por otros más pequeños en valor absoluto puesto que la diferencia

---

[1] La notación $a^{n|r}$ imaginada por *Kramp* representa el producto de n números en progresión aritmética empezando por a y de razón r.

(2) Cauchy—Cours d'Analyse, pag. 125.

$S_{n+m} - S_n$ no puede sino disminuir. Luego, si en vez de la serie (1) tomamos otra tal como la

$$f(x) = \sum \left(\frac{2}{2^p}\right)^x = \frac{1}{1^p} + \frac{2}{2^p} + \frac{4}{4^p} \dots\dots\dots\dots \quad (2)$$

siendo esta convergente, por cuanto es una progresión geométrica decreciente de razón $\frac{2}{2^p} < 1$, la serie

$$\sum_{x=1}^{x=n} \frac{1}{x^p} = \frac{1}{1^p} + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \dots\dots \quad (3)$$

lo será también pues sus términos son menores en valor absoluto que los de la (2) como resulta observando que el primer término es igual en ambas, la suma de los dos siguientes de (3) es menor que el segundo de (2) $\left[\frac{1}{2_p} + \frac{1}{3_p} > \frac{2}{2_p}\right]$ igualmente $\frac{1}{4^p} + \frac{1}{5^p} + \frac{1}{6^p} + \frac{1}{7^p} > \frac{4}{4^p}$.. etc.

Como en esta serie (3) la relación de un término al siguiente es

$$\frac{(n+1)^p}{n^p} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^p = 1 + \frac{p}{n} + \frac{p(p-1)}{2n^2} + \dots$$

Se vé facilmente que si la relación de un término al siguiente $\frac{u_n}{u_{n+1}}$ es en la serie (1) constantemente mayor que $1 + \frac{p}{n} + \frac{p(p-1)}{2n^2} + \dots$ dicha serie (1) será igualmente convergente desde que ya lo sería siendo

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^p$$

Luego, veamos si se verifica que

$$\text{lím} \frac{u_n}{u_{n+1}} > 1 + \frac{p}{n} + \frac{p(p-1)}{2n^2}$$

$$\text{ó lím} \frac{u_n}{u_{n+1}} > 1 \qquad \text{(a)}$$

$$\text{ó lím} \left(n\left[\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right]\right) > p + \frac{p(p-1)}{2n}$$

$$\text{ó lím} \left(n\left[\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right]\right) > p$$

Reemplazando los valores correspondientes de la serie (1) sacamos:

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} = \frac{x+1}{a+x} \therefore n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) = \frac{1-a}{\frac{a}{x}+1}$$

cantidad que para valores indefinidos de x tiene por límite $1-a$. Luego, la serie será convergente por cuanto hemos supuesto que a es menor que 1. Vemos que todo este largo raciocinio tiene en resúmen su eficacia en la aplicación del principio general de convergencia cuya metafísica hemos establecido.

Otro ejemplo

La fórmula (a) recién hallada permite demostrar ahora que la expresión indicada en la pág. 77

$$f(x) = \sum_{x=1}^{x=n} \frac{1}{\lfloor x}$$

y cuyo límite hemos llamado e según práctica, es convergente por cuanto $\frac{u_n}{u_{n+1}} = x+1$ cantidad que se conserva constantemente mayor que 1:

Funciones indefinidas continuas

2° *Funciones indefinidas*

a) x *admite valores contínuos*

Sea $f(x) = e^{\frac{1}{x}} \cos \alpha x$ que no satisface á la propiedad $f(x) - f(x_1) > \varepsilon$ en las condiciones de x, x_1 y ε indicadas en el principio de convergencia; esta función tiene como se vé por límites de indeterminación $+1$ y -1 quedando siempre superior á ellos respectivamente.

Series indefinidas

b) x *aumenta de una manera discontínua*

$$\text{Sea } f(x) = \sum_{x=1}^{x=n} (-1)^{x+1} \frac{x+1}{x} = \frac{2}{1} - \frac{3}{2} + \frac{4}{3} - \frac{5}{4} + \ldots.$$

Esta serie viene á ser la suma de las dos series siguientes:

$$\sum_{x=1}^{x=n} (-1)^{x+1} \frac{1}{x} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \ldots \ldots\ldots$$

$$\text{y } \sum_{x=1}^{x=n} (-1)^{x+1} = 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$$

La primera de estas es convergente porqué vemos facilmente que la suma de un número n de término es, llamándola S_n

$$S_n = S_{n-2} \pm \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right)$$

según sea n par ó impar; luego las sumas de un número par de términos crecen constantemente, mientras que las de un número impar decrecen de la misma manera; como la diferencia entre una y otra suma consecutiva es el último término $\frac{1}{n}$ y que tiene por límite cero cuando n crece indefinidamente, se vé que ambas sumas tendrán un mismo límite si es que una de ellas lo tiene; ahora escribiendo la serie en cuestión bajo las formas

$$\sum_{x=1}^{x=n}(-1)^{x+1}\frac{1}{x} = \left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{6}\right)+\dots \quad (1)$$

$$\text{y} \sum_{x=1}^{x=n}(-1)^{x+1}\frac{1}{x} = 1-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)-\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)-\dots \quad (2)$$

Se vé que la suma total no puede crecer indefinidamente según la (2), pero que aumenta constantemente según la (1), debe pues conservar un valor finito y como este valor permanece comprendido entre dos S_n consecutivas cuya diferencia tiene por límite cero, se deduce inmediatamente la existencia de un límite común á estas tres sumas [1], que en este caso es $\log_n 2$

En cuanto á la serie $1 - 1 + 1 - 1 + \dots$ es oscilatriz; sus valores varian entre 1 y 0, de manera que la función total tendrá los límites de oscilación ó indeterminación: $\log_n 2$ y $\log_n 2 + 1$.

Si se considera un número par de términos, las sumas

Convergencia en las series afectadas con signos alternativamente distintos en sus términos

(1) Esta última demostración prueba que en general: si los términos de una serie son alternativamente positivos y negativos y decrecen indefinidamente teniendo por límite cero, la serie es convergente.

Aplicando este teorema á las series de Machain indicadas en la pag. 77 y que dan el valor de π se vé que estas series son convergentes porqué efectivamente los términos generales de ellas

$$\frac{1}{(2x+1)\,5^{2x+1}} \quad \text{y} \quad \frac{1}{(2x+1)\,239^{2x+1}}$$

decrecen y tienen por límite cero cuando x aumenta indefinidamente.

correspondientes tendrán el límite $\log_n 2$; si se consideran un número impar $x = 2_n + 1$ las sumas consecutivas tendrán por límite $1 + \log_n 2$.

Funciones divergentes contínuas

3° *Funciones divergentes:*

a) x *toma valores contínuos.*

Sea $f(x) = a\,x$.

Se vé que $f(x) - f(x_1)$ puede ser mayor que cualquier cantidad; la función en cuestión es pues divergente como por otra parte se veía inmediatamente.

Series divergentes

b) x *solamente puede tomar valores discontínuos:*

Sea $f(x) = \sum_{x=1}^{x=n} \frac{1}{x} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots$ (serie armónica)

la expresión $f(x) - f(x_1)$ será:

$$f(x) - f(x_1) = \frac{1}{m = x_1} + \frac{1}{m+1} + \ldots\ldots + \frac{1}{m+n = x}$$

es fácil ver que esta suma puede ser mayor que cualquier cantidad. Para eso escribimos dicha suma de la siguiente manera:

$$\left(\frac{1}{2^p+1} + \frac{1}{2^p+2} + \frac{1}{2^p+3} + \ldots\ldots + \frac{1}{(2^p+2^p) = 2^{p+1}}\right) +$$

$$+ \left(\frac{1}{2^{p+1}+1} + \frac{1}{2^{p+1}+2} \qquad \frac{1}{(2^{p+1}+2^{p+1}) = 2^{p+2}}\right) +$$

$+ .$

Se vé que todos los términos de cada grupo son mayores que el último del mismo, repetido tantas veces como términos hay en él; luego llamando λ al número de términos en cuestión existente en cada grupo, y observando la constitución de éstos se vé que la suma de estos términos será mayor que $\lambda \frac{1}{2\lambda} = \frac{1}{2}$; por lo tanto, tomando un número bastante grande de grupos, la diferencia $f(x) - f(x_1)$ podrá ser mayor que cualquier cantidad por grande que sea.

*** *Límites singulares*

Sucede á veces que para algun valor del argumento, la fórmula ó ley que dá el valor correspondiente de la función toma una forma tal que no corresponde á ella ninguna representación determinada; sinembargo, para valores del argumento inmediatamente próximos á aquél, existe un valor especial X tal que á medida que aquellos se acercan al singular la diferencia entre X y la función desciende constantemente; se conviene decir entonces que X es el límite de $f(x)$ para valores de x que se aproximan al singular que llamaremos x_0.

Límite de una función para un valor del argumento al cual no existe correspondiente directo de la función

¿Reune realmente X las condiciones necesarias á un límite matemático? Es fácil ver que no, por cuanto si por hipótesis no corresponde un valor á la función para el valor x_0 del argumento, es ó bien porqué realmente este valor correspondiente no existe, ó porqué es indeterminado. En el primer caso, para que realmente X fuera un límite matemático sería necesario hacer perder á la función su carácter de tal, por cuanto como nada impide dar al argumento el valor que se quiera, habría que estipular que sentido se da á la función para ese valor x_0 del argumento, lo cual haría perder al concepto de límite su individualidad.

No es un límite matemático

En el segundo caso, existiendo un valor X de $f(x)$ que es uno de los tantos que toma la función para el valor singular x_0 del argumento, siendo aquel alcanzado no es un límite matemático.

Tomemos algunos ejemplos para aclarar las ideas:

Ejemplo

Sea $f(x) = \dfrac{x}{\text{sen } x}$ para el valor $x_0 = 0$ tendremos:

$f(x_0) = \dfrac{0}{0}$ expresión que indicando la relación entre un arco que no existe y un seno que no existe carece de sentido, sinembargo se demuestra facilmente que la expresión $\dfrac{x}{\text{sen } x}$ tiende á valer la unidad á medida que x se aproxima á cero. Si, entonces, desligamos á $f(x)$ de su relación con x considerándola bajo otro punto de vista en el asunto en que figura, por ejemplo si el cociente numérico $\frac{x}{\operatorname{sen} x}$ indicara el ángulo de una secante que se hiciera tangente para x_0 podría talvez: X = 1 así considerado, tomarse como un límite matemático de $\frac{x}{\operatorname{sen} x}$, por cuanto indicaría puramente un número, independientemente de los conceptos de senos y arcos; pero atendiendo unicamente al sentido aislado de $\frac{x}{\operatorname{sen} x}$ no podría decirse lo mismo.

Sea también $f(x) = (1 + x)^{\frac{1}{x}}$, para $x = 0$, $f(x)$ toma la forma $(1 + 0)^{\frac{1}{0}}$ símbolo que á nada corresponde desde que $\frac{1}{0}$ carece de significado, quiere decir esto que $f(x)$ no tiene valor correspondiente á $x = 0$, sinembargo se demuestra facilmente que á medida que x tiende á cero $f(x)$ se aproxima á valer la cantidad llamada $e =$ lím. $\sum_{x=1}^{x=n} \frac{1}{|x}$; como aquí no hay sino cantidades de una misma especie, acercándose $f(x)$ á e (para valores de x que se aproximan á cero) sin poder alcanzarlo, e será un verdadero límite matemático.

Igualmente en $f(x) = x^x$, para $x = 0$ tendremos $f(x) = 0^0$ expresión que puede ó no tener significado según la naturaleza de la cuestión, pero en ningún caso el valor 1 hácia el cual tiende $f(x)$ cuando x tiende á cero es un límite matemático, pues este exige siempre la existencia entre él y los demás valores de un símbolo del infinito: ó $\infty \frac{1}{0}$ que establezca un abismo infranqueable entre ellos. Tomemos finalmente $f(x) = \frac{(x-1)^m - 1}{x - 2}$; para $x = 2$; $f(x) = \frac{0}{0}$ expresión que satisfaciéndose con cualquier valor, hace ver que para ese valor del argumento, el valor m al cual se aproxima $f(x)$ cuando x se acerca de 2 es uno de los tantos que puede adquirir $f(x)$ para $x = 2$, no es pues un límite matemático.

En resúmen esos valores especiales solo pueden considerarse como límites usuales, es decir como barreras que pueden ser alcanzadas y no como límites verdaderamente matemáticos cuyo principal carácter es el no poder ser jamás alcanzados.

Estos límites son simples barreras usuales

Sin embargo, por lo mismo que ofrecen un carácter singular, es conveniente darles el de límite matemático, para lo cual basta sustraer la función de la eventualidad de alcanzar estos valores. Esto se consigue sustituyendo el argumento por otro, función de aquel, y tal que crezca indefinidamente á medida que el primero se aproxima al valor singular x_0.

Pueden, por un cambio de variables transformarse en verdaderos límites matemáticos

Llamando χ al nuevo argumento pondremos

$$x - x_0 = \frac{1}{\chi}$$

y entonces habremos restablecido el límite matemático pues para hacer $x = x_0$ se necesitaría aumentar indefinidamente χ sin jamás conseguirlo. Los ejemplos anteriores se indicarían entonces de la siguiente manera

$$\lim f(\chi) = \frac{\operatorname{sen} \frac{1}{\chi}}{\frac{1}{\chi}} = 1$$

$$\text{lím } f(\chi) = \left(1 + \frac{1}{\chi}\right)^{\chi} = e$$

$$\text{lím } \left(\frac{1}{\chi}\right)^{\left(\frac{1}{\chi}\right)} = 1$$

$$\text{lím } \frac{\left(1 + \frac{1}{\chi}\right)^{m} - 1}{\frac{1}{\chi}} = m$$

La variación del argumento primitivo será pues reemplazada por la del nuevo así ligada con él, y el cual no será ya variable independiente. (1)

Con esta modificación, las teorías y criterios de con-

(1) Esto prueba lo dicho anteriormente: que para introducir en estos casos singulares el concepto de límite matemático hay que alterar las nociones ordinarias de argumento y función tal cual han sido definidas.

vergencia y divergencia aplicadas al caso en que el argumento crece indefinidamente, único que puede originar la noción de límite por lo mismo que no hay término en el crecimiento, se aplicarán igualmente al de estos límites singulares. Volveremos sobre este tema al tratar la metafísica del alto cálculo.

**** *El concepto del argumento*

El concepto del argumento

Para terminar con el concepto de límite matemático es conveniente mencionar la noción que el idealista y el empirista se forman del argumento de una función, tema sobre el cual G. Cantor y P. du Bois Raymond han hecho tan interesantes estudios. Considerando el argumento como una cantidad matemática lineal puede suponerse tomado sobre una recta arbitraria cuyas extremidades llamaremos o — 1, á partir de o hácia 1. Para determinar ese argumento sería necesario indicar que relación hay entre él y la longitud o — 1 tomada como unidad de medida; el número que resulta podrá servir también para definir un valor de argumento.

Pantaquias y Apantaquias en los valores del argumento

Las fórmulas que determinan valores especiales del argumento, pueden dividirse en dos clases principales; aquellas tales que en cualquier porción del intervalo o — 1 del argumento, por pequeña que sea, se presentan extremos de longitudes pertenecientes á ellos, y las que no están sometidas á esa condición.

La primera distribución de valores se llama *pantaquica* la segunda *apantaquica*. También se llama *pantaquia* al conjunto de valores encerrados en la primera distribución; y *apantaquia* á la otra.

Ejemplo de una apantaquia:

$$x = \frac{\alpha_1}{10} + \frac{\alpha_2}{10_2} + \ldots\ldots + \frac{\alpha_{10}}{10^{10}} \qquad (1) \quad \alpha_p < 10$$

esta comprende todos los valores que se obtienen haciendo todas las combinaciones de los α_p (de o á 9).

Ejemplos de apantaquias y de pantaquias

Ejemplo de un pantaquia:

$$x = \frac{\alpha_1}{10} + \frac{\alpha_2}{10^2} + \ldots\ldots\ldots \frac{\alpha_n}{10_n} \qquad (2) \quad \alpha_p < 10$$

n indica un número grande á voluntad creciendo indefinidamente.

Los valores de una apantaquia pueden paulatinamente aproximarse á un valor fijo que le sirva de límite y cuyo extremo se llama punto de convergencia; tal sucede con los valores

Puntos de convergencia de varias clases

$$x = \frac{3}{10}; x = \frac{3}{10} + \frac{3}{10}; x = \frac{3}{10} + \frac{3}{10^2} + \frac{3}{10^3} \ldots$$

etc. los cuales extremos convergen al punto extremo del valor $x = \frac{1}{3}$

Los puntos de convergencia pueden presentarse en un intervalo tantas veces como se quiera, por ejemplo en $0 = \text{sen}\,\frac{1}{\text{sen}\,ax}$ para valores de a bastantes grandes y converger á su vez hácia otros puntos de convergencia llamados de segundo orden como en $\text{sen}\,\frac{1}{\text{sen}\,\frac{1}{x}} = 0$ alrededor del punto 0 y así sucesivamente. Esta última clase de *apantaquia* se llama *ilimitada*; la primitiva correspondiente al ejemplo (1) dado más arriba se llama *limitada*.

Apantaquia ilimitada y limitada

Consideremos la determinación especial:

$$x = \lim \left(\frac{\alpha_1}{10} + \frac{\alpha_2}{10^2} + \ldots . \frac{\alpha_n}{10^n}\right)$$

Vimos que para el idealista esta forma permite designar cualquier valor del intervalo $0 - 1$, es pues el símbolo de la continuidad y se llama *pantaquia completa*, contiene una infinidad de valores.

Pantaquia completa

El resultado de quitar de esta pantaquia completa una pantaquia ordinaria ó una apantaquia las cuales contienen un número ilimitado ó no de valores, se llama una *pantaquia infinita*.

Pantaquias infinitas

Como se vé, en el concepo de argumento intervienen conjuntos ilimitados de valores y es conveniente por lo tanto introducir orden en ellos aplicando el concepto de enumeración.

El concepto de la enumeración

Un grupo limitado de objetos es evidentemente enumerable desde que puede asignarse á cada uno un número de orden; si el conjunto es ilimitado será también enumerable si su naturaleza permite hacerlo corresponder con la serie de números enteros, de tal manera que ningún elemento del conjunto escape á esa correspondencia.

Según esto, un conjunto ilimitado de valores de argumento es enumerable si la fórmula que establece su aumento permite conservar finito su número; tal sucede con las apantaquias limitadas y las pantaquias ilimitadas. No sucede lo mismo con las apantaquias ilimitadas según se entiendan en el sentido idealista ó en el empirista.

Las apantaquias ilimadas en el sentido idealista no son enumerables

Efectivamente, en estas apantaquias hay pasajes al límite, pues los puntos de convergencia de cualquier clase constituyen el límite de la serie de puntos de clase inmediatamente anterior, si pues consideramos con el idealista estos conjuntos como constituidos: primero, por los puntos aislados que convergen al punto de convergencia de primera especie, considerando luego, todo el grupo anterior y repitiéndolo en cada punto de convergencia de segunda especie....., etc.; estos conjuntos infinitos así sumados no podrían disponerse en serie y por lo tanto enumerarse.

Lo son en cambio consideradas en el sentido empirista

El empirista, en cambio, no vé más que grupos finitos y rechaza los límites idealistas en la especulación; considera en consecuencia la apantaquia ilimitada, como compuesta de la manera siguiente: A cada punto de convergencia del orden n corresponde un número finito m de grupos de orden $n - 1$, cada uno de estos contiene á su vez p subgrupos del orden $n - 2$ y así sucesivamente hasta llegar á los puntos aislados. Dando n; m, p..... valores crecientes ya alternativamente, ya simultáneamente puede hacerse la combinación de ellos de tal manera que ningún punto de la apantaquia escape á la enumeración.

Las Pantaquias completas é infinitas no son enumerables

Pasemos ahora á la pantaquia completa y á las infinitas; existe entre éstas y las ilimitadas una relación análoga á la existente entre las apantaquias ilimitadas idealistas y las empiristas, pues, lo mismo que en los sistemas apantáquicos ilimitados aparecen puntos que no existen en las empiristas y que vienen á ser límites de los grupos y subgrupos que componen esta última. Igualmente en la pantaquia completa que llama M. Cantor *el continuum de los números*, y en las infinitas, entran puntos límites que no existen en la pantaquia ilimitada, solo que mientras que los puntos de convergencia podrían introducirse en la apantaquia ilimitada empirista sin hacer perder á ésta su enumerabilidad, la pantaquia completa contiene en cambio, más elementos que cualquier serie de valores enumerables y carece en consecuencia de la propiedad de la enumerabilidad.

Contienen más elementos que los conjuntos enumerables

El hecho de que la pantaquia completa contenga más elementos que cualquier serie enumerable, ó mayor potencia que ésta, como se dice, resulta de que la numeración implica la divisibilidad, y con ésta, según vimos, no podemos alcanzar á la continuidad sin prolongarla hasta el infinito idealista que escapa á la enumeración; ésta pues es impotente para agotar todos los valores de la pantaquia completa; entre dos valores racionales de ésta, habrá otros muchos irracionales que escaparán á dicha enumeración, por cuanto, siendo límites de series de valores no podrán ser nunca alcanzados, de manera que en el intervalo total serán infinitos los valores que se encuentran en estas condiciones.

Las pantaquias infinitas se deducen de la completa, quitando á estas otras pantaquias ilimitadas ó bien apantaquias; como estas dos últimas son enumerables y aquella no, las primeras tampoco lo serán.

Las pantaquias infinitas son ficciones idealistas

Las pantaquias infinitas son, como se vé, ficciones enteramente idealistas; el empirista las rechaza por completo. La incompatibilidad de estas dos intuiciones es aquí más radical que la existente entre las apantaquias ilimitadas de ambas escuelas, pues si bien es cierto que el concepto empirista de los conjuntos ilimitados es idéntico al de las series enumerables debido á que la enumeración supone algo constantemente fijo, no obstante, la apantaquia idealista puede considerarse como el límite de la empirista. Así en el ejemplo de apantaquia

La apantaquia idealista es el límite de la empirista

$$x = \frac{3}{10} + \frac{3}{10^2} + \frac{3}{10^3} + \ldots\ldots \frac{3}{10^n}$$

las extremidades de los valores de ésta se aproximan indefinidamente al punto de convergencia $x = \frac{1}{3}$ de manera que eliminando este la única diferencia entre el concepto empírico y el idealista es que aquel concluye la apantaquía en un valor de n grande á voluntad en tanto que este lo prolonga hasta que los extremos de los distintos valores disten unos de otros en una cantidad infinitamente pequeña.

La pantaquia completa no es límite de las ilimitadas

No podemos decir lo mismo con la pantaquia completa definida por el símbolo

$$= \text{lím} \left(\frac{\alpha_1}{10} + \frac{\alpha_2}{10^2} \cdots \frac{\alpha_n}{10^n} \right); \ \alpha_p \quad 0, 1, 2, \ldots, 9$$

Esta no puede considerarse como el límite de la pantaquia limitada, esencialmente empírica; ya lo hemos hecho ver más arriba, por mucho que se aumente la serie de valores de una pantaquia limitada será necesario un pasage al límite para obtener *un solo valor* de la pantaquia completa de manera que para obtener esta última se requeriría una infinidad de estos límites. No existe pues en resúmen pantaquia ilimitada alguna tal que poco á poco se introduzca en ella valores nuevos en virtud de una regla cualquiera de manera á poder hacerla aproximar indefinidamente á la pantaquia completa ó á una infinita. El concepto empírico, sin negar como ya lo manifestamos en otra oportunidad, la existencia del *continuum*, lo rechaza de la especulación científica porque escapa á la representancia y determinación numérica, y se contenta con lo grande ó pequeño á voluntad; así, sobre la longitud 0 — 1 de argumento toma una serie tan densa de valores como su necesidad ó imaginación lo requiera; y es de observar que esto le basta para llegar á cualquiera consecuencia científica obtenida por el idealista. Hasta en la teoría general de las funciones, la correspondencia entre el argumento y la función entra en el concepto empírico. En cambio el idealista al aplicar á sus pantaquias infinitas las propiedades deducidas de las ilimitadas, cae facilmente en consecuencias paradojas, como veremos más adelante.

Consideraciones finales entre la concepción empírica y la idealista del concepto de argumento

Los principales autores que han profundizado el tema de este capítulo han sido:

Bibliografía del concepto de límite matemático

G. Cantor—Propiedades y teorías de los conjuntos—Journal de Borch, tomos 77.84—Acta Matemática, t. 2.

H. Grassmann—Zur theorie der erdunhgen analytischen Fonctionnen, pág 26.

K. Weierstrass—Bulletin des sciences mathematiques et astronomiques (t. V pág. 157, Obras, Berlin 1895-6).
C. F. Gauss—Obras (1777-1855).
A. Cauchy—Cours d'Analyse a l'Ecole Polytechnique 1831, París.
Niels H. Abel—Obras tomo II (1802-29).
P. G. Lejeune Dirichlet—Journal de Crelle tomo IV—Journal de Liouville tomo VII.
U. Dini—Fondamenti per la teoria delle funzioni di variabili reali, Pisa 1878.
E. Heine—Journal de Crelle, tomo LXXIV.
J. M. C. Duhamel—Obra citada.
Jules Tannery— id. id.
P. du Bois Raymond—Obra citada, Journal de Crelle.
J. T. Bonnel—Les atomes et hypothéses dans la Geometrie, 1899 París, Hermann.
C. de Freycinet—Obra citada.
Hall & Knight—Higher Algebra, New York 1887.
Hannequin—Essai sur l'hypothéses des atomes, 1899. —
etc., etc.

SEGUNDA PARTE

EL ANÁLISIS LLAMADO INFINITESIMAL Ó ALTO ANÁLISIS

CAPÍTULO PRIMERO

El método infinitesimal

§ I. Generalidades

Propósito y fundamento del análisis infinitesimal

Cuando se presenta ante el espíritu una representación complicada, siente aquel un malestar característico, y por tendencia natural no para hasta conseguir reducirla á otras más sencillas y familiares que no turban su quietud normal. Así, cuando vemos una línea de curvatura antojadiza, un cuerpo de contornos complicados, buscamos disgregar, parcelar estas representaciones hasta obtener la de una línea recta, de una circunferencia, de un plano ó de una esfera, las cuales siéndonos familiares y comunes, constituyen los elementos primos á que tratamos de reducir todas las representaciones. La manera de proceder para llegar á estos resultados y obtener finalmente el conocimiento perfecto de la representación complicada, constituye el objeto del análisis llamado infinitesimal.

Método y cálculo infinitesimal

En este análisis, lo mismo que en el ordinario, debe distinguirse: el *método*, es decir la manera de plantear el problema, y el *cálculo* llamado en este caso *cálculo infinitesimal* ó *alto cálculo*, que nos enseña la manera de resolver las ecuaciones especiales obtenidas al plantear el problema.

Diferencia entre el método del análisis ordinario y el infinitesimal

Pero, mientras que por el método del análisis ordinario se obtiene directamente la propiedad ó resultado buscado deduciéndolo de principios conocidos, el método infinitesimal procede en cambio de una manera indirecta, pues sustituye la representación dada por otras más sencillas que puedan combinarse y variarse hasta hacerlas aproximar indefinidamente á aquella de manera que sea su límite matemático. Busca la ley de variación de esos auxiliares, y lo que en esta variación permanece fijo é inmutable; finalmente de esta constancia deduce, aplicándolo á los límites, las propiedades buscadas. Esta vía indirecta y este rodeo no son antojadizos sino impuestos por la deficiencia de nuestro espíritu.

Ejemplos

Un ejemplo aclarará las ideas anteriores. Si queremos buscar el volúmen de un cubo, procederemos directamente sobre él, combinando por vía deductiva los conocimientos previos que tenemos adquiridos; pero si en vez buscamos el volúmen de un elipsoide, nos vemos obligados para esa investigación á reemplazar este cuerpo por la suma de otros más sencillos cuyo límite matemático sea el del elipsoide dado; si conseguimos obtener una expresión que nos dé el volúmen de esta suma de cuerpos auxiliares y que contenga elementos de tal naturaleza que permitan aplicarla cuando el número de dichos cuerpos auxiliares aumenta indefinidamente, buscando el límite matemático de dicha suma obtendremos por esta vía indirecta el volúmen buscado. El primer método es el del análisis ordinario, el segundo el del infinitesimal.

Fundamentos del método infinitesimal

El fundamento de este método, es decir la afirmación de que toda relación existente constantemente entre las variables subsistirá también entre los límites de estas, se comprende por cuanto pudiéndose aproximar las variables á sus límites y pasar de estas á aquellos por la concepción idealista ó por la empirista, la relación en cuestión se aproximará también de la misma manera á la correspondiente entre los límites.

En resúmen, el método llamado infinitesimal consiste en reemplazar la representación dada por otras auxiliares susceptibles de aproximarse á aquella indefinidamente, de manera á que la primitiva sea el límite matemático de las nuevas, y en preocuparse luego de determinar entre estas últimas las relaciones que no era posible obtener directamente en la primera. Para que este procedimiento sea eficaz se requiere por lo tanto que sea más fácil obtener las relaciones buscadas en las representaciones auxiliares que en la dada, y si bien es cierto que se dispone de muchos sistemas de variables teniendo un mismo límite, no lo es menos que á veces los resultados son infructuosos y el problema supera los esfuerzos del investigador. Aunque no hay regla fija para el empleo de este método, existen sinembargo observaciones y criterios que pueden ser útiles al analista, y que cooperan eficazmente á la mejor investigación. Pero, un estudio más detenido del asunto exige la intervención del concepto de las cantidades indefinidamente pequeñas de distintos órdenes.

Dificultades del empleo del método infinitesimal

§ 2. Los llamados infinitamente pequeños de distintos órdenes.

Volveremos á tomar el asunto de los infinitamente pequeños en el estado en que los dejó anteriormente la escuela idealista. Esta última, á la pregunta: ¿cuantas extremidades de longitudes distintas existen en la longitud total o — 1 tomada como unidad suponiéndoles á todas el extremo o común? contesta diciendo que este número es ilimitado en la representación é infinito en la realidad, de manera que la distancia que separa dos extremidades consecutivas es infinitamente pequeña; saca también en consecuencia que un número finito de extensiones infinitamente pequeñas agregadas no pueden dar una extensión representable, deduce igualmente que como á cada extensión corresponde un número, la serie de números comprendidas entre o y 1 es infinita, y también que correspondiendo á cada extensión un número de orden, la serie de números es infinita, en tanto que la de números racionales que supone un individuo que mide es ilimitado, finalmente concluye con esta proposición paradojal:

Consecuencias de la escuela idealista sobre los infinitamente pequeños

Dos cantidades representables cuya diferencia es infinitamente pequeña son iguales por cuanto el infinitamente pequeño escapa á la representación.

El cero y el infinitamente pequeño

De esta última proposición, se desprende que para el idealista, el cero es un símbolo inútil. Cree aquel que no siendo el cero una cantidad, parece un acto violento de la imaginación destruir una cantidad matemática indeterminada para crearle después nuevamente. Para él una cantidad variable designa una serie de representaciones de misma expecie y anular lo que se supone variable es introducir una representación nueva en el conceptos de cantidad, por un acto especial de la voluntad. Cree en resúmen, que el cero es inútil en el análisis y lo reemplaza por un infinitamente pequeño. Luego, la escala de valores de la cantidad matemática es, para el idealista la siguiente:

Escala de cantidades para el idealista

infinitamente pequeño	no representable
ilimitado en pequeñez	(representable)
finito	( )
ilimitado en grandor	(»)
infinitamente grande	no representable

Consecuencias de la exclusión del cero

La exclusión del cero debe necesariamente influir en la termitología idealista, así la expresión de que hemos hablado anteriormente: $(1 + x)^{\frac{1}{x}} = e$ para $x = 0$ se enunciará: e es el valor de $(1 + x)^{\frac{1}{x}}$ cuando x es infinitamente pequeño. No dirá el idealista que el polinomio $x^2 - 3x + 2$ se hace cero para $x = 1$ ó $x = 2$ sino que para estos valores se vuelve infinitamente pequeño. No dirá tampoco que $\frac{1}{x}$ se vuelve infinitamente grande cuando x se aproxima á cero, sino que para x infinitamente pequeño $\frac{1}{x}$ es infinitamente grande, etc.

Termitología idealista

La teoría idealista atomística reemplazará la expresión infinitamente pequeña por la de átomo y dirá en consecuencia x^x se vuelve igual á la unidad para un valor de x atómico.

Estas doctrinas alteran pues singularmente el concepto

Distinción de órdenes en los nfinitamente pequeños

de igualdad y de exactitud, pero mucho peores son las consecuencias á que arriba el primer idealismo cuando introduce la distinción de ordenes en los infinitamente pequeños separándose aquí radicalmente de la teoría atómica.

He aquí el raciocinio que hace el idealista para llegar á los distintos órdenes de infinitamente pequeños:

Infinitamente pequeños del orden *n*

Si bien es cierto que el infinitamente pequeño no es representable, puede considerarse en si mismo, abstracción hecha de su relación con lo representable; aparecerá entonces como una cantidad de igual naturaleza á la originaria, por ejemplo si esta es una longitud, también lo será aquél. Aplicándole entonces los mismo raciocinios que para las cantidades finitas podremos decir: *El infinitamente pequeño es una cantidad matemática que tiene de común con lo finito, el conjunto de sus propiedades.* En consecuencia puede hacerse con él una operación análoga á la que lo ha sacado de las cantidades finitas y obtenerse así una cantidad infinitamente pequeña con respecto á el mismo, ó sea doblemente infinitamente pequeño ó de segundo orden respecto á la cantidad finita primitiva. Y así sucesivamente. Luego: *Un infinitamente pequeño de orden* n *no aumenta á uno de orden* n 1; *y dos infinitamente pequeños de orden* n *son iguales si solo se diferencian en otro de orden superior.*

Inconsistencia de la doctrina idealista de los infinitamente pequeños de diversas órdenes

¿Quién no siente la inconsistencia de esta doctrina? Si los infinitamente pequeños pueden descomponerse en una suma de infinitas cantidades infinitamente pequeñas de segundo orden, porqué no tomar estas últimas como elementos constitutivos de la cantidad representable. De dos cosas una, ó los infinitamente pequeños son los últimos elementos de la descomposición de la cantidad finita y entonces son átomos incapaces de descomponerse en otros menores sin anularse, ó no lo son y entonces no hay porqué hacer de ellos una distinción especial.

Los infinitamente pequeños de distintas órdenes y los átomos

Aceptando la teoría de los distintos orden en los infinitamente pequeños, el átomo vendría á ser un *infinitamente pequeño de orden infinito*, frase perfectamente hueca, un verdadero juego pueril de palabras.

Se trata á veces de justificar esta teoría observando que cuando una cantidad menor que la unidad se eleva á una potencia, los resultados obtenidos son siempre menores que la base, de manera que elevando al cuadrado. al cubo, etc., un infinitamente pequeño obtendremos otros necesariamente menores. Todo esto es fraseología, por cuanto el simbolismo puro nada significa por sí solo; de manera que si una cantidad representa, por ejemplo una longitud, y se eleva al cuadrado, ó este cuadrado representa una área en cuyo caso sale de la cuestión, puesto que estamos considerando longitudes, ó bien el cuadrado se refiere únicamente al número que establece la medida de la longitud y entonces debe necesariamente concluir por carecer de significado toda vez que si aplicara al átomo de longitud, no podría significar una longitud menor, de acuerdo con el concepto de átomo.

Esto justifica lo dicho por el empirista; ó sea: que los átomos é infinitamente pequeños son entidades impropias para una especulación matemática, pues cuando se les somete á los cálculos ordinarios, revolucionan el concepto de cantidad y hacen caer en absurdos, paradojas y contrasentidos.

La teoría empírica de los indefinidamente decrecientes

A la teoría idealista de los infinitamente pequeños de distintas órdenes corresponde la teoría empirista de las cantidades indefinidamente decrecientes que pasamos á desarrollar.

Indefinidamente decrecientes de distintos órdenes

Imaginemos cantidades variables, funciones unas de otras y tales que haciendo tender una de ellas hácia cero; las otras tiendan también hácia cero; es posible que no todas ellas marchen hácia dicho cero con igual rapidez, si elegimos entre ellas la que disminuye con menor rapidez relativamente á las otras, esta, que designaremos con la letra α, se llama indefinidamente decreciente principal, se dirá entonces que una cualquiera de las otras β es indefinidamente decreciente del orden n con respecto á α, si n es la primera potencia de α, tal que $\frac{\beta}{\alpha^n}$ tiende á valer una cantidad finita distinta de cero cuando α tiende á cero; la expresión $\beta = \alpha^n (L + \gamma)$ es la de un indefinidamente decreciente de orden n.

Ejemplos

Por ejemplo, si en una circunferencia de círculo tomamos un punto de ella y trazamos la tangente en dicho punto y el diámetro que pasa por él, y si después elegimos un arco que tenga un extremo en el punto dado, el otro extremo del diámetro y del arco determinan una secante que corta á la tangente en un punto T. La variación de la longitud del arco que supondremos, decrecer indefinidamente acarreará otra de la cuerda, de la parte de tangente comprendida entre el punto de tangencia y el T, y de la porción de secante limitada entre la tangente y el arco. Pues bien, se demuestra facilmente que á medida que el arco decrece indefinidamente y tiende á cero, lo mismo sucede con los demás elementos citados, pero mientras la relación entre la porción de tangente y el arco tiende á valer la unidad, la relación entre la porción de secante y el arco tiende á cero, siendo necesario relacionar dicha porción de secante con el cuadrado del arco ó de la porción de tangente para que tienda hácia una cantidad finita, esto hace ver que la porción de secante en cuestión, es un indefinidamente decreciente de segundo órden en tanto que el arco, la cuerda y la tangente lo son de primer orden. Lo mismo se demostraría que la diferencia entre el arco y la cuerda es un indefinidamente pequeño de tercer orden respecto del arco.

La marcha de estas distintas cantidades hácia cero no es pues igualmente apresurada, y como el empirista solo especula con cantidades finitas, aunque pequeñas á voluntad, no está aquel expuesto á las contradicciones de las teorías idealistas. Es indudable que á medida que las cantidades indefinidamente decrecientes se aproximan á cero, las de órden superior se distancian cada vez proporcionalmente más y más de los de órden inferior de manera que en una suma de cantidades de esta clase las de orden $n+1$ concluirán por afectar tan poco las de orden inferior que practicamente podrían aquellas despreciarse, exactamente como sucedía en la teoría de los infinitamente pequeños idealistas; pero mientras el idealista cree que á pesar de la despreciación de estos infinitamente pequeños de orden superior, las ecuaciones resultantes son rigurosamente iguales á las primeras, el empirista no se hace las mismas ilusiones, y no pretende en

Diferencia entre las ecuaciones idealistas y las empiristas sus ecuaciones una exactitud absoluta, sino simplemente una aproximada tanto como se quiera.

Los indefinidamente pequeños pueden tener á cero por límite matemático ó no según como estén determinados

Conviene observar que *cero* puede ó no ser el límite matemático de los indefinidamente pequeños según como estén estos determinados. Así, si en el ejemplo anterior el arco que tiende á cero es la variable independiente, su límite no será cero ni tampoco el de las obras líneas ó cantidades derivadas, por cuanto nada impedirá darles este valor, pero, si en vez el arco viene fijado por los lados de un polígono inscripto en la curva y cuyo número aumenta indefinidamente no pudiendo anularse el valor de un lado, tampoco lo podrá el arco y todos sus derivados á pesar de decrecer indefinidamente, cero será entonces el límite matemático de esas cantidades indefinidamente decrecientes.

Continuación de la explicación del método infinitesimal

Podemos ahora completar la explicación del método infinitesimal.

Cantidades que se diferencian en un indefinidamente decreciente tienen el mismo límite

Si dos cantidades variables funciones ambas de un mismo argumento tienden cada una hácia un límite, y si la diferencia entre los valores de ellas, correspondientes á un mismo valor del argumento, se vuelve indefinidamente decreciente (teniendo en este caso *cero* por límite matemático según lo dicho recién) los límites de dichas dos funciones son iguales. Efectivamente, siendo también la diferencia de los valores correspondientes de las funciones otra función del mismo argumento cuyo límite es cero, se tiene:

$$f(x) - \varphi(x) = \psi x$$

$$\therefore \ \text{lím}\,(f(x) - \psi(x)) = 0 \ \therefore \ \text{lím}\, f(x) = \text{lím}\, \varphi(x).$$

Relación entre los indefinidamente decrecientes de mismo orden que se diferencian en otro de orden superior. Tienen el mismo límite

Sea ahora varios indefinidamente decrecientes de mismo orden funciones de un mismo argumento; si la diferencia entre los valores correspondientes (á uno mismo del argumento) de dos de dichos indefinidamente decrecientes de mismo orden es otro de orden superior, la relación entre aquellos y otro de igual orden tiene un mismo límite matemático.

Efectivamente sea $f(x)$ y $f_1(x)$ los dos indefinidamente decrecientes de mismo orden, $\varphi(x)$ el que sirve de término de comparación y $\psi(x)$ la diferencia, de orden superior, entre $f(x)$ y $f_1(x)$ tendremos:

Demostración de la proposición

$$f_1(x) = f(x) + \psi(x)$$

$$\frac{f_1(x)}{\varphi(x)} = \frac{f(x)}{\varphi(x)} + \frac{\psi(x)}{\varphi(x)};$$ como por hipótesis $\varphi(x)$ es indefinidamente decrecientes de orden superior á $f(x)$, $f_1(x)$ y $\varphi(x)$ tendremos:

$$\text{lím}\left(\frac{f_1(x)}{\varphi(x)} - \frac{f(x)}{\varphi(x)}\right) = 0$$

$$\text{ó lím}\frac{f_1(x)}{\varphi(x)} = \text{lím}\frac{f(x)}{\varphi(x)}$$

$$\text{ó también } \frac{f_1(x)}{f(x)} = 1 + \frac{\psi(x)}{f(x)} \therefore \text{lím}\frac{f_1(x)}{f(x)} = 1$$

Consecuencia de estos principios

La consecuencia de estos dos principios es que, cuando en el curso de una operación se debe tomar el límite de funciones no indefinidamente decrecientes de un mismo argumento que se diferencian en un indefinidamente decreciente, ó bien cuando se debe tomar el límite de la relación de dos indefinidamente decrecientes de mismo orden que solo se diferencian en otro de orden superior con otro de mismo orden que aquellos, se puede desde ya eliminar, en el primer caso, los indefinidamente pequeños, en el otro, los de orden superior, pues las ecuaciones que resulten, si bien inexactas provisoriamente, recuperarán su exactitud en el resultado final obtenido por el pasage al límite desde que al hacer esta última operación habrían necesariamente desaparecido los términos correspondientes á las cantidades eliminadas cuyo límite es cero. El resultado no ha sido pues afectado y hemos conseguido despejar notablemente las fórmulas quitando cantidades que complican la marcha de las operaciones sin influir finalmente en la ecuación terminal.

Eliminación en los cálculos de cantidades que lo complican y no influyen en el resultado

Vice-versa, en un raciocinio donde deba tomarse límites, puede reemplazarse provisoriamente una cantidad variable que no sea indefinidamente decreciente por otra que no difiera de aquella sino en una cantidad de esta última especie ó bien por otra de orden superior si la primitiva es indefinidamente decreciente. Los resultados no serán alterados por cuanto al tomar límites los términos correspondientes á las cantidades agregadas se anularán.

Recíproca introducción en las fórmula de cantidades que no afectan el resultado final

Límite de la relación entre la suma de dos series de cantidades indefinidamente decrecientes tales que la diferencia entre dos correspondientes es un indefinidamente decreciente de orden superior

Consideremos ahora una serie de cantidades indefinidamente decrecientes de mismo argumento x y supongamos otra serie de cantidades de la misma especie, tales que á cada una de las primeras corresponda una determinada de las segundas, si la diferencia entre dos correspondientes es otro indefinidamente decreciente de orden superior (como sucede por ejemplo, según vimos, con el arco de una curva y la cuerda correspondiente, siendo x el número de lados de un polígono inscripto ó circunscripto en ella, cuando dicho número aumenta indefinidamente), se verifica que si la suma de la primera serie $\Sigma f(x)$ tiene un límite, la otra suma $\Sigma\ \varphi(x)$ tiene también el mismo límite. En efecto la relación de dos valores $f(x)$ y $\varphi(x)$ correspondientes tiene, según el principio anterior, por límite la unidad, es decir

$$\text{lím}\ \frac{f(x)}{\varphi(x)} \quad 1$$

pero la expresión $\frac{\Sigma f(x)}{\Sigma \varphi(x)}$ está comprendida entre el mayor y el menor de los $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ y como estos tienen todos por límite la unidad, resulta que también

$$\text{lím.}\ \frac{\Sigma f(x)}{\Sigma \varphi(x)} \quad 1 \quad \text{ó lím.}\ \Sigma f(x) \quad \text{lím.}\ \Sigma\ \varphi(x)$$

Consecuencia: Sustitución de indefinidamente decrecientes en los límites de sumas de ellos

La consecuencia de esto es que en todo raciocinio donde deba tomarse el límite de una suma de cantidades cuya pequeñez es función de su número, puede reemplazarse cada una de ella por otra que se diferencie de la misma en una cantidad indefinidamente decreciente de orden superior, es decir, cuya relación con las primeras tenga por límite la unidad cuando el número de aquellas crezca indefinidamente; y vice-versa, porqué el error que provisoriamente se comete de esta manera, desaparecerá en el resultado final obtenido pasando á límites.

Importancia de estos principios para el método infinitesimal

Se comprende facilmente la utilidad de estos principios para el método infinitesimal, pues proponiéndose éste según vimos, efectuar indirectamente el estudio de las propiedades de una representación complicada haciéndole depender de una aplicación del cálculo infinitesimal á las ecuaciones que obtiene aquel reemplazando (por fraccionamiento ó disgregación) la representación primitiva por otros familiares de manera que aquella pueda considerarse, ya como límite de la suma de un número indefinidamente creciente de estas, supuestas indefinidamente pequeñas, ya como dependiendo en su determinación de la de un límite entre la relación de dos de las auxiliares ó de derivadas de ellas cuando se hacen indefinidamente decrecientes en valor, serán, decimos, de capital importancia, los principios anteriormente demostrados por cuanto versan precisamente sobre estos límites de sumas ó de relaciones de cantidades indefinidamente decrecientes y permiten eliminar los términos de corrección que habría necesariamente que poner al reemplazar los representaciones primitivas por las nuevas que establecen la diferencia entre ellas, los cuales términos de corrección molestan y fastidian los cálculos sin influir en el resultado. Hay, sin embargo, que obrar con mucho cuidado en estas eliminaciones para no falsear los resultados. Si, por ejemplo, los miembros y términos de las ecuaciones finales obtenidas no son indefinidamente pequeños, no será alterado el resultado al quitar ó agregar á aquellas, cantidades que tienden al límite cero cuando las primeras tiendan al límite correspondiente; pero si en cambio los miembros y términos de las ecuaciones primitivas fueran indefinidamente decrecientes, para hacerlas determinar algo sería necesario dividirlo por otra cantidad indefinidamente decreciente de orden igual al menor existente en ellos y entonces solamente podrían eliminarse los de órden más elevado; de manera que si en las ecuaciones primitivas, la confianza ó creencia de que en el resultado final no han de aparecer sino cantidades con límites distintos de cero, hace que eliminemos los indefinidamente pequeños de cualquier orden, y resulta después que por compensaciones fortuitas y no previstas estas cantidades con límites distintos de cero desaparecen, dicho resultado, que dependería ahora de las cantidades eliminadas, será evidentemente falseado. Este peligro lo evita el tino y práctica del analista investigador y no puede salvarse por la aplicación de reglas generales. La costumbre en el manejo de las fórmulas hace adquirir una

Peligros de la eliminación de indefinidamente pequeños

Manera de evitar estos peligros

intuición y seguridad superior á la que podría obtenerse con reglas fijadas de antemano.

Cuidado que debe tenerse en la sustitución de variables en las ecuaciones pertinentes al método infinitesimal

Según se deduce de lo dicho hasta ahora sobre el método infinitesimal, es necesario fijarse bien que las cantidades que se reemplazan unas por otras sean efectivamente del mismo orden de grandor diferenciándose únicamente en un indefinidamente pequeño respecto á ellas. Si, por ejemplo, la cantidad real existente en el problema dado es un arco de curva, puede reemplazarse por su cuerda por ser esta, según vimos, de igual orden de grandor, diferenciándose únicamente en una cantidad indefinidamente decreciente de tercer orden con respecto á él; pero no podría reemplazarse por su seno-verso pues este es de segundo orden de pequeñez relativamente á aquel, supuesto de primero. Igualmente, en el estudio del movimiento de un cuerpo, mientras el espacio recorrido en la dirección de la tangente á la trayectoria decrece indefinidamente, el correspondiente sobre la normal es un indefinidamente pequeño respecto del primero ó sea de segundo orden, no pueden pues, en un problema, reemplazarse ambos por una misma variable. En la práctica, favorece mucho estas sustituciones el hecho de que generalmente intervienen las mismas especies de cantidades variables, de manera que conociéndose de antemano el orden de grandor relativo de estas, puede rápidamente hacerse la sustitución. Así, tomando el arco como cantidad indefinidamente decreciente principal ó de primer orden, el seno y la tangente son también de primer orden, el seno-verso es de segundo orden, la diferencia entre el arco y su cuerda de tercer orden. Si un lado de un triángulo es un indefinidamente pequeño principal, la diferencia entre los otros dos lados también lo será; si además el ángulo adyacente á dicho lado es recto, esa diferencia es indefinidamente decreciente de segundo orden; si en dicho triángulo rectángulo la hipotenusa y un cateto son cantidades indefinidamente decrecientes de primer orden, la diferencia entre ellos es también indefinidamente decreciente, pero de tercer orden, etc.

Ejemplos

Grandor infinitesimal relativo de arcos, cuerdas y líneas trigométricas y de lados de un triángulo cualquiera ó rectángulo

Teniendo en cuenta estos grados de decrecencia relativa, se puede con certeza hacer los reemplazos de cantidades y eliminar de las ecuaciones, á medida que se presenta la oportunidad, las cantidades que no influyen en los resultados, consiguiéndose así finalmente una ecuación en la que las cantidades que figuran tienen todas el mismo orden de grandor, el más elevado entre todos los primitivamente existentes, debiéndose cuidar según vimos, que estos valores que aparecen como de grado máximo no sean idénticamente nulos debido á la existencia velada de compensaciones, en cuyo caso desaparecerían del resultado final y este quedaría falseado. Si esto sucediera, sería necesario hacer las ecuaciones homogéneas respecto á las cantidades indefinidamente decrecientes de especie inmediata á las tomadas primitivamente.

Conclusión

Completaremos lo referente al método infinitesimal y hablaremos del método llamado de asimilación, cuando hayamos estudiado la metafísica del alto cálculo, materia del capítulo siguiente.

CAPÍTULO SEGUNDO

El cálculo llamado infinitesimal ó alto cálculo

§ I. Preliminares

Funciones objeto de este cálculo

Este cálculo viene á ser el instrumento de que se vale el análisis trascendente para resolver las ecuaciones especiales obtenidas al plantear los problemas por medio del Metodo Infinitesimal. Se propone encontrar procedimientos regulares que permitan resolver esas ecuaciones particulares, caracterizadas por aparecer en ellas el concepto de límite matemático y el de cantidades indefinidamente decrecientes de distintos órdenes expresadas generalmente como diferencias de dos valores de la función ó del argumento. Hemos visto que la combinación de estas últimas cantidades, es susceptible de tener un límite al tender aquellas hacia cero, cuando vienen en forma de suma ó de cociente; de aquí una doble rama del alto cálculo. La que trata de la segunda combinación es el cálculo llamado *diferencial*, la otra se llama *cálculo integral*. Una combinación de estos dos cálculos se llama *cálculo de las variaciones*.

Objeto del alto cálculo

División, cálculo diferencial y cálculo integral

Cálculo de las variaciones

Hemos anteriormente definido el concepto de argumento y de función; la relación de dependencia entre argumento y función más fácil de comprender es la proporcionalidad, es también la primera que se presenta; á valores dobles, triples etc. del argumento corresponden en la proporcionalidad valores dobles, triples, etc. de la fun-

Primera y más sencilla dependencia entre argumento y función

Proporcionalidad

ción. Si escribimos $y = f(x)$ podemos indicar la proporcionalidad con la expresión

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad C$$

y_2, y_1 son los valores de la función correspondientes á los valores x_2, x_1 del argumento y C designa una cantidad constante.

Dependencias más complicadas

Pero no siempre es tan sencilla la relación entre $f(x)$ y x, así que suponiendo x_2 constante, el valor $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ es una función de x_1 y vice-versa. Naturalmente viene el deseo de conocer la ley general de esa dependencia. Aquí se presenta una primera aplicación del método infinitesimal haciendo decrecer convenientemente el intervalo $x_2 - x_1$.

Representación geométrica de las funciones

A Descartes y Barrow debemos el primer paso dado en este sentido [1] pues el primero nos ha enseñado la manera de representar geométricamente una función empleando dos ejes ortogonales de coordenadas, tomando el valor del argumento á partir del punto donde aquellos se cortan sobre uno de estos ejes supuestos horizontal y llevando el valor de la función sobre una paralela al eje vertical trazada por el extremo del valor del argumento correspondiente á partir de este último punto teniendo en cuenta los sentidos y signos. Al segundo debemos la consideración del triángulo MNP (Fig. 1) el cual es de capital importancia en la interpretación geométrica

Interpretación geométrica de la expresión $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

de la expresión $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ pues observando la figura se vé que geométricamente la expresión anterior representa la tangente del ángulo PMN ó sea del PSx designado con σ en la figura y formado por la secante MP á la curva $f(x)$ con el eje de las absisas Ox.

Secantes y tangentes

Si pues suponemos que el lugar donde se encuentran los puntos MP, etc. representativos de la función $f(x) = y$ forme una línea contínua, y que exista una recta MT tra-

(1) Si bien las propiedades de las derivadas pueden ser obtenidas por procedimientos puramente analíticos, la posibilidad de encontrar por un parcelamiento, la dependencia más sencilla entre el crecimiento de la función y del argumento, sin restricción alguna, es el resultado de la intuición geométrica correspondiente.

zada por M y tal que no toque á aquella más que en un solo punto pero que un movimiento por pequeño que fuera baste para transformarla en secante, dicha recta llamada tangente, determina un ángulo $MTx = \tau$ tal que el $MSx = \sigma$ se aproxima indefinidamente á él á medida que la diferencia $x_1 - x$ tienda á valer cero. Este ángulo

Concepto de derivada

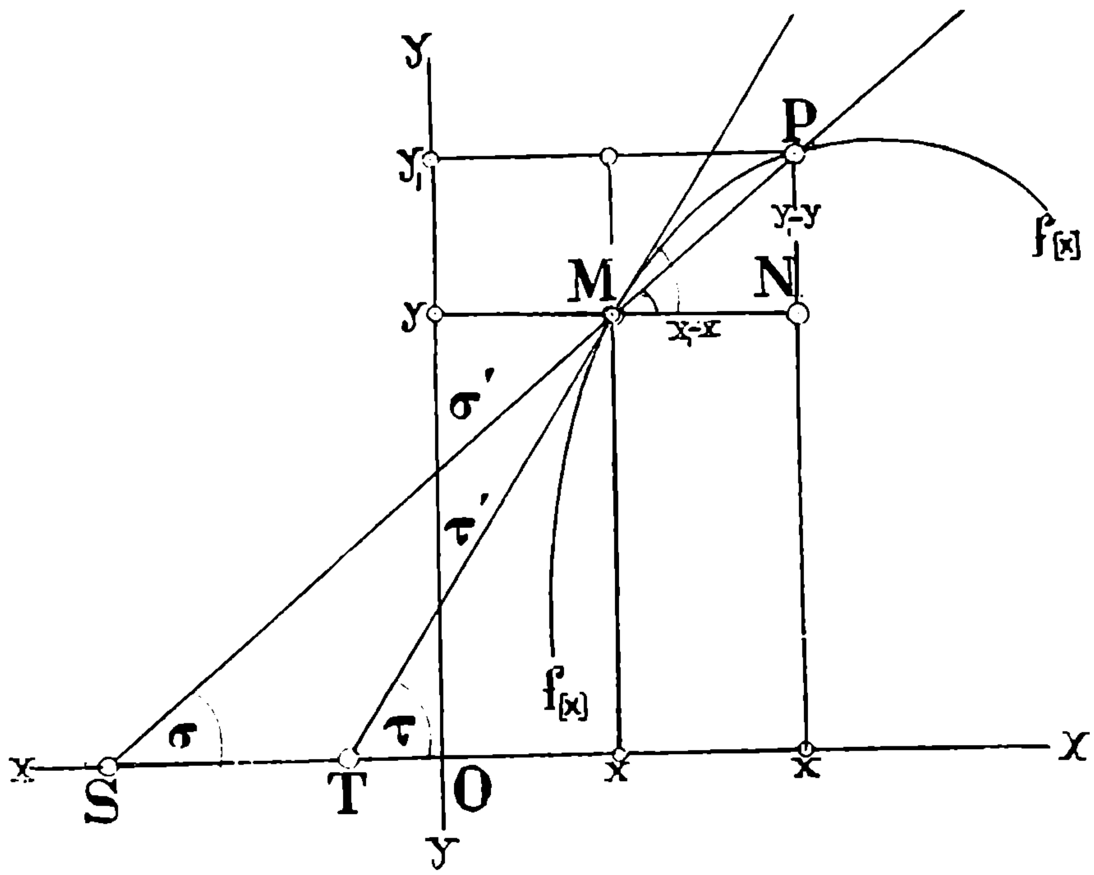

Fig. 1

es el límite matemático del ángulo τ definiendo este último como el de las secantes que pasan por M y determinadas por los valores $x_1 - x$; y en el mismo orden de ideas puede decirse que: tang τ es el límite matemático de la relación $\dfrac{y_1 - y}{x_1 - x}$, toda vez que una secante debe necesariamente pasar por dos puntos para ser tal y que la tangente solo pasa por una; considerado de otra manera,

Puede ó no ser un límite matemático según como se considere; pero según la relación unicamente de argumento á función no tiene tal carácter es decir dependiendo unicamente de la relación $x_1 - x$ no había tal límite matemático porqué nada impide hacer $x_1 - x = o$ para transformar la secante en tangente.

Según lo dicho anteriormente podemos escribir

$$\frac{y_1 - y}{x_1 - x} = \text{tang } \tau + \varepsilon$$

siendo ε una cantidad que tiende á cero y se anula cuando $x_1 - x$ tiende igualmente á cero y se anula. Las cantidades $y_1 - y$; $x_1 - x$ son pues cantidades indefinidamente decrecientes de mismo orden, y la aplicación del método infinitesimal ha vuelto á conducirnos á la proporcionalidad.

El valor de tang ε varia para cada valor x del argumento y su correspondiente $f(x)$ de la función; se representa por esa razón con el símbolo $f'(x)$ y se llama función derivada de la primitiva $f(x)$. Todas estas consecuencias deducidas de la representación geométrica de las funciones suponen, por de pronto, la posibilidad de esta representación, y en seguida la de una recta que reuna las condiciones que hemos impuesto á la tangente; pero si bien la experiencia y la intuición nos demuestran y hacen ver que existen muchas funciones reuniendo estas condiciones, en cambio, como el concepto de argumento y función implica unicamente el hecho de que á cada valor dado al argumento exista uno correspondiente de la función, no hay razón alguna para que sea siempre posible la existencia de una función derivada tal cual la hemos deducida, ya por falta de representación geométrica, ya por falta (para algunos valores de función) de la existencia de una tangente. Estas últimas funciones caracterizadas pues por no tener derivadas, se llaman funciones *anortoides*; en cambio las que tienen derivadas se llaman *ortoides* y están caracterizadas por verificarse en ellas la igualdad

Funciones que admiten derivadas

Funciones ortoides y anortoides

$$\frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x} = f'(x) + \varepsilon$$

en la que $f'(x)$ depende unicamente de x, y ε tiende á cero juntamente con $(x_1 - x)$ de manera que para valores bastante pequeños de esta última diferencia puede ε hacerse menor que cualquier cantidad por pequeña que sea.

Las funciones anortoides unicamente para valores especiales del argumento y ortoides en todos los demás, son, juntamente con las enteramente ortoides las únicas funciones de que se ocupa el cálculo diferencial. [1]

Funciones objeto del cálculo diferencial

En un capítulo especial se dará algunos detalles más sobre las funciones anortoides.

Resulta pues que para las funciones ortoides, si llamamos Δy al incremento $y_1 - y$ de la función correspondiente al incremento $\Delta x = x_1 - x$ del argumento, se tiene:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \varepsilon$$

Primeras ecuaciones del cálculo diferencial

ε es una cantidad que tiende á cero y se anula conjuntamente con Δx, y por lo tanto con Δy. Se puede en consecuencia decir, que para $\Delta x = 0$, $\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x)$, pero como entonces $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ toma la forma indeterminada $\frac{0}{0}$ se suele escribir:

$$\lim_{\Delta x = 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x)$$

Condiciones de ortoidia de las funciones

(1) Duhamel en su obra clásica Elementos de cálculo infinitesimal pág. 94. T. 1º demuestra que la condición analítica de ortoidía queda satisfecha cuando la primera reune las dos condiciones siguientes: 1º Cuando se dé un aumento h á x debe resultar un aumento k de y que debe tender á cero junto con aquel. 2º Para valores suficientemente pequeños de h, la función debe ser monótona en el intervalo finito x, $x + h$ del argumento. Efectivamente sea x_2, x_1; y_2, y_1, dos valores cualquiera del argumento y sus correspondientes de la función, dividamos el intervalo $x_2 - x_1$ en n partes iguales y sea k_1 k_2 k_3 .... k_n los incrementos correspondientes sucesivos de la función; tendremos: $x_2 - x_1 = nh_n = h$

$$y_2 - y_1 = k_1 + k_2 + \ldots + k_n \therefore \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\frac{k_1}{k_n} + \frac{k_2}{h_n} + \ldots \frac{k_n}{h_n}}{n}$$

haciendo crecer el número de divisiones n indefinidamente, los términos $\frac{k_p}{h_n}$ no pueden tender todos hácia cero ni aumentar indefinidamente puesto que su media aritmética es constantemente igual á la cantidad fija $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ (siendo la función monótona en el intervalo x_2, x_1 del argumento, los incrementos k_p son todos del mismo signo); solo pues excepcionalmente y para un número limitado de ellas, las relaciones $\frac{k_p}{h_n}$ pueden, al decrecer indefinidamente h_n tender á un valor nulo ó infinito (anortoidia aislada). Si la cantidad fija $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ fuera nula, se tendría $y_2 = y_1$, y todos los $\frac{k_p}{h_n}$ tenderían á cero, en cuyo caso, cualquier otra relación intermedia $\frac{y_p - y_1}{x_p - x_1}$ siendo $x_2 > x_p > x_1$ tendería á cero $\therefore y_p = y_1$ la función sería pues constante en el intervalo $x_2 - x_1$ del argumento.

Metafísica de estas ecuaciones con derivadas

Para que realmente $f'(x)$ sea el límite matemático de $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ sería necesario que Δx no pudiera jamás anularse; esto sucedería p. ej: si el valor de Δx fuera función de una variable que se hiciera indefinidamente creciente á medida que Δx tendiera hácia cero; pero como en toda esta exposición se supone que x es la variable independiente é y la función, pudiendo x tener el valor arbitrario que se le quiera dar, nada impide hacer $\Delta x = 0$ y entonces no existe límite matemático de la expresión $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ sino un valor especial de ella cuando $\Delta x = 0$; es simplemente un límite singular de una cualquiera de las formas indicadas en la pág. 97.

Las dos formas de ecuaciones con las cuales opera el cálculo diferencial

Ahora bien, el cálculo difeerncial opera esencialmente con dos formas de igualdades, unas en las que solo figuran derivadas como en las ecuaciones anteriores, y otras en las que figuran valores indefinidamente decrecientes de los incrementos de la función y del argumento como en la: $\Delta y = f'(x)\ \Delta x + \varepsilon\ \Delta x$ deducida de las anteriores.

Las primeras ecuaciones, no ofrecen novedad alguna á lo ya dicho sobre la metafísica del cálculo trascendente, pero no sucede así con las segundas. Hemos aquí llegado al pasage álgido de la metáfisica del alto cálculo.

Partes de que se compone el incremento Δy de una función

La expresión $\Delta y = f'(x)\ \Delta x + \varepsilon\ \Delta x$ indica que el incremento Δy de la función se compone de dos partes: una que se llama á veces diferencial de la función y que viene á ser el producto de la derivada por el incremento Δx de la variable, y otra que es el producto de este mismo Δx por una cantidad ε que tiende á cero y se anula juntamente con Δx.

Ecuaciones diferenciales idealistas: su metafísica

Veamos ahora las consecuencias que saca la teoría idealista de los infinitamente pequeños; dice esa teoría: supongamos que Δx se haya vuelto infinitamente pequeño y para así indicarlo escribamos dx, y sea dy el valor correspondiente de Δy; con el valor de ε se habrá igualmente vuelto infinitamente pequeño el producto $\varepsilon\ dx$ será infinitamente pequeño de segundo orden y no podrá aumentar $f(x)\ dx$ que es de primer orden, luego tendremos:

$$dy = f(x)\ d(x) \qquad |1|$$

igualdad rigurosamente exacta á pesar de implicar la despreciación de $\varepsilon\, dx$.

La teoría idealista atómica dice: supongamos que la función crezca más ligero que su argumento, entonces Δx se volverá igual á un átomo antes que Δy; demos pues á Δx ese valor atómico, en la fórmula $\Delta y = \Delta x\, f'(x) + \varepsilon\, \Delta x$, como la cantidad $\varepsilon\, \Delta x$ es menor que Δx, siendo este igual á un átomo, $\varepsilon\, \Delta x$ no puede sino ser cero, pues solamente cero es menor que un átomo por definición, luego, designando con dx ese valor atómico de Δx, y por dy el valor correspondiente de Δx, caeremos nuevamente en la fórmula idealista |1|. Si en vez, el incremento del argumento es superior al de la función, Δy tomará un valor atómico dy antes que Δx y entonces invirtiendo (fig. 1) el orden de la relación de incrementos podemos escribir

Ecuaciones de la teoría atomística

$$\Delta x = \Delta y \text{ tang } \tau' + \varepsilon_1\, \Delta y$$

cuando Δy se hace un átomo $\varepsilon\, \Delta y$ será cero por las mismas razones anteriores, luego:

$$dx = dy \text{ tang } \tau' \qquad \text{y como (fig. 1) tang } \tau' = \frac{1}{\text{tang } \tau}$$

$$\therefore\ dy = dx \text{ tang } \tau$$

$\therefore\ dy = dx\, f'(x)$ es decir nuevamente la formula (1). Una vez es dx el átomo, otra dy según crezca más ligero la función que el argumento ó vice-versa. En ambos casos puede decirse, según la teoría atómica, que: el incremento menor posible de una función es ó bien un átomo ó bien el producto de un átomo por la derivada de la función.

Ahora bien, de las ecuaciones idealistas |1| deducimos:

$\dfrac{dy}{dx} = f'(x)$ igualdad idealista que se leerá diciendo:

Definiciones idealistas de la derivada: infinitamente pequeños y átomos

La derivada de una función, es el cociente de los diferenciales ó incrementos infinitamente pequeños correspondientes de la función y del argumento, ó bien:

La derivada de una función es el cociente del incremento de la función y del menor incremento correspondiente posible del argumento.

Pasemos ahora á la teoría empirista.

La teoría empirista

Esta observa con toda lógica, que las consecuencias idealistas revolucionan, como ya anteriormente dijo, el concepto de igualdad, estando además en pugna con la representación geométrica (fig. 1) de la derivada la cual indica la tangente trigonométrica del ángulo τ que la tangente geométrica á la curva representativa de la $f(x)$ forma con el eje donde se miden los argumentos, pues esta última tangente por definición, debe pasar únicamente por el punto y de la curva, y no unir los puntos y, $y + dy$ que la convertirían en secante, como lo implica el raciocinio idealista.

El empirista se conforma pues con la igualdad

$$\Delta y = f'(x)\,\Delta x + \varepsilon\,\Delta x$$

pero como el sumando $\varepsilon\Delta x$ se vuelve cada vez más y más pequeño á medida que Δx disminuye á voluntad, es una cantidad indefinidamente decreciente de segundo orden respecto de $f(x)\,\Delta x$ luego puede escribirse á título de aproximación suficiente para valores dx y dy de Δx y Δx muy pequeños, la igualdad análoga á la del idealista: $dy = f'(x)\,dx$ pero cometiéndose un error tan reducido como se quiera, en vez que el idealista pretende ver en aquella una igualdad rigurosa por el hecho de suponer dx y dy infinitamente pequeños, es decir fantasmas inexpeculables en matemáticas. En realidad, para el empirista las únicas igualdades exactas son, ó bien: lím $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x)$ si Δx no es variable independiente, siendo determinada de tal manera que nunca pueda anularse, ó simplemente $\dfrac{dy}{dx} = f'(x)$ para $\Delta x = 0$; entendiéndose entonces *no el cociente* de incrementos sino un *símbolo* que reemplaza á $\frac{0}{0}$ que es el realmente correspondiente pero que presenta el inconveniente de no tener aisladamente significado, en tanto que dy posee la ventaja de indicar el proceso que determina la existencia de la derivada y deja, por decir así, el rastro de la variación encarnada en el concepto de esta última.

No considera la derivadas sino como límite ó como el valor especial de $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ cuando $\Delta x = 0$ y la reemplaza por el símbolo indivisible $\dfrac{dy}{dx}$

En una palabra, al escribir el empirista $f'(x) = \dfrac{dy}{dx}$ no quiere indicar que $f'(x)$ es el cociente de dos incrementos dy, dx distintos de cero, afirmación que sería erronea é inexacta, sino que: $f'(x)$ es el valor especial que toma $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ cociente de dos incrementos cuando $\Delta x = 0$; $\dfrac{dy}{dx}$

es así una expresión puramente simbólica destinada á hacer recordar su origen y los antecedentes con quien está intimamente ligada, dx está colocada allí debajo de dy como un palo de la letra u al lado del otro palo ó como la comilla debajo de la letra Q. Esta es la diferencia capital entre el sentido de las notaciones y ecuaciones empiristas y las idealistas. El idealista considera $f'(x)$ como realmente el cociente de dos incrementos infinitesimales dy, dx; y por eso escribe: $f'(x) = \frac{dy}{dx}$; en cambio, si bien el espiritista escribe lo mismo, para el $\frac{dy}{dx}$ es un mero lenguaje simbólico. Sin embargo, á veces descompone también el empirista el símbolo anterior y escribe $dy = f(x)\,dx$ pero entonces no pretende ver en esta ecuación una igualdad rigurosa sino una mera fórmula provisoria y aproximada, colocada accidentalmente en vez la estrictamente exacta: $\Delta y = f'(x)\,\Delta x + \varepsilon\,\Delta x$ cuando Δy, Δx, se consideran con valores muy pequeños (que para distinguirlos é indicar esa suposición escribe dy, dx respectivamente). Debe pues tenerse muy en cuenta el distinto significado de los incrementos dy, dx escritos separadamente, del que simbólicamente tienen en el conjunto. $\left(\frac{dy}{dx}\right)$. Tal es la notación empírica que haremos uso en adelante.

Notación empirista de las derivadas

Simbolismo de $\frac{dy}{dx}$; no es un cociente de diferenciales

§ 2. Metafísica del cálculo diferencial.

Orígen y naturaleza del problema de la metafísica del cálculo diferencial

Hemos visto que el incremento Δy de la función viene dado por la fórmula: $\Delta y = f'(x)\,\Delta x + \varepsilon\,\Delta x$; la fórmula: $\Delta x = f'(x)\,\Delta x$ es pues inexacta por pequeña que sea Δx ¿cómo es entonces que el empleo exclusivo de esta fórmula en el cálculo diferencial no conduce sino á resultados correctos y rigurosamente exactos? Tal es el problema metafísico del cálculo diferencial y que ha dado mucho que pensar desde la invención del mismo.

Leibnitz, el fundador del método infinitesimal, llegó á él mediante la resolución del problema de las tangentes á una curva tal cual lo hemos indicado, es decir, deduciendo el coeficiente angular de la tangente considerándolo como límite del de las secantes trazadas por el punto tomado de la curva al girar de manera que el segundo punto se aproxima al fijo. Este coeficiente viene dado según vimos, por el valor de la relación $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ cuando $\Delta x = 0$; pero entonces Δy es también igual á cero y dicha relación toma la forma indeterminada $\frac{0}{0}$ impropia para el cálculo; por otra parte la secante no puede ser tangente sino cuando los dos puntos que une coinciden. Así que, por una parte, la exactitud rigurosa exigía hacer como Newton $\Delta x = 0$, pero hacía caer en la fórmula $\frac{0}{0}$ que parece indeterminada y sin embargo determina un valor fijo (lo que la hacía considerar como ilusoria y desprovista de sentido); por otra parte, no se podía dejar de hacer $\Delta x = 0$ sin arruinar la exactitud del cálculo. Para salir de paso Leibnitz, el primer idealista, imaginó hacer Δx, no cero sino infinitamente pequeño creyendo así que la relación $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ se diferenciaría infinitamente poco del coeficiente angular de la tangente y solo en cantidades que se anularían con Δx; para librarse luego de estos términos, atribuía á los infinitamente pequeños la propiedad de no afectar las cantidades finitas. Tal es el principio llamado leibnitziano. Las objeciones contra este último nacieron inmediatamente. Nieuwentyt [1] pidió explicación sobre los fundamentos que permitían suprimir cantidades infinitamente pequeñas como si fueran nulas y considerar en consecuencia iguales cantidades cuya diferencia no es rigorosamente cero, Leibnitz nunca supo justificar debidamente su principio ni tampoco se lo explicó él mismo por cuanto al verse muy apurado por las objeciones se limitaba á decir que los infinitamente pequeño podían despreciarse respecto de la cantidad finita como un grano de arena respecto del universo; contestación que no hacía sino dar más fuerza á la objeción de Nieuwentyt.

Origen del cálculo diferencial

Histórico del problema metafísico del cálculo diferencial

Leibnitz inventor de los infinitamente pequeños

Objeción de Nieuwentyt

Leibnitz ignoró la metafísica de su cálculo

(1) Leibnitz, opera tomo III pág. 327.

Para escapar á las objecciones Lagrange ideó su método de cálculo sin el concepto de infinitamente pequeños ni de anulación de incrementos basándose en el desarrollo en serie de una función.

Explicación idealista de Fontenelle

Pero esto no explicaba la metafísica del método leibnitziano cuyos resultados eran realmente sorprendentes y de un rigor y exactitud innegables. Fontenelle creyó explicar la cuestión de la manera como hemos visto más arriba explicarla por el idealista creyendo rigurosamente exacta la expresión $dy = f'(x)\, dx$ cuando dy, dx, son infinitamente pequeños. Pero el ejemplo que daba al respecto encerraba una especie de trampa, por cuanto la suma de los términos que despreciaba era idénticamente nula de manera que no había en definitivo sino despreciado cero. Además, según varias veces observamos, repugna á la razón aceptar que dos cantidades que difieren en algo pueden ser iguales, aún cuando ese algo sea un átomo.

Postulado del marqués de l'Hospital

El marqués de l'Hospital no pudiendo explicarse ni demostrar la razón del principio leibnitziano, pidió que se aceptara como un postulado análogo al de Euclides.

Explicación de Carnot

En estas circunstancias apareció Lázaro M. N. Carnot autor de la clásica obra, hoy agotada: *Reflexions sur la Metaphysique du Calcul Infinitesimal.* Carnot cree en ella demostrar la metafísica del principio en cuestión diciendo que al despreciar las cantidades diferenciales se comete un error que queda luego compensado por otros posteriores. (1) He aquí un ejemplo de la demostración que hace al respecto:

Ejemplo de una demostración de Carnot sobre la metafísica del cálculo diferencial

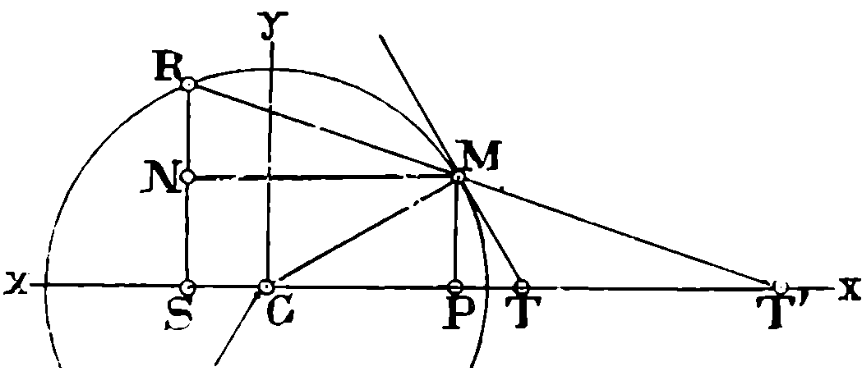

Fig. II

(1) En realidad esta suposición se debe á Lagrange y no á Carnot.

Supongamos que se busca la subtangente TP en el punto M cualquiera de una circunferencia C, sobre la recta CT'. Por un punto R tomado arbitrariamente, trazemos la perpendicular RS á ST' y trazemos también la secante RMT'; tenemos: T'P: MP: : MN: RN y luego $TP = TT' + MP \frac{MN}{RN}$. Supongamos ahora que se mueve RS paralelamente á si misma acercándole constantemente de MP; el punto T' se irá acercando así al T y se podrá hacer la distancia TT' tan pequeña como se quiera sin que la proporcionalidad anterior deje de efectuarse, si pues despreciamos esta cantidad TT', cometemos un primer error en la ecuación que resulta

$$TP = MP \frac{MN}{RN} \quad (1)$$

error que será pequeño á voluntad acercando convenientemente RS de MP.

Igualmente en la ecuación de la circunferencia $y^2 = 2\,ax - x^2$ sacamos, aplicándola al punto R

$$(MP + RN)^2 = 2a\,(MN - CP) - (MN - CP)^2 \;\therefore$$

$$\frac{MN}{RN} = \frac{2\ MP + RN}{2a - 2\ CP - MN}$$

expresión aplicable cualquiera que sea la posición de R; pero cuanto más se aproxime RS á MP las distancias MN y RN se harán cada vez menores, luego, si escribimos

$$\frac{MN}{RN} = \frac{MP}{a - CP} \quad (2)$$

despreciando MN y RN cometemos un segundo error que podrá hacerse pequeño á voluntad; si pues reemplazamos este último valor de $\frac{MN}{RP}$ en la primitiva expresión yá con un error

$$TP = MP \frac{MN}{RN} \text{ se vuelve:}$$

$TP = \frac{MP^2}{a - CP}$ y llamando en general x, y, las coordenadas de M, $TP = \frac{y^2}{a - x}$ expresión exacta como se deduciría inmediatamente observando los triángulos semejantes CMP y MPT, se tiene en efecto

$$CP : MP :: MP : TP \therefore TP = \frac{MP^2}{CP} = \frac{y^2}{a - x};$$

sin embargo las dos ecuaciones (1) y (2) de donde se ha sacado la última fórmula exacta son falsas, es necesario pues que los errores cometidos se hayan compensado. Veamos un poco la naturaleza de este raciocinio. En primer lugar, como facilmente se vé, hay aquí una trampa parecida á la de Fontenelle, solo que en este caso en vez de ser nula la suma de los errores TT', MN y RN estos son separadamente nulos por cuanto al convertirse la secante en tangente, es forzoso que esas tres cantidades se anulen; de manera que en resúmen solo se ha despreciado cero, se comprenden entonces como errores nulos deben necesariamente compensarse. Además, la consecuencia de esta doctrina sería que una diferencial no sería exacta sino combinada con otra, pero ¿como saber si la compensación tiene siempre lugar? No es esto resolver la metafísica del cálculo sino basarla al contrario sobre errores. Nada nos explica porqué deben estos necesariamente compensarse.

Consecuencia de Carnot

Trampa existente en su demostración

La demostración de Carnot no resuelve la cuestión

Muchas otras hipótesis y explicaciones más ó menos raras se han producido al respecto. Bordas Demoulin por ejemplo en su obra *Le Cartesianisme*, dice al comentar la explicación de Carnot: « El objeto del cálculo diferencial es poner en evidencia las relaciones que constituyen el » universal de las funciones eliminando la parte de las » relaciones constitutivas del particular. Estas dos espe- » cies de relaciones se encuentran en $\frac{MN}{RN}$. Cuando RS se » confunde con MP la relación constitutiva de lo indivi- » dual desaparece y deja el lugar á la relación constitutiva de lo universal; la primera afecta los sentidos por » medio de las rectas MN y RN, el segundo, representado » por los símbolos dx, dy, solo es alcanzado, retenido y » comprendido por la inteligencia. De esto se vé que » efectivamente, las cantidades diferenciales dx, dy, ó » sea la relación de lo universal de las funciones, no son efectivamente nulas; lo que es nulo son las cantidades algébricas, es decir, la relación de lo individual, aquellas » después de haber servido para ponernos en la vía de » las relaciones de lo universal desaparecen para que

Explicación de B. Demoulin

el espíritu se apodere de este. Leibnitz y Newton esta-
» ban pues igualmente errados, Newton al igualar á cero
» las diferenciales, Leibnitz al sostener la existencia de
» los infinitamente pequeños puesto que evidentemente,
» entendía por esta palabra el individual de las funcio-
» nes.... Tal es la verdadera metafísica del cálculo di-
» ferencial.... ....Según esta metafísica podría decirse
» por comparación que el Dios de Spinosa es la diferen-
» cial del universo, y el universo el integral del Dios de
» Spinosa». No me parece que estas explicaciones de metafísica pura satisfagan á los matemáticos tan facilmente como parece creerlo el autor, más filósofo que matemático.

Verdadera metafísica del cálculo infinitesimal

Finalmente Duhamel, Freycinet, du Bois Raymond, etc., han más ó menos bien dada la explicación de la metafísica del cálculo diferencial, la cual está hoy perfectamente resuelta. Los principios desarrollados en la pág. 114-115 encierran la verdadera metafísica de ese cálculo. Efectivamente, si se procediera constantemente con la expresión $\Delta y = f'(x)\,\Delta x + \varepsilon\,\Delta x$, todos los resultados serían exactos y no habría motivo á discusiones; ahora bien los resultados así obtenidos serían necesariamente homogéneos respecto de $f'\,\Delta x$ y $\varepsilon\,\Delta x$ pues siendo la ecuación originaria $\Delta y = f'(x)\,\Delta x + \varepsilon\,\Delta x$ homogénea respecto de estas cantidades, cualquiera que sean las operaciones sucesivas efectuadas con ellas quedarán forzosamente conservando la misma homogeneidad.

Estriba en la homogeneidad de la ecuación $\Delta y = f'(x)\,\Delta x + \varepsilon\,\Delta x$ respecto á ε y Δx

Dichas ecuaciones finales se compondrán pues de dos partes, una independiente de $\varepsilon\,\Delta x$ otra afectada por él, dividiendo en consecuencia por una potencia de Δx igual á la que se encuentra este elevado en la ecuación, resultará que las cantidades $\left(\frac{\varepsilon\Delta x}{\Delta x}\right)^n = \varepsilon^n$ teniendo por límite cero cuando Δx tiene igual límite, ó anulándose junto con él, desaparecerán de la ecuación final al formar dicho límite ó al anular Δx, exactamente como si desde el principio se hubieran dejado á un costado escribiendo $\Delta y = f(x)\,\Delta x$. En esto consiste todo el misterio. La homogeneidad de las ecuaciones iniciales respecto á la diferencia y al término de corrección conduce á una ecuación final igualmente homogénea y entonces al tomar los límites ó al anular Δx para tener las derivadas, todos los términos de corrección desaparecen; se podían pues eliminar desde el principio.

Ecuaciones provisorias en el desarrollo de un cálculo

La expresión $dy = f'(x)\,dx$, si bien inexacta, es aceptable cuando no se escribe para dejarla así sino unicamente como ecuación auxiliar intermediaria en un desarrollo donde finalmente debe tomarse un límite ó anularse la parte correspondiente á los términos de corrección omitidos.

Ejemplo: aplicación á una función de función

Si por ejemplo queremos hallar la derivada de una función de función $y = f(u)$ $u = f(x)$ podemos escribir

$$\frac{dy}{du} = \frac{\frac{dy}{dx}}{\frac{du}{dx}}$$ sacándola directamente de $$\frac{\Delta y}{\Delta u} = \frac{\frac{\Delta y}{\Delta x}}{\frac{\Delta u}{\Delta x}}$$ por cuanto

si bien $\frac{\Delta y}{\Delta u} = \frac{dy}{du} + \varepsilon$; $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx} + \varepsilon_1$; $\frac{\Delta u}{\Delta x} = \frac{du}{dx} + \varepsilon_2$

al hacer $\Delta x = 0$, $\varepsilon, \varepsilon_1, \varepsilon_2$, se anulan simultáneamente y $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, $\frac{\Delta u}{\Delta x}$, $\frac{\Delta y}{\Delta u}$, se transforman en $\frac{dy}{dx}$, $\frac{du}{dx}$, $\frac{dy}{du}$, respectivamente.

Aplicación al caso de una función con dos argumentos

Sea ahora una función z de dos argumentos $z = f(x,y)$; el incremento Δz correspondiente á los incrementos Δx, Δy de los argumentos será:

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x,y)$$

ó también

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y + \Delta y) + f(x, y + \Delta y) - f(x,y)$$

supongamos que en el intervalo $x + \Delta x, y + \Delta y$ de los argumentos, la función z sea ortoide respecto de x cuando y queda fija y respecto de y cuando x es constante, se obtiene así, según lo anteriormente dicho:

$$\Delta z = \frac{d(f(x), y + \Delta y)}{dx}\Delta x + \frac{df(xy)}{dy}\Delta y + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y$$ en la

que ε_1 tiende á cero y se anula junto con Δx y analogamente ε_2 con Δy. Si la derivada $\frac{df}{dx}$ es una función contínua respecto á y en las proximidades del punto x, y puede escribir

$$\frac{df(x, y + \Delta y)}{dx} = \frac{df(x,y)}{dx} + \eta$$

siendo η una cantidad que tiende á cero y se anula conjuntamente con dy. Luego sacamos:

$$\Delta z = \frac{df}{dx}\Delta x + \frac{df}{dy}\Delta y + \varepsilon_1 \Delta x + (\varepsilon_2 + \eta)\Delta y$$

Ecuaciones finales, son igualmente homogéneas. Su metafísica

Estableciendo entre los incrementos Δx y Δy de los argumentos la condición de que su relación no puede anularse, la cantidad $\varepsilon_1 \Delta x + (\varepsilon_2 + \eta)\Delta y$ dividida por Δx ó por Δy tendrá hácia cero y se anulará junto con Δx y Δy. Sacamos pues finalmente las siguientes ecuaciones:

$$\Delta y = f'(x)\,\Delta x + \rho$$

$$\Delta z = \frac{df}{dx}\Delta x + \frac{df}{dy}\Delta y + \rho_1 \quad |1|$$

en las que $\frac{\rho}{\Delta x}$ y $\frac{\rho_1}{\Delta x}$ se anulan juntamente con Δx cuando $f'(x)$ no es cero ni infinita. El idealista escribirá, suponiendo Δy, Δx infinidamente pequeños é indicándolos con dy, dx; $dy = f'(x)\,dx$; $dz = \frac{df}{dx}dx + \frac{df}{dy}dy$ |2|

El empirista escribirá también las ecuaciones |2| en vez de las |1| en las operaciones intermedias significando dz, dy, dx, según dijimos pág. 126 incrementos indefinidamente decrecientes ó muy pequeños á voluntad de Δz Δy y Δx y podrá sin temor efectuar todos los desarrollos con estas fórmulas inexactas provisorias, por cuanto siendo las |1| homogéneas respecto de los incrementos dx, dy y de los términos de corrección ρ, ρ_1 el error implicado en las formulas |2| desaparecerá al hacer $\Delta x = 0$ en la ecuación final ó al tomar los límites de la misma cuando Δx tiende indefinidamente hácia cero. Si la función $\frac{df}{dx}$ no es contínua con respecto á y en el punto x, y, pero que lo es respecto de x, una simple modificación en el orden de los términos de la segunda expresión de Δz conducirá nuevamente á la fórmula |1|. Resulta también que si la fórmula $dz = \frac{df}{dx}dx + \frac{df}{dy}dy$ debe ser válida para todos los puntos de una área, deben llenarse las siguientes condiciones:

1.° Para cada punto de dicha área $f(xy)$ debe ser ortoide respecto de x quedando y fijo, y vice-versa;

2.° $\frac{df}{dx}, \frac{df}{dy}$ deben ser contínuos respecto de y y de x; si solamente se verificará la mitad de esta última condición no podría verificarse la fórmula |1| sino para puntos aislados, por cuanto solo en ciertas direcciones podría pasarse de $f(x,y)$ á $f(x + \Delta x, y + \Delta x)$. Esta demostración rigurosísima vale igualmente cuando z es función de dos variables u v funciones á su vez de x $\therefore z = f(u, v)$; $u = \varphi(x)$; $v = \psi(x)$. Si consideramos u, v, como argumentos, bastará sustituir en la demostracción anterior x por u; y por v, llegaremos á las fórmulas: $\Delta u = \psi'(x)\,\Delta x + \rho_1$; $\Delta v = \psi'(x)\,\Delta x + \rho_2$; $\Delta z = \frac{df}{du}\,\Delta u + \frac{df}{dv}\,\Delta v + \varepsilon_1\,\Delta u + (\varepsilon_2 + \eta)\,\Delta v$
$\varepsilon_1\,\Delta u + (\varepsilon_2 + \eta)\,\Delta v = |\,\varepsilon_1\,\varphi'(x) + (\varepsilon_2 + \eta)\,\psi'(x)\,|\,\Delta x + \varepsilon_1\,\rho_1 + (\varepsilon_2 + \eta)\,\rho_2 = \rho$; $\Delta z = \frac{df}{du}\,\Delta u + \frac{df}{dv}\,\Delta v + \rho$
las cantidades ε_1, ε_2, η, tienden á cero y se anulan juntamente con Δu y Δv es decir con Δx; igualmente ρ_1 ρ_2 con Δx y por lo tanto con ρ; podemos pues escribir además: $\frac{dz}{dx} = \frac{df}{du}\frac{du}{dx} + \frac{df}{dv}\frac{dv}{dx}$ fórmula que con las dos anteriores:
$\Delta z = \frac{df}{du}\,\Delta u + \frac{df}{dv}\,\Delta v + \rho$; $\Delta u = \psi'(x)\,\Delta x + \rho_1$; $\Delta v = \psi'(x)\,\Delta x + \rho_2$ resuelven la cuestión.

Aplicación á una función de dos argumentos funciones á su vez de un mismo argumento

He insistido sobre este particular porqué á menudo las demostraciones que se dan al respecto no responden á la verdadera metafísica y orígen del concepto de función derivada. Unas, por ej. la que da Freycinet en la página 61 de su obra *Metaphysique du haut calcul* sientan:

$$\frac{dz}{dx} = \text{lím}\,\frac{\Delta z}{\Delta x} = \text{lím}_{\Delta x = 0}\left|\frac{f(u + \Delta u, v) - f(u, v)}{\Delta u}\,\frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{f(u + \Delta u, v + \Delta v) - f(u + \Delta u, v)}{\Delta v}\,\frac{\Delta v}{\Delta x}\right|$$

y dicen que al tender Δx hácia cero, la primera fracción del segundo sumando de la derecha tiende á valer

$$\frac{d\,f(u + \Delta u, v)}{dx}$$

proposición inaceptable por cuanto al tender Δx hácia

Errores que á veces se encuentran en las demostraciones ordinarias de esta cuestión cero Δu y Δv también tienden hácia cero y entonces la fracción en cuestión no tiene la forma que dá nacimiento á una función derivada. En otras demostraciones, como en la de Serret en su *Calcul defferentiel et calcul integral* se establece como evidente y necesario que $\frac{d\, f(u + \Delta u, v)}{d\, v}$, se vuelva igual á $\frac{d\, f(u, v)}{d\, v}$ cuando Δx se anula, sin apercibirse que esto implica establecer una condición más que debe llenar la función f, ó sea que su derivada $\frac{d f(u, v)}{d v}$ sea contínua respecto de u para el valor u, v.

Funciones derivadas de distintos órdenes

Siendo la derivada de una función, una nueva función de mismo argumento, si es ortoide admitirá á su vez una nueva derivada y así sucesivamente. Estas nuevas derivadas se llaman respectivamente segunda, tercera etc. de la función primitiva y se designan con los símbolos $f''(x) f'''(x) \ldots . f'''(x) \ldots .$ ó $y''\ y''' \ldots .\ y'''$.

Igualmente el incremento de una función es distinto para dos valores diferentes del argumento, la diferencia entre ellos se llama, cuando estos incrementos y diferencias son indefinidamente pequeños, diferenciales segundo de la función primitiva y se indican con los símbolos $\Delta \Delta y$, ddy, $\Delta^2 y$ ó $d^2 y$; lo mismo podríamos considerar diferenciales terceros etc., indicados con $\Delta^3 y \ldots\ \Delta''' y \ldots .$ ó $d^3 y \ldots$ $d''' y \ldots .$ Veamos que relación existe entre estos nuevos elementos. Sea $y, y + \Delta y$ dos valores de una función correspondientes á los argumentos $x\ x + \Delta x$; tendremos según lo anterior:

$$\Delta y = f'(x)\, \Delta x + \varepsilon_1\, \Delta x \quad |1|$$

$$\Delta (y + \Delta y) = f'(x + \Delta x)\, \Delta x + \varepsilon_2\, \Delta x \quad |2|$$

Como los incrementos de x son arbitrarios, podemos suponer iguales todos los Δx que figuran en las dos fórmulas anteriores. Restando la |2| de la |1| y según las notaciones más arriba indicadas podemos escribir:

Relación entre derivadas diferenciales de distintos órdenes

$$\Delta (y + \Delta y) - \Delta y = \Delta \Delta y = \Delta^2 y$$

$$= |\, f'(x + \Delta x) - f'(x)\, |\, \Delta x + (\varepsilon_2 - \varepsilon_1)\, \Delta x$$

y como suponemos $f'(x)$ ortoide tendremos:

$$f'(x + \Delta x) - f'(x) = \Delta f'(x) = f''(x)\, \Delta x + \eta\, \Delta x$$

$$\therefore\ \Delta^2 y = f''(x)\, \Delta x^2 + \eta\, \Delta x^2 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_1)\, \Delta x$$

$$\therefore \frac{\Delta^2 y}{\Delta x^2} \quad f''(x) \quad \eta \quad \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{\Delta x} \quad f''(x) \quad \varepsilon$$

η es una cantidad que, lo mismo que ε_2, ε_1 se anula juntamente con Δx.

Pero á medida que $x \quad \Delta x$ se aproxima á x el valor ε_2 de la fórmula |2| se aproxima al ε_1 de la fórmula |1| podemos pues escribir $\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \quad 1 \quad \rho$ siendo ρ una cantidad que se anula con Δ, luego,

$$\varepsilon_2 \quad \varepsilon_1 (1 \quad \rho) \text{ y } \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{\Delta x} \quad \frac{\varepsilon_1 \rho}{\Delta x}$$

El orden de grandor de ε_1 es á lo más el mismo que el de Δx la expresión $\frac{\varepsilon_1}{\Delta x}$ al anularse Δx no puede pues en el peor de los casos sino tomar un valor finito; de manera que multiplicando esta por ρ, que se anula con Δx, dá para $\frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{\Delta x}$ el valor cero cuando Δx también lo es. Ecuación final

Podemos en resúmen, establecer que el límite de $\frac{\Delta^2 y}{\Delta x^2}$ cuando Δx tiende indefinidamente hácia cero (ó si Δx es completamente independiente, que el valor que adquiere $\frac{\Delta^2 y}{\Delta x^2}$ cuando $\Delta x \quad 0$) es:

$$\text{lím.} \frac{\Delta^2 y}{\Delta x^2}_{\Delta x \quad 0} \quad f''(x); \quad \Delta^2 y \quad f''(x)\, \Delta x^2 \quad \varepsilon\, \Delta x^2 \quad |3|$$

(ε se anula con Δx)

El idealista, haciendo Δx infinitamente pequeño y considerando $\Delta \Delta y$ como un infinitamente pequeño de segundo orden escribe según su notación: $\frac{d^2 y}{d x^2} \quad f''(x)$ y considera en consecuencia la derivada segunda como el cociente del incremento infinitesimal de la función, dividido por el cuadrado del incremento infinitesimal del argumento.

El empirista no vé en la expresión $\frac{d^2 y}{d x^2}$, lo mismo que en el $\frac{dy}{dx}$ sino únicamente un símbolo indivisible destinado, no á indicar el cociente de dos cantidades, sino el rastro de la operación que lo ha originado; sin embargo, cuando Δx es muy pequeño Δy también lo es, lo mismo que η y $\frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{\Delta\ x}$; por eso es que aproximadamente y en carácter provisorio escribe también: $d^2 y = f''(x)\, dx^2$ como el idealista (reemplazando los Δ por d para indicar la suposición de ser los incrementos muy pequeños).

La fórmula obtenida es igualmente homogénea

Los resultados de las operaciones hechos con esta última fórmula errónea son siempre exactos porqué, lo mismo que antes, siendo la fórmula rigurosamente exacta |3| homogénea respecto de $f''(x)\ \Delta x^2$ y del término de corrección $\varepsilon\ \Delta x^2$ el hecho de despreciar á este último no afecta las ecuaciones finales en las que se hace $\Delta\ x \quad$ o.

De la misma manera se obtendría las fórmulas

$$\lim_{\Delta x \quad o} \frac{\Delta^n y}{\Delta x^n} = f^n(x); \ \Delta^n y = f^n(x)\, \Delta x^n \qquad \varepsilon\, \Delta x^n \qquad |4|$$

$$\frac{d^n y}{d x^n} = f^n(x); \ d^n (y) \quad f^n(x)\, \Delta x^n \qquad |5|$$

la |4| rigurosamente exacta y homogénea respecto de $f^n(x)\ \Delta x^n$ y del término de corrección $\varepsilon\, \Delta x^n$, lo que explica que en las operaciones intermediarias, pueda tomarse la aproximada |5| sin que esta sustitución ocasione errores en los resultados finales. Como se vé en resúmen, la metafísica del cálculo diferencial estriba en la homogeneidad de las ecuaciones que determinan los incrementos de cualquier orden de las funciones, respecto de la parte principal afectada por el incremento del argumento y respecto de la relativa á los términos de corrección, afectados de la misma potencia de este [1]. Para terminar con el cálculo diferencial veamos la interpretación de la

La metafísica del cálculo diferencial estriba unicamente en la homogeneidad de las ecuaciones diferenciales

Otras definiciones de derivadas sucesivas

(1) La relación $\frac{\Delta^n y}{\Delta x^n}_{\Delta x \quad o} = f^n(x)$ existente entre las diferenciales sucesivas de una ecuación y sus derivadas, notable por cuanto las diferenciales en cuestión han sido definidas sin preocuparse de las derivadas y vice-versa, ha dado motivo á algunos autores para definir la derivada n de una función como el límite de la relación entre su diferencial n y la potencia n del incremento correspondiente del argumento, pero esta definición obliga á demostrar despues que la derivada n de una función es la primera de la $n - 1$, etc., marcha menos directa y natural.

serie de Taylor aplicada á los incrementos de funciones, á saber:

$$\Delta y = f'(x)x\,\Delta x + f''()\frac{\Delta x^2}{2} + f'''(x)\frac{\Delta x^3}{\underline{|3}} + f''''(x)\frac{\Delta x^4}{\underline{|4}} + \ldots$$

La série de Taylor aplicada á los incrementos de la función y del argumento; interpretación idealista y empirista

La escuela idealista de los infinitamente pequeños dice: Cuando Δx sea infinitamente pequeño los términos siguientes al primero son todos infinitamente pequeños de orden superior y no pueden en consecuencia aumentar á aquel; luego sacamos: $dy = f'(x)\;dx$ ó $f'(x) = \dfrac{dy}{dx}$ igualdades rigurosas, según ella.

La teoría atómica dice: Si la función crece más ligero que su argumento, Δx alcanzará á ser un átomo antes que Δy; pero entonces siendo $\Delta x^2 \ldots \Delta x^n$, menores que un átomo, solo pueden ser cero; se obtendrá pues con todo rigor las mismas ecuaciones anteriores. Si la función crece menos ligero que el argumento, Δy se volverá átomo antes que Δx pero como la expresión

$$\Delta x = f'(y)\;\Delta y + \frac{1}{2} f''(y)\;\Delta y^2 \ldots.$$

Teoría atómica

estará en el caso anterior se tendrá:

$$dx = f'(y)\;dy \;\therefore\; \frac{dy}{dx} = \frac{1}{f'(y)} = f'(x) \text{ (veáse pág. 125).}$$

El empirista en cambio no verá más que incrementos Δy Δx pequeños á voluntad, y términos tales como los siguientes al primero del segundo miembro, los cuales al tomar la relación $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$, tenderán á cero junto con Δx, viniendo á constituir el $\varepsilon\,\Delta x$ de la fórmula (pág. 124).

Teoría empírica

$$\therefore\; \varepsilon = \frac{f''(x)}{\underline{|2}}\Delta x + \frac{f'''(x)}{\underline{|3}}\Delta x^2 + \ldots\ldots \frac{f^n(x)}{\underline{|n}}\Delta x^n$$

§ 3 Metafísica del cálculo integral

Objeto de este cálculo

Este cálculo se propone encontrar el límite de la suma de varias cantidades cuya pequeñez es función de su número, las cantidades en cuestión figuran siempre como incrementos pequeños ó diferenciales $\Delta y = f'(x)\,\Delta x + \varepsilon\,\Delta x$ ó $d y = f'(x)\; d x$ de una función. La reducción de los términos de la suma á la forma anterior se obtiene con la aplicación del método infinitesimal.

Hemos visto que la relación más sencilla entre una función y su argumento es la proporcionalidad caracterizada por la expresión $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = C$ constante; luego, si quisieramos saber el aumento sufrido por la función entre los valores x_2 y x_1 del argumento bastaría multiplicar $x_2 - x_1$ por C. Como este aumento total es la suma de los aumentos parciales obtenidos dividiendo el intervalo $x_2 - x_1$ en un número n de partes iguales, cada una de las cuales llamaremos Δx, tendremos: $n\,\Delta x = x_2 - x_1$ y si llamamos Δy el incremento, correspondiente en la función á cada Δx tendremos: $\Delta y = c\,\Delta x$.

$$\therefore\; y_2 - y_1 = \Sigma\,\Delta y = \Sigma\, c\,\Delta x = c\,\Sigma\,\Delta x$$

á medida que se aumenta el número de estos Δx el valor de ellos disminuye, pero su suma queda constantemente igual á $y_2 - y_1$. Pero si la relación existente entre la funfunción y su argumento no es la proporcionalidad, la cantidad C no es constante y entonces debe modificarse la expresión anterior; tenemos:

Ecuaciones fundamentales del cálculo integral

$$y_2 - y_1 = \Sigma\,\Delta y = \Sigma\big(f'(x)\,\Delta x + \varepsilon\,\Delta x\big) = \Sigma f'(y)\,\Delta x + \Sigma\,\varepsilon\,\Delta x$$

$$\therefore\; \Sigma f'(x)\,\Delta x = y_2 - y_1 - \Sigma\,\varepsilon\,\Delta x$$

Supongamos ahora que el número de los Δx crezca indefinidamente, con lo que Δx tiende hácia cero la expresión $\Sigma\,\varepsilon\,\Delta x$ tiene por límite cero, por cuanto llamando ε_0 el mayor de todos los ε, la expresión $\Sigma\,\varepsilon\,\Delta x$ será menor que la $\varepsilon_0\,\Sigma\, n\,\Delta x = \varepsilon_0\,(x_2 - x_1)$ como ε_0 tiene por límite cero cuando el de Δx lo es, sacamos finalmente

El integral es un verdadero límite matemático

$$\text{lím.}\; \sum_{x_1}^{x_2} f'(x)\,\Delta x = y_2 - y_1$$

aquí se trata de un verdadero límite matemático por cuanto la variable independiente es el número de cantidades $f'(x)\,\Delta x$, el cual número puede crecer indefinidamente; este límite se indica ordinariamente con el simbolo $\int$ y se pone en consecuencia $\int_{x_1}^{x_2} f'(x)\,\Delta x = y_2 - y_1$

Supongamos (figura III) representada geométricamente la función $f'(x)$ por el método de Descartes; se vé claramente que la expresión $\sum_{x_1}^{x_2} f'(x)\,\Delta x$ representa el área de la superficie rayada de la figura comprendida entre las ordenadas $f(x_1)$, $f(x_2)$ el eje de las x, y la línea mixta superior obtenida mediante paralelas al eje de las x y de las y trazadas por cada punto en que las orde-

Interpelación geométrica de la integral

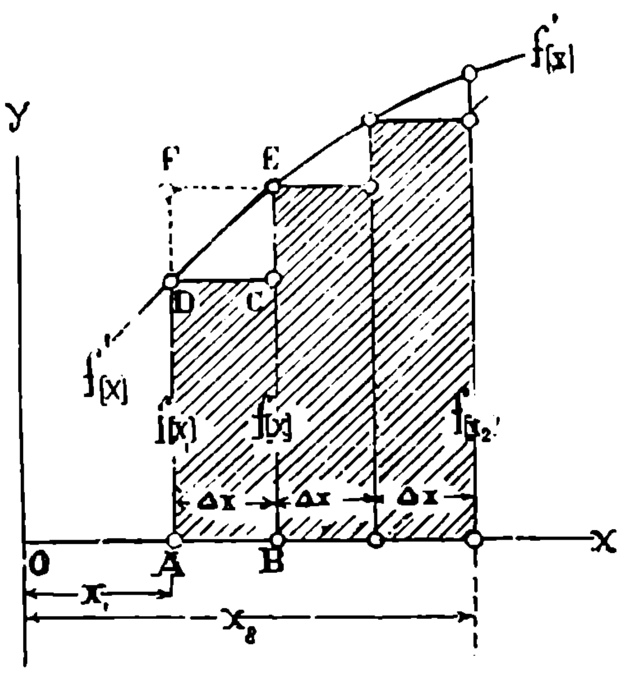

Fig. III

nadas levantadas en los n puntos de división del intervalo $x_2 - x_1$ cortan á la curva $f'(x)$; el límite de la expresión $\sum_{x_1}^{x_2} f'(x)\,\Delta x$ ó sea $\int_{x_1}^{x_2} f'(x)\,dx$ es evidentemente el área de la figura comprendida entre la curva, el eje de la x y las ordenadas extremas $f'(x_1)$, $f'(x_2)$, vemos que que esta área, igual según vimos á $y_2 - y_1$ se obtendría buscando una función y, tal que su derivada sea la función dada $f'(x)$, y formando el incremento $y_2 - y_1$ de esta nueva función entre los mismos valores x_2 y x_1 del argumento.

El problema de obtener el límite matemático de la suma $\sum_{x_1}^{x_2} f'(x)\,\Delta x$ de elementos en la que $f'(x)$ es una fun-

El cálculo integral inverso del diferencial ción de argumento x y en la que el intervalo $x_2 - x_1$, se ha dividido en un número indefinidamente creciente de partes Δx cuya magnitud decrece de la misma manera, queda reducido á buscar el incremento de una función de la misma variable comprendida entre los mismos valores x_2, x_1 y tal que esa nueva función tenga por derivada la función dada $f'(x)$. Por esto se dice á veces que el cálculo integral es el inverso del diferencial.

Especulativamente el cálculo diferencial y el integral son inversos pero su metafísica relativa á los conceptos de función y de límite es distinta

Sin embargo, si efectivamente bajo el punto de vista especulativo estos dos cálculos son realmente inversos por cuanto uno busca la derivada de una función y el otro investiga de que función es derivada tal otra; en cambio, dogmáticamente, con relación al concepto de función y de límite matemático, hay notable diferencia entre ellos, pues en el cálculo diferencial se busca el valor especial de una relacion de incrementos, uno de los cuales es susceptible de variar á nuestro antojo y de poder por lo tanto alcanzar y tomar el valor especial correspondiente al de la relación buscada, la cual no tiene ya así considerado el carácter de un límite matemático; en tanto que en el cálculo integral se busca el límite realmente matemático de una suma de n terminos cuyas magnitudes decrecen con el aumento de n, de manera que el valor límite en cuestión jamás puede ser alcanzado desde que no hay límites en el aumento indefinido de n.

Condiciones para que una función pueda ser derivada de otra

Queda ahora por averiguar si una función cualquiera puede ser derivada de otra. Se demuestra que esto se verificará en las mismas condiciones necesarias para que la función dada sea ortoide [1] (véase pág. 123 nota (1). El

(1) Efectivamente si la función dada reune la primera condición de ortoidía no puede pasar por un valor infinito cuando x crece de x_1 á x_2 luego si $f(x_m)$ es el mayor valor que toma en este intervalo se tendrá:

$$\sum_{x_1}^{x_2} f(x)\,\Delta x < \left|\sum_{x_1}^{x_2} (f x_m)\,\Delta x \quad f(x_m)(x_2 - x_1)\right| \text{ luego } \sum_{x_1}^{x_2} f(x)\,\Delta x$$

queda menor de una cantidad fija $f(x_m)(x_2 - x_1)$. Considerando ahora una porción de esa suma en la que se verifica la segunda condición (monotonía de la función) quedando en ella el incremento de la función constantemente de mismo signo, por ej. positivo, llamando $f_{(p)}$ el más pequeño de los valores de la función en este intervalo de suma, el valor correspondiente de ella será mayor que $f_p \sum \Delta x$ y como queda finita tendrá, al crecer el número de porciones, necesariamente un límite (véase pág. 87) lo mismo sucederá en otra posición de suma en la queel incremento de la función es constantemente negativo. De manera que la suma total de estas procedimiento para hallar esta función constituye justamente el objeto del cálculo integral.

§ 4. El cálculo de variaciones

Objeto del cálculo de variaciones

El cálculo de variaciones no constituye propiamente hablando, como ya dijimos, sino una aplicación del cálculo diferencial á las funciones afectadas del símbolo $\int$. Cuando en el cálculo diferencial se propone uno encontrar el máximo ó el mínimo valor de una función en un intervalo dado de su argumento, basta buscar los valores de este que anulan la primera derivada de la función propuesta. Pero si, en cambio, se busca que función satisfacen á la condición de que otra función deducida de ella sea máxima ó mínima entre valores del argumento dados directa ó indirectamente, entonces fallaría el procedimento anterior del cálculo deferencial por cuanuto siendo desconocida la función no podría hallarse su derivada. Si se plantea no obstante el problema despreocupándose de las dificultades que posteriormente puede acarrear el desconocimiento de la función, se llega uniformemente á una integral definida que afecta á la función buscada; esta integral definida entre los límites dados del argumento viene a constituir la expresión analítica de la condición establecida que debe unir la función buscada con aquella deducida de ella que debe ser máxima ó mínima entre los valores citados del argumento. Si por ejemplo se pide la ecuación de la curva de largo mínimo entre dos puntos dados sobre una superficie también dada, la integral en cuestión expresaría la longitud de una curva cualquiera trazada sobre la superficie y pasandolas por los dos puntos fijados; en esta ecuación, el ó los parámetros quedarán por determinar pues ellos son los que distinguen una

Proceder de este cálculo

Ejemplos

porciones tendrá necesariamente un límite que será la suma algébrica de los límites parciales y que solo podría ser nulo en casos muy particulares: luego $f(x)$ es derivada de otra función (cuyo incremento es según vimos, ese límite recién hallado, tomando aquel entre los valores x_2, x_1 del argumento).

curva de otra entre las que reunen la condición anterior de manera que este parámetros que se consideran fijos en el cálculo diferencial es ahora variable lo mismo que las coordenadas de la curva. Hay pues en esta ecuación que distinguir los incrementos diferenciales ordinarios del cálculo diferencial y además los de los parámetros que se llaman *variaciones* para distinguir. En la integral recién indicada hay pues variaciones especiales cuyo estudio constituye justamente el objeto del cálculo de las variaciones y que tiene algún parecido con el problema del cálculo diferencial enunciado así: Dada la diferencial de una función determinar la de una función de dicha función. Igualando pues á cero la variación completa del integral se tiene una ecuación que junto con las otras previas permiten determinar los parámetros buscados de las curvas, que satisfacen á la condición de máxima ó mínima fijado pues las variaciones siguen leyes análogas á las diferenciales de las cuales no se distinguen en el fondo.

Diferenciales y variaciones

Mecanismo del cálculo de variaciones

La metafísica de este cálculo inventado por Lagrange no difiere pues de la del cálculo diferencial ó integral.

§ 5 Consideraciones finales sobre el método infinitesimal. Método de asimilación

Podemos ahora concluir definitivamente con la completa inteligencia del método infinitesimal aplicándolo á dos ejemplos.

Estudio de la curvatura de una línea

Supongamos que nos proponemos estudiar una línea cualquiera cuya imágen más ó menos complicada turba la quietud de nuestro espíritu, el cual trata en consecuencia de reducirla á la de otra línea más familiar y de propiedades conocidas. Entre estas tenemos la línea recta y la circunferencia del círculo. Hemos visto anteriormente en el estudio de las derivadas, como se efectuaba la sustitución de la línea complicada por la de su tangente en distintos puntos, el coeficiente angular de las cuales permita conocer los incrementos de las ordenadas de la línea dada. Vamos á ver ahora que utilidad puede traer la circunferencia en el estudio de esta última. Al efecto sustituyamos una porción Δs de la línea dada por un arco de circunferencia que pasa por los dos extremos de Δs y tenga la tangente común en un extremo A, si llamamos $\Delta \alpha$ el ángulo que forman las tangentes en los extremos de Δs el radio de esta circunferencia será $\frac{\Delta s}{\Delta a}$; á medida que Δs disminuye indefinidamente la circunferencia se aproxima más y más á la porción de curva que sustituye. Si $\frac{\Delta s}{\Delta a}$ tiene un límite matemático, es evidente que este límite corresponderá á un radio de una circunferencia que se aproximará lo más posible á la curva en el punto A que suponemos, así como la tangente en él, fijos en esta variación. Si Δs es el incremento de un arco s que se toma como argumento, el valor especial que adquiere esta relación $\frac{\Delta s}{\Delta a}$ cuando Δs se anula, es el mismo que el límite anterior y corresponde por lo tanto á un círculo tangente lo mismo que la curva á la recta fija en A, pero aproximándose á dicha curva más que ninguna otra circunferencia análoga. Esta circunferencia especial se llama *osculadora* á la curva y estará determinado en posición y magnitud conociendo su radio $\frac{d\alpha}{ds}$ por cuanto sabemos que el centro está sobre la perpendicular á la tangente dada en A á la curva y hácia el lado cóncavo.

Círculo osculador á una curva

Esta circunferencia osculadora satisface á nuestra necesidad de descomposición de una representación complicada en otras más sencillas y familiares y determina la desviación ó curvatura de la línea dada en cada punto de ella, cosa que á primera vista nos era imposible conocer. Veamos pues si la expresión $\frac{\Delta s}{\Delta \alpha}$ tiene un límite al disminuir indefinidamente Δs y tender hácia cero. Tenemos:

Curvatura de las líneas

$$\Delta s = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} = \Delta x \sqrt{1 + f'(x)^2} \quad [1]$$

$$\text{tang } \alpha = \frac{dy}{dx} \therefore \alpha = \text{arc tang } f'(x)$$

Valor del radio de curvatura

$$\therefore \Delta\alpha = \frac{\Delta x\, f''(x)}{1 + f'(x)^2} \quad |2| \quad \therefore \text{lím.} \frac{\Delta s}{\Delta\alpha} = \frac{ds}{d\alpha} = \frac{\left(1 + f'(x)^2\right)^{\frac{3}{2}}}{f''(x)}$$

El error implicado en las ecuaciones erróneas |1| |2| no influye en el resultado porqué al tomar el límite, los términos de corrección que falta se anularían y sería pues inútil escribirlos (véase pág. 132).

Aplicación al estudio de un movimiento circular cualquiera de un cuerpo

Como segundo ejemplo, propongamonos estudiar un movimiento curvilíneo, determinando las componentes tangenciales y normales á la trayectoria, de la fuerza que origina el movimiento.

Si la componente tangencial obrara sola, desviaría el móvil en un tiempo Δt de una longitud l_t sobre la tangente á la trayectoria; la fuerza que ocasionaría dicho desplazamiento sería: $\frac{d^2 l_t}{d t^2}$ suponiendo la masa del móvil $=$ 1 cometiéndose al decir eso un error cuyo límite

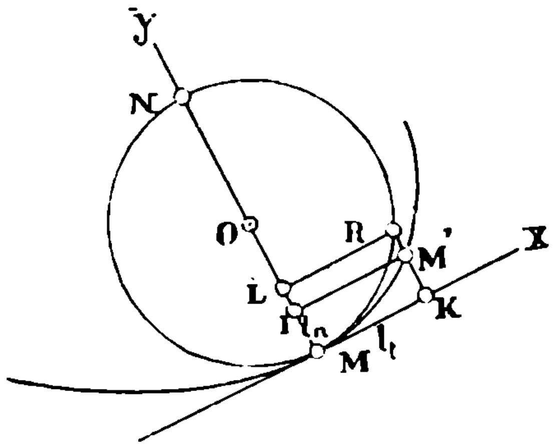

Fig. IV

es cero cuando el de Δt es también cero; ahora bien como MM' — MK es una cantidad indefinidamente decreciente de tercer orden respecto de Δl_t; $\Delta^2 s$ y $\Delta^2 l_t$ se diferencian también en una cantidad indefinidamente decreciente de tercer orden como resulta de las ecuaciones: $\Delta l_t = \Delta s_1 + M_1 \alpha^3$; $\Delta l_{t_2} = \Delta s_2 + M_2 \alpha^3$ siendo α un indefinidamente decreciente de primer orden luego:

Metafísica del problema

Investigación de la componente tangencial

$$\Delta l_{t_2} - \Delta l_{t_1} = \Delta^2 l_t = \Delta s_2 - \Delta s_1 + (M_2 - M_1)\,\alpha^3$$

$\therefore \Delta^2 l_t = \Delta^2 s + N \alpha^3$ que demuestra la proposición; podemos pues reemplazar en los cálculos $\Delta^2 l_t$ por $\Delta^2 s$ y escribir que la fuerza tangencial es $\frac{d^2 s}{dt^2}$ T. Al no haber hecho simplificación alguna, nos hubiéramos visto obligados á escribir

$$T \quad \frac{\Delta^2 l}{\Delta t^2} \quad \frac{d^2 l_t}{dt^2} \quad \alpha_1 \quad \frac{d^2 s}{dt^2} \quad N\,\alpha^3 \quad \alpha^1$$

$$T \quad \text{lím.} \left(\frac{d^2 s}{dt^2} \quad N\,\alpha^3 \quad \alpha \right) \quad \text{lím.} \frac{d^2 s}{dt} \text{ siendo pues}$$

inútil haber puesto las correcciones.

Investigación de la componente normal

Para buscar la componente normal, no podemos seguir el mismo procedimiento por cuanto el incremento de arco siendo considerado como cantidad indefinidamente decreciente de primer orden, su seno verso l_n que viene á ser la componente normal del movimiento es según vímos (pág. 117) una cantidad indefinidamente decreciente de segundo orden, luego si en la fórmula $N = \frac{d^2 l_n}{dt^2}$

lím $\frac{\Delta^2 l_n}{\Delta t^2}$ ponemos Δs en vez de Δl_n; como lím $\frac{\Delta l_n}{\Delta s} = 0$ sacaríamos $\Delta l_n \quad \alpha \Delta s \therefore \Delta^2 l_n \quad \Delta \alpha \Delta^2 s$ siendo α una cantidad indefinidamente decreciente de primer orden la fórmula anterior nos daría pues la relación inútil:

$$N \quad \frac{d^2 l_n}{dt^2} \quad \text{lím} \frac{\Delta^2 l_n}{\Delta t^2} \quad \text{lím} \frac{\Delta \alpha \Delta^2 s}{\Delta t^2}$$

que nada nos enseñaría de nuevo.

La serie de Taylor presta en este caso utilidad para hallar el valor de $\frac{d^2 l_n}{dt^2}$ pues tenemos (pág. 139)

$$\Delta l_n \quad \frac{d l_n}{dt} \Delta t \quad \frac{1}{2} \frac{d^2 l_n}{dt^2} \Delta t^2$$

$$\therefore \Delta l_n \quad \frac{d l_n}{dt} \Delta t \quad \frac{1}{2} N \Delta t^2$$

como el $\frac{d l_n}{dt}$ representa la velocidad del móvil en M y que esta es nula tendremos:

$$\frac{d l_n}{\Delta t^2} \quad \frac{1}{2} N \quad \Delta t\, K$$

el límite de esta expresión ó su valor para Δt 0, es:

$$\text{lím}\ \frac{\Delta l_{n}}{\Delta t^{2}} = \frac{d\, l_{n}}{d\, t^{2}} = \frac{1}{2}\, \mathrm{N} \therefore \mathrm{N} = \frac{2\, d\, l_{n}}{d\, t^{2}} = \frac{2\, \Delta\, l_{n}}{\Delta\, t^{2}} + \varepsilon$$

Comparando esta fórmula con la anterior de N vémos que lím $\frac{\Delta \alpha \Delta s^{2}}{\Delta t^{2}} =$ lím $\frac{2 \Delta l_{n}}{\Delta t^{2}} \therefore$ que nos dá instrucciones sobre el valor antes desconocido de α aunque sin utilidad alguna.

La consideración del círculo osculador en el punto M de la trayectoria permite dar otra forma á la expresión de la componente normal N (véase fig. IV) pues es en vez de M I $= l_{n}$ consideramos la M L correspondiente en el círculo osculador, vemos que:

$$\mathrm{M\,L} = \frac{\mathrm{M\,R}^{2}}{\mathrm{M\,N}} \therefore \frac{\mathrm{M\,L}}{\Delta t^{2}} = \frac{\mathrm{M\,R}^{2}}{\mathrm{MN}.\Delta t^{2}}$$

tomando el límite de esta expresión cuando el arco M M' $=$ Δs tiende hacia cero y recordando la definición dada del círculo osculador (pág. 145) vemos que:

$$\text{lím}\ \frac{\mathrm{M\,L}}{\Delta t^{2}} = \text{lím}\ \frac{\mathrm{M\,I} = l_{n}}{\Delta t^{2}} = \text{lím}\ \frac{\mathrm{M\,R}^{2}}{\mathrm{MN}.\Delta t^{2}}$$

$$\frac{1}{\mathrm{M\,N}}\ \text{lím}\ \frac{\mathrm{M\,R}}{\Delta t^{2}} \quad \frac{1}{\mathrm{M\,N}}\ \text{lím}\ \frac{\Delta s^{2}}{\Delta t^{2}}\ (1)$$

Resultado final

$\therefore$ lím $\frac{2 \Delta l_{n}}{\Delta t} = \frac{v}{\rho}$ llamando v la velocidad del móvil en M y ρ el radio de curvatura de la trayectoria en el mismo punto.

---

(1) Efectivamente el radio ρ del círculo osculador tiene por expresión

$$\therefore \text{lím}\ \frac{\Delta s}{\Delta \alpha}\ \text{ó}\ \frac{\mathrm{M\,R}}{\Delta \alpha'}$$

llamado $\Delta \alpha$ y $\Delta \alpha'$ los ángulos formados por los tangentes en los extremos de los arcos Δs y M R; tendremos entonces: $\frac{\Delta s}{\Delta x} - \frac{\mathrm{M\,R}}{\Delta \alpha'}$ ε siendo ε una cantidad que se anula con $\Delta \alpha \therefore \Delta s = \mathrm{M\,R}\, \frac{\Delta \alpha}{\Delta \alpha'} + \varepsilon\, \Delta \alpha \therefore \frac{\Delta s}{\mathrm{M\,R}} = \frac{\varepsilon}{\rho} +$

$$\frac{\Delta \alpha}{\Delta \alpha'} \therefore \frac{\left(\frac{\Delta s}{\Delta t}\right)}{\left(\frac{\mathrm{M\,R}}{\Delta t}\right)} = \left(\frac{\varepsilon}{\rho} + \frac{\Delta \alpha}{\Delta \alpha'}\right)^{2} \therefore \text{lím}\left(\frac{\Delta s}{\Delta t}\right)^{2} = \text{lím}\left(\frac{\mathrm{M\,R}}{\Delta t}\right)$$

por cuanto, siendo el círculo osculador y la trayectoria tangentes en M el lím $\frac{\Delta \alpha}{\Delta \alpha'} = 1$. Igualmente M L $=$ M I $+$ I L pero I L R M' es la diferencia

El método llamado de asimilación ó leibnitziano

La circunstancia de que en la aplicación del método infinitesimal pueda reemplazarse sin alterar el resultado final, las cantidades indefinidamente decrecientes por otras análogas de mismo orden pero cuya diferencia con aquellas sean otras cantidades indefinidamente decrecientes de orden superior, equivale á asimilar las primeras á las segundas. Una vez que se sabe el orden de grandor de las distintas cantidades indefinidamente decrecientes que aparecen constantemente en los raciocinios, no es necesario repetir cada vez las mismas consideraciones ya hechas y decir por ej. que un arco puede reemplazarse por su cuerda cuando son muy pequeñas por cuanto su diferencia es una cantidad indefinidamente decreciente de segundo orden respecto á ellas, que una circunferencia es el límite de los polígonos inscriptos ó circunscriptos en ella, que la tangente es el límite de las secantes sujetas á cierta condición, etc. Basta decir que el arco es asimilable á la cuerda, ó sea rectificable, que la circunferencia lo es á un polígono, la tangente á una secante, un movimiento variado á una suma de movimientos uniformes, una superficie curva á un poliedro etc. Tal es el método leibnitziano llamado también de *asimilación*. El lenguaje y las suposiciones que este hace son evidentemente erróneas, pero tiene la ventaja de su sencillez, y no conduce sinó á resultados rigurosamente exactos debido á las razones que acabamos de indicar al estudiar su metafísica. Su aceptación es puramente convencional y supone efectuada la serie de estudios hechos en esta tésis. Pero esta última observación hace comprender porqué su inventor Leibnitz tuvo que hacer frente á una crítica general. El mismo, según vimos, no se dió cuenta clara de porqué una manera de raciocinar y de proceder tan enteramente deficiente pudiera conducir á resultados cuya veracidad era indiscutible. Esta última tarea es la que sus sucedores resolvieron definitivamente y que dá cuenta esta tésis.

Su lenguaje

Su orígen

---

de los incrementos indefinidamente decrecientes de segundo orden (senos versos) de dos curvas osculadoras la cual según se demuestra en la teoría de los contactos, es de tercer orden, luego podemos poner: $\text{lím} \frac{M\,L}{\Delta\,l^2} = \text{lim} \frac{M\,I}{\Delta\,l^2}$ siendo $\Delta\,l$ indefinidamente decreciente de primer orden ($M\,x$, $M\,y$ son los ejes de coordenadas).

Su peligro

Pero justamente, por lo mismo que el método leibnitziano ó de asimilación implica una metafísica especial previa, la facilidad y rapidez que dá á las operaciones está balanceada en parte por los peligros que su empleo lleva en sí acarreado, pues según vímos (pág. 116) la falta de atención puede hacer asimilar cantidades notablemente distintas y falsear los resultados. Así, en el estudio anterior de la trayectoria de un móvil, vimos que según el elemento que se busca, según también serán los elementos asimilables á él. Cuando se busca p. ej. la componente tangencial T de la fuerza motora, asimilamos el arco de trayectoria á su tangente trazada en un extremo porqué estas cantidades son indefinidamente decrecientes de igual orden; pero al buscar la componente normal N, no es ya posible asimilar el arco á su seno verso por tratarse de cantidades de distinto orden de pequeñez; si esto se hiciera, los resultados saldrían falseados.

Ejemplo de estos peligros

Veamos para terminar, la manera como se simplifica notablemente las demostraciones con el método de asimilación aplicándolo á los dos ejemplos anteriores:

Aplicación del método infinitesimal á los dos ejemplos anteriores

Círculo osculador. Sean $\frac{ds}{2}$ dos arcos sucesivos de una curva asimilados á una recta, sea $d\alpha$ el ángulo que forman, uno con la prolongación del otro. La circunferencia cuyos dos arcos sucesivos están asimilados á $\frac{ds}{2}$ tendrá un radio igual á $\rho = \frac{ds}{d\alpha}$ pero $ds = dx\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$ y como tang $\alpha = \frac{dy}{dx}$ sacamos

$$d\alpha = \frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \quad \therefore \quad \rho = \frac{\left[1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}}$$

Estudio de la trayectoria de un móvil. —Asimilando el elemento rectilíneo de arco ds á su tangente trazada en un extremo y limitada por la perpendicular levantada en el otro y asimilando también el movimiento á una suma de movimientos uniformes existentes en el tiempo dt necesario para recorrer el elemento ds, tendremos que la velocidad v es igual á $\frac{ds}{dt}$, la aceleración y por lo tanto la fuerza T, desde que la masa del móvil la suponemos igual á la unidad, será: $T \quad \frac{d^2 s}{dt^2}$.

Descomponiendo ahora la fuerza F en sus dos componentes una tangencial y otra normal, esta fuerza siendo uniforme en el tiempo dt en la cual el móvil recorre el arco ds de trayectoria y el dl_n en la dirección de la normal, y siendo nula la velocidad original del movimiento dl_n, tendremos según la fórmula del movimiento producido por una fuerza uniforme: $dl_n \quad \frac{1}{2} N \, dt^2 \therefore N \quad \frac{2 \, d l_n}{d t^2}$ y como el circulo osculador á la trayectoria tiene el elemento ds común con ellas y rectilíneo sacamos (fig. IV) dl_n $\frac{ds^2}{2\rho}$ siendo ρ el radio de dicho círculo osculador, luego:

$$N \quad \frac{v^2}{\rho} \quad \frac{\left(\frac{ds}{dt}\right)^2}{\rho}$$

§ 6 El análisis llamado infinitesimal sin límites ni infinitamente pequeños.

a) *El análisis de Lagrange*

Orígen del análisis de Lagrange

Lagrange para escapar á las dificultades metafísicas que presentaba, por una parte la explicación del método leibnitziano de los incrementos pequeños de distintos órdenes cuya despreciación en los cálculos arruina la exactitud de este y por otra á las del método de los límites de Newton que implicaba la anulación de los incrementos de la función y del argumento originando la expresión $\frac{0}{0}$

que parece sin significado por cuanto implica una relación de cantidades que han dejado de serlo, Lagrange pues basándose en que el desarrollo en serie de Taylor de una función con argumento incrementado, los coeficientes literales de las potencias sucesivas del incremento de argumento en los distintos términos vienen á ser las derivadas primeras, segundas etc., de la función, tuvo la idea [1] de considerar estos coeficientes como aptos para fundar un nuevo método de cálculo superior, basado únicamente en las operaciones del algebra.

Se base en el desarrollo, en serie de Taylor de las funciones incrementadas

Para esto, empieza por deducir la citada serie de Taylor sin hacer uso del cálculo diferencial, y define enseguida los coeficientes literales de las potencias sucesivas del incremento del argumento en los distintos términos, llamándolas funciones, primeras, segundas, etc., de la primitiva haciendo ver también como se deducen unas de otras por iguales procedimientos. Cree así haberse librado de las difícultades metafísicas inherente al método de los infinitamente pequeños y al de los límites. Pero, por de pronto observaremos que, según dijimos, una serie indefinida de términos implica ya el concepto de límite; al efecto Cournot en su *Traité elementaire de la theorie des fonctions* tomo 1°, pág. 178, hace notar que el desarrollo en serie no tiene sentido sino cuando conduce á una serie convergente y toda inducción sacada de una serie divergente carece de sólidez y puede conducir á paradojas. Le es imposible pues á este método escapar al concepto de límite matemático. Además, la aplicación práctica de esta nueva definición de derivadas tropieza con dificultades insalvables que prueban claramente la necesidad del empleo de nociones auxiliares cuyo simple desarrollo por el algebra no basta para hacer comprender la naturaleza de las cosas y las leyes del entendimiento. En la determinación de volúmenes, rectificaciones de curvas, valores de subtangentes etc., se vé uno obligado á recurrir á los metodos ordinarios. Se explica así como Lagrange ha debido recurrir á raciocinios pesadísimos para llegar con su desarrollo en serie á demostrar que la velocidad

Definición de las derivadas por Lagrange

No excluye el concepto de límite

Es impropia para las aplicaciones prácticas

(1) Fonctions analytiques et leçons sur le calcul des fonctions.

y la aceleración de un movimiento son la derivada primera y segunda respectivamente del espacio recorrido con respecto al tiempo empleado en recorrerlo, nociones sencillísimas y que no necesitan artificio alguno para aceptarse inmediatamente. Cauchy al hablar de este método decía: «Las dificultades que se encuentra cuando
» se quiere deducir la noción de derivada de la consideración de una serie compuesta de un número indefinido
» de términos se encuentra apenas disimulado por todos
» los recursos que ha desarrollado el génio de Lagrange
» en los primeros capítulos de la Teoría de las funciones
» analíticas». Si á estas dificultades teóricas se agrega las prácticas antes indicadas, no debe extrañarse que cuando el problema se complique, las dificultades procedentes de la aplicación del método de Lagrange sean superiores á todos los esfuerzos, y que su mismo inventor haya tenido que abandonarlo y seguir el de Leibnitz al escribir su famosa *Mecánica analítica.* El mismo Lagrange lo abandonó

b) *El análisis de Henry Fleury*

Henry Fleury en su opúsculo *L'analyse dite infinitesimale sans limites ni infiniment petits* (Paris 1896) expone la teoría del análisis superior sin emplear para nada las palabras límites ni infinitamente pequeños. En realidad, su exposición está comprendida en la general usada en esta tésis por cuanto el hecho de no emplear incremento infinitamente pequeño lo hace entrar en la escuela empirista, adoptada también por nosotros; en cuanto al concepto y empleo del límite matemático en las derivadas, hicimos también observar que solo puede esta ser considerada como un límite de esta clase cuando el argumento de la función está sustraída á la eventualidad de poder anularse, lo cual obliga á considerarlo como función de un nuevo argumento que adquiere valores indefinidamente crecientes cuando aquel se aproxime á cero. Pero considerando únicamente la función dada y su argumento, pudiendo este por su misma definición adquirir los valo- Este análisis pertenece á la escuela empirista Detalles

Límites

res que se le quiera dar, no tiene límite matemático y la derivada viene á ser así el valor especial que adquiere la relación entre los incrementos de la función y del argumento cuando este es nulo; no se trata pues de un límite matemático sino de un valor especial que puede darse cuando se quiera á la relación en cuestión; en todo caso sería un límite singular, de los indicados en la página 97. Vamos á explicar mejor esto último con algunos ejemplos, los mismos de Fleury. Si escribimos:

Ejemplos de límites matemáticos y de singulares

$y = \frac{1}{x}$, cero es el límite matemático de y por cuanto por grande que sea x nunca lo será bastante para hacer anular y; no habiendo límite en el crecimiento de x, jamás podrá y alcanzar á cero; este posee pues el carácter esencial á un límite matemático, el cual consiste, según vimos, en no poder ser jamás alcanzado.

Igualmente 4 es el límite matemático de $y = 4 + \frac{1}{x}$

En la expresión $y = \frac{4x+7}{x+3} = 4 - \frac{5}{x+3}$, 4 es igualmente el límite matemático de y, y cero el de $\frac{5}{x+3}$.

En resúmen si A es el límite matemático de una función: $y = f(x)$, se debe tener: $y = A + \varphi(x)$ siendo $\varphi(x)$ una función que tiene por límite matemático o cuando x crece indefinidamente pues solo con un crecimiento de esta especie será imposible alcanzar un valor determinado de la función. Esto hace ver que la recta $y = A$ es una asíntota de la curva $y = f(x)$. Así es el ejemplo:

Líneas asíntotas

$$y = x \quad \frac{x}{1+\frac{1}{x}} = 1 - \frac{1}{x+1},$$ el límite matemático, de y es 1 y la recta $y = 1$ es asíntota de la hipérbola cuya ecuación es la del ejemplo, la otra asíntota sería $x = -1$ como resulta de escribir $x = -1 - \frac{1}{y-1}$ considerando ahora y como argumento y x como función. Si tenemos finalmente $f(x) = y = ax + b + \varphi(x)$ donde supondremos límite matemático $\varphi(x) = 0$, la cantidad $ax + b$ no es ahora el límite matemático de y por cuanto no es una

Otros ejemplos de límites matemáticos y de asíntotas cantidad fija pero la diferencia entre la curva y y la recta $ax + b$, que es $\varphi(x)$ teniendo por límite matemático o nos prueba que la recta $ax + b$ es una asíntota de la curva $y = f(x)$. En el caso particular $f(x) = ax^2 + bx + c + \varphi(x)$, la parábola $ax^2 + bx + c$ es asintótica con la curva $y = f(x)$. Pero al tratarse de la derivada de una función, los incrementos dados al argumento no tienen por límite cero desde que nada impide darle este valor, no tiene pues tampoco aquella el carácter necesario para que pueda considerarse como límite matemático. Solo que caemos así en el símbolo $\frac{0}{0}$ considerando como ilusorio y desprovisto de sentido por cuanto se dice que *nada* dividido por *nada* es evidente *nada*. Aquí aparece la originalidad y el mérito especial de los trabajos de Fleury.

Ante todo observamos que de la metafísica de la multiplicación y de la división (véase pág. 52) resulta que el multiplicador indica siempre no una cantidad sino el número de veces que debe tomarse esta (el multiplicando); de manera que la división como operación inversa puede unicamente implicar ya á la determinación de una cantidad (el multiplicando), ya el número de veces que deba tomarse otra (el multiplicador); luego cuando interpretamos la expresión $\frac{0}{0}$ como significando $\frac{nada}{nada}$ lo hacemos en el segundo concepto de la división y entonces debe enunciarse diciendo *cuantas veces debe repetirse la nada para producir otra nada.* Evidentemente así adquiere significado la cuestión pues un número cualquiera la satisface. Sentado esto, veamos el procedimiento de Henry Fleury para el estudio del $\frac{0}{0}$ que sale en la investigación de las derivadas. Sea $y = f(x) = \frac{x^2(x-4)}{2(x-4)}$; para cualquier valor de x distinto de 4, $f(x) = \frac{x^2}{2}$; para ese valor especial $f(x)$ toma la forma $\frac{0}{0}$ Por consiguiente aproximando los valores de x á cuatro, el valor de $f(x)$ se aproxima á $\frac{4^2}{2} = 8$; al tomar x el valor 4, $f(x)$ llega con el

Interpretación del símbolo $\frac{0}{0}$

valor 8 á la forma $\frac{0}{0}$ para tomar todos los valores posibles. Quiere decir esto en resúmen que mientras x difiere de 4 el producto $\frac{x^2}{2} \cdot \frac{x-4}{x-4}$ tiene el mismo valor que el factor $\frac{x^2}{2}$ y llega al mismo tiempo que este factor al valor 8 para $x = 4$. Pero reduciéndose entonces á $\frac{0}{0}$ toma todos los valores posibles empezando por 8.

Este primer valor que toma la función $\frac{x^2}{2} \cdot \frac{x-4}{x-4}$ al convertirse en $\frac{0}{0}$ lo llama Fleury la *primordial* de la función, y el factor $\frac{x^2}{2}$ que determina la primordial para $x = 4$ lo llama el *determinativo* de la función.

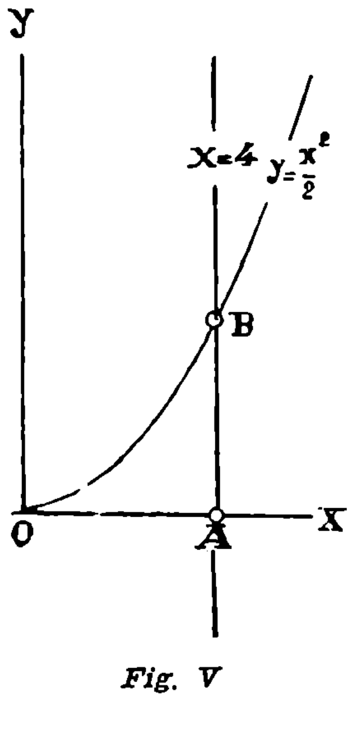

Fig. V

Interpretación geométrica del $\frac{0}{0}$

El lugar geométrico representado por la ecuación: $y = \frac{x^2}{2} \cdot \frac{x-4}{x-4}$ se compone de los dos lugares: $f_1(x, y)$ $(x-4) = 0$ y $f_2(x, y)$ $y - \frac{x^2}{2} = 0$ es decir de la recta

$y = 4$ y de la parábola $y^2 = \frac{x^2}{2}$ (fig. V). La primordial 8 que se obtiene haciendo $y = OA = 4$ en el determinativo $\frac{x^2}{2}$ representa la ordenada A B en que la recta $y = 4$ encuentra á la parábola $y = \frac{x^2}{2}$; al llegar en este punto las ordenadas del lugar formado por la parábola y la recta deben, empezando por A B = 8 tomar todos los valores correspondientes á los puntos de la recta $y = 4$; por esto toma la forma $\frac{0}{0}$ para $x = 4$ pero, como lo repetimos, empezando por $y = 8$ pues con este valor se alcanza á la recta viniendo por la parábola.

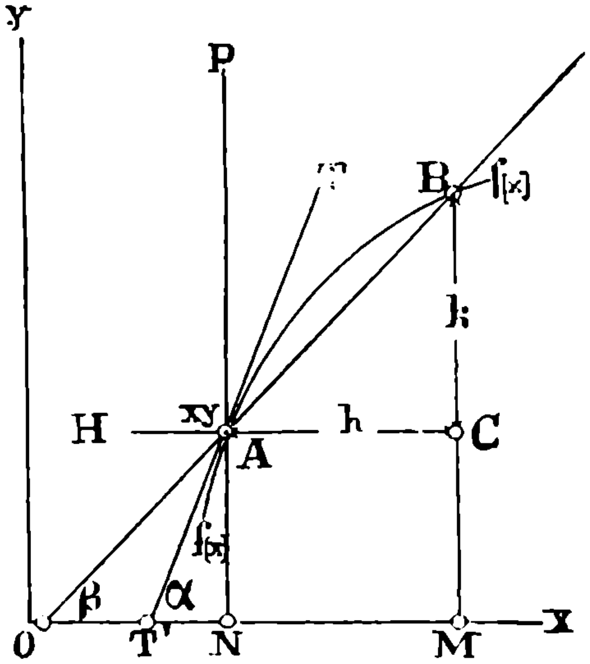

Fig. VI

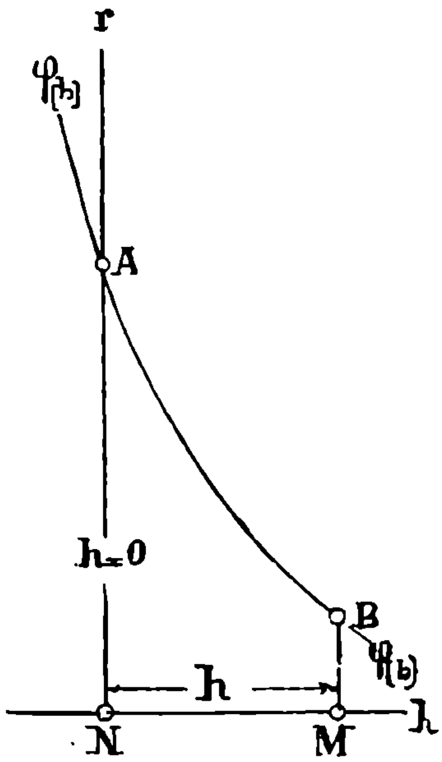

Fig. VII

Apliquemos este criterio al cálculo diferencial. Según sabemos, Leibnitz llegó á su método infinitesimal resolviendo el problema de la tangente es decir determinando su ecuación por deducción de la de las secantes que pasan por el mismo punto. Aplicación al teorema de las tangentes

Sea $f(x)$ una función ortoide cualquiera representada geométricamente con la curva $f(x), f(x)$ (fig. VI).

Ejemplo

Consideremos el punto A de coordenadas x, y, y propongámonos encontrar el ángulo α que forma la tangente á la curva $f(x)$ en A con el eje de las x, los procedimientos algébricos ordinarios son insuficientes para obtenerlo directamente y nos vemos obligados á deducirlos de los β análogos correspondientes á las secantes que pasan por A y por otro punto B de coordenadas $x + h$, $y + k$. La tangente trigonométrica del ángulo β, que también se llama coeficiente angular de la secante AB ó mejor *dirigente* de esta última, como dice Fleury, viene dado por la relación $\frac{k}{h}$ de los incrementos; pero como $f(x + h) = y + k$ debe reducirse á $f(x)$ haciendo $h = o$ resulta que $f(x + h) = y + k$ se compone necesariamente de una parte independiente de h que debe ser $f(x)$ y otra afectada de este coeficiente para que se anule junto con él. Tendremos pues

Dirigente de una tangente

$$y + k = y + h\,\varphi\,(x, h) \therefore k = h\,\varphi(x) \therefore \frac{k}{h} = \varphi\,(x\,h)\,\frac{h}{h}$$

Para cada valor de h, esta última fórmula dará el de su dirigente $\frac{k}{h}$ correspondiente. Supongamos que $\frac{k}{h} = r$ represente las ordenadas de una curva de argumento h, quedando en ella x como parámetro, tendremos $r = \varphi\,(h)\,\frac{h}{h}$ ecuación de un lugar que se compone de la curva $r = \varphi\,(h)$ y de la recta $h = o$ (fig. VII). La ordenada MB del punto B representa el dirigente tang β de la secante A B (fig. VI). Cuando $h = o$ la expresión $r = \varphi\,(h)\,\frac{h}{h}$ toma la forma $\frac{o}{o}$ pues no estando la secante obligada á pasar sino por un solo punto, puede tomar una infinidad de posiciones al rededor del punto A; pero en el momento en que el punto B viene á coincidir con el A, la primera posición que toma la recta AB antes de empezar á girar es la de la tangente en A y su dirigente tang. α corresponde á la ordenada NA de la curva $\varphi(h)$ en el punto A en que corta la recta $h = o$, esta dirigente es pues el primordial de la función r y viene á ser el valor que toma el determinativo $\varphi(h)$ para $h = o$ (fig. VII). Al pa-

Lugar geométrico de estos dirigentes

Interpretaciones geométricas

sar la secante AB desde la posición tangente AT á la opuesta AT', el dirigente viene marcado por las ordenadas de la recta $h = o$. Desde la posición AT hasta la perpendicular AP, el dirigente varia desde NA hácia el infinito superior de la recta $h = o$; y entre la posición AP y la AT' varia desde el infinito inferior $o - \infty$ de la recta $h = o$ hasta tomar nuevamente el valor NA, pasando por el intermediario $r = o$ que corresponde á la posición AH de la secante paralela al eje de las x, por esto toma la expresión r la forma $\frac{o}{o}$ adquiriendo todos los valores, empezando por el NA que tiene cuando llega á tomar esta forma y que corresponde á la primera y última posición que adquiere al girar de AT á AT' donde el dirigente tiene el valor $\frac{o}{o}$, ó sea á la de la tangente pedida.

Valor de la dirigente de la derivada

Esta representación geométrica revela todo el misterio y toda la metafísica del símbolo aparentemente ilusorio $\frac{o}{o}$ que tanto miedo infundió á los fundadores del método infinitesimal haciéndoles inventar los infinitamente pequeños para evitar de caer en aquel. Hace ver también que la derivada de una función es la primordial de la expresión $\varphi\,(x\,h)\ \frac{h}{h} = \frac{k}{h}$ que dá el valor de los dirigentes de las secantes que pasan por los puntos x, y; $x + h, y + k$ ó sea el valor del determinativo $\varphi\,(x\,h)$ para $h = o$. Haciendo variar x en esta primordial, se vé que es á su vez una función de x que admite otra primordial llamada derivada segunda de la función primitiva, etc. Como se vé para definirlas no se necesita para nada la intervención de infinitamente pequeños ni de límites.

Resultado final

En cuanto á la notación y valores de incrementos primeros, segundos, etc., son exactamente iguales y de igual metafísica que la desarrollada en esta tésis desde pág. 136 hacia adelante.

Pasemos ahora al cálculo integral.

Hemos visto que definido este como el investigador del límite de la suma de cantidades indefinidamente decrecientes cuyo número es función de su pequeñez, limitán-

El cálculo integral

dolos á cantidades de la forma $f(x)\ \Delta x$ implica un verdadero límite matemático, por esto Fleury lo define sencillamente (equivalencia anteriormente demostrada) como cálculo inverso del diferencial es decir como el problema consistente en remontar de una función á otra de la cual sea primordial. A pesar de no aceptar la primera definición, demuestra sin necesidad del postulado leibnitziano que la función que expresa la ordenada de una curva es la derivada de la que representa el area, proposición fundamental donde más imprescindible parece la necesidad de considerar el cálculo integral como límite de una suma indefinida de cantidades indefinidamente decrecientes originando la notación: $x \quad \int f(x)\ dx$.

Sea fig. III pág. 141 $f'(x)$ una función representada geométricamente por la curva $f'(x)\ f'(x)$ el incremento de área está comprendido entre $f'(x)\,\Delta x$ (rectángulo A B C D) y $f'(x\ \cdot\ \Delta x)$ (rectángulo A B E F) pero $f'(x\quad \Delta x)\ \Delta x$ es igual á $|\, f'(x)\ '\ \Delta x\ \varphi\ (x\,\Delta x)\,|\ \Delta x \quad f'(x)\ \Delta x \quad \Delta x^2\ \varphi$ $(x,\ \Delta x)$ $\therefore$ llamando Δz á este incremento de área tendremos que $\frac{\Delta z}{\Delta x}$ está comprendida entre $f'(x)\,\frac{\Delta x}{\Delta x}$ y $f'x\,\frac{\Delta x}{\Delta x}$ $\Delta x\,\varphi\ (x\,\Delta x)\,\frac{\Delta x}{\Delta x}$ expresiones que tienen ambas el mismo primordial $f'(x)$; luego el primordial de $\frac{\Delta z}{\Delta x}$ es también $f'(x)$ lo que indica que la ordenada de la curva da 4 es la derivada de la que representa el área. Adoptando la notación leibnitziana la espresión; $\int f'(x)\ \Delta x$ no expresará, pues para este análisis, una suma de elementos infinitamente ó indefinidamente pequeños sino la función cuya derivada es $f'(x)$, y es por definición que se tendrá:

$\int f'(x)\ dx \quad f'(x)$; igualmente por definición se tendrá:

$\int_a^b\ f'(x)\,dx \quad f(b) \quad f(a)$.

Tal es análisis trascendente de Henry Fleury; no puede negarse que es singularmente ventajoso para el primer estudio del cálculo infinitesimal por cuanto elimina los conceptos de infinitamente pequeño y de límite cuya inteligencia y metafísica complicada son causantes de las dificultades y dudas que se tropieza constantemente en él. Particularmente, su interpretación geométrica del $\frac{0}{0}$ es notable y digno de toda consideración. Pero, el estudio metafísico que constituye el objeto de esta tésis, no puede por eso ser eliminado para el que se propone penetrar en los verdaderos fundamentos de esta importante rama del análisis y sobre todo para la aceptación del método de asimilación cuya indiscutible ventaja en la rapidez de las aplicaciones del método infinitesimal no debe ser despreciada.

§ 7. Funciones anortoides

Hemos visto que las únicas funciones estudiadas en el cálculo infinitesimal son las ortoides y las simplemente anortoides en puntos singulares.

Las funciones en tiempo de Fourier

Fourier, el iniciador de la teoría moderna de la función analítica no conocía aún sino funciones contínuas ó unicamente discontínuas en puntos aislados como son las circulares, todas ellas ortoides en los mismos puntos de discontinuidad en cuestión; en su época no había pues objeto en hacer la separación de ortoidismo y anortoidismo. Pero este concepto restringido de la función ha sido luego poderosamente ensanchado por Lejeune-Dirichlet primero, y por Riemann, Weierstrass y otros despues, desapareciendo completamente ante las funciones contínuas anortoides y las discontínuas integrables dando orígen así á la *Teoría general de las funciones* cuya característica es precisamente la anortoidia permanente de ciertas funciones y especialmente la continuidad anortoide de algunas otras.

La teoria general de las funciones modernas

Para comprender bien esto, veamos más detenidamente en que consiste el concepto general de función ampliando lo dicho en la página 74.

Función de un argumento es una determinación en virtud de la cual á los valores del argumento correspon-

Concepto más general de función

den valores de la función. Ahora bien, á un valor particular del argumento puede hacerse corresponder un valor particular de la función ó un número limitado de ellos ó un intervalo de valores ó una serie de intervalos p. ej. un sistema pantáquico ó apantáquico de valores (véase página 100). Inversamente, los valores del argumento á los cuales se hace corresponder valores de función (pues no es necesario que le corresponda á todos) pueden tambien tomarse arbitrariamente p. ej. unicamente en uno de los citados sistemas de valores indicados en la página 100 y siguientes ó con más generalidad aún, fijando una ley arbitraria de acuerdo con la cual pueda hacerse corresponder á los valores de argumento dados por ella, valores de función arbitrarios exactamente como cuando se hace corresponder á un valor particular de argumento valores únicos ó intervalos de valores enteros de la función.

Concepto idealista de una función completamente determinada y sin ley

El idealista imagina ordenadas levantadas sobre la pantaquia completa del intervalo 0 — 1 de argumento y como sobre cada una de ellas existe también el continuum de los números, obtiene así el conjunto de todas las funciones llevando sobre todos los valores del argumento todas las combinaciones de valores de ordenadas. Como en esta correspondencia no se necesita la existencia de ley alguna que la determine, se vé que á la concepción idealista responde el conjunto infinito de todos los valores de función particulares imaginables al azar, llegando así á la abstracción misma de una función completamente sin ley.

Concepto empirista de una función completamente determinada

El empirista, que no admite en cambio la pantaquia completa, puede imaginarse un número grande á voluntad de valores de argumento pertenecientes por ejemplo, á apantaquias ó á pantaquias ilimitadas; pero para poder proveer á las pantaquias completas é infinitas en general, que no se han empobrecidos en valores con la determinación anterior, se impone la existencia de una ley general que permita continuar la correspondencia en su marcha hácia el infinito. Tal es para el empirista el concepto más general de una función completamente determinada. Una ley general se impone, á diferencia del idealista.

El empirista acepta también que en la determinación de una función haya una especial para ciertos grupos de valores del argumento y otra para otro grupo: por ejemplo, las funciones:

$$f(x) = \frac{3}{2}x \text{ para } x = 0{,}6;\ 0{,}66;\ 0{,}666\ldots \text{ y } f(x) = 0 \text{ para } x = \frac{2}{3}$$

$$\begin{cases} f(x) = 1 & \text{para valores racionales de } x \\ f(x) = 0 & \text{» irracionales » } x \end{cases}$$

Otra separación de vistas del idealista y del empirista

El idealista en cambio, considera esta última función como incompletamente determinada por cuanto la distinción entre valores racionales é irracionales implica la existencia de un individuo que cuenta; no encierran pues todos los valores existentes en la pantaquia completa del argumento.

Según todo lo anterior, resulta que pudiéndose dar á los valores arbitrarios del argumento, valores arbitrarios de la función, en general estos últimos valores representados por el procedimiento de Descartes no darán la imágen de una curva visible. Veamos pues algunos ejemplos (además de los anteriores que ya satisfacen á esta última condición siendo funciones anortoides) que respondan á determinaciones expresables en fórmulas.

Ejemplo de funciones anortoides

Sea $f(x) = (-a)^x$ siendo a positivo. Concibiendo valores sucesivos de la variable x expresadas bajo la forma fraccionaria $\frac{p}{q}$ tendremos $f(x) = \sqrt[q]{(-a)^p}$. Cada vez que p es impar y q par, $f(x)$ será imaginario, y al revés si p es impar. Dando pues á p y á q valores suficientemente grandes se puede con solo hacer variar x de muy poca cosa, hacer corresponder á $f(x)$ valores reales é imaginarios indefinidamente próximos no correspondiendo así á ninguna continuidad en cualquier intervalo.

Otra función discontínua anortoide la tenemos en la série $f(x) = u_0 + u_1 + u_2 \ldots\ldots + u_x$ en donde u son cantidades cualesquiera la cual solo tiene sentido para valores enteros del argumento.

Sea la expresión

La continuidad anortoide

$$f(x) = \sum_{p=0}^{p=n} \frac{\cos m_p x}{\mu^p}$$

Ante todo observaremos, como anteriormente lo hicimos, que la zona de separación entre las funciones ortoides y las anortoides atraviesa las funciones contínuas, de manera que hay una *continuidad anortoide*, y si bien todo esto pertenece, no á nuestro tema sino á la *Teoria general de las funciones*, no obstante, una ligera y breve idea del concepto empirista é idealista de esta continuidad anortoide no deja de ser conveniente. Precisamente el ejemplo propuesto es de una generalidad notable.

Estudio de la función $f(x) = \sum_{p=o}^{p=n} \frac{\cos m_p x}{\mu^p}$ y de la $f(x)$ límite de la anterior

Cuando μ es mayor que la unidad, pero muy próximo á ella de manera que μ^p crezca muy lentamente con p, la expresión $\sum_{p=o}^{p=n} \frac{\cos m_p x}{\mu^p}$ representa funciones discontínuas no integrables y también funciones discontínuas integrables. Para una determinación conveniente de m_p empiezan las funciones contínuas con puntos discontínuos singulares no diferenciables primero, y diferenciables después. Finalmente para un crecimiento más rápido de μ^p y valores convenientemente crecientes de m_p, aparecen las funciones contínuas con todas sus derivadas pero no desarollables en série de Taylor, y por último las funciones complejas. Muy bien puede uno representarse la marcha de una sola función $\frac{\cos m_p x}{\mu^p}$, pues basta imaginarse la curva geométrica correspondiente á $\cos x$ y reducir luego el intervalo de periodicidad $\frac{\pi}{2}$, π, dividiéndolo por μ_p, así como los intervalos de la función $+1$, -1 dividiéndolos por μ^p, de manera que por grande que sea p puede uno imaginarse trazada una imágen de la $\sum_{p=o}^{p=n} \frac{\cos m_p x}{\mu^p}$ y reconocer en ella que la tangente en un punto carece de posición determinada, pero si consideramos la $f(x) = \text{lím.} \sum_{p=o}^{p=\infty} \frac{\cos m_p x}{\mu^p}$ entonces la noción de infinitamente pequeño allí encerrada hace eliminar toda representación de ella. Las funciones anortoides contínuas no pueden pues corresponder á ninguna imágen, y ninguna función puede tampoco considerarse como una aproximación de aquellas. En la función anterior, los máximos de las funciones $\frac{\cos m_p x}{\mu^p}$ van encerrándose dentro de intervalos cada vez decrecientes á medida que u^p y m_p aumentan indefinidamente de manera que combinando todas estas funciones y pasando á los límites de estos intervalos caeríamos en la pantaquia completa que no siendo representable impide también la representación del límite de la suma de las funciones dadas. Esto es lo que expresa el idealista diciendo que una función anortoide permanente contínua tiene un *equivalente geométrico* no representable y tal que los puntos singulares de él distan de cantidades *infinitamente pequeñas*. Para él pues, la correspondencia geométrica de los valores de la función á la pantaquia completa de los valores del argumento no cesa á pesar de no responder á imágen alguna, siquiera aproximada. El empirista en cambio, no admitiendo pantaquias completas, no admite tampoco la dependencia de continuidad anortoide y vé simplemente en la expresión $f(x) = \text{lím.} \sum_{p=o}^{p=\infty} \frac{\cos m_p x}{\mu^p}$ una fórmula que para cualquier determinación del argumento permite calcular el valor correspondiente de la función con una aproximación arbitraria ó sea una ley que reemplace el valor de la función.

Concepto idealista de la continuidad anortoide

Consecuencias finales del idealista

Consecuencias finales del empirista

CAPÍTULO TERCERO

Las paradojas del concepto idealista del infinito

Al tratar de la noción del infinito vimos que solo es un símbolo de indeterminación y que por lo tanto al querer darle otro sentido se debe necesariamente caer en consecuencias paradojales cuando se introducen en la especulación matemática. En este capítulo vamos justamente á indicar algunas de ellas.

Sofisma de Zenon de Elea sobre el movimiento

La más antigua es la de Zenón de Elea [1] llamada vulgarmente «la carrera de Aquiles y de la tortuga» ligada tambien con el de la trayectoria de una flecha que nunca puede llegar á su destino. Esta paradoja consiste en lo siguiente: Una flecha lanzada debe necesariamente recorrer el $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \ldots \frac{n}{n+1} \ldots$ de su trayectoria y como por grande que sea la fracción $\frac{n}{n+1}$ aún hay una infinidad delante que recorrer, nunca puede aquella llegar á su destino. Este sofisma está basada en la incompatibilidad ya manifestada anteriormente de la divisibilidad con la continuidad, pues aquella por su naturaleza interminable, nunca puede alcanzar á agotar la cantidad, misión reservada exclusivamente al movimiento, se comprende entonces como puede la flecha que está en movimiento, agotar la distancia entre su punto de partida y su destino independientemente de la divisibilidad de dicha

(1) Los argumentos de Zenón son cuatro y Renouvrier ha demostrado que pueden reducirse á dos grupos distintos: uno *la dicotomia y el Aquiles*, el otro *la flecha y el estadio* respondiendo el primero á la hipótesis del espacio y del tiempo continuos y divisibles al infinito de una marcha actual; el segundo al tiempo y espacio discontinuos y no susceptibles de una división actual infinita.

distancia, operación completamente agena á la naturaleza del movimiento.

Potencia de los conjuntos infinitos

Otro de los sofismas es deducir que el número de puntos existentes en una recta es idéntico al de los existentes en el plano y en espacio lo que se expresa diciendo que: la potencia (G. Cantor) del continuum de los números en la recta, es igual á la del plano y del espacio; cosa que repugna evidentemente al sentido común. Es también consecuencia de la introducción en la especulación matemática de las ficciones idealistas; infinito ó infinitamente pequeños. Si ya estos últimos que son límites de representaciones conducen á consecuencias paradojales como son las igualdades $\infty + A = \infty$; $A + \varepsilon = A$ no debe extrañarse que la pantaquia completa que no es límite de nada conduzca á consecuencias más paradojales aún, cuando se la quiere tratar como verdadera especie matemática. Al decir que el número de puntos de la pantaquia completa es infinito, no se indica ningún número particular, sino uno indeterminado, satisfaciendo á la condición de ser mayor que cualquier otro por grande que sea, igual cosa decimos de los de un plano ó del espacio, pero por lo mismo que son indeterminados, no debemos deducir la igualdad de los tres, afirmación evidentemente falsa (como se deduce del concepto empirista de punto aplicado al caso).

El falso principio llamado microbio

Donde particularmente se introducen paradojas, es en la anulación de la expresión $\frac{1}{x}$ cuando x crece indefinidamente, lo que se expresa diciendo: para x infinito $\frac{1}{x}$ es nulo, como si el infinito fuera una cantidad; la expresión $\frac{1}{x}$ nunca puede anularse y solo será permitido hacerlo cuando se considere límites matemáticos por cuanto efectivamente el límite matemático de $\frac{1}{x}$ es cero; en todos los demás casos las paradojas son consecuentes. Sean por ejemplo las dos series divergentes:

$$\frac{3}{2} + \frac{5}{3} + \frac{7}{4} + \frac{9}{6} + \frac{11}{6}$$

$$\frac{1}{1} + \frac{3}{2} + \frac{5}{3} + \frac{7}{4} + \frac{9}{5}$$

Suponiendo que el infinito sea algo determinado y prolongando las series hasta el, estas no difieren entonces sino en el término $\frac{1}{1}$ de manera que restando la segunda de la primera se saca el absurdo:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\frac{1}{30}+\ldots\ldots=-1$$

procedente como se vé de haberles eliminado un extremo pues si en vez las suponemos limitadas respectivamente á los términos $\frac{2n+1}{n}$ y $\frac{2(n-1)+1}{n-1}$ la diferencia será $\frac{2n-1}{n}-1=1-\frac{1}{n}$ y entonces á medida que n crece indefinidamente se tiene la igualdad:

Aplicación á las series

$$\text{lím}\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\frac{1}{30}+\ldots\right]=1$$

expresión perfectamente correcta mientras se deja en esta forma pero si en vez escribimos:

$$\begin{array}{rcl}
\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\ldots\ldots & & 1\\
\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\ldots\ldots & & \frac{1}{2}\\
\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\ldots\ldots & = & \frac{1}{3}\\
\frac{1}{20}+\ldots\ldots & = & \frac{1}{4}\\
\hline
\end{array}$$

sacamos: $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\ldots\ldots \quad 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\ldots\ldots$ de donde eliminando también el otro extremo de las séries, sale el absurdo $0=1$.

Consecuencias

Debe en consecuencia dejarse siempre (aún cuando la serie fuera convergente) el último término cuyo límite es cero, pues la eliminación de este conduce necesariamente á paradojas. El falso principio que consiste en sentar $\frac{1}{x}=0$ para x infinito es llamado por Fleury *microbio*, expresión que emplearemos para simplificar el lenguaje.

El microbio

Veamos otras paradojas obtenidas por la introducción del *microbio*.

Cauchy al aplicar la série de Mac-Laurin á $e^{-\frac{1}{x}}$ saca: haciendo $x = 0$

$$e^{-\frac{1}{x}} = 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + \ldots\ldots.$$

y deduce así que:

$$e^{x} = e^{x} + e^{-\frac{1}{x}} = e^{x} + e^{-\frac{1}{x^2}}$$

estos absurdos proceden de haber escrito $\dfrac{1}{\frac{1}{e^{x}}} = 0$ resultante del *microbio* siendo así que lo único exacto es: lím. $e^{-\frac{1}{x}} = 0$, de manera que $e^{-\frac{1}{x}}$ es igual á cero más un resto cuya eliminación produce el absurdo anterior.

Límites de indeterminación y falsos límites

Si consideramos la expresión $y = \dfrac{1}{\frac{1}{e^{x}}}$ como ecuación de una curva, vemos que el eje $x = 0$ no la corta y por lo tanto no puede escribirse $\dfrac{1}{\frac{1}{e^{0}}} = 0$ sin destruir el vínculo que une x con y.

Fleury hace ver igualmente como la expresión $\frac{\infty}{\infty}$, $0 \times \infty$, $\infty - \infty$, 1^{∞}, ∞^{0} que figuran como símbolos de indeterminación debido á que se deducen $\frac{0}{0}$ escrito, mediante el *microbio*, en las formas $\dfrac{\frac{1}{0} = \infty}{\frac{1}{0} = \infty}$, $0 \times \frac{1}{0}$, $\frac{1}{0} - \frac{1}{0}$, etc. no tienen tal carácter pues si escribimos, por ej. $\dfrac{4x^2 + 6x + 7}{3x^2 + 8}$ el límite de esta expresión es $\frac{4}{3}$ sin indeterminación alguna lo mismo que se la escribimos bajo la forma $\dfrac{1}{3x^2 + 8}$ $(4x^2 + 6x + 7)$. Igualmente el límite de la expresión $\left(1 + \frac{1}{m}\right)^{m}$ es e sin indeterminación: lo mismo si ponemos

$\sqrt[3]{x^3 + 2^2 + c} - \sqrt[3]{x^3 + 3x^2 + d}$ su límite es $\frac{2}{3} - 1 = -\frac{1}{3}$ $\left(\text{escribiendo} \left(x + \frac{2}{3}\right)\sqrt[3]{\left(1 + c - 4x - \frac{8}{27}\right)\frac{1}{x + \frac{2}{3}}} - (x + 1)\sqrt[3]{1 + \frac{d - 3x - 1}{x + 1}}\right)$ sin ninguna duda, igualmente en $(1 + m)^m$ su límite es e. Es incorrecta pues, según esto, la extensión que Cauchy hizo de la regla formulada por el marqués de l'Hospital para buscar la primordial de una expresión $\frac{f(x)}{f_1(x)}$ que toma para cierto valor n de x al forma $\frac{0}{0}$; esta regla consiste en poner $\frac{f(n)}{f_1(n)} = \frac{f'(n)}{f_1'(n)}$ Cauchy escribía, aplicando siempre el falso principio llamado *microbio:* $\frac{\frac{1}{f_1(n)}}{\frac{1}{f(n)}}$, y deducía que cuando una función toma la forma $\frac{\infty}{\infty}$, puede también establecerse que $\frac{f(n)}{f_1(n)} = \frac{f'n}{f_1'(n)}$ siendo ahora $f(n)$ y $f_1(n)$ igual al infinito. Aplicando á la expresión $\frac{e^x}{x}$ se tiene para $x = \infty$, $\frac{e^x}{x} = \frac{e^x}{1}$ $\therefore e^x(x - 1) = 0 \therefore \infty . \infty = 0$.

Inversión del orden de los términos de una serie

Para terminar este punto de las paradojas, réstanos indicar que donde se producen notables, es en las series indefinidas cuando se les suprime un extremo y se introduce la noción del infinito. Sea por ejemplo.

$$u = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} \ldots$$
$$\frac{1}{1} - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8}$$

Facilmente se deduce que $u = 2v$, sin embargo no existe ningún término de u que no este v cuando el otro extremo de la serie ha desaparecido. Así que el infinito conduce á estos absurdos:

$$u = 2v \qquad u = \qquad 1 = 2 \text{ (1)}$$

(1) En las series llamadas absolutamente convergentes, la suma no depende del orden de colocación de sus términos, pero en las otras sí.

Igualmente si tenemos

$$A = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$$

$$B = \frac{2}{2} + \frac{2}{4} + \frac{2}{3} + \frac{2}{8} + \dots\dots$$

$$C = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8}$$

$$\therefore A = B = 2C, \quad B - C = C$$

$$\text{Pero } A - C = \frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7}$$

$$B - C = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{8}$$

$$\therefore A - B = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8}$$

y como $A = B$ se tiene $0 = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8}$, absurdo patente.

Consideremos ahora la serie natural de los números enteros 1. 2. 3. 4. 5...... Los cuadrados perfectos 1. 4. 9. 16. 25...... que encierra aquella serie están en minoría; así de 1 á 10 hay tres (1. 4. 9) de 10 á 100 siete (16. 25. 36. 49. 64. 81. 100), etc.

Si pues esta serie se considera prolongada hasta el infinito, los cuadrados figurarán en minoría, sin embargo debiendo figurar en ella todos los números, caeremos en una flagrante contradicción (argumento de Pillet sacada de Galileo). Creemos haber dicho bastante sobre el tema y terminaremos mencionando la serie $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 \dots$ que gracias al infinito tiene: según Euler el valor $\frac{1}{2}$; $\frac{n}{m}$ según otros $\left(\text{pues de } \frac{1 - x^n}{1 - x^m} = 1 - x^n + x^m - x^{n+m} + x^{2m} \dots \text{ haciendo } x = 1 \text{ se deduce } \frac{n}{m} = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots\right)$ Para Pringsheim se tiene $\frac{1}{1 + x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 \therefore \frac{1}{2} = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots\dots$ y también igual 0. Serie de Euler

Todos estos pintorescos resultados se deben al *microbio*. (Véase C. Borel. Leçons sur les series divergentes, París 1901.

CAPÍTULO CUARTO

La experiencia en las ciencias exactas

Las ciencias exactas

Sabido es que la ciencia de un objeto es el conjunto de leyes, ó de relaciones necesarias, derivadas de la naturaleza de aquel. Para que la ciencia de un objeto sea *exacta* se requiere que la naturaleza de dicho objeto sea completamente determinada para nosotros, de manera que, ó pueda reducirse aquella por medio de una definición á otras ciencias análogas existentes ó bien fundarse en un conjunto de hechos ó de propiedades que bastan para determinar el objeto motivo de la ciencia así como todas sus leyes y que constituyen los elementos primos de ella.

Ahora bien, no todos los fenómenos y manifestaciones por medio de los cuales los objetos á nuestro alcance se presentan á nosotros, son susceptibles de una determinación exacta; algunos escapan á nuestro control haciendo imposible comprobar su identidad cuando se producen en las mismas condiciones; otros en cambio, pueden ser determinados con toda exactitud, así como todas sus transformaciones, de manera á hacernos factible la optención de las leyes que los rigen. Estos últimos son, en consecuencia, los únicos que pueden dar lugar á una ciencia exacta. En cuanto á aquellos, solo pueden motivar una ciencia de esa clase cuando, mediante una aproximación más ó menos grande, se encuentra otro objeto ideal que sustituya al real y cuyas leyes impliquen manifestaciones muy parecidas á las verdaderas. Se deduce de todo esto que en una ciencia exacta existen dos elementos bien caracterizados: 1.° los datos experimentales y 2.°, la lógica pura que los combina, compara, establece su concordancia ó contradicción

Los dos elementos constitutivos de las ciencias exactas y los reduce al mínimum necesario distinguiendo los que son realmente primos é irreductibles de los derivados.

Si estas bases ó datos fundamentales de la ciencia exacta (llamados también hipótesis de ella) satisfacen á la condición de no ser contradictorios entre sí, la ciencia en cuestión es, bajo el punto de vista lógico, perfectamente cierta aún cuando no corresponda á experiencia alguna.

Ahora bien, los hechos y fenómenos reales se manifiestan á nosotros de infinidad de maneras; no es siempre fácil apreciarlos, y aún en los que más se prestan al control, este es necesariamente deficiente, dados los elementos de que disponemos para efectuarlo; así que la ciencia basada en ellos se resiente de alguna diferencia con lo real y solo debe aceptarse cuando aparezcan muy aproximados los resultados obtenidos á los verdaderos; si la diferencia fuera muy considerable, forzoso sería cambiar las hipótesis fundamentales hechas.

Las matemáticas

La parte puramente lógica de las ciencias exactas, independiente de la experiencia y rigorosa dentro de las hipótesis fundamentales hechas, cuando estas no son contradictorias entre sí ni den orígen á contradicciones al combinarse por medio de la lógica pura, es lo que se llama las *matemáticas*. De esto resulta que las matemáticas, como serie de deducciones y de procedimientos lógicos particulares, pueden bastarse con hipótesis agenas á toda experiencia con la única obligación de satisfacer estas á las condiciones anteriormente indicadas. Es justamente lo que sucede con las Geometrías no euclideas, á diferencia de las basadas en el célebre postulado el cual afirma un hecho experimental. Pero veamos lo que sucedería si basándonos en lo anteriormente dicho, se desechara toda experiencia en las matemáticas.

Importancia de la experiencia en las matemáticas

Las combinaciones de hipótesis fundamentales, así como la distinta naturaleza de estas, forman una serie indefinida. Se impone pues elegir entre ellas las que sean dignas de llamar nuestra atención; la fantasía tomada como única guía nos conduciría por sendas completamente estériles. Además, por variada que sea la imaginación, la realidad es aún más variada y los caminos abiertos por ella son incomparablemente más fecundos. La Naturaleza nos indica cuales, entre todas las hipótesis arbitrarias, deben preferirse por sernos provechosas y de utilidad algo más que platónica.

El análisis y el mundo externo

Ahora bien, la ciencia no se ha desarrollado de primer golpe en la forma tal cual se presenta ante nosotros; tomemos por ejemplo el Análisis: lo encontraremos actualmente perfectamente dogmatizado, ordenado, disimuladas todas las tentativas y tanteos verificados en su lento desarrollo, y aparentemente eliminados todos los datos experimentales; pero, estos existen virtualmente, y á la menor aplicación de aquel á un problema de física quedará inmediatamente revelado su orígen experimental. El mundo exterior le ha suministrado la noción de continuidad, con la cual ha abierto perspectivas sin límites á sus esfuerzos. La Teoría general de las funciones tiene sus límites de partida en la resolucion de problemas de física. La serie de Fourier, las funciones de Lamé, la teoría de las ecuaciones con derivadas parciales de segundo orden, etc., han sido imaginadas en vista de la resolución de problemas experimentales. La misma experiencia no solamente provoca y propone los problemas al análisis, sino que aún ayuda á encontrar los medios de resolverlos, hace preveer las soluciones y sugerir los raciocinios. Facilita las semejanzas y la interpretación de los resultados, haciendo ver analogías donde estas ni se sospechan.

La experiencia en la aritmética, geometría, y análisis

La Geometría saca de la experiencia la noción de extensión, de punto, de línea recta con todas sus propiedades intuitivas; la noción de ángulo, de ángulo recto, de circunferencia, de longitud de esta, son igualmente sugeridas por el mundo externo. Cada vez que una de estas nociones es motivada por la experiencia, las matemáticas se apoderan de ella, se la asimilan, disimulan su orígen creando una ciencia particular de ella ó haciéndola entrar en otras anteriores prévia creación de un ser ideal nuevo que reemplaza al real. Tal ha sucedido en geometría con la circunferencia del círculo, con el desarrollo de esta, reemplazando las figuras reales por otras creadas *ex-profeso* partiendo de nociones distintas, como ser de los polígonos, disimulando así habilmente su orígen experimental. Lo mismo sucede en arítmética con los números fraccionarios que, sugeridos practicamente por la división de la unidad de medida, se definen luego como el cociente de dos cantidades. Igualmente, en el análisis, segun vimos, ordinariamente las cuestiones sencillas sobre cantidades reales sugirieron operaciones que luego la inducción ha ensanchado hasta constituir métodos reputados rigurosos antes de que existiera una verdadera demostración de ellos, la intuición ha jugado un papel predominante antes de llegar al rigorismo matemático que ha definitivamente escondido el orígen experimental, haciéndonos aparecer actualmente el análisis completamente formado con sus métodos sorprendentes y usando en partes símbolos puramente literales. Lo aprendemos y empleamos sin conocer su orígen primordial que no es otra sino la experiencia. Un ejemplo patente lo tenemos en la introducción del concepto de límite matemático con todos sus agregados: incomensurables series y productos infinitos, diferenciales, etc. El hecho experimental originario que es la noción de continuidad y transformación de las cantidades concretas en el pasage contínuo de un estado á otro, sugirió una serie de estudios que remataron finalmente á los métodos de Newton y de Leibnitz. Antes de llegar á las admirables y tranquilas exposiciones que encontramos en los tratados modernos, donde todos los tanteos y vacilaciones desaparecen en el hábil encadenamiento de los capítulos, han sido necesarios esfuerzos colosales que realizaran esta armonía combinando todos los estudios y problemas cuyo planteo ó sugerimiento tenían su fuente inmediata en el mundo externo. Como se deduce del estudio hecho en esta tésis, el concepto de límite matemático no tiene su carácter de evidencia sino debido á la experiencia, pues todas las demostraciones de la existencia de ese límite no son rigorosas y escapan fatalmente á nuestros esfuerzos así como todo lo que toca la esencia absoluta de las cosas.

Ejemplo: el concepto de límite matemático

La afirmación de la existencia del límite matemático juega en el análisis el mismo papel que en geometría el postulado de Euclides; ambos solo afirman un hecho experimental; pero es fácil disimularlo en el análisis: basta conformarse con transformar á este en un puro formulismo *definiendo un símbolo*, llamado límite de una serie de va-

El simbolismo

lores, y *conviniendo* cuando dos de estos símbolos serán iguales, cuando será mayor uno que otro, etc., tal cual lo hicimos ver (pág. 54). De esta manera el principio de límite con toda su metafísica habrá desaparecido en las matemáticas, como proposición á demostrar, y juntamente con él todo dato experimental á excepción del de número entero.

El orígen experimental de las ciencias exactas revelada en la aplicación de estas así como en las definiciones

Ahora bien, todo este hábil encadenamiento que nos presentan las matemáticas actuales, eliminando su orígen experimental recobrará su faz positiva denunciando á este último, en cuanto queramos hacer la menor aplicación de sus resultados á los problemas de la vida real.

Las definiciones, que juegan un rol tan importante en las matemáticas sirviendo de base cada una de ellas á un capítulo especial ó á un nuevo desarrollo proporcionándoles un alimento al parecer inagotable, esas definiciones decimos, pierden, en cuanto se apliquen los resultados obtenidos partiendo de ellas á un ojeto real, su carácter á primera vista antojadizo [1] quedando inmediatamente revelado su orígen experimental, el cual solo ha podido disimularse gracias á un postulado sobreentendido al enunciar la definición y que consiste en afirmar tacitamente la correspondencia de ella y por ende de sus consecuencias con los objetos reales motivo de estudios.

Las definiciones aparentemente desligadas de toda experiencia no lo son en realidad

Así, nos veremos obligados á confesar que la longitud de una circunferencia de círculo definida como *límite* de los perímetros inscriptos ó circunscriptos á esta, equivale en realidad á la longitud buscada del contorno de la rueda que tenemos á nuestro estudio; que las cantidades fraccionarias definidas como el cociente indicado de dos cantidades enteras indican en realidad partes de la unidad de medida; que el símbolo empleado y designado con el nombre de límite de una serie de valores, corresponde efectivamente á algo real.

En resúmen, la experiencia ha sugerido y dado los elementos primos de las definiciones matemáticas; al prin-

---

(1) Este carácter al parecer arbitrario de las definiciones matemáticas se nota particularmente en el análisis, donde gracias á los trabajos de Lagrange, Cauchy, Abel, Gauss, etc., es posible según vimos, llegar á las nociones más elevadas sin hacer intervenir otro dato experimental distinto del número entero.

cipio la intuición jugó un papel importante haciendo aceptar como exactas muchas cosas falsas; poco á poco el papel de la intuición fué perdiendo de importancia dejando su lugar al de la lógica pura; las varias nociones fundamentales primitivamente consideradas como: elementos primos intuitivos é irreductibles tales como: número entero, fraccionario, cantidades contínuas etc., han ido perdiendo poco á poco ese carácter quedando todas ellas derivadas del número entero; pero á medida que esto se verificaba las matemáticas perdían á su vez en realismo lo que ganaban en rigor.

Rol de la experiencia en las ciencias exactas

La mezcla de elementos experimentales y *á priori* cuyo conjunto sin ligazón constituía la primitiva ciencia, caracterizada por el rol importante que la intuición desempeñaba en sus verdades, han quedado unicamente reducidos á los *á-priori*; pero, para que las matemáticas fundadas exclusivamente en estas últimas y en las que una propiedad es elegida *ad-libitum* y tomada como definición para deducir de ella todas las demás, puedan aplicarse á la realidad y no ser puramente platónicas, es necesario que las definiciones dadas correspondan tacitamente á algo real; de lo contrario se caería en una esterilidad desconsoladora. Tal es el rol que juega la experiencia en las ciencias exactas.

Razon de la tendencia de las matemáticas en eliminar todo dato experimental

Ahora bien cabe preguntar: ¿Qué motivo tienen las matemáticas para tender constantemente á eliminar de ellas todo dato experimental tomando así un carácter caprichoso y de simple juego espiritual? Milhaud nos lo dice claramente en los siguientes términos: «Esta tendencia se » basa en una fundamental necesidad filosófica. Los elementos de nuestro conocimiento, sean de orígen racional ó experimental, se combinan en nuestro espíritu de tal » manera que el grado y la naturaleza de la certeza que » encierran en sí, es difícil de precisar. Ahora bien, la re- » construcción lógica de los hechos experimentales tiene » por resultado separar netamente, por una parte lo que » presenta en ellos el carácter de certeza, sino absoluta, por lo menos la mayor que nos es dado poseer, y por » otra parte lo que no es sino una verdad de inducción. » En otras palabras, tiene por efecto crear una matemática ideal extendiéndose por encima de toda experiencia; es la que conocen especialmente los matemáticos. Detrás de sus andamiages lógicos están en realidad al abrigo de toda objección y es con razón que la evidencia de sus conclusiones es tomado como el tipo más perfecto que se ofrece á nosotros. Stuart Mill pretende que la certeza de las verdades matemáticas es inductiva. Esta tésis no afecta sino las verdades matemáticas *objetivadas* por así decirlo, enunciada con motivo de seres concretos que sugiere la experiencia. Nos parece entonces perfectamente justa, por cuanto equivale á denunciar el eterno postulado que se esconde detrás de toda creación del geómetra ó analista para reaparecer en el momento de la aplicación. Pero no afecta las verdades lógicas de esta matemática ideal que acabamos de definir. Esta, es cierto, parece estar afectada aun con los datos iniciales y fijándose bien se vé que nada afirma sobre estos, limitándose á buscar cuales son las consecuencias deducidas de la aceptación de las hipótesis hechas. En fin, la confección de esta matemática formal nos dá indicaciones preciosas sobre las cosas mismas y nos enseña cual es el mínimum de propiedades que basta suponer en esas cosas para justificar la aplicación de verdades lógicas. Todas las propiedades geométricas del círculo por ejemplo, se extenderán á las ruedas y otros redondeles concretos, si existen, cuyos puntos estén á igual distancia de un centro. El análisis superior se aplicará á las cantidades en las que existan estados correspondientes á todos los símbolos que ha creado, etc.

La matemática ideal

« Y así se aprende á conocer el mínimum de propiedades características mediante las cuales un hecho concreto puede entrar en el engranage de las deducciones de las matemáticas puras.

« He ahí de donde saca su razón de ser. Pero, cualquiera que sea el interés que presentan, creemos haber suficientemente mostrado que por su esencia puramente formal no podría dar la solución de ningún problema concreto. Por eso es que los tratados de matemáticas, por rigurosos que sean y precisamente en razón de su extremo rigor, no podrán jamás hacer supérfluo el es-

» tudio de los problemas del conocimiento y de la meta-
» física de los conceptos fundamentales.» [1]

Las matemáticas puras y las aplicadas

Para terminar observaremos que generalmente se dividen las matemáticas en puras y aplicadas, entendiéndose por puras el análisis y la geometría y por aplicadas las demás; pero esta división no es fundamental. Consideremos por ejemplo la física matemática y el análisis infinitesimal. Aquella puede considerarse como una aplicación de esta, pero la esencia de las dos es la misma en cuanto una y otra parten de hipótesis deducidas ó no de la experiencia y se desarrollan basándose en ellas. La única observación que puede hacerse es que, en este caso por ejemplo, la física matemática tal cual existe, parte de ciertas hipótesis sobre la constitución de los cuerpos reales y sobre agentes ó fuerzas que actuan sobre aquellos llegando así á expresiones, fórmulas y ecuaciones de cuya resolución depende el resultado buscado, pero esta resolución misma es tema de otra matemática especial por cuanto, ecuaciones análogas aparecen también en otras de las matemáticas llamadas aplicadas: la mecánica racional la mecánica celeste, etc., por ejemplo, de manera que hay material bastante para la existencia de esa matemática especial la cual á su vez tomada en si misma, dentro de las hipótesis particulares en que se base (vimos que en definitivo la única experimental era la noción de número entero), puede tener campo libre para que la fantasía la lleve á resolver ecuaciones las más antojadizas y estériles; precisamente las matemáticas en cuestión llamadas aplicadas y en particular las más arriba indicadas, evitan este extravio indicándole cuales son las que debe dar preferencia profundizar, y estudiar, suministrándole además variedad de cuestiones mayores aún y más interesante que las que la fantasía le proporcionaria. En ese sentido las matemáticas aplicadas vienen á prestar á las matemáticas puras la misma utilidad que la prestada á ellas mismas por la experiencia.

Utilidad de las matemáticas aplicadas para las puras

Ahora cabe preguntar ¿como el análisis infinitesimal, que viene en resúmen á servir así para estudiar á los

---

(1) *G. Milhaud.* Introducción de la obra de Paul du Bois Raymond: Theorie generale des fonctions.

El análisis infinitesimal y la materia

cuerpos, puede aplicarse á ellos estando basada en las nociones de continuidad y de divisibilidad al infinito siendo así que la materia es discontínua? Es consecuencia de las hipótesis fundamentales de la física matemática. Ya dijimos anteriormente que muchas veces para hacer que la ciencia de un objeto sea exacta, se reemplaza dicho objeto real por otro ideal susceptible de prestarse á una determinación exacta y tal que los resultados con él obtenidos no difieran sensiblemente de los reales, por eso si bien el volúmen de un cuerpo no es el aparente, si bien su composición no es contínua sino formada por un conjunto de partículas separadas unas de otras etc., en la práctica estos cuerpos se comportan para nosotros como si la materia que los componen fuera realmente contínua; por eso sustituimos el cuerpo real por el ideal que reuniera esta condición de continuidad. El volúmen que sacaremos para este cuerpo ideal, su superficie, su densidad, su capacidad calorífera, su conductibilidad etc., no corresponderán exactamente al real que sustituye, pero esta diferencia carece de inconvenientes prácticos y es legítima la sustitución por cuanto nos es imposible hacer de otra manera y sus resultados concuerdan y están en armonía con los correspondientes en la realidad.

El análisis infinitesimal en la mecánica

La aplicación del análisis infinitesimal á los fenómenos de la mecánica es aún mucho más justificada, por cuanto la trayectoria, la velocidad, aceleraciones de los movimientos se efectúa de una manera contínua toda vez que interesan á los conceptos de espacio y de tiempo símbolos típicos de la continuidad. Esto en cinemática. Igualmente en dinámica, las fuerzas naturales varian de una manera contínua así como sus acciones; algunas como la gravitación universal son funciones de la distancia, es decir, interesan también al concepto de espacio, otras como las fuerzas eléctricas, caloríficas, aparte de que tambien son funciones de la distancia, son proporcionales á masas que practicamente pueden también variar de una manera contínua. En resúmen, los fenómenos naturales, particularmente los que están intimamente ligados en su variación con el tiempo y el espacio, presentan un carácter de continuidad que si no es absoluta burla todos

La mecánica celeste

nuestros medios de control; por eso es que el método infinitesimal de Leibnitz tienen la calidad eminentemente importante de prestarse al estudio de la naturaleza con cuyos procederes guarda íntimo parecido. La escala de cantidades indefinidamente decrecientes de distinto orden está en armonía con los que encontramos en los fenómenos reales, por ejemplo: la fuerza de gravitación universal produce en los cuerpos aumentos de velocidad que son cantidades indefinidamente decrecientes de igual orden que el tiempo empleado para ese aumento; la variación de los aumentos de velocidad son en cambio cantidades indefinidamente decrecientes de segundo orden; y lo mismo con la mayoría de los demás fenómenos producidos por otras fuerzas. Esto explica también el fracaso del método de Lagrange queriendo suprimir las cantidades indefinidamente decrecientes en la consideración de velocidad, aceleración y otras; pues los artificios puestos en juego, aún por los más grandes genios no bastan para suplir el orden natural de las cosas. Poincaré en su memoria *Les Rapports de l'Analyse et de la Physique Mathematique* hace observar que si el análisis debe mucho á la experiencia por intermedio de la física matemática, en cambio esta, á su vez, recibe cuantiosos beneficios de aquella; entre otros señala los siguientes: el análisis no revela á la física ninguna verdad nueva pero le ayuda á presentirla; en primer lugar, para enunciar las leyes extraídas de la experiencia se necesita el lenguaje especial del análisis único capaz de expresar relaciones tan precisas y delicadas como lo requiere aquella enunciación, de manera que el perfeccionamiento de este lenguaje hecho por el análisis es aprovechado necesariamente por el físico; enseguida las leyes no salen inmediatamente de la experiencia pues esta es individual, aproximada, mientras que aquellas son generales y precisas, es necesario pues un trabajo especial para hallar las analogias profundas, fundamentales, no facilmente visibles; trabajo que solo realizará el analista por ser de esta especie la naturaleza de sus investigaciones. Cita el ejemplo de las leyes de Newton y Kepler que solo difieren por su forma de lenguaje; una simple diferenciación hace pasar de una á otra, pero el

La Naturaleza y el análisis infinitesimal

Servicios que el análisis presta á la física matemática lenguaje especial de la de Newton permite deducir por una generalización inmediata todos los efectos de las perturbaciones y toda la mecánica celeste, en tanto que con el de la de Kepler nada se habría adelantado en ese sentido.

Igualmente Maxwell aprovecha la teoría de las cantidades imaginarias para hacer simétricas las ecuaciones de la electro-dinámica llegando á resultados que se han adelantado veinte años á la experiencia. Finalmente el hecho de encontrarse la ecuación de Laplace tanto en la teoría de la atracción universal como en el movimiento de los líquidos, en el potencial eléctrico, en el magnetismo, en la propagación del calor etc., demuestra también analogías fisícas á primera vista no existentes. Tales son entre otras, las utilidades que el análisis presta á la Fisíca Matemática.

Bibliografía

Los temas tratados en la 2ª parte de esta tésis han sido desarrollados por

René Descartes—Geometría 1638.
Isaac Barrow—Lectiones opticae et geometricae; habitae et scholis (1674-1684).
Isaac Newton—Metodo of fluxions (1676-1687).
Bernard le Bovier de Fontenelle—Biografías, 1657-1757.
Guillaume François Antoine l'Hospital.—L'analyse des infinitaments petits (1696).
Godfred N. Leibnitz—Acta eruditorum (1684). Nova Methodus pro maximus et minimus itemque tangentebus et singulare pro illis calculi genus.
Bernard Nieuwentyt—Analysis infinitorum (1695). Considerationes secundae circa calculi differentialis principio (1696),
Lazare Nicolas Marguerite Carnot—Reflexions sur la metaphysique du calcul infinitesimal (1753-1823).
Louis Joseph Lagrange.—La Theorie des fontions analytiques (1997)—Leçons sur le calcul des fontions (1801).
Jean Baptiste Joseph Fourier—Theorie analytique de la chaleur y obras varias (1821-1831).
Augustin Luis Cauchy—Obras varias (1813-1857).
Jean Marie Constant Duhamel—Cours d'Analyse de l'Ecole Polytechnique 1840.—Obra citada (1866).
P. G. Lejeune Dirichlet—Obras varias.

Bernhard Riemann—Obras matemáticas (traducción Laugel 1898).
Antoine Auguste Cournot—Traité elementaire de la Theorie des Fonctions et du calcul infinitesimal (1841).
Jean L. Boucharlat—Elements de calcul differentiel et integral (1858).
Bordas Demoulin—Le Cartesianisme (1874).
Charles de Freycinet—L'Analyse infinitesimale (1881).
Jean Houel—Cours de Calcul Infinitesimal (1878)
Jean A. Serret—Cours de Calcul differentiel et Integral (1879).
Paul du Bois Raymond—Theorie Generale des Fonctions (1882).
Jules Tannery—Obra citada (1886).
K. Weirstrass—Obras varias.
Georges Lechalas—Etude sur l'espace et le temps (1896).
Henry Poincarré—La logique et l'intuition dans la science mathematique et dans l'ensignement.—Les Rapports de l'Analyse et de la Physique mathematique (1897).
G. Milhaud—Prefacio de la traducción de Du Bois Raymond (1887).
G. Cantor—Sobre los fundamentos de la Teoría de los conjuntos transfinitos (Halle 1897).
J. F. Bonnel—Obra citada (1899).
Henry Fleury—L'Analyse dite infinitesimale sans limites infiniments petits (1896).
Emile Borel—Leçons sur les series devergentes (1901).—etc., etc.

En la ciudad de Buenos Aires á veinte y cuatro de Octubre de mil novecientos uno, la Comisión examinadora respectiva procedió á examinar la tésis presentada por el ex-alumno Claro Cornelio Dassen para optar el título de Doctor en Ciencias Físico-Matemáticas y resolvió aceptarlo.

Firmado:

Luis Silveyra—E. Aguirre
M. B. Bahía—O. Krause
Ild. P. Ramos Mejia—C. M. Morales.

PROPOSICIONES ACCESORIAS

1) Determinar el número de cúbicas que pasan por ocho puntos dados y son tangentes á una recta dada trazada por uno de esos puntos.

2) Cual debe ser la naturaleza de la superficie de separación de dos medios desigualmente refringentes para que los rayos luminosos emanados de un punto del primer medio convergan en un punto del segundo medio.

3) La expresión: $5^{2n+2} - 24n - 25$ es siempre divisible por 576.

4) Superficie de revolución de área mínima entre dos círculos paralelos dados.