La cinemática en la geometría de dos dimensiones

Aztiria, Ignacio

1901

Tesis presentada para obtener el grado de Doctor en Ciencias Físico-Matemáticas de la Universidad de Buenos Aires

UNIVERSIDAD NACIONAL DE BUENOS AIRES

FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS FÍSICAS Y NATURALES

LA CINEMÁTICA

EN LA

GEOMETRÍA DE DOS DIMENSIONES

TESIS INAUGURAL

PARA

OPTAR AL GRADO DE DOCTOR EN CIENCIAS FÍSICO-MATEMÁTICAS

POR

IGNACIO AZTIRIA

BUENOS AIRES

Imprenta de M. Biedma é Hijo, Bolívar 535

1901

UNIVERSIDAD NACIONAL DE BUENOS AIRES

Rector:

Dr LEOPOLDO BASAVILBASO

Delegados al Consejo Superior Universitario.

Por la Facultad de Derecho y Ciencias Sociales:

Dr. MANUEL OBARRIO, Dr. ANTONIO BERMEJO
y Dr. DAVID TEZANOS PINTO

Por la Facultad de Ciencias Médicas:

Dr. JUAN R. FERNANDEZ, Dr. ELISEO CANTÓN
y Dr. ENRIQUE DEL ARCA

Por la Facultad de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales:

Ing. LUIS A. HUERGO, Ing. LUIS SILVEIRA
é Ing. OTTO CRAUSE

Por la Facultad de Filosofía y Letras:

Dr. MIGUEL CANÉ, Dr. MANUEL F. MANTILLA
y Dr. INDALECIO GÓMEZ

Secretario:

Dr. EDUARDO L. BIDAU

Pro Secretario:

Dr. RICARDO COLÓN

FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS FISICAS Y NATURALES

Decano:

Ingeniero LUIS A. HUERGO

Vice Decano:

Doctor MANUEL B. BAHIA

Academicos honorarios:

Ing. Emilio Rosetti
Doctor Carlos Berg
Ing. Francisco Lavalle
Ing. Jorge Coquet

Academicos titulares:

Ing. Luis A. Huergo
Ing. Guillermo White
Ing. Luis Silveyra
Ing. Santiago Brian
Dr. Rafael Ruiz de los Llanos
Dr. Juan J. Kyle
Dr. Eduardo Holmberg
Dr. Carlos M. Morales
Dr. Atanasio Quiroga
Dr. Ildefonso P. Ramos Mejia
Ing. Otto Krause
Ing. Juan Pirovano
Ing. Eduardo Aguirre
Ing. Juan F. Sarhy

Secretario:

ING. PEDRO J. CONI

PERSONAL DOCENTE

DOCTORADO EN CIENCIAS FÍSICO-MATEMÁTICAS

Asignaturas	*Catedráticos titulares*	*Catedráticos suplentes*
Complementos de Aritmética y Algebra.............	Dr. M. R. Candioti	Ing. J. de la C. Puig
Complemetos de Geometría y Trigonometría....	Ing. J. S. Sarhy	Ing. F. Alric
Complementos de Física y Manipulaciones.....	Dr. M. B. Bahía	Agr. C. Hicken
Complementos de Química.....	Dr. J. J. Kyle	Dr. F. P. Lavalle
Algebra Superior y Geometría Analítica.....................	Ing. C. D. Duncan	Ing. I. Aztiria
Geometría Proyectiva y Descriptiva	Ing. J. F. Sarhy	Ing. J. Rospide
Cálculo Infinitesimal 1° y 2° curso............................	Dr. I. P. Ramos Mejía	Ing. O. S. Pico
Dibujo de lavado de planos....	Ing. A. Romero	
Geometría Descriptiva Aplicada	Ing. L. Amespil	Ing. H. Pereyra
Estática Gráfica.................	Ing. E. Becher	Ing. C. Wauters
Topografía..........................	Ing. E. Palacio	Agr. C. Hicken
Manipulaciones de Física.......	Dr. M. B. Bahía	
Mecánica Racional..............	Dr. C. M. Morales	Ing. M. A. Vila
Física Teórica y Experimental 1° curso...........	Ing. E. Aguirre	
Análisis Superior...............	Dr. M. R. Candioti	Ing. C. C. Dassen
Geometría Superior...............		
Física Matemática..............		
Mecánica Celeste..............		
Historia de las Matemáticas....		
Física Teórica y Experimental 2° curso..............	Dr. M. B. Bahía	Ing. M. Durrieu
Geodesia.....		Ing. L. Dellepiane

Comisión examinadora de Matemáticas Superiores y de tésis del doctorado

Presidente:

Académico Ing. SANTIAGO BRIAN

Vocales:

Dr. MARCIAL R. CANDIOTI
Dr. CARLOS M. MORALES
Dr. ILDEFONSO P. RAMOS MEJIA
Dr. MANUEL B. BAHIA
Ing. EDUARDO AGUIRRE
Ing. JORGE DUCLOUT

Á MI PROFESOR DE MATEMÁTICAS SUPERIORES

DR. MARCIAL R. CANDIOTI

LA CINEMATICA

EN LA

GEOMETRIA DE DOS DIMENSIONES

I

HISTÓRICO—DEFINICIONES

1. La idea de la aplicación de la cinemática al estudio de las propiedades de las figuras, ha surgido probablemente del conocimiento de los métodos de generación de algunos lugares geométricos mediante el movimiento de ciertos elementos con sujeción á leyes determinadas.

2. Si bien es cierto que el empleo de la cinemática en las investigaciones puramente geométricas data de épocas no muy remotas, la generación de curvas por medio del movimiento era ya conocida por los fundadores de la Escuela de Alejandría. Arquimedes 250 años antes de Jesucristo expone el método seguido en el trazado de su espiral, consistente en la com-

binación de un movimiento rectilíneo con otro de rotación, y Pappus, en el siglo IV de la era cristiana siguiendo las huellas de Arquimedes describe la espiral esférica sirviéndose de una combinación semejante de movimientos. Estos geómetras, sin embargo, no logran generalizar el método ni procuran valerse de él para llegar al descubrimiento de algunas de las propiedades de las curvas descriptas.

3. Escasos son tambien los progresos alcanzados en ese sentido durante el largo espacio de tiempo que separa la famosa escuela de Alejandria del nuevo período que para la ciencia se abre al comienzo de los tiempos modernos. La razón humana, oprimida bajo el peso de la autoridad tradicional, vence al fin los obstáculos que interceptaban su camino, y la emancipación intelectual dá vigoroso impulso á las ciencias dilatando sus horizontes.

La geometría, siguiendo esa suerte, alcanza en el siglo XVII, que señala sus más sublimes y brillantes descubrimientos, un grado admirable de prosperidad: Descartes, Fermat y Roberval aparecen casi simultáneamente fijando nuevos rumbos á la ciencia de la extensión. Los tres participan de la gloria de haber resuelto, cada uno de diversa manera, un problema que ningún geómetra hasta entónces habia osado abordar en toda su generalidad: el problema de las tangentes á las curvas.

El método de Roberval, de una analogía notable

en su principio metafísico, con el método de las *fluxiones* de Newton, está basado en la teoría de los movimientos compuestos, descubierta é introducida en la mecánica por Galileo, pero jamás aplicada á la geometría.

Su principio crea un nuevo modo de considerar las magnitudes y de establecer sus relaciones.

Hasta entonces siempre se habían considerado como formadas ó con existencia real las magnitudes á comparar.

Roberval, remontando á la generación de la cantidad, introduce en la geometría las potencias que la engendran—el movimiento—y, de las relaciones entre dichas potencias deduce las que existen entre las cantidades.

4. La cicloide, cuya historia se halla íntimamente ligada á las más altas concepciones de los geómetras del siglo XVII, fué objeto de animados debates entre los matemáticos de la época, y punto de partida de nuevas aplicaciones de la cinemática al estudio de la geometría.

Descartes en su *Opúscula posthuma* describe el método por él creado para el trazado de normales y tangentes á la cicloide, problema en cuya solución se hallaban tambien vivamente empeñados sus contemporáneos Fermat, Roberval y Pascal.

El método del fundador de la geometría analítica, que hoy se ha generalizado aplicándose á toda curva susceptible de ser descrita por el movimiento de un punto ligado invariablemente á una línea que rueda sobre otra curva fija, adquirió gran celebridad desde aquella época y, reconocida su sencillez que lo hacía superior á los demás métodos conocidos, se trató de generalizarlo y aplicarlo á nuevas cuestiones.

5. Cupo á Cauchy (*) la gloria de establecer en 1827 la equivalencia entre un desplazamiento plano cualquiera y el rodamiento de una curva solidaria del sistema móvil sobre otra curva fija, lugar de de los centros instantáneos de rotación.

Esta importante propiedad que su autor no enunció explícitamente, la demuestra Chasles en su opúsculo presentado á la Societé Philomatique en 1829 con el título de *Memoire de Géometrie sur la construction des normales à plusieurs courbes mecaniques*. Este opúsculo es el primero de una série de trabajos de Chasles que giran alrededor del mismo asunto, y entre los cuales merecen particularmente ser citados los que se refieren á las propiedades relativas á los desplazamientos finitos y á los desplazamientos infinitamente pequeños.

La demostración de la propiedad fundamental relativa al desplazamiento plano, debida á Cauchy, y el método de los normales deducido por Chasles de esa propiedad, forman la introducción á los elemen-

(*) Œuvres complètes d'Agustin Cauchy.

tos de Geometría Cinemática del coronel Manheim, obra de reciente aparición, que reune en un voluminoso tomo los resultados de sus numerosas investigaciones sobre los desplazamientos bajo el punto de vista geométrico.

Terminaremos esta breve reseña histórica, haciéndo mención de la obra que con el título de *Geometría del movimiento* ha publicado el doctor Schoenflies, profesor de la Universidad de Cöttingue, en cuyo prefacio coloca á Chasles y á Manheim entre los fundadores de esa nueva é interesante rama de la geometría sintética.

6. Ciertas cuestiones de geometría cuya resolución se basa en la consideracion de movimientos tienen como punto de partida la noción de velocidad y de aceleración.

Rigurosamente, tal noción no debe ser mirada como fuente de resultados puramente geométricos.

La naturaleza y las propiedades de los figuras engendradas por movimientos, no dependen, en efecto, de la velocidad más ó ménos grande de que el sistema móvil se halla animado, ni de las variaciones que esa velocidad pueda sufrir en el curso de un mismo movimiento; dependen esclusivamente de la ley geométrica del movimiento, es decir, de la sucesión de las posiciones ocupadas por el sistema móvil.

De acuerdo con ese concepto prescindiremos en el curso de esta tésis de las velocidades inherentes á los movimientos que hemos de considerar y reservaremos con Ampère (*) la palabra *desplazamiento* para designar un movimiento en semejantes condiciones.

El lugar geométrico de las posiciones sucesivas de un punto en un desplazamiento cualquiera se denomina *trayectoria* de dicho punto.

Cuerda del punto móvil es la recta que une dos de sus posiciones. Si estas son infinitamente próximas la cuerda es la tangente á la trayectoria.

Radio normal es la perpendicular á la cuerda en su punto medio. Si las posiciones consideradas son infinitamente próximas, el radio normal es la normal á la trayectoria descripta.

(*) Ampère. Essai sur la philosophie des Sciences.

II

EL CENTRO DE ROTACIÓN

7. Designemos con σ_0 y σ_1 dos posiciones sucesivas y arbitrarias de un sistema plano invariable, y con

$$A_0,\ B_0$$
$$\text{y}\quad A_1,\ B_1$$

las correspondientes de los puntos A y B pertenecientes al mismo.

Desde luego, si C es otro punto del sistema considerado, sus posiciones estarán determinadas en cada instante por la condición

$$\text{triáng. } A_0\ B_0\ C_0 = \text{triáng. } A_1\ B_1\ C_1 = \ldots.$$

que es consecuencia directa de la invariabilidad del sistema. Y como C es un punto cualquiera de dicho sistema, la posición de éste se halla determinada; luego:

La posición de un sistema plano invariable que se desplaza en su plano, es completamente determinada cuando se conoce la posición de dos de sus puntos.

8. Tracemos los radios normales a y b de los puntos A y B y desde el punto O de intersección, proyectemos, A_0, B_0, A_1 y B_1 (fig. 1).

Resulta:

$$O A_0 = O A_1$$

$$O B_0 = O B_1$$

$$\text{triáng. } A_0 O B_0 = \text{triáng. } A_1 O B_1$$

$$\text{áng. } A_0 O B_0 = \text{áng. } A_1 O B_1$$

y sumando á los dos miembros de esta última, el ángulo $B_0 O A_1$, se obtiene:

$$\text{áng. } A_0 O A_1 = \text{áng. } B_0 O B_1$$

Se vé pues que, por medio de una simple rotación alrededor de O, A_0 coincidirá con A_1, al mismo tiempo que B_0 coincide con B_1, y, como la posición de σ se halla completamente determinada por la posición de esos dos puntos, podemos establecer que:

El desplazamiento de un sistema plano en su plano puede ser obtenido por una rotación del sistema alrededor de un punto fijo. Este punto, comun á las dos posiciones ó sistemas congruentes σ_0 y σ_1, se denomina *polo ó centro de rotación.*

Puesto que para pasar de la posición σ_0 á la posición σ_1, el sistema σ gira alrededor de O, cada uno de sus puntos describe un círculo cuyo centro es el punto O; luego, pues:

Los radios normales de todos los puntos del sistema pasan por el centro de rotación.

Si los radios normales a y b hubiesen resultado

paralelos, su punto de intersección, es decir, el polo de rotación estaría situado en el infinito. Las cuerdas $A_0 A_1$ y $B_0 B_1$ serían iguales y paralelas y, como consecuencia, la cuerda $C_0 C_1$ de otro punto C cualquiera sería igual y paralela á las anteriores. Bastaría entonces una simple translación, dada su magnitud y dirección por $A_0 A_1$ ó $B_0 B_1$ para pasar de la posición σ_0 á la σ_1.

9. Consideremos dos posiciones g_0 y g_1 de una recta g del sistema σ. La intersección $g_0 g_1$ es la posición de dos puntos distintos A y B de g según que dicho punto se considere como perteneciendo á una ú otra de las dos posiciones consideradas de g. Llamémosla B_0 en tanto que se le considere haciendo parte de g_0 y A_1 cuando se le tome como punto de la g_1. (fig. 2).

Llamaremos entonces A_0 la posición de A en g_0 y B_1 la de B en g_1.

Puesto que

$$A_0 B_0 = A_1 B_1,$$

los puntos medios de estos segmentos son las posiciones de un mismo punto de g que designaremos con G_0 y G_1; la recta g_m que los une forma evidentemente ángulos iguales con g_0 y g_1.

Otro punto C que dista de A, $n. \overline{A_0 B_0}$ en el sentido $A B$, ocupará en g_0 y en g_1 posiciones C_0 y C_1 que se obtendrán tomando la magnitud $n. \overline{A_0 B_0}$ sobre dichas rectas á partir de A_0 y A_1 en sentido $A_0 B_0$ y $A_1 B_1$ respectivamente.

En consecuencia, pues, las puntuales $A_0\, G_0\, C_0\, B_0 \ldots$ y $A_1\, G_1\, C_1\, B_1 \ldots$ son semejantes.

La cuerda $C_0 C_1$ de un punto C cualquiera de g, será entonces dividida en partes iguales por la g_m, ó, en otros términos el punto medio C_m de la cuerda $C_0 C_1$ está sobre la g_m. Pero la perpendicular á $C_0 C_1$ trazada desde el polo O de rotación pasa por C_m. Una cuerda cualquiera podrá, pues, ser considerada como uno de los lados de un ángulo recto cuyo 2° lado pasa por O, estando el vértice sobre la g_m.

De donde resulta el siguiente teorema:

Los puntos medios de las cuerdas de todos los puntos de una recta g, están sobre una recta g_m que hace ángulos iguales con g_0 y g_1. La envolvente de dichas cuerdas es una parábola que tiene por foco el centro de rotación y cuya tangente en el vértice es la g_m, posición media de g.

Los resultados precedentes son independientes de las posiciones respectivas de σ_0 y σ_1. Si esas posiciones son infinitamente próximas, las propiedades enunciadas dan origen á proposiciones aplicables en cada instante al movimiento continuo de un sistema plano en su plano. La cuerda $A_0 A_1$ se convierte en tangente á la trayectoría y el rádio normal a, en normal á la misma. Entonces:

Cuando un sistema plano se desplaza de un modo cualquiera en su plano, las normales á las trayectorias de todos los puntos pasan en cada instante por un mismo punto.

El sistema efectúa en cada instante una rotación infinitamente pequeña alrededor de ese punto, que se denomina *polo ó centro instantáneo de rotación.*

El último teorema demostrado para un desplazamiento cualquiera, nos permite sentar que:

Las tangentes á las trayectorias de todos los puntos de una recta g de σ envuelven en cada instante una parábola que tiene por foco el centro instantáneo de rotación y cuya tangente en el vértice es la misma recta g.

10. *Envolventes de rectas y curvas del sistema móvil* —Empezaremos por suponer dadas distintas posiciones $\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2 \ldots$ del sistema y consideraremos al mismo tiempo los sistemas semejantes σ_{0m}, σ_{1m}, definidos como lugar de los puntos medios de las cuerdas como $A_0 A_1$ y $A_1 A_2$ respectivamente.

Sean g_0, g_{0m} y g_1, las posiciones de una misma recta g en cada uno de los sistemas σ_0, σ_{0m} y σ_1. Sabemos que los puntos G_0 y G_1 en que la g_{0m} corta á las rectas g_0 y g_1 son puntos correspondientes de las puntuales semejantes g_0 y g_1 y que la perpendicular á g_{0m} dirigida desde el centro de rotación O_{01} pasa por el punto G_{0m}, medio de $G_0 G_1$.

En virtud de la semejanza de los sistemas σ_0, σ_{0m} y σ_1, las perpendiculares á g_0 y g_1 trazadas desde O_{01}, punto unido, contienen los puntos G_0 y G_1 y las tres perpendiculares son rectas homólogas. Si el desplazamiento es infinitamente pequeño, G_{om} se confunde con el punto de contacto instantáneo de g con su envolvente y la perpendicular á g_{om} trazada desde el polo de rotación es la normal á dicha envolvente. Luego, puesto que esa perpendicular pasa por G_{om}, podemos establecer que:

El punto en que una recta del sistema móvil toca á su envolvente, es el pié de la perpendicular dirigida á dicha recta desde el centro instantáneo de rotación.

Sea ahora (m) una curva del sistema móvil; (m_0) y (m_1) sus posiciones en σ_0 y σ_1, y (m_{om}) la correspondiente de σ_{om}. Tracemos una normal p_{om} á (m_{om}) desde el centro de rotación (fig. 3) y sea g_{om} la tangente á dicha curva en el punto G_{om} de intersección y construyamos los puntos y rectas homólogos de σ_0 y σ_1. Resultará, pues, g_0 tangente á (m_0) en G_0 y g_1 tangente á (m_1) en G_1.

Las rectas p_0 y p_1 serán las normales á (m_0) y (m_1) en los puntos de contacto y serán, de consiguiente, perpendiculares á g_0 y g_1.

Si el desplazamiento considerado es infinitamente pequeño, g_{om} es tangente á la envolvente de (m) en G_{om} y la normal p_{om} á dicha envolvente contiene el centro instantáneo. Luego:

Los puntos de contacto de una curva móvil con su envolvente son los de intersección de la misma con las normales trazadas desde el centro instantáneo de rotación.

Consideremos un haz de centro A, perteneciente á σ. Venimos de demostrar que el punto en que cada uno de los rayos que lo componen toca á su envolvente, es el punto de intersección con la perpendicular trazada al mismo desde el centro instantáneo de rotación O. El lugar geométrico de esos puntos de contacto es una circunferencia, pues resulta de las intersecciones de los pares de rayos correspondientes de dos haces de centro A y O que se cortan ortogonalmente. Por consiguiente:

Los puntos en que los rayos de un haz tocan á sus envolventes están en cada instante sobre una circunferencia que tiene por diámetro la recta que une el centro instantáneo con el centro del haz.

Si una línea es sujeta á pasar constantemente por un punto fijo P, el punto de la misma, que mediante una rotación infinitamente pequeña alrededor del centro instantáneo O, coincide con P, habrá descrito un elemento de la curva considerada; $P\,O$ será, pues, la normal en el punto P.

Entonces: *Si una curva del sistema móvil pasa constantemente por un punto fijo, la normal á la misma en dicho punto contiene el centro instantáneo de rotación.*

Aplicación de los resultados precedentes á la resolución de algunos problemas geométricos

11. Conocida la ley cinemática de la cual depende la generación de un determinado lugar geométrico, fácil será la determinación de los centros instantáneos, normales, tangentes y contactos de una curva móvil con su envolvente.

El problema será factible, siempre que para definir el desplazamiento sean dados:

a) las trayectorias de dos puntos.

b) la trayectoria de un punto y la envolvente de una línea.

c) las envolventes de dos líneas.

d) un punto por el cual deba constantemente pasar una curva, y la trayectoria de un punto.

e) un punto por el cual deba constantemente pasar una curva, y la envolvente de otra curva.

Ejemplo 1°: *Podar de una curva* (c) *con respecto á un punto* Q.

Siendo la podar el lugar geométrico de las piés de las perpendiculares trazadas á las tangentes de (c) desde el punto Q, una recta PQ del sistema móvil pasa constantemente por un punto fijo Q, mientras otra recta PC tiene por envolvente la curva dada (c).

El centro instantáneo (fig. 4) es la intersección O, de las perpendiculares OQ y OC á los lados del

ángulo recto móvil $\widehat{CPQ}$, cuyo vértice P engendra la podar de (c).

La normal á la podar en el punto P será la OP. Ahora bien, la figura $OQPC$ es un rectángulo que tiene por diagonales la normal á la podar y el radio vector correspondiente de la curva (c). Luego: *la normal á la podar de una curva, pasa por el punto medio del vector correspondiente de la misma curva.*

Ejemplo 2°: *Curva de Watt ó de larga inflexión.*

Hachette, en su *Histoire des Machines à vapeur*, ha aplicado por primera vez el método que nos ocupa á la curva de larga inflexión. Esta curva es la descrita por el vértice D (fig. 5) del mecanismo llamado paralelógramo articulado de Watt, destinado á la transformación del movimiento circular alternativo de la balanzadera OA en un movimiento sensiblemente rectilíneo.

O y Q son dos puntos fijos: el primero es la proyección del eje de rotación de la balanzadera solidaria del paralelógramo articulado en sus cuatro vértices; alrededor del segundo gira el vértice C ligado á Q por la brida QC.

Al girar la balanzadera, B y C se mueven sobre circunferencias de centro C y Q respectivamente.

La recta OD corta el lado BC en el punto D' cuya posición sobre el mismo lado no varía á causa de la constancia de las magnitudes OA, AD y OB y de la relación $\frac{AO}{AD} = \frac{BO}{OD'}$ constante cualquiera que sea posición y deformación del paralelógramo.

El lugar del punto D' tiene por normal la recta $D'K$ que liga á D' con el centro instantáneo K intersección de las normales OB y OG á los círculos descritos por dichos puntos.

En virtud de la semejanza de los triángulos OAD y OBD' y de la constancia de los lados OB y OA, la relación

$$OD' : OD \text{ es constante,}$$

luego las curvas (d') y (d) engendradas por D' y D son dos curvas homotéticas, siendo O su centro de hometecia.

Determinado un cierto número de puntos de la curva (d') podrán obtenerse los puntos homólogos de la (d) bien analítica bien proyectivamente. Las normales á esta última se obtendrán trazando paralelas á las normales de la primera en los puntos homólogos.

Ejemplo 3. *Concoide.* —Sea (m) una curva cualquiera y O un punto fijo, que tomaremos como polo. Tracemos el radio polar OM y tomemos sobre él á partir de M una magnitud constante MP (fig. 6).

El lugar geométrico del punto P es una concoide de la curva (m). La concoide puede ser engendrada, según resulta de la definición dada, por un punto P movil sobre una recta d pasando constantemente por un punto fijo O, en tanto que otro punto M, móvil

sobre la misma recta d, describe, permaneciendo á distancia invariable de P, una curva dada (m).

El centro instantaneo relativo á la posición indicada en la figura, es el punto I de intersección de las normales á (d) y á (m) en O y en M respectivamente.

Luego, pues, IP es la normal á la concoide en el punto P.

Ejemplo 4. Un ángulo constante se desplaza de manera que sus dos lados r y s permanecen tangentes á dos curvas dadas (r) y (s). Se pide la normal á la trayectoria del vértice V del ángulo móvil.

Siendo las curvas (r) y (s) las envolventes de los lados r y s del ángulo, el centro instantáneo será el punto C de intersección de las normales á (r) y á (s) en los puntos de contacto con los lados del ángulo.

La recta CV será evidentemente la normal en V á la trayectoria de este punto.

Si, como caso particular, una de las curvas, la (s), por ejemplo se reduce á un punto S, y suponemos además que el ángulo V es recto, su vértice describirá la curva que hemos definido como *podar* de la línea (r) con respecto al punto S.

Expresión de la variación de longitud de una recta móvil

12. Por ser de aplicación en la teoría del trazado de normales á ciertas curvas y particularmente á aquellas cuya ecuación es ordinariamente dada en coordenadas bipolares, vamos á hallar la expresión de la variación dl de longitud de un segmento l de recta móvil comprendido entre dos curvas dadas (m) y (m') (figura 7).

Sea O el punto de contacto de la recta móvil con su envolvente, M y M' los extremos del segmento l, y N y N' los puntos en que la perpendicular trazada por O á OM, corta á las normales en M y M' de las curvas dadas.

Llamando $d\theta$ al ángulo de contingencia de la envolvente de la recta considerada tendremos, considerando las curvas referidas al sistema polar que tiene por polo el punto O:

$$d\,OM = ON.d\theta$$
$$d\,OM' = ON'.d\theta$$

ó bien:

$$d(OM - OM') = (ON - ON')\,d\theta$$

es decir:

$$dl = NN'.d\theta,$$

expresión buscada.

III

LUGAR GEOMÉTRICO DE LAS INTERSECCIONES DE LAS NORMALES Á DOS CURVAS FIJAS

APLICACIÓN Á CURVAS REFERIDAS Á SISTEMAS COORDENADOS BIPOLARES

13. Sean (m) y (m_1) dos curvas fijas situadas en el mismo plano; MP y M_1P las normales á estas curvas en M y M_1 respectivamente, y P su punto de intersección.

Llamando ρ y ρ_1 á las distancias variables MP y M_1P el lugar geométrico del punto P será definido por una ecuación de la forma:

$$f(\rho\,\rho_1) = 0.$$

Nos proponemos trazar la normal al lugar (p) en el punto P.

Sean K y K_1 los puntos de intersección de la normal buscada con las normales correspondientes á las envolventes de las rectas MP y M_1P, es decir con las perpendiculares á MP y M_1P en E y E_1, centros de curvatura de (m) y (m_1) relativos á los puntos M y M_1 (fig. 8).

Para un desplazamiento infinitamente pequeño de P, se tiene según la fórmula establecida en el parágrafo 12 del capítulo precedente:

$$d\rho = \overline{EK}.d\theta, \quad d\rho_1 = E_1K_1.d\theta$$

siendo $d\theta$ y $d\theta_1$ los ángulos de contingencia de las evolutas (m) y (m_1).

De las relaciones anteriores sacamos:

$$\frac{d\rho}{d\rho_1} = \frac{EK.d\theta}{E_1K_1d\theta_1}. \tag{1}$$

Pero como el elemento $d(p)$ de trayectoria del punto P, correspondiente al desplazamiento considerado puede expresarse de las dos maneras siguientes:

$$d(p) = PK.d\theta$$
$$d(p) = PK_1.d\theta_1,$$

resulta:

$$\frac{d\theta}{d\theta_1} = \frac{PK_1}{PK}$$

y, por consiguiente:

$$\frac{d\rho}{d\rho_1} = \frac{EK.PK_1}{E_1K_1.PK} = \frac{EK:PK}{E_1K_1:PK_1}$$

ó bien:

$$\frac{d\rho}{d\rho_1} = \frac{\operatorname{sen}\omega}{\operatorname{sen}\omega_1},$$

llamando ω y ω_1 á los ángulos que la normal á (p) forma con las correspondientes normales á (m) y (m_1).

Diferenciemos la ecuación $f(\rho\rho_1) = 0$:

$$\frac{\partial f}{\partial \rho}d\rho + \frac{\partial f}{\partial \rho_1}d\rho_1 = 0$$

de donde:

$$\frac{d\rho}{d\rho_1} = -\frac{\dfrac{\partial f}{\partial \rho_1}}{\dfrac{\partial f}{\partial \rho}}$$

luego:

$$\frac{\dfrac{\partial f}{\partial \rho_1}}{\dfrac{\partial f}{\partial \rho}} = -\frac{\operatorname{sen}\omega}{\operatorname{sen}\omega_1},$$

relación que nos proporciona la siguiente regla:

Se llevan sobre PM y MP_1 longitudes proporcionales á $\frac{\partial f}{\partial \rho}$ y $\frac{\partial f}{\partial \rho_1}$ y con los segmentos así obtenidos se construye un paralelógramo. La diagonal de este paralelógramo que pasa por el vértice P es la normal en P á la curva (p).

Ejemplo 1. *Ovalo de Descartes* — Supongamos la curva (m) reducida á un punto M, y que (m_1) sea una circunsferencia.

Si las distancias ρ y ρ_1 conservan una relación constante $\frac{\rho}{\rho_1} = K$, la trayectoria del punto P es un ovalo de Descartes. Su ecuación es, pues:

$$f(\rho\rho_1) = \rho - K\rho_1 = 0$$

de donde:

$$\frac{\partial f}{\partial \rho} = 1 \qquad \frac{\partial f}{\partial \rho_1} = -K$$

Entonces:

$$\frac{\operatorname{sen}\omega}{\operatorname{sen}\omega_1} = -\frac{\dfrac{\partial f}{\partial \rho_1}}{\dfrac{\partial f}{\partial \rho}} = K$$

relación que permite hallar la normal por la regla dada del paralelógramo.

2. *Lemniscata*—Si (m) y (m_1) se reducen á puntos M y M_1; y P se desplaza de suerte que el producto de sus distancias ρ y ρ_1 á los dos puntos fijos M y M_1 es constante, su trayectoria es una lemniscata.

La ecuación en coordenadas bipolares de esta curva es pues:

$$f(\rho\,\rho_1) = \rho\,\rho_1 = K$$

$$\frac{\partial f}{\partial \rho} = \rho_1 ; \quad \frac{\partial f}{\partial \rho_1} = \rho$$

y, por tanto:

$$\frac{\operatorname{sen}\omega}{\operatorname{sen}\omega_1} = -\frac{\rho}{\rho_1},$$

Consideremos un cierto número de rectas pasando por un mismo punto P. Nos proponemos encontrar la normal á la trayectoria (p) de este punto siendo determinado el desplazamiento de las rectas consideradas por las relaciones entre los segmentos interceptados por dos curvas dadas (m) y (m') (fig. 9).

Sea PM una de esas rectas y (e) su envolvente.

Representemos con la letra ρ afectada de subindices las longitudes tales como MM'; y sea:

$$f(\rho_1\,\rho_2\,\rho_3 \ldots\ ) = 0$$

la relación dada que determina el desplazamiento.

Diferenciando la anterior ecuación se tiene:

$$\frac{\partial f}{\partial \rho_1} d\rho_1 + \frac{\partial f}{\partial \rho_2} d\rho_2 + \ldots . = 0$$

ó, abreviadamente:

$$\sum \frac{\partial f}{\partial \rho} d\rho = 0.$$

Las normales en M y M' á las curvas (m) y (m') cortan en N y N' á la normal en E á la envolvente de la recta PM, luego:

$$d\rho = NN'.d\theta$$

siendo $d\theta$ el ángulo de contingencia de (e); y, por consiguiente:

$$\sum \frac{\partial f}{\partial \rho} \cdot NN' d\theta = 0.$$

En vez del ángulo de contingencia $d\theta$, variable para cada una de las rectas, podemos comodamente introducir el elemento de dp de trayectoria del punto común P.

Tendremos, por ser O el centro instantaneo:

$$d(p) = OP.d\theta \text{ de donde } d\theta = \frac{d(p)}{OP}$$

luego:

$$\sum \frac{\partial f}{\partial \rho} \cdot \frac{NN'}{OP} d(p) = 0$$

ó bien:

$$\sum \frac{\partial f}{\partial \rho} \cdot \frac{N N'}{O P} = 0.$$

Sobre PM, tomemos una magnitud PF igual á $\frac{\partial f}{\partial \rho_1}$, por F tracemos una perpendicular á PM y proyectemos desde P los puntos N y N'.

Tendremos:

$$\frac{N N'}{O P} = \frac{H G}{M L}$$

y, de consiguiente:

$$\sum P F \frac{G H}{M L} = 0.$$

En el triángulo rectángulo FPL, tenemos:

$$P F = M L \cos F P L$$

ó bien designando con i el ángulo FPL:

$$\frac{P F}{M L} = \cos i$$

luego, entonces:

$$\sum G H \cos i = 0. \qquad (1)$$

Ahora bien, $GH \cos i$ es evidentemente la proyección de GH sobre la tangente en P á (p) y la suma $\sum GH \cos i$ es la proyección sobre la misma recta de la línea de cierre del polígono construido con todas las magnitudes como la GH. La ecuación (1) demuestra pues, que dicha línea de cierre es perpendicular á la tangente en el punto P, ó, en otros términos, coincide con la normal buscada.

Supongamos como caso particular que la curva (e) sea la evoluta de (m') y que todas las curvas como la (m) se confunden con la trayectoria de P.

La ecuación:

$$f(\rho_1 \rho_2 \rho_3 \ldots) = 0$$

expresa ahora una relación entre distancias de un punto de la curva (p) á las curvas dadas, distancias contadas sobre las normales á estas últimas.

La ecuación (1) obtenida al estudiar el caso general será (fig. 10):

$$\sum F L \cos i = 0$$

y como:

$$F L = P E \frac{\operatorname{sen} i}{\cos i}$$

ó

$$F L \cos i = P E \operatorname{sen} i,$$

será, finalmente:

$$\sum P F \operatorname{sen} i = 0$$

ecuación que proporciona la siguiente regla: *se toman sobre las normales* PM_1, $PM_2, \ldots$ *longitudes proporcionales á las derivadas* $\frac{\partial f}{\partial \rho_1}$, $\frac{\partial f}{\partial \rho_2} \ldots$ *y se halla la resultante de todas esas rectas.*

Supongamos, como ejemplo que las curvas (m') en número de dos, se han reducido á puntos F y F' y que la ecuación $f(\rho_1 \rho_2) = 0$, sea:

$$\rho_1 - \rho_2 - 2a = 0.$$

La curva es evidentemente una hipérbola cuyos focos son los puntos F y F' y cuyo eje transverso de longitud $2a$ es la recta que liga los polos.

Por ser $\frac{\partial f}{\partial \rho_1} = 1$ y $\frac{\partial f}{\partial \rho_2} = -1$, la normal será la bisectriz exterior del ángulo formado por los radios focales ρ_1 y ρ_2.

IV

DESPLAZAMIENTO CICLOIDAL

CURVAS POLARES

Supongamos que el sistema móvil σ efectua sucesivamente rotaciones ω_0, ω_1, ω_2 .. al rededor de puntos O', Q', R'....dados arbitrariamente en el plano fijo.

De la posición inicial σ_0, el sistema pasará á ocupar sucesivamente las posiciones σ_1, σ_2.... correspondientes.

Determinemos en la posición inicial σ_0 (fig. 11) el punto Q de manera que:

$$O'Q' = O'Q$$

$$\text{y áng. } Q'OQ = \omega_0.$$

Tracemos también la recta QM tal que:

$$\text{áng. } MQO' = \text{áng. } R'Q'O';$$

determinemos en la misma posición σ_0 del sistema el punto R de manera que:

$$Q'R' = QR$$

$$\text{y áng. } RQM = \omega_1 \text{ etc.}$$

Designemos todavia con O el punto O' en tanto que lo consideremos como punto del sistema móvil. Habremos construido así una línea poligonal $OQRS$ de σ cuyos lados son respectivamente iguales á los de $O'Q'R'S'$.

Si se hace ahora girar á σ del ángulo ω_0 alrededor de O', Q coincidirá con Q'; si enseguida gira del ángulo ω_1 alrededor de este último punto, R caerá sobre R' etc. Se vé, pues, que el movimiento es el mismo que resultaría de hacer rodar el polígono $OQRS$ sobre el $O'Q'R'S'$.

Ahora bien, la conclusión anterior es evidentemente independiente del número de sistemas $\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2 \ldots$ considerados y de sus posiciones relativas. Si éstas se aproximan indefinidamente, ó bien, si son las posiciones sucesivas del sistema en un desplazamiento continuo cualquiera, las poligonoles se habrán convertido en curvas: la $O'Q'R'S'$ será una curva (c') del plano fijo, cuyos puntos son en el curso del movimiento los centros instantáneos de rotación; la $OQRS$ será una curva (c), lugar de los puntos del sistema que durante el desplazamiento coincidirán sucesivamente con los centros instantáneos. El movimiento, en fin, se producirá de modo que la curva (c) rueda sobre la (c').

Debemos naturalmente excluir en esta cuestión, tratada bajo el punto de vista más general, el caso en que el movimiento sea una simple translación y

aquel en que consista en una rotación alrededor de un centro fijo.

Podemos, pues, establecer que:

Siempre que no se trate de una translación ó de una rotación, el desplazamiento de un sistema plano en su plano, puede obtenerse por el rodamiento de una curva del plano movil sobre una curva del plano fijo, es decir, por un desplazamiento cicloidal.

Por ser definida cada una de estas curvas, como lugar geométrico de los centros instantáneos de rotación, se las llama *curvas polares.*

El teorema de Cauchy, que acabamos de demostrar, permite concluir que la naturaleza del movimiento depende de la elección de las curvas polares. A menudo se designan con el nombre de *ruletas* las trayectorías de los distintos puntos del sistema en el desplazamiento cicloidal y se denomina *base* de la ruleta, la curva fija (c').

Relaciones métricas entre los diámetros conjugados de la elipse

TEOREMAS DE APOLONIO

15. Sean las rectas (a) y (b) (fig. 12) las trayectorías de dos puntos A y B del sistema σ. Las normales á dichas rectas en A y B, respectivamente, se cortan en el punto C, centro instantáneo de rotación. El círculo determinado por los puntos O, A y B contendrá evidentemente el punto C, que será extremo del diámetro pasando por O.

Entre las diagonales AB y OC del cuadrilátero inscriptible $OACB$, existe la relación conocida

$$\frac{AB}{OC} = \operatorname{sen} AOB, \text{ de donde } OC = \frac{AB}{\operatorname{sen} AOB}$$

que dá para OC un valor constante en todas las posiciones del sistema. De consiguiente, el lugar de los centros instantáneos, ó sea la *base de la ruleta* es la circunferencia de centro O y rádio $\frac{AB}{\operatorname{sen} AOB}$

Supongamos ahora á las rectas (a) y (b) pertene-

ciendo al sistema movil. A causa de la invariabilidad del ángulo de estas rectas, sus perpendiculares AC y BC formarán, durante el desplazamiento, también un ángulo constante; C estará, pues, sobre el segmento capaz del ángulo ACB ó, en otros términos, permanecerá durante el desplazamiento sobre la circunferencia circunscrita al triángulo AOB; luego la *curva polar movil (d) es la circunferencia de diámetro OC que rueda interiormente á la base (c).*

Al rodar (d) sobre (c), el punto A describe la recta (a); el punto B la recta (b); del mismo modo, entonces, un punto cualquiera H de (d) describe un diámetro (h) del círculo (c). P y Q son los extremos del diámetro de (d) que contiene el punto M. Al rodar la circunferencia (d), el punto P describe el diámetro OP y Q, el diámetro OQ de (c); luego la trayectoría de M es una elipse cuyos semi-ejes, iguales en magnitud á MP y MQ, tienen por direcciones respectivamente OP y OQ. La normal en M á la elipse (m) es la recta MC; corta á la circunferencia (d) en D, y como OD es perpendicular á CM, la tangente en M á la elipse es necesariamente paralela á OD; luego OD y OM son dos diámetros conjugados de (m).

Para obtener la longitud del diámetro conjugado del OM, cuya dirección, como acabamos de ver, es OD, consideremos al punto M de la elipse, como un punto invariable del segmento CD constante durante el desplazamiento. Al rodar la circunferencia (d) C describe el diámetro OC de (c) y D el diámetro OD. Cuando C llega á ocupar la posición O, M coincidirá con un punto N de OD determinado por la relación

$$ON = CM$$

Este punto N es la extremidad del diámetro de la elipse, conjugado del OM.

Dados dos semi-diámetros conjugados OM y ON de una elipse hallar los ejes.

De acuerdo con lo que precede, el problema se resuelve como á continuación se indica. Sobre la perpendicular á ON trazada desde el punto M se toma á partir de M una longitud $MC = ON$. Se une O con C y sobre la recta OC como diámetro se describe una circunferencia. Los extremos P y Q del diámetro de dicha circunferencia que pasa por M pertenecen respectivamente á los ejes OP y OQ de la elipse, cuyas magnitudes son los duplos de MP y MQ.

Pueden también deducirse de la misma figure 12 otras relaciones métricas. Damos á continuación aquellas que son expresadas por los clásicos teoremas de Apolonio.

Notemos al efecto que entre los segmentos que M determina sobre una cuerda cualquiera PQ que lo contiene, se verifica la relación

$$MP \times MQ = MD$$

y como

$$MD = OM \operatorname{sen} NOM$$

y á más

$$MC = ON \qquad (\alpha)$$

resulta:

$$MP \times MQ = ON \times OM \operatorname{sen} NOM$$

Luego: *el producto de dos semi-diámetros conjugados de una elipse por el seno del ángulo comprendido, es igual al producto de los semi-ejes.*

Por un teorema conocido, se tiene

$$\overline{MO}^2 + \overline{MC}^2 = \overline{MP}^2 + \overline{MQ}^2$$

ó bien, por la relación (α)

$$\overline{MO}^2 + \overline{NO}^2 = \overline{MP}^2 + \overline{MQ}^2$$

Luego: *la suma de los cuadrados de dos semi-diámetros conjugados de una elipse es igual á la suma de los cuadrados de los semi-ejes de la misma.*

Fórmulas relativas al desplazamiento cicloidal

16. Sea (c) la curva polar fija ó base de la ruleta y (b) la curva polar movil (fig. 13).

Sean C y B dos puntos de dichas curvas polares, orígenes á su vez de dos sistemas de coordenadas $x_1 C y_1$, $x'_1 B y'_1$ que tienen por eje de abcisas la tangente en C y en B respectivamente y por eje de ordenadas la normal en el mismo punto á las curvas (c) y (b).

Por la naturaleza del desplazamiento cicloidal, al coincidir B con C, también habràn coincidido los dos sistemas coordenados $x'_1 B y'_1$ y $x_1 C y_1$.

Para pasar del sistema $x O y$ al $x_1 C y_1$ sirven las fórmulas

$$x = a + x_1 \cos\varphi - y_1 \operatorname{sen}\varphi$$
$$y = b + x_1 \operatorname{sen}\varphi + y_1 \cos\varphi \qquad (1)$$

en las cuales a y b son las coordenadas del punto C y φ el ángulo de la tangente en dicho punto á (c) con el eje Ox, tangente cuya dirección está dada por:

$$\cos\varphi = \frac{da}{ds} \qquad \operatorname{sen}\varphi = \frac{db}{ds}.$$

Análogamente las fórmulas de pasaje del sistema $x' O y'$ al $x_1' B y_1'$ son:

$$x' = a' + x_1' \cos\varphi' - y_1' \operatorname{sen}\varphi'$$
$$y' = b' + x_1' \operatorname{sen}\varphi' + y_1' \cos\varphi' \qquad (2)$$

en que a', b' y φ' son respectivamente las coordenadas de B y el angulo de la tangente $B x_1'$ con el eje $O' x'$.

Los valores que fijan la dirección de esa tangente son:

$$\cos\varphi' = \frac{da'}{ds'} \qquad \operatorname{sen}\varphi' = \frac{db'}{ds'}.$$

La curva (b) tendrá un movimiento de rodar sobre la (c) si se verifica:

$$x_1 = x_1' \quad y_1 = y_1'. \qquad (3)$$

Por otra parte de las fórmulas (1) qne también podemos escribir como sigue:

$$x_1 \cos\varphi - y_1 \operatorname{sen}\varphi = x - a$$
$$x_1 \operatorname{sen}\varphi + y_1 \cos\varphi = y - b,$$

deducimos:

$$x_1 = \begin{vmatrix} x-a & -\operatorname{sen}\varphi \\ y-b & \cos\varphi \end{vmatrix} = (x-a)\cos\varphi + (y-b)\operatorname{sen}\varphi$$

$$y_1 = \begin{vmatrix} \cos\varphi & x-a \\ \operatorname{sen}\varphi & y-b \end{vmatrix} = (y-b)\cos\varphi - (x-a)\operatorname{sen}\varphi.$$

Análogamente deducimos de las fórmulas (2):

$$x_1' = \begin{vmatrix} x'-a' & -\operatorname{sen}\varphi' \\ y'-b' & \cos\varphi' \end{vmatrix} = (x'-a')\cos\varphi' + (y'-b')\operatorname{sen}\varphi'$$

$$y_1' = \begin{vmatrix} \cos\varphi' & x'-a' \\ \operatorname{sen}\varphi' & y'-b' \end{vmatrix} = (y'-b')\cos\varphi' - (x'-a')\operatorname{sen}\varphi'$$

Y, en virtud de las (3):

$$(x-a)\cos\varphi + (y-b)\operatorname{sen}\varphi = (x'-a')\cos\varphi' + (y'-b')\operatorname{sen}\varphi'$$
$$(x-a)\operatorname{sen}\varphi - (y-b)\cos\varphi = (x'-a')\operatorname{sen}\varphi' - (y'-b')\cos\varphi'$$

fórmulas de transformación que permiten pasar de los ejes fijos á los ejes solidarios de la figura móvil.

17. *Toda curva plana puede ser engendrada por medio de un desplazamiento cicloidal.*

Sea (m) la curva dada y (c) otra curva del mismo plano (fig. 14).

Si (m) fuera el lugar geométrico de un punto M de un sistema móvil y (c) la base de la ruleta ó sea el lugar de los centros instantaneos de rotación en el plano fijo, la recta MI que liga el punto M en una de sus posiciones con el punto de contacto I de

(c) con la polar (b) del sistema móvil, seria la normal en M á (m).

Esto supuesto, podemos considerar á (c) determinada por medio de la curva dada (m) y por las distancias $u = MI$.

En otros términos, si $y = f(x)$ es la ecuación de (m), la línea (c) podrá ser representada por una ecuación de la forma $u = \varphi(x)$. La curva polar (b), si existe, se determinará en coordenadas polares tomando como eje polar una recta arbitraria pasando por M, y como polo el mismo punto M.

La curva (b) estará determinada por la relación que para cada punto de (m) existe entre u y el ángulo polar ω.

Tracemos la normal $M'G$ á (m) en el punto M' infinitamente próximo al M y con centro en O, centro de curvatura de (m) relativo al punto M, describamos el arco IH.

Hagamos $\rho = OM$

$$u = MI$$

$$ds = \text{arco } MM'$$

$\varepsilon = M\widehat{O}M' =$ ángulo de contingencia de (m) en el punto M.

En el triángulo rectángulo IGH, tenemos:

$$IH = HG \operatorname{tg} IGH.$$

$$\operatorname{tg} IGH = \frac{(\rho + u)\varepsilon}{du} = \left(1 + \frac{u}{\rho}\right)\frac{ds}{du}.$$

Por otra parte

$$\operatorname{tg} IGH = u\frac{d\omega}{du}$$

luego:

$$d\omega = \left(\frac{1}{u} + \frac{1}{\rho}\right)ds. \qquad (1)$$

Si por medio de la ecuación $y = f(x)$ de (m) y de la ecuación $u = \varphi(x)$ de (c), expresamos ρ y ds en función de u y du y sustituimos en la (1), la ecuación obtenida es la de la curva (b). En el desplazamiento cicloidal que tiene por curvas polares (c) y (b) siendo (c) la base, el punto M engendra la curva dada (m).

Casos particulares: 1°. Supongamos $u = -\rho$.

La curva (c) es entonces el lugar de los centros de curvatura ó sea la evoluta de (m).

La fórmula (1) es, en este caso:

$$d\omega = \left(\frac{1}{u} - \frac{1}{u}\right)ds.$$

ó sea

$$d\omega = 0$$

de donde:

$$\omega = \text{constante}.$$

Por tanto, *una curva cualquiera puede ser descrita por un punto M de una recta que rueda sobre la evoluta de la misma curva.*

2°. Supongamos $u =$ constante.

Integremos la ecuación (1):

$$\omega = \frac{s}{u} + \int \frac{d\,s}{\rho}$$

Pero:

$$d\,s = d\,x\sqrt{1 + \left(\frac{d\,y}{d\,x}\right)^2}$$

y

$$\rho = \frac{\left[1 + \left(\frac{d\,y}{d\,x}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2\,y}{d\,x^2}}$$

$$\omega = \frac{s}{u} + \int \frac{\frac{d^2\,y}{d\,x^2}\sqrt{1 + \left(\frac{d\,y}{d\,x}\right)^2}}{\left[1 + \left(\frac{d\,y}{d\,x}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}\,d\,x =$$

$$= \frac{s}{u} + \int \frac{\frac{d^2\,y}{d\,x^2}}{1 + \left(\frac{d\,y}{d\,x}\right)^2}\,d\,x.$$

$$\omega = \frac{s}{u} + \text{arc. tg}\,\frac{d\,y}{d\,x} + C''.$$

3°. La base (c) es una línea recta.

Tomemos á esta recta como eje de abcisas.

Entonces:

$$u = y\sqrt{1 + \left(\frac{d\,y}{d\,x}\right)^2}.$$

De la ecuación (1) obtenemos:

$$\omega = \int \frac{d\,s}{u} + \int \frac{\frac{d^2\,y}{d\,x^2}\,d\,x}{1 + \left(\frac{d\,y}{d\,x}\right)^2}$$

$$\int \frac{d\,x\sqrt{1 + \left(\frac{d\,y}{d\,x}\right)^2}}{y\sqrt{1 + \left(\frac{d\,y}{d\,x}\right)^2}} + \int \frac{\frac{d^2\,y}{d\,x^2}\,d\,x}{1 + \left(\frac{d\,y}{d\,x}\right)^2}$$

ó bien:

$$\omega = \int \frac{d\,x}{y} + \text{arc. tg}\,\frac{d\,y}{d\,x} + C'',$$

ecuación que define la curva (b) tal que rodando sin resbalar sobre una recta dada (c), los puntos solidarios de ella tienen por trayectorias curvas dadas.

---

18. Puede también establecerse la ecuación de la polar incógnita (b) de la manera siguiente:

Sea P el punto de contacto de (b) y (c), que tomaremos como origen de un sistema de coordenadas polares.

La recta $P\,M$ que liga un punto M de (m) con el correspondiente centro instantáneo P, es normal á dicha curva en M; la longitud $P\,M = r$ varía con la posición del punto M, generador de (m).

Puesto que las líneas (c) y (m) son dadas, el ángulo de $r = P\,M$ con la base (c), ó bien su tangente trigonométrica, están determinados por la longitud r de normal considerada; de modo que llamando θ dicho ángulo, podemos poner:

$$\text{tg}\,\theta = f(r).$$

Pero como (b) y (c) son tangentes en el punto P el ángulo de r con la curva (b) es el mismo ángulo θ, cuya expresión será, por tal motivo:

$$\operatorname{tg}\theta = r\frac{d\theta}{dr}.$$

Entonces, pues:

$$r\frac{d\theta}{dr} = f(r).$$

$$d\theta = \frac{f(r)\,dr}{r}.$$

de donde $$\theta = \int \frac{f(r)\,dr}{r}.$$

Ilustremos esta teoría con un ejemplo sencillo.

Las curvas dadas (m) y (c) son rectas; se trata entonces de determinar una curva (b) tal, que rodando sobre la recta (c), uno de sus puntos M, describa la recta (m).

El ángulo θ de la normal á (m) con (c) es evidentemente constante; sea por ejemplo:

$$\operatorname{tg}\theta = f(r) = \frac{1}{m} = \text{constante}.$$

$$d\theta = \int \frac{dr}{mr} \qquad \theta = \frac{\log r - \log c}{m}.$$

$$m\theta = \log r - \log c \qquad \log\left(\frac{r}{c}\right) = m\theta.$$

$\therefore$ $r = c\,e^{m\theta}$, ecuación de una espiral logarítmica.

V

RECTIFICACIÓN DE CURVAS PLANAS

19. Supongamos el caso sencillo, susceptible de extensión, de ser la línea considerada, la engendrada por un punto M del círculo de centro C y rádio r rodando sobre otro círculo fijo de rádio R (fig. 15).

Llamemos:

α el ángulo de la recta CM con otra recta fija OX.

θ el ángulo MCO.

φ el ángulo COX.

A el punto de contacto de los dos círculos polares.

La longitud de la diferencial del arco de trayectoria del punto M es:

$$ds = AM.d\alpha.$$

Más como:

$$\alpha = \theta + \varphi,$$

$$d\alpha = d\theta + d\varphi$$

$$ds = AM(d\theta + d\varphi).$$

Por otra parte:

$$A\,M = 2\,r \operatorname{sen} \frac{\theta}{2}$$

y, en consecuencia:

$$d\,s = 2\,r \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} [d\,\theta + d\,\varphi].$$

Pero, por tratarse de un desplazamiento cicloidal:

$$r\,\theta = R\,\varphi$$

$$d\,\varphi = \frac{r}{R}\,d\,\theta$$

luego:

$$d\,s = 2\,r\left(1 + \frac{r}{R}\right) \operatorname{sen} \frac{\theta}{2}\,d\,\theta$$

$$s = \int 2\,r\left(1 + \frac{r}{R}\right) \operatorname{sen} \frac{\theta}{2}\,d\,\theta.$$

Para obtener la longitud del arco de epicicloide comprendido entre dos puntos consecutivos de retroceso, debemos tomar como límites del integral los valores $\theta = 0$, $\theta = 2\pi$.

Así, pues:

$$s = \int_0^{2\pi} 2\,r\left(1 + \frac{r}{R}\right) \operatorname{sen} \frac{\theta}{2}\,d\,\theta =$$

$$= \left[-4\,r\left(1 + \frac{r}{R}\right) \cos \frac{\theta}{2}\right]_0^{2\pi}$$

$$s = 4\,r\left(1 + \frac{r}{R}\right) + 4\,r\left(1 + \frac{r}{R}\right) = 8\,r\left(1 + \frac{r}{R}\right)$$

Casos particulares:

Cardioide—En esta curva $R = r$ y, por consiguiente:

$$s = 8\,r\,(1 + 1)$$

$$\therefore \qquad s = 16\,r.$$

Cicloide ordinaria—La circunferencia de centro O es una recta, es decir $R = \infty$.

Luego:

$$s = 8\,r.$$

VI

CENTROS DE CURVATURA

20. Puede resolverse cinemáticamente el problema de la determinación de los centros de curvatura, haciéndolo depender de la solución de la siguiente cuestión y de su recíproca.

La envolvente de una recta AB (figura 16) de longitud variable determinada por las lineas (a) y (b), es una curva (e). Sobre AB constrúyese un triángulo ABM semejante á un triángulo dado en todas las posiciones del sistema móvil. Se trata de determinar la normal á la trayectoria (m) del vértice M en este punto.

Desde luego, en todas las posiciones del sistema movil, cada uno de los ángulos MAB, MBA y AMB, permanece constante.

Para un desplazamiento infinitamente pequeño del ángulo A, el centro instantáneo de rotación es el punto α de intersección de las normales á (a) y á (e) en A y en E respectivamente.

Del mismo modo el punto β de concurso de la misma normal en E á (e) con la normal á (b) en el punto B, es el centro instantáneo relativo al desplazamiento del ángulo B.

Los piés R y S de las perpendiculares á AM y á BM desde α y β serán, en consecuencia los puntos de contacto de estas rectas con sus respectivas envolventes.

En cuanto al tercer ángulo M, su centro instantáneo es el punto μ de intersección de $R\alpha$ y $S\beta$, y, por consiguiente la recta $M\mu$ es la normal pedida.

Supongamos ahora, reemplazadas respectivamente,

(a) por el círculo ARE y

(b) por el círculo BSE.

La curva (m) (fig. 17) será el círculo $SR\mu M$ (*) que pasará evidentemente por el punto I de intersección de las dos primeras circunferencias.

Trazando las tangentes en A y en B respectivamente á las dos primeras, se habrá construido el triángulo ABT cuyos vértices estan sobre una circunferencia que también contiene el punto I.

Análogamente la tangente en M á la circunferencia MSR forma con las rectas AM y AT un triángulo y con las MB y BT otro, teniendo sus vértices sobre circunferencias que pasan por el punto I.

Hecha esta observación, que es la base en que

(*) Nouvelles Annales de Mathématiques, 1857.

reposa la construcción geométrica que emplearemos más adelante en la determinación de los centros de curvatura, pasemos á considerar el caso en que el punto M (fig. 18) está en M' sobre la recta $A\,B$.

De los triángulos semejantes $\alpha\beta\mu$ y $A\,B\,M$ deducimos (fig. 16)

$$\frac{\alpha\mu}{\beta\mu} = \frac{A\,M}{B\,M}$$

y por tanto tendremos en el caso particular á que nos referimos: (fig. 18), llamando μ' al punto análogo á μ.

$$\frac{\alpha\mu'}{\beta\mu'} = \frac{A\,M'}{B\,M'}.$$

Podemos en consecuencia, sentar la proposición que sigue:

Divídase una recta de longitud variable en dos segmentos $A\,M'$ y $M'B$ proporcionales á dos números dados.

Para obtener la normal á la trayectoria (m') del punto M', trácese en A la normal á la curva (a) descripta por este punto, la cual encontrará en un cierto punto α á la normal en E á la envolvente de la recta movil; la construcción análoga para el punto B origina el punto β. Tómese sobre el segmento $\alpha\beta$ un punto μ' que divida á $\alpha\beta$ en la relación $A\,M' : B\,M'$. La recta $M'\mu'$ es la normal buscada.

21. *Problema inverso.*—Sea $A\,B$ una recta que se desplaza de manera que tres curvas dadas (a), (m') y (b), la dividen en segmentos que guardan una relación constante.

De acuerdo con lo que acabamos de exponer, se obtendrá el punto E de contacto de la recta considerada con su envolvente (e) trazando una perpendicular á la $A\,B$ en posición tal, que las normales á (a), (m') y (b) respectivamente en (A), M' y B la corten en puntos α, μ' y β que satisfagan á la relación $\frac{\alpha\mu'}{\beta\mu'} = \frac{A\,M'}{B\,M'}$. La cuestión se reduce á la resolución de un problema de geometría elemental; puede también emplearse la siguiente regla, deducida de las consideraciones apuntadas al tratar el caso á que se refiere la fig. 17.

Trácense en A, M' y B las tangentes á las curvas (a), (m') y (b) y descríbanse las circunferencias circunscriptas á los cuatro triángulos que forman las tres tangentes trazadas y la recta $A\,B$, combinadas de las diversas maneras posibles; las circunferencias obtenidas pasan por un mismo punto. La circunferencia trazada por dicho punto tangencialmente á una de las tres curvas dadas, la (m') en el punto M' corta á la $A\,B$ en el punto E buscado.

22. *Conclusión importante.*—Si la recta móvil permaneciera durante el desplazamiento normal á una de las curvas dadas, la (a), por ejemplo, el punto E así obtenido sería el punto de contacto de la recta con la evoluta de (a), es decir, el *centro de curvatura* de la línea (a).

La construcción que precede, deducida de propiedades cinemáticas permite, pues, la determinación de los centros de curvatura de líneas cuyas propiedades particulares pueden traducirse en las relaciones métricas que sirven de base á la teoría que venimos de desarrollar.

Epicicloide ordinaria

RELACIONES MÉTRICAS

23. Sea (m) la epicicloide engendrada por el punto M solidario de la circunferencia (q) que rueda exteriormente sobre la circunferencia (p), (fig. 19).

MA es la normal en M á dicha curva.

Tracemos la recta MQ y por P una paralela á dicha recta. Esta última y la normal MA se cortan en el punto B.

De la semejanza de los triángulos MAQ y APB, resulta:

$$\frac{MQ}{QA} = \frac{PB}{PA}.$$

Más, como los segmentos MQ, AQ y PA son de longitud constante, cualquiera que sea la posición del sistema movil, también es constante la magnitud PB; lo que quiere decir que la trayectoría del punto B es la circunferencia descripta con centro P y radio PB.

Por ese mismo motivo la relación $MA:MB$ es constante; y la recta MA es dividida en cualquier posición de (q) en partes proporcionales.

Podemos entonces determinar el punto de contacto de esta curva con su envolvente.

Son conocidas de antemano:

1°. la normal MA á la curva (m) en el punto M;
2°. la normal AP al circulo (p) en el punto A;
3°. la normal PB al circulo descripto por B.

Debemos pues trazar por A una perpendicular que sea dividida por aquellas tres rectas en segmentos que guarden la relación $MA:MB$.

Con tal objeto, prolonguemos la PB hasta el punto E de intersección con la perpendicular AE á la AM y prolonguemos igualmente la MQ hasta cortar en D a la misma recta. Digo que la intersección μ de las rectas MB y DP, es el centro de curvatura de (m) relativo al punto M.

Tracemos, en efecto, la $\mu\beta$ paralela á la AE; tendremos evidentemente

$$\frac{\mu\alpha}{\mu\beta} = \frac{AD}{AE} = \frac{MA}{MB}$$

relación que justifica la construcción geométrica empleada.

Nos proponemos ahora encontrar analíticamente la posición del centro de curvatura de la misma epicicloide.

Recordaremos, al efecto, que si desde un punto fijo ω interior á un ángulo $R\hat{O}S$ se trazan distintas transversales RS, $R'S'$,.... se verifica constantemente la relación

$$\left(\frac{1}{\omega R}+\frac{1}{\omega S}\right)\frac{1}{\operatorname{sen} O\omega S}=\left(\frac{1}{\omega R'}+\frac{1}{\omega S'}\right)\frac{1}{\operatorname{sen} O\omega S'}=\dots$$

propiedad que aplicada al ángulo MDP cortado por las transversales $M\mu$ y PQ, permite establecer:

$$\frac{1}{MA}+\frac{1}{A\mu}=\left(\frac{1}{AQ}+\frac{1}{AP}\right)\frac{1}{\operatorname{sen} DAP}$$

ó bien llamando R al radio PA de (p);

R' al radio QA de (q);

ρ al radio de curvatura $M\mu$ de (m);

d á la distancia AM

y φ al ángulo DAP,

$$\frac{1}{R}+\frac{1}{R'}=\left(\frac{1}{d}+\frac{1}{\rho-d}\right)\operatorname{sen}\varphi.$$

ecuación que determina el radio de curvatura ρ en función de la distancia MA y del ángulo φ.

Si (p) es una recta y M es un punto de (q), se verifica

$d=2r\operatorname{sen}\varphi$; siendo r el radio de (q).

Entonces, la relación que antecede se convierte en

$$2\frac{\operatorname{sen}\varphi}{d}=\left(\frac{1}{d}+\frac{1}{\rho-d}\right)\operatorname{sen}\varphi$$

$$\frac{2}{d}=\frac{\rho}{d(\rho-d)}$$

$$\rho=2d.$$

Luego, el radio de curvatura en un punto de la cicloide ordinaria, es igual al doble de la porción de normal á la misma curva, comprendida entre ese punto y el de contacto con la base.

Ecuación de Savary

24. Supongamos que las curvas polares (p) y (q) no sean circunferencias (fig. 20).

A partir del punto de contacto sobre esas dos curvas tomemos dos arcos iguales infinitamente pequeños AB y AB' y sea M' la posición del punto M cuando B' coincide con B.

Obtendremos la normal en M' á la ruleta (m) uniendo los puntos M' y B: el centro de curvatura de (m) será pues el punto μ en que las normales consecutivas MA y $M'B$ se cortan.

Hagamos:

$$MM'=ds;$$

$$AB=AB'=d\sigma;$$

$$AP=R=\text{radio de curvatura de } (p)$$

en el punto A:

$$AQ=R'=\text{radio de curvatura de } (q)$$

en el mismo punto;

$$MA=d;\quad M\mu=\rho.$$

Los ángulos de contingencia de (p) y de (q) en el punto A serán:

$$\frac{d\sigma}{R} \text{ y } \frac{d\sigma}{R'}$$

y de consiguiente la rotación del sistema correspondiente al paso del centro instanteo de la posición A á la B; tiene por expresión

$$\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{R'}\right)d\sigma;$$

la longitud del arco MM' es, entonces:

$$ds = d.\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{R'}\right)d\sigma$$

Llamando, por otra parte φ el ángulo que forma la recta PQ — que une los centros de curvatura de (p) y (q) — con la normal á la AM en el punto A, se tiene, en virtud de la semejanza de los triángulos $MM'\mu$ y $AH\mu$:

$$\frac{ds}{AH} = \frac{\rho}{\rho-d}$$

ó bien:

$$\frac{ds}{d\sigma \operatorname{sen}\varphi} = \frac{\rho}{\rho-d}.$$

De donde:

$$ds = \frac{\rho}{\rho-d}.d\sigma \operatorname{sen}\varphi.$$

Igualando pues esta expresión con la obtenida anteriormente para ds, resulta:

$$\frac{\rho \operatorname{sen}\varphi}{\rho-d} = \left(\frac{1}{R}+\frac{1}{R'}\right)d$$

$$\therefore \quad \frac{1}{d}.\frac{\rho \operatorname{sen}\varphi}{\rho-d} = \frac{1}{R}+\frac{1}{R'}$$

$$\therefore \quad \left(\frac{1}{d}+\frac{1}{\rho-d}\right)\operatorname{sen}\varphi = \frac{1}{R}+\frac{1}{R'}$$

Esta ecuación, de la cual la obtenida en el paragrafo anterior, no es más que un caso particular, es conocida con el nombre de ecuación de Savary.

Aplicación de la ecuación de Savary

25. Propongamonos encontrar el centro de curvatura de una línea (m_1) lugar de los puntos M_1 de las tangentes á otra curva (m) situados á distancia constante de los puntos de contacto.

La normal á (m_1) pasa por el punto O, centro de curvatura de (m) en el punto M (fig. 21). Sobre la normal M_1O, levantemos en el punto O una perpendicular, que corta en T á la tangente MM_1. La recta CT que une el punto T con el centro de curvatura C de la curva (e), evoluta de la (m), relativo al punto O, corta á la normal M_1O en el punto O_1 que es el centro de curvatura de (m_1) relativo al punto M_1.

Podemos, en efecto considerar á la curva (m) como trayectoria del punto M de la recta OM que rueda sin resbalar sobre la curva (e).

En este desplazamiento cicloidal el punto M_1 invariablemente unido á la recta OM describe la curva dada (m_1). Debiendo, por otra parte, concurrir al punto de contacto de las líneas polares, las normales á las trayectorias de los distintos puntos del sistema móvil, resulta probado que las normales en M_1 y en M respectivamente á (m_1) y á (m) se cortan en el punto O.

Llamemos R el radio de curvatura de (e) ó base de la ruleta, es decir:

$$R = OC$$

y sea R' el radio de curvatura de la curva polar móvil, que en este caso es una recta; de modo que

$$R' = \infty \quad \therefore \quad \frac{1}{R'} = 0.$$

Luego, la ecuación de Savary será:

$$\frac{1}{R} = \left(\frac{1}{d} - \frac{1}{\rho - d}\right) \operatorname{sen} \varphi$$

de donde:

$$\frac{\operatorname{sen} \varphi}{\rho - d} = \frac{1}{R} - \frac{\operatorname{sen} \varphi}{d} = \frac{d - R \operatorname{sen} \varphi}{R d}$$

ó bien:

$$\frac{\rho - d}{\operatorname{sen} \varphi} = \frac{R d}{d - R \operatorname{sen} \varphi}$$

$$\therefore \quad \rho - d = \frac{R d}{\frac{d}{\operatorname{sen} \varphi} - R}$$

ó sea:

$$\overline{OO_1} = \frac{R d}{\frac{d}{\operatorname{sen} \varphi} - R} \tag{1}$$

Supongamos obtenido el punto O_1 como intersección de la recta CT con la OM. La construcción expresada se hallará justificada si la expresión que resulte para la distancia $\overline{OO_1}$ concuerda con la (1).

Siendo CO perpendicular á MO, las rectas MT y CO son paralelas y por consiguiente son semejantes los triángulos $O_1 T_1 M$ y $O_1 C O$.

Entonces:

$$\frac{O_1 M_1}{O_1 O} = \frac{M_1 T}{O C}$$

$$\frac{O_1 O}{O_1 M_1 - O_1 O} = \frac{O C}{M_1 T - O C}$$

$$\frac{O_1 O}{M_1 O} = \frac{O C}{M_1 T - O C}. \tag{2}$$

Pero en el triángulo rectángulo $O M_1 T_1$, tenemos:

$$M_1 O = M_1 T \operatorname{sen} \varphi \qquad M_1 T = \frac{d}{\operatorname{sen} \varphi}.$$

Sustituyendo en la (2):

$$\frac{O_1 O}{d} = \frac{R}{\frac{d}{\operatorname{sen} \varphi} - R}$$

$$O_1 O = \frac{R d}{\frac{d}{\operatorname{sen} \varphi} - R}$$ expresión idéntica á la (1).

Centro de curvatura de las cónicas

26. *Elipse*—La relación métrica en que se funda la aplicación del método cinemático expuesto para la determinación del centro de curvatura, es en el caso de una elipse:

$$\frac{MA}{MB} = \text{constante.}$$

en la cual M es un punto de la curva y A y B los puntos de intersección de la normal en M con los ejes de la elipse.

Los cuatro triángulos á que se hace referencia en la regla general expuesta para hallar el punto de contacto de una recta, en nuestro caso la MB (figura 22) con su envolvente, son los formados por los dos ejes de la elipse la normal y la tangente en M.

Por consiguiente, después de trazar la tangente MT y la normal MB en el punto M, se describirán las circunferencias circunscriptas á los cuatro triángulos formados por los dos ejes de la elipse, la tangente y la normal en M, circunferencias que se cortan evidentemente en el punto F de intersección de la recta BT con RA (*).

Para concluir la construcción habría que describir la circunferencia que pasando por F es tangente á la elipse en M ó bien á la recta MT, trazado que se

(*). Conviene determinar F como intersección de dichas rectas.

evita tirando por F la perpendicular $F\mu$ á MF. La intersección μ de esa perpendicular con la AB es el centro de curvatura de la elipse en el punto M.

Hipérbola.—Siendo el punto medio del segmento de una tangente interceptada por las asíntotas de una hipérbola, el punto de contacto de dicha tangente, el centro de curvatura correspondiente al punto C, (fig. 23), será el punto μ, medio del segmento que limitan sobre la normal $C\mu$, las perpendiculares en A y B á las asíntotas OA y OB. El centro de curvatura correspondiente al punto D es el punto μ_2, medio de A_2B_2.

Parábola.—La construcción empleada para determinar el centro de curvatura en un punto de la elipse, permitirá resolver el mismo problema en el caso de una parábola con las simplificaciones que de las propiedades particulares de esta curva resultan (fig. 24).

La normal en el punto M encuentra al eje de la parábola en el punto A. Si por este punto se traza una perpendicular á la normal MA, la intersección D de dicha perpendicular con la paralela MD al eje estará sobre la circunferencia tangente á la parábola en M, que pasa por el centro de curvatura que se trata de determinar. Luego dicho centro es el punto μ obtenido como intersección de MA con la perpendicular á MD en D.

VII

VARIACIÓN DE MAGNITUD DE UN ÁNGULO MÓVIL

27. Sea $A B C = \varphi$ el ángulo movil; (b) la trayectoría de su vértice y (m) y (n) las envolventes de sus lados (fig. 25).

La variación $d\varphi$ debida á un desplazamiento infinitamente pequeño del vértice B en la curva (b), será igual á la diferencia de los ángulos de contingencia de las curvas (m) y (n) relativas á los correspondientes puntos de contacto.

Por otra parte, siendo O y O_1 los centros instantáneos de rotación relativos á los desplazamientos de las rectas $A B$ y $B C$, las expresiones de los ángulos de contingencia de las curvas (m) y (n) en los puntos M y N, serán respectivamente, las suministradas por las relaciones evidentes:

$$\overline{BO} \, . \, d\theta = d(b)$$

$$\overline{BO_1} . \, d\theta_1 = d(b)$$

ó sean:

$$d\theta = \frac{d(b)}{\overline{BO}}$$

$$d\theta_1 = \frac{d(b)}{\overline{BO_1}}$$

resultando como expresión de la variación del ángulo φ:

$$d\varphi = d\theta - d\theta_1 = \left(\frac{1}{BO} - \frac{1}{BO_1}\right) d(b).$$

La expresión obtenida de la variación de un ángulo móvil puede aplicarse á la resolución de algunos problemas geométricos.

28. Sean F_1 y F_2 los focos de una elipse y M un punto de la misma.

Desde luego los ángulos que la normal en M forma con los radios focales $M F_1$ y $M F_2$ son iguales; luego serán tambien iguales las variaciones $d\varphi_1$ y $d\varphi_2$ de esos dos ángulos producidas por un desplazamiento infinitamente pequeño del punto M en la elipse.

Llamando pues, N_1 y N_2 los puntos en que las perpendiculares trazadas desde F_1 y F_2 á la normal en M, encuentran á esta recta, y, siendo μ el centro de curvatura, la expresión de igualdad entre las variaciones citadas será:

$$\left(\frac{1}{M\mu} - \frac{1}{M N_1}\right) d(m) = \left(\frac{1}{M N_2} - \frac{1}{M\mu}\right) d(m).$$

ó bien dividiendo por $d(m)$, trasponiendo y reduciendo:

$$\frac{1}{MN_1}+\frac{1}{MN_2}=\frac{2}{M\mu}$$

Luego: el *centro de curvatura* μ *es el conjugado armónico de* N *con respecto á* N_1 y N_2; propiedad que proporciona una sencilla construcción geométrica para determinar la posición del centro de curvatura de una elipse.

Cáusticas por refraccion

29. Otro de los problemas que pueden ser resueltos aplicando la fórmula obtenida de la variación de un ángulo móvil, es el del trazado de las *cáusticas por refracción.*

Sea (m) la curva separatriz de los dos medios:

(α) la envolvente de los rayos incidentes;

(α') la envolvente de los rayos refractados, ó bien, la cáustica por refracción;

i, el ángulo de incidencia de un rayo luminoso αM;

r, el ángulo de refracción correspondiente;

γ, el indice de refracción, es decir, $\gamma=\frac{\operatorname{sen} i}{\operatorname{sen} r}$.

Nos proponemos, pues, buscar el punto de contacto del rayo refractado $M\alpha'$ con su envolvente (fig. 26).

Diferenciando la ecuación:

$$\operatorname{sen} i-\gamma \operatorname{sen} r=O,$$

obtenemos

$$\cos i.\,di-\gamma \cos r.\,dr=O$$

ó bien

$$\cos i.\,di=\gamma \cos r.\,dr \qquad (1)$$

La expresión de la variación del ángulo de incidencia será, designando con ρ el radio de curvatura de (m) en el punto M, ó sea la distancia $M\mu$ de dicho punto al centro μ de curvatura:

$$di=\left(\frac{1}{\rho}-\frac{1}{MB}\right)d(m).$$

Por otra parte

$$M\alpha=MB\cos i$$

luego

$$di=\left(\frac{1}{\rho}-\frac{\cos i}{M\alpha}\right)d(m).$$

Análogamente se deduce

$$dr=\left(\frac{1}{\rho}-\frac{\cos r}{M\alpha'}\right)d(m).$$

Tendremos pues, sustituyendo en la (1):

$$\frac{1}{\gamma}\left(\frac{1}{\rho}-\frac{\cos i}{m\alpha}\right)\cos i=\left(\frac{1}{\rho}-\frac{\cos r}{M\alpha'}\right)\cos r$$

ó bien

$$(2)\qquad \frac{\operatorname{sen} r}{\operatorname{sen} i}\left(\frac{\cos i}{\rho}-\frac{\cos^2 i}{M\alpha}\right)=\left(\frac{\cos r}{\rho}-\frac{\cos^2 r}{M\alpha'}\right).$$

De la figura se deduce

$$M\mu=MN\cos i \quad \therefore \quad \frac{\cos i}{\rho}=\frac{1}{MN}$$

$$\overline{M\alpha}^2 = \overline{MB}^2 \cos^2 i$$

$$\overline{MB}^2 = \overline{MC}.\overline{M\alpha} \quad \therefore \quad \overline{M\alpha}^2 = \overline{MC}.\overline{M\alpha} \cos^2 i$$

ó sea

$$\overline{M\alpha} = \overline{MC} \cos^2 i \quad \therefore \quad \frac{\cos^2 i}{M\alpha} = \frac{1}{MC}.$$

Análogamente podemos deducir

$$\frac{\cos r}{\rho} = \frac{1}{MN'}$$

$$\frac{\cos^2 r'}{M\alpha'} = \frac{1}{MC'}.$$

Y tendremos, sustituyendo en la (2)

$$\frac{1}{\operatorname{sen} i}\left(\frac{1}{MN} - \frac{1}{MC}\right) = \frac{1}{\operatorname{sen} r}\left(\frac{1}{MN'} - \frac{1}{MC'}\right)$$

relación que muestra que los puntos μ, C y C' están en línea recta. La sola inspección de la figura de que nos hemos servido para establecer la relación que precede, nos conduce á la construcción siguiente:

Trácese en α la perpendicular αB al rayo incidente y obtiénese como intersección con la normal á la separatriz, el punto B. La perpendicular á dicha normal en B determina sobre el rayo incidente el punto C, únase C con μ y se obtendrá en C' la intersección de esa recta con el rayo refractado; por C' se traza otra perpendicular al rayo incidente y por el pié B' de esta perpendicular se tira la $B'\alpha'$ normal al rayo refractado: el punto α' así obtenido es el punto de contacto de $M\alpha'$ con su envolvente, es decir un punto de la *cáustica*.

VIII

DE LOS POLÍGONOS ARTICULADOS

30. Bajo la denominación general de polígonos articulados están comprendidos los diversos tipos de mecanismos formados de barras rígidas unidas por sus extremos, formando ángulos constantes ó variables según la naturaleza de los movimientos de que ciertos órganos componentes están animados y las transformaciones de movimiento que el mecanismo debe operar.

Dejando de lado los paralelógramos articulados de Watt, de Paucelier, etc. cuya teoría se halla extensamente tratada en algunos cursos de Máquinas, nos ocuparemos únicamente del pentágono articulado de M. Hart destinado al trazado de líneas rectas por medio de una deformación contínua del polígono.

Sea $ABCDP$ un pentagono articulado (fig. 27). Sujetemos la deformación del sistema á las siguientes condiciones:

1° El lado AB permanece fijo.

2° Los ángulos A y B son fijados de antemano.

3° Los ángulos C y D permanecen constantemente iguales.

Esta última condición, difícil de realizar mecanicamente, puede obtenerse eligiendo sobre AD y BC respectivamente dos puntos H y E sujetos á la condición de que han de permanecer constantemente á la misma distancia y que serán por consiguiente ligados por una barra rígida.

Efectivamente tomemos sobre AD el punto H determinado por la relación:

$$\frac{PH}{PD} = \frac{PC}{CB}.$$

Entonces los triángulos DPH y PCB son semejantes, y

$$\frac{DH}{PC} = \frac{PD}{CB} = \frac{PH}{PB} \qquad (1)$$

y

$$\text{áng.}\, DPH = \text{áng.}\, CPB. \qquad (2)$$

Tomemos también sobre CB el punto E dado por la relación:

$$\frac{CE}{PC} = \frac{PD}{AD}.$$

Los triángulos PDA y PCE son semejantes, y tendremos:

$$\frac{CE}{PD} = \frac{PC}{AD} = \frac{PE}{AP} \qquad (3)$$

$$\text{áng.}\, APD = \text{áng.}\, PEC. \qquad (4)$$

Vamos á demostrar que los puntos H y E permanecen durante el desplazamiento á una misma distancia.

Para comodidad en las transformaciones de cálculo haremos:

$$AB = a \quad AH = b \quad HD = b' \quad PD = \beta$$

$$BE = c \quad EC = c' \quad CP = \gamma$$

Igualando las expresiones de $PD \times CP$ deducidas de las fórmulas (1) y (3) obtenemos:

$$b'(c + c') = c'(b + b') = \beta\gamma$$

de donde:

$$b'c = bc'.$$

Pongamos:

$$b' = kb \;\text{ y }\; c' = kc. \qquad (5)$$

Resultará:

$$\beta\gamma = bck(1 + k). \qquad (6)$$

Las dos últimas razones que constituyen la fórmula (1) dán:

$$(m) \qquad \frac{PH}{PB} = \frac{\beta}{c(1 + k)}$$

y las correspondientes de la fórmula (3):

$$(n) \qquad \frac{PE}{PA} = \frac{\gamma}{b(1 + k)}.$$

Restando de la igualdad (4) la igualdad (2) obtenemos:

$$\text{áng.}\, A P H = \text{áng.}\, B P E;$$

luego resultarán iguales los ángulos en P de los triángulos HPE y APB y se tendrá designando con θ dicho ángulo:

$$\overline{HE}^2 = \overline{PH}^2 + \overline{PE}^2 - 2\,PH.PE \cos\theta$$

$$\overline{AB}^2 = \overline{PA}^2 + \overline{PB}^2 - 2\,PA.PB \cos\theta.$$

$$\therefore \qquad \cos\theta = -\frac{\overline{AB}^2 - \overline{PA}^2 - \overline{PB}^2}{2\,PA.PB};$$

Sustituyendo este valor en la expresión de $\overline{EH}^2$ y sustituyendo en la fórmula así obtenida PH y PE por sus valores deducidos de la (m) y de la (n) en función de PB y PA:

$$\overline{HE}^2 = \frac{c\gamma - b\beta}{b^2 c^2 (1+k)^2}\left\{c\gamma.\overline{PA}^2 - b\beta.\overline{PB}^2\right\} + \frac{a^2 k}{1+k} \quad (p)$$

En los triángulos APD y BCP se tiene:

$$\overline{AP}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{PD}^2 - 2\,AD.PD \cos ADP$$

$$\overline{BP}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{PC}^2 - 2\,BC.PC \cos BCP$$

ó bien llamando ω al ángulo $ADP = BCP$

$$\overline{AP}^2 = \beta^2 + b^2(1+k)^2 - 2b(1+k)\beta\cos\omega$$

$$\overline{BP}^2 = \gamma^2 + c^2(1+k)^2 - 2c(1+k)\gamma\cos\omega.$$

Sustituyendo en la primera de estas dos últimas el valor de $\cos\omega$ deducido de la segunda encontramos:

$$c\gamma.\overline{PA}^2 - b\beta.\overline{PB}^2 = (b\gamma - c\beta)\,bc\,(1+k) \qquad (q)$$

y notando que el primer miembro es la expresión entre llaves de la fórmula (p), tendremos:

$$\overline{HE}^2 = \frac{(c\gamma - b\beta)(b\gamma - c\beta)}{bc(1+k)} + \frac{a^2 k}{1+k}$$

que prueba que la distancia HE permanece constante durante el desplazamiento.

Designando con d dicha distancia, podremos escribir:

$$k(a^2 - d^2) = d^2 + \frac{(c\gamma - b\beta)(c\beta - b\gamma)}{bc}.$$

En cuanto á la trayectoria del vértice P del pentágono, es según lo manifiesta la fórmula (q) una circunferencia cuyo centro es un punto de la AB.

Si en la misma ecuación (q) sustituimos á PA y PB por sus expresiones en función de PH y PE, obtendremos:

$$b\beta.\overline{PE}^2 - c\gamma.\overline{PH}^2 = kbc(b\gamma - c\beta),$$

ecuación que nos dice que si en vez de fijar los vértices A y B, se fijan H y E, la trayectoria de P será una circunferencia con centro sobre EH.

Consideremos el caso particular:

$$c\gamma = b\beta$$

la (q) se convierte en:

$$\overline{PA}^2 - \overline{PB}^2 = \frac{b}{\gamma}(1+k)(b\gamma - c\beta)$$

y nos dice que el punto P describe una recta perpendicular á la AB.

Queda pues, cinemáticamente resuelto el trazado de una recta perpendicular á otra recta cualquiera dada.

IGNACIO AZTIRIA.

Buenos Aires, Agosto de 1901.

Aprobada.

MANUEL B. BAHIA,
Presidente de la mesa examinadora.

Buenos Aires, Octubre de 1901.

PROPOSICIONES ACCESORIAS

I—Una cicloide queda constantemente tangente á dos rectas fijas Ox y Oy; encontrar el lugar geométrico del centro de la circunferencia que pasa por O y por los puntos M y N de contacto.

II—Siendo AB, AC, AD cuerdas de una misma circunferencia, demostrar que si en un mismo instante se abandonan á su propio peso desde el punto A sobre los planos AB, AC, AD.... distintos móviles, éstos llegarán á ocupar las posiciones B, C, D,.... en un mismo instante.

III—Un punto material P está sujeto á desplazarse sin frotamiento sobre un cilindro á sección eliptica y dicho punto es atraido hácia otro O situado sobre el eje del cilindro, proporcionalmente á la distancia OP. Determinar el movimiento de P.

IV—Determinar el lugar geométrico de los vértices de las hiperbolas que pasando por un punto fijo, tienen una asintota paralela á una dirección dada y la otra asintota coincidiendo con una recta dada.

Página no digitalizada

Tipo de material: Lámina

Alto: 27

Ancho: 53

Descripción: Lámina I - Figuras 1-9

Página no digitalizada

Tipo de material: Lámina

Alto: 27

Ancho: 53

Descripción: Lámina II - Figuras 10-18

Esta página no pudo ser digitalizada por tener características especiales. La misma puede ser vista en papel concurriendo en persona a la Biblioteca Central Dr. Luis Federico Leloir.

This page could not be scanned because it did not fit in the scanner. You can see a paper copy in person in the Central Library Dr. Luis Federico Leloir.

Página no digitalizada

Tipo de material: Lámina

Alto: 27

Ancho: 53

Descripción: Lámina III - Figuras 19-27

Esta página no pudo ser digitalizada por tener características especiales. La misma puede ser vista en papel concurriendo en persona a la Biblioteca Central Dr. Luis Federico Leloir.

This page could not be scanned because it did not fit in the scanner. You can see a paper copy in person in the Central Library Dr. Luis Federico Leloir.

Dirección: Biblioteca Central Dr. Luis F. Leloir, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Universidad de Buenos Aires. Intendente Güiraldes 2160 - C1428EGA - Tel. (++54 +11) 4789-9293

Contacto: digital@bl.fcen.uba.ar