La fuerza en la geometría

Morales, Carlo M.

1889

Tesis presentada para obtener el grado de Doctor en Ciencias Físico-Matemáticas de la Universidad de Buenos Aires

UNIVERSIDAD NACIONAL DE BUENOS AIRES

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO-MATEMÁTICAS

LA FUERZA EN LA GEOMETRÍA

TESIS

para optar al título de doctor en ciencias físico-matemáticas

POR

CARLOS M. MORALES

BUENOS AIRES

Imprenta de M. Biedma, Bolivar 535 (nuevo)

1889

UNIVERSIDAD NACIONAL DE BUENOS AIRES.

Rector.

Doctor	LEOPOLDO BASAVILBASO.

Consejeros.

Doctor	MAURICIO GONZALEZ CATAN.
»	ANTONIO E. MALAVER.
Ingeniero	LUIS A. HUERGO.
»	LUIS SILVEYRA.
Doctor	MANUEL OBARRIO.
Señor	JUAN J. J. KYLE.
Doctor	MANUEL ARAUZ.
»	ALEJO B. GONZALEZ.
»	PEDRO A. MATTOS.

Secretario.

Doctor	NORBERTO PIÑERO.

Pro-Secretario.

Doctor	EDUARDO L. BIDAU.

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO-MATEMÁTICAS.

Académicos honorarios.

Doctor Bernardino Speluzzi.
Ingeniero Francisco Lavalle.
" Emilio Rosetti.

Académicos titulares.

Ingeniero Guillermo White.
Doctor Pedro N. Arata.
Ingeniero Luís Silveyra.
" Santiago Brian.
" Manuel B. Bahia.
Doctor Rafael Ruiz de los Llanos.
Ingeniero Jorge Coquet.
Doctor Carlos Berg.
Doctor Valentín Balbín.
Señor Juan J. J. Kyle.
Ingeniero Luis A. Huergo.
Doctor Roberto Wernicke.
Ingeniero Eduardo Aguirre.
Señor Juan Coquet.
Ingeniero Juan Pirovano.

Decano.

Ingeniero Luis Silveyra.

Delegados al Consejo Superior.

Ingeniero Luis A. Huergo.
Señor Juan J. J. Kyle.

Tesorero.

Doctor Carlos Berg.

Secretario.

Ingeniero Félix Amorétti.

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO-MATEMÁTICAS.

Catedráticos titulares.

Introducción al Algebra superior y Trigonometría rectilínea y esférica	Ingeniero	José I. Frogone.
Algebra superior y Geometría analítica..........	"	Carlos D. Duncan.
Química inorgánica	Doctor	Atanasio Quiroga.
Química analítica...........	"	Atanasio Quiroga.
Geometría proyectiva........	Ingeniero	Juan F. Sarhy.
Geometría descriptiva......	"	Lorenzo Amespil.
Cálculo infinitesimal.............	Doctor	Ildefonso P. Ramos Mejía.
Construcciones civiles............	Ingeniero	Luis Silveyra.
Estática gráfica.............. ..	Doctor	Valentín Balbín.
Mecánica racional.......	Ingeniero	Carlos M. Morales.
Mecánica aplicada................	"	Eduardo Becher.
Resistencia de materiales.........	"	Jorge Duclout.
Física superior........	"	Manuel B. Bahía.
Hidráulica	"	Luis Silveyra.
Topografía........	"	Carlos Echagüe.
Geodésia..............	"	Juan Pirovano.
Construcción de máquinas........	"	Otto Krause.
Construcción y explotación de ferrocarriles.............	"	Alberto Schneidewind.
Proyectos, planos y presupuestos.	"	Alberto Schneidewind.
Matemáticas superiores......	Doctor	Valentín Balbín.
Arquitectura	Arquitectos	J. M Belgrano J. M Burgos
Mineralogía y Geología...........	Ingeniero	Eduardo Aguirre.
Química orgánica é Higiene	Señor	Juan J. J. Kyle.
Botánica y Zoología.......	Doctor	Carlos Berg.

Catedráticos sustitutos.

Construcciones civiles.	Ingeniero	Santiago Brian.
Mécánica aplicada................	"	Marcial R. Candioti.
Mineralogía y Geología...........	"	Ponciano L. Saubidet.
Hidráulica.......................	"	Manuel S. Ocampo.
Química inorgánica...............	Doctor	Rafael R. de los Llanos.
Mecánica aplicada................	Ingeniero	Alejandro M. Torres.
Geodésia........................	"	José Sarhy.

SEÑORES ACADÉMICOS;

SEÑORES CATEDRÁTICOS:

Con la simple noción de la composición de fuerzas paralelas, se puede, en la teoría del centroide, confirmar y ampliar muchos teoremas geométricos, y aun enunciar otros que podrían pasar desapercibidos. De aquí que pueda establecerse á este respecto, cierta armonía entre la Estática y la Geometría, lo que explica el título adoptado para nuestro trabajo.

No pretendemos haber hecho una teoría completa sobre esta cuestión, y sí sólo haber adelantado algo en senda tan poco recorrida.

TEOREMA 1.—*Las rectas que unen los vértices de un triángulo con los puntos medios de los lados opuestos, se cortan en un punto que se llama* CENTROIDE *del sistema y que divide á cada una de ellas en la razón de* 2 : 1.

Sea un triángulo ABC (fig. 1), y supongamos tres masas iguales m, colocadas en los vértices del mismo. Las masas en A y B dan una resultante $2m$ en F medio de AB, la que compuesta con la del vértice C, da una resultante $3m$ en G y tal que

$$\frac{CG}{FG}=\frac{2}{1}.$$

Si en vez de las A y B tomamos las B y C primeramente, tendremos una resultante $2m$ en D que compuesta con la situada en A, da nuevamente la $3m$ en G y se tiene

$$\frac{AG}{DG}=\frac{2}{1}.$$

Lo mismo podríamos tomar las A y C y luego la B, lo que daría

$$\frac{BG}{EG}=\frac{2}{1}.$$

Queda pues demostrado el teorema.

Se ve pues que el CENTROIDE reemplaza aquí á lo que hasta ahora se ha llamado *centro de gravedad*, y es el término empleado en la Geometría moderna del triángulo para denominar ese punto importante.

TEOREMA 2.—*El producto de tres segmentos no contíguos en que la transversal de un triángulo divide á sus lados es igual al producto de los otros tres.*

Consideremos un triángulo ABC (fig. 2) y supongamos en los vértices A y B respectivamente dos masas m_1 y m_2 y en el C dos iguales y contrarias m_3 y $-m_3$.

Las m_1 y m_2 dan una resultante en E tal que

$$\frac{AE}{BE}=\frac{m_2}{m_1},$$

ó bien

$$\frac{AE}{BE}=\frac{m_2}{m_3}:\frac{m_1}{m_3}, \quad \therefore \quad \frac{AE}{BE}=\frac{CF}{BF}:\frac{CD}{AD},$$

siendo D el centroide de las masas m_1 y m_3 y F el de las m_2 y $-m_3$.

De la última obtendremos

$$AE.BF.CD=BE.CF.AD.$$

TEOREMA 3.—*Si se trazan rectas que unan los vértices de un triángulo con un punto interior del mismo hasta encontrar los lados opuestos, se obtienen seis segmentos, y el producto de tres no contiguos es igual al producto de los otros tres.*

Consideremos tres masas m_1, m_2 y m_3 (fig. 3) situadas en los vértices A, B, C respectivamente. Si componemos las m_1 y m_2, tenemos la m_1+m_2 en F y la relación

$$\frac{AF}{BF}=\frac{m_2}{m_1}.$$

Componiendo ahora las m_1+m_2 y m_3, se tiene la $m_1+m_2+m_3$ en O (que es el centroide del sistema considerado) y la relación

$$\frac{CO}{OF}=\frac{m_1+m_2}{m_3} \quad \therefore \quad \frac{OF}{CF}=\frac{m_3}{m_1+m_2+m_3}.$$

Podríamos haber compuesto primero las m_1 y m_3 y tener m_1+m_3 en E y la nueva relación

$$\frac{CE}{AE}=\frac{m_1}{m_3}.$$

Componiendo nuevamente las m_1+m_3 y m_2, se ve que BE debe pasar por O, y se tiene

$$\frac{BO}{OE}=\frac{m_1+m_3}{m_2} \quad \therefore \quad \frac{OE}{BE}=\frac{m_2}{m_1+m_2+m_3}.$$

Finalmente veríamos que AD también pasa por O y tendríamos las relaciones

$$\frac{BD}{CD}=\frac{m_3}{m_2},$$

y

$$\frac{AO}{OD}=\frac{m_2+m_3}{m_1} \quad \therefore \quad \frac{OD}{AD}=\frac{m_1}{m_1+m_2+m_3}.$$

De las anteriores sacamos

$$AF.CE.BD=BF.AE.CD,$$

que demuestra el teorema enunciado.

Se verifica además la igualdad

$$\frac{OF}{CF}+\frac{OE}{BE}+\frac{OD}{AD}=1.$$

TEOREMA 4.—*Las rectas que unen los puntos medios de los lados de un triángulo con los de las rectas que unen el ortocentro* con los vértices res-*

* Denominación que se da en la Geometría moderna del triángulo al punto de intersección de las perpendiculares bajadas de los vértices á los lados opuestos.

pectivos, se cortan en un punto que las divide en partes iguales y que es el centroide del sistema. Además, *la recta que une el centroide del sistema formado por los vértices del triángulo con el ortocentro, pasa por ese punto, y está dividida por él en la razón de* 3 : 1.

Supongamos cuatro masas iguales (fig. 4) situadas respectivamente en los vértices de un triángulo y en su ortocentro.

Las situadas en C y B dan una resultante en D medio de BC é igual á $2m$. Las en A y H dan otra en M igual también á $2m$, y finalmente las dos resultantes parciales en D y M dan la total $4m$ situada en O medio de MD y que es el centroide del sistema actual.

Repitiendo lo hecho, pero con las A y B primero y luego con las C y H obtendremos otra recta que une el medio de AB con el de HC y pasa por O. Del mismo modo la recta que une el punto medio de AC con el de HB pasa también por O. Ahora, observaremos que si G es el centroide del sistema ABC hay en ese punto una masa igual á $3m$ la que compuesta con la m de H, da en O la $4m$ y la relación

$$\frac{HO}{GO}=\frac{3}{1}.$$

TEOREMA 5.—*Las paralelas trazadas por un punto de la diagonal de un rectángulo á los lados de éste,* *lo dividen en otros cuatro, de los que, los dos por los cuales no pasa la diagonal, llamados los complementos de los otros dos, son equivalentes.*

Supongamos dos masas m_1 y m_3 situadas en los vértices opuestos de un rectángulo (fig. 5), y dos iguales á m_2 situadas en los otros dos vértices.

Desde luego se ve que el centroide del sistema debe hallarse en la diagonal AC en cuyos extremos se hallan las masas iguales; sea O ese punto, y tracemos por él dos rectas MN y PQ respectivamente paralelas á los lados AD y AB del rectángulo. Ahora bien, si M es el centroide de m_1 y m_2 (y podemos elegir á estas de modo que así sea), tenemos

$$\frac{AM}{MB}=\frac{m_2}{m_1},$$

y siendo P el centroide de m_1 en A y m_2 en D la otra relación

$$\frac{PD}{PA}=\frac{m_1}{m_2},$$

luego

$$\frac{AM.PD}{MB.PA}=1 \quad \therefore \quad OP.PD=MB.OM,$$

que demuestra el teorema, el que es una de las proposiciones de Estática Gráfica en la parte referente á los momentos.

Fácilmente se comprende que el teorema que se acaba de demostrar es también aplicable á un paralelógramo.

Teorema 6.—*Si se unen los puntos medios de los lados opuestos de un cuadrilátero y los de las diagonales, esas tres rectas se cortan en un punto que las divide en partes iguales.*

Imaginemos cuatro masas iguales situadas en los vértices de un cuadrilátero (fig. 6).

El centroide de A y D está en E medio de AD donde existe nna masa igual á $2m$; el de B y C está en G, luego, el centroide del sistema está en O medio de GE, en el cual existe la masa $4m$.

Compongamos ahora las B y D, lo que da $2m$ en N, y las A y C que dan $2m$ en M, luego el centroide se halla en el medio de la recta MN. Pero también se halla en el medio de FH, y queda por lo tanto demostrado el teorema.

Se comprende por el procedimiento que hemos seguido que el teorema también se verifica para un cuadrilátero gauso cualquiera.

El centroide en este caso es el punto de intersección de dos generatrices diferentes del paraboloide hiperbólico que se engendraría con las rectas del cuadrilátero.

Teorema 7.—*Cada falso de un cuadrilátero completo, está dividido armónicamente por los otros dos falsos lados y por los dos vértices gue une.*

Consideremos un triángulo ABC (fig. 7) y respectivamente: en A tres masas iguales á m_1 y una igual á $-m_1$, en B dos iguales á m_2, y en C dos iguales y contrarias m_3 y $-m_3$.

Tenemos que m_1 en A y m_2 en B da m_1+m_2 en M. El centroide de $-m_1$ en A y $-m_3$ en C está en N y da $-(m_1+m_3)$.

Ahora, la resultante de m_1+m_2 en M y $-(m_1+m_3)$ en N es m_2-m_3 y debe hallarse en un punto de MN; pero esta m_2-m_3 resultante de m_2, $-m_3$, m_1 y $-m_1$ debe hallarse también en un punto de BC; luego, tiene que hallarse en el punto de intersección de esas dos rectas, esto es, en L.

Componiendo esta última con una de las m_1 de A, obtenemos una resultante $m_1+m_2-m_3$ que debe hallarse á la vez sobre las rectas AL y MC, según se ve fácilmente, luego debe hallarse en el punto Q intersección de ambas.

Finalmente, en M tengo otra resultante m_1+m_2 proveniente de las m_1 y m_2 que habían quedado en A y B, y que compuesta con la m_3 de C da $m_1+m_2+m_3$ en P, pues esta última debe hallarse simultáneamente en MC y BN y por consiguiente en su intersección.

De lo que precede se deduce las relaciones

$$\frac{MP}{PC}=\frac{m_3}{m_1+m_2},$$

$$\frac{MQ}{CQ}=\frac{m_3}{m_1+m_2};$$

luego

$$\frac{MP}{PC}=\frac{MQ}{CQ}$$

$$\therefore MP.CQ=MQ.PC.$$

Si observamos la figura vemos que M y C son los vértices de un cuadrilátero completo, y P y Q los puntos de intersección del falso lado que los une con los otros dos, luego la última igualdad demuestra el teorema.

En virtud del principio de dualidad podemos decir que:

Las líneas que unen uno de los falsos vértices del cuadrángulo completo con los otros dos, forman un sistema armónico con los dos lados de los cuales ese falso vértice es la intersección.

Estos teoremas sobre puntos y rectas del cuadrilátero completo son los que sirven de base á la Geometría de Posición de Staudt y que son ahora de uso corriente en la Geometría Proyectiva.

TEOREMA 8.—*Si se toman cuatro puntos sobre los lados de un cuadrilátero de modo que los dividan dos á dos en partes proporcionales, las rectas que unen los situados sobre los lados opuestos se cortan en un punto que las divide en partes iguales y que se halla situado sobre la recta que une los puntos medios de las diagonales.*

Consideremos dos masas iguales á m_1 situadas en las extremidades de la diagonal AC (fig. 8) y otras dos m_2 en las extremidades de la *BD*. Las dos primeras dan $2m_1$ en *M* medio de *AC*, y las segundas $2m_2$ en *N*, luego el centroide *O* del sistema se halla sobre la recta *MN* y da la relación

$$\frac{MO}{ON}=\frac{m_2}{m_1}.$$

Ahora, m_1 en *A* y m_2 en *D* dan m_1+m_2 en *H*; también tenemos m_1+m_2 en *F* centroide de *B* y *C*, luego el centroide del sistema se halla en el punto medio de *HF*. Por la misma razón debe hallarse en el medio de *EG*, y como tenemos las relaciones

$$\frac{AH}{HD}=\frac{m_2}{m_1}=\frac{CG}{GD},$$

y

$$\frac{AE}{EB}=\frac{m_2}{m_1}=\frac{CF}{FB},$$

es cierto el teorema enunciado.

Este teorema fué empleado por Newton para determinar el lugar geométrico del centro de la cónica inscripta en un cuadrilátero dado· Podría tambien definirse del siguiente modo:

Los centros de todos los paralelógramos que pueden ser inscriptos en un cuadrilátero dado, de modo que tengan sus lados paralelos á las diagonales del mismo se hallan en línea recta.

Se comprende fácilmente que este teorema tam bien se aplica á un cuadrilátero gauso.

Teorema 9—*Toda recta que divide los lados opues-*

tos de un paralelogramo en dos segmentos cuya relación es dada, pasa por el punto de intersección de las diagonales.

Sea $ABCD$ (fig. 9) el paralelogramo y supongamos que

$$\frac{AE}{EB}=\frac{CF}{DF}=m.$$

Consideremos en A y C dos pesos iguales á P, y en B y D pesos iguales á mP, El centroide de todo el sistema es evidentemente el punto O intersección de las diagonales.

Ahora bien, componiendo las fuerzas en A y B tendremos una resultante $P(m+1)$ aplicada en E, tal que

$$\frac{mP}{P}=\frac{AE}{EB}.$$

Análogamente, las fuerzas en C y D, dan una resultante P $(m+1)$ aplicada en F, tal que

$$\frac{mP}{P}=\frac{CF}{FD}.$$

El centroide de las dos fuerzas P $(m+1)$ está sobre EF y debe coincidir con O; luego queda demostrada la proposición.

TEOREMA 10—*Las lineas que unen los puntos medios de los lados de un triángulo con los puntos medios de las perpendiculares respectivas, se cortan en el punto simediano.* *

* Se llama así à la instersección de las rectas simedianas, que son las que parten de los vértices de un triángulo y forman con las bisectrices de los ángulos del mismo, ángulos iguales á los que hacen las bisectrices con las medianas correspondientes. M. D'OCAGNE.

Consideremos tres masas a^2, b^2, c^2 y supongamos que estén aplicadas en los vértices del triángulo ABC (fig. 10).

El centroide O de este sistema es el punto simediano del triángulo, cuyas coordenadas trilineales son $\alpha : \beta : \gamma = a : b : c$.

Efectivamente, considerando la recta $c\beta = b\gamma$, se ve que divide á BC en dos segmentos cuya relación es $c^2 : b^2$; y análogamente para los otros lados.

Ahora bien, por el punto A tracemos la perpendicular AD sobre BC y sean K, E los respectivos puntos medios de AD y BC.

Si en el punto B reemplazamos b^2 por su valor equivalente $\frac{1}{2}(a^2+b^2-c^2)+\frac{1}{2}(b^2+c^2-a^2)$, y en el C reemplazamos c^2 por la expresión equivalente $\frac{1}{2}(a^2+c^2-b^2)+\frac{1}{2}(b^2+c^2-a^2)$, es evidente que el centroide del sistema no varía.

Por otra parte $\frac{1}{2}(a^2+b^2-c^2)$ en el vértice B y $\frac{1}{2}(a^2+c^2-b^2)$ en C, equivalen á la fuerza a^2 en el punto D, porque

$$\frac{BD}{CD}=\frac{c \cos B}{b \cos C},$$

ó lo que es lo mismo

$$\frac{BD}{CD}=\frac{2ac \cos B}{2ab \cos C}$$

$$\therefore \frac{BD}{CD}=\frac{a^2+c^2-b^2}{a^2+b^2-c^2};$$

y además a^2 en el vértice A con a^2 en D, equivalen á $2a^2$ en K.

Ahora bien las masas iguales $\frac{1}{2}(b^2+c^2-a^2)$ colocadas en C y D son equivalentes á $b^2+c^2-a^2$ en el punto E, por consiguiente, la recta KE pasa por el punto O centroide del sistema, y como además se tiene

$$\frac{KO}{OE}=\frac{b^2+c^2-a^2}{2a^2},$$

queda demostrado el teorema.

TEOREMA 11—*Los triángulos inscriptos en un triángulo dado tales que dos de sus lados sean respectivamente paralelos á dos de este, constituyen un sistema de triángulos cuyos centroides son colineales con el centroide del triángulo primitivo y están sobre una paralela al tercer lado.*

Sea un triángulo ABC (fig. 11) y supongamos en el vértice A dos masas m_1 y m_2, en el B dos iguales á m_1 y en el C dos iguales á m_2.

Desde luego sabemos que el centroide del triángulo formado por las rectas que unen los puntos medios de los lados del triángulo dado, se confunde con el de este, además se tiene

$$AO=2OD.$$

Componiendo ahora las masas m_1 y m_2 de A y B respectivamente, obtenemos una resultante m_1+m_2 en F_1 y tal que

$$\frac{BF_1}{AF_1}=\frac{m_2}{m_1}.$$

La otra masa m_1 de B con m_2 de C dan una resultante m_1+m_2 en D_1 tal que

$$\frac{BD_1}{CD_1} = \frac{m_2}{m_1}.$$

Finalmente tenemos m_1+m_2 en E_1 proveniente de las m_1 y m_2 de A y C respectivamente, y la relación

$$\frac{AE_1}{CE_1} = \frac{m_2}{m_1}.$$

Tenemos pues en $D_1 E_1 F_1$ un triángulo inscripto en el dado y en las condiciones del enunciado. Además en sus tres vértices hay tres masas iguales á m_1+m_2, luego el centroide del sistema propuesto se halla en O_1 intersección de las medianas de dicho triángulo.

Ahora bien, si componemos $2m_1$ en B con $2m_2$ en C, obtendremos $2\,(m_1+m_2)$ en D_1, la que compuesta con m_1+m_2 en A debe dar nuevamente el punto O_1 como centroide del sistema propuesto y la relación

$$\frac{AO_1}{O_1D_1} = \frac{2(m_1+m_2)}{m_1+m_2}$$

$$\therefore \qquad AO_1 = 2\,O_1 D_1.$$

Análogamente, para otro triángulo $D_2 E_2 F_2$ en las mismas condiciones del anterior, tendríamos

$$AO_2 = 2\,O_2 D_2,$$

y así siguiendo.

Se ve pues que los centroides O, O_1, O_2 etc., se hallan situados sobre una recta que con el lado BC divide al haz de rectas que sale de A en partes proporcionales y es por lo tanto paralela á dicho lado.

TEOREMA 12.—*Las rectas que unen los puntos medios de las aristas opuestas de un tetraedro, se cortan en un punto que es el centroide del sistema* * *y que las divide en partes iguales.*

Las rectas que unen cada vértice con el centroide de la cara opuesta se cortan en dicho punto que á su vez las divide en la razón de 3 : 1.

Consideremos un tetraedro $ABCD$ (fig. 12) y en cada vértice una masa m. Componiendo las A y B se obtiene $2m$ en Q; las C y D dan tambien $2m$ en M medio de CD. Tenemos pues $4m$ en O medio de MQ y centroide del sistema propuesto.

Si hubieramos determinado primeramente la resultante de A y C y luego la de B y D veríamos inmediatamente que la recta que une los puntos medios de AC y BD pasa tambien por O que la divide como á las otras dos en partes iguales.

Queda pues demostrada la primera parte del teorema enunciado.

Si determinamos ahora el centroide G de la cara BCD, tendremos en él una masa $3m$. Si componemos esta resultante con la masa m de A, tendremos la masa $4m$ situada forzosamente en O centroide del sistema propuesto y además la relación

* Las rectas que pasan por el centroide y terminan en la figura considerada, se llaman *líneas de gravedad* en la Estática Gráfica, pero en la Geometría Superior se les dá el nombre de *líneas varicéntricas*. Así en el triángulo, la mediana es la línea varicéntrica del sistema.

$$\frac{A\,O}{O\,G} = \frac{3}{1}.$$

Procediéndo analogamente con la cara ABC y el vértice opuesto D veríamos que la recta que une este con el centroide de aquella pasa también por O, y tendríamos la relación

$$\frac{DO}{O\,L} = \frac{3}{1}.$$

Finalmente veríamos que las rectas que unen los vértices B y C con los centroides de las caras opuestas pasan también por O y se hallan, como las AG y DL divididas por ese punto en la razón de 3 : 1.

Lo que demuestra la segunda parte del teorema.

Aplicando á los principios del método de que tratamos las nociones de la Geometría elemental ayudada del Algebra ordinaria, es posible hallar con facilidad y sencillez algunas proposiciones importantes, de uso corriente en Estática. Daremos en seguida algunas relativas al triángulo.

Sea ABC (fig. 13) un triángulo, designemos como de costumbre por a, b, c los lados opuestos á los ángulos A, B, C, y sean m_1, m_2, m_3 las longitudes de las medianas correspondientes á los lados BC, CA y AB.

Imaginemos que en los vértices A, B, C actúen cuerpos pesados, y designemos con P_a el peso del cuerpo en A. P_b el en B y P_c el en C, y supongamos que $P_a = P_b = P_c$. Puesto esto, el centroide de (P_a, P_c) es G, el de (P_a, P_b) es D y el de (P_b, P_c) es F. Se pregunta ¿cuáles son las relaciones que ligan á las distancias de estos centroides G, F, D con el centroide K del sistema?

De la figura se tiene

$$2\,AF^2+2\,BF^2=AB^2+AC^2$$

ó

$$2\,m_1^2+\tfrac{1}{2}\,a^2=c^2+b^2$$

es decir

$$4m_1^2=-a^2+2\,b^2+2\,c^2. \qquad (1)$$

Análogamente

$$4\,m_2^2=-b^2+2\,c^2+2\,a^2 \qquad (2)$$

$$4\,m_3^2=-c^2+2\,a^2+2\,b^2 \qquad (3)$$

Sumando estas ecuaciones se tiene:

$$4\,(m_1^2+m_2^2+m_3^2)=3\,(a^2+b^2+c^2) \qquad (4)$$

Multiplicando las (1) y (2) resulta:

$$16\,m_1^2\,m_2^2=-2\,a^4+5\,a^2\,b^2+2\,a^2\,c^2-2\,b^4+2\,b^2\,c^2+4c^4, \quad (5)$$

y analogamente

$$16\,m_2^2\,m_3^2=-2b^4+5b^2\,c^2+2b^2\,a^2-2c^4+2c^2\,a^2+4a^4 \quad (6)$$

$$16\,m_3^2\,m_1^2=-2c^4+5c^2a^2+2c^2b^2-2a^4+2a^2b^2+4b^4 \quad (7)$$

Sumando las (5), (6) y (7) se tiene

$$16(m_1^2m_2^2+m_2^2m_3^2+m_3^2m_1^2)=9\,(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2). \quad (8)$$

Ahora si del cuadrado de la (4) restamos el duplo de la (8), tendremos

$$16\,(m_1^4+m_2^4+m_3^4)=9\,(a^4+b^4+c^4) \qquad (9)$$

Puesto esto, si designamos las distancias AK, BK y CK respectivamente por d_1, d_2, d_3, se tendrá

$$m_1 = \frac{3}{2} d_1 , \quad m_2 = \frac{3}{2} d_2 , \quad m_3 = \frac{3}{2} d_3 ,$$

y entonces las relaciones (4), (8) y (9) se convierten en éstas:

$$3 (d^2_1 + d^2_2 + d^2_3) = a^2 + b^2 + c^2 \tag{10}$$

$$9 (d^2_1 d^2_2 + d^2_2 d^2_3 + d^2_3 d^2_1) = a^2 b^2 + b^2 c^2 + c^2 a^2 \tag{11}$$

$$9 (d^4_1 + d^4_2 + d^4_3) = a^4 + b^4 + c^4 . \tag{12}$$

La ecuación (10) dice: que *tres veces el triple de la suma de los cuadrados de las distancias del centroide del sistema al centroide de cada cuerpo es igual á la suma de los cuadrados de las distancias mutuas de los centroides de los cuerpos.*

La (12) dice que: *nueve veces la suma de las cuartas potencias de las distancias del centroide del sistema al centroide de cada cuerpo es igual á la suma de las cuartas potencias de las distancias mutuas de los centroides de los cuerpos.*

Estas deducciones y algunas otras que no mencionamos por su carácter puramente analítico, han sido tratadas por el profesor Perkins en su *Treatise of Geometry,* obra rara ahora y de mérito superior.

Podemos finalmente establecer los siguientes resultados, obtenidos por el profesor Davis:

1°. El centroíde de un triángulo dado, es el centroide de tres masas iguales situadas en los puntos angulares.

2°. El centro del círculo inscripto en el triángulo es el centroide de tres masas $\operatorname{sen} A$, $\operatorname{sen} B$, $\operatorname{sen} C$, situadas en los vértices.

3°. El centro del círculo exinscripto (opuesto á A) es el centroide de tres masas $-\operatorname{sen} A$, $\operatorname{sen} B$, $\operatorname{sen} C$, situadas en los puntos mencionados.

4°. El centro del círculo circunscripto, es el centroide de tres masas $\operatorname{sen} 2A$, $\operatorname{sen} 2B$, $\operatorname{sen} 2C$ situadas en los vértices.

5°. El ortocentro del triángulo, es el centroide de tres masas $\operatorname{tang} A$, $\operatorname{tang} B$, $\operatorname{tang} C$, situadas también en los vértices.

6°. El centro de la circunferencia de los nueve puntos (círculo de FEURBACH) es el centroide de tres masas $\operatorname{sen} 2B + \operatorname{sen} 2C$, etc.

7°. Y por último el punto simediano del triángulo considerado es el centroide de las masas $\operatorname{sen}^2 A$, $\operatorname{sen}^2 B$, $\operatorname{sen}^2 C$ situadas como las anteriores.

Fácilmente se comprende lo que precede, teniendo en cuenta que las coordenadas trilineales de estos puntos* son:

1°.	$\operatorname{cosec} A$,	$\operatorname{cosec} B$,	$\operatorname{cosec} C$.
2°.	1,	1,	1.
3°.	-1,	1,	1.
4°.	$\cos A$,	$\cos B$,	$\cos C$.

* Las propiedades de estos puntos notables del triángulo, se hallan expuestas analíticamente y de una manera clara en la obra del profesor CASEY titulada *A Treatise of Analytical Geometry*, traducida al castellano por el doctor VALENTÍN BALBÍN.

5°.	$\sec A$,	$\sec B$,	$\sec C$.
6°.	$\cos(B-C)$	etc.,	etc.
7°.	$\operatorname{sen} A$,	$\operatorname{sen} B$,	$\operatorname{sen} C$.

En lo que dejamos expuesto hemos considerado que todas las fuerzas sean paralelas á una dirección dada, por ejemplo, á la de los pesos que es la de la gravedad; pero también puede aplicarse este método en el supuesto que las direcciones de las fuerzas sean concurrentes, es decir, se corten en puntos propios del plano y no en el punto impropio del infinito, que es el que corresponde al orden de ideas que nos ha guiado hasta aquí. Bajo este nuevo aspecto, el profesor GENESE ha considerado la noción de la fuerza en la Geometría, dando á conocer algunas aplicaciones interesantes de la Geometría del triángulo.

Servirá para ejemplo de la facilidad que presenta este método, la demostración de los teoremas siguientes:

TEOREMA 13.—*Las diagonales de un rectángulo se cortan en partes iguales.*

Sea el rectángulo $ABCD$ (fig. 14) y supongamos aplicadas en sus vértices, en la dirección de los lados y en el sentido que indican las flechas, cuatro fuerzas iguales

Ahora, transportemos la fuerza que actúa en B hasta A y compongámosla con la otra que actúa en ese punto, tenemos la resultante $Aa=R$. Hagamos otro tanto en el vértice C y tendremos otra resultante igual y paralela á la anterior $Cc=R$. Estas dos resultantes parciales compuestas á su vez, dan la total $2R$ aplicada en O medio de AC.

Si en vez de proceder como lo hemos hecho, hubiéramos transportado la fuerza que actúa en A hasta D tendríamos en ese punto una resultante $Dd=R$. Tendríamos también $Bb=R$ en B, y por consiguiente nuevamente la $2R$ en O medio de BD.

Queda pues demostrado el teorema.

TEOREMA 14.—*Las perpendiculares bajadas de los vértices de un tetraedro á las caras opuestas, se cortan en un punto.*

Sea $ABCD$ (fig. 15) un tetraedro y O el centro de la esfera circunscripta. Supongamos en O cuatro fuerzas iguales que representaremos por $OA=OB=OC=OD$ respectivamente y dirigidas según esas rectas, y supongamos que su resultante sea OM.

Si componemos las OB, OC y OD obtendremos una resultante que, según se ve fácilmente, es perpendicular á la cara BCD; sea OH esa resultante. Ahora bien, si componemos esta resultante parcial con la fuerza OA que ha quedado en O, debemos obtener la resultante OM por la hipótesis hecha respecto á esta fuerza, y por consiguiente la AM debe ser igual y paralela á *OH*, y como esta es perpendicular á la cara *BCD*, aquella también lo será.

Si hubieramos compuesto primeramente las fuerzas *OA*, *OC* y *OD*, habríamos visto que *BM* es perpendicular á la cara *ACD*. Análogamente veríamos que *CM* y *DM* son respectivamente perpendiculares á las caras *ABD* y *ABC*.

Queda pues demostrado el teorema.

Con la misma facilidad podrían demostrarse los siguientes teoremas que lo han sido por el profesor GENESE:

1°. *Las perpendiculares bajadas de los vértices de un triángulo á los lados opuestos se cortan en un punto.*

2°. *Las bisectrices de los ángulos de un triángulo se cortan en un punto.*

3°. *Los pares de bisectrices de los ángulos opuestos de un cuadrilátero completo, se cortan en tres puntos que son colineales.*

Y así otros muchos de igual interés.

SEÑORES:

Hemos terminado nuestro trabajo. Con lo expuesto en él se puede apreciar la sencillez y generalidad del método que hemos adoptado. Son sobre todo, notorias sus ventajas como método didáctico, pues la noción de la composición de fuerzas se adquiere en los primeros años de estudio, y en el día es opinión generalizada entre los profesores europeos que á la enseñanza de la Física deben preceder algunas nociones de Mecánica.

En las demostraciones usadas en la Geometría suele haber en general algunas muy difíciles de recordar: con la introducción de las fuerzas desaparece casi siempre esa dificultad, pues recordando la manera como se han de disponer las masas, se llega inmediatamente al resultado buscado con la simple composición de las mismas.

Creemos que podría dictarse en gran parte, un curso de Geometría elemental empleando de preferencia este método, que permitiría al estudiante seguirlo con relativa facilidad y comprenderlo sin tantas dificultades como se le presentarían sin este auxilio.

Pero no es sólo para la demostración de teoremas de Geometría elemental para lo que sirve este método, hemos visto como se trata el cuadrilátero completo. No es pues, aventurado decir que quizás sea posible con una noción tan elemental como esta, elevarse gradual y metódicamente, desde los principios elementales de Geometría hasta los más elevados de Geometría superior.

Buenos Aires, Mayo de 1889.

CARLOS M^{a}. MORALES.

Pase á la Comisión examinadora compuesta de los señores académicos Ingenieros White, Huergo y Doctor Balbín y del catedrático Doctor Ramos Mejía para que se sirva informar sobre la admisibilidad de esta tesis, nombrándose Secretario *ad-hoc* al señor académico Ingeniero Bahía de quien solicitará la Secretaría se sirva aceptar este cargo.

Mayo 15 de 1889.

LUIS SILVEYRA
Felix Amorétti
Secretario

A veinte de Mayo de mil ochocientos ochenta y nueve reunida en mayoría la Comisión examinadora para tomar en consideración la tesis para el doctorado en ciencias físico-matemáticas presentada por el Ingeniero Carlos M. Morales titulada *La fuerza en la Geometría,* resolvió informar á la Facultad que dicha tesis puede imprimirse porque llena las condiciones reglamentarias y señalar como preguntas accesorias los numeros impares de las presentadas á la Facultad en 6 de Mayo corriente por el profesor de Matemáticas superiores.

Valentín Balbín—Luis A. Huergo—Ild. P. Ramos Mejía—Manuel B. Bahía, Secretario ad-hoc.

Puede imprimirse.

SILVEYRA
Manuel B. Bahía.

PROPOSICIONES ACCESORIAS

1°. Si α, β, γ representan las distancias de los vértices de un triángulo al centro de la circunferencia inscripta, y a, b, c los lados respectivamente opuestos se tiene

$$\alpha^2 a + \beta^2 b + \gamma^2 c = abc.$$

2°. Hallar un segmento que esté con otro dado en la relación de $1 : \sqrt{5}$.

3°. Si sobre los lados AB, AC de un triángulo dado ABC se toman los puntos M y N y sobre la recta MN un punto P tal que $\frac{MB}{AM} = \frac{AN}{NC} = \frac{MP}{PN}$, el triángulo PBC es duplo del AMN.

4°. La inversa de una parábola con respecto al foco es una cardioide.

5°. Un hilo elástico y uniforme en su estado natural está suspendido por uno de sus extremos que suponemos fijo y tiene en el otro extremo un peso dado; ¿cuál es la extensión del hilo teniendo en cuenta su propio peso?

6°. Un hilo elástico y uniforme en su estado natural se halla colocado al rededor de una superficie curva cualquiera y está sometido á fuerzas dadas; ¿cuál es la extensión del hilo?

(Aprobadas por la Facultad en sesión de 6 de Mayo de 1889).

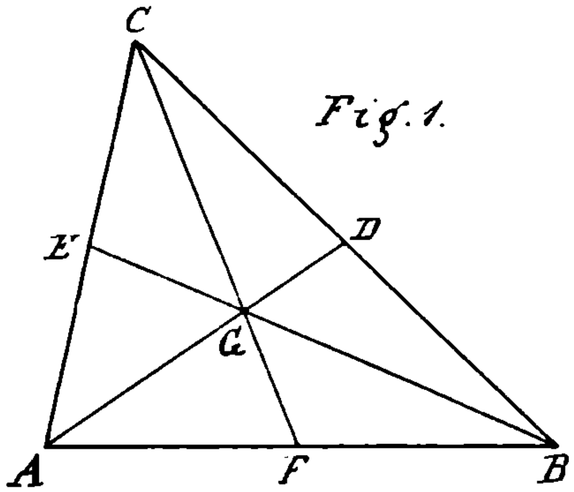

Fig. 1.

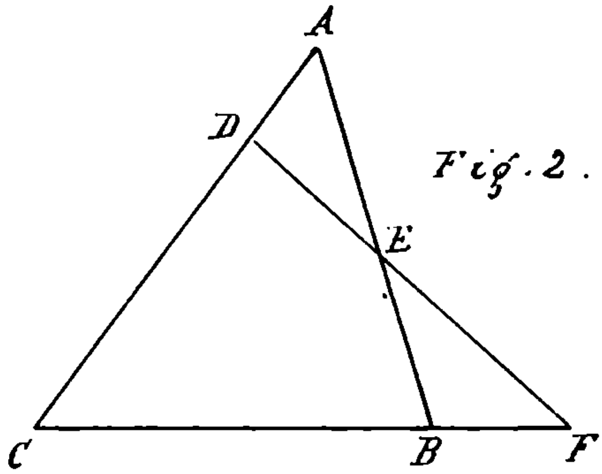

Fig. 2.

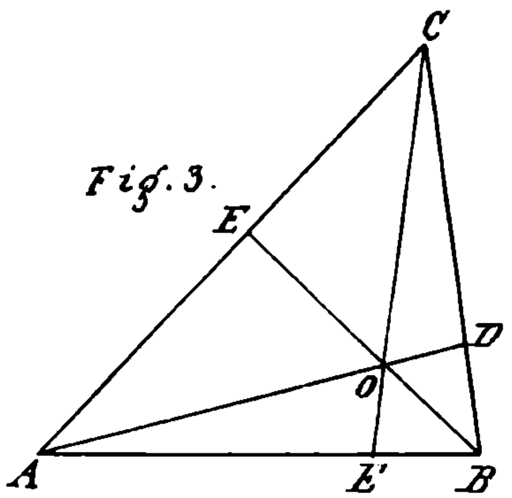

Fig. 3.

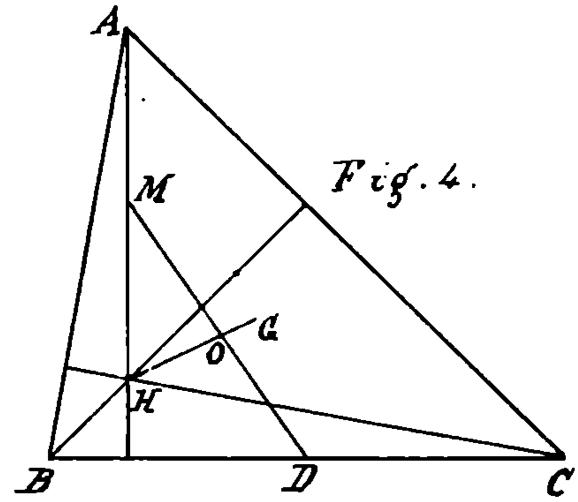

Fig. 4.

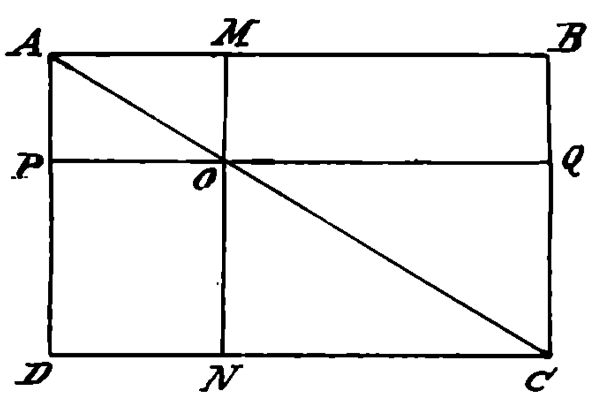

Fig. 5.

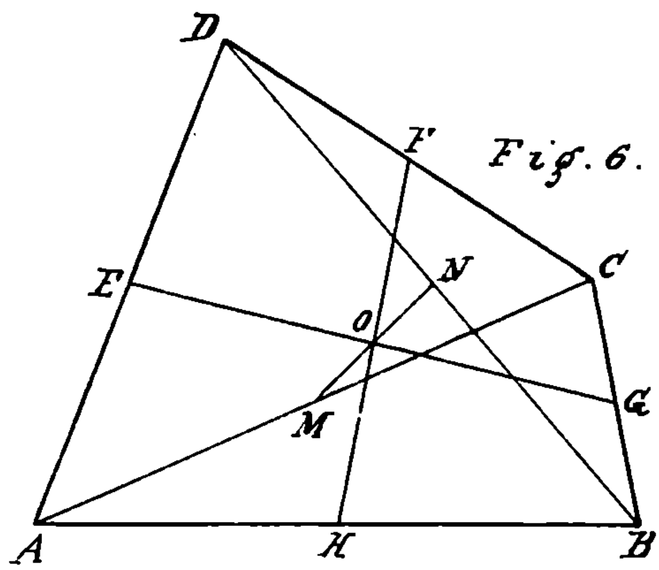

Fig. 6.

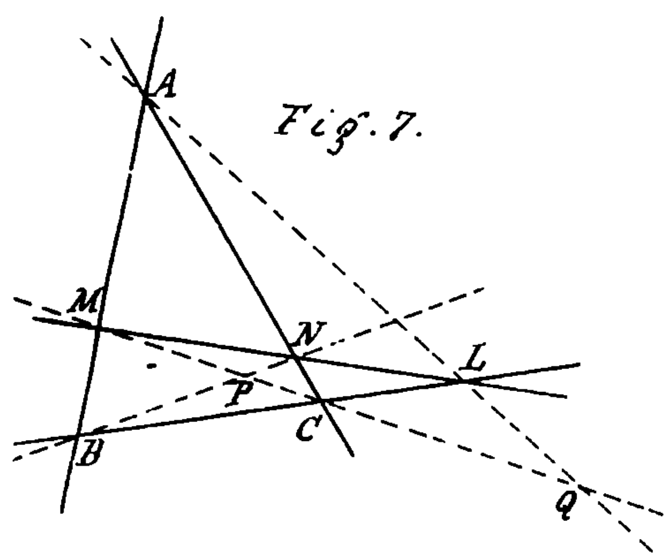

Fig. 7.

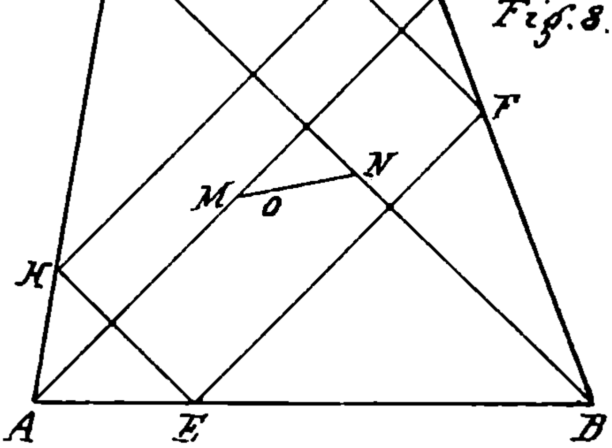

Fig. 8.

Fig. 9.

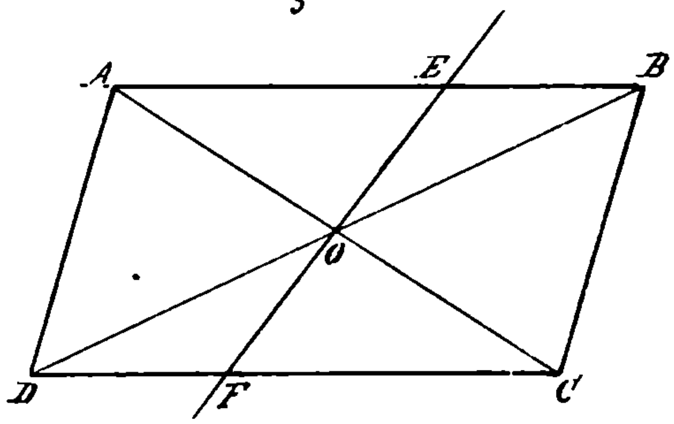

Fig. 10.

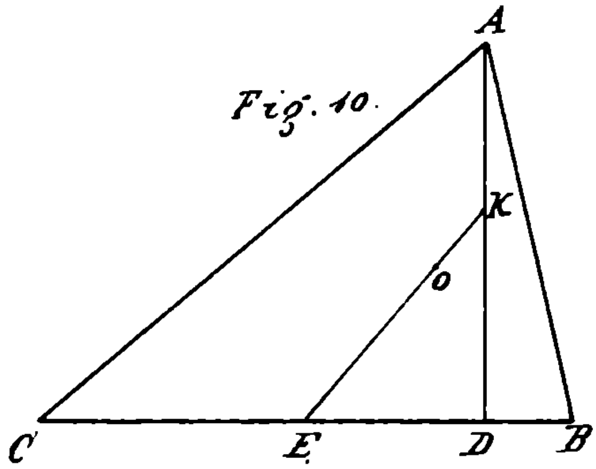

Fig. 11.

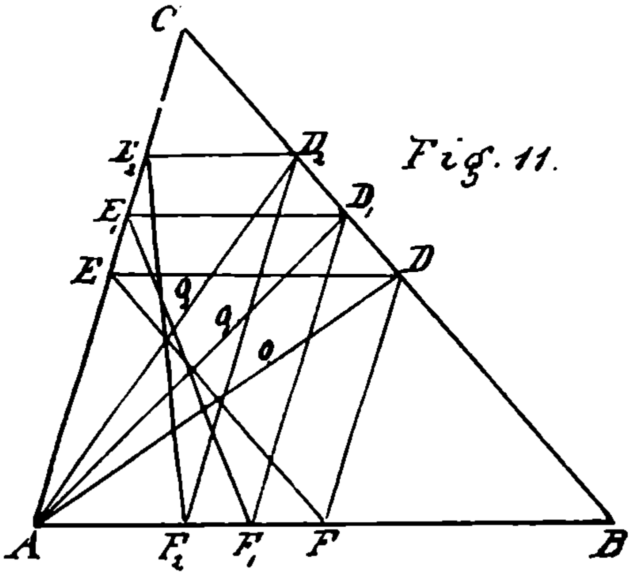

Fig. 12.

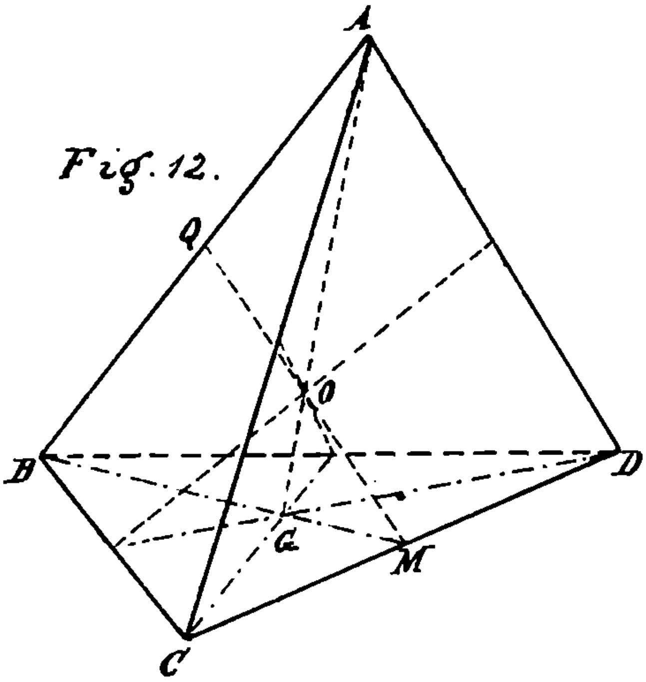

Fig. 13.

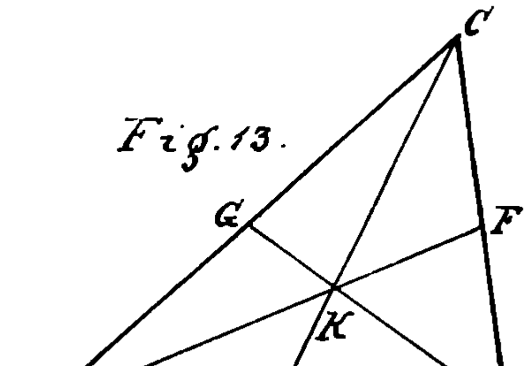

Fig. 14.

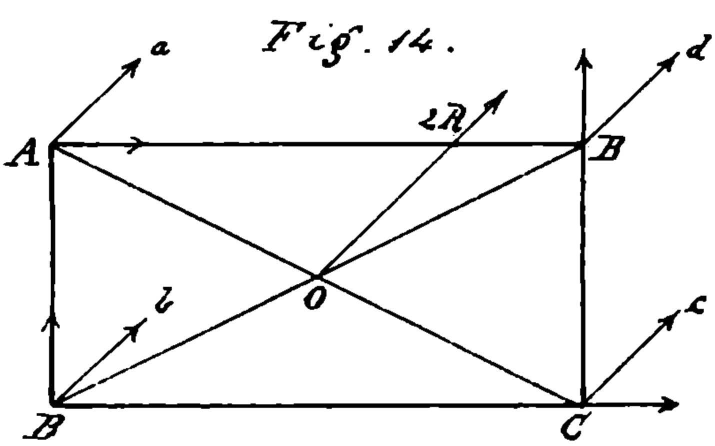

Fig. 15.