



Departamento de Matemática  
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales  
Universidad de Buenos Aires

Tesis de Licenciatura

# Teoría de Morse Discreta

Nicolás Martín Sirolli

Director: Gabriel Minian

Mayo de 2007

# Agradecimientos

Antes que a nadie y más que a nadie, a mi familia.

A Gabriel Minian, por invertir tiempo y esfuerzos en mí y en todo lo que hace. Por compartir conmigo su visión de la matemática, la cual aprecio mucho. Y por insistir en lo más importante e interesante: las ideas.

A Nicolás Ojeda Bär, por contagiarme su entusiasmo infinito por la matemática a lo largo de toda la carrera. Ojalá hubiera sido yo capaz de entender la mitad de todo lo que intentó transmitirme.

A Miguel Ottina, Jonathan Barmak, Matías del Hoyo y David Kigel, por regalarme horas de su invaluable atención durante el seminario del que formamos parte. La posibilidad de compartir mi tema de estudio con ellos y de recibir sus apreciaciones enriqueció mucho este trabajo.

En cuanto a todos aquellos que no tienen que ver directamente con esta tesis, pero que hacen que me dé gusto pasar el tiempo en la facultad. Ponerlos en una lista pretendiendo así agradecerles algo tan cálido como el afecto que me brindan día a día me parece muy frío. Prefiero esperarlos con un abrazo el día en que me reciba.

# Índice general

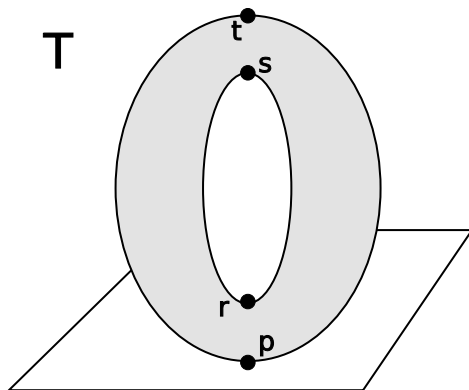
<b>Introducción</b>	<b>4</b>
<b>1. Complejos simpliciales y poliedros</b>	<b>7</b>
1.1. Nociones básicas	7
1.2. Realización geométrica	12
1.3. Subdivisiones	15
1.4. Stars y links	20
1.5. Linealidad	23
1.6. Aproximación simplicial	24
1.7. Colapsos y pegado de símlices	27
<b>2. Variedades combinatorias</b>	<b>35</b>
2.1. El borde de un complejo homogéneo	35
2.2. Variedades combinatorias	38
2.3. Pseudovariedades	44
<b>3. Teoría de Morse clásica</b>	<b>48</b>
3.1. Definiciones	48
3.2. Existencia de funciones de Morse	50
3.3. Los teoremas básicos	52
3.4. Las desigualdades de Morse	53
<b>4. Teoría de Morse discreta</b>	<b>55</b>
4.1. Introducción	55
4.2. Los teoremas básicos	57
4.3. Algunas aplicaciones	63
4.4. El vector gradiente y el flujo asociados a una función de Morse	67
4.5. Las desigualdades de Morse	78
4.6. Caracterización de los campos gradientes	80
4.7. El punto de vista de los posets	86
4.8. Invariancia por subdivisión	89
<b>Bibliografía</b>	<b>97</b>

# Introducción

Dada una variedad diferenciable  $M$ , una función diferenciable  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  es una *función de Morse* si sus puntos críticos son no degenerados. La teoría de Morse clásica estudia la topología de las variedades diferenciables a partir de las funciones de Morse que se pueden definir sobre ellas. Esta teoría ha tenido una gran cantidad de aplicaciones, entre las que destacamos el teorema del índice de Poincaré-Hopf, la clasificación de las superficies compactas, el teorema del  $h$ -cobordismo y las caracterizaciones de discos y esferas ([12], [8]).

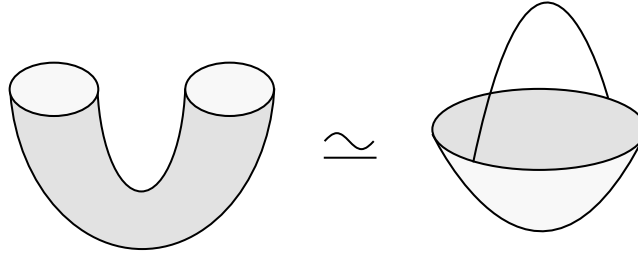
Una función de Morse permite hallar estructuras adecuadas de CW-complejo sobre la variedad y así obtener información sobre su homología y homotopía. Más precisamente, si consideramos para cada  $c \in \mathbb{R}$  los *conjuntos de nivel*  $M(c) = f^{-1}((-\infty, c])$ , los teoremas fundamentales de la teoría muestran cómo cambia el tipo homotópico de los conjuntos de nivel a medida que va creciendo el parámetro  $c$ . Concretamente, el tipo homotópico cambia sólo cuando se pasa por un valor crítico de la función.

Para clarificar esto, veamos el siguiente ejemplo que aparece en la introducción del excelente libro de Milnor [12]. Sea  $T$  un toro, colocado en forma vertical sobre un plano.

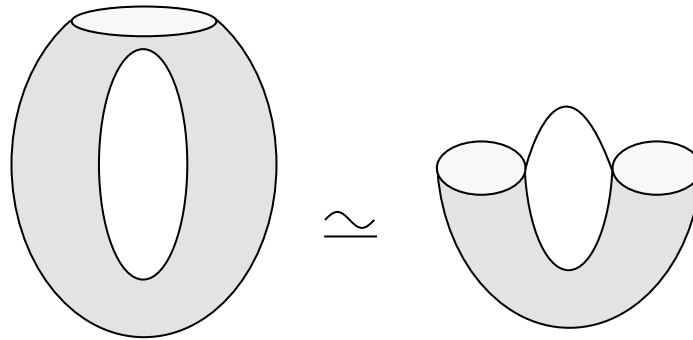


Sea  $f : T \rightarrow \mathbb{R}$  la función altura con respecto a este plano. Es claro que esta función tiene cuatro puntos críticos:  $p$  (que es un mínimo y por lo tanto tiene índice 0),  $r, s$  (que son puntos silla y por lo tanto tienen índice 1) y  $t$  (que es máximo, tiene índice 2).

Para  $c < 0$ , el conjunto de nivel  $M(c)$  es vacío. Cuando pasa el nivel de  $p$ ,  $M(c)$  se convierte en un disco (equivalente homotópico a un punto, es decir a una 0-celda). Al pasar el nivel  $r$ ,  $M(c)$  es un cilindro, equivalente homotópico a un disco con una 1-celda adjuntada.



Cuando traspasamos el nivel de  $s$ ,  $M(c)$  es el toro con un disco removido, equivalente a un cilindro con una 1-celda adjuntada, y al pasar el nivel de  $t$ ,  $M(c)$  es el toro (es decir el conjunto de nivel anterior con el disco (2-celda) adjuntado).



Es decir, para armar el toro, se necesitó de una 0-celda, dos 1-celdas y una 2-celda (que son los puntos críticos de la función, junto con los índices de estos puntos). Esta es la estructura clásica del toro como CW-complejo.

Hacia 1995, en [4] R. Forman lleva estas ideas al contexto discreto (o combinatorio). Desarrolla una teoría de Morse para poliedros completamente discreta, es decir, utilizando la estructura celular o simplicial de los poliedros involucrados, sin necesidad de recurrir a su topología. Una función de Morse, en el caso discreto, le asigna a cada símplex o celda un número real con ciertas restricciones. Forman no sólo prueba los análogos de los teoremas básicos de la teoría de Morse, sino que presenta los análogos discretos a los campos de vectores gradientes y al flujo asociado a la función. Tal como aclara Forman, esto no es una teoría totalmente nueva; lo que él logró fue extraer la esencia combinatoria de la teoría clásica para variedades diferenciables.

Esta teoría combinatoria toma particular importancia en el contexto de las variedades combinatorias: así como Milnor presenta en [11] el teorema del  $h$ -cobordismo de Smale utilizando teoría de Morse, esta teoría discreta tiene relación estrecha con el teorema del  $s$ -cobordismo para variedades combinatorias ([10], [17]).

En la sección 4.1 intentamos mostrar cómo surge naturalmente el concepto de función de Morse discreta, a partir de movimientos geométricos elementales de los poliedros. A grandes rasgos, la idea es la siguiente: al estudiar el tipo homotópico de un complejo simplicial, nos interesan en particular ciertos tipos de movimientos elementales (colapsos,

deformaciones y soldaduras) que se pueden hacer con sus símplices sin alterar el tipo homotópico del complejo en cuestión. Estos movimientos pueden ser indicados gráficamente con flechas sobre el complejo simplicial, que indican cómo deformar los complejos. Las funciones simplemente servirán para codificar estas flechas o movimientos elementales.

El objetivo principal de esta tesis es desarrollar la teoría de Morse discreta para complejos simpliciales. En [4] Forman desarrolla esta teoría en el contexto de los CW-complejos (regulares), que es un contexto más general pero al mismo tiempo más flexible. Aunque en ambos casos las técnicas utilizadas son prácticamente las mismas, en algunas ocasiones la mayor flexibilidad de los CW-complejos con respecto a la rigidez de los complejos simpliciales dificulta las demostraciones, mientras que en otras ocasiones la situación es exactamente la opuesta. Precisamente, en el contexto de los CW-complejos, dado que uno puede restringirse a trabajar con un tipo de subdivisiones muy sencillas, las llamadas *bisecciones*, la demostración del teorema de invariancia por subdivisión 4.8.1 es relativamente fácil. En el contexto de los complejos simpliciales, la subdivisión más básica y manejable es la *estelar*. Para probar dicho teorema en términos de subdivisiones estelares, que son menos flexibles que las bisecciones, fue necesario idear una demostración completamente nueva.

Esta tesis está organizada de la siguiente manera.

En el capítulo 1 nos ocupamos de desarrollar la teoría básica sobre complejos simpliciales y poliedros que nos hará falta en el resto de la tesis. También estudiaremos aquí las nociones de colapsos simpliciales, introducidas por J. H. C. Whitehead. En este capítulo no seguimos ningún autor en especial. Podemos citar como referencias a [5], [16], [18], pero tanto el punto de vista que aquí exponemos, como también varios de los ejemplos y demostraciones son propias.

En el capítulo 2, siguiendo a [5], estudiaremos a las variedades combinatorias. También estudiaremos las variedades estelares y las pseudovariedades [16].

En el capítulo 3, siguiendo principalmente a [12], damos un pantallazo a la teoría de Morse clásica, con el sólo objetivo de mostrar los resultados fundamentales para poder luego compararlos con los obtenidos en el contexto discreto.

Finalmente, el capítulo 4 está dedicado de lleno al estudio de la teoría de Morse discreta para complejos simpliciales, aprovechando en algunos casos la esencia puramente combinatoria de los mismos para simplificar las demostraciones con respecto a las que se encuentran en [4]. Haremos en este capítulo especial énfasis en los aspectos geométricos del gradiente y el flujo de una función de Morse. En la sección 4.7 analizaremos la teoría de Morse desde el punto de vista de los posets, siguiendo en parte el trabajo de [2], mediante la relación estrecha que existe entre poliedros y posets ([1]).

La tesis concluye con el estudio de la invariancia por subdivisión (4.8). Las demostraciones que se encuentran en esa sección son novedosas.

# Capítulo 1

## Complejos simpliciales y poliedros

Los complejos simpliciales son objetos de naturaleza combinatoria que sirven para modelar una clase bastante amplia de espacios topológicos, los llamados *poliedros*.

Informalmente hablando, un poliedro es un espacio topológico que se obtiene pegando ciertos objetos geométricos elementales llamados *símplices*. Los símplices representarán a puntos, segmentos, triángulos, tetraedros, y sus análogos en dimensiones mayores. No se pegarán de cualquier manera, sino que si dos símplices se cortan, lo harán en una cara común a ambos.

Todo poliedro queda determinado por la siguiente información: conocer sus vértices, y saber cuáles de esos vértices generan símplices. Teniendo esto en mente, para trabajar más eficientemente con los poliedros, se puede prescindir de la naturaleza geométrica de los mismos y conservar sólo la información combinatoria.

Se llega así a la noción de *complejo simplicial*. Esta es puramente abstracta, pero en todo momento pensaremos a un complejo simplicial como al objeto que codifica la información combinatoria de un objeto geométrico, más precisamente, de la *realización geométrica* del complejo simplicial en cuestión.

Por eso, todas las definiciones y ejemplos que iremos viendo a lo largo de este capítulo, aunque sean formuladas en un lenguaje combinatorio, tendrán un trasfondo totalmente geométrico.

### 1.1. Nociones básicas

Daremos en principio una definición totalmente abstracta de complejo simplicial. Siempre que sea posible pensaremos en esta noción más elegante de complejo simplicial, pero cuando hablemos de subdivisiones será necesario trabajar con una noción más geométrica.

**Definición 1.1.1.** Un *complejo simplicial* es una familia  $M$  de subconjuntos finitos y no vacíos de un conjunto  $V_M$  que satisface

- (i) Si  $\sigma \in M$  y  $\nu \subseteq \sigma, \nu \neq \emptyset$ , entonces  $\nu \in M$ .
- (ii) Si  $v \in V_M$ , entonces  $\{v\} \in M$ .

A los elementos de  $M$ , que generalmente denotaremos con letras como  $\sigma, \tau, \nu$ , los llamaremos *símplices*. A los elementos de  $V_M$ , que generalmente denotaremos con letras como  $x, v, w$ , los llamaremos *vértices*.

Dado un símplex  $\sigma$ , su *dimensión* se define como la cantidad de vértices que lo componen menos uno, y se denotará por  $\dim \sigma$ . Si  $\dim \sigma = p$ , diremos que  $\sigma$  es un  $p$ -símplex, y cuando queramos remarcar esto denotaremos a  $\sigma$  por  $\sigma^{(p)}$ .

Por último, la *dimensión* del complejo simplicial se define por

$$\dim M = \sup\{\dim \sigma : \sigma \in M\}.$$

**Nota 1.1.2.** Los vértices de  $M$  están en correspondencia biunívoca con sus 0-símplices. A menos que sea conveniente ser precisos, abusaremos de la notación y cuando tengamos un vértice  $v$ , lo identificaremos con el 0-símplex  $\{v\}$ . Esto dará lugar a expresiones como “sea  $v \in M$  un vértice”.

**Ejemplo 1.1.3.** Para cada  $n \in \mathbb{N}_0$ ,

$$\Delta^n = \mathcal{P}(\{0, 1, \dots, n\}) \setminus \{\emptyset\}, \quad \dot{\Delta}^{n+1} = \Delta^{n+1} \setminus \{\{0, 1, \dots, n+1\}\}$$

son dos complejos simpliciales de dimensión  $n$  que llamaremos *n-bola combinatoria estándar* y *n-esfera combinatoria estándar*, respectivamente.

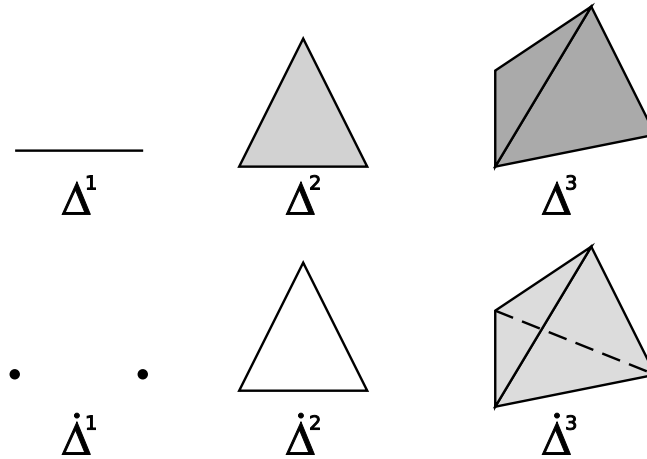


Figura 1.1: Bolas y esferas combinatorias.

**Observación 1.1.4.** Un complejo simplicial no está determinado por su conjunto de vértices. Por ejemplo si  $V = \{a, b\}$  entonces  $M = \{\{a\}, \{b\}\}$  y  $M' = \{\{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$  son dos complejos simpliciales distintos que tienen como conjunto de vértices a  $V$ .

Sin embargo, los símplexes de un complejo simplicial sí determinan a los vértices. En efecto, los vértices son exactamente los elementos que componen a los símplexes. Por lo tanto, podemos pensar a un complejo simplicial, de una manera más sintética pero tal vez más oscura, como una familia de conjuntos finitos y no vacíos cerrada por inclusiones, olvidándonos por completo de los vértices.

**Definición 1.1.5.** Sea  $M$  un complejo simplicial y sean  $\sigma, \tau \in M$  disjuntos. Si  $\sigma \cup \tau$  es un simplex de  $M$ , lo llamaremos *join* de  $\sigma$  y  $\tau$ , y lo denotaremos por  $\sigma\tau$ .

Notemos que en general el join entre dos simplexes puede no existir, ya estos pueden ser no ser disjuntos o pueden serlo y su unión no ser un simplex.

Dado un vértice  $v \in M$  y un simplex  $\tau \in M$ , simplificaremos la notación denotando  $\{v\}\tau = v\tau$ .

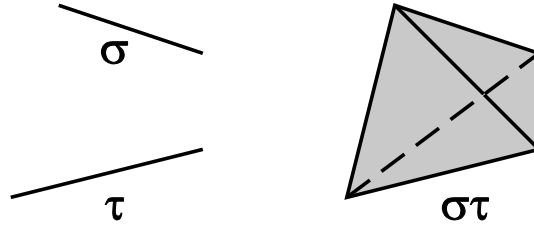


Figura 1.2: El join de dos simplexes.

**Nota 1.1.6.** A pesar de que en algunas secciones no será necesario, siempre supondremos que los complejos simpliciales con los que trabajamos son *finitos* es decir, que tienen finitos simplexes, o equivalentemente, que tienen finitos vértices. Estos tendrán en particular dimensión finita.

### Subcomplejos

Dados complejos simpliciales  $M$  y  $N$ , diremos que  $N$  es un *subcomplejo* de  $M$  si  $N \subseteq M$ .

Notemos que esto fuerza a que  $V_N \subseteq V_M$ . Hablando claro,  $N$  será un subcomplejo de  $M$  si sus vértices (respectivamente, sus simplexes) son algunos de los vértices (respectivamente, sus simplexes) de  $M$ .

Diremos que un subcomplejo  $N \subseteq M$  es *pleno* si todo simplex de  $M$  formado por vértices de  $N$  es un simplex de  $N$ .

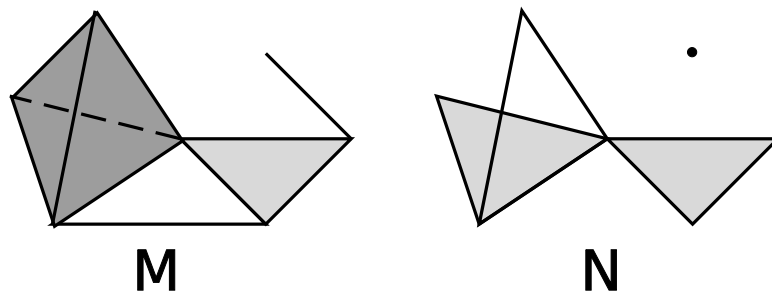


Figura 1.3:  $N$  es un subcomplejo de  $M$ .

**Definición 1.1.7.** Un complejo simplicial es *conexo* si no es unión disjunta de dos subcomplejos propios.

**Ejemplo 1.1.8.** Dado un complejo simplicial  $M$  y un conjunto  $A \subseteq V_M$  de vértices de  $M$ , entonces el conjunto de aquellos símplexes de  $M$  cuyos vértices sean elementos de  $A$  forman un subcomplejo pleno de  $M$ , llamado *subcomplejo pleno generado por  $A$* .

**Ejemplo 1.1.9.** Dado un complejo simplicial  $M$ , para todo  $p \geq 0$  el  $p$ -*esqueleto* de  $M$ , que es por definición el conjunto

$$M_p = \{\sigma \in M : \dim \sigma \leq p\}$$

es un subcomplejo de  $M$ , de dimensión a lo sumo  $p$ .

**Ejemplo 1.1.10.** Dado un complejo simplicial  $M$  y  $\sigma \in M$ , el *complemento* de  $\sigma$ , que es por definición el conjunto

$$\sigma^c = M \setminus \{\tau \in M : \tau \supseteq \sigma\}$$

es un subcomplejo de  $M$ .

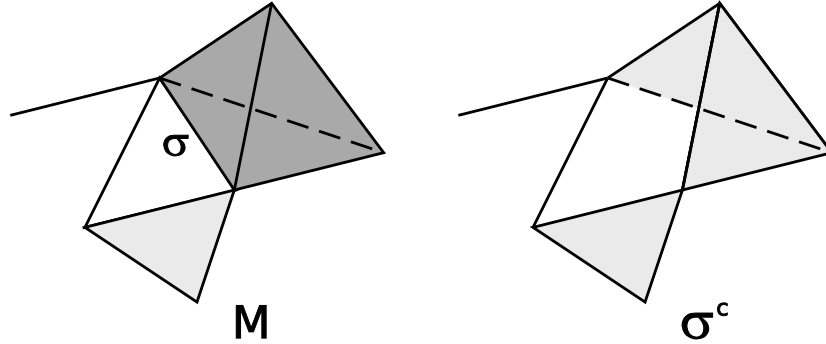


Figura 1.4: El complemento de  $\sigma$ .

**Ejemplo 1.1.11.** Sean  $N$  y  $L$  subcomplejos de  $M$ . Entonces la unión de estos subcomplejos, que denotaremos con  $N + L$ , es un subcomplejo de  $M$ .

**Definición 1.1.12.** Sean  $\sigma, \tau$  dos símplexes de  $M$ . Diremos que  $\sigma$  es *cara* de  $\tau$ , y lo denotaremos por  $\sigma < \tau$ , si  $\sigma \subseteq \tau$ . Si además  $\sigma \subsetneq \tau$ , diremos que  $\sigma$  es una *cara propia* de  $\tau$  y lo denotaremos por  $\sigma \lesssim \tau$ . Y si además  $\dim \sigma = \dim \tau - 1$ , diremos que  $\sigma$  es *cara inmediata* de  $\tau$ , y lo denotaremos por  $\sigma \prec \tau$ .

**Observación 1.1.13.** Sea  $M$  un complejo simplicial. Dado un conjunto  $N \subseteq M$ , siempre habrá un mínimo complejo simplicial que lo contiene. Este, que llamaremos *subcomplejo generado por  $N$* , viene dado por

$$\langle N \rangle = \bigcup_{\sigma \in N} \bigcup_{\nu \prec \sigma} \{\nu\}.$$

**Definición 1.1.14.** Sea  $\sigma \in M$ . Denotaremos por  $\dot{\sigma}$  al subcomplejo de  $M$  generado por las caras propias de  $\sigma$ , y lo llamaremos *borde* de  $\sigma$ . Denotaremos por  $\bar{\sigma}$  al subcomplejo de  $M$  generado por  $\sigma$  (el cual consiste en el símplex  $\sigma$ , más todas sus caras), y lo llamaremos *símplex cerrado* de  $\sigma$ . Notemos que este es precisamente el subcomplejo pleno de  $M$  generado por los vértices de  $\sigma$ .

**Definición 1.1.15.** Sean  $N$  y  $L$  subcomplejos de  $M$  tales que el join  $\sigma\tau$  existe para todo par de símplices  $\sigma \in N, \tau \in L$ . Llamaremos *join* de  $N$  y  $L$  al subcomplejo de  $M$  formado por tales joins más los símplices de  $N$  y los de  $L$ , y lo denotaremos por  $NL$ .

Nuevamente, el join de dos subcomplejos de  $M$  no tiene porqué existir.

Si  $N = \{\{v\}\}$  con  $v$  vértice de  $M$ , al join  $NL$  lo denotaremos por  $vL$  y lo llamaremos *cono* con base  $L$  y vértice  $v$ .

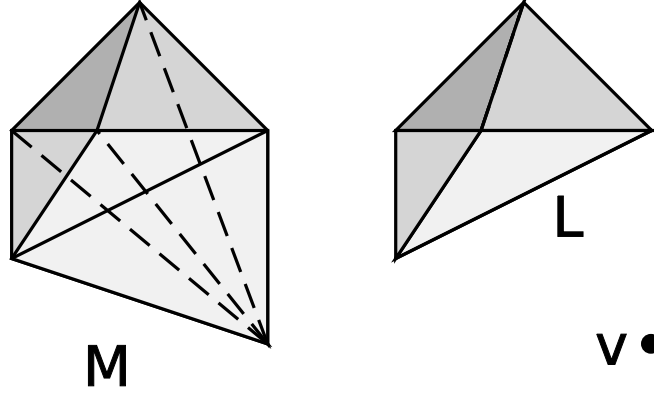


Figura 1.5:  $M$  es el cono con base  $L$  y vértice  $v$ .

**Ejemplo 1.1.16.** Sea  $n \in \mathbb{N}_0$ . Para cada  $0 \leq p \leq n$ , abusando de la notación identifiquemos  $\Delta^{n-p-1} = \mathcal{P}(\{p+1, p+2, \dots, n\})$  (de hecho, como complejos simpliciales, serán lo mismo). Entonces,  $\Delta^n = \Delta^p \Delta^{n-p-1}$ .

**Observación 1.1.17.** Dados dos complejos simpliciales  $M$  y  $N$ , hay una manera de considerar su join aún cuando estos no sean subcomplejos de un complejo más grande. Precisamente, se construye un complejo simplicial  $K$  poniendo  $V_K = V_M \amalg V_N$  y poniendo como símplices a todos los de  $M$ , todos los de  $N$ , y las uniones entre estos. De esta manera, podemos pensar a  $M$  y a  $N$  como subcomplejos de  $K$  y se tiene que  $K = MN$ . Llamamos a  $K$  *join externo* entre  $M$  y  $N$ .

## Morfismos

Un *morfismo (simplicial)* entre complejos simpliciales  $M$  y  $N$  es simplemente una función  $f : M \rightarrow N$  inducida por una función  $f_0 : V_M \rightarrow V_N$  entre los conjuntos de vértices; es decir, tal que si  $\sigma = \{x_0, x_1, \dots, x_p\}$ , entonces  $f(\sigma) = \{f_0(x_0), f_0(x_1), \dots, f_0(x_p)\}$ . Por lo general, abusando de la notación, identificaremos a  $f$  con  $f_0$ .

Si dos complejos simpliciales  $M$  y  $N$  son isomorfos (i.e., si existen morfismos  $f : M \rightarrow N$  y  $g : N \rightarrow M$  tales que  $f \circ g = 1_N$  y  $g \circ f = 1_M$ ), lo denotaremos por  $M \simeq N$ .

**Observación 1.1.18.** Es claro que si un morfismo  $f : M \rightarrow N$  es un isomorfismo, entonces como función entre símplices es biyectiva; y recíprocamente, si un morfismo  $f : M \rightarrow N$  determina una biyección entre símplices, la función subyacente  $f_0 : V_M \rightarrow V_N$  sera biyectiva y su inversa determinara un morfismo  $N \rightarrow M$  que sera inverso de  $f$ .

**Ejemplo 1.1.19.** Dado un  $n$ -símplex  $\sigma$ , se tiene que  $\bar{\sigma} \simeq \Delta^n$  y  $\dot{\sigma} \simeq \Delta^n$ .

## 1.2. Realización geométrica

La noción abstracta de complejo simplicial con la que venimos trabajando surge en verdad al quedarse con la información esencial que se necesita para describir un complejo simplicial “geométrico”, ya estos quedan totalmente determinados una vez que se conoce cuáles son sus vértices y cuáles de sus vértices forman símlices.

Yendo en el sentido opuesto, construiremos la *realización geométrica* de un complejo simplicial  $M$ . Esto es, un complejo simplicial “geométrico”  $|M|$  cuyo esquema de vértices será  $M$ . La idea es primero realizar geoméricamente a los símlices, y luego al complejo simplicial entero como colímite (“unión topológica”) de sus símlices.

Para esto, consideramos las combinaciones convexas formales de aquellos vértices de  $M$  que formen símlices. Más precisamente, definimos  $|M|$  como el conjunto de aquellas funciones  $\alpha : V_M \rightarrow I$  (donde  $I$  denotará al intervalo real  $[0, 1]$ ) tales que

(i)  $\{v \in M : \alpha(v) \neq 0\}$  es un símplex de  $M$ .

(ii)  $\sum_{v \in M} \alpha(v) = 1$ .

Todo vértice de  $M$  se identifica naturalmente con un punto de  $|M|$ . Concretamente, dado  $v \in M$ , lo identificaremos con la función  $\alpha_v : M \rightarrow I$  dada por

$$\alpha_v(w) = \begin{cases} 1, & w = v \\ 0, & w \neq v. \end{cases}$$

Tenemos así una inyección  $V_M \rightarrow |M|, v \mapsto \alpha_v$ . Salvo en algunos casos, no distinguiremos a un vértice  $v \in M$  del correspondiente punto  $\alpha_v \in |M|$ , lo cual hará la exposición mucho más clara.

De esta manera, los puntos de  $|M|$  son precisamente las combinaciones convexas de los vértices de  $M$ , pues dado  $\alpha \in |M|$ , se tiene

$$\alpha = \sum_{v \in M} \alpha(v)v.$$

Dado un símplex  $\sigma \in M$ , definimos el *interior* de  $\sigma$  como el subconjunto  $\sigma^\circ \subseteq |M|$  formado por aquellas  $\alpha \in |M|$  tales que  $\alpha(v) \neq 0 \Leftrightarrow v \in \sigma$ . Notemos que para todo  $\alpha \in |M|$  existirá un único  $\sigma \in M$  tal que  $\alpha \in \sigma^\circ$ . Este viene dado justamente por  $\sigma = \{v \in M : \alpha(v) \neq 0\}$ , y lo llamaremos *soporte* de  $\alpha$ .

Sea  $\sigma \in M$ . Consideremos el subconjunto de  $|M|$  dado por

$$|\sigma| = \{\alpha \in |M| : \alpha(v) \neq 0 \Rightarrow v \in \sigma\}.$$

Notemos que

$$|\sigma| = \bigcup_{\nu < \sigma} \nu^\circ.$$

Por lo tanto, como todo punto de  $|M|$  está en el interior de un único símplex, obtenemos que para  $\sigma, \nu \in M$  se tiene

$$|\sigma| \cap \nu^\circ \neq \emptyset \iff \sigma > \nu \iff |\sigma| \supseteq \nu^\circ.$$

En particular dados  $\nu \in M$  y  $a \in \nu^\circ$ , para todo  $\sigma \in M$  resulta que  $a \in |\sigma| \Leftrightarrow \sigma > \nu$ .

**Nota 1.2.1.** Pese a las muchas identificaciones que haremos en este capítulo, siempre distinguiremos a un simplex  $\sigma \in M$  del conjunto  $|\sigma| \subseteq |M|$ .

Dado  $\sigma \in M$ , hacemos de  $|\sigma|$  un espacio métrico considerando en él la distancia

$$\rho(\alpha, \beta) = \sqrt{\sum_{v \in M} (\alpha(v) - \beta(v))^2}.$$

Viendo la fórmula, notamos que define una métrica en todo  $|M|$ ; pero esa no es la topología que queremos darle.

Definimos la *realización geométrica* de  $M$  como el conjunto  $|M|$  con la topología final con respecto a las inclusiones  $|\sigma| \hookrightarrow |M|$ . Es decir,  $U \subseteq |M|$  es abierto si y sólo si  $U \cap |\sigma|$  es abierto en  $|\sigma|$  para todo  $\sigma \in M$ . Notemos que en general  $\sigma^\circ$  no tiene porqué ser abierto en  $|M|$ , aunque sí lo será en  $|\sigma|$ . Luego se tiene que si  $\sigma$  es maximal (es decir, si no es cara de otro simplex), dado que  $\sigma^\circ \cap |\tau| = \emptyset$  para todo simplex  $\tau \neq \sigma$ , entonces  $\sigma^\circ$  sí es abierto en  $|M|$ .

**Ejemplo 1.2.2.** Para cada  $n \in \mathbb{N}_0$ ,  $|\Delta^n|$  es el  $n$ -simplex topológico, y  $|\dot{\Delta}^n|$  es el borde del  $n$ -simplex topológico. Más precisamente,

$$\begin{aligned} |\Delta^n| &= \{(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} : x_i \geq 0, \sum_{i=1}^n x_i = 1\}, \\ |\dot{\Delta}^n| &= |\Delta^n| \setminus \{(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} : x_i > 0, \sum_{i=1}^n x_i = 1\}. \end{aligned}$$

(donde, cuando se trate de espacios topológicos, “=” denotará a “es homeomorfo a”).

Tomemos ahora un morfismo  $f : M \rightarrow N$  entre conjuntos simpliciales. Este inducirá una función  $|f| : |M| \rightarrow |N|$  dada por

$$|f|(\alpha)(w) = \sum_{f(v)=w} \alpha(v).$$

Esta se llama *realización geométrica* de  $f$ . Apuntamos ahora a ver que es continua.

Dada la topología que consideramos en  $|M|$ , basta ver que para todo  $\sigma \in M$ ,  $|f| : |\sigma| \rightarrow |N|$  es continua. Sea  $\tau = f(\sigma)$ . Supongamos que  $\alpha \in |\sigma|$ . Si  $|f|(\alpha)(w) \neq 0$ , entonces existe un  $v \in M$  tal que  $\alpha(v) \neq 0$  y  $f(v) = w$ . Luego  $v \in \sigma$ , por lo que  $w \in \tau$ . Esto prueba que  $|f|(\alpha) \in |\tau|$ . Podemos entonces considerar  $|f| : |\sigma| \rightarrow |\tau|$ . Basta probar que esta es continua. En efecto,

$$\begin{aligned} \rho(|f|(\alpha), |f|(\beta)) &= \sqrt{\sum_{w \in N} (|f|(\alpha)(w) - |f|(\beta)(w))^2} \\ &= \sqrt{\sum_{w \in N} \left( \sum_{f(v)=w} \alpha(v) - \beta(v) \right)^2} \\ &\leq \sqrt{\sum_{v \in M} (\alpha(v) - \beta(v))^2} = \rho(\alpha, \beta). \end{aligned}$$

Viendo esta cuenta, notamos que si  $f : \sigma \rightarrow \tau$  es biyectiva, entonces  $|f| : |\sigma| \rightarrow |\tau|$  es una isometría.

**Observación 1.2.3.** Categóricamente hablando, tenemos definida la categoría **Simp** de complejos simpliciales y morfismos simpliciales, cuyos isomorfismos hemos caracterizado en la observación 1.1.18. Si denotamos por **Top** a la categoría de espacios topológicos, lo que acabamos de construir es un functor  $|\cdot| : \mathbf{Simp} \rightarrow \mathbf{Top}$  que a cada complejo simplicial le asigna su realización geométrica, y a cada morfismo entre complejos simpliciales le asigna su realización geométrica.

**Observación 1.2.4.** Sea  $f : M \rightarrow N$  un morfismo entre complejos simpliciales, y sea  $|f|$  su realización geométrica.

- Se verifica que si  $v \in M$  es un vértice, entonces  $|f|(v) = f(v)$  (o, más rigurosamente,  $|f|(\alpha_v) = \alpha_{f(v)}$ ). En particular, si  $|f|$  es inyectiva, entonces  $f : V_M \rightarrow V_N$  también lo es, y por lo tanto lo es  $f$  como función entre símplices.
- Supongamos que  $|f|$  es sobreyectiva, y veamos que entonces también lo es  $f$  como función entre símplices. En efecto, dado  $\tau$  símplice de  $N$ , sea  $b(\tau)$  el *baricentro* de  $\tau$  (ver definición 1.3.8). Sabemos que existe  $\alpha \in |M|$  tal que  $|f|(\alpha) = b(\tau)$ ; sea  $\sigma$  su soporte. Entonces para todo  $w \in \tau$  se tiene que

$$\frac{1}{\dim \tau} = b(\tau)(w) = |f|(\alpha)(w) = \sum_{f(v)=w} \alpha(v),$$

lo cual prueba existe al menos un  $v \in \sigma$  tal que  $f(v) = w$ . Así, vemos que existe  $\nu < \sigma$  tal que  $f(\nu) = \tau$ .

Podemos concluir que si  $|f|$  es biyectiva, entonces por lo visto en la observación 1.1.18  $f$  resulta un isomorfismo simplicial; en particular,  $|f|$  es un homeomorfismo que admite una inversa inducida por un morfismo simplicial.

Llegamos ahora a la definición de *poliedro*. Como mencionáramos en la introducción a este capítulo, los poliedros son los espacios topológicos que los complejos simpliciales buscan modelar. Más precisamente,

**Definición 1.2.5.** Un espacio topológico  $X$  es un *poliedro* si es homeomorfo a la realización geométrica de algún complejo simplicial. En tal caso, llamaremos *triangulación* de  $X$  a todo par  $(f, M)$  con  $M$  complejo simplicial y  $f : |M| \rightarrow X$  homeomorfismo.

Notemos que un poliedro puede admitir distintas triangulaciones no isomorfas entre sí, como se puede ver en la figura la página siguiente..

Estudiaremos con más detalle las relaciones entre las distintas triangulaciones que puede admitir un poliedro en la sección 1.5.

A continuación mencionaremos dos resultados bien conocidos sobre poliedros. Sus demostraciones, que no son difíciles, pueden ser encontradas en [16].

**Proposición 1.2.6.** *Sea  $M$  un complejo simplicial (no necesariamente finito). Entonces,  $|M|$  es compacto si y sólo si  $M$  es finito.*

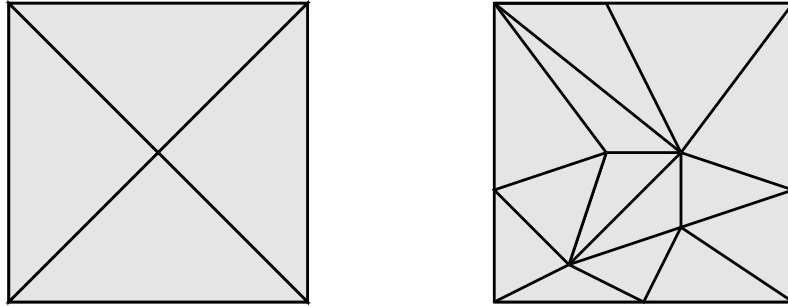


Figura 1.6: Dos triangulaciones no isomorfas del cuadrado  $I \times I$ .

**Proposición 1.2.7.** *Sea  $M$  un complejo simplicial con  $\dim M = n$ . Entonces  $|M|$  puede ser embebido en  $\mathbb{R}^{2n+1}$ .*

Venimos afirmando que los poliedros incluyen una clase bien amplia de espacios topológicos. En efecto,

**Teorema 1.2.8.** *Toda variedad diferenciable es triangulable.*

**Teorema 1.2.9.** *Toda variedad topológica de dimensión menor o igual a tres es triangulable.*

Además de la existencia de triangulaciones, la otra parte de este teorema, que aquí no incluimos, dice que estas son *esencialmente únicas*, en un sentido que determinaremos en la sección 1.5. Este teorema, de carácter relativamente elemental para dimensiones uno y dos (esto puede verse en [9]), fue demostrado por Moise para dimensión tres en 1977. En dimensión cuatro ya existen variedades topológicas que no son triangulables. En dimensiones mayores a cuatro, aún no se puede decir nada.

Entre otras aplicaciones, este teorema sirve para hacer la clasificación de curvas y superficies compactas, que puede encontrarse en [9].

### 1.3. Subdivisiones

Para estudiar combinatoriamente la topología de un poliedro  $X$ , no basta con considerar solamente la triangulación que nos viene dada. Mediante los abiertos de  $X$  nos podemos acercar a cualquiera de sus puntos tanto como queramos. Los símlices de una triangulación fija no van a servir para este propósito, siendo necesario entonces considerar además de la triangulación dada todos sus posibles “refinamientos” (un ejemplo claro de esto puede verse en el teorema 1.6.8). La idea de refinar de una triangulación es, a grandes rasgos, reemplazar cada símplex de la triangulación por una familia de símlices más pequeños, cuya unión nos dé el símplex original. Llegamos así a la noción de *subdivisión* de una triangulación.

Se puede llegar a la definición de subdivisión por dos caminos. El más geométrico de ellos, adoptado por [5], consiste en considerar a los poliedros como objetos primitivos, hablando posteriormente de sus triangulaciones. Concretamente la definición es la siguiente:

dadas dos triangulaciones  $(f, M)$  y  $(g, N)$  de un poliedro  $X$ , se dice que  $N$  es una *subdivisión* de  $M$  si todo símplex de  $N$  está contenido en un símplex de  $M$ ; más rigurosamente, si para todo  $\sigma \in N$  existe un  $\tau \in M$  tal que  $g(|\sigma|) \subseteq f(|\tau|)$ .

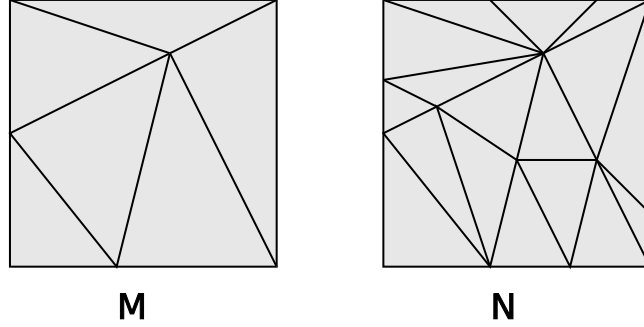


Figura 1.7:  $N$  es una subdivisión de  $M$ .

Aunque este camino es más claro, adoptaremos el seguido por [16]. Este invierte los roles, dándole preponderancia a los complejos simpliciales por sobre los poliedros. De esta manera podremos trabajar en un contexto tal vez más elegante, pero que sería bastante oscuro si no tuviéramos en mente la definición que se encuentra en [5].

A continuación daremos la noción más general de subdivisión de un complejo simplicial. Más adelante veremos ciertos tipos especiales de subdivisiones que resultan más manejables a la hora de trabajar, y en los que sin embargo uno se puede concentrar en muchos casos sin perder generalidad.

**Definición 1.3.1.** Sean  $M, N$  complejos simpliciales. Diremos  $N$  es una *subdivisión* de  $M$  si

- (i)  $V_N \subseteq |M|$  (i.e., los vértices de  $N$  son puntos de  $|M|$ ).
- (ii) Para todo  $\sigma' \in N$ , existe un  $\sigma \in M$  tal que  $\sigma' \subseteq |\sigma|$ .
- (iii) La aplicación  $|N| \rightarrow |M|$  dada por

$$A \mapsto \sum_{v \in M} \left( \sum_{\alpha \in V_N} A(\alpha) \alpha(v) \right) v$$

es un homeomorfismo.

A estas subdivisiones arbitrarias las denotaremos por  $\alpha M$ .

**Nota 1.3.2.** Gracias al homeomorfismo  $|N| \rightarrow |M|$ , si consideramos una subdivisión de  $N$  podremos pensar que sus vértices son puntos de  $|M|$ . Teniendo esto en mente, más la identificación que hacemos de los vértices de  $M$  con puntos de  $|M|$ , al trabajar con  $M$ , sus subdivisiones, las subdivisiones de sus subdivisiones, y así ad-infinitum, podemos pensar que los conjuntos de vértices de estos complejos simpliciales están todos formados por puntos de un mismo conjunto:  $|M|$ .

También vía este homeomorfismo, cuando tengamos un símplex  $\sigma \in N$  podremos pensar a  $|\sigma|$  y a  $\sigma^\circ$  como subconjuntos de  $|M|$ .

**Proposición 1.3.3.** *Sea  $N$  una subdivisión de  $M$ . Entonces,*

- (i) *Si dado  $\sigma \in N$  tomamos  $\tau \in M$  minimal tal que  $\sigma \subseteq |\tau|$ , entonces  $\sigma^\circ \subseteq \tau^\circ$ .*
- (ii) *Todo vértice de  $M$  es vértice de  $N$ .*

*Demostración.*

- (i) Sea  $\alpha \in \sigma^\circ$ . Entonces podemos escribir

$$\alpha = \sum_{v \in \sigma} \alpha(v)v,$$

con  $\alpha(v) > 0$  para todo  $v \in \sigma$ . Para cada  $v \in \sigma$ , como  $\sigma \subseteq |\tau|$ , podemos escribir

$$v = \sum_{x \in \tau} v(x)x,$$

con  $v(x) \geq 0$  para todo  $x \in \tau$ . Así,

$$\alpha = \sum_{x \in \tau} \left( \sum_{v \in \sigma} \alpha(v)v(x) \right) x.$$

Si  $x \in \tau$  es tal que  $\sum_{v \in \sigma} \alpha(v)v(x) = 0$ , entonces al ser  $\alpha(v) > 0$  para todo  $v \in \sigma$ , debe ser  $v(x) = 0$  para todo  $v \in \sigma$ . Si entonces definimos  $\nu = \tau \setminus \{x\}$ , se tiene que  $\sigma \subseteq |\nu|$ , contradiciendo la minimalidad de  $\tau$ .

Por lo tanto  $\sum_{v \in \sigma} \alpha(v)v(x) > 0$  para todo  $x \in \tau$ , lo cual nos dice justamente que  $\alpha \in \tau^\circ$ .

- (ii) Sea  $v \in M$  un vértice. Sea  $\sigma$  el único símplex de  $N$  tal que  $v \in \sigma^\circ$ . Tomemos  $\tau \in M$  tal que  $\sigma \subseteq |\tau|$ , minimal con esta propiedad. Por lo visto en (i), se tiene que  $\sigma^\circ \subseteq \tau^\circ$ , y en particular  $v \in \tau^\circ$ . Siendo  $\{v\}$  el único símplex de  $M$  que tiene a  $v$  en su interior, debe ser  $\tau = \{v\}$ . En particular,  $\dim \sigma = 0$  por lo que  $v$  es un vértice de  $N$ .

□

El siguiente resultado es inmediato.

**Proposición 1.3.4.** *Si  $\alpha_1 M$  es una subdivisión de  $M$  y  $\alpha_2(\alpha_1 M)$  es una subdivisión de  $\alpha_1 M$ , entonces  $\alpha_2(\alpha_1 M)$  es una subdivisión de  $M$ .*

**Proposición 1.3.5.** *Sea  $M$  un complejo simplicial, y sea  $N$  un subcomplejo.*

- (i) *Toda subdivisión  $\alpha M$  de  $M$  induce una subdivisión  $\alpha N$  de  $N$  tal que  $\alpha N$  es un subcomplejo de  $N$ .*
- (ii) *Toda subdivisión  $\alpha N$  de  $N$  induce una subdivisión  $\alpha M$  de  $M$  tal que  $\alpha M$  es un subcomplejo de  $M$ .*

*Demostración.* Primero tomemos  $\alpha M$  subdivisión de  $M$ . Entonces esta induce una subdivisión de  $N$ , dada como el subcomplejo  $\alpha N \subseteq \alpha M$  que tiene por símplices a aquellos de  $\alpha M$  cuyos vértices pertenecen a  $|N|$ .

Ahora dada  $\alpha N$  subdivisión de  $N$ , buscamos extenderla a una subdivisión de  $M$ . Repitiendo el siguiente procedimiento tantas veces como sea necesario, podemos suponer que  $N = M \setminus \{\sigma\}$ , de manera que  $\dot{\sigma} \subseteq N$ . Elijamos un  $a \in \sigma^\circ$ . Entonces se define  $\alpha M$  como el complejo que tiene por vértices a  $V_{\alpha N} \cup \{a\}$ , y como símplices a todos los de  $\alpha N$  más aquellos de la forma  $a\tau$ , con  $\tau \in \alpha N, \tau \subseteq |\dot{\sigma}|$ . □

### Subdivisiones derivadas y baricéntricas

Sea  $M$  un complejo simplicial. Elijamos para cada  $\sigma \in M$  un punto  $a_\sigma \in \sigma^\circ$  (notemos que si  $\sigma$  es un vértice, entonces  $a_\sigma$  sólo puede ser el propio  $\sigma$ ). Esta elección de puntos determina un tipo de subdivisión que llamaremos *derivada (elemental)*, y denotaremos por  $\delta M$ . Los vértices de  $\delta M$  son los puntos  $a_\sigma$ , y sus símplices son los conjuntos de puntos de la forma  $\{a_{\sigma_1}, a_{\sigma_2}, \dots, a_{\sigma_k}\}$ , donde  $\sigma_1 < \sigma_2 < \dots < \sigma_k$ .

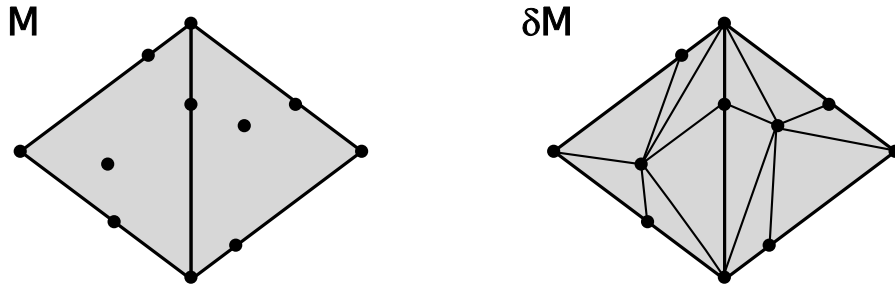


Figura 1.8: Subdivisión derivada.

Más en general, llamaremos *derivada* y denotaremos por  $\delta M$  a toda subdivisión de  $M$  que se obtenga de realizarle a  $M$  una sucesión finita de subdivisiones derivadas elementales.

**Proposición 1.3.6.** *Dada una subdivisión  $\alpha_1 M$  de  $M$ , existe una subdivisión  $\alpha_2(\alpha_1 M)$  de  $\alpha_1 M$  tal que  $\alpha_2(\alpha_1 M)$  es una subdivisión derivada de  $M$ .*

**Proposición 1.3.7.** *Si  $\alpha_1 M, \alpha_2 M$  son subdivisiones de  $M$ , entonces existe una subdivisión derivada de  $M$  que es a la vez subdivisión de  $\alpha_1 M$  y  $\alpha_2 M$ .*

Las demostraciones de estos dos resultados básicos se pueden encontrar en [5].

**Definición 1.3.8.** Dado  $\sigma \in M$ , llamaremos *baricentro* de  $\sigma$  al punto  $b(\sigma) \in \sigma^\circ$  dado por

$$b(\sigma)(v) = \begin{cases} \frac{1}{\dim \sigma + 1}, & v \in \sigma \\ 0, & v \notin \sigma. \end{cases}$$

Llamaremos *subdivisión baricéntrica* de  $M$  a la subdivisión derivada que se obtiene al elegir como puntos de subdivisión a los baricentros de los símplexes de  $M$ , es decir, tomando  $a_\sigma = b(\sigma)$ . La denotaremos por  $M'$ . En general, la  $k$ -ésima subdivisión derivada de  $M$  se define como  $M^{(k)} = (M^{(k-1)})'$ .

**Observación 1.3.9.** Se puede definir la subdivisión baricéntrica de un complejo simplicial de una manera alternativa, puramente combinatoria. Precisamente, dado un complejo simplicial  $M$  podemos considerar  $\tilde{M}$ , el complejo simplicial cuyos vértices son los símplexes de  $M$ , y cuyos símplexes son los conjuntos de la forma  $\{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_k\}$ , con  $\sigma_i \in M$ ,  $\sigma_1 < \sigma_2 < \dots < \sigma_k$ . Resulta inmediato que  $M' \simeq \tilde{M}$ .

### Subdivisiones estelares

Sea  $M$  un complejo simplicial. Fijemos  $a \in |M| \setminus V_M$ . Definiremos ahora la *subdivisión estelar elemental* de  $M$  en  $a$ , siguiendo a [15].

Sus vértices serán los vértices de  $M$ , más el punto  $a$ . Para determinar sus símplexes, tomemos el único símplex  $\sigma \in M$  tal que  $a \in \sigma^\circ$ . Cada símplex  $\tau$  de  $M$  que satisfaga que  $a \notin |\tau|$  (o equivalentemente,  $\tau \not\geq \sigma$ ) seguirá siendo un símplex. Cada símplex (maximal)  $\tau$  de  $M$  que satisfaga que  $a \in |\tau|$  (o equivalentemente,  $\tau > \sigma$ ) será reemplazado por símplexes de la forma  $a\nu$ , donde estamos tomando todos aquellos  $\nu \in M$  tales que  $\nu < \tau$ ,  $a \notin |\nu|$  ( $\Leftrightarrow \nu \not\geq \sigma$ ).

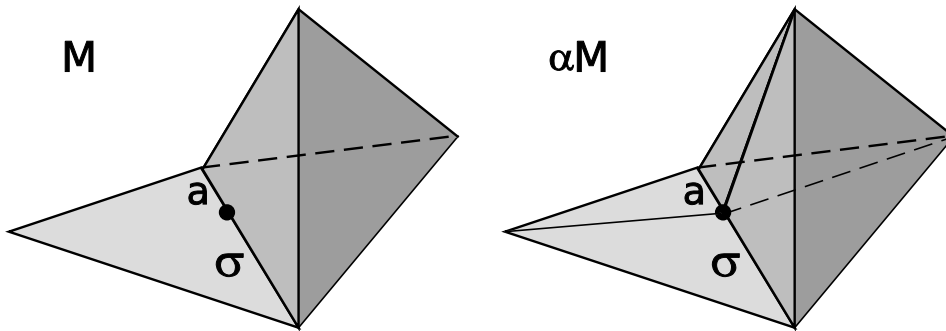


Figura 1.9: Subdivisión estelar.

Esta definición “geométrica” de subdivisión estelar elemental, aunque nos permite visualizar fácilmente cómo es que estamos subdividiendo a  $M$ , tal vez no sea la más conveniente a la hora de trabajar. Por ejemplo, porque puede haber más de un símplex (maximal)  $\tau$  tal que  $a \in |\tau|$ , en cuyo caso a algunos de los nuevos símplexes los estaremos contando más de una vez. Daremos entonces una definición alternativa con la que será más cómodo trabajar, pero que sin tener la otra en mente, sería un poco oscura. Esta será de naturaleza puramente combinatoria, por lo que al pensar en ella no será necesario tener en mente ninguna realización geométrica.

Sea  $M$  un complejo simplicial. Fijemos  $a \notin V_M$ . Sea  $\sigma = \{x_0, x_1, \dots, x_k\} \in M$  (el cual jugará el papel del  $\sigma$  de la definición original). La subdivisión estelar elemental “combinatoria” de  $M$  en  $a$  (con respecto a  $\sigma$ ) será entonces el complejo simplicial cuyo conjunto de

vértices es  $V_M \cup \{a\}$ , y cuyos símplexes son los siguientes. Cada símplex de  $M$  que no tenga a  $\sigma$  como cara, seguirá siendo un símplex. Cada símplex  $\tau = \{x_0, x_1, \dots, x_k, y_1, y_2, \dots, y_m\}$  que tenga a  $\sigma$  como cara (admitimos  $m = 0$ , en cuyo caso  $\tau = \sigma$ ) será reemplazado por símplexes de la forma  $\{a, x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_j}, y_1, y_2, \dots, y_m\}$  (admitimos  $i_j = 0$ ), donde  $0 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_j \leq k, j < k + 1$ .

Es inmediato ver que ambas subdivisiones, la “geométrica” y la “combinatoria”, resultan simplicialmente isomorfas, por lo que trabajaremos con una u otra indistintamente según convenga.

**Definición 1.3.10.** Diremos que una subdivisión de  $M$  es *estelar* si se obtiene de realizarle a  $M$  una sucesión finita de subdivisiones estelares elementales. Denotaremos a este tipo de subdivisiones por  $\beta M$ .

**Proposición 1.3.11.** *Toda subdivisión derivada es estelar.*

*Demostración.* Sea  $M$  un complejo simplicial de dimensión  $n$ , y sea  $\delta M$  una subdivisión derivada de  $M$ , la cual supondremos elemental sin perder generalidad. Entonces esta estará hecha con respecto a alguna elección de puntos  $a_\sigma \in \sigma^\circ$  ( $\sigma \in M$ ).

Consideremos la siguiente subdivisión estelar. Primero estrellamos en los puntos  $a_\sigma$  con  $\dim \sigma = n$ . Luego estrellamos en los puntos  $a_\sigma$  con  $\dim \sigma = n - 1$ , y así siguiendo hasta los puntos  $a_\sigma$  con  $\dim \sigma = 0$ , obtenemos  $\beta M$  subdivisión estelar de  $M$ . Notemos que mediante este procedimiento los  $k$ -símplexes de  $M$  no se ven alterados antes del  $k$ -ésimo paso.

Veamos que  $\beta M$  coincide con  $\delta M$ . Que los vértices de ambas subdivisiones son los mismos está claro, pues en ambos casos el conjunto de vértices coincide con  $V_M \cup \{a_\sigma\}_{\sigma \in M}$ . Resta ver que tienen los mismos símplexes.

Sea  $\tau^{(k)} \in \delta M$ . Entonces existen  $\sigma_i^{(i)} \in M$  tales que  $\tau = \{a_{\sigma_0}, a_{\sigma_1}, \dots, a_{\sigma_k}\}$ , con  $\sigma_0 < \sigma_1 < \dots < \sigma_k$ . Luego,  $\tau^{(k)}$  en  $\beta M$  se obtiene de la siguiente manera. En el  $k$ -ésimo paso, cuando estrellamos en  $a_{\sigma_k}$ , nos quedamos con el  $k$ -símplex  $a_{\sigma_k} \sigma_{k-1}$ . En el próximo paso, al estrellar en  $a_{\sigma_{k-1}}$ , nos quedamos con el  $k$ -símplex  $a_{\sigma_k} a_{\sigma_{k-1}} \sigma_{k-2}$ . Así siguiendo hasta el final, obtenemos un símplex de  $\beta M$  que es precisamente  $\tau$ .

Ahora sea  $\tau^{(k)} \in \beta M$ . Este necesariamente se obtuvo según el siguiente procedimiento. En el  $k$ -ésimo paso, cuando estrellamos en cierto  $a_{\sigma_k}$ , nos quedamos con el  $k$ -símplex  $a_{\sigma_k} \sigma_{k-1}$  para cierto  $\sigma_{k-1} < \sigma_k$ . En el próximo paso, al estrellar en cierto  $a_{\sigma_{k-1}}$ , nos quedamos con el  $k$ -símplex  $a_{\sigma_k} a_{\sigma_{k-1}} \sigma_{k-2}$  para cierto  $\sigma_{k-2} < \sigma_{k-1}$ . Así siguiendo, se obtiene la sucesión de símplexes  $\sigma_0 < \sigma_1 < \dots < \sigma_k$  tal que  $\tau = \{a_{\sigma_0}, a_{\sigma_1}, \dots, a_{\sigma_k}\}$ . □

## 1.4. Stars y links

Sea  $M$  un complejo simplicial. Daremos ahora dos nociones de “entorno simplicial” de un símplex  $\sigma \in M$ . Intuitivamente, el *star* de  $\sigma$  será el subcomplejo de  $M$  más pequeño alrededor de  $\sigma$ , y el *link* de  $\sigma$  será el “borde” de este subcomplejo. Considerar en particular entornos de vértices nos permitirá más adelante obtener una noción de *variedad combinatoria*.

El *star* de  $\sigma$  se define como el subcomplejo de  $M$  generado por aquellos  $\tau \in M$  tales que  $\tau > \sigma$  (o, equivalentemente,  $|\tau| \supseteq \sigma^\circ$ ), y se denota por  $\text{st}(\sigma)$ . Precisamente,

$$\text{st}(\sigma) = \{\nu \in M : \text{existe } \tau \in M \text{ tal que } \nu < \tau, \tau > \sigma\}.$$

El *link* de  $\sigma$  se define como el subcomplejo de  $M$  dado por

$$\text{lk}(\sigma) = \{\tau \in \text{st}(\sigma) : \tau \cap \sigma = \emptyset\}.$$

De ser necesario, remarcaremos que estamos pensando al star y al link como subcomplejos de  $M$  denotando  $\text{st}(\sigma) = \text{st}(\sigma, M)$ ,  $\text{lk}(\sigma) = \text{lk}(\sigma, M)$ .

Más geoméricamente hablando, dado  $\sigma \in M$  tenemos la noción de *star abierto* de  $\sigma$ , que es por definición el subconjunto de  $|M|$  (o, más precisamente, de  $|\text{st}(\sigma)|$ ) dado por

$$\text{st}^\circ(\sigma) = \bigcup_{\tau > \sigma} \tau^\circ.$$

Este es abierto en  $|M|$ , ya que dado  $\tau \in M$  se tiene que  $|\tau| \cap \text{st}^\circ(\sigma) = \emptyset$  o  $|\tau| \cap \text{st}^\circ(\sigma) = \tau^\circ$ . Notemos que

$$\text{st}^\circ(\sigma) = \bigcup_{\substack{\tau \in \text{st}(\sigma) \\ |\tau| \cap \sigma^\circ \neq \emptyset}} \tau^\circ,$$

que  $\sigma^\circ \subseteq \text{st}^\circ(\sigma)$  pero, salvo que  $\sigma$  sea un vértice,  $|\sigma| \not\subseteq \text{st}^\circ(\sigma)$ , y que  $\tau^\circ \subseteq \text{st}^\circ(\sigma)$  si y sólo si  $\tau > \sigma$ , ya que símplices distintos tienen interiores disjuntos. Además, vemos que si  $v$  es un vértice de  $M$ , entonces

$$\text{st}^\circ(v) = \{\alpha \in |M| : \alpha(v) \neq 0\},$$

siendo esta la definición de star que se encuentra en [16].

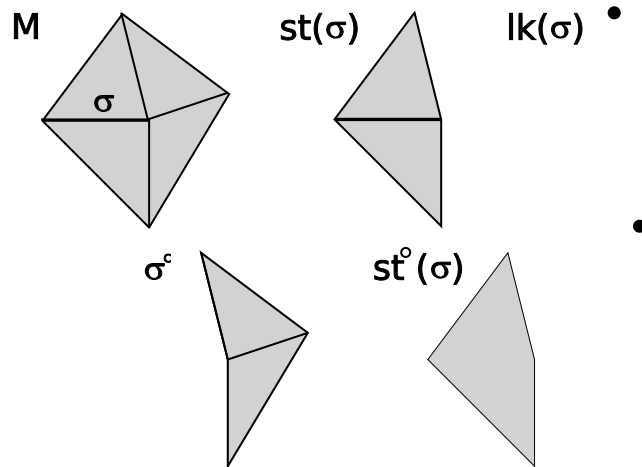


Figura 1.10:  $\text{st}(\sigma)$ ,  $\text{lk}(\sigma)$ ,  $\sigma^c$  y  $\text{st}^\circ(\sigma)$ .

En términos de stars abiertos, el siguiente resultado nos da un criterio para decidir cuándo es que un conjunto de vértices de un complejo simplicial es o no un símplice.

**Proposición 1.4.1.** *Sea  $M$  un complejo simplicial, y sean  $v_0, v_1, \dots, v_k \in M$ . Sea  $\sigma = \{v_0, v_1, \dots, v_k\}$ . Entonces  $\sigma$  es un simplex de  $M$  si y sólo si*

$$\bigcap_{i=0}^k \text{st}^\circ(v_i) \neq \emptyset.$$

*Demostración.*

$\Rightarrow$ ) Si  $\sigma \in M$ , entonces  $\sigma^\circ \subseteq \text{st}^\circ(v_i)$  para todo  $i$ .

$\Leftarrow$ ) Dado que símlices distintos tienen interiores disjuntos, siendo los conjuntos  $\text{st}^\circ(v_i)$  uniones de interiores de símlices, que la intersección de ellos dé no vacía fuerza a que haya al menos un simplex que contenga a todos los  $v_i$ . Entonces,  $\sigma \in M$ .

□

La siguiente proposición resume algunas de las propiedades que relacionan stars y links, y su demostración no ofrece mayores dificultades.

**Proposición 1.4.2.** *Sea  $\sigma$  un simplex de  $M$ . Entonces,*

(i)  $M = \text{st}(\sigma) + \sigma^c$ .

(ii)  $\text{st}(\sigma) = \bar{\sigma} \text{lk}(\sigma)$ .

(iii)  $\dot{\sigma} \text{lk}(\sigma) = \text{st}(\sigma) \setminus \{\tau \in M : \tau > \sigma\} = \text{st}(\sigma) \cap \sigma^c$ .

La definición de subdivisión estelar que dimos es la que se encuentra en [15]. A continuación, mostraremos la que se encuentra en [5] y veremos que ambas son equivalentes.

Sea  $a \in |M| \setminus V_M$ . Consideremos  $\beta M$  la subdivisión estelar (“geométrica”) de  $M$  en  $a$ . Sea  $\sigma \in M$  el único simplex tal que  $a \in \sigma^\circ$ . Consideremos a  $\dot{\sigma}, P = \text{lk}(\sigma, M)$  y  $\sigma^c$ , subcomplejos de  $M$ . Dado que todos los símlices de estos subcomplejos son símlices de  $\beta M$ , podemos considerarlos como subcomplejos de  $\beta M$ . Notando que

$$\dot{\sigma}P = \{\nu \in M : \text{existe } \tau \in M \text{ tal que } \tau > \sigma \text{ y } \nu < \tau, \nu \not\prec \sigma\},$$

vemos que la definición de  $\beta M$  que dimos nos dice precisamente que

$$\beta M = a\dot{\sigma}P + \sigma^c,$$

siendo el miembro derecho de esta igualdad la definición de subdivisión estelar elemental en  $a$  de  $M$  según [5].

## 1.5. Linealidad

Sea  $M$  un complejo simplicial y sea  $\sigma \in M$  un  $n$ -símplex. Tenemos que

$$|\sigma| = \left\{ \sum_{v \in \sigma} \alpha(v)v : \alpha(v) \geq 0, \sum_{v \in \sigma} \alpha(v) = 1 \right\},$$

o, en otras palabras, que  $|\sigma|$  es el conjunto de las combinaciones lineales convexas de los vértices de  $\sigma$ . En particular, podemos considerar combinaciones lineales convexas de los puntos de  $|\sigma|$ , obteniendo puntos de  $|\sigma|$ . Tenemos entonces una *estructura lineal* en  $|\sigma|$ .

Sea  $N$  un complejo simplicial y sea  $f : M \rightarrow N$  un morfismo simplicial. Vimos que este inducía una función continua  $|f| : |M| \rightarrow |N|$ . Veamos que, más que continua,  $f$  es *lineal en los símplexes*, esto es, que respeta las estructuras lineales de las realizaciones geométricas de los símplexes de  $M$  y  $N$ .

Precisamente, tomemos  $\sigma \in M$  y sea  $\tau = f(\sigma)$ . Vimos que entonces  $|f|(|\sigma|) \subseteq |\tau|$ , por lo que podemos considerar  $|f| : |\sigma| \rightarrow |\tau|$ . Sean  $x_1, x_2, \dots, x_k \in |\sigma|$  y sean  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k \geq 0$  tales que  $\sum_i \alpha_i = 1$ . Veamos que

$$|f|\left(\sum_{i=1}^k \alpha_i x_i\right) = \sum_{i=1}^k \alpha_i |f|(x_i).$$

En efecto, sea  $w \in \tau$ . Entonces,

$$\begin{aligned} |f|\left(\sum_{i=1}^k \alpha_i x_i\right)(w) &= \sum_{f(v)=w} \left(\sum_{i=1}^k \alpha_i x_i\right)(v) = \sum_{i=1}^k \alpha_i \left(\sum_{f(v)=w} x_i(v)\right) \\ &= \sum_{i=1}^k \alpha_i |f|(x_i)(w). \end{aligned}$$

Otro ejemplo de linealidad en los símplexes se da en el caso de las subdivisiones. Si  $N$  es una subdivisión de  $M$ , el homeomorfismo  $|N| \rightarrow |M|$  al que hace referencia la definición 1.3.1 consiste precisamente en aplicar cada vértice de  $V_N$  en el correspondiente punto de  $|M|$ , y luego extender linealmente, lo cual es posible gracias a la condición (ii) de esa definición. Se puede ver razonando como arriba que el homeomorfismo  $|N| \rightarrow |M|$  es lineal en los símplexes.

Dados dos poliedros  $|M|$  y  $|N|$  nos interesarán en particular las funciones continuas entre ellos que tengan en cuenta su estructura lineal y combinatoria.

**Definición 1.5.1.** Una función  $g : |M| \rightarrow |N|$  es *lineal a trozos* (abreviado PL) si existen subdivisiones  $\alpha M$  y  $\alpha' N$  y un morfismo  $f : \alpha M \rightarrow \alpha' N$  tales que  $g = |f|$  (donde identificamos  $|M| = |\alpha M|$  y  $|N| = |\alpha' N|$  vía los correspondientes homeomorfismos).

**Ejemplo 1.5.2.** La función  $I \rightarrow I$  dada por  $t \mapsto t^2$  no es lineal a trozos.

En [5] se demuestra que la composición de dos funciones PL da como resultado una función PL, por lo que los poliedros junto con las funciones PL forman una categoría.

Así, dos poliedros  $X$  e  $Y$  serán isomorfos en esta categoría si y sólo si existen  $g : X \rightarrow Y$  y  $h : Y \rightarrow X$  lineales a trozos tales que  $g \circ h = 1_Y$ ,  $h \circ g = 1_X$ . Denotaremos esto con  $X =_{PL} Y$ .

**Observación 1.5.3.** Por lo visto en la observación 1.2.4, una función PL será un PL-isomorfismo si y sólo si es biyectiva. También de esa observación se sigue que dados poliedros  $|M|$  y  $|N|$ , estos serán PL-isomorfos si y sólo si existen subdivisiones  $\alpha M$  y  $\alpha' N$  simplicialmente isomorfas.

Podemos en términos puramente combinatorios decir que dos complejos simpliciales  $M$  y  $N$  son *PL-isomorfos*, y denotarlo por  $M =_{PL} N$ , si admiten subdivisiones simplicialmente isomorfas. De esta manera, se tiene que  $M =_{PL} N$  si y sólo si  $|M| =_{PL} |N|$ .

**Observación 1.5.4.**

- Si  $M \simeq N$ , entonces  $M =_{PL} N$ .
- Si  $\alpha M$  es una subdivisión de  $M$ , entonces  $\alpha M =_{PL} M$ .
- Teniendo en mente la proposición 1.3.7, no es difícil ver que entre los complejos simpliciales la relación de “ser PL-isomorfos” es de equivalencia.

**Nota 1.5.5.** Dado que toda función lineal a trozos es continua, se tiene en particular que si  $X =_{PL} Y$  entonces  $X$  e  $Y$  son homeomorfos. La pregunta inmediata es si vale la recíproca, la cual nos diría que la topología de un poliedro determina su naturaleza combinatoria, o más precisamente, que la triangulación que admite todo poliedro es esencialmente única. Esta conjetura, conocida como “Hauptvermutung”, fue formulada por Steinitz y Tietze en 1908. Aunque resulta ser cierta para variedades diferenciables de dimensión a lo sumo tres, Milnor probó en 1961 que la conjetura es falsa. Para un estudio detallado de este problema, ver [14].

## 1.6. Aproximación simplicial

Sea  $f : |M| \rightarrow |N|$  una función continua entre poliedros. Aunque por lo general  $f$  no es lineal a trozos, veremos en esta sección que siempre se puede aproximar por una función que sí lo es.

**Definición 1.6.1.** Sean  $M$  y  $N$  complejos simpliciales, y sea  $f : |M| \rightarrow |N|$  una función continua. Un morfismo  $\phi : M \rightarrow N$  es una *aproximación simplicial* de  $f$  si para todo  $\alpha \in |M|$ , si  $\tau$  es el único simplex de  $N$  tal que  $f(\alpha) \in \tau^\circ$ , se tiene que  $|\phi|(\alpha) \in |\tau|$ .

Notemos que si  $\phi$  es una aproximación simplicial de  $f$ , dado que  $\{w\}^\circ = \{w\}$  para todo  $w$  vértice de  $N$ , entonces si  $v \in V_M$  es tal que  $f(v) \in V_N$ , resulta que  $|\phi|(v) = f(v)$ . Generalizando esto, se tiene el siguiente resultado.

**Proposición 1.6.2.** Sea  $f : |M| \rightarrow |N|$  una función continua. Supongamos que existe un subcomplejo  $M_1 \subseteq M$  tal que  $f|_{|M_1|}$  es la realización geométrica de cierto morfismo  $M_1 \rightarrow N$ . Si  $\phi : M \rightarrow N$  es una aproximación simplicial de  $f$ , entonces se tiene que  $f|_{|M_1|} = |\phi|_{|M_1|}$ .

*Demostración.* Dado que  $f|_{|M_1|}$  y  $|\phi|_{|M_1|}$  son lineales en los símplexes de  $M_1$ , para ver que coinciden en  $|M_1|$  basta con probar que coinciden en los vértices de  $M_1$ . Por la observación recientemente hecha, basta con probar que  $f$  aplica vértices de  $M_1$  en vértices de  $N$ . Y esto se tiene gracias a que  $f|_{|M_1|}$  es la realización geométrica de un morfismo simplicial.  $\square$

En particular si tomamos un morfismo  $\phi : M \rightarrow N$  y ponemos  $M_1 = M$ ,  $f = |\phi|$ , vemos que la única aproximación simplicial de  $|\phi|$  es  $\phi$ .

El siguiente resultado nos muestra en qué sentido una aproximación simplicial es una aproximación.

**Proposición 1.6.3.** *Sea  $f : |M| \rightarrow |N|$  una función continua. Supongamos que  $\phi : M \rightarrow N$  es una aproximación simplicial de  $f$ . Sea  $A \subseteq |M|$  el subconjunto de  $|M|$  en el cual  $f$  y  $|\phi|$  coinciden. Entonces,*

$$f \simeq |\phi|, \quad \text{rel}(A).$$

**Nota 1.6.4.** Cuando se trate de funciones continuas, “ $\simeq$ ” significará “es homotópico a”, y si agregamos “ $\text{rel}(A)$ ” será para decir que la homotopía que deforma una función en la otra se puede tomar de manera tal que  $A$  quede fijo en la deformación.

*Demostración.* Sea  $\alpha \in |M|$ . Sea  $\tau \in N$  el único símplex tal que  $f(\alpha) \in \tau^\circ$ . Dado que  $|\phi|(\alpha) \in |\tau|$ , cualquier combinación convexa de  $f(\alpha)$  y  $|\phi|(\alpha)$  caerá en  $|\tau|$ . Podemos entonces definir  $F : |M| \times I \rightarrow |N|$  por

$$F(\alpha, t) = tf(\alpha) + (1 - t)|\phi|(\alpha).$$

Es fácil verificar que es continua, y que define la homotopía buscada.  $\square$

Veremos a continuación un criterio para decidir cuándo una función entre los vértices de  $M$  y los de  $N$  es una aproximación simplicial de una  $f$  dada, el cual nos servirá más adelante para construir aproximaciones simpliciales.

**Proposición 1.6.5.** *Sea  $f : |M| \rightarrow |N|$  una función continua. Sea  $\phi : V_M \rightarrow V_N$  una función. Entonces  $\phi$  es una aproximación simplicial de  $f$  si y sólo si para todo vértice  $v \in M$  se tiene que  $f(\text{st}^\circ(v)) \subseteq \text{st}^\circ(\phi(v))$ .*

*Demostración.*

$\Rightarrow$ ) Sea  $v$  un vértice de  $M$  y sea  $\alpha \in \text{st}^\circ(v)$ . Tomemos  $\tau \in N$  el único símplex tal que  $f(\alpha) \in \tau^\circ$ , de manera que  $|\phi|(v) \in |\tau|$ . Dado que  $\alpha(v) \neq 0$ , analizando la fórmula que define a  $|\phi|$ , vemos que  $|\phi|(\alpha)(\phi(v)) \neq 0$ . En particular, esto nos dice que  $\phi(v) \in \tau$ . Luego,  $f(\alpha) \in \tau^\circ \subseteq \text{st}^\circ(\phi(v))$ , que es lo que queríamos.

$\Leftarrow$ ) Primero debemos ver que  $\phi$  es un morfismo simplicial. Para esto tomemos  $\sigma \in M$  y veamos que  $\phi(\sigma) \in N$ . Escribamos  $\sigma = \{v_0, v_1, \dots, v_k\}$ . Por la proposición 1.4.1, tenemos que  $\cap_i \text{st}^\circ(v_i) \neq \emptyset$ . Por lo tanto,

$$\emptyset \neq f\left(\bigcap_{i=0}^k \text{st}^\circ(v_i)\right) \subseteq \bigcap_{i=0}^k f(\text{st}^\circ(v_i)) \subseteq \bigcap_{i=0}^k \text{st}^\circ(\phi(v_i)),$$

y de nuevo la proposición 1.4.1 nos dice entonces que  $\phi(\sigma) \in N$ .

Ahora veamos que  $\phi$  es aproximación simplicial de  $f$ . Tomemos  $\alpha \in |M|$  y sean  $\sigma \in M$  el único simplex tal que  $\alpha \in \sigma^\circ$  y  $\tau \in N$  el único simplex tal que  $f(\alpha) \in \tau^\circ$ . Sea  $v$  un vértice de  $\sigma$ . En particular  $\alpha \in \text{st}^\circ(v)$ , por lo que  $f(\alpha) \in \text{st}^\circ(\phi(v))$ . Luego  $\phi(v) \in \tau$ . Como esto vale para todo vértice de  $\sigma$ , dado que  $|\phi|$  es lineal en los simplices, vemos que  $|\phi|(|\sigma|) \subseteq |\tau|$ , y en particular  $|\phi|(\alpha) \in |\tau|$ .

□

**Corolario 1.6.6.** *Sean  $f : |M| \rightarrow |N|$   $g : |N| \rightarrow |L|$  dos funciones continuas. Supongamos que  $\phi : M \rightarrow N$  y  $\psi : N \rightarrow L$  son aproximaciones simpliciales de  $f$  y  $g$  respectivamente. Entonces,  $\psi \circ \phi$  es una aproximación simplicial de  $g \circ f$ .*

*Demostración.* Tomemos  $v$  un vértice de  $M$ . Entonces por el “si” de la proposición anterior basta con verificar que  $g \circ f(\text{st}^\circ(v)) \subseteq \text{st}^\circ(\psi \circ \phi(v))$ . En efecto, usando el “sólo si” de esta, obtenemos que

$$g \circ f(\text{st}^\circ(v)) \subseteq g(\text{st}^\circ(\phi(v))) \subseteq \text{st}^\circ(\psi \circ \phi(v)).$$

□

La proposición anterior nos da el siguiente criterio para decidir cuándo es que una función continua admite aproximaciones simpliciales.

**Proposición 1.6.7.** *Sea  $f : |M| \rightarrow |N|$  una función continua. Consideremos los cubrimientos por abiertos*

$$\begin{aligned} \mathcal{U} &= \{\text{st}^\circ(v) : v \in V_M\} \\ \mathcal{V} &= \{\text{st}^\circ(w) : w \in V_N\} \end{aligned}$$

de  $|M|$  y  $|N|$  respectivamente. Entonces,  $f$  admite una aproximación simplicial si y sólo si  $\mathcal{U}$  es más fino que  $f^{-1}(\mathcal{V})$ .

Este es el único lugar de toda la sección en el que se hace uso de la continuidad de  $f$ . Se usa para que  $f^{-1}(\mathcal{V})$  sea en efecto un cubrimiento por abiertos de  $|N|$ .

*Demostración.* Que  $\mathcal{U}$  sea más fino que  $f^{-1}(\mathcal{V})$  quiere decir que para todo  $v$  vértice de  $M$  exista  $w$  vértice de  $N$  tal que  $\text{st}^\circ(v) \subseteq f^{-1}(\text{st}^\circ(w))$ . Veamos que esto equivale a la existencia de aproximaciones simpliciales.

Si  $f$  admite una aproximación simplicial  $\phi$ , dado  $v$  vértice de  $M$ , poniendo  $w = \phi(v)$  se tiene que  $\text{st}^\circ(v) \subseteq f^{-1}(\text{st}^\circ(w))$ , gracias a la proposición anterior.

Recíprocamente, si definimos  $\phi : V_M \rightarrow V_N$  poniendo  $\phi(v) = w$ , donde  $w$  es uno cualquiera de los vértices de  $N$  tales que  $\text{st}^\circ(v) \subseteq f^{-1}(\text{st}^\circ(w))$ , entonces se tiene para todo  $v$  vértice de  $M$  que  $f(\text{st}^\circ(v)) \subseteq \text{st}^\circ(\phi(v))$ , por lo que la proposición anterior nos dice que  $\phi$  es una aproximación simplicial de  $f$ .

□

Es un hecho bien conocido (se puede ver por ejemplo en [16], teorema 3.3.13) que dado un poliedro  $|M|$  y  $\mathcal{V}$  un cubrimiento por abiertos de  $|M|$ , existe  $k_0 \in \mathbb{N}_0$  tal que si  $k \geq k_0$ , entonces el cubrimiento por abiertos de  $|M|$  dado por

$$\mathcal{U} = \{\text{st}^\circ(v, M^{(k)}) : v \in V_{M^{(k)}}\}$$

(recordemos que  $M^{(k)}$  denota a la  $k$ -ésima subdivisión baricéntrica de  $M$ ) es más fino que  $\mathcal{V}$ . De este hecho y de la proposición anterior, se obtiene inmediatamente el siguiente resultado sobre la existencia de aproximaciones simpliciales.

**Teorema 1.6.8.** *Dada una función continua  $f : |M| \rightarrow |N|$ , existe  $k_0 \in \mathbb{N}_0$  tal que si  $k \geq k_0$ , entonces  $f : |M^{(k)}| \rightarrow |N|$  admite aproximaciones simpliciales.*

**Nota 1.6.9.** En particular, cuando tenemos un homeomorfismo  $f : |M| \rightarrow |N|$ , la siguiente pregunta surge naturalmente: ¿existirá un isomorfismo simplicial  $\phi : \alpha M \rightarrow \alpha' N$  cuya realización geométrica sea homotópica a  $f$ ? Esta conjetura, que implica la Hauptvermutung enunciada en la nota 1.5.5 y también es conocida con ese nombre, es cierta para variedades diferenciables de dimensiones a lo sumo tres, pero es falsa en dimensiones mayores. De nuevo, para más detalles al respecto nos referimos a [14].

## 1.7. Colapsos y pegado de símplexes

Uno de los problemas de la topología algebraica es el siguiente: dados dos espacios topológicos, decidir si tienen o no el mismo tipo homotópico. Al trabajar en particular con poliedros, nos interesaría poder usar métodos combinatorios para intentar responder a esa pregunta.

Al considerar complejos simpliciales, nos encontramos con dos “movimientos” muy sencillos que no alteran el tipo homotópico de (la realización geométrica de) un complejo simplicial: los *colapsos* y las *expansiones* elementales. Cuando de un complejo simplicial se puede llegar a otro mediante una sucesión finita de estos movimientos, diremos que ambos tienen el mismo *tipo homotópico simple*.

La teoría de homotopía simple fue introducida por J. H. C. Whitehead ([18]) y está inspirada en el teorema de Tietze en teoría combinatoria de grupos, que dice que toda presentación finita de un grupo puede ser llevada a cualquier otra presentación del mismo grupo por medio de una sucesión finita de movimientos elementales, que ahora reciben el nombre de Transformaciones de Tietze.

La teoría de homotopía simple de Whitehead es uno de los pilares más importantes en el desarrollo de la topología lineal a trozos. Whitehead se preguntaba si estos movimientos elementales combinatorios alcanzaban para describir todas las deformaciones topológicas posibles de los poliedros. Prueba que no siempre es el caso, e introduce un invariante (llamado ahora Grupo de Whitehead) que mide la obstrucción a este problema.

En esta sección daremos una mínima introducción a la materia, recomendando al lector interesado dirigirse a [18] o [3] para más información.

## Colapsos de símplices

**Definición 1.7.1.** Sea  $M$  un complejo simplicial, y sean  $\sigma, \tau \in M$  tales que  $\sigma \prec \tau$ . Diremos que  $\sigma$  es cara *libre* de  $\tau$  en  $M$  si  $\tau$  es el único símplex de  $M$  del cual  $\sigma$  es cara inmediata.

Notemos que esto fuerza a que  $\tau$  sea un símplex maximal de  $M$ , por lo que si ponemos  $L = M \setminus \{\sigma, \tau\}$  tendremos que  $L$  es un subcomplejo de  $M$ .

**Observación 1.7.2.** Supongamos que  $\sigma$  es cara libre de  $\tau$  en  $M$ , y sea  $L = M \setminus \{\sigma, \tau\}$ . Sea  $v$  el vértice de  $M$  tal que  $\tau = \{v\} \cup \sigma$ . Entonces se tiene que  $M = L + \bar{\tau}$ , y que  $v\bar{\sigma} = L \cap \bar{\tau}$ .

Recíprocamente, supongamos que tenemos un subcomplejo  $L \subseteq M$  y  $\sigma, \tau \in M$  tales que  $\tau = \{v\} \cup \sigma$  para cierto  $v \in M$ , satisfaciendo que  $M = L + \bar{\tau}$ , y que  $v\bar{\sigma} = L \cap \bar{\tau}$ . Dado que esto último fuerza a que  $\sigma \notin L$ , se tiene que  $\sigma$  es cara inmediata de  $\tau$  en  $M$ . En efecto, si  $\tau' \succ \sigma$ , no puede ser  $\tau' \in L$  pues  $\sigma \notin L$ . Luego debe ser  $\tau' \in \bar{\tau}$  y por lo tanto  $\tau' = \tau$ .

En particular de esto se sigue que la definición de colapso elemental que daremos a continuación coincide con la que se encuentra por ejemplo en [5].

**Definición 1.7.3.** Sea  $M$  un complejo simplicial, y sea  $L$  un subcomplejo de  $M$ . Diremos que  $M$  *colapsa elementalmente* a  $L$  (o que  $L$  se *expande elementalmente* a  $M$ ) si o bien  $M = L$ , o bien  $L = M \setminus \{\sigma, \tau\}$ , donde  $\sigma$  es cara libre de  $\tau$  en  $M$ . Lo denotaremos por  $M \searrow^e L$ , o por  $L \nearrow^e M$ .

Diremos que  $M$  *colapsa* a  $L$  (o que  $L$  se *expande* a  $M$ ) si se tiene una sucesión

$$M = M_0, M_1, \dots, M_k = L$$

en la que  $M_i \searrow^e M_{i-1}$ . Lo denotaremos por  $M \searrow L$ , o por  $L \nearrow M$ .

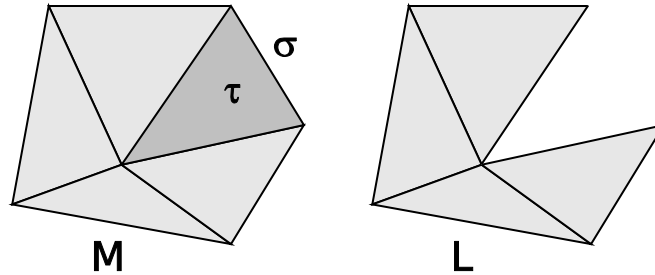


Figura 1.11:  $M$  se colapsa elementalmente a  $L$ .

**Nota 1.7.4.** Aunque cuando  $M$  se colapsa elementalmente a  $L$  admitimos que  $M = L$ , esta posibilidad quedara frecuentemente olvidada en las demostraciones, siendo el análisis de este caso siempre trivial.

Al colapsar simplicialmente un complejo no se altera el tipo homotópico de su realización geométrica. Más precisamente,

**Proposición 1.7.5.** *Si  $M$  colapsa a  $L$ , entonces  $|L|$  es un retracto por deformación fuerte de  $|M|$ .*

La idea de la demostración es clara y además es la que motiva el concepto de colapso: si  $L = M \setminus \{\sigma, \tau\}$  con  $\sigma$  cara libre de  $\tau$  en  $M$ , justamente se aprovecha el hecho de que  $\sigma$  no sea cara de nadie más para “empujarlo” sobre las otras caras de  $\tau$ , haciendo así desaparecer a ambos.

A continuación repasaremos algunos hechos básicos sobre complejos simpliciales *colapsables*, es decir, aquellos que se colapsan a alguno de sus vértices.

**Observación 1.7.6.** Supongamos que

$$M \searrow^e M \setminus \{\sigma, \tau\} \searrow^e M \setminus \{\sigma, \tau, \sigma', \tau'\},$$

y que  $\dim \tau' > \dim \tau$ . Entonces,  $\sigma'$  será cara libre de  $\tau'$  en  $M$  ya que si se tiene un  $\alpha \in M$  tal que  $\sigma' \prec \alpha$ , al ser  $\sigma'$  cara libre de  $\tau'$  en  $M \setminus \{\sigma, \tau\}$ , necesariamente resulta que  $\alpha \in \{\sigma, \tau, \tau'\}$ , y por una cuestión de dimensiones se tiene  $\alpha = \tau'$ . Por otra parte, como  $\sigma$  es cara libre de  $\tau$  en  $M$ , con más razón lo es en  $M \setminus \{\sigma', \tau'\}$ . Queda entonces probado que

$$M \searrow^e M \setminus \{\sigma', \tau'\} \searrow^e M \setminus \{\sigma', \tau', \sigma, \tau\}.$$

Por lo tanto cuando un complejo colapsa a otro siempre se pueden reordenar los colapsos elementales de manera que se vayan haciendo primero los colapsos elementales que involucran pares de símlices de dimensiones  $n$  y  $n - 1$ , luego los pares de dimensiones  $n - 1$  y  $n - 2$ , y así siguiendo.

Para la proposición siguiente, recordemos primero que un *grafo* es un complejo simplicial homogéneo (ver la definición de *homogeneidad* en 2.1) de dimensión uno, y que un *árbol* es un grafo sin ciclos (o lo que es lo mismo, un grafo contráctil).

**Proposición 1.7.7.** *Todo árbol (finito) se colapsa a cualquiera de sus vértices.*

*Demostración.* Sea  $M$  un árbol, y sea  $w$  el vértice al que queremos colapsar a  $M$ . Razo- naremos inductivamente en la cantidad de aristas de  $M$ , estando claro el caso en que  $M$  tenga una sola arista.

Veamos primero que existe un vértice  $v$  que pertenece a una sola arista  $\sigma$ . Para esto tomemos un vértice  $v_0$  cualquiera, y una arista  $\{v_0, v_1\}$  cualquiera a la que este pertenezca. Supongamos definidos  $v_0, v_1, \dots, v_k$ . Si  $\{v_{k-1}, v_k\}$  es la única arista a la que pertenece  $v_k$ , listo: tomamos  $v = v_k, \sigma = \{v_{k-1}, v_k\}$ . Si no, tendremos que este es parte de cierta arista  $\{v_k, v_{k+1}\}$ , con  $v_{k+1} \neq v_k$ . Más aún, se tendrá que  $v_{k+1} \neq v_i$  para todo  $0 \leq i \leq k$ , ya que  $M$  no admite ciclos. Entonces al tener  $M$  sólo finitos vértices, este proceso debe detenerse en algún momento, dando con el vértice buscado.

Si  $w \neq v$ , entonces

$$M \searrow^e M \setminus \{v, \sigma\} \searrow w,$$

teniéndose este último colapso por hipótesis inductiva, ya que  $M \setminus \{v, \sigma\}$  es un árbol con una arista menos que  $M$ .

Si  $w = v$ , por hipótesis inductiva se tiene que si  $\sigma = \{v, v'\}$  entonces

$$M \setminus \{v, \sigma\} \searrow v',$$

y al combinar este colapso con el colapso elemental  $\sigma \searrow^e v$  obtenemos que  $M \searrow v$ . □

**Proposición 1.7.8.** *Un complejo simplicial colapsable se colapsa a cualquiera de sus vértices.*

*Demostración.* Sea  $M$  un complejo simplicial colapsable. Reordenando los colapsos elementales tal como se vio en la última observación, podemos “dejar para el final” aquellos que involucran pares de símplices de dimensiones 1 y 0. Es decir, podemos suponer que  $M \searrow N$ , donde  $N$  es un subcomplejo colapsable, que contiene a todos los vértices de  $M$  y satisface  $\dim N \leq 1$ . Entonces  $N$  debe ser un árbol, y por lo visto en la proposición anterior, se colapsa a cualquiera de sus vértices. Luego, también  $M$  se colapsa a cualquiera de sus vértices. □

**Definición 1.7.9.** Sean  $M$  y  $N$  dos complejos simpliciales. Diremos que  $M$  y  $N$  tienen el mismo *tipo homotópico simple* si existe una sucesión de complejos simpliciales

$$M = M_0, M_1, \dots, M_k = N$$

donde para todo  $1 \leq i \leq k$  se tiene que  $M_i \searrow^e M_{i-1}$  o  $M_i \nearrow^e M_{i-1}$ .

En otras palabras, dos complejos simpliciales tienen el mismo tipo homotópico simple si se puede obtener uno del otro a partir de una sucesión finita de colapsos/expansiones elementales.

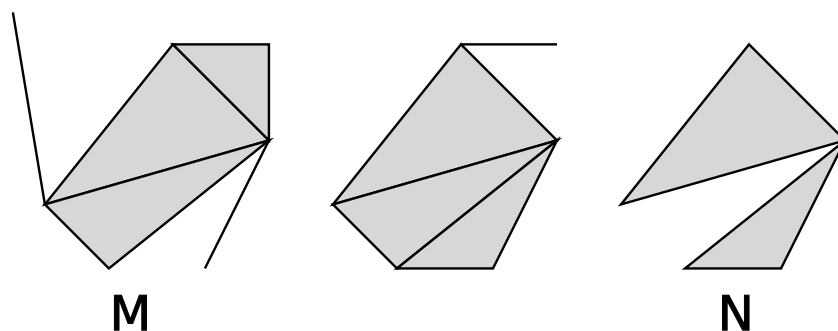


Figura 1.12:  $M$  y  $N$  tienen el mismo tipo homotópico simple.

**Observación 1.7.10.** Por lo visto en la proposición 1.7.5, si  $M$  y  $N$  tienen el mismo tipo homotópico simple entonces  $|M|$  y  $|N|$  tienen el mismo tipo homotópico.

A modo de excusa para introducir algunas técnicas y resultados básicos sobre colapsos simpliciales, apuntamos a probar que el tipo homotópico simple de un complejo simplicial no cambia al subdividirlo estelarmente.

**Proposición 1.7.11.** *Sea  $M$  un complejo simplicial, y sean  $K, L$  y  $N$  subcomplejos de  $M$ . Supongamos que  $K \cap N \subseteq L$  y que  $N \searrow L$ . Entonces,  $N + K \searrow L + K$ .*

*Demostración.* Dado que  $N \searrow L$ , se tiene una sucesión de colapsos elementales

$$N = N_0 \searrow^e N_1 \searrow^e \dots \searrow^e N_k = L.$$

Escribamos  $N_i = N_{i+1} \setminus \{\sigma, \tau\}$ , con  $\sigma$  cara libre de  $\tau$  en  $N_{i+1}$ . Veamos que  $\sigma$  es cara libre de  $\tau$  en  $N_{i+1} + K$ , por lo que tendremos que  $N_i + K \searrow^e N_{i+1} + K$ . En efecto, sea  $\tau' \in N_{i+1} + K$  tal que  $\sigma \prec \tau'$ . Si  $\tau' \in K$ , entonces  $\sigma \in K \cap N \subseteq L \subseteq N_i$ , lo cual es absurdo. Luego  $\tau' \in N_{i+1}$ , y por lo tanto  $\tau' = \tau$ .

Entonces,

$$N + K = N_0 + K \searrow^e N_1 + K \searrow^e \dots \searrow^e N_k + K = L + K,$$

lo cual prueba que  $N + K \searrow L + K$ . □

**Proposición 1.7.12.** *Sea  $M$  un complejo simplicial. Sean  $\sigma \in M$  un símplex y  $K \subseteq M$  un subcomplejo tales que existe el join  $\bar{\sigma}K$ . Entonces, para todo subcomplejo  $L \subseteq K$  se tiene que  $\bar{\sigma}K \searrow \bar{\sigma}L$ .*

*Demostración.* Primero supongamos que  $\sigma = \{v\}$  con  $v$  vértice de  $M$ . Veamos que  $vK \searrow vL$  inductivamente en la cantidad de símplex de  $K \setminus L$ , siendo trivial el caso en que este número sea cero.

Tomemos  $\tau$  símplex maximal entre los de  $K \setminus L$ , y consideremos el join  $\nu = v\tau$ . Entonces  $\tau$  es cara libre de  $\nu$  en  $vK$ , por lo que  $vK \searrow^e vK \setminus \{\tau, \nu\} = v(K \setminus \{\tau\}) \searrow vL$ , valiendo el último colapso por hipótesis inductiva.

Ahora para un  $\sigma \in M$  cualquiera, tomemos  $v \in \sigma$  y  $\nu = \sigma \setminus \{v\}$ , de manera que  $\bar{\sigma} = v\bar{\nu}$ . Entonces por lo probado para los vértices, tenemos que

$$\bar{\sigma}K = v\bar{\nu}K \searrow v\bar{\nu}L \searrow = \bar{\sigma}L.$$

□

**Corolario 1.7.13.** *Sea  $M$  un complejo simplicial. Sean  $\tau \in M$  un símplex y  $N \subseteq M$  un subcomplejo tales que existe el join  $\bar{\tau}N$ . Entonces,  $\bar{\tau}N$  es colapsable.*

*En particular, todo cono es colapsable.*

*Demostración.* Se sigue inmediatamente de la proposición anterior si escribimos  $\tau = v\nu$  y ponemos  $\sigma = \{v\}$ ,  $K = \bar{\nu}N$ ,  $L = \emptyset$ . □

**Proposición 1.7.14.** *Sea  $M$  un complejo simplicial que se puede escribir como  $M = \bar{\sigma}K + Q$ , para cierto símplex  $\sigma \in M$  y subcomplejos  $K, Q \subseteq M$  tales que  $\sigma \notin Q$ . Si  $K \searrow L$ , entonces*

$$M \searrow \bar{\sigma}L + \dot{\sigma}K + Q.$$

*Demostración.* Es fácil, usando un argumento inductivo, comprobar que basta con probar la proposición en el caso en el que  $K \searrow^e L$ .

Supongamos entonces que  $L = K \setminus \{\nu, \tau\}$ , con  $\nu$  cara inmediata de  $\tau$  en  $K$ . No es difícil chequear que entonces

$$M = \bar{\sigma}K + Q = (\bar{\sigma}L + \dot{\sigma}K + Q) \cup \{\sigma\nu, \sigma\tau\},$$

por lo que bastará con probar que  $\sigma\nu$  es cara libre de  $\sigma\tau$  en  $M$ .

En efecto, sea  $\mu \in M$  tal que  $\sigma\nu \prec \mu$ . Dado que  $\sigma \notin Q$  y  $\sigma < \mu$ , se tiene que  $\mu \notin Q$ . Entonces al ser  $M = \bar{\sigma}K + Q$  resulta que  $\mu \in \bar{\sigma}K$ . El hecho de que  $\sigma < \mu$  fuerza a que entonces exista  $\tau' \in K$  tal que  $\mu = \sigma\tau'$  y por lo tanto  $\nu \prec \tau'$ . Luego  $\tau' = \tau$  y por lo tanto  $\mu = \sigma\tau$ , como queríamos demostrar.  $\square$

**Corolario 1.7.15.** *Si en las hipótesis de la proposición anterior  $L$  es un vértice de  $K$  (i.e., si  $K$  es colapsable), entonces*

$$M \searrow \dot{\sigma}K + Q.$$

*Demostración.* Escribamos  $L = \{v\}$  con  $v \in K$ . Por la proposición anterior,

$$M \searrow v\bar{\sigma} + \dot{\sigma}K + Q.$$

Por el corolario 1.7.13 tenemos que  $v\bar{\sigma} \searrow v$ . Como  $v\bar{\sigma} \cap (\dot{\sigma} + Q) = \{v\}$ , la proposición 1.7.11 nos dice que

$$v\bar{\sigma} + \dot{\sigma}K + Q \searrow v + \dot{\sigma}K + Q = \dot{\sigma}K + Q,$$

lo cual prueba lo que buscábamos.  $\square$

**Teorema 1.7.16.** *Sea  $M$  un complejo simplicial. Supongamos que  $N$  es una subdivisión estelar de  $M$ . Entonces,  $M$  y  $N$  tienen el mismo tipo homotópico simple.*

*Demostración.* Podemos suponer sin pérdida de generalidad que  $N$  es una subdivisión estelar elemental de  $M$ , con respecto a cierto  $a \in \sigma^\circ$ , con  $\sigma \in M$ . Recordemos que si ponemos  $P = \text{lk}(\sigma, M)$  y  $Q = \sigma^c$ , entonces

$$M = \bar{\sigma}P + Q, \quad N = a\dot{\sigma}P + Q.$$

Por el corolario 1.7.13 tenemos que  $a\bar{\sigma}P \searrow a\dot{\sigma}P$ . Como  $\sigma \notin Q$ , se tiene que  $(a\bar{\sigma}P) \cap Q \subseteq a\dot{\sigma}P$ . Entonces por la proposición 1.7.11 resulta que  $a\bar{\sigma}P + Q \searrow a\dot{\sigma}P + Q = N$ . Siendo  $\bar{\sigma}P$  colapsable por el corolario 1.7.13, el corolario 1.7.15 (poniendo  $\sigma = \{a\}$  y  $K = \bar{\sigma}P$ ) nos dice que  $a\bar{\sigma}P + Q \searrow M$ .

Así, hemos probado que

$$M \nearrow a\bar{\sigma}P + Q \searrow N,$$

por lo que  $M$  y  $N$  tienen el mismo tipo homotópico simple.  $\square$

## Pegado de símplices

**Definición 1.7.17.** Sea  $M$  un complejo simplicial, y sea  $L$  un subcomplejo de  $M$ . Diremos que  $M$  se obtiene de  $L$  adjuntando (o pegando) un  $p$ -sıplex si existe  $\sigma^{(p)} \in M \setminus L$  tal que  $M = L \cup \{\sigma\}$ .

Denotaremos esto por  $M = L \cup_{\dot{\sigma}} \sigma$ , remarcando de esta manera que dado que  $M = L \cup \{\sigma\}$  y la unión es disjunta, se tendra necesariamente que  $\dot{\sigma} \subseteq L$ .

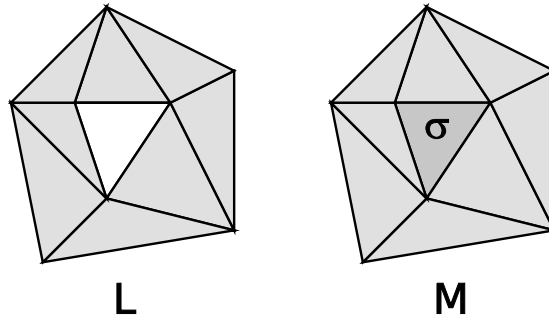


Figura 1.13:  $M$  se obtiene de  $L$  adjuntando un 2-sıplex.

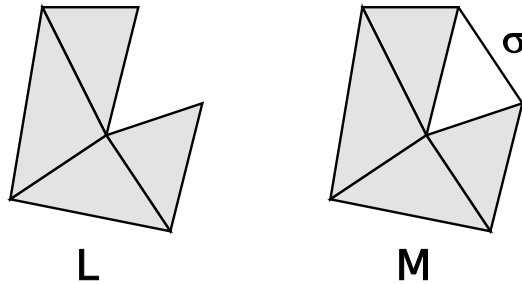


Figura 1.14:  $M$  se obtiene de  $L$  adjuntando un 1-sıplex.

Para entender qué pasa topológicamente cuando adjuntamos un  $p$ -sıplex, demos un breve panorama sobre la adjuncion topológica de celdas. De paso, aprovecharemos para recordar qué es un CW-complejo. Este concepto fue introducido por J. H. C. Whitehead para modelar espacios topológicos que se obtienen “pegando celdas”, sin la rigidez con la que estas se pegan en los poliedros. Para ver este tema con profundidad se puede consultar [7], por ejemplo.

Sea  $X$  un espacio topológico. Dada una funcion continua  $\varphi : S^{n-1} \rightarrow X$ , podemos obtener un nuevo espacio topológico de la siguiente manera. La idea es “pegarle” a  $X$  un disco  $n$ -dimensional a lo largo de su borde, siendo  $\varphi$  justamente la *funcion de adjuncion*, que nos dice cómo es que hay que pegar el borde del disco en  $X$ .

Rigurosamente, se considera la unión disjunta  $X \amalg D^n$  y se define  $X \cup e^n$  como el espacio topológico cociente que se obtiene de ella identificando  $x$  con  $\varphi(x)$  para todo

$x \in S^{n-1}$ . Cuando necesitemos ser más precisos en cuanto a la función de adjunción, denotaremos  $X \cup e^n = X \cup_{\varphi} e^n$ .

Más generalmente, dados espacios topológicos  $X$  e  $Y$ , se dice que  $Y$  se obtiene de  $X$  adjuntándole a este una  $n$ -celda si  $Y = X \cup_{\varphi} e^n$  para cierta función continua  $\varphi : S^{n-1} \rightarrow X$ . Categóricamente, esto equivale a que se tenga un push-out

$$\begin{array}{ccc} S^{n-1} & \xrightarrow{\varphi} & X \\ \downarrow i & & \downarrow \\ D^n & \longrightarrow & Y \end{array} .$$

Al no imponerle restricción alguna a la función de adjunción, la clase de espacios que podemos obtener de esta manera es realmente amplia. Por ejemplo, si consideramos  $\varphi : S^1 \rightarrow S^1$  dada por  $z \mapsto z^2$  (pensando a  $S^1 \subseteq \mathbb{C}$ ), entonces  $S^1 \cup_{\varphi} e^2$  es el plano proyectivo real.

Para tener algo más de rigidez al pegar una celda, se puede pedirle a la función de adjunción involucrada que determine un homeomorfismo con su imagen. En tal caso diremos que la adjunción es *regular*.

Así como se adjunta una, se pueden adjuntar muchas celdas simultáneamente. Un *CW-complejo* (finito) es entonces por definición un espacio topológico  $X$  tal que se tiene una sucesión

$$\emptyset = X_0, X_1, \dots, X_m = X$$

donde  $X_{k+1}$  se obtiene de  $X_k$  adjuntando una cantidad finita de  $k$ -celdas. Los CW-complejos construidos mediante adjunciones regulares de celdas se llaman *regulares*. Estos son más rígidos que los CW-complejos, pero no lo son tanto como los complejos simpliciales.

Volviendo a los complejos simpliciales, la siguiente proposición nos muestra que al adjuntar un  $p$ -simplex combinatoriamente, topológicamente estamos adjuntando una  $p$ -celda, de manera regular.

**Proposición 1.7.18.** *Si  $M$  se obtiene de  $L$  adjuntando un  $p$ -simplex  $\sigma$ , entonces  $|M| = |L| \cup_{|\varphi|} e^p$ , donde  $\varphi : \dot{\sigma} \rightarrow L$  es la inclusión.*

A partir de este resultado se ve fácilmente que todo poliedro es un CW regular. La mayor rigidez de los poliedros con respecto a los CW-regulares viene dada porque en los primeros cada función de adjunción involucrada más que un homeomorfismo es la misma identidad, una vez correstringida a su imagen (y además las celdas en los complejos simpliciales quedan determinadas por los vértices que la componen). Esta diferencia se ve luego reflejada al considerar el tipo de subdivisiones que “basta” considerar en uno u otro contexto.

## Capítulo 2

# Variedades combinatorias

Como mencionáramos antes, los complejos simpliciales se usan para modelar combinatoriamente una clase muy amplia de espacios topológicos, y poder así estudiarlos usando métodos combinatorios. En este capítulo nos concentraremos en una clase especial de complejos simpliciales que resultan útiles para estudiar cierto tipo de variedades topológicas, las llamadas *PL-variedades*.

En una variedad topológica de dimensión  $n$ , todo punto tiene un entorno o bien homeomorfo a un abierto de  $\mathbb{R}^n$  (si el punto está en el interior de la variedad), o bien homeomorfo a un abierto de  $\mathbb{R}_+^n$  (si el punto está en el borde de la variedad). En particular, todo punto tiene un entorno cuyo borde es o bien homeomorfo a  $S^{n-1}$  o bien a  $B^{n-1}$ .

Para emular esto en el contexto de los complejos simpliciales, disponemos de nociones combinatorias borde de entorno (el link), de homeomorfismo (PL-isomorfismo) y de  $(n-1)$ -esfera y  $(n-1)$ -bola ( $\dot{\Delta}^n$  y  $\Delta^{n-1}$ ). Con estos ingredientes podemos hacer la definición de *variedad combinatoria*, que será la noción central de este capítulo.

Como objetivo último, buscamos probar que la realización geométrica de una variedad combinatoria es en efecto una variedad topológica. Más allá de este resultado, las técnicas utilizadas en el camino para probar resultados intermedios resultan interesantes y dan un panorama de cómo se trabaja en el contexto de las variedades combinatorias.

No siendo las variedades combinatorias el tema central de estudio de esta tesis, algunos de los resultados enunciados no serán demostrados aquí. Un estudio detallado de este tema puede encontrarse en [5].

### 2.1. El borde de un complejo homogéneo

**Definición 2.1.1.** Sea  $M$  un complejo simplicial. Diremos que es *homogéneo* si todos los símplexes maximales de  $M$  tienen la misma dimensión. Si  $\dim M = n$ , esto equivale a que todo símplex esté contenido en algún  $n$ -símplex.

Los siguientes ejemplos/observaciones se verifican inmediatamente:

- Dado un símplex  $\sigma \in M$ , entonces  $\bar{\sigma}$  y  $\dot{\sigma}$  son homogéneos.  $\Delta^n$  y  $\dot{\Delta}^n$  son homogéneos.
- Dado un complejo simplicial  $M$  y  $\alpha M$  subdivisión de  $M$ , entonces  $M$  es homogéneo si y sólo si  $\alpha M$  lo es.

- Dados complejos simpliciales  $M$  y  $N$  tales que  $M =_{PL} N$ , entonces  $M$  es homogéneo si y sólo si  $N$  lo es.
- Si  $M$  es un complejo simplicial homogéneo  $n$ -dimensional y  $\sigma^{(p)} \in M$ , entonces  $\text{st}(\sigma)$  es homogéneo  $n$ -dimensional y  $\text{lk}(\sigma)$  es homogéneo  $(n - p - 1)$ -dimensional.

Dimos en el capítulo anterior la noción de borde de un simplex. Extenderemos ahora esta noción a los complejos simpliciales homogéneos.

**Definición 2.1.2.** Sea  $M$  un complejo simplicial homogéneo  $n$ -dimensional. Definimos su *borde*, que denotaremos por  $\dot{M}$ , como el subcomplejo de  $M$  generado por aquellos  $(n - 1)$ -símplices que sean cara de una cantidad impar de  $n$ -símplices.

Notemos que  $\dot{M}$ , a menos que sea vacío (cosa que sucede precisamente cuando todo  $(n - 1)$ -simplex de  $M$  es cara de una cantidad par de  $n$ -símplices), es homogéneo de dimensión  $n - 1$ . Si  $\dot{M} = \emptyset$ , diremos que  $M$  no tiene borde.

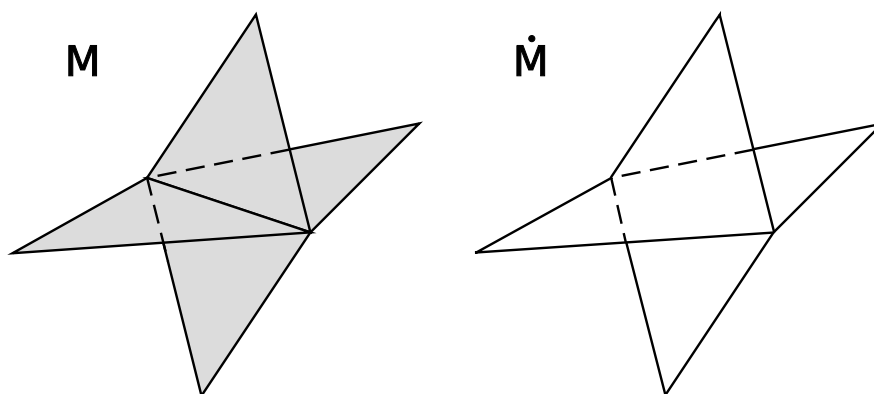


Figura 2.1: El borde de un complejo simplicial homogéneo.

**Ejemplo 2.1.3.** Dado un simplex  $\sigma \in M$ , se tiene que  $\dot{\sigma} = (\bar{\sigma})$ , por lo que la noción de borde que acabamos de definir para complejos simpliciales homogéneos extiende la que teníamos para símplices.

**Ejemplo 2.1.4.** Sea  $M$  un complejo simplicial homogéneo  $n$ -dimensional, y sea  $v \in M$  un vértice.

- (i)  $\text{lk}(v) \subseteq (\text{st}(v))$ .
- (ii) Si  $v \notin \dot{M}$ , entonces  $\text{lk}(v) = (\text{st}(v))$ .

Para ver (i), dado que  $\text{lk}(v)$  es homogéneo  $(n - 1)$ -dimensional basta con tomar  $\sigma^{(n-1)} \in \text{lk}(v)$  y ver que  $\sigma \in (\text{st}(v))$ . En efecto, sea  $\sigma^{(n-1)} \in \text{lk}(v)$ . Si  $\tau \in M$  tal que  $v \in \tau$  y  $\sigma < \tau$ , necesariamente es  $\tau = v\sigma$ . Por lo tanto,  $\sigma$  es cara de sólo un  $n$ -simplex de  $\text{st}(v)$ .

Veamos ahora (ii), lo cual es falso sin pedir que  $v \notin \dot{M}$  (considerar por ejemplo  $M = \Delta^1, v = 0$ ). Para ver la inclusión que hace falta, basta con considerar los símplices

que generan a  $(\text{st}(v))^\cdot$ . Tomemos entonces  $\sigma^{(n-1)}$  que sea cara de una cantidad impar de  $n$ -símplices  $\tau$  con  $\tau \in \text{st}(v)$ . Si  $v \in \sigma$ , dado que  $v \notin \dot{M}$  tenemos que  $\sigma$  es cara de una cantidad par de  $n$ -símplices  $\tau$ , los cuales estarán en  $\text{st}(v)$ , pues contendrán a  $v$ . Siendo esto imposible, tenemos que  $v \notin \sigma$  y por lo tanto  $\sigma \in \text{lk}(v)$ .

Algunas propiedades del borde se resumen en la siguiente

**Proposición 2.1.5.** *Sean  $M$  y  $N$  complejos simpliciales homogéneos.*

- (i)  $(\dot{M})^\cdot = \emptyset$ .
- (ii) Si  $M = KL$  con  $K$  y  $L$  subcomplejos homogéneos de  $M$ , entonces  $\dot{M} = \dot{K}L + K\dot{L}$  (“regla de Leibniz”).
- (iii) Si  $\alpha M$  es una subdivisión de  $M$ , entonces  $(\alpha M)^\cdot = \alpha \dot{M}$ .
- (iv) Si  $f : M \rightarrow N$  un isomorfismo simplicial, entonces  $f(\dot{M}) = \dot{N}$ .

*Demostración.* Demostremos sólo (i) para al menos dar una idea de cuál es la técnica a utilizar.

Sea  $\nu^{(n-2)} \in \dot{M}$ . Teniendo en mente que para cada  $\tau^{(n)} \in M$  con  $\tau > \nu$  hay exactamente dos  $(n-1)$ -símplices distintos entre  $\tau$  y  $\nu$ , no es difícil ver que

$$2 \#\{\tau^{(n)} \in M : \tau > \nu\} = \sum_{\sigma \succ \nu} \#\{\tau \in M : \tau \succ \sigma\},$$

por lo que en particular

$$\sum_{\substack{\sigma \succ \nu \\ \sigma \in \dot{M}}} \#\{\tau \in M : \tau \succ \sigma\} + \sum_{\substack{\sigma \succ \nu \\ \sigma \notin \dot{M}}} \#\{\tau \in M : \tau \succ \sigma\}$$

es un número par. Como para  $\sigma \notin \dot{M}$  el número  $\#\{\tau \in M : \tau \succ \sigma\}$  es par, concluimos que

$$\sum_{\substack{\sigma \succ \nu \\ \sigma \in \dot{M}}} \#\{\tau \in M : \tau \succ \sigma\}$$

es un número par. Pero como para  $\sigma \in \dot{M}$  el número  $\#\{\tau \in M : \tau \succ \sigma\}$  es impar,  $\#\{\sigma \in \dot{M} : \sigma > \nu\}$  es entonces un número par, lo cual prueba la afirmación.  $\square$

**Observación 2.1.6.** Usando (iii) de esta proposición, se puede ver que si  $M$  es un complejo simplicial homogéneo y  $\alpha M$  es una subdivisión de  $M$ , entonces el homeomorfismo  $|\alpha M| \rightarrow |M|$  al que hace referencia la definición 1.3.1 aplica  $|(\alpha M)|$  en  $|\dot{M}|$ .

En particular cuando  $M$  y  $N$  son complejos simpliciales homogéneos tales que  $M =_{PL} N$ , se tiene un homeomorfismo  $|M| \rightarrow |N|$  que aplica  $|\dot{M}|$  en  $|\dot{N}|$ .

## 2.2. Variedades combinatorias

Procedamos a formalizar la definición de variedad combinatoria que esbozamos en el comienzo de este capítulo.

**Definición 2.2.1.** Sea  $M$  un complejo simplicial.

- (i) Diremos que  $M$  es una  $n$ -bola combinatoria si  $M =_{PL} \Delta^n$ , y lo denotaremos por  $M = B^n$ .
- (ii) Diremos que  $M$  es una  $n$ -esfera combinatoria si  $M =_{PL} \dot{\Delta}^{n+1}$ , y lo denotaremos por  $M = S^n$ .

**Ejemplo 2.2.2.** Para todo  $n \in \mathbb{N}_0$ , se tiene que  $(B^n)^\cdot = S^{n-1}$ .

En efecto, si  $M = B^n$ , es porque se tienen subdivisiones  $\alpha_1 M$  y  $\alpha_2 \Delta^n$  tales que  $\alpha_1 M \simeq \alpha_2 \Delta^n$ . Entonces

$$\alpha_1(\dot{M}) = (\alpha_1 M)^\cdot \simeq (\alpha_2 \Delta^n)^\cdot = \alpha_2 \dot{\Delta}^n,$$

lo cual nos dice que  $\dot{M} = S^{n-1}$ .

**Definición 2.2.3.** Sea  $M$  un complejo simplicial homogéneo de dimensión  $n$ . Diremos que  $M$  es una  $n$ -variedad combinatoria (que abreviaremos  $n$ -vc, o simplemente vc cuando no haya lugar a confusiones) si para todo  $v \in V_M$  se tiene que  $\text{lk}(v) = B^{n-1}$  o  $\text{lk}(v) = S^{n-1}$ .

**Ejemplo 2.2.4.**  $\Delta^n$  y  $\dot{\Delta}^{n+1}$  son  $n$ -vc.

En efecto, para todo  $v \in \Delta^n$  se tiene que  $\text{lk}(v, \Delta^n) \simeq \Delta^{n-1}$ , y para todo  $v \in \dot{\Delta}^{n+1}$  se tiene que  $\text{lk}(v, \dot{\Delta}^{n+1}) \simeq \dot{\Delta}^n$ .

Más en general, el teorema 2.2.7 nos dirá que toda  $n$ -esfera/bola combinatoria es una  $n$ -vc.

Nuestro objetivo es probar los siguientes dos teoremas. Estos nos permitirán en particular comparar las nociones de variedad combinatoria y de pseudovariedad, la cual veremos más adelante.

**Definición 2.2.5.** Sea  $M$  un complejo simplicial homogéneo  $n$ -dimensional. Diremos que  $\sigma^{(p)} \in M$  es *regular* si  $\text{lk}(\sigma) = S^{n-p-1}$  o  $\text{lk}(\sigma) = B^{n-p-1}$ .

Notemos entonces que una  $n$ -vc es precisamente un complejo simplicial homogéneo  $n$ -dimensional en el que todos los vértices son regulares.

**Teorema 2.2.6.** *En una variedad combinatoria, todo simplex es regular.*

**Teorema 2.2.7.** *Dados dos complejos simpliciales PL-isomorfos, uno de ellos es una  $n$ -variedad combinatoria si y sólo si el otro lo es.*

Para probarlos necesitaremos entre otras cosas de los dos lemas que enunciaremos a continuación, los cuales no probaremos siendo sus demostraciones de carácter rutinario.

**Lema 2.2.8.** Sea  $M$  un complejo simplicial, y sean  $\nu, \sigma$  y  $\tau$  símplices de  $M$  tales que  $\tau = \nu\sigma$ . Entonces,

$$\text{lk}(\tau, M) = \text{lk}(\nu, \text{lk}(\sigma, M)).$$

**Lema 2.2.9.** Sean  $M_1$  y  $M_2$  dos complejos simpliciales tales que  $M_1 = N_1L_1$  y  $M_2 = N_2L_2$ . Si  $N_1 =_{PL} N_2$  y  $L_1 =_{PL} L_2$ , entonces  $M_1 =_{PL} M_2$ .

Como consecuencia de este último lema, tenemos la siguiente

**Proposición 2.2.10.**

- (i)  $B^pB^q = B^{p+q+1}$ .
- (ii)  $B^pS^q = B^{p+q+1}$ .
- (iii)  $S^pS^q = S^{p+q+1}$ .

Notemos que en particular esta proposición nos dice en una  $n$ -vc, el star de todo vértice es una  $n$ -bola combinatoria. Volveremos sobre esto en la proposición 2.2.15

*Demostración.* Veamos (ii); las otras dos se prueban más fácilmente.

Por el lema anterior, basta probar que  $\Delta^p \dot{\Delta}^{q+1} =_{PL} \Delta^{p+q+1}$ . Para esto fijemos  $q$  y hagamos inducción en  $p$ .

Si  $\beta\Delta^{q+1}$  denota a la subdivisión estelar de  $\Delta^{q+1}$  en un punto cualquiera del interior de su  $q$ -símplex, entonces

$$\Delta^0 \dot{\Delta}^{q+1} \simeq \beta\Delta^{q+1} =_{PL} \Delta^{q+1}.$$

Ahora suponiendo que vale para  $p$ , usando nuevamente el lema y recordando lo visto en el ejemplo 1.1.16, tenemos que

$$\Delta^{p+1} \dot{\Delta}^{q+1} = \Delta^0 \Delta^p \dot{\Delta}^{q+1} =_{PL} \Delta^0 \Delta^{p+q+1} =_{PL} \Delta^{p+q+2}.$$

□

Para cada  $n \in \mathbb{N}_0$  consideremos las proposiciones

- $\mathcal{P}_n$ : El teorema 2.2.6 es válido para toda  $n$ -vc  $M$ .
- $\mathcal{Q}_n$ : El teorema 2.2.7 es válido para toda  $n$ -vc  $M$ .

El grueso de la demostración de los dos teoremas se concentra en el siguiente resultado.

**Lema 2.2.11.** Supongamos  $\mathcal{P}_n$  verdadera. Sea  $M$  un complejo simplicial, y sean  $\beta M$  una subdivisión estelar de  $M$  y  $\alpha M$  una subdivisión arbitraria de  $M$ .

- (i) Si  $M$  es una  $n$ -vc, entonces  $\beta M$  es una  $n$ -vc.
- (ii) Si  $\alpha M$  es una  $n$ -vc, entonces  $M$  es una  $n$ -vc.

*Demostración.* Probemos primero (i). Que  $\beta M$  es homogéneo  $n$ -dimensional es claro. Podemos suponer que  $\beta M$  es elemental, con respecto a cierto  $a \in |M|$ . Sea  $\sigma^{(p)} \in M$  el único símplex tal que  $a \in \sigma^\circ$ . Tomemos  $v$  vértice de  $\beta M$  y veamos que  $\text{lk}(v, \alpha M)$  es una  $(n-1)$ -bola/esfera (combinatoria), separando en casos.

- $v = a$ .

Entonces se puede ver que  $\text{lk}(v, \beta M) = \dot{\sigma} \text{lk}(\sigma, M)$ . Como  $\dot{\sigma}$  es una  $(p-1)$ -esfera y por hipótesis  $\text{lk}(\sigma, M)$  es una  $(n-p-1)$ -bola/esfera, por la proposición 2.2.10 resulta que  $\text{lk}(v, \beta M)$  es una  $(n-1)$ -bola/esfera.

- $v \notin \sigma$ .

Entonces se puede ver que  $\text{lk}(v, \beta M) = \beta \text{lk}(v, M)$ . En particular, se tiene que  $\text{lk}(v, \beta M) =_{PL} \text{lk}(v, M)$ , y este último es una  $(n-1)$ -bola/esfera.

- $v \in \sigma$ .

Sea  $\nu$  la cara inmediata de  $\sigma$  opuesta a  $v$ , de manera que  $\sigma = v\nu$ . Sea  $b \in \nu^\circ$ . Consideremos  $\beta' \text{lk}(v, M)$  la subdivisión estelar elemental de  $\text{lk}(v, M)$  en  $b$ . Entonces el morfismo simplicial  $\text{lk}(v, \beta M) \rightarrow \beta' \text{lk}(v, M)$  que lleva  $a$  en  $b$  y deja a todos los otros vértices de  $\text{lk}(v, \beta M)$  fijos es un isomorfismo, por lo que  $\text{lk}(v, \beta M)$  es una  $(n-1)$ -bola/esfera.

Ahora veamos (ii). Nuevamente, es inmediato ver que  $M$  es homogéneo  $n$ -dimensional. Sea  $v$  un vértice de  $M$ . Sabemos que es entonces un vértice de  $\alpha M$ , por lo que  $\text{lk}(v, \alpha M)$  es una  $(n-1)$ -bola/esfera. Sean  $c_1, c_2, \dots, c_k$  los vértices de  $\text{lk}(v, \alpha M)$ . Para cada  $i$ , proyectamos radialmente a  $c_i$  desde  $v$  obteniendo un punto  $d_i \in |\text{lk}(v, M)|$ . Esto inducirá  $\alpha'(\text{lk}(v, M))$  subdivisión de  $\text{lk}(v, M)$  de manera que la aplicación  $\text{lk}(v, \alpha M) \rightarrow \alpha'(\text{lk}(v, M))$  dada por  $c_i \mapsto d_i$  es un isomorfismo simplicial. Vemos así que  $\text{lk}(v, M) =_{PL} \text{lk}(v, \alpha M)$ , y este último es una  $(n-1)$ -bola/esfera. □

*Demostración de los teoremas 2.2.6 y 2.2.7.*

Las proposiciones  $\mathcal{P}_0$  y  $\mathcal{Q}_0$  son trivialmente verdaderas. Si probamos que para todo  $n \in \mathbb{N}$  se tienen

- (a)  $\mathcal{P}_n \Rightarrow \mathcal{Q}_n$ .
- (b)  $\mathcal{Q}_k \quad (0 \leq k \leq n-1) \Rightarrow \mathcal{P}_n$ ,

entonces ambos teoremas quedarán demostrados.

Veamos (a). Supongamos entonces que  $N$  es una  $n$ -vc, y que  $M$  es un complejo simplicial tal que  $M =_{PL} N$ . Tenemos entonces subdivisiones  $\alpha_1 M$  y  $\alpha'_1 N$  tales que  $\alpha_1 M \simeq \alpha'_1 N$ . Por la proposición 1.3.6, podemos encontrar  $\alpha'_2(\alpha'_1 N)$  subdivisión de  $\alpha'_1 N$  que sea subdivisión derivada (y por lo tanto estelar) de  $N$ . Vía el isomorfismo simplicial que teníamos, esta induce una subdivisión  $\alpha_2(\alpha_1 M)$  de manera que  $\alpha_2(\alpha_1 M) \simeq \alpha'_2(\alpha'_1 N)$ . Como estamos asumiendo que vale  $\mathcal{P}_n$ , por el ítem (i) del lema anterior tenemos que  $\alpha'_2(\alpha'_1 N)$  es una  $n$ -vc, y siendo isomorfa a ella,  $\alpha_2(\alpha_1 M)$  también es una  $n$ -vc. El ítem (ii) del lema nos permite concluir entonces que  $M$  es una  $n$ -vc.

Veamos (b). Dada una  $n$ -vc  $M$ , queremos ver que todos sus símlices son regulares. Para los vértices no hay nada que hacer. Dado  $p \geq 1$ , suponiendo que los  $(p-1)$ -símlices de  $M$  son regulares, tomemos  $\sigma \in M$  un  $p$ -símplex. Sea  $v$  un vértice cualquiera de  $\sigma$  y sea

$\nu$  la cara inmediata de  $\sigma$  opuesta a  $v$ , de manera que  $\sigma = v\nu$ . Entonces por el lema 2.2.8 tenemos que  $\text{lk}(\sigma, M) = \text{lk}(v, \text{lk}(\nu, M))$ . Bastará entonces con probar que  $\text{lk}(\nu, M)$  es una  $(n-p)$ -vc.

Como  $\nu$  es un símplex regular de  $M$ ,  $\text{lk}(\nu, M)$  es una  $(n-p)$ -bola/esfera. Pero siendo  $\Delta^{n-p}$  y  $\dot{\Delta}^{n-p+1}$  dos  $(n-p)$ -vc, por  $\mathcal{Q}_{n-p}$  tenemos, como queríamos, que  $\text{lk}(\nu, M)$  es una  $(n-p)$ -vc. □

**Observación 2.2.12.** Sea  $M$  una  $n$ -vc, y sea  $\sigma \in M$  un  $(n-1)$ -símplex. Por el teorema 2.2.6  $\sigma$  es regular, esto es,  $\text{lk}(\sigma) = B^0 = \{*\}$  o  $\text{lk}(\sigma) = S^0 = \{*, *'\}$ . De esto se desprende que todo  $(n-1)$ -símplex de  $M$  es cara de a lo sumo dos  $n$ -símplices, y por lo tanto un  $(n-1)$  símplex de  $M$  estará en  $\dot{M}$  si y sólo si es cara de exactamente un  $n$ -símplex, si y sólo si su link es una 0-bola.

El siguiente resultado generaliza lo recién dicho.

**Proposición 2.2.13.** Sea  $M$  una  $n$ -vc, y sea  $\sigma^{(p)} \in M$ . Entonces,  $\sigma \in \dot{M}$  si y sólo si  $\text{lk}(\sigma) = B^{n-p-1}$ .

*Demostración.* El caso  $p = n$  es trivial, así que supondremos  $p < n$ .

Sabemos que  $\text{lk}(\sigma) = B^{n-p-1}$  o  $\text{lk}(\sigma) = S^{n-p-1}$ , pues  $\sigma$  es regular. Entonces, basta con probar que  $\sigma \in \dot{M}$  si y sólo si  $(\text{lk}(\sigma)) \neq \emptyset$ .

Supongamos que  $\sigma \in \dot{M}$ . Tenemos entonces  $\tau^{(n-1)} \in \dot{M}$  tal que  $\sigma < \tau$ . Sea  $\nu = \tau \setminus \sigma$ . Por el lema 2.2.8, se tiene que

$$\text{lk}(\tau, M) = \text{lk}(\nu, \text{lk}(\sigma)).$$

La observación anterior nos dice que el miembro izquierdo de esta igualdad es  $B^0$ . Como  $\text{lk}(\sigma)$  es una vc y  $\dim \nu = \dim \text{lk}(\sigma) - 1$ , de nuevo esta observación nos dice que  $\nu \in (\text{lk}(\sigma))$ , y en particular se tiene que  $(\text{lk}(\sigma)) \neq \emptyset$ .

Ahora supongamos que  $\sigma \notin \dot{M}$ . Como  $\text{lk}(\sigma)$  es una  $(n-p-1)$ -vc, por la observación basta con probar que si tomamos  $\nu^{(n-p-2)} \in \text{lk}(\sigma)$ , entonces  $\text{lk}(\nu, \text{lk}(\sigma)) = S^0$ . En efecto, tomemos un tal  $\nu$ . Entonces  $\tau = \sigma\nu$  es un  $(n-1)$ -símplex de  $M$  del cual  $\sigma$  es cara. En particular,  $\tau \notin \dot{M}$ , por lo que  $\text{lk}(\tau, M) = S^0$ . Usando nuevamente el lema 2.2.8 obtenemos lo buscado. □

El borde de una  $n$ -variedad topológica con borde es una  $(n-1)$ -variedad topológica sin borde. Combinatoriamente, sucede lo mismo.

**Proposición 2.2.14.** Sea  $M$  una  $n$ -vc con borde. Entonces,  $\dot{M}$  es una  $(n-1)$ -vc sin borde.

*Demostración.* Ya vimos que  $(\dot{M}) = \emptyset$ , por lo que lo que hay que ver es que  $\dot{M}$  es una  $(n-1)$ -vc.

Por lo visto en el ejemplo 2.2.2 (que nos dice que la proposición es válida para nuestro modelo local de vc), alcanzará con probar que para todo  $v \in \dot{M}$  se tiene

$$\text{lk}(v, \dot{M}) = (\text{lk}(v, M)) \dot{\phantom{M}}.$$

Sea entonces  $v \in \dot{M}$ . Sea  $Q = v^c$ . Dado que  $M = \text{st}(v, M) + Q = v \text{lk}(v, M) + Q$ , por la “regla de Leibniz” tenemos que

$$\dot{M} = v(\text{lk}(v, M)) + \dot{Q}.$$

Por un lado, esta igualdad nos dice que si  $\sigma \in (\text{lk}(v, M))$ , entonces  $v\sigma \in \dot{M}$ . Luego,  $\sigma \in \text{lk}(v, \dot{M})$ .

Por otra parte, tomemos  $\sigma \in \text{lk}(v, \dot{M})$ . Entonces,  $v\sigma \in \dot{M} \setminus Q$ . Luego, la igualdad nos dice que  $v\sigma \in v(\text{lk}(v, M))$ , por lo que  $\sigma \in (\text{lk}(v, M))$ . □

Finalmente, veamos que las variedades combinatorias topológicamente son también variedades.

**Proposición 2.2.15.** *Sea  $M$  una  $n$ -vc. Entonces  $|M|$  es una  $n$ -variedad topológica con borde. Más aún, su borde es  $|\dot{M}|$ .*

*Demostración.* Tomemos primero un  $\alpha \in |M| \setminus |\dot{M}|$ . Sea  $\sigma \in M$  el único simplex tal que  $\alpha \in \sigma$ . De esta manera para todo  $v \in \sigma$  se tiene que  $\alpha \in \text{st}^\circ(v)$ . Dado que  $\alpha \notin |\dot{M}|$ , existe  $v \in \sigma$  tal que  $v \notin \dot{M}$ , y en particular por lo visto en el ejemplo 2.1.3 resulta  $\text{st}(v) = \text{lk}(v)$ . Tomemos un tal  $v$ . Se tiene así que  $\alpha \notin |(\text{st}(v))|$ , pues de no ser así tendríamos que  $\sigma \cap |\text{lk}(v)| \neq \emptyset$ , lo que implica que  $\sigma \in \text{lk}(v)$ . Y esto no es así, ya que  $v \in \sigma$ .

Dado que  $\text{st}(v) = B^n$ , por lo visto en la observación 2.1.6 tenemos un homeomorfismo  $|\text{st}(v)| \rightarrow |\Delta^n|$  que aplica  $|(\text{st}(v))|$  en  $|\dot{\Delta}^n|$ . Este induce un homeomorfismo entre  $\text{st}^\circ(v)$ -entorno abierto de  $\alpha$ - y un abierto de  $|\dot{\Delta}^n|$ , el cual aplica  $\alpha$  en un punto que no está en  $|\dot{\Delta}^n|$ .

Ahora supongamos que  $\alpha \in |\dot{M}|$ . Tenemos  $\sigma^{(n-1)} \in \dot{M}$  tal que  $\alpha \in |\sigma|$ . Tomemos  $v \in \sigma$  tal que  $\alpha \in \text{st}^\circ(v)$ . Dado que  $\sigma$  es cara de sólo un  $n$ -simplex de  $M$ , se tiene que  $\sigma \in (\text{st}(v))$  y por lo tanto  $\alpha \in |(\text{st}(v))|$ . Argumentando como arriba, tenemos un homeomorfismo entre  $\text{st}^\circ(v)$ -entorno abierto de  $\alpha$ - y un abierto de  $|\dot{\Delta}^n|$ , el cual aplica  $\alpha$  en un punto de  $|\dot{\Delta}^n|$ .

Teniendo en mente quiénes son  $|\Delta^n|$  y  $|\dot{\Delta}^n|$  (ver ejemplo 1.2.2), el resultado queda entonces demostrado. □

**Definición 2.2.16.** Una *PL-variedad* de dimensión  $n$  es un poliedro que admite una triangulación por una  $n$ -vc.

**Nota 2.2.17.** Yendo en la dirección opuesta a lo que enuncia esta proposición, surge la siguiente pregunta: ¿será toda variedad topológica compacta una PL-variedad? Esta conjetura es parte de la llamada “Hauptvermutung para variedades”, la cual se pregunta si todo homeomorfismo entre PL-variedades es homotópico a un PL-isomorfismo. Cobra interés cuando Milnor prueba que la Hauptvermutung original era falsa, ya que el contraejemplo que este encuentra involucra espacios que no son PL-variedades. Aunque es válida para variedades de dimensión a lo sumo tres, en dimensiones mayores a cinco es falsa. Para más información, dirigirse a [14].

Terminaremos enunciando una consecuencia del teorema de los entornos regulares de J. H. C. Whitehead, que nos será útil más adelante. La demostración de este resultado es altamente no trivial, como puede comprobarse en el capítulo III de [5].

**Teorema 2.2.18.** *Sea  $M$  una  $n$ -vc. Si  $M$  es colapsable, entonces  $M = B^n$ .*

## Variedades estelares

Vimos anteriormente que, en ciertas ocasiones, uno puede restringirse a trabajar con subdivisiones estelares sin perder generalidad. Por ejemplo, la proposición 1.3.6 nos dice en particular que toda subdivisión de un complejo simplicial se puede refinar a una estelar.

En [4], Forman trabaja con CW regulares en lugar de trabajar con complejos simpliciales. En este contexto, al haber menos rigidez, uno puede restringirse a considerar un tipo de subdivisiones muy sencillas llamadas *bisecciones*. Por ejemplo, al considerar PL-isomorfismos entre dos CW, siempre se puede suponer que las dos subdivisiones involucradas son bisecciones.

En el contexto combinatorio nos preguntamos: si dos complejos simpliciales  $M$  y  $N$  son PL-isomorfos, ¿existirán  $\beta M$  y  $\beta' N$  subdivisiones *estelares* de  $M$  y  $N$  respectivamente tales que  $\beta M \simeq \beta' N$ ? Por lo visto en la proposición 1.3.6, siempre se puede suponer que una de ellas lo es; pero en ciertas ocasiones, nos puede interesar que ambas lo sean.

En esta sección, a modo puramente informativo, daremos una respuesta parcial a esta pregunta.

**Definición 2.2.19.** Sean  $M$  y  $N$  dos complejos simpliciales. Diremos que  $M$  y  $N$  son *estelaramente equivalentes*, y lo denotaremos por  $M \approx N$ , si existe una sucesión de complejos simpliciales

$$M = M_0, M_1, \dots, M_k = N$$

tales que para todo  $1 \leq i \leq k$  se satisface alguna de las siguientes tres condiciones:

- (i)  $M_i$  es una subdivisión estelar elemental de  $M_{i-1}$ .
- (ii)  $M_{i-1}$  es una subdivisión estelar elemental de  $M_i$ .
- (iii)  $M_i \simeq M_{i-1}$ .

Tal como se hace en términos de PL-isomorfismos, se pueden dar nociones de bolas, esferas y variedades estelares. Precisamente,

**Definición 2.2.20.** Sea  $M$  un complejo simplicial.

- (i) Se dice que  $M$  es una  *$n$ -bola estelar* si  $M \approx \Delta^n$ .
- (ii) Se dice que  $M$  es una  *$n$ -esfera estelar* si  $M \approx \hat{\Delta}^{n+1}$ .
- (iii) Si  $M$  es homogéneo  $n$ -dimensional, se dice que  $M$  es una  *$n$ -variedad estelar* si para todo  $v \in V_M$  se tiene que  $\text{lk}(v)$  es una  $n$ -bola/esfera estelar.

Los resultados que obtuvimos para variedades combinatorias se pueden reproducir en el contexto de las variedades estelares.

En principio no tenemos la respuesta a la pregunta planteada. Lo mejor que podemos decir en ese sentido es lo siguiente.

**Teorema 2.2.21.** *Sean  $M$  y  $N$  dos complejos simpliciales. Entonces,*

$$M =_{PL} N \iff M \approx N.$$

Para más detalles, ver [5].

### 2.3. Pseudovariedades

A continuación expondremos la noción de *pseudovariedad* que se encuentra en [16]. Probaremos que toda variedad combinatoria es una pseudovariedad, pero no recíprocamente. Las pseudovariedades son de interés pues extraen dos propiedades importantes de las variedades combinatorias que son las únicas relevantes en ciertas ocasiones, como en el teorema 4.3.9, por ejemplo.

**Definición 2.3.1.** Sea  $M$  un complejo simplicial homogéneo de dimensión  $n$ . Diremos que es una  *$n$ -pseudovariedad* si

- (i) Todo  $(n - 1)$ -símplex está contenido en a lo sumo dos  $n$ -símplices.
- (ii) Dados  $n$ -símplices  $\sigma$  y  $\sigma'$ , se tiene una sucesión de  $n$ -símplices

$$\sigma = \sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_k = \sigma'$$

tales que para todo  $i$ ,  $\sigma_i$  y  $\sigma_{i+1}$  son *adyacentes* (i.e., son distintos y comparten una  $(n - 1)$ -cara).

Notemos que en tal caso  $\dot{M}$  es el subcomplejo de  $M$  generado por aquellos  $(n - 1)$ -símplices que estén contenidos en sólo un  $n$ -símplex, y que  $M$  no tiene borde si y sólo si todo  $(n - 1)$ -símplex de  $M$  está contenido en exactamente dos  $n$ -símplices.

Además, vale recalcar que la condición (ii) le impone a una pseudovariedad que como complejo simplicial sea conexo.

**Proposición 2.3.2.** *Toda  $n$ -vc conexa es una  $n$ -pseudovariedad.*

*Demostración.* Sea  $M$  una  $n$ -vc conexa. La condición (i) la verificamos en la observación 2.2.12. Veamos (ii).

Lo haremos por inducción en  $n$ , siendo el caso  $n = 0$  trivial. Fijemos  $\sigma^{(n)} \in M$  y probemos que dado  $\tau^{(n)} \in M$  se puede ir de  $\sigma$  a  $\tau$  por un camino de  $n$ -símplices adyacentes. Lo haremos por inducción en

$$m = \min\{k \in \mathbb{N}_0 : \text{existe } x_0, x_1, \dots, x_k \text{ sucesión de vértices de } M \\ \text{con } x_0 \in \sigma, x_k \in \tau, \{x_i, x_{i+1}\} \in M\},$$

número que está bien definido pues  $M$  es conexa.

Si  $m = 0$ , entonces  $\sigma$  y  $\tau$  comparten un vértice, digamos  $x_0$ . Sean  $\sigma'$  y  $\tau'$  las caras opuestas a  $x_0$  de  $\sigma$  y  $\tau$  respectivamente. Entonces  $\sigma', \tau'$  son  $(n-1)$ -símplices de  $\text{lk}(x_0, M)$ , la cual es una  $(n-1)$ -bola/esfera y en particular una  $(n-1)$ -vc. Por hipótesis inductiva (en  $n$ ) se tiene en  $\text{lk}(x_0, M)$  un camino de  $(n-1)$ -símplices

$$\sigma' = \sigma'_0, \sigma'_1, \dots, \sigma'_k = \tau'$$

donde  $\sigma'_i$  es adyacente a  $\sigma'_{i+1}$ . Como  $\sigma'_i \in \text{st}(x_0, M)$ , existe un  $n$ -símplex  $\sigma_i \in M$  tal que  $\sigma_i = x_0 \sigma'_i$ . Entonces  $\sigma = \sigma_0$ ,  $\tau = \sigma_k$  y  $\sigma_i$  es adyacente a  $\sigma_{i+1}$ , ya que tienen en común al  $(n-1)$ -símplex  $x_0(\sigma'_i \cap \sigma'_{i+1})$  y son distintos pues  $\sigma'_i$  y  $\sigma'_{i+1}$  lo son.

Supongamos ahora que se tiene  $x_0, x_1, \dots, x_{m+1}$  sucesión de vértices de  $M$  tal que  $x_0 \in \sigma$ ,  $x_{m+1} \in \tau$ ,  $\{x_i, x_{i+1}\} \in M$ . Sea  $\nu$  un  $n$ -símplex de  $M$  que tenga como cara a  $\{x_m, x_{m+1}\}$ . Por hipótesis inductiva (en  $m$ ),  $\sigma$  y  $\nu$  se pueden unir por un camino de  $n$ -símplices adyacentes. Pero por lo visto en el caso  $m = 0$ , también podemos unir a  $\nu$  y  $\tau$  por un camino de  $n$ -símplices adyacentes. Concatenando los caminos, obtenemos el camino buscado.

□

**Ejemplo 2.3.3.** La recíproca a la proposición anterior no es cierta, como se puede ver en el siguiente ejemplo:

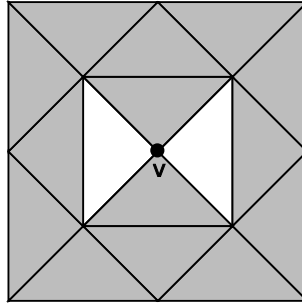


Figura 2.2: Una pseudovariiedad que no es variedad combinatoria.

Este complejo simplicial es una 2-pseudovariiedad, pero no es una variedad combinatoria ya que  $\text{lk}(v)$  no es ni una  $n$ -bola combinatoria ni una  $n$ -esfera combinatoria para ningún  $n$ . Además, este es un ejemplo de una pseudovariiedad cuya realización geométrica no es una variedad topológica.

Sea  $M$  una  $n$ -pseudovariiedad. La posibilidad de unir pares de  $n$ -símplices por caminos de  $n$ -símplices adyacentes nos da una noción de distancia entre  $n$ -símplices. Precisamente, si  $\sigma, \sigma'$  son  $n$ -símplices, definimos la *distancia* entre  $\sigma$  y  $\sigma'$ , que denotaremos por  $d(\sigma, \sigma')$ , como el mínimo de los  $k \geq 0$  para los cuales existe una sucesión como en (ii) de la definición. Verificar que  $d$  define efectivamente una distancia en el conjunto de los  $n$ -símplices es inmediato.

**Lema 2.3.4.** *Sea  $M$  una  $n$ -pseudovariiedad, y sean  $\alpha, \beta$  y  $\gamma$  tres  $n$ -símplices tales que  $\alpha$  es adyacente a  $\beta$ ,  $\beta$  es adyacente a  $\gamma$ , y  $\alpha \neq \gamma$ . Sea  $\nu$  el  $(n-2)$ -símplex que comparten  $\alpha, \beta$  y  $\gamma$ . Entonces  $\beta$  no es adyacente a ningún otro símplex que contenga a  $\nu$  que no sea  $\alpha$  o  $\gamma$ .*

*Demostración.* Supongamos que  $\beta$  es adyacente a  $\delta$ , y que  $\nu < \delta$ . Escribamos

$$\alpha = xx'\nu, \quad \beta = x'x''\nu, \quad \gamma = x''x'''\nu,$$

con  $x, x', x'', x'''$  vértices de  $M$ . Como  $\delta$  es adyacente a  $\beta$ , al considerar la  $(n-1)$ -cara que comparten se abren dos posibilidades: que esta sea  $x'\nu$ , o que sea  $x''\nu$ . Al considerar la primera, el  $(n-1)$ -símplex  $x'\nu$  es cara de  $\alpha, \beta$  y  $\delta$ . Al ser  $M$  una  $n$ -pseudovariiedad, debe ser  $\delta = \alpha$ . Si se considera la otra posibilidad, resulta  $\delta = \gamma$ . □

**Proposición 2.3.5.** *Sea  $M$  una  $n$ -pseudovariiedad sin borde, y sea  $\sigma \in M$  un  $n$ -símplex. Entonces  $N = M \setminus \{\sigma\}$  es una  $n$ -pseudovariiedad con borde.*

*Demostración.* Notemos que  $N$  es un complejo simplicial, pues se obtiene de sacarle a  $M$  un símplex maximal.  $N$  es homogéneo  $n$ -dimensional, ya que al ser  $M$  una  $n$ -pseudovariiedad sin borde, todo  $(n-1)$ -símplex de  $M$  está contenido en exactamente dos  $n$ -símplices. La condición (ii) resulta inmediata; notemos que si tomamos un  $n$ -símplex  $\sigma$  cualquiera adyacente a  $\sigma$  (lo cual es posible gracias a que  $M$  no tiene borde) siendo  $\nu$  la cara inmediata que comparten, entonces el único  $n$ -símplex de  $N$  en el que estará contenido  $\nu$  será  $\sigma'$ , por lo que una vez que hayamos verificado (iii) habremos probado que  $N$  es una  $n$ -pseudovariiedad con borde.

Tomemos entonces un par de  $n$ -símplices  $\alpha, \beta \in N$ . Tenemos un camino de  $n$ -símplices de  $M$

$$\alpha = \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_k = \beta,$$

donde  $\alpha_i$  es adyacente a  $\alpha_{i+1}$  para todo  $i$ . Si  $\sigma \neq \alpha_i$  para todo  $i$ , no hay nada que hacer. Supongamos por el contrario que  $\sigma = \alpha_i$  para cierto  $i$ . El problema se reduce entonces a poder ir de  $\alpha_{i-1}$  a  $\alpha_{i+1}$  “esquivando” a  $\sigma$ . Podemos suponer entonces sin pérdida de generalidad que  $\alpha$  y  $\beta$  son adyacentes a  $\sigma$ , olvidándonos de los  $\alpha$  y  $\beta$  originales.

Lo que haremos es considerar el  $(n-2)$ -símplex  $\nu$  que comparten  $\alpha, \beta$  y  $\sigma$  y considerar el camino de  $n$ -símplices adyacentes que comparten a  $\nu$ , que empieza en  $\alpha$  y que continua no en  $\sigma$  sino “para el otro lado”; por este camino en algún momento se llegará a  $\beta$ .

Llamemos  $\alpha_0 = \alpha$ , y escribamos  $\alpha_0 = \{\alpha_0^0, \alpha_0^1, \dots, \alpha_0^n\}, \beta = \{\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_n\}$ . Supongamos sin pérdida de generalidad que  $\{\alpha_0^0, \alpha_0^1, \dots, \alpha_0^{n-1}\}$  es la  $(n-1)$ -cara que comparten  $\alpha_0$  y  $\sigma$ , y que  $\{\alpha_0^0, \alpha_0^1, \dots, \alpha_0^{n-2}, \alpha_0^n\}$  es la  $(n-1)$ -cara que comparten  $\beta$  y  $\sigma$ . Llamemos  $\nu = \{\alpha_0^0, \alpha_0^1, \dots, \alpha_0^{n-2}\}$ .

Consideremos la siguiente sucesión de  $n$ -símplices. Teniendo en mente que  $M$  no tiene borde, definimos  $\alpha_1$  como el único  $n$ -símplex de  $M$  adyacente a  $\alpha_0$  en la  $(n-1)$ -cara  $\alpha_0^n \nu$ . Así, se escribirá  $\alpha_1 = \alpha_0^n \alpha_1^n \nu$  para cierto vértice  $\alpha_1^n$ . Definimos  $\alpha_2$  como el único  $n$ -símplex de  $M$  adyacente a  $\alpha_1$  en la  $(n-1)$ -cara  $\alpha_1^n \nu$ . Y así siguiendo, obtenemos una sucesión de símplices en la que cada uno es distinto de los dos anteriores.

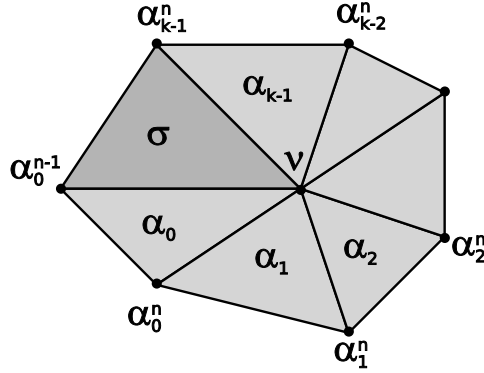


Figura 2.3: Esquivando a  $\sigma$ .

Suponiendo que  $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{k-1}$  son distintos dos a dos, veamos que  $\alpha_k \neq \alpha_i$  para todo  $1 \leq i \leq k$ . Para  $i = k-1, k-2$  es claro, y para  $1 \leq i \leq k-3$  se sigue de lo visto en el último lema: este nos dice que entre los simplices que contienen a  $\nu$ ,  $\alpha_i$  es sólo adyacente a  $\alpha_{i-1}$  y  $\alpha_{i+1}$ , por lo que no puede ser  $\alpha_k = \alpha_i$  ya que  $\alpha_k$  es adyacente a  $\alpha_{k-1}$ , y  $\alpha_{k-1} \neq \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}$ .

Por una cuestión de finitud, va a haber un primer  $k \geq 1$  para el cual  $\alpha_{k+1} = \alpha_0$ . Veamos que  $\alpha_k = \sigma$  y  $\alpha_{k-1} = \beta$ . De nuevo, usaremos lo visto en el último lema.  $\alpha_0$  es adyacente a  $\alpha_1, \alpha_k$  y a  $\sigma$ , y todos comparten a  $\nu$ ; como  $\sigma \neq \alpha_1$  debe ser  $\sigma = \alpha_k$ .  $\sigma$  es adyacente a  $\alpha_0, \alpha_{k-1}$  y a  $\beta$ , y todos comparten a  $\nu$ ; como  $\beta \neq \alpha_0$  debe ser  $\beta = \alpha_{k-1}$ .

Siendo  $k$  el primero con esa propiedad,

$$\alpha = \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{k-1} = \beta$$

es el camino que buscábamos, ya que ninguno de sus simplices es  $\sigma$ . □

**Proposición 2.3.6.** *Sea  $M$  una  $n$ -pseudovariación con borde. Entonces  $M \searrow N$ , donde  $N$  contiene al  $(n-2)$ -esqueleto de  $M$  y satisface que  $\dim N \leq n-1$ . A un tal subcomplejo se lo llama un spine de  $M$ .*

*Demostración.* Si logramos colapsar uno a uno todos los  $n$ -simplices, la proposición quedará probada.

Empecemos tomando un  $n$ -simplex  $\sigma$  cualquiera que tenga una  $(n-1)$ -cara libre, lo cual es posible pues  $M$  tiene borde. Podemos en un primer paso colapsar a  $\sigma$ .

Suponiendo que ya colapsé todos aquellos  $n$ -simplices que estaban a distancia  $k$  de  $\sigma$ , tomemos un  $\sigma'$  con  $d(\sigma, \sigma') = k+1$ . Se tiene entonces un camino de  $n$ -simplices

$$\sigma = \sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_{k+1} = \sigma',$$

donde  $\sigma_i$  y  $\sigma_{i+1}$  son adyacentes.  $\sigma_k$  estaba a distancia  $k$  por lo que ya lo colapsé. Así,  $\sigma_{k+1}$  quedó con una cara libre: la que compartía con  $\sigma_k$ . Podemos entonces colapsar a  $\sigma'$ .

Por finitud, al terminar este procedimiento obtenemos que  $M \searrow N$ , donde  $N$  ya no tiene  $n$ -simplices. Este satisface lo pedido. □

## Capítulo 3

# Teoría de Morse clásica

En este capítulo presentaremos las definiciones y resultados básicos de la teoría de Morse clásica, cuyas ideas esenciales ya han sido expuestas en la introducción. Nuestra idea es hacerlo sólo a modo ilustrativo, para poder luego compararlos con las definiciones y resultados de la teoría de Morse discreta. Por este motivo, no haremos demostraciones ni seremos demasiado profundos. Para un estudio detallado de esta materia, el lector puede dirigirse a [12].

### 3.1. Definiciones

**Notación 3.1.1.** Aunque usaremos notación estándar, convengamos lo estrictamente necesario. Si  $M$  es una variedad diferenciable y  $p \in M$ ,  $M_p$  denotará al espacio tangente a  $M$  en  $p$ . Si  $f : M \rightarrow N$  es una función diferenciable, la diferencial de  $f$  en  $p$  se denotará por  $f_{*p} : M_p \rightarrow N_{f(p)}$ . Denotaremos por  $\mathcal{F}(M)$  al conjunto de funciones diferenciables de  $M$  en  $\mathbb{R}$ , y por  $\mathcal{X}(M)$  al conjunto de campos vectoriales diferenciables sobre  $M$ . Si  $f \in \mathcal{F}(M)$  y  $X \in \mathcal{X}(M)$ ,  $X(f) \in \mathcal{F}(M)$  denotará a la derivada direccional de  $f$  en la dirección de  $X$ , dada por  $X(f)(p) = X(p)(f)$ . Dados  $X, Y \in \mathcal{X}(M)$ ,  $[X, Y] \in \mathcal{X}(M)$  denotará al corchete de Lie entre  $X$  e  $Y$ .

Fijemos una variedad diferenciable  $M$  de dimensión  $n$  y  $f \in \mathcal{F}(M)$ . Supondremos que  $M$  es compacta para simplificar las cosas, aunque este requerimiento no es siempre necesario.

**Definición 3.1.2.** Diremos que  $p \in M$  es un *punto crítico* de  $f$  si la diferencial de  $f$  en  $p$  es nula. Caso contrario, diremos que  $p$  es *regular*.

Notemos que un punto  $p$  es crítico de  $f$  si y sólo si para toda (alguna) carta  $(U, x)$  alrededor de  $p$  se tiene

$$\frac{\partial f}{\partial x^1}(p) = \frac{\partial f}{\partial x^2}(p) = \cdots = \frac{\partial f}{\partial x^n}(p) = 0.$$

Además, vale recalcar que por el teorema de la función implícita, si un punto  $p$  es regular entonces se puede encontrar una carta  $(U, x)$  alrededor de  $p$  de manera que

$$f = x^1$$

sea la expresión de  $f$  en  $U$ .

La restricción que le imponemos a una función diferenciable para que sea de Morse hará que las funciones de este tipo también tengan un comportamiento muy simple en sus puntos críticos.

**Observación 3.1.3.** Al ser  $M$  compacta, la función tendrá un máximo y un mínimo. Estos son siempre puntos críticos.

Sea  $p$  un punto crítico de  $f$ . Introduciremos ahora una noción de “segunda derivada” de  $f$  en  $p$ , que, tal como en el cálculo usual, nos permitirá determinar ante qué tipo de punto crítico nos encontramos, siempre que este sea no degenerado.

Dados  $v, w \in M_p$ , tomemos  $V, W \in \mathcal{X}(M)$  tales que  $V(p) = v, W(p) = w$ . Afirmamos que  $v(W(f)) = w(V(f))$ . En efecto,

$$v(W(f)) - w(V(f)) = V(p)(W(f)) - W(p)(V(f)) = [V, W](p)(f) = 0,$$

pues  $p$  es crítico. Podemos entonces definir una forma bilineal  $f_{**p}$  en  $M_p$ , llamada *hessiano* de  $f$  en  $p$ , mediante la fórmula

$$f_{**p}(v, w) = v(W(f)).$$

Al tenerse que  $v(W(f)) = w(V(f))$ , como el segundo miembro de esta igualdad no depende del campo  $W$  elegido, la definición es buena. Además, esta igualdad nos dice que  $f_{**p}$  es simétrica.

Se puede ver fácilmente que dada una carta  $(U, x)$  alrededor de  $p$ , la matriz de la forma bilineal  $f_{**p}$  en la base  $\{\frac{\partial}{\partial x^i}|_p\}_i$  es la matriz

$$\left( \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}(p) \right)_{ij}.$$

**Definición 3.1.4.** Un punto crítico  $p$  es *no degenerado* si el hessiano de  $f$  en  $p$  es una forma bilineal no degenerada.

Esto equivale a que para toda (alguna) carta  $(U, x)$  alrededor de  $p$ , la matriz

$$\left( \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}(p) \right)_{ij}$$

sea no singular.

Diremos que  $f$  es una *función de Morse* si tiene todos sus puntos críticos no degenerados.

**Definición 3.1.5.** Sea  $p$  un punto crítico no degenerado. El *índice* de  $f$  en  $p$  se define como el índice de la forma bilineal  $f_{**p}$ . Esto es, la dimensión de cualquier subespacio  $S \subseteq M_p$  maximal con la propiedad de que  $f_{**p}$  sea definida negativa en  $S$ .

El siguiente resultado nos muestra que, en el caso no degenerado, la función tiene un comportamiento sencillo en un entorno del punto crítico. Más aún, muestra cómo el índice del punto crítico determina por completo este comportamiento: mide la cantidad de “direcciones” en las que la función decrece.

**Lema 3.1.6** (Morse). *Sea  $p$  un punto crítico no degenerado de índice  $k$ . Entonces, existe una carta  $(U, x)$  alrededor de  $p$  con  $x(p) = 0$  tal que*

$$f = f(p) - (x^1)^2 - \dots - (x^k)^2 + (x^{k+1})^2 + \dots + (x^n)^2$$

en todo  $U$ .

Su demostración no es complicada. La idea es la siguiente. Suponiendo sin pérdida de generalidad que  $M = \mathbb{R}^n$ , que  $p = 0$  y que  $f(p) = 0$ , usando el teorema fundamental del cálculo se puede encontrar un entorno de 0 en el cual  $f$  sea de la forma

$$f(x) = \sum_{i,j=1}^n h_{ij}(x)x_i x_j,$$

retocando posteriormente a las funciones  $h_{ij}$  para que se tenga  $h_{ij} = h_{ji}$ . Para llegar a partir de esta a la expresión deseada, se imita el método de diagonalización de formas cuadráticas.

A partir de este lema se obtienen fácilmente los siguientes corolarios.

**Corolario 3.1.7.** *Si  $p$  es un punto crítico no degenerado, existe un entorno de  $p$  en el cual no hay otros puntos críticos.*

En particular, toda función de Morse en una variedad diferenciable compacta tiene finitos puntos críticos.

**Corolario 3.1.8.** *Sea  $p$  un punto crítico no degenerado de índice  $k$ . Entonces  $p$  es un mínimo si y sólo si  $k = 0$ , y es un máximo si y sólo si  $k = n$ .*

## 3.2. Existencia de funciones de Morse

Sea  $M$  una variedad diferenciable  $n$ -dimensional. A pesar de que no toda  $f \in \mathcal{F}(M)$  es de Morse, gracias a los teoremas de Sard y Whitney veremos que las funciones de Morse sobre  $M$  abundan.

Recordemos que dada una función diferenciable  $f : M \rightarrow N$ , un punto  $p \in M$  se dice *regular* si  $f_{*p}$  es sobreyectiva, y en tal caso decimos que  $f(p)$  es un *valor regular* de  $f$ . Si un punto  $p$  no es regular, diremos que es *crítico*, y diremos que  $f(p)$  es un *valor crítico*. Notemos que esta definición extiende a la dada anteriormente cuando  $N = \mathbb{R}$ .

Para enunciar el teorema de Sard (cuya demostración puede encontrarse en [13]), recordemos que dada una variedad diferenciable  $M$ , un subconjunto  $A \subseteq M$  se dice de *medida nula* si existe un atlas  $\mathcal{A}$  de  $M$  tal que  $x(A \cap U) \subseteq \mathbb{R}^n$  tiene medida (de Lebesgue) nula para toda carta  $(U, x) \in \mathcal{A}$ .

**Teorema 3.2.1** (Sard). *Dada  $f : M \rightarrow N$ , el conjunto de valores críticos de  $f$  tiene medida nula.*

Consideremos para empezar la situación más sencilla: supongamos que  $M$  es un abierto de  $\mathbb{R}^n$ , y sea  $f \in \mathcal{F}(M)$ . Veremos que p.p.  $a \in \mathbb{R}^n$  la función  $f_a \in \mathcal{F}(M)$  dada por

$$f_a(x) = f(x) + a \cdot x$$

es de Morse. Vale recalcar que cuando  $\|a\| = 1$ , el número  $a \cdot x$  mide la distancia “con signo” de  $x$  al hiperplano de normal  $a$ , obteniendo así una interpretación geométrica de  $f_a$ .

Sea  $g = \nabla f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Entonces  $p$  es un punto crítico de  $f_a$  si y sólo si  $g(p) = -a$ , pues  $\nabla f_a = \nabla f + a$ . Supongamos que  $-a$  es un valor regular de  $g$ , lo cual sucede p.p.  $a \in \mathbb{R}^n$  por el teorema de Sard. Entonces,  $g_{*p}$  es isomorfismo para todo  $p$  punto crítico de  $f_a$ . Justamente como las segundas derivadas de  $f_a$  coinciden con las derivadas de  $g$ , se tiene que esto implica que todo punto crítico de  $f_a$  es no degenerado.

Una vez probado esto para los abiertos de  $\mathbb{R}^n$ , se puede extender sin problemas a cualquier variedad  $M \subseteq \mathbb{R}^n$ . Para los detalles, ver [6].

Finalmente, para obtener un resultado válido para toda variedad usaremos el teorema de Whitney (cuya demostración puede encontrarse en [8]), que nos permite pensar a cualquier variedad dentro de algún  $\mathbb{R}^k$  para  $k$  suficientemente grande. Recordemos que dadas variedades  $M$  y  $N$ , decimos que  $M$  se puede *embeber* en  $N$  si existe una función diferenciable  $i : M \rightarrow N$  tal que  $i(M)$  es una subvariedad sumergida de  $N$  y  $i : M \rightarrow i(M)$  es un difeomorfismo.

**Teorema 3.2.2** (Whitney). *Sea  $M$  una variedad diferenciable  $n$ -dimensional. Entonces  $M$  se puede embeber en  $\mathbb{R}^{2n}$ .*

Para terminar, tomemos  $M$  una variedad diferenciable  $n$ -dimensional y  $f \in \mathcal{F}(M)$ . Sea  $i : M \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$  una sumersión según el teorema de Whitney. Tenemos que  $f \circ i^{-1} \in \mathcal{F}(i(M))$ , y por lo visto anteriormente  $(f \circ i^{-1})_a$  es de Morse p.p.  $a \in \mathbb{R}^{2n}$ . Luego la función  $f_a \in \mathcal{F}(M)$  dada por

$$f_a(x) = f(x) + a \cdot i(x)$$

es de Morse p.p.  $a \in \mathbb{R}^{2n}$ .

A continuación mostraremos cómo dada una función de Morse se puede aproximar por otra que tiene los mismos puntos críticos con los mismos índices, pero que es inyectiva cuando la restringimos a estos. Este resultado tendrá su contraparte discreta en el lema 4.2.14.

Sea  $M$  una variedad diferenciable compacta y sea  $f \in \mathcal{F}(M)$  una función de Morse. Sean  $p_1, p_2, \dots, p_k$  sus puntos críticos. Tomemos  $\psi_i \in \mathcal{F}(M)$  tales que  $\psi_i = 1$  en un entorno de  $U_i$  de  $p_i$ , y de manera que los soportes de  $\psi_i$  y  $\psi_j$  sean disjuntos si  $i \neq j$ . Elijamos  $a_1, a_2, \dots, a_k \in \mathbb{R}$  tales que si  $i \neq j$  entonces

$$f(p_i) + a_i \neq f(p_j) + a_j.$$

Definamos  $g \in \mathcal{F}(M)$  por

$$g = f + \sum_{i=1}^k a_i \psi_i.$$

Dado que  $\psi = 1$  en un entorno de  $p_i$ , todo punto crítico de  $f$  es punto crítico de  $g$ . Además, de esto se sigue que  $p_i$  es no degenerado para  $g$  y que su índice como punto crítico de  $g$  coincide con su índice como punto crítico de  $f$ , dado que el hessiano de  $g$  coincide con el de  $f$  en  $p_i$ . Teniendo en mente que  $f_{*p} \neq 0$  en el compacto  $M \setminus \cup_i U_i$ , si tomamos los  $a_i$  lo suficientemente pequeños tendremos que todo punto crítico de  $g$  será punto crítico de  $f$ , y que los índices son los mismos.

En conclusión, si los  $a_i$  son lo suficientemente pequeños entonces  $g$  es de Morse, tiene los mismos puntos críticos de  $f$  con los mismos índices, y además es inyectiva en sus puntos críticos.

### 3.3. Los teoremas básicos

Los dos teoremas de esta sección, cuyos análogos en el caso discreto son los teoremas 4.2.16 y 4.2.17, son los resultados básicos de la teoría de Morse clásica. Estos muestran cómo se relacionan el tipo homotópico de la variedad  $M$  con los índices de los puntos críticos de las funciones diferenciables que sobre ella se pueden definir.

Fijemos  $M$  una variedad diferenciable  $n$ -dimensional compacta, y una función  $f \in \mathcal{F}(M)$ . Para  $c \in \mathbb{R}$ , denotemos  $M(c) = f^{-1}((-\infty, c])$ . A estos conjuntos los llamaremos *conjuntos de nivel* de  $f$ . Si  $c$  no es un valor crítico de  $f$ , entonces  $M(c)$  será una variedad con borde. Su borde será precisamente  $f^{-1}(\{c\})$ .

**Teorema 3.3.1.** *Sean  $a < b \in \mathbb{R}$ . Supongamos que  $f^{-1}([a, b])$  no contiene puntos críticos de  $f$ . Entonces,  $M(a)$  es un retracto por deformación fuerte de  $M(b)$ .*

La idea de la demostración, muy informalmente hablando, es la siguiente. Consideremos el campo gradiente de  $f$  (lo cual rigurosamente se hace introduciendo una métrica riemanniana en  $M$ ). Para  $p \in f^{-1}([a, b])$ , dado que  $f$  no tiene puntos críticos en  $f^{-1}([a, b])$ , el gradiente de  $f$  no se anulará en  $p$ . Más aún, apuntará en la dirección de máximo decrecimiento de  $f$ . Empujando entonces los puntos de  $f^{-1}([a, b])$  en la dirección indicada por el gradiente, podremos deformar  $M(b)$  en  $M(a)$ .

**Teorema 3.3.2.** *Sea  $c \in \mathbb{R}$ . Supongamos que el conjunto  $f^{-1}(\{c\})$  tiene por puntos críticos a  $p_1, p_2, \dots, p_r$ , todos ellos no degenerados. Sea  $k_i$  el índice del punto  $p_i$ . Tomemos un  $\varepsilon > 0$  tal que  $f^{-1}([c - \varepsilon, c + \varepsilon])$  no contenga otros puntos críticos. Entonces,  $M(c + \varepsilon)$  tiene el tipo homotópico de*

$$M(c - \varepsilon) \cup e^{k_1} \cup e^{k_2} \dots \cup e^{k_r}.$$

Notemos que el  $\varepsilon > 0$  al cual hace referencia el enunciado siempre existe, gracias al corolario 3.1.7

La estrategia a seguir para demostrar este teorema es la siguiente. Para empezar, se supone que  $r = 1$ ; denotemos  $p = p_1$ ,  $k = k_1$ . Por el lema de Morse, en un entorno  $U$  de  $p$  podemos escribir

$$f = c - (x^1)^2 - \dots - (x^k)^2 + (x^{k+1})^2 + \dots + (x^n)^2.$$

A partir de esta expresión se obtiene la  $k$ -celda a la cual hace referencia el enunciado: se toma un  $\varepsilon > 0$  lo suficientemente chico (en cierto sentido) y se pone  $e^k$  como el conjunto de puntos de  $U$  que satisfacen

$$(x^1)^2 + \cdots + (x^k)^2 \leq \varepsilon, \quad (x^{k+1})^2 + \cdots + (x^n)^2 = 0.$$

Perturbando ligeramente a  $f$ , se introduce una función  $F \in \mathcal{F}(M)$  que coincide con  $f$  fuera de  $U$ , tal que

- $F^{-1}((-\infty, c + \varepsilon]) = M(c + \varepsilon)$ .
- $F^{-1}((-\infty, c - \varepsilon]) = M(c - \varepsilon) \cup H$ , donde  $H$  es una región alrededor de  $e^k$  con la propiedad de que  $M(c - \varepsilon) \cup e^k$  es un retracto por deformación fuerte de  $M(c - \varepsilon) \cup H$ .
- $F^{-1}([c - \varepsilon, c + \varepsilon])$  no contiene puntos críticos de  $F$ .

Por el teorema anterior aplicado a  $F$ , se tiene que  $M(c - \varepsilon) \cup H$  es un retracto por deformación fuerte de  $M(c + \varepsilon)$ , con lo cual se obtiene lo que se buscaba demostrar.

**Corolario 3.3.3.** *Si  $f$  es de Morse, entonces  $M$  tiene el tipo homotópico de un CW-complejo que tiene una celda de dimensión  $k$  por cada punto crítico de índice  $k$ .*

Este tiene por análogo en el caso discreto al corolario 4.2.18. Sus demostraciones son prácticamente iguales.

### 3.4. Las desigualdades de Morse

A continuación exhibiremos las *desigualdades de Morse*, que, dada una función de Morse  $f$  sobre una variedad diferenciable  $M$ , relacionan los números de Betti de  $M$  con los puntos críticos (y sus respectivos índices) de  $f$ . Además nos permiten calcular la característica de Euler de  $M$  contando puntos críticos.

En el trabajo original de Morse estas desigualdades eran toda la información que se tenía del tipo homotópico de una variedad en términos de los puntos críticos de sus funciones de Morse, no estando disponible el corolario 3.3.3.

En la versión discreta de teoría de Morse llegaremos a estas desigualdades por un camino totalmente distinto, aunque además se pueden demostrar usando la técnica que emplearemos aquí. Se pueden también obtener directamente del corolario 3.3.3 sin mucho esfuerzo, usando homología celular.

Sea  $(X, Y)$  un par topológico (i.e.,  $Y \subseteq X$  es un subespacio). Fijemos un cuerpo  $F$ . Recordemos que el  $i$ -ésimo *número de Betti* de  $(X, Y)$  a coeficientes en  $F$  se define por

$$b_i(X, Y) = \dim_F H_i(X, Y; F),$$

y que la *característica de Euler* de  $(X, Y)$  a coeficientes en  $F$  se define por

$$\chi(X, Y) = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i b_i,$$

siempre que el número  $b_i$  sea finito para todo  $i$ , y cero para casi todo  $i$ . Dado un espacio topológico  $X$ , se definen  $b_i(X) = b_i(X, \emptyset)$  y  $\chi(X) = \chi(X, \emptyset)$ .

Notemos que los números de Betti son *subaditivos*. Concretamente, se tiene que si  $(X, Y, Z)$  es una terna topológica entonces

$$b_i(X, Z) \leq b_i(X, Y) + b_i(Y, Z)$$

para todo  $i$ . Esto se obtiene inmediatamente al considerar la sucesión exacta larga de homología para la terna  $(X, Y, Z)$ .

A partir de esto, inductivamente se prueba que si  $(X_1, X_2, \dots, X_m)$  es una  $m$ -upla topológica, entonces

$$b_i(X_1, X_m) \leq \sum_{i=1}^{m-1} b_i(X_i, X_{i+1}).$$

Fijemos ahora una variedad diferenciable compacta  $M$  de dimensión  $n$  y  $f$  una función de Morse sobre ella. Para cada  $k \geq 0$  denotemos por  $m_k$  a la cantidad de puntos críticos de  $f$  de índice  $k$ , y denotemos por  $b_k$  al  $k$ -ésimo número de Betti de  $M$ .

**Proposición 3.4.1** (Desigualdades de Morse débiles).

(i) Para todo  $k \geq 0$  se tiene  $m_k \geq b_k$ .

(ii)  $\chi(M) = \sum_{k=0}^n (-1)^k m_k$ .

*Demostración.* Por lo visto al final de la sección 3.2, podemos suponer que  $f$  es inyectiva en sus puntos críticos. De esta manera, podemos tomar números  $c_0 < c_1 < \dots < c_m$  tales que  $M(c_i)$  contenga exactamente  $i$  puntos críticos (lo que fuerza a que sea  $M(c_0) = \emptyset$  y  $M(c_m) = M$ ). Denotemos por  $k_i$  al índice del único punto crítico de  $M(c_i) \setminus M(c_{i-1})$ . Usando en la primer igualdad los teoremas 3.3.1 y 3.3.2 y en la segunda el teorema de escisión, tenemos que

$$\begin{aligned} H_j(M(c_i), M(c_{i-1}); F) &= H_j(M(c_{i-1}) \cup e^{k_i}, M(c_{i-1}); F) = H_j(e^{k_i}, \dot{e}^{k_i}; F) \\ &= \begin{cases} F, & j = k_i \\ 0, & j \neq k_i, \end{cases} \end{aligned}$$

por lo que  $b_j(M(c_i), M(c_{i-1})) = \delta_{j, k_i}$ . Así obtenemos (i):

$$b_k(M) \leq \sum_{i=i}^m b_k(M(c_i), M(c_{i-1})) = m_k.$$

La igualdad (ii) se obtiene de la misma manera, usando que  $\chi$  es aditiva. □

Refinando los argumentos algebraicos usados se pueden obtener las siguientes desigualdades, que implican las vistas anteriormente.

**Proposición 3.4.2** (Desigualdades de Morse fuertes). Para todo  $j \geq 0$  se tiene

$$b_j - b_{j-1} + \dots + (-1)^j b_0 \leq m_j - m_{j-1} + \dots + (-1)^j m_0.$$

## Capítulo 4

# Teoría de Morse discreta

### 4.1. Introducción

En esta sección buscamos motivar geoméricamente algunas de las definiciones y de los resultados que veremos a lo largo de este capítulo. Siendo esta nuestra intención, no pretendemos ser demasiado formales ni rigurosos.

Dado un complejo simplicial finito  $M$ , nos interesa conocer su tipo homotópico. Para esto, vamos a considerar cierto tipo de “deformaciones” en  $M$  que nos darán como resultado un espacio cuyo tipo homotópico será más fácil de calcular.

Para esto consideremos el siguiente ejemplo:

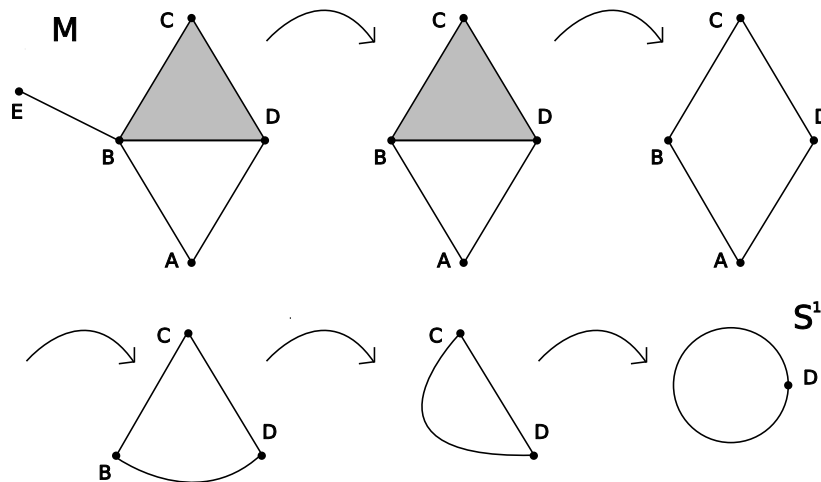


Figura 4.1: Deformando a  $M$  en  $S^1$ .

En esta figura, vemos cómo en una serie de pasos se puede deformar a  $M$  en  $S^1$ . Precisamente, lo que hemos hecho en cada paso es lo siguiente. En los primeros dos pasos hicimos colapsos simpliciales: en el primero colapsando la arista  $EB$  a lo largo de su vértice libre  $E$ , y en el segundo colapsando el 2-símplex  $BCD$  a lo largo de su arista libre  $BD$ . Una

vez agotados los colapsos, procedemos a “deformar”. En el tercer paso, podemos pensar que lo que hicimos fue “arrastrar” el vértice  $A$  a lo largo de la arista  $AB$  sobre el vértice  $B$ , de manera que la arista  $AB$  se “desliza” sobre la arista  $BC$ . En el cuarto paso hacemos lo mismo, arrastrando al vértice  $B$  sobre el vértice  $C$ , y a la arista  $BC$  sobre la arista  $CD$ . En el último, arrastramos al vértice  $C$  sobre el vértice  $D$ , pero en este caso la arista  $CD$  simplemente “desaparece”; no se desliza sobre otra arista.

¿Cómo codificar este procedimiento? La idea es indicar en el complejo simplicial cada uno de estos colapsos/deformaciones con una flecha, es decir, dar un *campo vectorial* sobre el complejo simplicial. Para indicar un colapso, dibujaremos una flecha que llegue al simplex que estamos colapsando y que salga de la cara libre a lo largo de la cual estamos haciendo el colapso. Para indicar, por ejemplo, la eliminación de la arista  $AB$  que se obtiene arrastrando a  $A$  hacia  $B$  a lo largo de la arista  $AB$ , dibujaremos una flecha que salga de  $A$  y llegue a  $B$ . De esta manera, el diagrama en nuestro ejemplo será el siguiente:

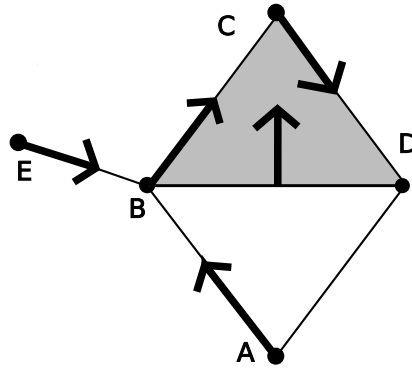


Figura 4.2: Las deformaciones, indicadas con flechas.

Notemos que los símplexes que sobreviven tras esta serie de operaciones son precisamente aquellos que no reciben ni emanan flechas: el vértice  $D$  y la arista  $DA$ .

Para entender cómo que es podemos leer en este diagrama *hacia dónde* se deslizan los símplexes (recordemos que estamos pensando que al realizar las deformaciones indicadas, por ejemplo, el vértice  $A$  se desliza sobre el vértice  $B$ , y que la arista  $AB$  se desliza sobre la arista  $BC$ ), tendremos que esperar hasta la sección en la que estudiemos el *flujo* de un campo vectorial.

Tratando de generalizar lo que pasa en este ejemplo que consideramos, nos interesa analizar qué propiedades tiene que tener un campo vectorial definido en un complejo simplicial arbitrario para que refleje operaciones como las que hicimos en nuestro ejemplo.

Resulta bastante razonable, si pretendemos que un campo vectorial refleje dichas operaciones, imponerle condiciones para que no se dé ninguna de las siguientes situaciones:

- De un simplex no puede salir más de una flecha.
- A un simplex no puede llegarle más de una flecha.
- Un simplex no puede a la vez recibir y emanar una flecha.

- No pueden haber “ciclos” de flechas.

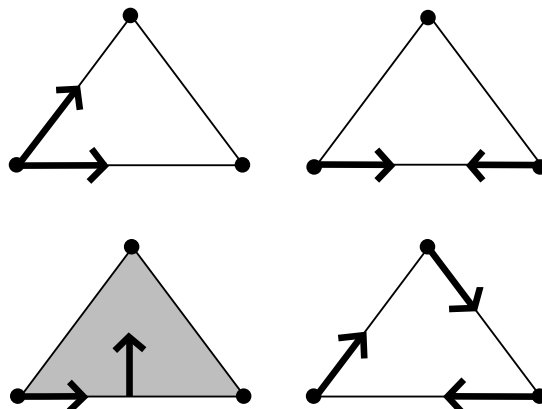


Figura 4.3: Situaciones a evitar.

El teorema 4.6.6 nos dirá que estas cuatro son precisamente las condiciones que hay que pedirle a un campo vectorial para que refleje un procedimiento como el de nuestro ejemplo.

Forman encontró una manera sencilla de reformular el concepto de campo vectorial, de modo que pidiendo que se cumplan las primeras dos condiciones, se satisfagan automáticamente las otras dos (precisamente, esto es lo que nos dirán el lema 4.2.2 y la observación 4.4.18). El truco consiste en considerar funciones  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  que cumplan sólo las siguientes dos propiedades. Dado  $\sigma \in M$ , pediremos que en todos los  $\tau \in M$  tales que  $\tau \succ \sigma$  la función crezca, salvo tal vez en uno en el que la función no crece. Para un tal  $\tau$ , estaremos pensando que el no crecimiento indica que hay una flecha de  $\sigma$  a  $\tau$ . Análogamente, si consideramos los símplexes  $\nu \prec \sigma$ , pediremos que en todos estos  $\nu$  la función decrezca, salvo tal vez en uno en el que la función no decrece. Para un tal  $\nu$ , estaremos pensando que el no decrecimiento indica que hay una flecha de  $\nu$  a  $\sigma$ . Así es como se llega a la definición de *función de Morse*.

## 4.2. Los teoremas básicos

Sea  $M$  un complejo simplicial finito de dimensión  $n$ .

**Definición 4.2.1.** Una *función de Morse* (discreta) en  $M$  es una función  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  tal que para todo símplex  $\sigma \in M$  se tiene

- (i) Existe a lo sumo un  $\tau \succ \sigma$  tal que  $f(\tau) \leq f(\sigma)$ .
- (ii) Existe a lo sumo un  $\nu \prec \sigma$  tal que  $f(\nu) \geq f(\sigma)$ .

En otras palabras, es una función que localmente es creciente con respecto a la dimensión, con a lo sumo una excepción cuando consideramos las caras inmediatas de  $\sigma$ , y una cuando consideramos los símplexes de los cuales  $\sigma$  es cara inmediata. Veamos que sólo se puede dar una de estas excepciones.

**Lema 4.2.2.** *Las siguientes condiciones son mutuamente excluyentes:*

- Existe un  $\tau \succ \sigma$  tal que  $f(\tau) \leq f(\sigma)$ .
- Existe un  $\nu \prec \sigma$  tal que  $f(\nu) \geq f(\sigma)$ .

*Demostración.* Supongamos que se tiene un  $\tau \succ \sigma$  tal que  $f(\tau) \leq f(\sigma)$ . Sea  $\nu \prec \sigma$ . Tomemos el único simplex  $\sigma'$  distinto de  $\sigma$  que cumple  $\nu \prec \sigma' \prec \tau$ . Entonces si se tuviera  $f(\nu) \geq f(\sigma)$ , al considerar en la definición la condición (i) para  $\nu$  vemos que  $f(\nu) < f(\sigma')$ , y al considerar la condición (ii) para  $\tau$  vemos que  $f(\sigma') < f(\tau)$ . Absurdo. □

En la teoría de Morse clásica, dada una función de Morse sobre una variedad diferenciable, vimos que la información topológicamente relevante estaba “contenida” en los puntos críticos de la función. En el contexto discreto, pensando en las deformaciones de las que hablamos en la introducción, vemos que los simplices que aportan la información topológicamente relevante son aquellos que no están involucrados en las deformaciones, es decir, aquellos que no reciben ni emanan flechas. Esta idea se ve reflejada en la siguiente

**Definición 4.2.3.** Diremos que  $\sigma$  es un *punto (o simplex) crítico* de  $f$  si se satisfacen

- (i)  $\tau \succ \sigma \Rightarrow f(\tau) > f(\sigma)$ .
- (ii)  $\nu \prec \sigma \Rightarrow f(\nu) < f(\sigma)$ .

En caso contrario, diremos que  $\sigma$  es *regular*.

Tal como sucede en el caso de la teoría de Morse clásica, los puntos críticos de una función de Morse determinan por completo el tipo homotópico del complejo. El papel que jugaba en la teoría de Morse clásica el *índice* de un punto crítico será aquí representado por la *dimensión* del simplex crítico.

**Ejemplo 4.2.4.**

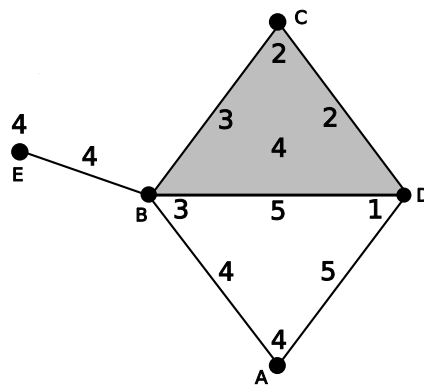


Figura 4.4: Los números indican los valores de la función en los simplices.

Los únicos puntos críticos de esta función de Morse son el vértice  $D$  y la arista  $AD$ ; todos los demás simplices son regulares.

**Ejemplo 4.2.5.** Todo complejo simplicial admite trivialmente una función de Morse. En efecto, definiendo  $f(\sigma) = \dim \sigma$  obtenemos una función de Morse, para la cual todo simplex es crítico.

**Observación 4.2.6.** Toda función de Morse, al estar considerando complejos simpliciales finitos, alcanza un máximo y un mínimo.

El mínimo lo alcanza necesariamente en uno de los vértices. Pues dado un  $\sigma^{(p)}$  con  $p \geq 1$ , como  $\sigma$  tiene al menos dos caras inmediatas, siempre es posible hallar  $\nu \prec \sigma$  que cumpla  $f(\nu) < f(\sigma)$ . Y por esta misma razón, un vértice en el que se alcance el mínimo deber ser crítico.

En cuanto al máximo, puede que este no se alcance en un  $n$ -simplex, o que se alcance en un  $n$ -simplex pero que este no sea crítico. Sin embargo, si  $M$  es una  $n$ -pseudovariedad sin borde nada de esto sucede. Esto se debe a que para  $p \leq n - 1$  todo  $\sigma^{(p)}$  es cara de al menos dos  $(p + 1)$ -símplices. En efecto, estos se pueden obtener tomando un  $\tau^{(n-1)} \succ \sigma$  cualquiera, y considerando los dos  $n$ -símplices distintos que contienen a  $\tau$ . Luego, dado  $\sigma^{(p)}$  con  $p \leq n - 1$ , siempre existirá  $\tau \succ \sigma$  tal que  $f(\tau) > f(\sigma)$ .

**Definición 4.2.7.** Sea  $f$  una función de Morse en  $M$  y  $c \in \mathbb{R}$ . Definimos

$$M(c) = \bigcup_{\substack{\sigma \in M \\ f(\sigma) \leq c}} \bigcup_{\nu \prec \sigma} \{\nu\}.$$

Es decir,  $M(c)$  es el subcomplejo de  $M$  generado por aquellos símplices  $\sigma$  tales que  $f(\sigma) \leq c$ . Llamaremos a estos subcomplejos *complejos de nivel* de  $f$ . Cuando sea necesario, denotaremos  $M_f(c) = M(c)$  si queremos especificar a qué función nos referimos.

El siguiente lema nos permitirá, entre otras cosas, tener una descripción más sencilla de estos subcomplejos. Sus corolarios son inmediatos.

**Lema 4.2.8.** Sea  $\sigma \in M$ , y sea  $\tau \succeq \sigma$ . Entonces existe  $\sigma \prec \tau' < \tau$  tal que  $f(\tau') \leq f(\tau)$ . Análogamente, dado  $\nu \preceq \sigma$ , existe  $\nu < \nu' \prec \sigma$  tal que  $f(\nu') \geq f(\nu)$ .

*Demostración.* Probaremos sólo la primera de estas afirmaciones, ya que la segunda se demuestra de manera similar.

Sea  $p = \dim \sigma$ . Escribamos  $\tau = \tau^{(p+k)}$ , y hagamos inducción en  $k$ . Para  $k = 1$  podemos tomar  $\tau' = \tau$ . En el paso inductivo, como siempre hay al menos dos  $(p + k - 1)$ -símplices distintos entre  $\sigma$  y  $\tau$ , podemos tomar  $\nu$  tal que  $\sigma < \nu \prec \tau$  y  $f(\nu) < f(\tau)$ . Por hipótesis inductiva, existe un  $\sigma \prec \tau' < \nu$  tal que  $f(\tau') \leq f(\nu)$ . Este sirve. □

**Corolario 4.2.9.**  $\sigma \in M(c)$  si y sólo si  $f(\sigma) \leq c$  o existe  $\tau \succ \sigma$  tal que  $f(\tau) \leq c$ .

**Corolario 4.2.10.** Si existe  $\tau \succeq \sigma$  tal que  $f(\tau) \leq f(\sigma)$ , entonces existe  $\tau' \succ \sigma$  tal que  $f(\tau') \leq f(\sigma)$ . Si existe  $\nu \preceq \sigma$  tal que  $f(\nu) \geq f(\sigma)$ , entonces existe  $\nu' \prec \sigma$  tal que  $f(\nu') \geq f(\sigma)$ .

**Corolario 4.2.11.**  $\sigma$  es crítico si y sólo si dados  $\nu \preceq \sigma \preceq \tau$  se tiene  $f(\nu) < f(\sigma) < f(\tau)$ .

Más adelante, nos va a interesar poder decidir cuándo es que un subcomplejo de  $M$  es un complejo de nivel del  $f$ . El próximo resultado apunta a responder en algún sentido a esta pregunta.

**Lema 4.2.12.** *Sea  $f$  una función de Morse en  $M$ , y sea  $N$  un subcomplejo de  $M$  con la propiedad de que si se tienen  $\sigma \succ \nu$  con  $\sigma \notin N$  y  $\nu \in N$ , entonces  $f(\sigma) > f(\nu)$ . Sea  $c \geq 0$ . Definamos  $F : M \rightarrow \mathbb{R}$  por*

$$F(\sigma) = \begin{cases} f(\sigma), & \sigma \in N \\ f(\sigma) + c, & \sigma \notin N. \end{cases}$$

*Entonces  $F$  es de Morse y tiene los mismos puntos críticos que  $f$ .*

*Demostración.* Primero veamos que  $F$  es de Morse. Conviene observar que si se tienen  $\sigma, \tau$  ambos a la vez en  $N$  o en  $M \setminus N$ , entonces  $F(\sigma) < F(\tau)$  si y sólo si  $f(\sigma) < f(\tau)$ . Tomemos  $\sigma \in M$ , y analizamos por separado según  $\sigma$  esté o no en  $N$ .

Supongamos  $\sigma \notin N$ . Sea  $\tau \succ \sigma$ . Como  $\tau \notin N$ , por lo observado recién se verifica la condición (i) de la definición. Por otra parte, tomemos  $\nu \prec \sigma$ . Como  $F(\nu) \geq f(\nu)$ , se verifica (ii).

Ahora el caso  $\sigma \in N$ . Sea  $\tau \succ \sigma$ . Si  $\tau \in N$ , por lo observado se verifica (i). Si  $\tau \notin N$ , la condición (i) se sigue gracias a que nuestra hipótesis nos dice que  $F(\tau) = f(\tau) + c > f(\sigma) + c \geq f(\sigma)$ . Finalmente tomemos  $\nu \prec \sigma$ . Como  $\nu \in N$ , de lo observado se sigue (ii).

Vimos así que  $F$  es de Morse. Veamos ahora que tiene los mismos puntos críticos que  $f$ . Tomemos entonces  $\sigma$  punto crítico de  $F$ , y veamos que lo es para  $f$ . Tomemos  $\nu \prec \sigma \prec \tau$ , y probemos que  $f(\nu) < f(\sigma) < f(\tau)$ .

Supongamos  $\sigma \notin N$ . Como  $\tau \notin N$  se tiene que  $f(\tau) > f(\sigma)$ . Si  $\nu \in N$ , la desigualdad nos la da nuestra hipótesis. Si  $\nu \notin N$ , se sigue de lo observado.

Ahora el caso  $\sigma \in N$ . Si  $\tau \notin N$ , la desigualdad nos la da nuestra hipótesis. Si  $\tau \in N$ , se sigue de lo observado. Como  $\nu \in N$ , la desigualdad para  $\nu$  es inmediata.

Resta ver que los puntos críticos de  $f$  lo son para  $F$ , pero el razonamiento es muy similar al que acabamos de hacer. □

**Observación 4.2.13.** Notemos que si  $f > 0$  (cosa que siempre podemos suponer), al tomar  $c = \max_N f$  resulta que  $F(\sigma) \leq c$  si y sólo si  $\sigma \in N$ . En particular,  $N = M_F(c)$ .

Dados números reales  $a < b$  y una función de Morse  $f$ , tal como en la teoría clásica, nos interesa poder comparar los complejos de nivel  $M(a)$  y  $M(b)$  en términos de los valores que toma  $f$  en el intervalo  $(a, b]$ . Para esto resulta más cómodo trabajar con funciones de Morse inyectivas. El siguiente lema nos permite suponer que este es siempre el caso.

**Lema 4.2.14.** *Sea  $f$  una función de Morse en  $M$ . Existe una  $f'$  de Morse en  $M$  inyectiva tal que  $f$  y  $f'$  tienen los mismos puntos críticos. Si además fijamos  $a < b \in \mathbb{R}$ , puede conseguirse  $f'$  de manera que  $M_f(a) = M_{f'}(a)$ ,  $M_f(b) = M_{f'}(b)$ , y tal que si  $(a, b]$  no contenía valores críticos de  $f$ , tampoco contenga valores críticos de  $f'$ .*

*Demostración.* La haremos en dos pasos. En el primero conseguiremos una función “localmente inyectiva” sin alterar puntos críticos ni complejos de nivel. En el segundo se obtendrá la función buscada.

**Paso 1.** Sea  $\sigma \in M$ . Redefinamos a  $f$  en  $\sigma$  de la siguiente manera. Si para todo  $\tau \succ \sigma$  se tiene  $f(\tau) > f(\sigma)$  (notemos que este es el caso cuando  $\sigma$  es crítico), defino  $\hat{f}(\sigma) = f(\sigma)$ . Si no, tomemos el único  $\tau \succ \sigma$  que satisface  $f(\tau) \leq f(\sigma)$ . Tenemos entonces que

(i) Si  $\tau' \succ \sigma$  y  $\tau' \neq \tau$ , entonces  $f(\tau') > f(\sigma)$ .

(ii) Si  $\nu \prec \sigma$ , entonces  $f(\nu) < f(\sigma)$ .

Definimos  $\hat{f}(\sigma) = f(\sigma) + \varepsilon$ , con  $\varepsilon > 0$  lo suficientemente chico como para que (i) siga valiendo. Es inmediato entonces que  $\hat{f}$  es de Morse y que tiene los mismos puntos críticos que  $f$ . Además, dado  $c \in \mathbb{R}$  se tiene  $M_{\hat{f}}(c) = M_f(c)$ .

En efecto, el caso  $c < f(\sigma)$  es claro. Supongamos entonces  $c \geq f(\sigma)$ . Como  $\hat{f} \geq f$ ,  $M_{\hat{f}}(c) \subseteq M_f(c)$ . La otra contención quedará probada si vemos que  $\sigma \in M_{\hat{f}}(c)$ . Al ser  $\hat{f}(\tau) = f(\tau) \leq f(\sigma) \leq c$ , se tiene que  $\tau$ , y por lo tanto  $\sigma$ , pertenece a  $M_{\hat{f}}(c)$ .

Haciendo esto símplex por símplex conseguimos una función de Morse  $\hat{f}$  con los mismos puntos críticos que  $f$ , con  $M_{\hat{f}}(c) = M_f(c)$  para todo  $c$ , y que además satisface que dados  $\sigma \prec \tau$  se tiene  $\hat{f}(\sigma) \neq \hat{f}(\tau)$ . Podemos suponer entonces que  $f$  satisface esto último.

**Paso 2.** A pesar de que podemos suponer que si  $\sigma \prec \tau$  entonces  $f(\sigma) \neq f(\tau)$ , la función no tiene porqué ser inyectiva. Veamos cómo modificarla para que sí lo sea.

Tomemos  $\varepsilon = \min\{|f(\tau) - f(\sigma)| : \sigma \prec \tau\}$ . Sea  $\sigma \in M$ . Redefiniremos a  $f$  en  $\sigma$  haciendo lo siguiente. Elijamos un  $0 \leq \delta < \varepsilon$  y definamos  $f'(\sigma) = f(\sigma) \pm \delta$ , con  $\pm$  a determinar, de manera que  $f'(\sigma)$  sea distinto a todos los valores de  $f$  en los otros símplexes. Al ser  $|\pm\delta| < \varepsilon$ , resulta inmediato que  $f'$  es de Morse y tiene los mismos puntos críticos que  $f$ .

Debemos elegir el signo para que  $M_f(a) = M_{f'}(a)$ ,  $M_f(b) = M_{f'}(b)$ . Si elegimos  $+$ , se tiene que  $M_f(c) = M_{f'}(c)$  para todo  $c \in (-\infty, f(\sigma)) \cup [f(\sigma) + \delta, +\infty)$ . Si elegimos  $-$ , se tiene que  $M_f(c) = M_{f'}(c)$  para todo  $c \in (-\infty, f(\sigma) - \delta) \cup [f(\sigma), +\infty)$ . Así,

- Si  $b < f(\sigma)$ , elegimos  $+$ .
- Si  $f(\sigma) \leq a$ , elegimos  $-$ .
- Si  $a < f(\sigma) < b$ , elegimos  $+$  y achicamos a  $\delta$  de manera que siga cumpliendo lo anterior y además sea  $b > f(\sigma) + \delta$ .
- Si  $f(\sigma) = b$ , elegimos  $-$  y achicamos a  $\delta$  de manera que siga cumpliendo lo anterior y además sea  $a < f(\sigma) - \delta$ .

Notemos que en todos los casos si  $f'(\sigma) \in (a, b]$  es porque  $f(\sigma) \in (a, b]$ . Esto, sumado al hecho de que en el primer paso no alteramos a la función en los puntos críticos, hará que se cumpla la última de las afirmaciones del enunciado.

Una vez hecho esto con todos los símplexes, obtenemos la función deseada. □

**Observación 4.2.15.** Notemos que en general no es posible conseguir una función de Morse inyectiva manteniendo los puntos críticos y *todos* los conjuntos de nivel de  $f$ . Por ejemplo, esto sucede al considerar la función de Morse trivial del ejemplo 4.2.5 en el complejo simplicial  $M = \dot{\Delta}^1$ .

Los dos próximos teoremas son los resultados principales de la teoría de Morse discreta. Estos muestran la íntima relación que hay entre la topología del complejo simplicial y las funciones de Morse que sobre él se pueden definir.

Fijemos una función de Morse  $f$  en  $M$ .

**Teorema 4.2.16.** *Supongamos que el intervalo  $(a, b]$  no contiene valores críticos de  $f$ . Entonces,  $M(b) \searrow M(a)$ .*

*En particular, si  $c \in \mathbb{R}$  es tal que  $f$  no tiene puntos críticos en  $M \setminus M(c)$ , entonces  $M \searrow M(c)$ .*

*Demostración.* Probemos la primera afirmación. El lema anterior nos permite suponer que  $f$  es inyectiva. Si  $f^{-1}((a, b]) = \emptyset$ , no hay nada que hacer. Si no, partiendo el intervalo podemos suponer que  $f^{-1}((a, b]) = \{\sigma\}$ , en cuyo caso  $M(b) = M(a) \cup (\cup_{\nu < \sigma} \{\nu\})$ . Como  $\sigma$  es regular, se da una y sólo una de las siguientes situaciones:

- (i) Existe un  $\tau \succ \sigma$  tal que  $f(\tau) \leq f(\sigma)$ .
- (ii) Existe un  $\nu \prec \sigma$  tal que  $f(\nu) \geq f(\sigma)$ .

Si se cumple (i) entonces  $f(\tau) \leq a$ , lo que implica que  $\tau$ , y por lo tanto  $\sigma$ , pertenece a  $M(a)$ . Así, resulta  $M(a) = M(b)$ .

Supongamos que se cumple (ii). Como eso impide que se cumpla (i), dado  $\tau \succ \sigma$  tendremos que  $f(\tau) > f(\sigma)$  y por lo tanto  $f(\tau) > b$ . Esto, sumado a que  $f(\sigma) > a$ , implica que  $\sigma$  no pertenecerá a  $M(a)$ . Por otra parte, dado  $\nu' \prec \sigma, \nu' \neq \nu$ , tenemos que  $f(\nu') < f(\sigma)$ . Así  $\nu'$ , y por lo tanto todas sus caras, pertenecerán a  $M(a)$ . Finalmente veamos que  $\nu \notin M(a)$ . Para esto, por un lado tengamos en cuenta que  $f(\nu) \geq f(\sigma) > a$ . Por el otro, tomemos  $\sigma' \succ \nu$  y veamos que  $f(\sigma') > a$ . Si  $\sigma' = \sigma$  es claro, y si no, se sigue de que  $f(\sigma') > f(\nu) \geq f(\sigma) > a$ . Esto mismo implica que  $\nu$  es cara libre de  $\sigma$  en  $M(b)$  y por lo tanto,

$$\begin{aligned} M(b) &= M(a) \cup (\cup_{\nu' < \sigma} \{\nu'\}) = M(a) \cup (\cup_{\substack{\nu' < \sigma \\ \nu' \neq \nu}} \{\nu'\}) \cup \{\nu, \sigma\} \\ &= M(a) \cup \{\nu, \sigma\} \searrow M(a). \end{aligned}$$

Para terminar, la segunda afirmación del teorema se sigue de la primera, teniendo en cuenta que si ponemos  $d = \text{máx } f$ , de manera que  $M = M(d)$ , entonces al ser regulares todos los símlices de  $M \setminus M(c)$ ,  $f$  no tiene valores críticos en  $(c, d]$ . En efecto, si  $\sigma$  es crítico y  $f(\sigma) > c$ , entonces  $\sigma \notin M(c)$ , ya que si  $\tau \succ \sigma$  entonces  $f(\tau) > f(\sigma) > c$ . □

**Teorema 4.2.17.** *Supongamos que  $f^{-1}((a, b]) = \{\sigma\}$ , con  $\sigma$  punto crítico. Entonces,  $M(b) = M(a) \cup_{\dot{\sigma}} \sigma$ .*

*Demostración.* Dado  $\nu \leq \sigma$  se tiene  $f(\nu) < f(\sigma)$ , por lo que  $f(\nu) \leq a$ . Entonces,  $\dot{\sigma} \subseteq M(a)$ . Dado  $\tau \geq \sigma$  se tiene  $f(\tau) > f(\sigma)$ , por lo que  $f(\tau) > b$ . Entonces, teniendo en cuenta que  $f(\sigma) > a$ , resulta que  $\sigma \notin M(a)$ . Resta ver que  $M(b) \subseteq M(a) \cup_{\dot{\sigma}} \sigma$ , ya que la otra contención es inmediata. Sea  $\alpha \in M(b)$ . Entonces, existe  $\beta > \alpha$  con  $f(\beta) \leq b$ . Luego, o bien  $\beta = \sigma$ , o bien  $f(\beta) \leq a$ ; en ambos casos resulta que  $\alpha \in M(a) \cup_{\dot{\sigma}} \sigma$ .  $\square$

Denotaremos a la cantidad de  $p$ -símplices críticos de  $f$  con  $m_p(f)$ , o con  $m_p$  si no hay posibilidad de confusión. Tanto el próximo resultado como otros que veremos más adelante nos mostrarán que cuantos menos puntos críticos tenga una función de Morse, más eficaz será para describir la topología del complejo.

**Corolario 4.2.18.**  $|M|$  tiene el tipo homotópico de un CW-complejo con  $m_p$  celdas de dimensión  $p$ .

Notemos que al considerar la función de Morse trivial del ejemplo 4.2.5 sobre  $M$ , el corolario no dice nada interesante. Pero en general se pueden encontrar funciones de Morse con pocos puntos críticos, y en esos casos este resultado es de gran utilidad. Por ejemplo, considerando la función de Morse del ejemplo 4.2.4, el corolario nos dice que  $|M| \simeq S^1$  (donde, cuando se trate de espacios topológicos, “ $\simeq$ ” denotará a “tiene el mismo tipo homotópico que”).

*Demostración.* Por el lema podemos suponer que  $f$  es inyectiva. Ordenemos los valores de  $f$ : supongamos que estos son  $c_1 < c_2 < \dots < c_k$ , con  $c_i = f(\sigma_i)$ . Elijamos valores  $c_1 < d_1 < c_2 < d_2 < \dots < d_{k-1} < c_k < d_k$ , de manera que  $f^{-1}((d_i, d_{i+1}]) = \{\sigma_{i+1}\}$  para todo  $1 \leq i < k$ .

Notemos que  $M(d_1) = \{\sigma_1\}$ . Como ya dijimos  $\sigma_1$  debe ser un vértice. Supongamos que  $|M(d_i)| \simeq X_i$ , donde  $X_i$  es un CW-complejo con  $m_p^{(i)}$  celdas de dimensión  $p$ , donde  $m_p^{(i)}$  denota a la cantidad de  $p$ -símplices críticos que hay en  $\{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_i\}$ .

Si  $\sigma_{i+1}$  es regular, entonces el teorema 4.2.16 nos dice en particular que la inclusión  $|M(d_i)| \hookrightarrow |M(d_{i+1})|$  es un retracto por deformación fuerte por lo que  $|M(d_i)| = |M(d_{i+1})|$ .

Si  $\sigma_{i+1}$  es crítico, el teorema 4.2.17 nos dice que  $M(d_{i+1}) = M(d_i) \cup_{\dot{\sigma}_{i+1}} \sigma_{i+1}$ . En particular, si  $\sigma_{i+1}$  es de dimensión  $p$ ,  $|M(d_{i+1})|$  se obtiene de  $|M(d_i)|$  adjuntando una  $p$ -celda y por lo tanto  $|M(d_{i+1})| \simeq X_i \cup e^p$ . En principio,  $e^p$  podría no estar pegada en el  $(p-1)$ -esqueleto de  $X_i$ . Para obtener un CW-complejo consideremos  $\varphi : S^{p-1} \rightarrow X_i$  la función de adjunción de  $e^p$ . Por aproximación celular se tiene  $\varphi \simeq \tilde{\varphi}$ , donde  $\tilde{\varphi} : S^{p-1} \rightarrow X_i$  es celular y por lo tanto tiene su imagen en el  $(p-1)$ -esqueleto de  $X_i$ . Entonces si definimos  $X_{i+1} = X_i \cup_{\tilde{\varphi}} e^p$ ,  $X_{i+1}$  sí es un CW-complejo, que satisface  $X_{i+1} \simeq X_i \cup e^p \simeq |M(d_{i+1})|$ .  $\square$

### 4.3. Algunas aplicaciones

Fijemos ahora un complejo simplicial  $M$  con  $N \subseteq M$  un subcomplejo. Veremos que siempre se pueden extender/restringir funciones de Morse. La siguiente proposición es inmediata.

**Proposición 4.3.1.** Si  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  es una función de Morse, entonces  $f|_N : N \rightarrow \mathbb{R}$  es una función de Morse. Si  $\sigma \in N$  es un punto crítico de  $f$  en  $M$ , lo es también de  $f|_N$ .

**Proposición 4.3.2.** Si  $f : N \rightarrow \mathbb{R}$  es una función de Morse, entonces se puede extender a una función de Morse en todo  $M$ .

*Demostración.* Sea  $c = \max f$ . Defino  $g : M \rightarrow \mathbb{R}$  por

$$g(\sigma) = \begin{cases} f(\sigma), & \sigma \in N \\ \dim(\sigma) + c, & \sigma \notin N. \end{cases}$$

Es inmediato chequear que  $g$  es de Morse. □

Según esta proposición siempre es posible extender una función de Morse a un complejo más grande. Pero notemos que esta extensión no es muy eficaz, ya que todo simplex de  $M \setminus N$  resulta crítico para  $g$ . Cuando  $M \searrow N$ , se puede encontrar una extensión más interesante, como nos lo muestra el siguiente resultado, recíproco al teorema 4.2.16.

**Proposición 4.3.3.** Supongamos que  $M \searrow N$  y que  $f$  es una función de Morse en  $N$ . Sea  $c = \max f$ . Entonces  $f$  se puede extender a  $M$  de manera que  $N = M(c)$  y todo simplex de  $M \setminus N$  sea regular.

*Demostración.* Hagámoslo por inducción en la cantidad de colapsos elementales de los que se compone el colapso de  $M$  a  $N$ .

Si  $M = N \cup \{\sigma, \nu\}$  con  $\nu$  cara libre de  $\sigma$ , defino  $g$  en  $M$  por

$$g(\tau) = \begin{cases} f(\tau), & \tau \in N \\ c + 1, & \tau = \sigma \\ c + 2, & \tau = \nu. \end{cases}$$

No es difícil chequear que  $g$  es de Morse, que  $\nu$  y  $\sigma$  son regulares para  $g$ , y que  $N = M(c)$ .

Ahora supongamos que

$$M = M_k \searrow^e M_{k-1} \searrow^e \cdots \searrow^e M_0 = N,$$

Por hipótesis inductiva tenemos una extensión  $h$  de  $f$  a  $M_{k-1}$  sin puntos críticos en  $M_{k-1} \setminus N$  y con  $N = M_{k-1}(c)$ . Por lo visto en el caso  $k = 1$  tenemos una extensión  $g$  de  $h$  a  $M$  sin puntos críticos en  $M \setminus M_{k-1}$  (y por lo tanto tampoco en  $M \setminus N$ ) con  $M_{k-1} = M(c)$ . Veamos que  $N = M(c)$ . Sea  $\sigma \in M(c)$ . Entonces existe  $\tau \in M$  con  $\tau > \sigma, g(\tau) \leq c$ . En particular,  $\tau \in M_{k-1}$  y  $h(\tau) \leq c$ . Pero entonces resulta que  $\tau$ , y por lo tanto  $\sigma$ , pertenece a  $N$ . □

**Corolario 4.3.4.** Sea  $M$  un complejo simplicial y sea  $v$  un vértice de  $M$ . Entonces  $M \searrow v$  si y sólo si  $M$  admite una función de Morse que tiene a  $v$  como único simplex crítico.

*Demostración.* Es inmediato del teorema 4.2.16 y la proposición 4.3.3. □

**Observación 4.3.5.** Recordemos que, como vimos en la proposición 1.7.8, un complejo colapsable se colapsa a cualquiera de sus vértices. Entonces dados dos vértices  $v$  y  $w$  de un complejo  $M$ , se podrá definir una función de Morse en  $M$  que tiene a  $v$  como único punto crítico si y sólo si se puede definir una que tenga a  $w$  como único punto crítico.

Sea  $\Delta^n$  la  $n$ -bola combinatoria estándar. Elijamos un vértice  $v$  y un  $(n-1)$ -simplex  $\sigma$  en  $\Delta^n$ . Como  $\Delta^n \searrow v$  y  $\hat{\Delta}^n \setminus \{\sigma\} \searrow v$ , obtenemos el siguiente

**Corolario 4.3.6.**  $\Delta^n$  admite una función de Morse que tiene a  $v$  como único punto crítico.  $\hat{\Delta}^n$  admite una función de Morse que tiene a  $v$  y a  $\sigma$  como únicos puntos críticos.

**Definición 4.3.7.** Sea  $f$  una función de  $M$ , y supongamos que  $\dim M = n$ . Diremos que  $f$  es *polar* si  $m_0 = m_n = 1$ .

Notemos que esto no impone condiciones sobre los valores  $m_p$  para  $0 < p < n$ .

**Lema 4.3.8.** Supongamos que  $M$  es conexo. Dado un vértice  $v$  de  $M$ , existe una función de Morse que tiene a  $v$  como único vértice crítico.

*Demostración.* Consideremos  $M_1$ , el 1-esqueleto de  $M$ . Este es un grafo conexo. Sea  $T$  un árbol maximal de  $M_1$ . Este es un subgrafo de  $M_1$  que contiene a todos los vértices de  $M_1$  y por lo tanto a todos los de  $M$ . Como  $T$  es un árbol, se tiene que  $T \searrow v$ , como vimos en la proposición 1.7.7. Entonces, por la proposición 4.3.3, se tiene una función de Morse en  $T$  que tiene a  $v$  como único punto crítico. La extendemos a todo  $M$  según la proposición 4.3.2. De esta manera, todos los simplices de  $M \setminus T$  serán críticos. Pero entre estos no hay vértices, por lo que el único vértice crítico seguirá siendo  $v$ . Obtenemos así la función deseada. □

**Teorema 4.3.9.** Sea  $M$  una  $n$ -pseudovariiedad sin borde. Entonces  $M$  admite una función de Morse polar. Más aún, si elegimos un vértice  $v$  y un  $n$ -simplex  $\sigma$  podemos hacer que  $v$  sea el único vértice crítico y  $\sigma$  el único  $n$ -simplex crítico.

*Demostración.* Si  $n = 0$ ,  $M$  es un punto y no hay nada que hacer.

Si  $n = 1$ , sea  $N = M \setminus \{\sigma\}$ . Entonces  $N$  es una 1-pseudovariiedad con borde, por lo que  $N \searrow v$ . Por el corolario 4.3.4 se tiene una función de Morse  $f$  en  $N$  con  $v$  como único punto crítico. Si  $c = \max f$ , extendemos  $f$  a  $M$  poniendo  $f(\sigma) = c + 1$ . Así se satisface lo deseado.

Supongamos entonces que  $n \geq 2$ . Sea  $N = M \setminus \sigma$ . En virtud de lo visto en la proposición 2.3.5,  $N$  es una  $n$ -pseudovariiedad con borde. Por la proposición 2.3.6, tenemos que  $N \searrow L$ , donde  $L$  es un subcomplejo de  $N$  con  $\dim L \leq n - 1$ , que contiene al  $(n - 2)$ -esqueleto de  $M$ . Por el lema anterior tenemos una función de Morse  $f$  en  $L$  que tiene a  $v$  como único vértice crítico. Extendemos  $f$  a  $N$  sin agregar puntos críticos vía la proposición 4.3.3, de manera que los  $n$ -simplices de  $N$  resultan todos regulares. Finalmente si  $c = \max f$ , extendemos  $f$  a todo  $M$  poniendo  $f(\sigma) = c + 1$ . □

Los siguientes dos teoremas, que son interesantes por sí mismos, nos permitirán reformular la conjetura de Poincaré en su versión PL. La demostración del primero de ellos requiere de un resultado bastante fuerte: el teorema de los entornos regulares de J. H. C. Whitehead.

**Teorema 4.3.10.** *Sea  $M$  un complejo simplicial de dimensión  $n$  que admite una función de Morse con exactamente dos puntos críticos.*

- (i)  *$M$  tiene el tipo homotópico de una esfera.*
- (ii) *Si además  $M$  es una  $n$ -vc sin borde, entonces  $M =_{PL} \dot{\Delta}^n$ .*

*Demostración.*

- (i) Se sigue del corolario 4.2.18. Uno de los puntos críticos debe ser un vértice. Si el otro es de dimensión  $p$ ,  $M$  tiene el tipo homotópico de un CW que tiene una 0-celda y una  $p$ -celda. Y ese espacio es  $S^p$ .
- (ii) Sea  $\sigma$  el  $n$ -simplex crítico,  $v$  el vértice crítico, y llamemos  $N = M \setminus \{\sigma\}$ . El único punto crítico de  $N$  es  $v$ , por lo que  $N \searrow v$ . El teorema 2.2.18 nos dice entonces que  $N =_{PL} \Delta^n$ . Así,

$$M = N \cup_{\partial} \sigma =_{PL} \dot{\Delta}^n.$$

□

Una suerte de recíproca a este teorema es el que sigue a continuación. Para su demostración vamos a necesitar de un resultado que veremos más adelante.

**Teorema 4.3.11.** *Supongamos que  $M =_{PL} \dot{\Delta}^n$ . Entonces se puede hallar una subdivisión de  $M$  que admite una función de Morse con exactamente dos puntos críticos.*

*Demostración.* Como  $M =_{PL} \dot{\Delta}^n$ , hay subdivisiones  $\alpha M$  y  $\delta(\dot{\Delta}^n)$ , donde esta última es una subdivisión derivada, que son simplicialmente isomorfas. Vimos en el corolario 4.3.6 que  $\dot{\Delta}^n$  admite una función con exactamente dos puntos críticos. Veremos en el teorema 4.8.1 que esta induce una función de Morse en  $\delta(\dot{\Delta}^n)$  con exactamente dos puntos críticos. Vía el isomorfismo simplicial, esta se traslada a una función de Morse en  $\alpha M$  que satisface lo pedido.

□

**Corolario 4.3.12.** *Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

- (i) (Conjetura de Poincaré PL) *Sea  $M$  una  $n$ -vc sin borde que es homotópicamente una  $n$ -esfera. Entonces,  $M =_{PL} \dot{\Delta}^n$ .*
- (ii) *Sea  $M$  una  $n$ -vc sin borde que es homotópicamente una  $n$ -esfera. Entonces, alguna subdivisión de  $M$  admite una función de Morse con exactamente dos puntos críticos.*

En [4] Forman logra un resultado un poco más fuerte, consiguiendo que la subdivisión a la que hace referencia el ítem (ii) de este corolario sea una bisección. En nuestro contexto no logramos algo similar, por lo visto al final de la sección 2.2.

## 4.4. El vector gradiente y el flujo asociados a una función de Morse

Sea  $M$  un complejo simplicial finito. Vamos ahora a definir el vector gradiente y el flujo asociados a una función de Morse  $f$ . El vector gradiente, que en verdad no representará al gradiente de  $f$  sino al de  $-f$ , codificará toda la información relativa a los puntos críticos de la función. Además, al abstraer las propiedades esenciales que tiene este vector, obtendremos una herramienta que nos permitirá construir funciones de Morse. El flujo nos servirá para tener una descripción de la homología de  $M$  en términos de sus puntos críticos.

Más allá de las aplicaciones concretas que les daremos en esta y la próxima sección al gradiente y al flujo, estos nos sirven para entender qué son las funciones de Morse. Precisamente, el gradiente de una función de Morse es un campo vectorial que indica las deformaciones que esta función pretende codificar, tal como lo mencionamos en la sección introductoria a este capítulo; aunque ahora definiremos el gradiente a partir de la función de Morse, el concepto primitivo de la teoría es el de gradiente.

Sea  $f$  una función de Morse en  $M$ . Pensando en lo que dijimos en la introducción, la definición de *gradiente* de  $f$  es prácticamente obvia. Es la función  $V : M \rightarrow M \cup \{0\}$  definida de la siguiente manera. Dado un simplex  $\sigma \in M$ , si existe  $\tau \succ \sigma$  tal que  $f(\tau) \leq f(\sigma)$  ponemos  $V(\sigma) = \tau$  (indicando de esta manera que sale una flecha de  $\sigma$  hacia  $\tau$ ). Si no, ponemos  $V(\sigma) = 0$  (indicando que de  $\sigma$  no sale ninguna flecha). Por eso decimos que  $V$  es la versión discreta de  $-\nabla f$ .

**Ejemplo 4.4.1.** Si  $f$  es la función de Morse del ejemplo 4.2.4, entonces su gradiente es el de la figura 4.2

Para definir al flujo y para usar al gradiente como herramienta para describir la homología de  $M$ , será necesario trabajar con símlices orientados, y por lo tanto redefiniremos al gradiente para que tenga en cuenta estas orientaciones, en el siguiente sentido: dado  $\sigma \in M$ , si  $\tau \succ \sigma$  es tal que  $f(\tau) \leq f(\sigma)$ , entonces el gradiente en  $\sigma$  apuntará hacia  $\tau$ , orientado de manera que cuando consideremos su borde,  $\sigma$  aparezca con la orientación opuesta a la que traía.

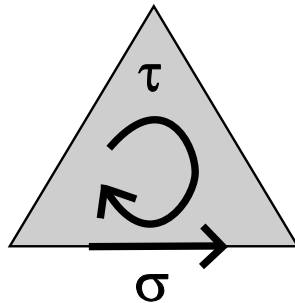


Figura 4.5: La orientación que llevará  $V(\sigma)$ .

Ahora sí rigurosamente, fijemos un complejo simplicial  $M$  finito y de dimensión  $n$  y  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  de Morse, y procedamos a definir su gradiente.

Ordenando los vértices de  $M$  obtenemos una orientación para sus símplexes. Si  $\sigma = \{x_0, x_1, \dots, x_p\}$  es un  $p$ -símplex, denotaremos al símplex orientado por  $\sigma = [x_0, x_1, \dots, x_p]$ . Sea  $C_p$  el grupo abeliano libre generado por los  $p$ -símplexes orientados, identificando la orientación opuesta a  $\sigma$  con  $-\sigma$ . Se define un operador  $\partial_p : C_p \rightarrow C_{p-1}$  por

$$\partial_p(\sigma) = \sum_{k=0}^p (-1)^k [x_0, \dots, \hat{x}_k, \dots, x_p],$$

si  $\sigma = [x_0, x_1, \dots, x_p]$ . Notemos que entonces

$$\partial_p(\sigma) = \sum_{\nu \prec \sigma} \varepsilon(\sigma, \nu) \nu,$$

donde  $\varepsilon(\sigma, \nu) = \pm 1$ . Dicho número se denomina *número de incidencia* entre  $\sigma$  y  $\nu$ .

Obtenemos así a  $(C_*, \partial)$ , el complejo de cadenas asociado a  $M$ , cuya homología es por definición la homología simplicial de  $M$ . Definimos en él un producto interno  $\langle, \rangle$  declarando ortonormales a los símplexes orientados. Así,

$$\partial_p(\sigma) = \sum_{\nu \prec \sigma} \langle \partial_p(\sigma), \nu \rangle \nu.$$

En particular,  $\varepsilon(\sigma, \nu) = \langle \partial_p(\sigma), \nu \rangle$ .

**Definición 4.4.2.** Sea  $\sigma \in M$ . Si existe  $\tau \succ \sigma$  tal que  $f(\tau) \leq f(\sigma)$ , definimos

$$V(\sigma) = -\langle \partial(\tau), \sigma \rangle \tau.$$

Si no, definimos  $V(\sigma) = 0$ . Extendiendo por linealidad, obtenemos un operador  $V : C_* \rightarrow C_{*+1}$ , que llamaremos *gradiente* de  $f$ .

De ser necesario, denotaremos  $V = V_f$  para remarcar de qué función proviene.

De esta forma,  $V(\sigma)$  se anula si  $\sigma$  es crítico (como es lógico) y, si  $V(\sigma)$  es no nulo, apunta al único  $\tau \succ \sigma$  hacia el cual  $f$  decrece, orientado de manera que se tenga  $\langle \partial(V(\sigma)), \sigma \rangle = -1$ . En efecto,

$$\langle \partial(V(\sigma)), \sigma \rangle = -\langle \partial(\tau), \sigma \rangle \sum_{\sigma' \prec \tau} \langle \partial(\tau), \sigma' \rangle \langle \sigma', \sigma \rangle = -\langle \partial(\tau), \sigma \rangle^2 = -1.$$

Los primeros dos ítems de la siguiente proposición, que también puede pensarse en términos del gradiente “no orientado”, nos dicen justamente que el gradiente de una función de Morse satisface dos de las propiedades que pretendíamos que valieran.

**Proposición 4.4.3.**

(i)  $V^2 = 0$ .

(ii) Dado  $\sigma$ , existe a lo sumo un  $\nu$  tal que  $V(\nu) = \pm \sigma$ .

(iii)  $\sigma$  es crítico si y sólo si  $V(\sigma) = 0$  y  $\sigma \notin \text{Im}(V)$ .

*Demostración.*

- (i) Si  $V(\sigma) = \pm\tau$ , dado  $\nu^{(p+2)} > \tau$  se tiene  $f(\nu) > f(\tau)$  y por lo tanto  $V(\tau) = 0$ .
- (ii) Si  $V(\nu) = \pm\sigma$  es porque  $f(\nu) \geq f(\sigma)$ . Luego para  $\nu' \prec \sigma, \nu' \neq \nu$  se tiene  $f(\nu') < f(\sigma)$  y por lo tanto  $V(\nu') \neq \pm\sigma$ .
- (iii) Es inmediato. Sólo hay que advertir que si  $\sigma = V(c)$  con  $c \in C_{p-1}$ , entonces existe un  $\nu^{(p-1)}$  tal que  $c = \pm\nu$ .

□

En particular, vemos que el gradiente de una función de Morse determina por completo cuáles son sus puntos críticos. Sin embargo, en él no se reflejan los complejos de nivel. Por ejemplo, dada una función de Morse  $f$  y  $a \in \mathbb{R}$  resulta que  $V_f = V_{f+a}$ , pero en general para  $c \in \mathbb{R}$  se tendrá  $M_f(c) \neq M_{f+a}(c)$ .

A pesar de esto, podremos reformular en términos de gradientes el teorema 4.2.16 y la proposición 4.3.3, que están enunciados en términos de complejos de nivel. Esto será útil más adelante, cuando nos encontremos con funciones de Morse sobre cuyos complejos de nivel no tendremos control alguno, control que sí tendremos sobre sus gradientes. Por el momento, pensemos en gradientes “no orientados”.

**Proposición 4.4.4.** *Sea  $N \subseteq M$  un subcomplejo. Entonces  $M \searrow N$  si y sólo si existe  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  de Morse que satisface*

- (i) *Todo punto de  $M \setminus N$  es regular para  $f$ .*
- (ii) *Si  $\sigma \in N$  es tal que  $V_f(\sigma) \neq 0$ , entonces  $V_f(\sigma) \in N$ .*

*Demostración.* Supongamos primero que  $M \searrow N$ . Por la proposición 4.3.3, tenemos  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  de Morse sin puntos críticos fuera de  $N$  y tal si  $c = \max_N f$  se tiene  $N = M(c)$ . Sea  $\sigma \in M$  tal que  $V_f(\sigma) \neq 0$ . Entonces, si  $V_f(\sigma) \notin N$ , es porque  $V_f(\sigma) > c$ . Pero como  $f(V_f(\sigma)) \leq f(\sigma)$ , resulta que  $f(\sigma) > c$ . Si a esto le sumamos que para todo  $\tau \succ \sigma$  se tiene que  $f(\tau) > c$  (ya que si  $\tau \succ \sigma, \tau \neq V_f(\sigma)$  se tiene  $f(\tau) > f(\sigma)$ ), concluimos que  $\sigma \notin N$ .

Ahora supongamos que tenemos  $f$  de Morse en  $M$  que satisface (i) y (ii). Tomemos símlices  $\sigma \notin N$  y  $\nu \in N$  tales que  $\sigma \succ \nu$ . Entonces, o bien  $V_f(\nu) = 0$  o bien  $V_f(\nu) \in N$ , y en particular  $V_f(\nu) \neq \sigma$ . Por lo tanto, resulta  $f(\sigma) > f(\nu)$ . Entonces el lema 4.2.12 (junto a su posterior observación) nos dice que existe  $F$  función de Morse en  $M$  sin puntos críticos fuera de  $N$  y tal que para cierto  $c \in \mathbb{R}$  se tiene  $N = M_F(c)$ . Luego, por el teorema 4.2.16 se concluye que  $M \searrow N$ .

□

Volviendo a pensar en símlices orientados, sea  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  de Morse y sea  $V$  su gradiente.

**Definición 4.4.5.** Se define el *flujo* de  $f$  como el operador  $\Phi : C_* \rightarrow C_*$  dado por

$$\Phi = 1 + \partial V + V \partial.$$

Notemos que con la orientación que le dimos a  $V(\sigma)$  cuando es no nulo, se logra que al considerar  $\sigma + \partial V(\sigma)$  el simplex  $\sigma$  se cancele.

**Ejemplo 4.4.6.** Si  $f$  es la función trivial sobre  $M$  del ejemplo 4.2.5, entonces  $V = 0$  y  $\Phi = 1$ .

**Ejemplo 4.4.7.** Sea  $f$  la función de Morse del ejemplo 4.2.4. En ese complejo simplicial ordenemos los simplices declarando  $E < A < B < C < D$ . Entonces,

- $V([A]) = [A, B]$ ,  $V([B]) = [B, C]$ ,  $V([C]) = [C, D]$ ,  $V([D]) = 0$ ,  
 $V([E]) = [E, A]$ .
- $V([A, B]) = V([B, C]) = V([C, D]) = V([A, D]) = V([E, A]) = 0$ ,  
 $V([B, D]) = [B, C, D]$ .
- $V([B, C, D]) = 0$ .
- $\Phi([A]) = [B]$ ,  $\Phi([B]) = [C]$ ,  $\Phi([C]) = [D]$ ,  $\Phi([D]) = [D]$ ,  $\Phi([E]) = [B]$ .
- $\Phi([A, B]) = [B, C]$ ,  $\Phi([B, C]) = [C, D]$ ,  $\Phi([C, D]) = 0$ ,  
 $\Phi([E, A]) = [B, C]$ ,  $\Phi([B, D]) = [C, D]$ ,  $\Phi([A, D]) = [A, D] - [A, B]$ .
- $\Phi([B, C, D]) = 0$ .

Pensando en lo que dijimos en la sección introductoria, vemos cómo el flujo nos indica hacia dónde se están deslizando los simplices al realizar las deformaciones. Por ejemplo, nos indica que el vértice  $A$  se desliza sobre el  $B$ ,  $B$  sobre  $C$ ,  $C$  sobre  $D$ , y  $D$  queda fijo. Lo mismo con las aristas:  $AB$  sobre  $BC$ ,  $BC$  sobre  $CD$ , y  $CD$  queda fijo.

Informalmente hablando, una vez hechas todas las deformaciones que indica un diagrama de flechas, todo simplex quedará fijo por el flujo, si este está indicando hacia dónde se deslizan los simplices. Por ejemplo, en el ejemplo que estamos considerando,  $\Phi^3([A])$  queda fijo por  $\Phi$  y  $\Phi^2([A, B])$  queda fijo por  $\Phi$ . Esta idea un tanto vaga queda plasmada en la proposición 4.4.10.

Volviendo a considerar los aspectos algebraicos del flujo, usando que  $\partial^2 = 0$  notemos que

$$\begin{aligned}\Phi\partial &= (1 + \partial V + V\partial)\partial = \partial + \partial V\partial + V\partial\partial = \partial + \partial V\partial. \\ \partial\Phi &= \partial + (1 + \partial V + V\partial) = \partial + \partial\partial V + \partial V\partial = \partial + \partial V\partial.\end{aligned}$$

En otras palabras, se tiene que  $\Phi\partial = \partial\Phi$ , por lo que  $\Phi : C_* \rightarrow C_*$  es un morfismo de complejos de cadenas. Notemos que la igualdad  $\Phi - 1 = \partial V + V\partial$  nos dice que  $V$  define una homotopía entre los morfismos  $\Phi$  y  $1$ .

**Proposición 4.4.8.** Sean  $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_r$  los  $p$ -simplices (orientados) de  $M$ . Escribamos  $\Phi(\sigma_i) = \sum_j a_{ij}\sigma_j$ . Entonces,

- (i)  $a_{ii} = 0$  o  $1$ , y  $a_{ii} = 1$  si y sólo si  $\sigma_i$  es crítico. En particular,  $\sigma_i$  será crítico si y sólo si  $\langle \Phi(\sigma_i), \sigma_i \rangle \neq 0$ .

(ii) Si  $j \neq i$  y  $a_{ij} \neq 0$ ,  $f(\sigma_j) < f(\sigma_i)$ .

*Demostración.* Probaremos (i) y (ii) simultáneamente, llamando  $\sigma = \sigma_i$  y separando en tres casos.

**1.**  $\sigma$  crítico:

Por un lado  $V(\sigma) = 0$ , por lo que

$$\Phi(\sigma) = \sigma + V(\partial\sigma) = \sigma + \sum_{\nu \prec \sigma} \langle \partial\sigma, \nu \rangle V(\nu).$$

Por otra parte dado  $\nu \prec \sigma$  tenemos  $f(\nu) < f(\sigma)$ . Entonces para tales  $\nu$  o bien  $V(\nu) = 0$  o bien  $V(\nu) = \pm\sigma'$  con  $\sigma' \neq \sigma$  y  $f(\sigma') \leq f(\nu)$ . Así,

$$\Phi(\sigma) = \sigma + \sum_{\sigma' \neq \sigma} a_{\sigma'} \sigma',$$

donde  $a_{\sigma'} \neq 0$  implica  $f(\sigma') < f(\sigma)$ .

**2.**  $\pm\sigma = V(\nu)$ :

En particular tendremos que  $V(\sigma) = 0$  y que  $V(\nu) = -\langle \partial\sigma, \nu \rangle \sigma$ . Así,

$$\begin{aligned} \Phi(\sigma) &= \sigma + \sum_{\nu' \prec \sigma} \langle \partial\sigma, \nu' \rangle V(\nu') = \sigma + \langle \partial\sigma, \nu \rangle V(\nu) + \sum_{\nu' \neq \nu} \langle \partial\sigma, \nu' \rangle V(\nu') \\ &= \sum_{\nu' \neq \nu} \langle \partial\sigma, \nu' \rangle V(\nu'). \end{aligned}$$

Pero dado  $\nu' \prec \sigma$ ,  $\nu' \neq \nu$ , tenemos que  $f(\nu') < f(\sigma)$ . Entonces para tales  $\nu'$  o bien  $V(\nu') = 0$  o bien  $V(\nu') = \pm\sigma'^{(p)}$  con  $\sigma' \neq \sigma$  y  $f(\sigma') \leq f(\nu')$ . Así,

$$\Phi(\sigma) = \sum_{\sigma' \neq \sigma} a_{\sigma'} \sigma',$$

donde  $a_{\sigma'} \neq 0$  implica  $f(\sigma') < f(\sigma)$ .

**3.**  $V(\sigma) \neq 0$ :

Tenemos un  $\tau \succ \sigma$  con  $f(\tau) \leq f(\sigma)$ , y así  $V(\sigma) = -\langle \partial(\tau), \sigma \rangle \tau$ . Escribamos

$$\Phi(\sigma) = \sigma + V(\partial\sigma) + \partial(V(\sigma)).$$

Para analizar el segundo término de esta suma, consideremos  $\nu \prec \sigma$ . Como  $\sigma \notin \text{Im}(V)$  tendremos que  $V(\nu) = 0$  o  $V(\nu) = \pm\sigma'$  con  $\sigma' \neq \sigma$  y  $f(\sigma') \leq f(\nu) < f(\sigma)$ .

Por otra parte,

$$\begin{aligned} \partial(V(\sigma)) &= -\langle \partial\tau, \sigma \rangle \partial\tau = -\langle \partial\tau, \sigma \rangle \left( \sum_{\sigma' \prec \tau} \langle \partial\tau, \sigma' \rangle \sigma' \right) \\ &= -\sigma + \sum_{\substack{\sigma' \prec \tau \\ \sigma' \neq \sigma}} -\langle \partial\tau, \sigma \rangle \langle \partial\tau, \sigma' \rangle \sigma', \end{aligned}$$

y para  $\sigma' \prec \tau, \sigma' \neq \sigma$  se tiene que  $f(\sigma') < f(\tau)$ . Juntando los tres sumandos, resulta

$$\Phi(\sigma) = \sum_{\sigma' \neq \sigma} a_{\sigma'} \sigma',$$

donde  $a_{\sigma'} \neq 0$  implica  $f(\sigma') < f(\sigma)$ . □

Procedemos ahora a definir el complejo de Morse asociado a una función de Morse  $f$  en un complejo simplicial  $M$ . Este será un subcomplejo de  $(C_*, \partial)$  que nos servirá de “puente” para poder calcular la homología de  $M$  en términos de los puntos críticos de  $f$ .

Denotemos por  $C_p^\Phi$  al subgrupo de  $C_p$  formado por las cadenas  $\Phi$ -invariantes. Esto es,

$$C_p^\Phi = \{c \in C_p : \Phi(c) = c\}.$$

Notemos que  $\text{Im}(V)$  es  $\Phi$ -invariante (i.e.,  $c \in \text{Im}(V) \Rightarrow \Phi(c) \in \text{Im}(V)$ ), ya que

$$\Phi V = (1 + \partial V + V \partial) V = V + V \partial V = V(1 + \partial V).$$

Como  $\Phi \partial = \partial \Phi$  se tiene que  $\partial(C_p^\Phi) \subseteq C_{p-1}^\Phi$ , por lo que  $(C_*^\Phi, \partial)$  es un subcomplejo de  $(C_*, \partial)$ . Veremos que la inclusión  $i : C_*^\Phi \hookrightarrow C_*$  es un retracto por deformación, por lo que ambos complejos tendrán la misma homología.

**Lema 4.4.9.** *Sea  $c \in C_p^\Phi$  no nulo, que escribimos como  $c = \sum_{\sigma^{(p)}} a_\sigma \sigma$ . Sea  $\sigma'$  un maximizador cualquiera del conjunto  $\{f(\sigma) : a_\sigma \neq 0\}$ . Entonces  $\sigma'$  es un punto crítico.*

*En particular si  $c \in C_p^\Phi$  es tal que  $\langle c, \sigma \rangle = 0$  para todo  $\sigma^{(p)}$  crítico, entonces  $c = 0$ .*

*Demostración.* Al ser  $c$  una cadena  $\Phi$ -invariante,

$$\begin{aligned} c &= \Phi(c) = \sum_{\sigma^{(p)}} a_\sigma \Phi(\sigma). \\ \Rightarrow a_{\sigma'} &= \langle c, \sigma' \rangle = \sum_{\sigma^{(p)}} a_\sigma \langle \Phi(\sigma), \sigma' \rangle. \end{aligned}$$

Por lo visto en la proposición 4.4.8 (iii), si  $\sigma^{(p)} \neq \sigma'$  entonces o bien  $\langle \sigma', \Phi(\sigma) \rangle = 0$  o bien  $f(\sigma') < f(\sigma)$ . Quedando esto último descartado por ser  $\sigma'$  maximizante,

$$0 \neq a_{\sigma'} = a_{\sigma'} \langle \Phi(\sigma'), \sigma' \rangle.$$

En particular  $\langle \Phi(\sigma'), \sigma' \rangle \neq 0$ , por lo que 4.4.8 (ii) nos dice que  $\sigma'$  es crítico. □

**Proposición 4.4.10.**  $\Phi^N(c)$  es  $\Phi$ -invariante para toda cadena  $c$ , si  $N$  es suficientemente grande.

*Demostración.* Dado que tenemos finitos símlices, basta considerar el caso  $c = \sigma^{(p)}$ . Hagámoslo por inducción en

$$r = \#\{\sigma'^{(p)} : f(\sigma') < f(\sigma)\}.$$

Si  $r = 0$ ,  $\sigma$  es necesariamente un vértice en el que se alcanza el mínimo de  $f$  y por lo tanto es un punto crítico. Entonces,

$$\Phi(\sigma) = \sigma + V(\partial\sigma) + \partial(V(\sigma)) = \sigma.$$

En el paso inductivo, separamos en dos casos.

1.  $\sigma$  regular:

Por 4.4.8, podemos escribir

$$\Phi(\sigma) = \sum_{\sigma' \neq \sigma} a_{\sigma'} \sigma',$$

donde  $a_{\sigma'} \neq 0$  implica  $f(\sigma') < f(\sigma)$ . En particular, por hipótesis inductiva para cada  $\sigma'$  es posible hallar un  $N$ , y tomando el máximo obtenemos un  $N$  para  $\sigma$ .

2.  $\sigma$  crítico:

Sea  $c = V(\partial\sigma)$ . Veamos que para cada  $m \geq 1$  se tiene

$$\Phi^m(\sigma) = \sigma + c + \Phi(c) + \cdots + \Phi^{m-1}(c).$$

Para  $m = 1$  se sigue de que  $V(\sigma) = 0$ . Suponiendo que vale para  $m$ ,

$$\begin{aligned} \Phi^{m+1}(\sigma) &= \Phi(\sigma) + \Phi(c) + \Phi^2(c) + \cdots + \Phi^m(c) \\ &= \sigma + c + \Phi(c) + \cdots + \Phi^m(c). \end{aligned}$$

Entonces, bastará con mostrar que existe un  $N$  tal que  $\Phi^N(c) = 0$ . Tal como vimos en la demostración de 4.4.8,  $c$  es combinación lineal de ciertos  $\sigma'^{(p)}$  para los cuales  $f(\sigma') < f(\sigma)$ . Por hipótesis inductiva, para tales  $\sigma'$  tenemos un  $N'$  y por lo tanto tenemos un  $N$  para el cual  $\Phi^N(c)$  es  $\Phi$ -invariante. Veamos que este sirve.

Como  $c \in \text{Im } V$  la cual es  $\Phi$ -invariante,  $\Phi^N(c) \in \text{Im } V$ . En particular ninguno de los símlices que conforman la cadena  $\Phi^N(c)$  será crítico, pues todos estarán en  $\text{Im}(V)$ . El lema anterior nos dice en particular que debe ser  $\Phi^N(c) = 0$ . □

Tomemos un  $N$  como en la proposición y denotemos  $\Phi^\infty = \Phi^N$ . Tenemos así morfismos de complejos

$$\Phi^\infty : C_* \rightarrow C_*^\Phi, \quad i : C_*^\Phi \hookrightarrow C_*,$$

que satisfacen  $\Phi^\infty \circ i = 1$ .

**Proposición 4.4.11.**  $i \circ \Phi^\infty \simeq 1$ , por lo que  $H_*(C_*^\Phi) = H_*(C_*)$ .

*Demostración.* Abusando de notación escribamos  $\Phi^N = i \circ \Phi^N$ . Observamos anteriormente que  $\Phi \simeq 1$ , vía la homotopía  $V$ . Veamos que esto implica que  $\Phi^N \simeq 1$ . El argumento será puramente algebraico, y no dependerá en nada de la naturaleza de  $\Phi$ .

Buscamos una homotopía entre los dos morfismos, esto es, un morfismo  $L : C_* \rightarrow C_{*+1}$  tal que

$$1 - \Phi^N = L\partial + \partial L.$$

Usando que  $\Phi\partial = \partial\Phi$ ,

$$\begin{aligned} 1 - \Phi^N &= 1 - \Phi^N = (1 - \Phi)(1 + \Phi + \dots + \Phi^{(N-1)}) \\ &= (-\partial V - V\partial)(1 + \Phi + \dots + \Phi^{(N-1)}) \\ &= \partial(-V(1 + \Phi + \dots + \Phi^{(N-1)})) \\ &\quad + (-V)(1 + \Phi + \dots + \Phi^{(N-1)})\partial, \end{aligned}$$

por lo que podemos poner  $L = -V(1 + \Phi + \dots + \Phi^{(N-1)})$ . □

Para cada  $p$  denotemos por  $\mathcal{M}_p$  al grupo abeliano libre generado por los  $p$ -símplices críticos de  $M$ , al cual podemos pensar como un subgrupo de  $C_p$ . Restringiendo a  $\Phi^\infty$  tenemos

$$\Phi^\infty : \mathcal{M}_p \rightarrow C_p^\Phi$$

**Lema 4.4.12.** *Sea  $\sigma^{(p)}$  un símplex crítico. Entonces  $\langle \Phi^\infty(\sigma), \sigma \rangle = 1$ . Si  $\sigma'^{(p)}$  es otro símplex crítico,  $\langle \Phi^\infty(\sigma), \sigma' \rangle = 0$ .*

*Demostración.* Como en la demostración de la proposición 4.4.10 si ponemos  $c = V(\partial\sigma)$  para  $N \gg 0$  se tendrá

$$\Phi^\infty(\sigma) = \sigma + c + \Phi(c) + \dots + \Phi^N(c).$$

Veamos que para todo  $k \geq 0$  resulta  $\Phi^k(c) \in \text{Im}(V)$ . Para  $k = 0$  es claro. Si vale para  $k$ , entonces

$$\Phi^{k+1}(c) = \Phi(\Phi^k(c)) = \Phi^k(c) + \partial(V(\Phi^k(c))) + V(\partial\Phi^k(c)) \in \text{Im}(V),$$

pues  $V(\Phi^k(c)) = 0$ .

De este modo podemos escribir  $\Phi^\infty(\sigma) = \sigma + c'$ , con  $c' \in \text{Im}(V) \subseteq \mathcal{M}_p^\perp$  (notemos que por linealidad esto valdrá reemplazando  $\sigma$  por cualquier  $b \in \mathcal{M}_p$ ). A partir de esto el resultado es inmediato. □

**Proposición 4.4.13.**  $\Phi^\infty : \mathcal{M}_p \rightarrow C_p^\Phi$  es un isomorfismo, con inversa dada por  $c \mapsto \sum_{\sigma^{(p)} \text{ crít.}} \langle c, \sigma \rangle \sigma$ .

*Demostración.* Primero veamos que es un epimorfismo. Dado  $c \in C_p^\Phi$  pongamos  $c' = \sum_{\sigma^{(p)} \text{ crít.}} \langle c, \sigma \rangle \sigma \in \mathcal{M}_p$  y veamos que  $\Phi^\infty(c') = c$ . Si  $\sigma^{(p)}$  es crítico,

$$\langle \Phi^\infty(c'), \sigma \rangle = \sum_{\sigma'^{(p)} \text{ crít.}} \langle c, \sigma' \rangle \langle \Phi^\infty(\sigma'), \sigma \rangle = \langle c, \sigma \rangle,$$

por 4.4.8 (ii). Así  $\Phi^\infty(c') - c \in \mathcal{M}_p^\perp$ , y además es  $\Phi$  invariante. Por el lema anterior,  $\Phi^\infty(c') - c = 0$ .

Ahora que es monomorfismo. Sea  $c \in \mathcal{M}_p$  tal que  $\Phi^\infty(c) = 0$ . Como en la demostración del lema anterior, podemos escribir  $\Phi^\infty(c) = c + c'$ , con  $c' \in \mathcal{M}_p^\perp$ . Al ser  $\mathcal{M}_p \cap \mathcal{M}_p^\perp = \{0\}$ , debe ser  $c = 0$ . □

Vía este isomorfismo el complejo de Morse resulta isomorfo al complejo

$$\mathcal{M}_* : \quad 0 \rightarrow \mathcal{M}_n \xrightarrow{\tilde{\partial}_n} \mathcal{M}_{n-1} \xrightarrow{\tilde{\partial}_{n-1}} \cdots \xrightarrow{\tilde{\partial}_1} \mathcal{M}_0 \rightarrow 0,$$

donde  $\tilde{\partial}_p = (\Phi_{p-1}^\infty)^{-1} \circ \partial_p \circ \Phi_p^\infty$ .

En particular, podemos calcular la homología simplicial de  $M$  usando un complejo cuyos grupos son considerablemente más chicos que los del complejo usual, siempre y cuando la función tenga “pocos” puntos críticos.

Nuestro objetivo ahora es conseguir una descripción de  $\tilde{\partial}$  que prescindamos del flujo. Conocer  $\tilde{\partial}$  equivale a conocer los valores  $\langle \tilde{\partial}\tau, \sigma \rangle$  para todo par de símlices críticos  $\tau^{(p+1)}$  y  $\sigma^{(p)}$ . En principio, podemos decir que

$$\begin{aligned} \langle \tilde{\partial}\tau, \sigma \rangle &= \langle (\Phi_p^\infty)^{-1}(\partial_{p+1}(\Phi_{p+1}^\infty(\tau))), \sigma \rangle = \left\langle \sum_{\sigma'^{(p)} \text{ crít.}} \langle \partial_{p+1}(\Phi_{p+1}^\infty(\tau)), \sigma' \rangle \sigma', \sigma \right\rangle \\ &= \langle \partial_{p+1}(\Phi_{p+1}^\infty(\tau)), \sigma \rangle = \langle \Phi_p^\infty \partial_{p+1}(\tau), \sigma \rangle. \end{aligned}$$

Esta descripción se hará en términos de  $V$ -caminos. Para la próxima definición no será necesario considerar orientaciones en los símlices, por lo que pensaremos por el momento al gradiente como una función  $V : M \rightarrow M \cup \{0\}$ .

**Definición 4.4.14.** Un  $V$ -camino de dimensión  $p$  es una sucesión de  $p$ -símlices

$$\gamma : \quad \sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_r$$

donde para  $0 \leq i \leq r-1$  se tienen

- (i) Si  $V(\sigma_i) = 0$ , entonces  $\sigma_i = \sigma_{i+1}$ .
- (ii) Si  $V(\sigma_i) \neq 0$ , entonces  $\sigma_i \neq \sigma_{i+1}$  y  $\sigma_{i+1} < V(\sigma_i)$ .

Diremos que  $\gamma$  es un  $V$ -camino de  $\sigma_0$  a  $\sigma_r$  de longitud  $r$ . Diremos que  $\gamma$  es *cerrado* si  $\sigma_0 = \sigma_r$  y que es *no estacionario* si  $\sigma_0 \neq \sigma_1$ .

**Observación 4.4.15.**  $\gamma$  es constante si y sólo si  $\sigma_0 = \sigma_1$ . Si  $V(\sigma_i) = 0$ ,  $\gamma$  se hace constante a partir de  $\sigma_i$ .  $\sigma_r \neq \sigma_{r-1}$  si y sólo si para todo  $i$  resulta  $\sigma_i \neq \sigma_{i-1}$ .

**Notación 4.4.16.** Dados  $\sigma, \sigma'$   $p$ -símlices y  $r \geq 0$ , denotaremos por  $\Gamma_r(\sigma, \sigma')$  al conjunto de  $V$ -caminos de  $\sigma$  a  $\sigma'$  de longitud  $r$ .

**Ejemplo 4.4.17.** Sean  $\sigma, \sigma' \in M$  dos  $p$ -símlices.

$$\begin{aligned} \blacksquare \Gamma_0(\sigma, \sigma') &= \begin{cases} \emptyset, & \sigma \neq \sigma'. \\ \{\gamma : \sigma\}, & \sigma = \sigma'. \end{cases} \\ \blacksquare \Gamma_1(\sigma, \sigma') &= \begin{cases} \emptyset, & V(\sigma) = 0, \sigma \neq \sigma'. \\ \{\gamma : \sigma, \sigma'\}, & V(\sigma) = 0, \sigma = \sigma'. \\ \emptyset, & V(\sigma) \neq 0, \sigma = \sigma'. \\ \emptyset, & V(\sigma) \neq 0, \sigma' \notin V(\sigma). \\ \{\gamma : \sigma, \sigma'\}, & V(\sigma) \neq 0, \sigma' < V(\sigma). \end{cases} \end{aligned}$$

**Observación 4.4.18.**

(i) Si  $\gamma : \sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_r$  es un  $V$ -camino, para todo  $i$  se tiene que  $\sigma_i = \sigma_{i+1}$  o  $f(\sigma_i) > f(\sigma_{i+1})$ , ya que si  $\sigma_i \neq \sigma_{i+1}$  entonces  $\sigma_{i+1} < V(\sigma_i)$  y por lo tanto  $f(\sigma_{i+1}) < f(V(\sigma_i)) \leq f(\sigma_i)$ .

En particular, si el camino es no estacionario no podrá ser cerrado. Esto será muy importante en la próxima sección.

(ii) Si  $\gamma : \sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_r$  y  $\gamma' : \sigma_r, \sigma_{r+1}, \dots, \sigma_{r+s}$  son sucesiones de  $p$ -símplices, entonces  $\gamma' \circ \gamma : \sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_r, \sigma_{r+1}, \dots, \sigma_{r+s}$  será un  $V$ -camino si y sólo si  $\gamma$  y  $\gamma'$  lo son.

**Definición 4.4.19.** Sea  $\gamma : \sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_r$  un  $V$ -camino. Definimos la *multiplicidad* de  $\gamma$  por

$$m(\gamma) = \prod_{\substack{i=0 \\ V(\sigma_i) \neq 0}}^{r-1} \langle \partial V(\sigma_i), \sigma_{i+1} \rangle \in \{1, -1\}$$

Resulta inmediato que si  $\gamma$  y  $\gamma'$  son  $V$ -caminos tales que  $\gamma$  termina donde  $\gamma'$  comienza, entonces

$$m(\gamma' \circ \gamma) = m(\gamma')m(\gamma).$$

¿Qué mide esta multiplicidad? Consideremos un  $V$ -camino  $\gamma : \sigma_0, \sigma_1$ . Entonces,

$$m(\gamma) = \begin{cases} 1 & , \text{ si al "deslizar" } \sigma_0 \text{ sobre } \sigma_1 \text{ sus orientaciones coinciden.} \\ -1 & , \text{ si no.} \end{cases}$$

Inductivamente se ve que lo mismo vale si se toma un  $V$ -camino de una longitud arbitraria.

**Definición 4.4.20.** El *flujo reducido*  $\tilde{\Phi} : C_p \rightarrow C_{p-1}$  se define por

$$\tilde{\Phi} = 1 + \partial V.$$

El flujo reducido satisface las siguientes propiedades. La única que no es inmediata es la tercera, pero se demuestra usando los mismos argumentos que usamos en el caso del flujo.

(i)  $\Phi = \tilde{\Phi} + V\partial$ .

(ii)  $\tilde{\Phi}V = V$ .

(iii) Si  $V(\sigma) = 0$ ,  $\tilde{\Phi}(\sigma) = \sigma$ . Si  $V(\sigma) \neq 0$ ,

$$\tilde{\Phi}(\sigma) = \sum_{\sigma' \neq \sigma} a_{\sigma'} \sigma',$$

donde  $a_{\sigma'} \neq 0$  implica  $f(\sigma') < f(\sigma)$ .

**Lema 4.4.21.** *Dados  $\sigma^{(p)}$  y  $\tau^{(p+1)}$  críticos, para  $N \gg 0$  se tiene*

$$\langle \tilde{\partial}\tau, \sigma \rangle = \langle \tilde{\Phi}^N \partial\tau, \sigma \rangle.$$

*Demostración.* Como  $\Phi^\infty = \Phi^N$  para cierto  $N \gg 0$ , basta con probar que para todo  $r \geq 0$  se tiene  $\langle \Phi^r \partial\tau, \sigma \rangle = \langle \tilde{\Phi}^r \partial\tau, \sigma \rangle$ . Veremos más aún: que si tomamos  $r \geq 0$ ,  $c \in C_p$ , resulta  $\Phi^r(c) - \tilde{\Phi}^r(c) \in \text{Im}(V) \subseteq \mathcal{M}_p^\perp$ .

Para  $r = 0$  está claro. Si  $\Phi^{r-1}(c) = \tilde{\Phi}^{r-1}(c) + V(c')$ , usando las propiedades (i) y (ii) de  $\tilde{\Phi}$  obtenemos

$$\begin{aligned} \Phi^r(c) &= \Phi(\Phi^{r-1}(c)) = (\tilde{\Phi} + V\partial)(\tilde{\Phi}^{r-1}(c) + V(c')) \\ &= \tilde{\Phi}^r(c) + V(c') + V\partial(\tilde{\Phi}^{r-1}(c) + V(c')) = \tilde{\Phi}^r(c) + V(\hat{c}), \end{aligned}$$

si  $\hat{c} = c' + \partial(\tilde{\Phi}^{r-1}(c) + V(c'))$ . □

Finalmente obtenemos una descripción de  $\tilde{\partial}$  en términos de  $V$ -caminos.

**Teorema 4.4.22.** *Dados  $\sigma^{(p)}$  y  $\tau^{(p+1)}$  críticos, para  $N \gg 0$  se tiene*

$$\langle \tilde{\partial}\tau, \sigma \rangle = \sum_{\sigma'^{(p)} < \tau} \langle \partial\tau, \sigma' \rangle \left( \sum_{\gamma \in \Gamma_N(\sigma', \sigma)} m(\gamma) \right).$$

*Demostración.* Tomemos  $N$  como en el lema. Así,

$$\langle \tilde{\partial}\tau, \sigma \rangle = \langle \tilde{\Phi}^N \partial\tau, \sigma \rangle = \langle \tilde{\Phi}^N \left( \sum_{\sigma'^{(p)} < \tau} \langle \partial\tau, \sigma' \rangle \sigma' \right), \sigma \rangle = \sum_{\sigma'^{(p)} < \tau} \langle \partial\tau, \sigma' \rangle \langle \tilde{\Phi}^N \sigma', \sigma \rangle.$$

Basta entonces con probar que para todo  $r \geq 0$  resulta

$$\langle \tilde{\Phi}^r \sigma', \sigma \rangle = \sum_{\gamma \in \Gamma_r(\sigma', \sigma)} m(\gamma).$$

Para  $r = 0, 1$  es fácil, separando en casos y teniendo en cuenta el último ejemplo y la propiedad (iii) de  $\tilde{\Phi}$ . En el paso inductivo obtenemos que

$$\begin{aligned} \langle \tilde{\Phi}^r \sigma', \sigma \rangle &= \langle \tilde{\Phi}(\tilde{\Phi}^{r-1} \sigma'), \sigma \rangle = \sum_{\hat{\sigma}^{(p)}} \langle \tilde{\Phi}^{r-1} \sigma', \hat{\sigma} \rangle \langle \tilde{\Phi} \hat{\sigma}, \sigma \rangle \\ &= \sum_{\hat{\sigma}^{(p)}} \left( \sum_{\gamma \in \Gamma_{r-1}(\sigma', \hat{\sigma})} m(\gamma) \right) \left( \sum_{\gamma' \in \Gamma_1(\hat{\sigma}, \sigma)} m(\gamma') \right) = \sum_{\gamma \in \Gamma_r(\sigma', \sigma)} m(\gamma). \end{aligned}$$

□

## 4.5. Las desigualdades de Morse

A modo de aplicación de lo visto en la sección anterior, demostraremos las desigualdades de Morse. Estas también pueden obtenerse tal como lo hicimos en el caso de la teoría de Morse clásica, a partir del corolario 4.2.18.

Sea  $M$  un complejo simplicial finito de dimensión  $n$  y  $f$  una función de Morse sobre él. Tal como otros resultados que vimos, las desigualdades de Morse nos darán información sobre la topología del complejo en términos de los puntos críticos de la función. Para ser más precisos, relacionarán los números de Betti y la característica de Euler de  $M$  con la cantidad de puntos críticos de  $f$ .

Fijemos un cuerpo  $F$ . Recordemos que el  $i$ -ésimo *número de Betti* del complejo simplicial  $M$  a coeficientes en  $F$  se define por

$$b_i = \dim_F H_i(M; F),$$

y que la *característica de Euler* de  $M$  a coeficientes en  $F$  se define por

$$\chi(M) = \sum_{i=0}^n (-1)^i b_i.$$

Siguiendo la notación de la sección anterior, consideremos el complejo de cadenas

$$\mathcal{M}_* : \quad 0 \rightarrow \mathcal{M}_n \xrightarrow{\tilde{\delta}_n} \mathcal{M}_{n-1} \xrightarrow{\tilde{\delta}_{n-1}} \cdots \xrightarrow{\tilde{\delta}_1} \mathcal{M}_0 \rightarrow 0,$$

el cual, al ser isomorfo al complejo de Morse, satisface que  $H_*(\mathcal{M}_*) = H_*(M)$ , gracias a la proposición 4.4.11. Para hacer aparecer al cuerpo  $F$  y poder reducir todo a cálculos sencillos de álgebra lineal, tensorizamos, obteniendo el complejo

$$\mathcal{M}_* \otimes F : \quad 0 \rightarrow \mathcal{M}_n \otimes F \xrightarrow{\delta_n} \mathcal{M}_{n-1} \otimes F \xrightarrow{\delta_{n-1}} \cdots \xrightarrow{\delta_1} \mathcal{M}_0 \otimes F \rightarrow 0,$$

donde  $\delta_j = \tilde{\delta}_j \otimes 1_F$ .

El teorema de los coeficientes universales nos dice que

$$H_*(M, F) = H_*(M) \otimes F = H_*(\mathcal{M}_*) \otimes F = H_*(\mathcal{M}_* \otimes F),$$

por lo que entonces usando álgebra lineal resulta

$$\begin{aligned} b_i &= \dim_F(H_i(\mathcal{M}_* \otimes F)) = \dim_F(\ker \delta_i) - \dim_F(\operatorname{Im} \delta_{i+1}) \\ &= \dim_F(\mathcal{M}_i \otimes F) - \dim_F(\operatorname{Im} \delta_i) - \dim_F(\operatorname{Im} \delta_{i+1}) \\ &= m_i - \operatorname{rg}(\delta_i) - \operatorname{rg}(\delta_{i+1}), \end{aligned}$$

ya que  $\dim_F(\mathcal{M}_i \otimes F) = m_i$ . En particular para todo  $j \geq 0$  se tendrá, teniendo en cuenta que  $\operatorname{rg}(\delta_0) = 0$ , que

$$\begin{aligned} b_j - b_{j-1} + \cdots + (-1)^j b_0 &= (m_j - \operatorname{rg}(\delta_j) - \operatorname{rg}(\delta_{j+1})) - (m_{j-1} - \operatorname{rg}(\delta_{j-1}) - \operatorname{rg}(\delta_j)) \\ &\quad + \cdots + (-1)^j (m_0 - \operatorname{rg}(\delta_0) - \operatorname{rg}(\delta_1)) \\ &= (m_j - m_{j-1} + \cdots + (-1)^j m_0) - \operatorname{rg}(\delta_{j+1}), \end{aligned}$$

igualdad de la que se desprende la siguiente

**Proposición 4.5.1** (Desigualdades de Morse fuertes). *Para todo  $j \geq 0$  se tiene*

$$b_j - b_{j-1} + \cdots + (-1)^j b_0 \leq m_j - m_{j-1} + \cdots + (-1)^j m_0.$$

**Observación 4.5.2.** Revisando la cuenta podemos estimar en cuánto difieren los dos términos, ya que

$$(m_j - m_{j-1} + \cdots + (-1)^j m_0) - (b_j - b_{j-1} + \cdots + (-1)^j b_0) = \text{rg}(\delta_{j+1}) \leq m_j.$$

En particular, si la función no tiene  $j$ -símplices críticos, la desigualdad se convierte en una igualdad.

Veamos ahora cómo las desigualdades de Morse fuertes implican las débiles.

**Proposición 4.5.3** (Desigualdades de Morse débiles).

(i) *Para todo  $k \geq 0$  se tiene  $m_k \geq b_k$ .*

(ii)  $\chi(M) = \sum_{k=0}^n (-1)^k m_k$ .

Estas desigualdades, a pesar de ser más débiles, son tal vez más ilustrativas. Por ejemplo, la primera nos dice que si  $f$  no tiene  $k$ -símplices críticos, entonces  $H_k(M) = 0$  (lo cual ya se podía ver considerando el complejo de cadenas  $\mathcal{M}_*$ ).

*Demostración.* La desigualdad (i) se obtiene de sumar las desigualdades fuertes para  $j = k$  y  $j = k - 1$ . Para obtener (ii) tomemos un  $k > n$ . Al no haber  $k$ -símplices críticos, por lo visto en la última observación la desigualdad fuerte para  $j = k$  se torna en una igualdad, y esa igualdad es a la que queríamos llegar. □

**Corolario 4.5.4.** *Si  $m_{k-1} = m_{k+1} = 0$ , entonces  $b_{k-1} = b_{k+1} = 0$  y además  $b_k = m_k$ .*

*Demostración.* Como  $m_{k+1} = 0$ , es inmediato que  $b_{k+1} = 0$ . Teniendo esto en mente, consideremos las desigualdades fuertes para  $j = k + 1$  y para  $j = k$ :

$$\begin{aligned} -b_k + b_{k-1} - \cdots + (-1)^{k+1} b_0 &\leq -m_k + m_{k-1} - \cdots + (-1)^{k+1} m_0, \\ b_k - b_{k-1} + \cdots + (-1)^k b_0 &\leq m_k - m_{k-1} + \cdots + (-1)^k m_0. \end{aligned}$$

De ellas se desprende que

$$b_k - b_{k-1} + \cdots + (-1)^k b_0 = m_k - m_{k-1} + \cdots + (-1)^k m_0.$$

Análogamente, como  $m_{k-1} = 0$  resulta  $b_{k-1} = 0$  y además

$$b_{k-2} - b_{k-3} + \cdots + (-1)^{k-2} b_0 = m_{k-2} - m_{k-3} + \cdots + (-1)^{k-2} m_0.$$

Restándole a la primer igualdad obtenida la segunda y usando que  $m_{k-1} = b_{k-1} = 0$  se obtiene la igualdad buscada. □

## 4.6. Caracterización de los campos gradientes

Sea  $M$  un complejo simplicial finito de dimensión  $n$ . Al considerar una función de Morse sobre  $M$  para obtener datos sobre la naturaleza combinatoria/topológica de  $M$ , no son importantes los valores de la función: la información relevante está en conocer sus puntos críticos y, en menor medida, sus complejos de nivel. Como vimos anteriormente, es posible determinar los puntos críticos de una función de Morse conociendo su gradiente. Teniendo esto en mente, vamos a extraer las propiedades esenciales del gradiente para llegar así a la definición de *campo vectorial*, herramienta que nos servirá para construir funciones de Morse con puntos críticos fijados de antemano.

Puesto así, pareciera que los campos vectoriales aparecen en la teoría conceptualizando a los gradientes de las funciones de Morse. Pero en realidad la historia es al revés. Volviendo a pensar en los términos de la sección introductoria a este capítulo, vemos que las funciones de Morse surgen como una manera de codificar la información esencial de aquellos campos vectoriales sobre  $M$  que indican deformaciones. En aquel momento, indicamos cuatro condiciones que naturalmente había que imponerle a un campo vectorial para que este indicara deformaciones. La definición rigurosa de campo vectorial que haremos a continuación es exactamente la de un campo que satisface las primeras tres condiciones mencionadas en la introducción, y el teorema 4.6.6 nos dice que pidiendo la cuarta de esas condiciones, el campo vectorial cumplirá el propósito para el cual fue diseñado.

Denotemos por  $S_p$  al conjunto de símlices de  $M$  de dimensión  $p$ .

**Definición 4.6.1.** Un *campo vectorial* (discreto) es una aplicación  $W : M \rightarrow M \cup \{0\}$  que satisface

- (i)  $W(S_p) \subseteq S_{p+1} \cup \{0\}$ .
- (ii)  $W^2 = 0$ .
- (iii) Dado  $\sigma \in S_p$ , existe a lo sumo un  $\nu \in S_{p-1}$  tal que  $W(\nu) = \sigma$ .
- (iv) Si  $W(\sigma) \neq 0$ , entonces  $\sigma < W(\sigma)$ .

Ignorando orientaciones, el gradiente  $V_f$  de una función de Morse  $f$  es un ejemplo de campo vectorial. Recíprocamente, si tenemos un campo vectorial  $W$  y le damos una orientación a los símlices, podemos transformar a  $W$  en una aplicación entre símlices orientados haciendo así: si  $W(\sigma) = \tau$ , redefinimos  $W(\sigma) = \pm\tau$  con el signo elegido para que  $\langle \partial(W(\sigma)), \sigma \rangle = -1$ . Por esto, no distinguiremos si trabajamos con símlices orientados o no.

**Ejemplo 4.6.2.**  $W = 0$  es trivialmente un campo vectorial.

**Notación 4.6.3.** Si  $W$  es un campo vectorial en  $M$ , denotaremos

$$\ker(W) = \{\sigma \in M : W(\sigma) = 0\}.$$

Tiene sentido hablar de los *puntos críticos* de un campo vectorial: serán aquellos símlices  $\sigma$  tales que  $\sigma \in \ker(W) \setminus \text{Im}(W)$ .

Las siguiente definición es una copia textual de la hecha en el caso de los campos gradientes. Por lo tanto, la observación hecha tras aquella definición seguirá valiendo.

**Definición 4.6.4.** Un  $W$ -camino de dimensión  $p$  es una sucesión de  $p$ -símplices

$$\gamma : \sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_r$$

donde para  $0 \leq i \leq r - 1$  se tienen

- (i) Si  $W(\sigma_i) = 0$ , entonces  $\sigma_i = \sigma_{i+1}$ .
- (ii) Si  $W(\sigma_i) \neq 0$ , entonces  $\sigma_i \neq \sigma_{i+1}$  y  $\sigma_{i+1} < W(\sigma_i)$ .

Diremos que  $\gamma$  es *cerrado* si  $\sigma_0 = \sigma_r$  y que es *no estacionario* si  $\sigma_0 \neq \sigma_1$ .

**Ejemplo 4.6.5.** Supongamos que  $M$  es un árbol. Entonces ningún campo gradiente  $W$  sobre  $M$  admite caminos cerrados no estacionarios. En efecto, supongamos que  $\gamma : \sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_r$  fuera un tal camino. Podemos suponer sin pérdida de generalidad que  $\sigma_r \neq \sigma_{r-1}$ . Notemos que entonces por (iii) de la definición de campo gradiente, tenemos que  $W(\sigma_i) \neq W(\sigma_{i+1})$  para todo  $i$ . Este camino necesariamente es de dimensión 0, ya que en las aristas  $W$  se anula. Entonces, la sucesión de aristas  $W(\sigma_0), W(\sigma_1), \dots, W(\sigma_{r-1})$  formaría un ciclo cerrado.

No todo campo vectorial es el gradiente de una función de Morse, ya que vimos que tales campos no admiten caminos cerrados no estacionarios. El próximo teorema dice que este es el único ingrediente que hace falta.

**Teorema 4.6.6.** *Sea  $W$  un campo vectorial en  $M$  que no admite caminos cerrados no estacionarios. Entonces existe una función de Morse  $f$  tal que  $W = V_f$ . Más aún, se puede construir  $f$  de manera que se satisfagan*

- (i) Si  $\sigma^{(p)}$  es crítico,  $f(\sigma) = p$  (a tales  $f$  se las llama autoindexantes).
- (ii) Si  $\sigma^{(p)} \in \text{Im}(W)$ ,  $f(\sigma) \in (p - 1, p - 1/2)$ .
- (iii) Si  $W(\sigma^{(p)}) \neq 0$ ,  $f(\sigma) \in (p, p + 1/2)$ .

*Demostración.* Consideremos  $M_p$ , el  $p$ -esqueleto de  $M$ .  $W$  se restringe a un campo vectorial  $W_p$  en  $M_p$ , si ponemos

$$W_p(\sigma^{(l)}) = \begin{cases} 0, & l = p. \\ W(\sigma), & l < p. \end{cases}$$

Notemos que  $W_0 = 0$  y  $W_n = W$ . Tal como  $W$  no admitía caminos cerrados no estacionarios, tampoco los admitirá  $W_p$ . Definiremos recursivamente funciones de Morse  $f_p : M_p \rightarrow \mathbb{R}$  que satisfagan lo pedido, y así  $f = f_n$  será la función que buscábamos.

Para  $p = 0$ , como  $W_0 = 0$  podemos poner  $f_0 = 0$  y es inmediato que esta cumple lo pedido.

Suponiendo que tenemos a  $f_{p-1}$ , podemos suponer sin pérdida de generalidad que  $n = p$ . En  $M_{p-2}$  definimos  $f = f_{p-1}$ . No va a ser posible definir a  $f$  por una simple extensión de  $f_{p-1}$  a los  $p$ -símplices. El obstáculo es el siguiente: si  $W(\sigma^{(p-1)}) \neq 0$  y  $\sigma^{(p-1)}$

es una cara de  $W(\sigma)$  distinta de  $\sigma$ , necesariamente tendrá que ser  $f(\sigma) > f(\sigma')$ . Por ejemplo, en el caso  $p = 1$  si  $f$  es una extensión de  $f_0$ , esto no sucede. Vamos a tener entonces que “retocarla” en los  $(p - 1)$ -símplices para saltar este obstáculo.

Para esto hagamos la siguiente observación. Sea  $\gamma : \sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_r$  un  $W$ -camino de dimensión  $q$  con  $\sigma_{r-1} \neq \sigma_r$ . Vimos que entonces para todo  $i$  se tendrá  $\sigma_{i-1} \neq \sigma_i$ . Al no admitir  $W$  caminos cerrados no estacionarios (esta es la única instancia de la demostración en la que se usa esta hipótesis), resulta que si  $i \neq j$  debe ser  $\sigma_i \neq \sigma_j$ . En particular,  $r < \#S_q$ .

Sea  $\sigma$  un  $(p - 1)$ -símplex. Consideremos

$$d(\sigma) = \sup\{r : \exists \text{ un } W\text{-camino } \sigma = \sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_r \text{ con } \sigma_{r-1} \neq \sigma_r, W(\sigma_r) = 0\}.$$

Gracias a lo observado anteriormente este número es finito. Notemos además que  $d(\sigma) > 0$  si y sólo si  $W(\sigma) \neq 0$ . Sea  $D = \max_{\sigma' \in S_{p-1}} d(\sigma')$ . Definimos

$$f(\sigma) = f_{p-1}(\sigma) + \frac{d(\sigma)}{2D + 1}.$$

Por hipótesis inductiva tenemos que  $f_{p-1}(\sigma) \leq p - 1$ , ya que  $W_{p-1}(\sigma) = 0$ . Entonces al ser  $\frac{d(\sigma)}{2D+1} < \frac{1}{2}$ , resulta que  $f(\sigma) < p - 1/2$ . Además,  $f_{p-1}(\sigma) \leq f(\sigma)$ , valiendo la igualdad si y sólo si  $W(\sigma) = 0$ .

Finalmente, sea  $\sigma$  un  $p$ -símplex. Si  $\sigma \notin \text{Im}(W)$  ponemos  $f(\sigma) = p$ , de manera obligada ya que pretendemos que  $\sigma$  sea crítico y  $f$  autoindexante. Por el contrario, si  $\sigma = W(\nu)$  definimos  $f(\sigma) = f(\nu)$ , no habiendo problemas de definición ya que un tal  $\nu$  es único.

Veamos primero que  $f$  es de Morse. Sea  $\sigma$  un  $l$ -símplex. Si  $l < p - 2$  no hay nada que hacer, ya que en  $M_{p-2}$  se tiene  $f = f_{p-1}$ , que era de Morse. Si  $l = p - 2$  también nos aprovechamos de  $f_{p-1}$ , ya que “abajo” (es decir, en las caras inmediatas de  $\sigma$ ) nada cambió y “arriba” (es decir en los símplices de los cuales  $\sigma$  es cara inmediata)  $f \geq f_{p-1}$ .

Si  $l = p$  para “arriba” no hay nada. Para “abajo”: si  $\sigma \notin \text{Im}(W)$  es fácil pues  $f(\sigma) = p > f(\nu)$  para todo  $\nu^{(p-1)}$ . Si  $\sigma = W(\nu)$ , tomemos  $\nu' \prec \sigma, \nu' \neq \nu$  y veamos que  $f(\sigma) > f(\nu')$ . Notemos para esto que si  $\nu', \nu_1, \dots, \nu_r$  es un  $W$ -camino, entonces  $\nu, \nu', \nu_1, \dots, \nu_r$  también lo es. En particular, se tendrá que  $d(\nu') < d(\nu)$ . Por otro lado, como  $W^2 = 0$  obliga a que  $\nu \notin \text{Im}(W)$ , por construcción de  $f_{p-1}$  resulta  $f_{p-1}(\nu) = p - 1 \geq f_{p-1}(\nu')$ . Así,

$$f(\sigma) = f(\nu) = f_{p-1}(\nu) + \frac{d(\nu)}{2D + 1} > f_{p-1}(\nu') + \frac{d(\nu')}{2D + 1} = f(\nu').$$

Si  $l = p - 1$ , para “abajo” no tendremos problemas ya que  $f \geq f_{p-1}$ . Para “arriba”: sea  $\tau \succ \sigma$ . Si  $\tau \notin \text{Im}(W)$ ,  $f(\tau) > f(\sigma)$ . Si  $\tau = W(\sigma')$  con  $\sigma' \neq \sigma$ , por lo visto recién  $f(\tau) = f(\sigma') > f(\sigma)$ . Si  $\tau = W(\sigma)$ ,  $f(\tau) = f(\sigma)$ . Y listo.

Ahora probemos que  $V_f = W$ , usando que  $V_{f_{p-1}} = W_{p-1}$ . Fijemos un  $l$ -símplex  $\sigma$ . Si  $l = p$ ,  $V_f(\sigma) = 0 = W(\sigma)$ . Si  $l < p - 2$ , como no alteramos nada,  $V_f(\sigma) = V_{f_{p-1}}(\sigma) = W_{p-1}(\sigma) = W(\sigma)$ . Para  $l = p - 2$ : si  $W(\sigma) = 0$ , entonces  $0 = W_{p-1}(\sigma) = V_{f_{p-1}}(\sigma)$ . Luego para  $\tau \succ \sigma$  resulta  $f(\tau) \geq f_{p-1}(\tau) > f_{p-1}(\sigma) = f(\sigma)$ , por lo que  $V_f(\sigma) = 0$ . Si  $W(\sigma) = \tau$ , como  $W(\tau) = 0$  y  $W_{p-1}(\sigma) = \tau$  se tiene  $f(\sigma) = f_{p-1}(\sigma) \geq f_{p-1}(\tau) = f(\tau)$ , por lo que  $V_f(\sigma) = \tau$ . Finalmente, supongamos  $l = p - 1$ . Si  $W(\sigma) = 0$ , al tomar  $\tau \succ \sigma$  resulta

$f(\tau) > f(\sigma)$ , por lo que  $V_f(\sigma) = 0$ . Si  $W(\sigma) = \tau$  tenemos que  $f(\tau) = f(\sigma)$  y por lo tanto  $V_f(\sigma) = \tau$ .

Veamos que  $f$  resulta autoindexante. Tomemos  $\sigma$  un  $l$ -símplex crítico y veamos que  $f(\sigma) = l$ . Para  $l = p$  es claro. Si  $l \leq p - 1$ , teniendo en cuenta que  $W_{p-1} = V_{f_{p-1}}$ ,  $\sigma$  es también crítico para  $f_{p-1}$ . Así,  $f_{p-1}(\sigma) = l$ . Pero  $f_{p-1}(\sigma) = f(\sigma)$ : para  $l < p - 1$  es claro, y para  $l = p - 1$  se sigue de que  $W(\sigma) = 0$ .

Resta ver que se satisfacen (ii) y (iii). Sea entonces  $\sigma$  un  $l$ -símplex regular. Para  $l < p - 1$  se sigue de que  $f(\sigma) = f_{p-1}(\sigma)$  y de la hipótesis inductiva. Supongamos  $l = p - 1$ . Si  $\sigma \in \text{Im}(W)$  se sigue de nuevo de que  $f(\sigma) = f_{p-1}(\sigma)$  y de la hipótesis inductiva. Si  $\sigma \notin \text{Im}(W)$ , entonces es crítico para  $f_{p-1}$  y además debe ser  $W(\sigma) \neq 0$  por ser regular para  $f$ . Así,

$$f(\sigma) = f_{p-1}(\sigma) + \frac{d(\sigma)}{2D+1} = p - 1 + \frac{d(\sigma)}{2D+1} \in (p - 1, p - 1/2),$$

pues  $d(\sigma) > 0$ . Finalmente, si  $l = p$  debe ser  $\sigma = W(\nu)$ . Como entonces  $\sigma$  resulta crítico para  $f_{p-1}$ ,

$$f(\sigma) = f(\nu) = f_{p-1}(\nu) + \frac{d(\nu)}{2D+1} = p - 1 + \frac{d(\nu)}{2D+1} \in (p - 1, p - 1/2),$$

pues  $d(\nu) > 0$ .

□

En la segunda afirmación del siguiente corolario damos una prueba alternativa de la proposición 1.7.7 usando teoría de Morse.

**Corolario 4.6.7.** *Supongamos que  $M$  es un árbol.*

- (i) *Todo campo vectorial en  $M$  es el gradiente de alguna función de Morse.*
- (ii)  *$M$  se colapsa a cualquiera de sus vértices.*

*Demostración.* La afirmación (i) se sigue inmediatamente de lo visto en el ejemplo 4.6.5.

Sea  $v \in M$  un vértice. Para probar que  $M \searrow v$ , lo haremos en dos pasos. En el primero conseguiremos un campo gradiente que no tiene aristas (i.e., 1-símplices) críticas. En el segundo, obtendremos uno que tenga a  $v$  como único punto crítico. Entonces (ii) quedará demostrado, gracias al corolario 4.3.4.

**Paso 1.** Sea  $W$  un campo gradiente cualquiera en  $M$ , y  $\tau \in M$  una arista crítica para  $W$ . Buscamos un campo gradiente  $W'$  en  $M$  que tenga las mismas aristas críticas que  $W$ , con la excepción de  $\tau$ , que pasará a ser regular.

Sea  $v_0$  un vértice de  $\tau$ . Consideremos la sucesión definida de la siguiente manera: si  $W(v_i) \neq 0$ , defino  $v_{i+1}$  como el vértice de  $W(v_i)$  distinto de  $v_i$ . Si no, la sucesión se detiene. Al no admitir  $W$  caminos cerrados no estacionarios y ser  $M$  finito, esta sucesión se detendrá en un vértice  $v_r$  para cierto  $r \geq 0$ .

Definimos  $W'$  por

$$\begin{aligned} W'(\nu) &= W(\nu), & \nu \notin \{v_0, v_1, \dots, v_r\}. \\ W'(v_i) &= W(v_{i-1}), & 1 \leq i \leq r. \\ W'(v_0) &= \tau. \end{aligned}$$

Como  $\tau \notin \text{Im}(W)$ , resulta que  $W'$  es un campo gradiente. Además, al ser  $W(v_r) = 0$  se tiene que  $\text{Im}(W') = \text{Im}(W) \cup \{\tau\}$ . De esta manera,  $\tau$  pasó a ser regular.

Partiendo de un campo gradiente cualquiera (como podría ser el del ejemplo 4.6.2) y repitiendo este procedimiento cuantas veces sea necesario, por finitud podemos llegar a un campo gradiente  $W$  que no tiene aristas críticas.

**Paso 2.** Tomemos entonces un campo gradiente  $W$  sin aristas críticas. Veamos primero que tiene exactamente un vértice crítico. Por ejemplo, al tomar la función de Morse  $f$  inducida por  $W$  se tiene  $m_k(f) = 0$  para todo  $k \geq 1$ . Entonces por el corolario 4.2.18  $|M|$  tendrá el tipo homotópico de un CW con  $m_0(f)$  celdas de dimensión 0 y sin celdas de dimensiones mayores. En particular, al ser  $M$  conexo debe ser  $m_0(f) = 1$ , y este número es precisamente la cantidad de vértices críticos de  $W$ .

Sea entonces  $w$  el único vértice crítico de  $W$ . Queremos cambiar a  $W$  por un campo gradiente  $W'$  que siga sin tener aristas críticas y que tenga a  $v$  como único vértice crítico. Por finitud y conexión, podemos suponer sin pérdida de generalidad que  $v$  y  $w$  son adyacentes, esto es,  $\tau = \{v, w\}$  es una arista de  $M$ .

Como  $\tau$  es regular y  $w$  crítico, necesariamente se tiene que  $\tau = W(v)$ . Definimos entonces

$$\begin{aligned} W'(\nu) &= W(\nu), & \nu \notin \{v, w\}. \\ W'(w) &= \tau. \\ W'(v) &= 0. \end{aligned}$$

Es inmediato ver que  $W'$  es un campo gradiente que satisface lo pedido. □

Otra aplicación de esta caracterización es el siguiente resultado, que nos muestra que en ciertas situaciones es posible “cancelar” puntos críticos, algo que siempre es deseable. Su demostración usa una técnica similar a la usada en la demostración que hicimos del último corolario.

**Proposición 4.6.8.** *Sea  $f$  una función de Morse en  $M$ . Supongamos que  $\sigma^{(p)}$  y  $\tau^{(p+1)}$  son dos puntos críticos tales que*

- (i) *Existe  $\sigma' \prec \tau$  y un camino gradiente  $\gamma : \sigma' = \sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_r = \sigma$  con  $\sigma_{r-1} \neq \sigma_r$ .*
- (ii) *No existe otro camino gradiente de una cara inmediata de  $\tau$  a  $\sigma$  que tenga sus últimos dos símplexes distintos.*

*Entonces existe  $f'$  función de Morse en  $M$  autoindexante tal que*

$$\{\text{puntos críticos de } f'\} = \{\text{puntos críticos de } f\} \setminus \{\sigma, \tau\}.$$

*Además,  $V_f = V_{f'}$  fuera de  $\gamma$ .*

*Demostración.* Antes de empezar, notemos que las hipótesis (i) y (ii) fuerzan a que ningún  $\sigma_i$  con  $1 \leq i \leq r$  pueda ser cara de  $\tau$ .

Para obtener una función de Morse  $f'$  que cumpla lo deseado aprovechando el teorema 4.6.6, lo que hay que hacer está claro: hay que retocar a  $V_f$  de manera que  $\sigma$  y  $\tau$  dejen de ser críticos, y lo conseguiremos cambiando a  $V_f$  por un campo vectorial  $W$  tal que  $W(\sigma) \neq 0$  y  $\tau \in \text{Im}(W)$ . Para esto, lo que hacemos es en algún sentido “invertir” el orden de las flechas en el camino de  $\sigma'$  a  $\sigma$ . Rigurosamente, definimos en  $M$  un campo vectorial  $W$  por

$$\begin{aligned} W(\nu) &= V_f(\nu), & \nu \notin \gamma. \\ W(\sigma_i) &= V_f(\sigma_{i-1}), & 1 \leq i \leq r. \\ W(\sigma') &= \tau. \end{aligned}$$

Probar que  $W$  es en efecto un campo vectorial no ofrece dificultad alguna, y no requiere de las hipótesis (i) y (ii).

Supongamos que  $\delta$  es un  $W$ -camino cerrado no estacionario. Como  $V_f$  no admite tales caminos, es claro que  $\delta$  debe necesariamente tener dimensión  $p$ , y que debe contener a alguno de los símlices que conforman a  $\gamma$ . Veamos que además no puede estar conformado exclusivamente por símlices de  $\gamma$ .

Por el contrario, supongamos que  $\delta$  es de la forma

$$\delta : \sigma_{i_0}, \sigma_{i_1}, \dots, \sigma_{i_s}.$$

Notemos al ser  $\delta$  cerrado y no estacionario se tiene que  $i_0 = i_s$ , que  $s \geq 1$  y además que  $i_j \neq i_{j+1}$  para todo  $j$ . No puede ser  $i_j = 0$  para ningún  $j$ , ya que si  $i_j = 0$  entonces tendríamos  $i_{j+1} \neq 0, \sigma_{i_{j+1}} < W(\sigma_{i_0}) = \tau$ . En particular al ser  $i_0 \neq 0$  resulta  $\sigma_{i_1} < W(\sigma_{i_0}) = V_f(\sigma_{i_0-1})$ . Consideremos entonces la sucesión

$$\sigma' = \sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_{i_0-1}, \sigma_{i_1}, \sigma_{i_1+1}, \dots, \sigma_r = \sigma.$$

No puede ser  $i_1 \neq i_0 - 1$ , ya que en tal caso esta sucesión sería un camino gradiente de  $\sigma'$  a  $\sigma$  con sus últimos dos símlices distintos, por lo que tendría que ser igual a  $\gamma$ , y en particular  $i_1 = (i_0 - 1) + 1 = i_0$ , lo cual es imposible. Luego  $i_1 = i_0 - 1$ , es decir  $i_0 = i_1 + 1$ . Análogamente se puede ver que resulta  $i_j = i_{j+1} + 1$  para todo  $j$ , de lo que se desprende que  $i_0 = i_j + j$  para todo  $j$ . En particular,  $i_0 = i_s + s = i_0 + s$ , lo cual es absurdo ya que  $s \geq 1$ . Concluimos entonces que  $\delta$  no puede tener esa forma.

Entonces, al ser  $\delta$  cerrado, contiene un segmento de la forma

$$\delta' : \sigma_i, \nu_0, \dots, \nu_s, \sigma_j,$$

con  $s \geq 0$  y  $\nu_k \notin \gamma$ .

Si fuera  $i = 0$ , tendríamos que  $\nu_0 < W(\sigma') = \tau$ . En particular,

$$\nu_0, \dots, \nu_s, \sigma_j, \sigma_{j+1}, \dots, \sigma_r = \sigma$$

sería un  $V_f$ -camino gradiente de  $\nu_0$  a  $\sigma$  con sus últimos dos símlices distintos, con  $\nu_0$  cara inmediata de  $\tau$ , distinta de  $\sigma'$ . Luego, debe ser  $i_0 \neq 0$ . Pero entonces  $\nu_0 < W(\sigma_i) = V_f(\sigma_{i-1})$ , y al ser  $\nu_0 \neq \sigma_{i-1}$ ,

$$\sigma' = \sigma_0, \dots, \sigma_{i-1}, \nu_0, \dots, \nu_s, \sigma_j, \sigma_{j+1}, \dots, \sigma_r = \sigma$$

resultaría un  $V_f$ -camino gradiente de  $\sigma'$  a  $\sigma$  distinto de  $\gamma$  que tiene sus últimos dos símlices distintos.

Habiendo comprobado que  $W$  no admite caminos cerrados no estacionarios, por el teorema 4.6.6 existe en  $M$  una función de Morse  $f'$  autoindexante tal que  $V_{f'} = W$ . Veamos que esta satisface lo pedido.

Usando que  $V_f(\sigma_i) \neq 0$  para  $0 \leq i < r$  obtenemos las igualdades

$$\begin{aligned} \ker(W) &= \ker(V_f) \setminus \{\sigma\} \\ \text{Im}(W) &= \text{Im}(V_f) \cup \{\tau\}. \end{aligned}$$

Siendo los puntos críticos de  $f'$  exactamente aquellos símlices  $\nu$  tales que  $\nu \in \ker(W) \setminus \text{Im}(W)$ , estos coinciden con los de  $f$ , con la excepción de  $\sigma$  y  $\tau$  que se volvieron regulares.  $\square$

**Ejemplo 4.6.9.** Supongamos que  $\sigma \prec \tau$  son puntos críticos de  $f$  tales que para todo  $\sigma' \prec \tau$  se tiene  $V_f(\sigma') = 0$  (por ejemplo, esto se da en la función de Morse trivial del ejemplo 4.2.5). Entonces se satisfacen las hipótesis de la proposición: el único camino gradiente de una cara de  $\tau$  a  $\sigma$  es  $\gamma : \sigma$ , ya que todos los caminos gradientes que comienzan en caras de  $\tau$  son constantes. La función  $f'$  que nos da la proposición tiene gradiente igual al de  $f$ , con la excepción de que  $V_{f'}(\sigma) = \tau$ .

## 4.7. El punto de vista de los posets

Mostraremos en esta sección la íntima relación que hay entre las funciones de Morse de un complejo simplicial  $M$  y los *matchings* del diagrama de Hasse de  $M$ . Esto nos da la posibilidad de reformular algunos problemas de la teoría de Morse discreta en términos de teoría de grafos, permitiéndonos usar todas las herramientas de esta para atacar dichos problemas. Un ejemplo claro de esto se ve en [2], donde se da una demostración bastante simple del corolario 4.2.18 usando teoría de grafos.

Para empezar, a cada poset (conjunto parcialmente ordenado) le asignaremos un grafo dirigido que nos permitirá visualizarlo mejor.

Sea  $(X, \leq)$  un poset. Su *diagrama de Hasse* es el grafo dirigido  $\mathcal{G}_X$  cuyos vértices son los elementos de  $X$ , y cuyas aristas son los pares  $(x, y)$  con  $x < y$  tales que no existe  $z$  con  $x < z < y$ .

Recíprocamente, a cada grafo dirigido  $\mathcal{G}$  se le puede asignar un poset  $(X_{\mathcal{G}}, \leq)$ , cuyos elementos son los vértices de  $\mathcal{G}$  y donde decimos que  $x \leq y$  si o bien  $x = y$  o bien existe una sucesión de aristas de  $\mathcal{G}$  de la forma

$$(x, x_0), (x_0, x_1), \dots, (x_k, y).$$

Es fácil ver que las construcciones  $X \mapsto \mathcal{G}_X$  y  $\mathcal{G} \mapsto X_{\mathcal{G}}$  son recíprocas. Por esta razón, no distinguiremos a un poset de su diagrama de Hasse. Para graficar un diagrama de Hasse, cuando tengamos una arista  $(x, y)$ , en lugar de dibujar la orientación de la arista, pondremos al vértice  $y$  por sobre el vértice  $x$ .

Veamos ahora cómo se relacionan posets y complejos simpliciales. Mencionaremos los aspectos más básicos, siendo esta relación verdaderamente profunda. De hecho, la topología de un poset queda determinada por la topología de su complejo simplicial asociado. Esto puede verse con detalle en [1].

Todo poset  $X$  induce un complejo simplicial  $M_X$ , cuyos vértices son los elementos de  $X$  y cuyos símlices son los subconjuntos finitos totalmente ordenados de  $X$ .

Todo complejo simplicial  $M$  induce un poset  $X_M$ , cuyos elementos son los símlices de  $M$  y el orden parcial viene dado por la relación “ser cara de”.

Estas construcciones no son recíprocas. Por ejemplo, dado un complejo simplicial  $M$  se tiene que  $M_{X_M}$  no es  $M$  sino que es la subdivisión baricéntrica de  $M$ , según hemos visto en la observación 1.3.9. Además, no todo poset es el poset de un complejo simplicial, ni todo complejo simplicial es el complejo simplicial de un poset, como puede verificarse fácilmente.

Sea un  $M$  un complejo simplicial. Definimos su *diagrama de Hasse* como el diagrama de Hasse de  $X_M$ . Concretamente, este es el grafo dirigido cuyos vértices son los símlices de  $M$  y cuyas aristas dirigidas son los pares ordenados  $(\tau, \sigma)$  con  $\sigma \prec \tau$ . Cabe destacar que este es acíclico.

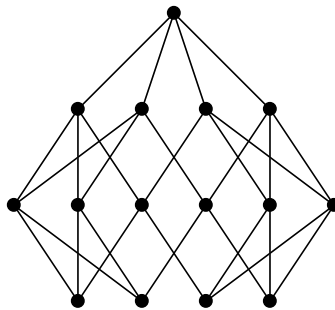


Figura 4.6: El diagrama de Hasse de  $\Delta^3$ .

**Definición 4.7.1.** Sea  $\mathcal{G}$  un grafo dirigido. Diremos que una familia  $\mathcal{R}$  de aristas de  $\mathcal{G}$  es una *matching* si dos aristas distintas de  $\mathcal{R}$  no son incidentes.

**Notación 4.7.2.** Sea  $\mathcal{G}$  un grafo dirigido, y sea  $\mathcal{R}$  una familia de aristas de  $\mathcal{G}$ . Entonces,  $\mathcal{G}_{\mathcal{R}}$  denotará al grafo dirigido obtenido de  $\mathcal{G}$  invirtiendo la orientación de las aristas de  $\mathcal{R}$ .

Fijemos un complejo simplicial  $M$ , y denotemos por  $\mathcal{G}$  a su diagrama de Hasse.

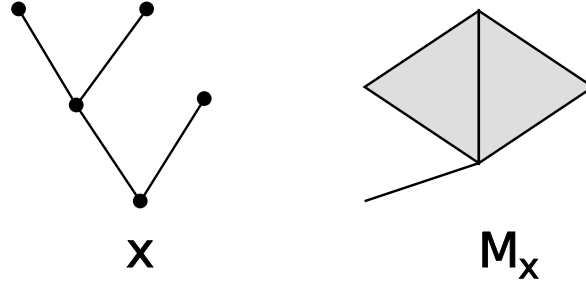


Figura 4.7: El complejo simplicial asociado al poset  $X$ .

Sea  $f$  una función de Morse en un complejo simplicial  $M$ . Definamos

$$\mathcal{R} = \{(\tau, \sigma) \in \mathcal{G} : f(\tau) \leq f(\sigma)\}.$$

Entonces, por el lema 4.2.2  $\mathcal{R}$  es un matching en  $\mathcal{G}$ . Además, si denotamos por  $C$  al conjunto de puntos críticos de  $f$ , se tiene que  $C$  es precisamente el conjunto de vértices de  $\mathcal{G}$  que no pertenecen a ninguna arista de  $\mathcal{R}$ . Finalmente, notemos que el grafo dirigido  $\mathcal{G}_{\mathcal{R}}$  es acíclico. En efecto, esto se sigue de que para toda arista  $(\tau, \sigma) \in \mathcal{G}_{\mathcal{R}}$  se tiene o bien que  $\sigma \prec \tau$  y  $f(\sigma) < f(\tau)$ , o bien que  $\sigma \succ \tau$  y  $f(\sigma) \leq f(\tau)$ .

Hemos probado así la mitad de la siguiente

**Proposición 4.7.3.** *Una familia  $C$  de símplices de  $M$  es el conjunto de puntos críticos de una función de Morse sobre  $M$  si y sólo si existe  $\mathcal{R}$  matching en  $\mathcal{G}$  tal que*

- (i)  $C$  consiste en aquellos vértices de  $\mathcal{G}$  que no pertenecen a ninguna arista de  $\mathcal{R}$ .
- (ii) El grafo dirigido  $\mathcal{G}_{\mathcal{R}}$  es acíclico.

Para probar la otra mitad, notemos antes que nada que dar un campo vectorial  $W$  en  $M$  es lo mismo que dar un matching  $\mathcal{R}$  en  $\mathcal{G}$ . En efecto, si  $W$  es un campo vectorial entonces directamente de la definición de campo vectorial se sigue que

$$\mathcal{R}_W = \{(\tau, \sigma) \in \mathcal{G} : W(\sigma) = \tau\}$$

es un matching en  $\mathcal{G}$ . Recíprocamente, si  $\mathcal{R}$  es un matching en  $\mathcal{G}$ , definamos  $W_{\mathcal{R}} : M \rightarrow M \cup \{0\}$  por

$$W_{\mathcal{R}}(\sigma) = \begin{cases} 0, & \text{si para toda } (\tau, \nu) \in \mathcal{R} \text{ se tiene que } \sigma \neq \nu. \\ \tau, & \text{si } \tau \text{ es tal que } (\tau, \sigma) \in \mathcal{R}. \end{cases}$$

Directamente de la definición se ve que  $W_{\mathcal{R}}$  es un campo vectorial en  $M$ . Se verifica fácilmente que las construcciones  $W \mapsto \mathcal{R}_W$  y  $\mathcal{R} \mapsto W_{\mathcal{R}}$  son recíprocas. Notemos por ejemplo que el campo vectorial nulo se corresponde con el matching vacío.

Ahora hagamos la siguiente observación. Sea  $\mathcal{R}$  es un matching en  $\mathcal{G}$ , y sea  $W_{\mathcal{R}}$  su correspondiente campo vectorial en  $M$ . Entonces,  $W_{\mathcal{R}}$  no admite caminos cerrados no estacionarios si y sólo si el grafo dirigido  $\mathcal{G}_{\mathcal{R}}$  es acíclico. Nuevamente, esto es inmediato al comparar las correspondientes definiciones.

*Demostración de la proposición 4.7.3.* Falta solo la parte del “si”. Tomemos entonces  $C$  y  $\mathcal{R}$  como en el enunciado. Sea  $W_{\mathcal{R}}$  el campo vectorial inducido por  $\mathcal{R}$ . Este no admite caminos cerrados no estacionarios pues  $\mathcal{G}_{\mathcal{R}}$  es acíclico, y sus puntos críticos son precisamente los símlices de  $C$ . Entonces la función de Morse en  $M$  que a partir de  $W_{\mathcal{R}}$  nos da el teorema 4.6.6 satisface lo pedido.  $\square$

## 4.8. Invariancia por subdivisión

Sea  $M$  un complejo simplicial. Sea  $a \notin V_M$ , y sea  $\sigma \in M$ . Consideremos  $\beta M$  la subdivisión estelar elemental (“combinatoria”) de  $M$  en  $a$  con respecto a  $\sigma$ . Dada una función de Morse  $f$  en  $M$ , nos interesa poder “extenderla” a una función de Morse  $g$  en  $\beta M$ . ¿En qué sentido?

Ante todo, nuestra intención es que se cumpla que  $m_p(f) = m_p(g)$  para todo  $p$ . Para lograr esto, basta con conseguir lo siguiente. Sea  $\tau \in M$ . Si no tiene a  $\sigma$  como cara, no se verá alterado al hacer la subdivisión. Entonces, buscamos que  $\tau$  sea crítico para  $g$  si y sólo si lo es para  $f$ . Por otra parte, si  $\tau > \sigma$  entonces  $\tau$  será reemplazado por una familia de nuevos símlices, entre los cuales habrá algunos de dimensión  $\dim \tau$ . Elegiremos uno de estos para que haga el papel de  $\tau$  en el nuevo complejo simplicial. Buscamos entonces que, salvo este, todos los nuevos símlices que provienen de reemplazar a  $\tau$  sean regulares para  $g$ , y que el símplex elegido sea crítico para  $g$  si y sólo si  $\tau$  es crítico para  $f$ .

Conseguir una función de Morse  $g$  que satisfaga lo pedido definiéndola en los símlices de  $\beta M$  en principio parece bastante complicado. Lo que haremos no es construir  $g$  sino construir su gradiente, a partir del gradiente de  $f$ . No sólo resultará más sencillo, sino que considerar este enfoque del problema nos permitirá pensarlo en términos de “deformaciones”, y así construir la extensión será prácticamente una trivialidad.

Apuntamos entonces a un resultado sobre extensión de campos vectoriales, del cual el resultado que buscábamos sobre extensión de funciones de Morse será una consecuencia inmediata.

**Teorema 4.8.1.** *Sea  $V$  un campo vectorial sobre  $M$ . Entonces existe un campo vectorial  $W$  sobre  $\beta M$  que satisface lo siguiente:*

- (i) *Dado  $\tau \in M$  tal que  $\tau \not> \sigma$ , entonces  $\tau$  es crítico para  $W$  si y sólo lo es para  $V$ .*
- (ii) *Dado  $\tau \in M$  tal que  $\tau > \sigma$ , entonces todos los símlices de  $\beta M$  que provienen de reemplazar a  $\tau$  son regulares para  $W$ , con la excepción de uno de dimensión  $\dim \tau$ , que es crítico para  $W$  si y sólo si  $\tau$  es crítico para  $V$ .*

*Además, si  $V$  no admite caminos cerrados no estacionarios, tampoco los admite  $W$ .*

*Demostración.* Definimos  $W : \beta M \rightarrow \beta M \cup \{0\}$  de la siguiente manera.

En los símlices  $\tau$  de  $\beta M$  que son símlices originales de  $M$ , ponemos  $W(\tau) = V(\tau)$ , salvo una excepción que veremos más adelante: si  $V(\tau) > \sigma$ , entonces haremos que  $W(\tau)$  apunte hacia uno de los símlices de dimensión  $\dim V(\tau)$  que se obtienen al reemplazar a  $V(\tau)$ .

Para definir a  $W$  en los nuevos símplexes escribamos  $\sigma = \{x_0, x_1, \dots, x_k\}$ , y fijemos  $\tau > \sigma$ , digamos  $\tau = \{x_0, x_1, \dots, x_k, y_1, y_2, \dots, y_m\}$  (admitiendo  $m = 0$ ). Para no sobrecargar la notación convengamos lo siguiente: donde diga  $x$  deberá leerse  $x_0, x_1, \dots, x_k$  y donde diga  $y$  deberá leerse  $y_1, y_2, \dots, y_m$ , de manera que por ejemplo podemos escribir  $\sigma = \{x\}$  y  $\tau = \{x, y\}$ . Definamos  $W$  en todos los símplexes  $\nu$  de la forma

$$\nu = \{a, x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_j}, y\}, \quad 0 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_j \leq k, \quad 0 \leq j \leq k.$$

Como todo nuevo símplex de  $\beta M$  se escribe de esta forma para una única elección de  $y$  y de subíndices  $0 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_j \leq k$ ,  $W$  quedará entonces bien definido.

Separaremos en casos según sea  $\tau$  crítico,  $V(\tau) \neq 0$  o  $\tau \in \text{Im } V$  (caso que se separa en dos, según la flecha que recibe  $\tau$  provenga de un símplex de  $M$  que es o no reemplazado al hacer la subdivisión).

**1.  $\tau$  crítico.**

Dado que  $\tau$  no recibe ni emana ninguna flecha, podemos elegir arbitrariamente un reemplazante de  $\tau$  en  $\beta M$ ; elegimos al símplex  $\{a, x_1, x_2, \dots, x_k, y\}$ . Entonces, definimos

$$W(\nu) = \begin{cases} 0, & \text{si } i_1 = 0. \\ 0, & \text{si } j = k. \\ x_0\nu, & \text{si no.} \end{cases}$$

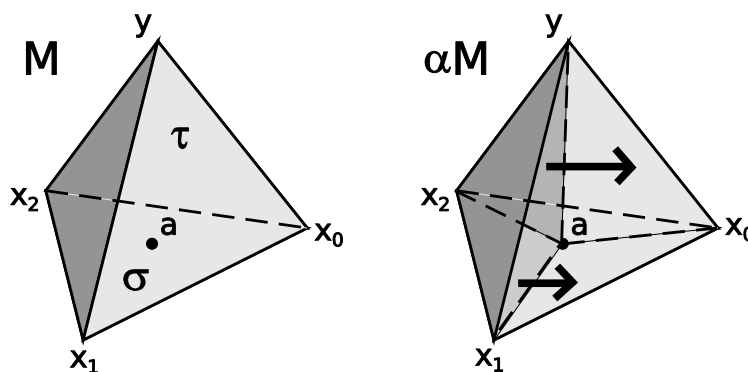


Figura 4.8: El caso  $\tau$  crítico.

Notemos que de esta manera, salvo  $\nu = \{a, x_1, x_2, \dots, x_k, y\}$ , todos los símplexes  $\nu$  que tengan esta forma serán regulares: aquellos que tengan a  $x_0$  entre sus vértices estarán en  $\text{Im } W$ , y aquellos que no lo tengan cumplirán que  $W(\nu) \neq 0$ .

**2.  $V(\tau) = \{x, y, y_{m+1}\}$ .**

Elegimos al símplex  $\{a, x_1, x_2, \dots, x_k, y\}$  para que juegue el papel de  $\tau$ , y al símplex

$\{a, x_1, x_2, \dots, x_k, y, y_{m+1}\}$  para que juegue el papel de  $V(\tau)$ . Precisamente, definimos

$$W(\nu) = \begin{cases} 0, & \text{si } i_1 = 0. \\ y_{m+1}\nu, & \text{si } j = k. \\ x_0\nu, & \text{si no.} \end{cases}$$

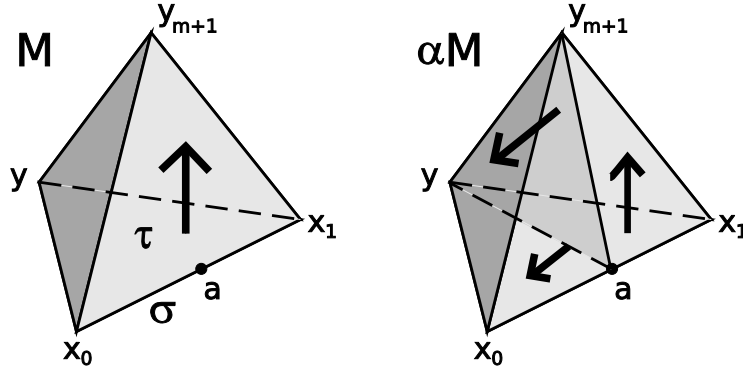


Figura 4.9: El caso  $V(\tau) = \{x, y, y_{m+1}\}$ .

Así, todos los símplexes  $\nu$  que tengan esta forma serán regulares: aquellos que tengan a  $x_0$  entre sus vértices estarán en  $\text{Im } W$ , y aquellos que no lo tengan cumplirán que  $W(\nu) \neq 0$ .

**3.1.**  $\tau = V(\{x_0, \dots, \hat{x}_l, \dots, x_k, y\})$ .

Dado que  $\tau$  recibe una flecha del símplex  $\{x_0, \dots, \hat{x}_l, \dots, x_k, y\}$ , eligiéremos al símplex  $\{a, x_0, \dots, \hat{x}_l, \dots, x_k, y\}$  para que juegue el papel de  $\tau$  en  $\beta M$ . Precisamente, redefinimos

$$W(\{x_0, \dots, \hat{x}_l, \dots, x_k, y\}) = \{a, x_0, \dots, \hat{x}_l, \dots, x_k, y\},$$

y para los símplexes  $\nu$  de la forma antes mencionada ponemos

$$W(\nu) = \begin{cases} 0, & \text{si } x_l \in \nu. \\ 0, & \text{si } \nu = \{a, x_0, \dots, \hat{x}_l, \dots, x_k, y\}. \\ x_l\nu, & \text{si no.} \end{cases}$$

Todos los símplexes  $\nu$  que tengan esta forma serán regulares: aquellos que tengan a  $x_l$  entre sus vértices estarán en  $\text{Im } W$ , y aquellos que no lo tengan, con la excepción de  $\nu = \{a, x_0, \dots, \hat{x}_l, \dots, x_k, y\}$  que estará en  $\text{Im}(W)$ , cumplirán que  $W(\nu) \neq 0$ .

**3.2.**  $\tau = V(\{x, y_1, \dots, \hat{y}_r, \dots, y_m\})$ .

Siendo coherentes con lo que hicimos en el caso 2, el papel de  $\tau$  lo va a jugar el símplex  $\{a, x_1, \dots, x_k, y\}$ . Así, definimos

$$W(\nu) = \begin{cases} 0, & \text{si } i_1 = 0. \\ 0, & \text{si } j = k. \\ x_0\nu, & \text{si no.} \end{cases}$$

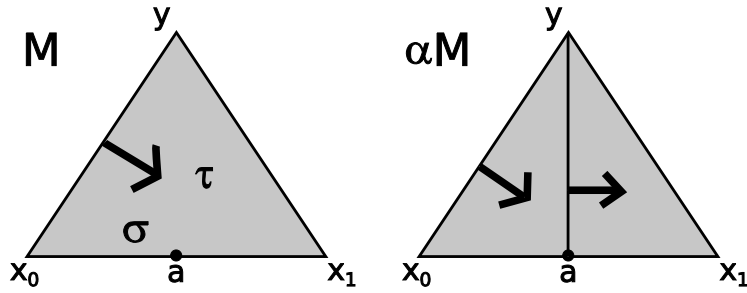


Figura 4.10: El caso  $\tau = V(\{x_0, \dots, \hat{x}_l, \dots, x_k, y\})$ .

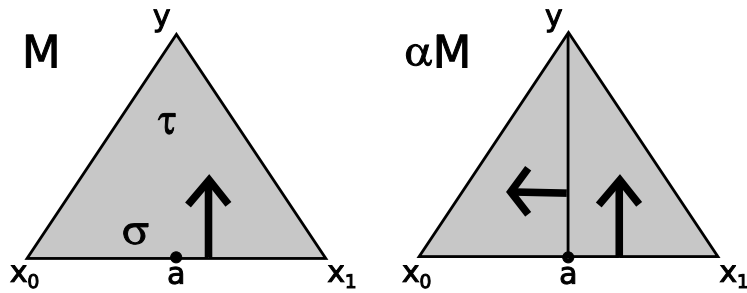


Figura 4.11: El caso  $\tau = V(\{x, y_1, \dots, \hat{y}_r, \dots, y_m\})$ .

Así, todos los símplexes  $\nu$  que tengan esta forma serán regulares: aquellos que tengan a  $x_0$  entre sus vértices estarán en  $\text{Im } W$ , y aquellos que no lo tengan, salvo  $\nu = \{a, x_1, \dots, x_k, y\}$  que estará en  $\text{Im } W$  por lo visto en el caso 2, cumplirán que  $W(\nu) \neq 0$ .

Queda entonces definido  $W : \beta M \rightarrow \beta M \cup \{0\}$ . Veamos que es un campo vectorial. Las condiciones (i) y (iv) de la definición son inmediatas, y la condición (ii) no ofrece ninguna dificultad si consideramos uno a uno los distintos casos que se pueden presentar. La condición (iii) requiere de algún análisis.

Sea  $\mu \in \beta M$ . Supongamos que existe  $\nu \in \beta M$  tal que  $W(\nu) = \mu$ , y analicemos qué forma puede tener, para concluir que existe a lo sumo un tal  $\nu$ . Si  $a \notin \mu$ , entonces  $a \notin \nu$  y  $W(\nu) = V(\nu)$ , y como  $V$  satisface (iii), listo. Si  $a \in \mu$ , escribamos

$$\mu = \{a, x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_j}, y_1, y_2, \dots, y_m\},$$

con  $0 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_j \leq k$ ,  $j \geq 0$ ,  $m \geq 0$ . Como antes, convengamos que donde diga  $x$  deberá leerse  $x_0, x_1, \dots, x_k$  y donde diga  $y$  deberá leerse  $y_1, y_2, \dots, y_m$ . Sea  $\tau = \{x, y\}$ . Separemos en casos.

Si  $i_1 \neq 0$ , analizando la definición de  $W$  vemos que puede ser:

- $\nu = \{a, x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, \hat{y}_r, \dots, y_m\}$ , si  $\tau = V(\{x, y_1, \dots, \hat{y}_r, \dots, y_m\})$ .
- $\nu = \{a, x_{i_1}, \dots, \hat{x}_{i_l}, \dots, x_{i_j}, y\}$ , si  $\tau = V(\{x_0, \dots, \hat{x}_l, \dots, x_k, y\})$ .

- $\nu = \{x_1, \dots, x_k, y\}$ , si  $\tau = V(\{x_1, \dots, x_k, y\})$ .

Estas tres posibilidades son mutuamente excluyentes: la primera con las demás porque  $V$  satisface (iii), y la segunda con la tercera porque si  $\tau = V(\{x_1, \dots, x_k, y\})$  entonces  $W(\{a, x_1, \dots, x_k, y\}) = 0$ .

Si  $i_1 = 0$ , analizando la definición de  $W$  vemos que puede ser:

- $\nu = \{a, x_{i_2}, \dots, x_{i_j}\}$ , si  $\tau$  es crítica.
- $\nu = \{a, x_{i_2}, \dots, x_{i_j}\}$ , si  $V(\tau) \neq 0$ .
- $\nu = \{a, x_{i_2}, \dots, x_{i_j}\}$ , si  $\tau = V(\{x, y_1, \dots, \hat{y}_r, \dots, y_m\})$ .
- $\nu = \{a, x_{i_1}, \dots, \hat{x}_l, \dots, x_{i_j}, y\}$ , si  $\tau = V(\{x_0, \dots, \hat{x}_l, \dots, x_k, y\})$ .

Estas cuatro posibilidades son mutuamente excluyentes ya que  $V$  es un campo gradiente.

Queda así demostrado que  $W$  es un campo gradiente en  $\beta M$ . Es fácil ver que verifica las condiciones (i) y (ii) del enunciado del teorema teniendo en mente los comentarios que hemos hecho al definirlo.

Ahora supongamos que  $V$  no admite caminos cerrados no estacionarios, y probemos que tampoco los admite  $W$ . Por el absurdo, supongamos que en  $\beta M$  tenemos un  $W$ -camino  $\gamma : \sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_r$ , con  $\sigma_0 = \sigma_r, \sigma_r \neq \sigma_{r-1}, r \geq 1$ , y veamos que este induce un  $V$ -camino en  $M$  cerrado no estacionario. Hay tres casos a considerar.

**I.** Para todo  $0 \leq i \leq r$  se tiene  $a \notin \sigma_i$ .

Este caso es fácil, ya que los  $\sigma_i$  son símlices de  $M$  y además  $V(\sigma_i) = W(\sigma_i)$  para todo  $i$ . Luego,  $\gamma$  es un  $V$ -camino cerrado no estacionario.

**II.** Existen  $0 \leq i, j \leq r$  tales que  $a \notin \sigma_i, a \in \sigma_j$ .

Supongamos sin pérdida de generalidad que  $a \notin \sigma_0, a \in \sigma_1$ . Analizando la definición de  $W$ , vemos que necesariamente existen  $y_1, y_2, \dots, y_m$  vértices de  $M$  y  $0 \leq l \leq k$  tales que  $\sigma_0 = \{x_0, \dots, \hat{x}_l, \dots, x_k, y\}$  y  $V(\sigma_0) = \{x, y\}$  (donde hacemos mismas las convenciones de notación que arriba). Así,  $W(\sigma_0) = \{a, x_0, \dots, \hat{x}_l, \dots, x_k, y\}$ . Definimos  $\tilde{\sigma}_0 = \sigma_0$ . Para obtener  $\sigma_1$  a partir de  $W(\sigma_0)$ , caben dos posibilidades:

- Se saca uno de los  $y_s$ .

Así,  $\sigma_1 = \{a, x_0, \dots, \hat{x}_l, \dots, x_k, y_1, \dots, \hat{y}_s, \dots, y_m\}$ . Como  $W(\sigma_1) \neq 0$ , debe ser  $l = 0$  y  $V(\{x, y_1, \dots, \hat{y}_s, \dots, y_m\}) = \{x, y_1, \dots, \hat{y}_s, \dots, y_m, y_{m+1}\}$ . Así,  $W(\sigma_1) = \{a, x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, \hat{y}_s, \dots, y_m, y_{m+1}\}$ . Definimos  $\tilde{\sigma}_1 = \{x, y_1, \dots, \hat{y}_s, \dots, y_m\}$ , y resulta  $\tilde{\sigma}_1 \neq \tilde{\sigma}_0, \tilde{\sigma}_1 < V(\tilde{\sigma}_0)$ . En tal caso, el proceso sigue según veremos más abajo.

- Se saca uno de los  $x_j$ .

Así,  $\sigma_1 = \{a, x_0, \dots, \hat{x}_j, \dots, \hat{x}_l, \dots, x_k, y\}$ . Como  $W(\sigma_1) \neq 0$  y  $\sigma_1 \neq \sigma_0$ , necesariamente  $W(\sigma_1) = \{a, x_0, \dots, \hat{x}_j, \dots, x_k, y\}$ . Para obtener  $\sigma_2$  a partir de este símlice, caben tres posibilidades:

- Se saca a  $a$ .  
En tal caso definimos  $\tilde{\sigma}_1 = \sigma_2, \tilde{\sigma}_2 = \sigma_2$ , y el proceso se detiene.
- Se saca a un  $x_i$ , con  $x_i \neq x_l$ .  
Este caso no se puede dar, pues se tendría  $W(\sigma_2) = 0$ .
- Se saca a un  $y_s$ .  
En este caso definimos  $\tilde{\sigma}_1 = \tilde{\sigma}_2 = \{x, y_1, \dots, \hat{y}_s, \dots, y_m\}$ . Entonces, se tiene que  $j = 0, V(\{x, y_1, \dots, \hat{y}_s, \dots, y_m\}) = \{x, y_1, \dots, \hat{y}_s, \dots, y_m, y_{m+1}\}$  y  $W(\sigma_2) = \{a, x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, \hat{y}_s, \dots, y_m, y_{m+1}\}$ , necesariamente. El proceso sigue según veremos a continuación.

Si el proceso no se detuvo, es debido a que llegamos a un símplex de la forma  $\sigma_t = \{a, x_1, \dots, x_k, z\}$  (donde diga  $z$  leamos  $z_1, \dots, z_{m-1}$ ), con  $V(\{x, z\}) = \{x, z, z_m\}, W(\sigma_t) = \{a, x_1, \dots, x_k, z, z_m\}$  y  $\tilde{\sigma}_t = \{x, z\}$ . Se abren tres posibilidades. Si para obtener  $\sigma_{t+1}$  de  $W(\sigma_t)$  se saca a  $a$ , definimos  $\tilde{\sigma}_{t+1} = \sigma_{t+1}$ , de modo que  $\tilde{\sigma}_{t+1} \neq \tilde{\sigma}_t, \tilde{\sigma}_{t+1} < V(\tilde{\sigma}_t)$ , y el proceso para. No se puede obtener sacando a un  $x_i$ , pues tendríamos que  $W(\sigma_{t+1}) = 0$ . Si se obtiene sacando un  $z_h \neq z_m$ , tenemos que  $\sigma_{t+1} = \{a, x_1, \dots, x_k, z_1, \dots, \hat{z}_h, \dots, z_{m-1}, z_m\}$ , y así  $V(\{x, z_1, \dots, \hat{z}_h, \dots, z_{m-1}, z_m\}) = \{x, z_1, \dots, \hat{z}_h, \dots, z_{m-1}, z_m, z_{m+1}\}$ , y además que  $W(\sigma_{t+1}) = \{a, x_1, \dots, x_k, z_1, \dots, \hat{z}_h, \dots, z_{m-1}, z_m, z_{m+1}\}$ . Lo que hacemos entonces es definir  $\tilde{\sigma}_{t+1} = \{x, z_1, \dots, \hat{z}_h, \dots, z_{m-1}, z_m\}$ , y así  $\tilde{\sigma}_{t+1} < V(\tilde{\sigma}_t), \tilde{\sigma}_{t+1} \neq \tilde{\sigma}_t$ . Repetimos lo hecho en este párrafo, hasta que desaparezca  $a$ , cosa que sucederá pues el camino es cerrado y  $a \notin \sigma_0$ .

Una vez hecho este procedimiento ante cada aparición de  $a$  en la sucesión, y poniendo  $\tilde{\sigma}_i = \sigma_i$  para los símplexes que no fueron alterados, se obtiene una sucesión  $\tilde{\sigma}_0, \tilde{\sigma}_1, \dots, \tilde{\sigma}_r$  de símplexes de  $M$  todos de la misma dimensión, con  $\tilde{\sigma}_0 = \tilde{\sigma}_r, \tilde{\sigma}_0 \neq \tilde{\sigma}_1$  y tal que para todo  $i$  o bien  $\tilde{\sigma}_i = \tilde{\sigma}_{i+1}$ , o bien  $\tilde{\sigma}_i \neq \tilde{\sigma}_{i+1}$  y  $\tilde{\sigma}_{i+1} < V(\tilde{\sigma}_i)$ . Eliminando los símplexes repetidos, lo que tenemos es un  $V$ -camino cerrado no estacionario.

### III. $a \in \sigma_i$ para todo $i$ .

Tomemos un  $i$  cualquiera. Llamemos  $\nu = \sigma_i, \mu = \sigma_{i+1}$ . Como siempre, podemos escribir  $\nu = \{a, x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_j}, y_1, y_2, \dots, y_m\}$ . Haciendo las mismas convenciones de notación de arriba, sea  $\tau = \{x, y\}$ . El valor de  $W$  en  $\nu$  dependerá de  $\tau$ , por lo que separamos en casos.

- $\tau$  crítico.

Como  $W(\nu) \neq 0$ , debe ser  $W(\nu) = \{a, x_0, x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_j}, y\}$ . Entonces  $\mu$  se obtendrá de  $W(\nu)$  sacando uno de los  $y_s$ , pues en caso contrario se tendría  $W(\mu) = 0$ .

- $\tau = V(\{x_0, \dots, \hat{x}_l, \dots, x_k, y\})$ .

Como  $W(\nu) \neq 0$ , debe ser  $W(\nu) = \{a, x_l, x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_j}, y\}$ . Vemos así que  $\mu$  se obtiene de  $W(\nu)$  sacando uno de los  $y_s$ , pues en caso contrario se tendría  $W(\mu) = 0$ .

- $\tau = V(\{x, y_1, \dots, \hat{y}_s, \dots, y_m\})$ .

Así, como  $W(\nu) \neq 0$ , debe ser  $W(\nu) = \{a, x_0, x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_j}, y\}$ . Nuevamente, resulta que  $\mu$  se obtiene de  $W(\nu)$  sacando uno de los  $y_s$ , pues en caso contrario se tendría  $W(\mu) = 0$ .

- $V(\tau) = \{x, y, y_{m+1}\}$ .

Como  $W(\nu) \neq 0$ , se tienen las siguientes dos posibilidades:

- $i_1 \geq 1, i_j < k$ .

Así,  $W(\nu) = \{a, x_0, x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_j}, y\}$ . Nuevamente, resulta que  $\mu$  se obtiene de  $W(\nu)$  sacando uno de los  $y_s$ , pues en caso contrario se tendría  $W(\mu) = 0$ .

- $i_1 = 1, i_j = k$ .

Luego,  $\nu = \{a, x_1, \dots, x_k, y\}$  y  $W(\nu) = \{a, x_1, \dots, x_k, y, y_{m+1}\}$ . Supongamos que para obtener  $\mu$  de  $W(\nu)$  se saca uno de los  $x_j$ . Entonces se tendrá que  $\mu = \{a, x_1, \dots, \hat{x}_j, \dots, y, y_{m+1}\}$  y  $W(\mu) = \{a, x_0, x_1, \dots, \hat{x}_j, \dots, x_k, y, y_{m+1}\}$ . Sea  $\lambda$  el próximo símplex del  $W$ -camino. Si para obtener a  $\lambda$  a partir de  $W(\mu)$  se sacó un  $x_i$  con  $x_i \neq x_0$ , entonces  $W(\lambda) = 0$ . Si por el contrario para obtener  $\lambda$  se sacó un  $y_s$  con  $y_s \neq y_{m+1}$ , también resulta  $W(\lambda) = 0$ . Como esto no puede ser, concluimos que para obtener  $\mu$  de  $W(\nu)$  necesariamente se saca uno de los  $y_s$ , con  $y_s \neq y_{m+1}$ .

En limpio, nos quedamos con la siguiente observación: para todo  $i$ , al pasar de  $\sigma_i$  a  $\sigma_{i+1}$  la cantidad de vértices  $y$ 's es la misma o decrece en uno, pero nunca crece. Como el camino es cerrado, concluimos que esta cantidad debe mantenerse constante, cosa que pasaba sólo al considerar el último de los casos, lo cual tendremos en mente en lo que sigue.

Usando las convenciones de notación a esta altura usuales,  $\sigma_i = \{a, x_1, \dots, x_k, y(i)\}$ , donde  $\{y(i+1)\} = (\{y(i)\} \setminus \{y_i\}) \cup \{y_{i+1}\}$ , y  $y_{i+1} \neq y_i$ . Sea  $\tilde{\sigma}_i = \{x, y(i)\}$ . Entonces,  $V(\tilde{\sigma}_i) = y_{i+1}\tilde{\sigma}_i$ . Por lo tanto  $\tilde{\sigma}_0, \tilde{\sigma}_1, \dots, \tilde{\sigma}_r$  es un  $V$ -camino cerrado no estacionario.  $\square$

**Teorema 4.8.2.** *Sea  $f$  una función de Morse en  $M$ , y sea  $\beta M$  una subdivisión estelar de  $M$ . Entonces existe  $g$  función de Morse en  $\beta M$  autoindexante tal que  $m_p(f) = m_p(g)$  para todo  $p \geq 0$ .*

*Demostración.* Podemos suponer que la subdivisión es elemental. Entonces el resultado se sigue del teorema anterior, poniendo  $V = V_f$  y tomando  $g$  como la función inducida por el campo vectorial  $W$  según el teorema 4.6.6.  $\square$

Como consecuencia inmediata de este último teorema, obtenemos el siguiente resultado, que ya es bien conocido.

**Corolario 4.8.3.** *Sea  $M$  un complejo simplicial finito.*

- (i) *Si  $M$  es colapsable y  $\beta M$  es una subdivisión estelar de  $M$ , entonces  $\beta M$  es colapsable.*
- (ii) *Si  $M$  es colapsable y  $\alpha_1 M$  es una subdivisión cualquiera de  $M$ , entonces existe una subdivisión  $\alpha_2(\alpha_1 M)$  tal que  $\alpha_2(\alpha_1 M)$  es colapsable.*

*Demostración.* La segunda afirmación se sigue de la primera, ya que dada  $\alpha_1 M$  existe  $\alpha_2(\alpha_1 M)$  tal que esta es una subdivisión estelar de  $M$ .

Veamos la primera. Si  $M$  es colapsable, tenemos una función de Morse en  $M$  que tiene un único punto crítico, el cual es un vértice. Por el último teorema, esta induce una función de Morse en  $\beta M$  con un único punto crítico, el cual es un vértice. Por lo tanto,  $\beta M$  es colapsable. □

Con algo más de trabajo, podemos generalizar este corolario, obteniendo un resultado también conocido.

**Corolario 4.8.4.** *Sea  $M$  un complejo simplicial finito y sea  $N \subseteq M$  un subcomplejo. Supongamos que  $\beta M$  es una subdivisión estelar de  $M$ . Sea  $\beta N$  la subdivisión que esta induce en  $N$ . Entonces, si  $M \searrow N$ , se tiene que  $\beta M \searrow \beta N$ .*

*Demostración.* Según lo visto en la proposición 4.4.4, tenemos  $f$  de Morse en  $M$  sin puntos críticos fuera de  $N$  y tal que si  $\sigma \in N$ , entonces  $V_f(\sigma) = 0$  o  $V_f(\sigma) \in N$ .

Podemos suponer sin pérdida de generalidad que la subdivisión es elemental. Extendamos  $V_f$  a un campo vectorial  $W$  en  $\beta M$  según el teorema 4.8.1. Tomemos  $g$  de Morse en  $\beta M$  tal que  $V_g = W$ , según el teorema 4.6.6. Si logramos probar que  $W$  tiene la propiedad de que para todo  $\nu \in \beta N$  se tiene que  $W(\nu) = 0$  o  $W(\nu) \in \beta N$ , entonces por la proposición 4.4.4 habremos probado que  $\beta M \searrow \beta N$ .

Tomemos entonces  $\nu \in \beta N$  tal que  $W(\nu) \neq 0$  y probemos que  $W(\nu) \in \beta N$ . Para esto va a ser necesario tener en mente la definición de  $W$  que hicimos en la demostración del teorema 4.8.1. Supongamos que  $\beta M$  se obtiene subdividiendo en un punto  $a$  con respecto a un símplex  $\sigma = \{x_0, x_1, \dots, x_k\}$ . Separemos en casos.

- $a \notin \nu, a \notin W(\nu)$ .

En tal caso,  $W(\nu) = V_f(\nu) \in N$ , pues  $\nu \in N$ .

- $a \notin \nu, a \in W(\nu)$ .

Necesariamente es  $\nu = \{x_0, \dots, \hat{x}_l, \dots, x_k, y_1, \dots, y_m\}$ ,  $V_f(\nu) = \{x, y\}$  y  $W(\nu) = \{a, x_0, \dots, \hat{x}_l, \dots, x_k, y\}$  (siguiendo las convenciones de notación de aquella demostración). Como  $V_f(\nu) \in N$  y  $W(\nu)$  se obtiene cuando subdividimos al reemplazar a  $V_f(\nu)$ , concluimos que  $W(\nu) \in \beta N$ .

- $a \in \nu, a \in W(\nu)$ .

$\nu$  se obtendrá cuando subdividimos al reemplazar cierto símplex  $\tau = \{x, y\} \in N$ . Al calcular  $W(\nu)$ , vemos que en todos los casos, salvo uno, este resulta un símplex que también se obtiene de reemplazar a  $\tau$ , por lo que tendremos que  $W(\nu) \in \beta N$ . En el único caso en el que no se obtiene así,  $W(\nu)$  se obtiene al reemplazar a  $V_f(\tau)$ , que también está en  $N$  al estarlo  $\tau$ . Por lo tanto en este caso también se obtiene que  $W(\nu) \in \beta N$ . □

# Bibliografía

- [1] J. A. Barmak, *Espacios topológicos finitos*, Tesis de licenciatura, UBA (2006).
- [2] M. K. Chari, *On discrete Morse functions and combinatorial decompositions*, Discrete Mathematics **217** pp. 101-113 (2000).
- [3] M. M. Cohen, *A course in simple homotopy theory*, Springer-Verlag (1973).
- [4] R. Forman, *Morse theory for cell complexes*, Advances in Mathematics **134** pp. 90-145, Article No. AI971650, Academic Press (1998).
- [5] L. C. Glaser, *Geometrical combinatorial topology*, Van Nostrand (1970).
- [6] V. Guillemin - A. Pollack, *Differential topology*, Prentice Hall (1974).
- [7] A. Hatcher, *Algebraic topology*, Cambridge University Press (2002).
- [8] M. Hirsch, *Differential topology*, Springer-Verlag (1973).
- [9] J. M. Lee, *Introduction to topological manifolds*, Springer-Verlag (2000).
- [10] B. Mazur, *Differential topology from the viewpoint of simple homotopy theory*, Publ. Math. I.H.E.S. **15** pp. 5-93 (1963).
- [11] J. S. Milnor, *Lectures on the h-cobordism theorem*, Princeton University Press (1965).
- [12] J. S. Milnor, *Morse theory*, Annals of Mathematics Study, Vol. 51, Princeton University Press (1962).
- [13] J. S. Milnor, *Topology from a differentiable viewpoint*, Univ. of Virginia Press (1966).
- [14] A. A. Ranicki (ed.), *The Hauptvermutung Book*, K-Monographs in Mathematics 1, Kluwer (1996).
- [15] C. P. Rourke - B. J. Sanderson, *Introduction to PL Topology*, Springer-Verlag (1982).
- [16] E. H. Spanier, *Algebraic topology*, McGraw-Hill (1966).
- [17] J. R. Stallings, *Lectures on Polyhedral Topology*, Tata Institute of Fundamental Research, Bombay (1968).
- [18] J. H. C. Whitehead, *Simplicial spaces, nuclei and m-groups*, Proc. London Math. Soc. **45** pp. 243-327 (1938).