



UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Departamento de Matemática

Tesis de Licenciatura

**Sobre grafos perfectos y sus variantes:
caracterizaciones estructurales y algoritmos de reconocimiento**

Lucía Busolini

Director: Guillermo Durán

Fecha de presentación: 30 de julio de 2021

Resumen

Los grafos perfectos fueron definidos por Claude Berge en 1961. Se dice que un grafo es *perfecto* si vale la igualdad entre el número cromático y el tamaño de la clique máxima, para todo subgrafo inducido. Recién en 2002, pudo probarse una caracterización de los grafos perfectos por subgrafos prohibidos y, en 2005, se diseñó un algoritmo polinomial para reconocer si un grafo es perfecto o no.

A raíz de la definición de la clase de grafos perfectos, surgieron otras variantes de clases de grafos definidas a partir de la igualdad de ciertos parámetros, entre ellas las clases de grafos clique-perfectos, coordinados y neighborhood-perfectos.

Guruswami y Pandu Rangan definieron en 2000 que un grafo es *clique-perfecto* si vale la igualdad entre el cardinal de un conjunto máximo de cliques independientes, donde dos cliques se dicen independientes si no tienen vértices en común, y el cardinal de un conjunto mínimo de vértices que intersecan todas las cliques, para todo subgrafo inducido.

Marina Groshaus definió en 2001 que un grafo es *coordinado* si vale la igualdad la cantidad máxima de cliques a la que pertenece un vértice y la cantidad mínima de colores necesaria para colorear las cliques del grafo, para todo subgrafo inducido.

Lehel y Tuza definieron en 1985 que un grafo es *neighborhood-perfecto* como aquellos para los cuales vale la igualdad entre la cantidad mínima de vecindades necesarias para cubrir todos los vértices y aristas, y el cardinal máximo de un conjunto de aristas tal que no haya dos en la misma vecindad, para todo subgrafo inducido.

En este trabajo se mencionan las caracterizaciones conocidas de estas clases de grafos, algunos ejemplos y algoritmos de reconocimiento. Dado que no se conocen caracterizaciones parciales de las últimas tres clases de grafos mencionadas, estudiaremos caracterizaciones de estas clases de grafos restringidas a ciertas clases como los grafos sin triángulos, los diamond-free, entre otras. Al igual que la complejidad del problema de reconocimiento en cada caso.

Agradecimientos

A toda mi familia por acompañarme durante estos años de carrera y desde siempre apoyando todas mis decisiones. Especialmente a mis papás y a mi hermana por escucharme en los momentos complicados y los días previos a los exámenes.

A Willy por aceptar dirigir esta tesis, por permitirme trabajar en un tema tan lindo y por ayudarme resolviendo cada duda que tuve increíblemente rápido.

A Flavia y Gabriela por tomarse el tiempo de leer esta tesis y por sus comentarios.

A la OMA y a toda la gente que la hacen posible, por permitirme conocer la matemática desde otro punto de vista y por los increíbles viajes de los que pude formar parte tanto como participante como como exolímpica.

A todos mis amigos de OMA, especialmente a Agus, Carla, Charo, Deamo, Ian, Mati, Marchi, el Mono, el Turko y a Trivial, mi primer grupo de amigos de OMA.

A mis compañeros y amigos de la facu, especialmente a Agus, Guido, Leo, Maki, Kat, Lauti, Marchi y Deamo, con los que compartí mucho más que cursadas, por las charlas en los pasillos y tardes de estudios en las mesitas del DM. A Agus, Carla y Deamo que me acompañaron en la experiencia de viajar al IMPA.

A mis amigas por fuera de la matemática, especialmente a Maqui, Vicky, Ade y Cami, por confiar siempre en mí.

A Agus, mi novio, porque estuvo siempre acompañándome en TODO, escuchándome y aconsejándome cuando lo necesité, sin él todos estos años habrían sido muy distintos.

Índice general

1. Introducción	1
1.1. Definiciones básicas y notación	2
2. Grafos perfectos	5
2.1. Grafos de Mycielski	12
3. Grafos clique-perfectos	14
3.1. Familias de grafos no clique-perfectos	18
4. Grafos coordinados	19
5. Grafos neighborhood-perfectos	21
6. Grafos CHH y K-perfectos	25
6.1. Grafos clique-Helly hereditarios	25
6.2. K-perfectos	29
7. Caracterizaciones parciales	33
7.1. Grafos sin triángulos	33
7.2. Grafos paw-free	36
7.3. Grafos claw-free CHH	44
7.4. Grafos {gem, W_4 , bull}-free	46
7.5. Grafos diamond-free	48
7.6. Grafos cordales	54
7.7. Grafos de línea	58
8. Conclusiones y trabajo futuro	62

Capítulo 1

Introducción

Dado un grafo G finito y simple, se define $\omega(G)$ como el tamaño máximo de una clique, donde una clique es un subgrafo completo maximal, y $\chi(G)$ como la cantidad mínima de colores necesaria para colorear los vértices del grafo de forma que a vértices adyacentes se les asignen colores distintos. Se puede ver que siempre vale $\chi(G) \geq \omega(G)$.

Claude Berge definió en 1961 los *grafos perfectos* como aquellos para los cuales vale la igualdad $\chi(H) = \omega(H)$ para todo subgrafo inducido H de G .

A partir de esta definición, surgieron principalmente dos conjeturas. La primera de ellas sostenía que “un grafo es perfecto si y sólo si su complemento lo es”, esto fue demostrado por László Lovász en 1972 y paralelamente por Delbert Ray Fulkerson. Este teorema se conoce como *teorema débil de los grafos perfectos*, debido a que es la más débil de las dos conjeturas enunciadas por Berge. La segunda conjetura sostenía que “un grafo es perfecto si y sólo si no contiene un hole impar ni el complemento de un hole impar”, donde se denomina hole a un ciclo sin cuerdas. Esta segunda conjetura recién fue probada en 2002 por Maria Chudnovsky, Neil Robertson, Paul Seymour y Robin Thomas, y se conoce como *teorema fuerte de los grafos perfectos*.

A raíz de la definición de la clase de grafos perfectos, surgieron otras variantes de clases de grafos definidas a partir de la igualdad de ciertos parámetros, entre ellas las clases de grafos clique-perfectos, coordinados y neighborhood-perfectos.

Se define $\alpha_c(G)$ como el cardinal de un conjunto máximo de cliques independientes y $\tau_c(G)$ como el cardinal de un conjunto mínimo de vértices que intersecan todas las cliques de G . Se puede ver que siempre vale $\tau_c(G) \geq \alpha_c(G)$.

Venkatesan Guruswami y C. Pandu Rangan definieron en 2000 los *grafos clique-perfectos* como aquellos para los cuales vale la igualdad $\tau_c(H) = \alpha_c(H)$ para todo H subgrafo inducido de G .

Se define $M(G)$ como la cantidad máxima de cliques a la que pertenece un vértice, y $F(G)$ como la cantidad mínima de colores necesaria para colorear las cliques de G de forma tal que a cliques que tengan vértices en común se les asignen colores distintos. Se puede ver que siempre vale $F(G) \geq M(G)$.

Marina Groshaus definió en 2001 los *grafos coordinados* como aquellos para los cuales vale la igualdad $F(H) = M(H)$ para todo H subgrafo inducido de G .

Se llama vecindad o neighborhood de un vértice al subgrafo inducido por dicho vértice y todos sus vecinos. Se denota $\alpha_N(G)$ al tamaño mínimo de un subconjunto de vértices tal que toda arista del grafo G pertenece a la vecindad de alguno de los vértices de dicho conjunto y $\rho_N(G)$ al tamaño máximo de un conjunto neighborhood-independiente de aristas, donde decimos que dos aristas son neighborhood-independientes si no existe un vértice de G tal que ambas aristas pertenecen a la vecindad de dicho vértice. Se puede ver que siempre vale $\rho_N(G) \geq \alpha_N(G)$. Jenő Lehel y Zsolt Tuza definieron en 1985 los grafos *neighborhood-perfectos* como aquellos para los cuales vale la igualdad $\rho_N(H) = \alpha_N(H)$ para todo H subgrafo inducido de G .

En este trabajo se mencionarán las caracterizaciones conocidas de estas clases de grafos, algunos ejemplos y algoritmos de reconocimiento. En este primer capítulo, comenzamos con algunas definiciones básicas de teoría de grafos, la notación utilizada y la noción de complejidad algorítmica.

El capítulo 2 trata sobre grafos perfectos, su definición a partir de la igualdad entre parámetros, algunos ejemplos de grafos perfectos y no-perfectos, y los principales teoremas sobre esta clase de grafos que son el teorema débil y el teorema fuerte de los grafos perfectos.

Los capítulos 3, 4 y 5 tratan de las clases de grafos clique-perfectos, coordinados y neighborhood-perfectos respectivamente. En cada uno de estos comenzamos por su definición, algunos ejemplos y su relación con los grafos perfectos.

En el capítulo 6 definiremos otras dos clases de grafos: los clique-Helly hereditarios y los K -perfectos, que nos ayudarán en el capítulo siguiente.

Como no se conocen caracterizaciones completas para los grafos clique-perfectos, coordinados y neighborhood-perfectos en general, es interesante estudiar el problema restringido a ciertas clases de grafos para las cuales el problema sea más sencillo. En el capítulo 7 estudiaremos las caracterizaciones conocidas para la clase de grafos perfectos y sus variaciones, restringidas a ciertas clases de grafos.

Por último, en el capítulo 8 presentamos algunas conclusiones que surgen de este trabajo y algunos problemas abiertos relacionados con lo investigado.

1.1. Definiciones básicas y notación

Un grafo G es un par (V, E) donde V es un conjunto finito a cuyos elementos llamamos *vértices* y E es un conjunto de pares no ordenados de vértices de G a cuyos elementos llamamos *aristas*. Dado un grafo G , donde no se especifican los conjuntos de vértices y el de aristas, notamos $V(G)$ al conjunto de vértices de G y $E(G)$ al conjunto de aristas de G .

Dado G un grafo y $v \in V(G)$ un vértice, llamamos *grado* de v al número de aristas a las que pertenece v . Notamos $\deg_G(v)$ al grado del vértice v en G . Un par de vértices $u, v \in V(G)$ se dicen *adyacentes* o *vecinos* si $(u, v) \in E(G)$. Decimos que un vértice es *aislado* si tiene grado 0, es decir, si no pertenece a ninguna arista y decimos que un vértice es *universal* si su grado es $|V(G)| - 1$, es decir, si es vecino de todos los otros vértices.

Un *subgrafo* de un grafo $G = (V, E)$ es un grafo $G' = (V', E')$ tal que $V' \subseteq V$ y $E' \subseteq E$. Un subgrafo G' de G se dice *inducido* si contiene a todas las aristas de G que unen vértices del conjunto V' . Dado un grafo $G = (V, E)$, decimos que los vértices $v, w \in V$ son *adyacentes* si $(v, w) \in E$.

Dado un grafo G , un camino es una sucesión de vértices v_1, v_2, \dots, v_n tales que v_i es adyacente a v_{i+1} para todo $i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$. Un grafo se dice *conexo* si entre todo par de vértices u, v del grafo hay un camino que los conecta, es decir, que comienza en u y termina en v .

El *complemento* \bar{G} de un grafo G es un grafo que tiene el mismo conjunto de vértices que G pero dos vértices son adyacentes en \bar{G} si y sólo si no son adyacentes en G .

Un grafo se dice *completo* si todos los vértices son adyacentes entre sí, notamos K_n al grafo completo con n vértices.

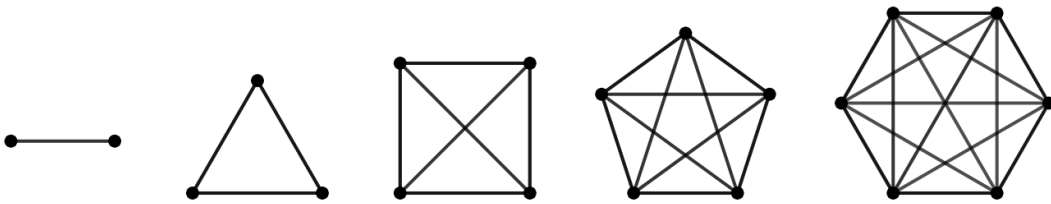


Figura 1.1: Grafos completos. K_2, K_3, K_4, K_5 y K_6 respectivamente.

Una *clique* en un grafo es un subgrafo completo maximal. En la figura 1.2, vemos en un grafo un ejemplo de un subgrafo completo que no es una clique por no ser maximal.

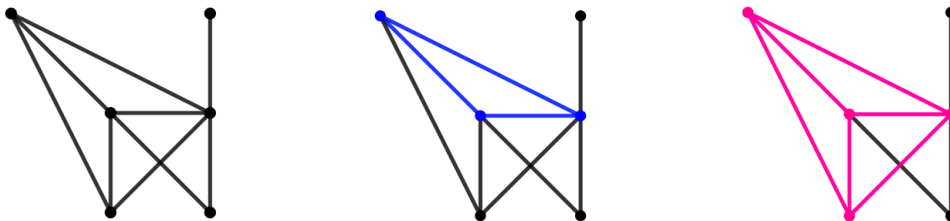


Figura 1.2: En este grafo, el subgrafo rosa es una clique pero el azul no.

En esta tesis nos dedicaremos a estudiar ciertas clases de grafos, las principales serán la clase de grafos perfecto, clique-perfectos, coordinados y neighborhood-perfectos. Para extender nuestro estudio del tema deberemos estudiar además la clase de grafos K -perfectos y la de grafos clique-Helly hereditarios. Gran parte de lo que hablaremos en este trabajo se basa en estudiar las restricciones de las clases de grafos anteriores a ciertas clase de grafos, varias de ellas definidas como la clase de grafos H -free para cierto grafo H . Dado H un grafo, decimos que otro grafo G es H -free o *no contiene H s* si G no tiene H s como subgrafos inducidos. Notemos que si H es conexo, G es H -free si y solo si cada una de sus componentes conexas lo es.

Decimos que una clase de grafos \mathcal{F} es *hereditaria* si todo subgrafo inducido de un grafo de \mathcal{F} también pertenece a \mathcal{F} .

Uno de los problemas con el que nos encontraremos en este trabajo es el problema de reconocer si un grafo pertenece o no a cierta clase de grafos, y no interesará saber qué tan difícil es este

problema en cada caso.

Para resolver este problema, debemos presentar un *algoritmo*, es decir, una secuencia ordenada finita de instrucciones que recibe una instancia del problema y devuelve la respuesta al problema. Específicamente para los problemas que nos importa resolver, el algoritmo recibirá un grafo y debe determinar si este pertenece o no a cierta clase.

La *complejidad* de un algoritmo es la cantidad de operaciones básicas que este realiza, en función del tamaño de los parámetros de entrada. En este caso, calcularemos usualmente la complejidad en función de la cantidad de vértices y aristas del grafo ingresado.

Se dice que un problema es *de decisión* si las posibles respuestas a la pregunta son SI o NO, por ejemplo, el problema de decidir si un grafo pertenece a cierta clase es un problema de decisión. Se dice que un problema es *de optimización* cuando se busca la solución óptima para el problema formulado. Usualmente, los problemas de optimización tienen su variante de decisión.

Un algoritmo se dice *polinomial* si la cantidad de operaciones está acotada por $p(n)$ siendo n el tamaño de la instancia y p una función polinomial. En este caso decimos que el algoritmo tiene complejidad $\mathcal{O}(p(n))$.

Los problemas de decisión se pueden clasificar según la complejidad de los algoritmos que los resuelven. La *clase P* es el conjunto de problemas de decisión para los cuales existe un algoritmo polinomial que los resuelve, se llaman problemas polinomiales. La *clase NP*, por las siglas en inglés *non-deterministic polynomial time*, es el conjunto de problemas de decisión para los cuales las instancias que tienen como respuesta SI, pueden verificarse en tiempo polinomial. Está claro que todo problema de decisión que pertenece a la clase P , también pertenecen a la clase NP . Sin embargo, uno de los principales problemas de la informática es determinar si $P \neq NP$. Un problema de decisión π pertenece a la clase NP -completo si satisface las siguiente condiciones:

- $\pi \in NP$.
- Para todo problema $\pi' \in NP$, existe una transformación polinomial de π' en π .

Un problema de decisión π pertenece a la clase NP -hard si satisface únicamente la segunda condición.

Capítulo 2

Grafos perfectos

Un *coloreo* de un grafo es una asignación de colores a los vértices de forma tal que a vértices adyacentes se les asignen colores distintos. Un k -coloreo de un grafo es un coloreo con k colores. El número mínimo de colores distintos necesarios para colorear un grafo G se llama *número cromático* de G y se denota $\chi(G)$.

El tamaño máximo de una clique de G se llama *número clique* y se denota $\omega(G)$.

Es fácil ver que todo coloreo de G requiere al menos $\omega(G)$ colores, pues todo vértice de la clique máxima debe colorearse de un color distinto. Se tiene entonces la desigualdad $\omega(G) \leq \chi(G)$ para todo grafo G . Aunque la diferencia entre estos dos parámetros puede ser tan grande como se desee, como veremos en el ejemplo de los grafos de Mycielski.

A principio de la década de 1960, Berge definió los *grafos perfectos* a partir de la igualdad entre número clique y el número cromático, para todo subgrafo inducido.

Definición 2.0.1. Un grafo G se dice *perfecto* si $\omega(H) = \chi(H)$ para todo subgrafo inducido H de G .

Observemos que la clase de grafos perfectos es hereditaria. Sea G un grafo perfecto y H un subgrafo inducido de G , veamos que H es perfecto, tomemos H' un subgrafo inducido de H , que en particular es un subgrafo inducido de G , y al ser G perfecto, resulta que $\chi(H') = \omega(H')$. Notemos además que para probar que en cierta clase de grafos hereditaria \mathcal{F} todo grafo es perfecto, basta ver que se satisface la igualdad $\chi(G) = \omega(G)$ para todo $G \in \mathcal{F}$. Esto se debe a que dado $G \in \mathcal{F}$ y H un subgrafo inducido de G , como la clase \mathcal{F} es hereditaria, $H \in \mathcal{F}$ y por lo tanto, $\chi(H) = \omega(H)$, lo que nos dice que G es perfecto.

Un *conjunto independiente de vértices* de un grafo es un conjunto de vértices tales que no hay dos que sean adyacentes entre sí. El tamaño máximo de un conjunto independiente de un grafo G se denota $\alpha(G)$.

Un *recubrimiento de los vértices de G por cliques* es un conjunto de cliques de G tal que todo vértice de G pertenece a alguna de las cliques del conjunto. El tamaño mínimo de un recubrimiento de los vértices de G por cliques se denota $k(G)$.

Podemos notar que dado un conjunto independiente de vértices del grafo G y un recubrimiento

de los vértices de G por cliques, cada uno de los vértices del conjunto independiente debe ser cubierto por una clique distinta en un recubrimiento de los vértices de G , pues si dos vértices están cubiertos por la misma clique, son vecinos. Por lo tanto, vale que $\alpha(G) \leq k(G)$ para todo grafo G .

Existe una equivalencia entre los parámetros mencionados de G y los de \overline{G} , un conjunto independiente maximal en G se corresponde con una clique en \overline{G} y un recubrimiento de los vértices de G por cliques se corresponde con un coloreo de los vértices de \overline{G} , esto implica que $\alpha(G) = \omega(\overline{G})$ y $k(G) = \chi(\overline{G})$ para todo grafo G . El complemento \overline{G} de un grafo G es perfecto si $\omega(\overline{H}) = \chi(\overline{H})$ para todo \overline{H} subgrafo inducido de \overline{G} , es decir, para todo H subgrafo inducido de G . Por lo mencionado anteriormente, esto es equivalente a que $\alpha(H) = k(H)$ para todo H subgrafo inducido de G , ya que $\alpha(H) = \omega(\overline{H})$ y $k(H) = \chi(\overline{H})$.

Decimos que un grafo G es α -perfecto si $\alpha(H) = k(H)$ para todo subgrafo inducido H de G , notemos que que G sea α -perfecto es equivalente a decir que \overline{G} es perfecto.

Berge conjeturó en 1961 que “un grafo es perfecto si y sólo si su complemento lo es”, esto fue probado por Lovász en 1972 y paralelamente por Fulkerson también, desde entonces se conoce como el *teorema de los grafos perfectos*. Mostraremos una demostración de este teorema basada en la propuesta por Lovász en [20], para eso definiremos algunos conceptos y probaremos algunos lemas previos.

Dado un grafo G y un vértice $v \in V(G)$, *duplicar* el vértice v significa agregar a G un vértice v' que tenga los mismos vecinos que v , de esta forma obtenemos un nuevo grafo al que llamamos $G \circ v$ tal que $V(G \circ v) = V(G) \cup \{v'\}$ y $E(G \circ v) = E(G) \cup \{(v', w) \mid w \text{ es vecino de } v\}$. Notemos que v y v' no son adyacentes en $G \circ v$.

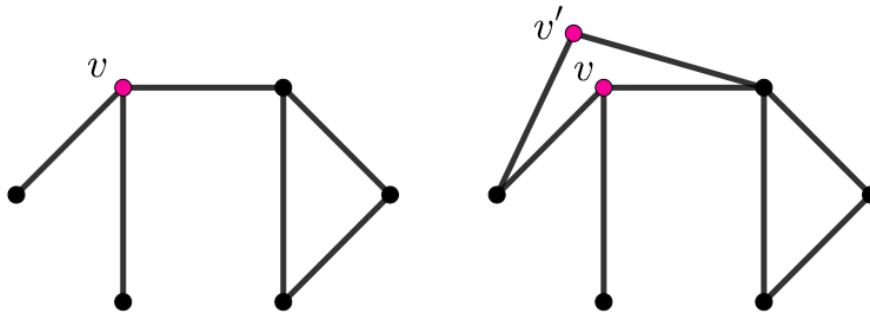


Figura 2.1: Ejemplo de duplicación de vértice.

Generalizando la definición de duplicación de vértices, definimos la *multiplicación de vértices*. Dado G un grafo con $V(G) = \{v_1, \dots, v_n\}$ y $h \in \mathbb{N}_0^n$ un vector de n enteros no negativos $h = (h_1, \dots, h_n)$, definimos $G \circ h$ como el grafo que tiene h_i copias de v_i para cada $i \in \{1, \dots, n\}$ y tales que dos vértices de $G \circ h$ son adyacentes si y sólo si son copias de vértices adyacentes de G .

Observemos que todo grafo que se obtiene de una multiplicación de vértices de un grafo G , es decir, $G \circ h$ para cierto $h \in \mathbb{N}_0^n$, puede obtenerse de sucesivas duplicaciones de vértices a partir de algún subgrafo inducido H de G . Dado un grafo G y $h \in \mathbb{N}_0^n$, para generar el grafo

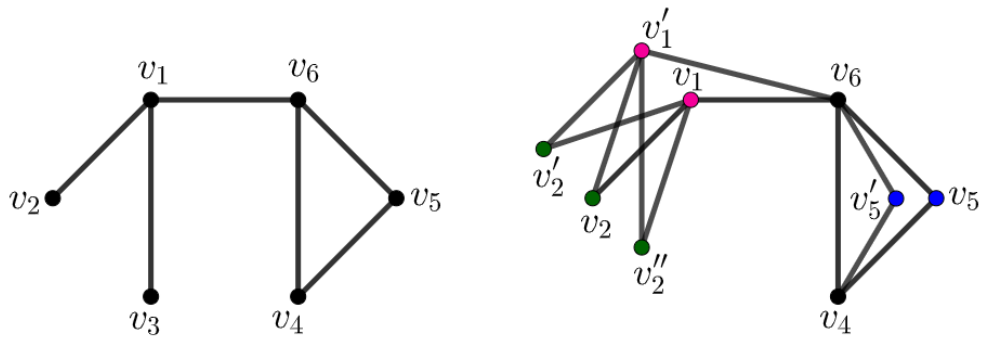


Figura 2.2: Ejemplo multiplicar vértices según vector $h = (2, 3, 0, 1, 5, 1)$.

$G \circ h$ por duplicaciones, basta tomar H como el subgrafo generado por el conjunto de vértices $\{v_i \mid h_i \neq 0, i \in \{1, \dots, n\}\}$ y duplicar en H cada vértice v_j , $h_j - 1$ veces para cada j tal que $v_j \in V(H)$.

El siguiente lema fue probado por Lovász en [20] y es la pieza central del teorema.

Lema 2.0.2. [20] Si H se obtiene de G por multiplicación de vértices entonces:

- (I) Si G es perfecto entonces H es perfecto.
- (II) Si G es α -perfecto entonces H es α -perfecto.

Demostración. Notemos que, por la observación anterior, basta probar el lema en el caso que $H = G \circ v$, es decir, el caso en que H se obtiene de G por duplicación de cierto vértice v . Esto se debe a que, una vez probado el lema en el caso duplicación, para verlo para un $H = G \circ h$ general basta construir H a partir de sucesivas duplicaciones de vértices de cierto subgrafo G' de G , de esta forma, sabiendo que G es perfecto (respectivamente α -perfectos), G' también lo es y como H se puede obtener a partir de G' duplicando vértices sucesivas veces, H resultará perfecto (respectivamente α -perfecto) por lo probado en el caso duplicación.

El lema se reduce entonces a ver que:

- (I) Si G es perfecto entonces $G \circ v$ es perfecto.
- (II) Si G es α -perfecto entonces $G \circ v$ es α -perfecto.

Lo probaremos por inducción en la cantidad de vértices de G , a lo que llamaremos n . Si $n = 1$, el teorema es verdadero, pues un grafo con 2 vértices sin aristas es perfecto y α -perfecto. Para el paso inductivo, sea G un grafo con $n > 1$ vértices.

Supongamos que G es perfecto. Por un lado, sabemos que todo subgrafo inducido G' del grafo $G \circ v$ que no contenga alguno de los vértices v, v' , será en particular un subgrafo de G y por lo tanto, tenemos que $\omega(G') = \chi(G')$. Por otro lado, si tomamos un subgrafo inducido H' de $G \circ v$ que contenga a los vértices v y v' , este subgrafo H' podemos construirlo a partir de un subgrafo inducido H'' de G duplicando el vértice v , entonces si H'' tiene menos de n

vértices, por hipótesis inductiva podemos afirmar que $\omega(H'') = \chi(H'')$. Basta entonces probar que $\omega(G \circ v) = \chi(G \circ v)$ para poder afirmar que $G \circ v$ es perfecto.

Notemos que $\chi(G \circ v) \leq \chi(G)$, pues dado un coloreo de G , podemos colorear $G \circ v$ con los mismos colores asignándole a v' el mismo color que v . Además, como $G \circ v$ contiene a G como subgrafo, sabemos que $\omega(G) \leq \omega(G \circ v)$. De esta forma se obtiene que

$$\chi(G \circ v) \leq \chi(G) = \omega(G) \leq \omega(G \circ v).$$

Como la desigualdad $\omega(G \circ v) \leq \chi(G \circ v)$ se verifica siempre, tenemos que $\omega(G \circ v) = \chi(G \circ v)$, como queríamos probar.

Supongamos que G es α -perfecto. Mediante un razonamiento análogo al anterior, vemos que basta probar que $\alpha(G \circ v) = k(G \circ v)$. Sea \mathcal{K} un cubrimiento de los vértices de G por cliques tal que $|\mathcal{K}| = k(G) = \alpha(G)$.

Caso 1: Si v pertenece a algún conjunto independiente máximo S de G .

Resulta que $S \cup \{v'\}$ es un conjunto independiente con $\alpha(G) + 1$ vértices, esto nos dice que $\alpha(G \circ v) \geq \alpha(G) + 1$. Además, si tomamos cualquier clique Q de $G \circ v$ que contenga al vértice v' , el conjunto $\mathcal{K} \cup \{Q\}$ será un cubrimiento por cliques de los vértices de $G \circ v$, de esta forma vemos que $k(G \circ v) \leq k(G) + 1$. Tenemos entonces que

$$k(G \circ v) \leq k(G) + 1 = \alpha(G) + 1 \leq \alpha(G \circ v)$$

como la desigualdad $k(G \circ v) \geq \alpha(G \circ v)$ se verifica siempre, hemos probado la igualdad $k(G \circ v) = \alpha(G \circ v)$, como queríamos ver.

Caso 2: Si v no pertenece a ningún conjunto independiente máximo de G .

En este caso podemos afirmar que $\alpha(G \circ v) = \alpha(G)$. Tomemos $Q_v \in \mathcal{K}$ una clique que cubra al vértice v de G , sabemos que como \mathcal{K} tiene cardinal $\alpha(G)$ todo conjunto independiente de vértices de G máximo debe contener algún vértice de la clique Q_v , pero como v no pertenece a ningún conjunto independiente de vértices máximo, $Q'_v = Q_v - \{v\}$ también contiene un vértice de cada conjunto independiente de vértices de G máximo. Luego, $\alpha(G') = \alpha(G) - 1$ si llamamos G' al subgrafo de G inducido por el conjunto de vértices $V(G) - Q'_v$, pero además G' es α -perfecto por ser un subgrafo inducido de G . Así, tenemos que

$$k(G') = \alpha(G') = \alpha(G) - 1.$$

Podemos tomar entonces un cubrimiento de G' por cliques \mathcal{K}' con cardinal $\alpha(G) - 1$.

Agregando la clique $Q'_v \cup \{v'\}$ al conjunto \mathcal{K}' obtenemos un cubrimiento por cliques del grafo $G \circ v$ con cardinal $\alpha(G)$, es decir, esto prueba que $k(G \circ v) \leq \alpha(G)$, como ya sabíamos que $\alpha(G \circ v) = \alpha(G)$ y la desigualdad $k(G \circ v) \geq \alpha(G \circ v)$ vale siempre, podemos afirmar que $k(G \circ v) = \alpha(G \circ v)$.

De esta forma queda probado que $G \circ v$ es α -perfecto, lo cual completa la demostración del lema. □

Decimos que un grafo es *minimalmente imperfecto*, si no es perfecto pero todo subgrafo inducido propio es perfecto. En particular, si G es un grafo minimalmente imperfecto, podemos afirmar que $\omega(G) < \chi(G)$, mientras que $\omega(H) = \chi(H)$ para todo H subgrafo inducido de G tal que $H \neq G$.

Lema 2.0.3. En un grafo minimalmente imperfecto, ningún conjunto independiente de vértices interseca todos las cliques de tamaño máximo.

Demostración. Supongamos que existe un grafo G minimalmente imperfecto y un conjunto independiente de vértices S que interseca a todas las cliques de G de tamaño máximo. Si tomamos $G - S$ el subgrafo inducido por los vértices de G que no están en S , este grafo resulta perfecto por ser G minimalmente imperfecto, tenemos entonces que

$$\chi(G - S) = \omega(G - S) = \omega(G) - 1$$

pues S tiene un vértice de cada una de las cliques de tamaño máximo de G . De esta forma sabemos que hay un coloreo del subgrafo inducido $G - S$ con $\chi(G - S) = \omega(G) - 1$ colores, esto nos permite colorear G con $\omega(G)$ coloreando los vértices de $G - S$ como antes y los de S de un color distinto a los anteriores, ya que S es un conjunto independiente de vértices. Esto contradice que G sea minimalmente imperfecto y llegamos a un absurdo, que proviene de suponer que existe un grafo minimalmente imperfecto con un conjunto independiente de vértices que interseca todas las cliques de tamaño máximo. \square

A partir de los lemas anteriores, veamos la demostración del *teorema débil de los grafos perfectos*. Vale mencionar que este teorema puede enunciarse alternativamente de la siguiente forma: G es perfecto si y sólo si $\alpha(H) = k(H)$ para todo H subgrafo inducido de G .

Teorema 2.0.4. [20] Un grafo es perfecto si y sólo si es α -perfecto.

Demostración. Para empezar, notemos que alcanza con ver que si G es α -perfecto, entonces G es perfecto, debido a que la otra implicación se deduce de aplicar el mismo razonamiento a \overline{G} . Supongamos que existe G α -perfecto que no es perfecto. Observemos que podemos asumir que G es minimalmente imperfecto ya que de no serlo podemos tomar G' un subgrafo inducido de G que sea minimal con la propiedad de no ser perfecto y este G' sería el que usamos para lo que sigue de la demostración, pues es α -perfecto.

Por el lema anterior, sabemos que cada conjunto independiente S de G existe una clique $Q(S)$ de G tal que S no interseca a $Q(S)$. Tomemos entonces $\mathcal{S} = \{S_i\}_{1 \leq i \leq |\mathcal{S}|}$ el conjunto de conjuntos independientes maximales de G . Llamamos $V(G) = \{v_1, \dots, v_n\}$ y h_j a la cantidad de conjuntos $S_i \in \mathcal{S}$ tales que $v_j \in Q(S_i)$.

Sea $H = G \circ h$ que, por el lema 2.0.2, es α -perfecto, ya que G lo es. Veamos que se puede acotar $\alpha(H) < |\mathcal{S}|$ y $k(H) \geq |\mathcal{S}|$.

Podemos contar la cantidad de vértices del grafo H de dos formas distintas. Por un lado, como cada vértice v_j pertenece a h_j de las cliques de $\{Q(S_i)\}_{1 \leq i \leq |\mathcal{S}|}$, sabemos que $|V(H)| = \sum_{j=1}^n h_j$. Por otro lado, como a cada clique $Q(S_i)$ pertenecen exactamente $\omega(G)$ vértices, ya que $Q(S_i)$ era una clique máxima de G , tenemos que $|V(H)| = \omega(G) \cdot |\mathcal{S}|$.

Sabemos que para todo grafo vale que $k(H) \cdot \omega(H) \geq |V(H)|$, pues dado un conjunto de cliques de cardinal mínimo que sea un recubrimiento de los vértices de H , como cada uno de estas cliques cubre a lo sumo $\omega(H)$ vértices y el recubrimiento tiene $k(H)$ elementos, tenemos que la cantidad de vértices de H es a lo sumo $k(H) \cdot \omega(H)$. Además, $\omega(H) \leq \omega(G)$ ya que la replicación de vértices no incrementa ω .

Todo esto nos permite acotar $k(H)$ de la siguiente manera

$$k(H) \geq \frac{|V(H)|}{\omega(H)} \geq \frac{|V(H)|}{\omega(G)} = |\mathcal{S}|.$$

Veamos que podemos acotar $\alpha(H) < |\mathcal{S}|$. Por ser \mathcal{S} el conjunto de conjuntos independientes maximales de G , podemos decir que los conjuntos independientes maximales de H serán los mismos pero agregando los vértices replicados, por lo tanto

$$\begin{aligned} \alpha(H) &= \max_{T \in \mathcal{S}} \sum_{j | v_j \in T} h_j \\ &= \max_{T \in \mathcal{S}} \sum_{S_i \in \mathcal{S}} |T \cap Q(S_i)|. \end{aligned}$$

Observemos que $|T \cap Q(S_i)| \leq 1$ si $S_i \in \mathcal{S} - \{T\}$ ya que un conjunto independiente de vértices puede tener a lo sumo un vértice de una clique. Además, sabemos que $|T \cap Q(T)| = 0$. De esta forma, podemos afirmar que $\sum_{S_i \in \mathcal{S}} |T \cap Q(S_i)| < |\mathcal{S}|$ para todo $T \in \mathcal{S}$ y por lo tanto, concluimos que $\alpha(H) < |\mathcal{S}|$.

De esta forma, hemos probado que $k(H) \geq |\mathcal{S}|$ y $\alpha(H) < |\mathcal{S}|$, por lo tanto H no es α -perfecto, absurdo que viene de suponer que G es α -perfecto pero no perfecto. \square

Un *ciclo* en un grafo es una sucesión de vértices v_1, v_2, \dots, v_k (con $k \geq 3$) de un grafo tales que v_i es adyacente a v_{i+1} para todo $i \in \{1, \dots, k-1\}$ y v_k es adyacente a v_1 .

Notamos C_n al grafo que tiene n vértices $\{1, \dots, n\}$, con $n \geq 4$, en el cual i es adyacente a j si y sólo si $i \equiv j+1 \pmod{n}$ o $j \equiv i+1 \pmod{n}$, también llamado *hole* o *agujero*. Un *antihole* es el complemento de un hole, es decir, $\overline{C_n}$ con $n \geq 4$. Un hole o antihole se dice *impar* si tiene una cantidad impar de vértices, es decir, si n es impar.

En el siguiente lema probaremos que tanto los holes impares como los antiholes impares no son grafos perfectos, este es el primer paso para motivar la segunda conjetura de Berge que afirma que "un grafo es perfecto si y sólo si no contiene holes impares ni antiholes impares como subgrafos inducidos". Notemos que esta conjetura es aún más fuerte que la primera, pues dado un grafo que no contiene holes ni antiholes impares, su complemento tampoco tendrá estos grafos como subgrafos inducidos.

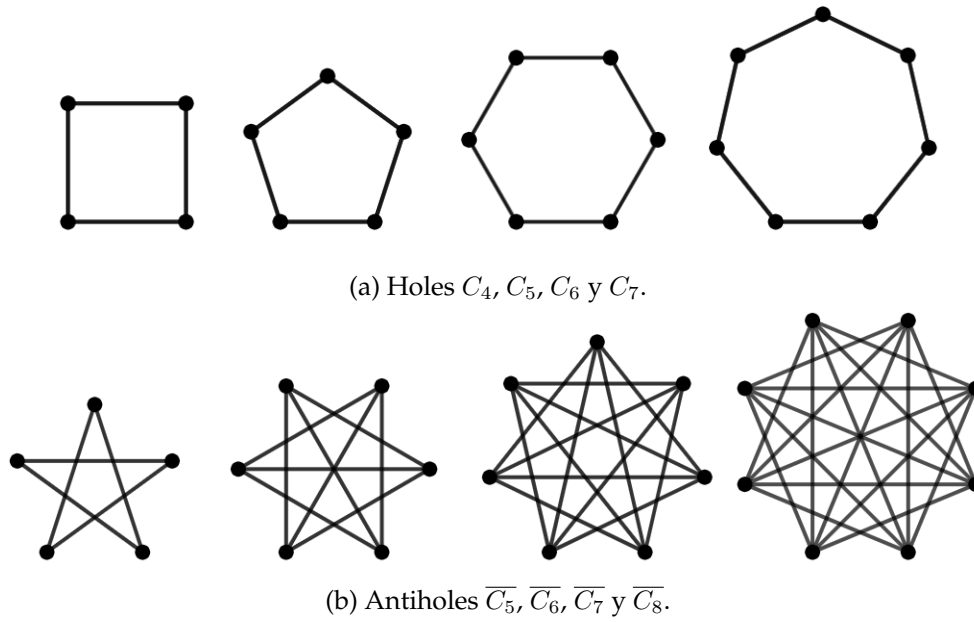


Figura 2.3: Ejemplos de holes y antiholes.

Lema 2.0.5. C_{2k+1} y $\overline{C_{2k+1}}$ con $k \geq 2$ no son perfectos.

Demostración. Probaremos que $\chi(C_{2k+1}) = 3$, mientras que $\omega(C_{2k+1}) = 2$, para todo $k \geq 2$. Tomemos un $k \geq 2$ fijo.

Por un lado, el tamaño de las cliques más grandes de C_{2k+1} es 2, pues no contiene triángulos. Es decir, $\omega(C_{2k+1}) = 2$ ya que C_{2k+1} tiene aristas.

Por otro lado, notemos que un conjunto independiente de vértices tiene a lo sumo k elementos, pues no podemos tomar 2 vértices consecutivos. De esta forma vemos que $\chi(C_{2k+1}) \geq 3$, la igualdad se deduce de que podemos colorear cada uno de los siguientes conjuntos de vértices del un color $\{1, 3, \dots, 2k-1\}$, $\{2, 4, \dots, 2k\}$ y $\{2k+1\}$.

Así podemos concluir que C_{2k+1} no es perfecto.

Probaremos que $\chi(\overline{C_{2k+1}}) = k+1$, mientras que $\omega(\overline{C_{2k+1}}) = k$, para todo $k \geq 2$. Tomemos un $k \geq 2$ fijo.

Por un lado, el tamaño de las cliques más grandes de $\overline{C_{2k+1}}$ es k , pues no podemos tomar 2 vértices consecutivos y efectivamente existe un clique de tamaño k formado por los vértices $\{1, 3, \dots, 2k-1\}$. Luego, $\omega(\overline{C_{2k+1}}) = k$.

Por otro lado, notemos que un conjunto independiente de vértices tiene a lo sumo 2 elementos, pues los únicos vértices no adyacentes son los consecutivos y en un conjunto de 3 vértices hay al menos un par que no son consecutivos en la numeración. De esta forma vemos que $\chi(\overline{C_{2k+1}}) \geq k+1$, la igualdad se deduce de que podemos colorear cada uno de los siguientes conjuntos de vértices $\{2i-1, 2i\}$ con $i = 1, 2, \dots, k$ y $\{2k+1\}$ de un color distinto.

Así podemos concluir que $\overline{C_{2k+1}}$ no es perfecto. \square

Dado que los holes y antiholes impares no son grafos perfectos, y al ser la clase de grafos

perfectos una clase hereditaria, podemos afirmar que los grafos perfectos no contienen holes ni antiholes impares como subgrafos inducidos. A partir de esto Berge conjeturó en 1961 que “un grafo es perfecto si y sólo si no contiene holes ni antiholes impares como subgrafos inducidos”. Esta conjetura es aún más fuerte que la enunciada anteriormente y recién pudo ser probada en 2002 por Maria Chudnovsky, Neil Robertson, Paul Seymour y Robin Thomas. Este teorema se conoce como el *teorema fuerte de los grafos perfectos* o *SPGT*, por sus siglas en inglés.

Teorema 2.0.6 (SPGT). [10] Sea G un grafo. G es perfecto si y sólo si no contiene holes ni antiholes impares como subgrafos inducidos.

Decimos que un grafo es *Berge* si no contiene holes ni antiholes impares como subgrafos inducidos. Esta definición nos permite enunciar el teorema anterior como “un grafo es perfecto si y sólo si es Berge”.

La idea de demostración del teorema fuerte de los grafos perfectos (SPGT), si bien es bastante larga y técnica, sigue el siguiente esquema: definir familias básicas de grafos perfectos y probar algunos teoremas de descomposición de forma que todo grafo Berge pertenezca a alguna familia básica o admita una descomposición, además las descomposiciones deben ser tales que un grafo minimalmente imperfecto no admita descomposición alguna. Así, suponiendo que existe un contraejemplo minimal, es decir, un grafo Berge pero no perfecto tal que todo subgrafo inducido es perfecto, dicho grafo no admitirá una descomposición, porque esto contradiría la minimalidad, y esto terminará probando que este pertenece a alguna familia básica donde todos los grafos son perfectos.

En 2005, Maria Chudnovsky, Gérard Cornuéjols, Xinming Liu, Paul Seymour y Kristina Vušković encontraron un algoritmo polinomial que permite reconocer si un grafo es perfecto, basándose en la caracterización dada por el SPGT.

Teorema 2.0.7. [11] Existe un algoritmo con complejidad $\mathcal{O}(n^9)$ que determina si un grafo de n vértices es perfecto.

2.1. Grafos de Mycielski

En esta sección definiremos una familia de grafos tal que la diferencia entre el número clique y el número cromático es arbitrariamente grande.

Dado un grafo G con vértices $\{v_1, \dots, v_n\}$, la construcción de Mycielski da como resultado un nuevo grafo G' obtenido de la siguiente forma:

- agregamos los vértices en $U = \{u_1, \dots, u_n\}$ más un vértice w ,
- hacemos a cada u_i adyacente a los vecinos de v_i en G y
- hacemos w adyacente a cada vértice de U .

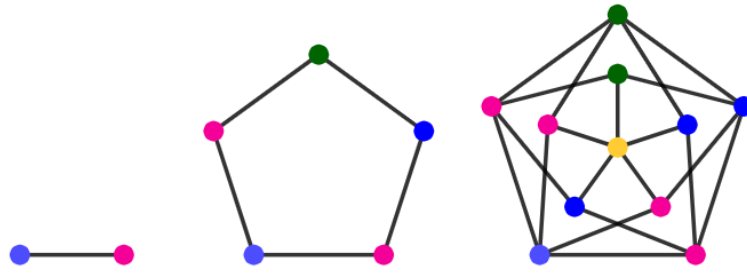


Figura 2.4: Construcción de Mycielski comenzando en K_2 .

Mycielski probó que dado G un grafo tal que $\omega(G) = 2$ y $\chi(G) = k$, si G' se obtiene aplicando la construcción de Mycielski a G entonces $\omega(G') = 2$ y $\chi(G') = k + 1$. Por lo tanto, la diferencia entre el número cromático y el número clique puede ser arbitrariamente grande.

Si iteramos la construcción de Mycielski comenzando en K_2 (el grafo completo de 2 vértices), obtenemos una familia de grafos $\{G_k\}_{k \geq 2}$ tal que $\omega(G_k) = 2$ y $\chi(G_k) = k$, además el número de vértices crece exponencialmente en k . Este ejemplo muestra que la diferencia entre el número cromático y el número clique puede ser arbitrariamente grande, en particular, que no contiene triángulos puede tener número cromático arbitrariamente grande.

Capítulo 3

Grafos clique-perfectos

Un conjunto de vértices de un grafo G se denomina *conjunto transversal de las cliques* si interseca a todas las cliques del grafo. Se denota $\tau_C(G)$ al tamaño de un conjunto transversal de las cliques de G mínimo.

Un *conjunto independiente de cliques* es un subconjunto de cliques disjuntas dos a dos. Se denota $\alpha_C(G)$ al tamaño de un conjunto independiente de cliques de G máximo.

Notemos que para cualquier grafo G , se verifica $\alpha_C(G) \leq \tau_C(G)$, pues cliques disjuntas deben ser cubiertas por vértices distintos en un conjunto transversal. Hay familias de grafos en las cuales la diferencia entre estos parámetros es arbitrariamente grande, como veremos en la sección 3.1.

Esto motiva la definición de los grafos clique-perfectos, dada por Venkatesan Guruswami y C. Pandu Rangan en 2000, a partir de la igualdad entre estos parámetros [14].

Definición 3.0.1. Un grafo G se dice *clique-perfecto* si $\alpha_C(H) = \tau_C(H)$ para todo subgrafo inducido H de G .

La clase de grafos clique-perfectos es hereditaria, por el mismo motivo que lo es la clase de grafos perfectos.

Veamos qué relación hay entre los grafos clique-perfectos y los grafos perfectos estudiados anteriormente, según el SPGT, esto es equivalente a ver si los holes y antiholes impares son o no clique-perfectos.

Lema 3.0.2. C_{2k+1} con $k \geq 2$ no es clique-perfecto.

Demostración. Probaremos que $\alpha_C(C_{2k+1}) = k$, mientras que $\tau_C(C_{2k+1}) = k + 1$. Sea $k \geq 2$ fijo. Notemos que en este caso las cliques son aristas, pues C_{2k+1} no contiene triángulos ni vértices aislados.

Por un lado, vemos que un conjunto independiente de cliques (es decir, de aristas) tiene a lo sumo tamaño k , pues si tomamos un conjunto de m aristas independientes de C_{2k+1} tendremos $2m$ vértices que son extremos de aristas del conjunto, pues aristas independientes no tienen

extremos en común y como el grafo tiene $2k + 1$ vértices, $2m \leq 2k + 1$ lo que implica que $m \leq k$. Como el conjunto de aristas $\{(1, 2), (3, 4), \dots, (2k - 1, 2k)\}$ es independiente y tiene tamaño k , queda probado que $\alpha_C(C_{2k+1}) = k$.

Por otro lado, un conjunto transversal de las cliques de C_{2k+1} , es un cubrimiento de las aristas por vértices. Como todo vértice tiene grado exactamente 2, si tomamos un conjunto de m vértices, estaremos cubriendo a lo sumo $2m$ aristas, para cubrir las $2k + 1$ aristas necesitamos que $2m \geq 2k + 1$ y por lo tanto, un conjunto transversal de cliques tiene tamaño por lo menos $k + 1$. Como el conjunto de vértices $\{1, 3, 5, \dots, 2k + 1\}$ cubre todas las aristas y tiene $k + 1$ elementos, tenemos que $\tau_C(C_{2k+1}) = k + 1$.

De esta forma podemos concluir que C_{2k+1} no es clique perfecto. \square

Lema 3.0.3. C_{2k} con $k \geq 1$ es clique-perfecto.

Demostración. En C_{2k} , las cliques son las aristas y además, es bipartito. Sea H un subgrafo inducido de C_{2k} , que resulta bipartito (es decir, su número cromático es menor o igual a 2), por el teorema 7.1.1 tenemos que el cardinal máximo de un matching (es decir, un conjunto independiente de aristas), que en este caso es $\alpha_C(H)$, coincide con el cardinal mínimo de un cubrimiento de las aristas por vértices, que en este caso es $\tau_C(H)$. \square

En el caso de los antiholes, se conoce el siguiente resultado que probó Bruce Reed en el 2000, aunque no fue publicado, se encuentra mencionado en [12]. La demostración del lema que sigue es propia.

Lema 3.0.4. \overline{C}_n con $n \geq 5$ es clique-perfecto si y sólo si $n \equiv 0 \pmod{3}$.

Demostración. Sea \overline{C}_n un antihole de longitud $n \geq 5$, separaremos la prueba del teorema en 3 casos según el resto de n módulo 3.

Pensaremos a los vértices de \overline{C}_n numerados del 1 al n , de forma tal que dos vértices son adyacentes si y sólo si no son consecutivos módulo n .

Caso $n = 3k + 1$:

Notemos que el tamaño del clique más chico de \overline{C}_{3k+1} es $k + 1$. Sea X un subconjunto de $V(\overline{C}_{3k+1})$ con m vértices, que inducen un grafo completo. Si agrupamos los vértices de \overline{C}_{3k+1} en grupos de 3 consecutivos, obtenemos k grupos de 3 vértices y 1 grupo de 1 vértice solitario. Podemos asumir que el vértice solitario pertenece a X , pues se puede elegir un vértice de X y agrupar los $3k$ vértices restantes en grupos de 3 vértices consecutivos cada uno de la única forma posible.

Entonces, los otros $m - 1$ vértices de X están repartidos en k grupos, si $m - 1 < k$ hay alguno de los grupos que no contiene ninguno de los vértices de X . Pero en este caso notemos que se podría agregar el vértice central de este grupo de 3 al conjunto de vértices X y tendríamos así

un conjunto de vértices más grande que induce un grafo completo. Esto nos dice que $m - 1 \geq k$ y por lo tanto, el tamaño mínimo de una clique en este grafo es $k + 1$.

Como cliques independientes no tienen vértices en común, tomemos W un conjunto independiente de cliques de $\overline{C_{3k+1}}$, entonces

$$\sum_{w \in W} \text{tam}(w) \leq 3k + 1$$

donde $\text{tam}(w)$ denota el tamaño de la clique w . Además, como las cliques tienen tamaño por lo menos $k + 1$, podemos acotar esa suma inferiormente por $|W| \cdot (k + 1)$ donde $|W|$ es el tamaño del conjunto W . De esta forma tenemos que

$$|W| \cdot (k + 1) \leq 3k + 1$$

lo que implica que $|W| \leq 2$. Es decir, $\alpha_c(\overline{C_{3k+1}}) \leq 2$.

Por otro lado, veamos que $\tau_c(\overline{C_{3k+1}}) > 2$, es decir, que no existen 2 vértices que cubran todas las cliques. Tomemos 2 vértices v, w , vamos a reenumerar los vértices de forma tal que v, w resulten ambos $\not\equiv 2 \pmod{3}$ y que v, w no sean el vértice $3k + 1$.

- Si $v - w \equiv 0 \pmod{3}$, numeramos de modo que $v = 3$, entonces $w \equiv 0 \pmod{3}$.
- Si $v - w \equiv 1 \pmod{3}$, numeramos de modo que $v = 1$, entonces $w \equiv 0 \pmod{3}$.
- Si $v - w \equiv 2 \pmod{3}$, numeramos de modo que $w = 1$, entonces $v \equiv 0 \pmod{3}$.

En esta nueva numeración, el conjunto formado por los vértices $\equiv 2 \pmod{3}$ y el vértice $3k + 1$ induce una clique que no está cubierta por el conjunto $\{v, w\}$. Esto prueba que $\tau_c(\overline{C_{3k+1}}) > 2$.

Luego, $\overline{C_{3k+1}}$ no es clique perfecto.

Caso $n = 3k + 2$:

Es análogo al caso anterior.

Caso $n = 3k$:

Para ver que $\overline{C_{3k}}$ es clique-perfecto, sea H un subgrafo inducido, queremos probar que se satisface que $\alpha_c(H) = \tau_c(H)$.

Tomamos la partición de los vértices del subgrafo H , que se corresponden con enteros módulo $3k$ según la numeración inducida de $\overline{C_{3k}}$, que consiste de los conjuntos maximales con la propiedad de que los restos que contienen son consecutivos módulo $3k$. Es decir, $\bigcup_{A \in \mathcal{G}} A = V(H)$ y cada $A \in \mathcal{G}$ es un conjunto de vértices consecutivos módulo $3k$ maximal con dicha propiedad.

- **Si $H = \overline{C_{3k}}$.**

Podemos separar los vértices según su resto módulo 3 en los conjuntos B_0, B_1, B_2 , cada uno de estos conjuntos induce un grafo completo en $\overline{C_{3k}}$ y es maximal con esa propiedad, es decir, los subgrafos inducidos por B_0, B_1 y B_2 son cliques disjuntas de $\overline{C_{3k}}$, lo que prueba que $\alpha_c(\overline{C_{3k}}) \geq 3$.

Si tomamos 3 vértices $v, v + 1, v + 2$ que son consecutivos en $\overline{C_{3k}}$, veamos que todo clique de $\overline{C_{3k}}$ debe contener a alguno de ellos. Dado un conjunto de vértices X que induce un grafo completo en $\overline{C_{3k}}$, si no contiene a ninguno de los vértices $v, v + 1, v + 2$, entonces $X \cup \{v + 1\}$ también induce un grafo completo, por ser $v + 1$ vecino de todos los vértices de X , pues los únicos vértices de $\overline{C_{3k}}$ que no son vecinos a $v + 1$ son v y $v + 2$, que sabemos que no están en X . Esto implica que $\tau_c(\overline{C_{3k}}) \leq 3$.

Así tenemos que $3 \leq \alpha_c(\overline{C_{3k}}) \leq \tau_c(\overline{C_{3k}}) \leq 3$, pues la desigualdad $\alpha_c(\overline{C_{3k}}) \leq \tau_c(\overline{C_{3k}})$ vale siempre y por lo tanto, $\alpha_c(\overline{C_{3k}}) = \tau_c(\overline{C_{3k}}) = 3$.

■ **Si todos los grupos tienen 2 o más elementos.**

Para cada grupo $A \in \mathcal{G}$ de vértices consecutivos, particionamos A en dos conjuntos disjuntos A_0, A_1 de forma que vértices consecutivos según la numeración original módulo $3k$ estén en conjuntos distintos, de esta forma, $A_0 \cup A_1 = A$ y cada uno de los conjuntos A_i induce un conjunto completo maximal en subgrafo de H inducido por los vértices A . Notar que los conjuntos A_0, A_1 son no vacíos ya que $|A| \geq 2$ para todo $A \in \mathcal{G}$.

Consideramos los siguientes conjuntos de vértices de H ,

$$\mathcal{B}_i = \bigcup_{A \in \mathcal{G}} A_i \quad \text{para } i = 0, 1$$

que inducen cliques disjuntas en H , lo que prueba que $\alpha_c(H) \geq 2$.

Tomemos v vértice de H tal que $v + 1$ también es un vértice de H , pero $v - 1$ no lo es, esto es posible ya que H no es todo el grafo $\overline{C_{3k}}$. Veamos que toda clique de H debe contener a alguno de los vértices $v, v + 1$. Dado un conjunto de vértices X que induce un grafo completo en H , que no contiene a ninguno de los vértices $v, v + 1$, resulta que $X \cup \{v\}$ también induce un grafo completo en H , pues el único no vecino de v en H es $v + 1$, dado que elegimos v de forma que $v - 1$ no esté en H . Esto prueba que $\tau_c(H) \leq 2$.

Como la desigualdad $\alpha_c(H) \leq \tau_c(H)$ vale siempre, tenemos que $2 \leq \alpha_c(H) \leq \tau_c(H) \leq 2$, y por lo tanto, $\alpha_c(H) = \tau_c(H) = 2$.

■ **Si algún grupo tiene 1 solo elemento.**

Toda clique de H contiene al vértice que forma el grupo de 1 elemento, por ser vecino a todos los otro vértices de H . Entonces $\tau_c(H) = 1$ y como siempre $\alpha_c(H) \geq 1$, tenemos que $\alpha_c(H) = \tau_c(H) = 1$.

Esto prueba que todo subgrafo H de $\overline{C_{3k}}$ cumple la igualdad $\alpha_c(H) = \tau_c(H)$ y, por lo tanto, $\overline{C_{3k}}$ es clique-perfecto. \square

A diferencia de lo mencionado para los grafos perfectos, en el caso de los grafos clique-perfectos, no se conoce aún una lista completa de subgrafos prohibidos minimales, ni la complejidad del problema de reconocimiento.

3.1. Familias de grafos no clique-perfectos

Otra pregunta que resulta natural es si la diferencia entre el tamaño mínimo de un conjunto transversal de las cliques y el tamaño máximo de un conjunto independiente de cliques puede ser arbitrariamente grande. En esta sección, presentaremos dos familias de grafos que muestran que la diferencia entre estos dos parámetros puede ser grande.

Comencemos con la familia de grafos contruida por Guillermo Durán, Min Chih Lin y Jayme Szwarcfiter en [12]. Dado $k \geq 1$, F_k es el grafo obtenido de la siguiente construcción: los vértices de F_k pueden separarse en una clique K_{2k+1} y un conjunto independiente I_l con $l = \binom{2k+1}{k+1}$ vértices, cada uno de los vértices de I_l es adyacente a uno de los subconjuntos de $k+1$ vértices de K_{2k+1} , de forma tal que a vértices distintos les corresponden subconjuntos distintos. Luego, en [12] prueban que esta familia de grafos $\{F_k\}_{k \geq 1}$ verifica que $\alpha_c(F_k) = 1$ y $\tau_c(F_k) = k+1$, además el número de vértices de F_k crece exponencialmente en k .

Por su lado, Lakshmanan S. y Vijayakumar encontraron otra familia de grafos $\{H_k\}_{k \geq 2}$ tal que $\alpha_c(H_k) = 2k+1$ y $\tau_c(H_k) = 3k+1$, pero H_k tiene solo $5k+2$ vértices, es decir, la cantidad de vértices es lineal en función de k . Esto aparece mencionado en [9].

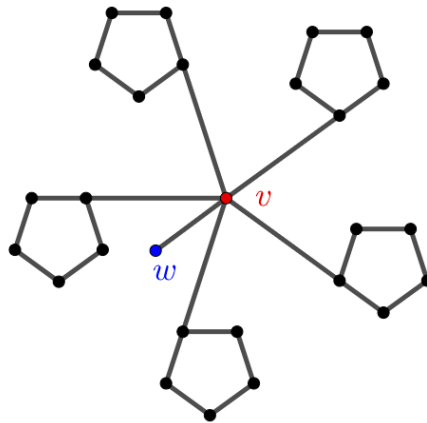


Figura 3.1: Ejemplo H_5 .

Dado $k \geq 1$, notamos H_k al grafo obtenido de la siguiente construcción. Los vértices de H_k pueden separarse en k holes de tamaño 5 y otros dos vértices v, w . Cada uno de los holes está unido al vértice v por una única arista, además, v y w son adyacentes. Esta construcción nos da un grafo con $5k+2$ vértices. En la figura 3.1 se puede ver el grafo H_5 , compuesto por 5 ciclos de longitud 5 unidos al vértice central v , y otro vértice w que es únicamente adyacente a v .

Las cliques de estos grafos son aristas, pues no hay triángulos ni vértices aislados. Un conjunto independiente de arista tiene a lo sumo 2 aristas de cada uno de los holes (que son disjuntos), y 1 arista de las adyacentes al vértice v , y efectivamente hay un ejemplo con dicha cantidad, por lo tanto, $\alpha_c(H_k) = 2k+1$.

Un cubrimiento por vértices de las aristas tiene por lo menos 3 vértices de cada uno de los holes, que son disjuntos, y alguno de los vértices v o w , para cubrir la arista (v, w) , y efectivamente hay un ejemplo con dicha cantidad de vértices, por lo tanto, $\tau_c(H_k) = 3k+1$.

Capítulo 4

Grafos coordinados

Un *coloreo de cliques* es una asignación de colores a las cliques de forma tal que a todo par de cliques que tienen al menos un vértice en común, se les asignan colores distintos. Se define $F(G)$ como la cantidad mínima de colores que son necesarios para colorear las cliques de un grafo G .

Por otro lado, dado G un grafo y v un vértice de G , llamamos $m_G(v)$ a la cantidad de cliques de G a las que pertenece el vértice v . Se define $M(G) = \max\{m_G(v) \mid v \in V(G)\}$, es decir, $M(G)$ es la cantidad máxima de cliques que tienen un vértice en común.

Notemos que para cualquier grafo G , se verifica $M(G) \leq F(G)$, pues dado un vértice $w \in V(G)$ tal que $M(G) = m_G(w)$, todo coloreo de las cliques de G debe asignar colores distintos a las $M(G)$ cliques a las que pertenece w , de ahí que el coloreo debe tener al menos $M(G)$ colores distintos.

Se define la clase de grafos coordinados como la clase hereditaria de grafos para los cuales vale la igualdad entre los parámetros F y M , de manera análoga a la definición de los grafos perfectos y clique-perfectos que dimos en los capítulos anteriores. La noción de grafos coordinados fue definida por primera vez por Marina Groshaus en [13].

Definición 4.0.1. Un grafo G se dice *coordinado* si $M(H) = F(H)$ para todo subgrafo inducido H de G .

Veamos cómo se relacionan los grafos coordinados con los grafos perfectos, para eso veamos si los holes y antiholes son coordinados o no.

Lema 4.0.2. [13] C_{2k+1} no es coordinado, para todo $k \geq 2$.

Demostración. En C_{2k+1} , las cliques son las aristas y como $\deg_{C_{2k+1}}(v) = 2$ para todo vértice v , sabemos que $M(C_{2k+1}) = 2$.

Veamos que no se puede separar las aristas de C_{2k+1} en 2 conjuntos independientes. Notemos que aristas independientes no comparten vértices, como cada arista cubre 2 vértices y el grafo

tiene $2k + 1$, cada conjunto independiente de aristas puede tener a lo sumo k elementos. Esto dice que necesitamos al menos 3 conjuntos independientes de aristas, es decir, $F(C_{2k+1}) \geq 3$. Por lo tanto, C_{2k+1} no es coordinado. \square

Lema 4.0.3. [13] C_{2k} es coordinado, para todo $k \geq 1$.

Demostración. En C_{2k} , las cliques son las aristas y además, es bipartito. Sea H un subgrafo inducido de C_{2k} , que resulta bipartito (es decir, su número cromático es menor o igual a 2), por el teorema 7.1.2 sabemos que el grado máximo de H , que en este caso es $M(H)$, coincide con el cardinal mínimo de un cubrimiento de las aristas por matchings (es decir, conjuntos independientes de aristas), que en este caso es $F(H)$.

Por lo tanto, $M(H) = F(H)$ para todo H subgrafo inducido de C_{2k} . \square

Flavia Bonomo, Guillermo Durán y Marina Groshaus probaron en [3] el siguiente lema sobre los antiholes coordinados.

Lema 4.0.4. [3] \overline{C}_n no es coordinado si $n \geq 5$ y $n \neq 6$.

Del SPGF y de los lemas 4.0.2 y 4.0.4 anteriores, se deduce lo siguiente.

Teorema 4.0.5. [3] Si G es coordinado entonces G es perfecto.

Se sabe que el problema de reconocimiento de grafos coordinados en general es NP -hard, esto fue probado por Francisco Soulignac y Gabriel Sueiro en [25], aunque estudiaremos en el capítulo 7 algunas clases de grafos para las cuales podemos afirmar que este problema es polinomial.

Por otro lado, tampoco se conoce una lista completo de subgrafos prohibidos minimales para los grafos coordinados. Con el objetivo de mostrar que hay demasiados grafos minimalmente no-coordinados como para que exista una clasificación sencilla de esta clase de grafos por subgrafos inducidos prohibidos, Soulignac y Sueiro construyeron en [24] una familia infinita de grafos minimalmente no-coordinados, donde la cantidad de vértices y aristas crece exponencialmente, pero todos tienen $M = 3$.

Capítulo 5

Grafos neighborhood-perfectos

Se llama *vecindad* o *neighborhood* de un vértice v de un grafo G al subgrafo inducido por v y todos sus vecinos, lo notamos $N_G(v)$.

Un *neighborhood-covering set* de un grafo G es un subconjunto \mathcal{V} de vértices de G tal que cada arista de G pertenece a la vecindad de alguno de los vértices del conjunto \mathcal{V} , es decir, tal que para toda arista $e \in E(G)$, existe $v \in \mathcal{V}$ tal que e pertenece a $N_G(v)$. Se define el *neighborhood-covering number* como el tamaño mínimo de un neighborhood-covering set, y se denota $\rho_N(G)$. Observar que los vértices aislados no afectan, es decir, si G grafo y X el conjunto de vértices aislados de G , $\rho_N(G - X) = \rho_N(G)$.

Un par de aristas $\{e, e'\}$ se dice *neighborhood-independiente* si no existe $v \in V(G)$ tal que $N_G(v)$ contenga a ambas. Un *conjunto neighborhood-independiente* es un conjunto de aristas del grafo que son neighborhood-independientes dos a dos. Se denota $\alpha_N(G)$ al tamaño máximo de un conjunto neighborhood-independiente.

Notar que la desigualdad $\alpha_N(G) \leq \rho_N(G)$ vale para todo grafo G , pues cada arista de un conjunto neighborhood-independiente deben ser cubierta por un vértice distinto de un neighborhood-covering set.

Podemos definir la clase de grafos neighborhood-perfectos como la clase hereditaria de grafos para los cuales vale la igualdad entre los parámetros α_N y ρ_N , de manera análoga a la definición de los grafos perfectos, clique-perfectos y coordinados que dimos en los capítulos anteriores. La primera definición de esta clase de grafos fue dada por Jenö Lehel y Zsolt Tuza en [17].

Definición 5.0.1. Un grafo G se dice *neighborhood-perfecto* si $\alpha_N(H) = \rho_N(H)$ para todo subgrafo inducido H de G .

Veamos qué relación hay entre los grafos neighborhood-perfectos y los grafos perfectos, para eso estudiaremos si los holes y antiholes impares son o no neighborhood-perfectos.

Lema 5.0.2. C_{2k+1} con $k \geq 2$ no es neighborhood-perfecto.

Demostración. Para ver que no es neighborhood perfecto, veamos que $\rho_N(C_{2k+1}) = k + 1$ y

$$\alpha_N(C_{2k+1}) = k.$$

Como todo vértice v tiene grado 2 y a su vez, los vértices vecinos a v no son adyacentes entre sí, entonces $N_{C_{2k+1}}(v)$ contiene exactamente 2 aristas. Luego, si un neighborhood-covering set tiene tamaño m , la cantidad de aristas cubiertas es a lo sumo $2 \cdot m$ y por lo tanto, $2 \cdot m \geq 2k + 1$, lo que implica que $m \geq k + 1$. Además, el conjunto de los vértices impares $\{1, 3, \dots, 2k + 1\}$ cubre todas las aristas del grafo. Esto nos permite concluir que $\rho_N(C_{2k+1}) = k + 1$.

Como cada arista pertenece a la vecindad de exactamente 2 vértices (sus extremos), si un conjunto neighborhood independiente tiene tamaño m , la cantidad de vértices que tienen a alguna de las aristas del conjunto en su vecindad es $2m$, pero como si un vértice es extremo de 2 aristas a la vez, el conjunto no será independiente, por lo tanto, $2m \leq 2k + 1$ lo que implica que $m \leq k$. Además, el conjunto de aristas $\{(1, 2), (3, 4), \dots, (2k - 1, 2k)\}$ es neighborhood independiente y tiene k elementos. Por lo tanto, $\alpha_N(C_{2k+1}) = k$.

Esto prueba que C_{2k+1} no es neighborhood-perfecto. \square

Lema 5.0.3. \overline{C}_n no es neighborhood-perfecto si $n \geq 7$.

Demostración. Vamos a pensar que los vértices de \overline{C}_n están numerados del 1 al n de forma que vértices consecutivos módulo n si y sólo si no son adyacentes. Separemos la demostración de este teorema en dos casos, $n \in \{7, 8\}$ y $n \geq 9$.

Caso $n \in \{7, 8\}$

Comencemos probando que $\rho_N(\overline{C}_n) = 3$. Veamos que el conjunto $\{l - 1, l, l + 1\}$ de 3 vértices consecutivos en \overline{C}_n es un neighborhood-covering set, para cualquier $l \in \{1, \dots, n\}$. Sea (i, j) una arista de \overline{C}_n . Si $i \in \{l - 1, l, l + 1\}$ o $j \in \{l - 1, l, l + 1\}$, entonces el conjunto $\{l - 1, l, l + 1\}$ cubre la arista (i, j) . Si no, podemos decir que i, j son vecinos de l , pues los únicos vértices que no son vecinos a l son $l - 1, l$ y $l + 1$, entonces $(i, j) \in N_{\overline{C}_n}(l)$.

Basta ver que no hay un neighborhood-covering set de tamaño 2. Sea $\{v, w\}$ un conjunto de dos vértices de \overline{C}_n , veamos que siempre hay una arista que no está cubierta por el conjunto $\{v, w\}$. Si v y w no son consecutivos, entonces la arista $v + 1, w + 1$ no está cubierta por el conjunto $\{v, w\}$, pues $v + 1$ no es adyacente a v y $w + 1$ no es adyacente a w . Si v y w son consecutivos, podemos asumir sin pérdida de la generalidad que $w \equiv v + 1$ (mód n), en este caso la arista $(v - 1, w + 1)$ no está cubierta por el conjunto $\{v, w\}$ pues $v - 1$ no es adyacente a v y $w + 1$ no es adyacente a w .

Con esto queda probado que $\rho_N(\overline{C}_n) = 3$.

Para poder afirmar que \overline{C}_n no es neighborhood-perfecto, debemos ver que $\alpha_N(\overline{C}_n) < 3$. En particular, veremos que $\alpha_N(\overline{C}_n) = 2$.

Sean e, e', e'' aristas de \overline{C}_n , veamos que no pueden ser neighborhood independientes.

- Si dos de estas aristas tienen un extremo en común, las aristas que comparten un vértice pertenecen ambas a la vecindad de dicho vértice.

- Si no comparten extremos, hay 1 o 2 vértices del grafo que no son extremos de ninguna de las aristas. En el caso $n = 7$, llamamos v a dicho vértice, mientras que en el caso $n = 8$, debemos elegir v uno de los dos vértices que no son extremos de aristas de forma tal que $v + 1$ sí sea extremo de alguna de las aristas. Veamos que $N_{\overline{C_n}}(v + 1)$ contiene a dos de las aristas e, e', e'' . Sabemos que una de las aristas pertenece a la vecindad de $v + 1$, por tener a $v + 1$ como uno de los extremos, supongamos *spdg* que esa arista es e . Además, hay una de las aristas que no tiene como extremos a $v, v + 1$ ni $v + 2$, supongamos *spdg* que esa arista es e' . Luego, e, e' pertenecen a $N_{\overline{C_n}}(v + 1)$.

Por lo tanto, un conjunto neighborhood independiente de aristas tiene a lo sumo 2 elementos. Para ver que $\alpha_N(\overline{C_n}) = 2$ basta tomar las aristas $(1, 5)$ y $(2, 6)$, ya que

- para $n = 7$, la arista $(1, 5)$ pertenece a la vecindad de los vértices 1, 3 y 5, mientras que la arista $(2, 6)$ pertenece a la vecindad de los vértices 2, 4 y 6.
- para $n = 8$, la arista $(1, 5)$ pertenece a la vecindad de los vértices 1, 3, 5 y 7, mientras que la arista $(2, 6)$ pertenece a la vecindad de los vértices 2, 4, 6 y 8.

En ambos casos, no hay ningún vértice que tenga en su vecindad a ambas aristas, lo que prueba que estas forman un conjunto neighborhood-independiente.

Así queda probado que $\overline{C_n}$ no es neighborhood-perfecto para $n = 7$ u 8, pues en ambos casos $\rho_N(\overline{C_n}) = 3$ y $\alpha_N(\overline{C_n}) = 2$.

Caso $n \geq 9$

En este caso, el subgrafo de $\overline{C_n}$ inducido por el conjunto vértices $\{1, 2, 4, 5, 7, 8\}$ es un $\overline{3K_2}$. Basta entonces con probar que este grafo no es neighborhood-perfecto.

Veamos que $\overline{3K_2}$ no es neighborhood-perfecto. Llamemos v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 y v_6 a los vértices de $3K_2$, con $\{v_1, v_2\}, \{v_3, v_4\}$ y $\{v_5, v_6\}$ los conjuntos de vértices que inducen los K_2 .

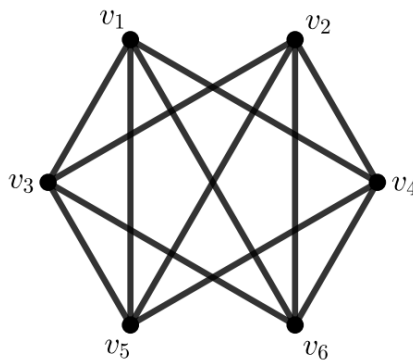


Figura 5.1: Grafo $\overline{3K_2}$.

Comencemos calculando el tamaño mínimo de un neighborhood covering set. Dado un vértice $v_i \in V(\overline{3K_2})$, la vecindad $N_{\overline{3K_2}}(v_i)$ contiene a todas las aristas del grafo salvo 4, que son las 4 aristas adyacentes al único vértice que no es vecino de v_i , que es v_{i+1} o v_{i-1} según la paridad de i . Por lo tanto, el $\rho_N(\overline{3K_2}) = 2$ y se realiza tomando las vecindades de 2 vértices no adyacentes de $\overline{3K_2}$, por ejemplo, v_1 y v_2 .

Calculemos ahora el tamaño máximo de un conjunto neighborhood-independiente. Sean e, e' aristas de $\overline{3K_2}$. Como la vecindad del vértice v_i contiene a todas las aristas del grafo, salvo las 4 que son adyacentes al único vértice no adyacente a v_i , si tomamos v_i no es extremo de ninguna de las aristas, resulta que e, e' pertenecen a $N_{\overline{3K_2}}(v_{i+1})$, si i es impar, o pertenecen a $N_{\overline{3K_2}}(v_{i-1})$, si i es par. Luego, para todo par de aristas de $\overline{3K_2}$ existe una vecindad que las contiene, así podemos afirmar que $\alpha_N(\overline{3K_2}) = 1$.

Esto prueba que $\overline{3K_2}$ no es neighborhood-perfecto, lo que implica que $\overline{C_n}$ no es neighborhood-perfecto si $n \geq 9$. \square

Por el lema 5.0.2, los holes impares no son neighborhood-perfectos y, por el lema 5.0.3, sabemos que los antiholes impares tampoco lo son, pues $\overline{C_5}$ coincide con C_5 . Según el SPGT, esto basta para afirmar lo siguiente.

Teorema 5.0.4. Si G es neighborhood-perfecto, entonces es perfecto.

En el caso de los grafos neighborhood-perfectos, tampoco se conoce aún una lista completa de subgrafos prohibidos minimales, ni la complejidad del problema de reconocimiento.

Capítulo 6

Grafos CHH y K-perfectos

En este capítulo vamos a definir a otras dos importantes clases de grafos: los grafos clique-Helly hereditarios (CHH) y los grafos K -perfectos. Estas clases de grafos, a diferencia de las mencionadas en los capítulos anteriores, no se definen mediante la igualdad de parámetros. Sin embargo, las propiedades y caracterizaciones conocidas sobre estas dos clases de grafos nos permitirán caracterizar las clases de grafos perfectos, clique-perfectos, coordinados y neighborhood-perfectos dentro de las clases de grafos que presentaremos en el capítulo 7.

6.1. Grafos clique-Helly hereditarios

Se dice que una familia de conjuntos C tiene la *propiedad de Helly* si para toda subfamilia C' tal que todo par de conjuntos de C' tiene intersección no vacía, vale que la intersección de todos los conjuntos de C' es no vacía.

Un grafo G se dice *clique-Helly* si la familia de cliques de G tiene la propiedad de Helly. Observemos que ser clique-Helly no es una propiedad hereditaria. Como se puede ver en la figura 6.1, al ser el rojo un vértice universal, todo clique del grafo contiene a este vértice y por lo tanto, el grafo es clique-Helly. Mientras que, si consideramos el subgrafo inducido por los vértices negros, obtenemos un grafo que tiene 4 cliques, con intersección no vacía dos a dos pero que no tienen vértices en común, luego, este subgrafo inducido no es clique-Helly.

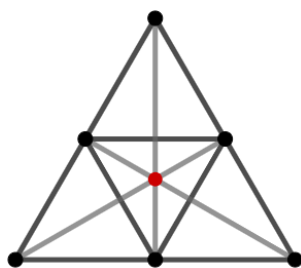


Figura 6.1: Grafo clique-Helly pero no clique-Helly hereditario.

Esto motiva la siguiente definición.

Definición 6.1.1. Un grafo G se dice *clique-Helly hereditario (CHH)* si todo subgrafo inducido es clique-Helly.

En [22], Prisner mostró una caracterización completa de los grafos clique-Helly hereditarios por subgrafos inducidos prohibidos.

Teorema 6.1.2. [22] Un grafo G es clique-Helly hereditario si y sólo si no tiene 0, 1, 2, 3–pirámides como subgrafos inducidos.

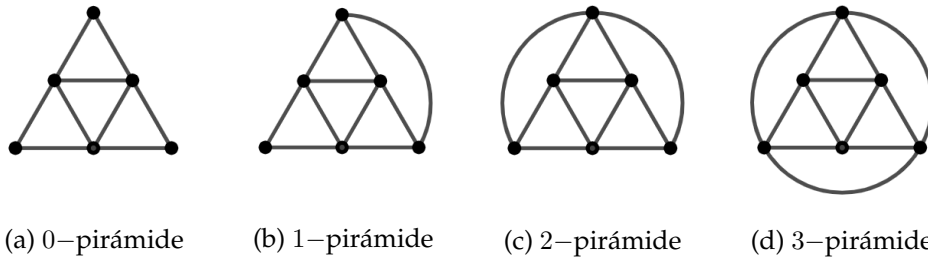


Figura 6.2: Subgrafos inducidos prohibidos en grafos CHH.

A partir del teorema anterior, Min Chih Lin y Jayme L. Szwarcfiter propusieron en [19] el siguiente algoritmo para el reconocimiento de grafos clique-Helly hereditarios.

Corolario 6.1.3. [19] Existe un algoritmo de reconocimiento de grafos clique-Helly hereditarios con complejidad $\mathcal{O}(nm + m^2)$, donde n es la cantidad de vértices del grafo y m es la cantidad de aristas.

Demostración. En primer lugar, veamos una caracterización similar a la anterior de los grafos CHH, que se deduce del teorema 6.1.2.

Dado G un grafo y $v \in V(G)$, recordemos que $N_G(v)$ denota la vecindad de v , es decir, el subgrafo de G inducido por v y todos sus vecinos. Dada $(u, v) \in E(G)$, definimos $N(uv)$ como el conjunto de vértices que son vecinos de los vértices u y v simultáneamente, es decir,

$$N(uv) = (V(N_G(u)) - \{u\}) \cap (V(N_G(v)) - \{v\})$$

y $U(uv)$ al conjunto de vértices universales de $G[N(uv)]$.

Observación: Un grafo G es clique-Helly hereditario si y sólo si $c \in U(ab)$, o $b \in U(ac)$, o $a \in U(bc)$, para todo triángulo $a, b, c \in V(G)$.

Por el teorema 6.1.2, basta probar que, G no contiene 0, 1, 2, 3–pirámides como subgrafos inducidos si y sólo si $c \in U(ab)$, o $b \in U(ac)$, o $a \in U(bc)$, para todo triángulo $a, b, c \in V(G)$.

\implies) Supongamos que existen $a, b, c \in V(G)$ que forman un triángulo, tales que $c \notin U(ab)$, $b \notin U(ac)$ y $a \notin U(bc)$. Notemos que $N(ab) - \{c\} \neq \emptyset$, pues si c fuera el único elemento en $N(ab)$, sería universal en $G[N(ab)]$, entonces sabemos que debe existir otro vértice $c' \in N(ab)$ que no es adyacente a c , análogamente podemos tomar $b' \in N(ac)$ y $a' \in N(bc)$, tales que b' no es adyacente a c y a' no es adyacente a a .

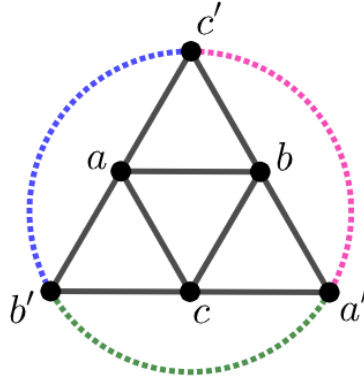


Figura 6.3: Los vértices a, b, c, a', b', c' forman una pirámide.

De esta forma, el conjunto de vértices $\{a, b, c, a', b', c'\}$ induce en G una 0, 1, 2 o 3-pirámide dependiendo de las aristas que haya entre a', b' y c' . Lo que contradice que G sea CHH.

\Leftarrow) Supongamos que G contiene una 0, 1, 2 o 3-pirámide, inducida por el conjunto de vértices $\{u, v, w, u', v', w'\}$, donde $\{u, u'\}$, $\{v, v'\}$ y $\{w, w'\}$ las parejas de vértices no adyacentes y u', v', w' los vértices que son adyacentes entre sí dependiendo de si es una 0, 1, 2 o 3-pirámide. De esta forma, los vértices u, v, w inducen un triángulo en G , que satisface que $u \notin U(vw)$, pues $u' \in N(vw)$ pero u no es adyacente a u' , análogamente se satisface que $v \notin U(uw)$ y $w \notin U(uv)$. Lo cual contradice la hipótesis.

A partir de esta observación, podemos implementar el siguiente algoritmo de reconocimiento:

IN: Un grafo G .

OUT: Informa si G es CHH o no.

1. Calcular $U(ab)$ para cada arista $(a, b) \in E(G)$.
2. Para cada triángulo con vértices $a, b, c \in V(G)$, hacer
 3. Si $a \notin U(bc)$, $b \notin U(ac)$ y $c \notin U(ab)$, entonces
 4. Indicar que G no es CHH y terminar.
 5. Indicar que G es CHH.

Tanto $N(ab)$ como $U(ab)$ pueden calcularse para toda arista (a, b) en $\mathcal{O}(m^2)$, esto dice que el paso 1. del algoritmo puede realizarse en $\mathcal{O}(m^2)$ operaciones. La cantidad de triángulos de un grafo se acota por nm y verificar si un vértice pertenece a algún conjunto dado puede hacerse

en tiempo constante, así podemos decir que los pasos **2.**, **3.** y **4.** pueden realizarse en $\mathcal{O}(nm)$. Así probamos que la complejidad del algoritmo propuesto es $\mathcal{O}(nm + m^2)$. \square

Veamos ahora qué relación hay entre los grafos CHH y las clases de grafos mencionadas anteriormente: perfectos, clique-perfectos, coordinados y neighborhood-perfectos.

Lema 6.1.4. [13] Todo grafo G clique-perfecto y clique-Helly hereditario es perfecto.

Demostración. Por el SPGT, basta ver que los holes y antiholes impares no son clique-perfectos y CHH.

Por un lado, sabemos por el lema 3.0.2, que los holes impares no son clique-perfectos. Además, en el lema 3.0.4, probamos que los antiholes impares son clique-perfectos sólo si tienen longitud múltiplo de 3.

Por otro lado, notemos que los antiholes de longitud mayor o igual a 9 no son CHH. Sea \overline{C}_n un antihole de longitud $n \geq 9$, con vértices numerados del 1 al n de forma tal que i y j no son adyacentes si y sólo si son consecutivos módulo n . Afirmando que los vértices 1, 2, 4, 5, 7, 8 inducen una 3-pirámide en \overline{C}_n , ya que todos los vértices son adyacentes entre sí, salvo (1, 2), (4, 5) y (7, 8). Esto nos dice que \overline{C}_n no es CHH, ya que la 3-pirámide no lo es.

Luego, los holes impares no son clique-perfectos, \overline{C}_7 no es clique-perfecto y los antiholes impares de longitud mayor o igual a 9 no son CHH, lo que prueba que si G es clique-perfecto y CHH, entonces no contiene holes ni antiholes impares y por lo tanto, G es perfecto. \square

Jenö Lehel probó en [16] que en la clase de grafos clique-Helly hereditarios, los parámetros involucrados en la definición de clique-perfecto coinciden con los de la definición de neighborhood-perfecto.

Teorema 6.1.5. [16] Si G es un grafo clique-Helly hereditario, entonces $\alpha_N(H) = \alpha_C(H)$ y $\rho_N(H) = \tau_C(H)$ para todo H subgrafo inducido de G .

Mas aún, de este teorema se deduce que las clases de grafos clique-perfecto y neighborhood-perfecto coinciden dentro de la clase de grafos clique-Helly hereditarios.

Corolario 6.1.6. Si G es un grafo clique-Helly hereditario, entonces G es neighborhood-perfecto si y sólo si G es clique-perfecto.

Esto no quiere decir que todos los grafos clique-Helly hereditarios sean siempre clique-perfectos y neighborhood-perfectos, en la figura 6.4 podemos ver un grafo que es CHH, pero que no es clique-perfecto ni neighborhood-perfecto.

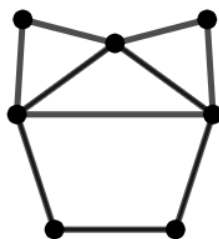


Figura 6.4: Grafo CHH, no clique-perfecto ni neighborhood-perfecto.

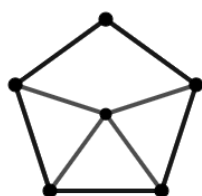
6.2. K-perfectos

Sea \mathcal{C} una familia finita de conjuntos no vacíos. Definimos *grafo de intersección* de \mathcal{C} al que se obtiene de representar cada conjunto con un vértice y dos vértices son adyacentes si y solo si la intersección de dichos conjuntos es no vacía.

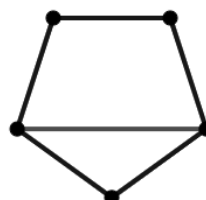
Dado G un grafo, se define $K(G)$, llamado *grafo clique* de G , al grafo de intersección de la familia de cliques de G . Es decir, $K(G)$ es el grafo cuyo conjunto vértices es el conjunto de cliques de G y tal que dos vértices de $K(G)$ son adyacentes si y sólo si las cliques correspondientes en G tienen al menos un vértice en común.

Definición 6.2.1. Dado G un grafo, G se dice *K-perfecto* si $K(G)$ es perfecto.

La clase de grafos *K-perfectos* no es hereditaria. Como podemos ver en la figura 6.5, el grafo N_1 es *K-perfecto*, pues $K(N_1)$ es perfecto, pero G tiene como subgrafo inducido un subgrafo isomorfo a C_5 , cuyo grafo clique es también isomorfo a C_5 que no es perfecto.



(a) N_1



(b) $K(N_1)$

Figura 6.5: G es *K-perfecto*, pero no *K-perfecto hereditario*.

Esto motiva la siguiente definición.

Definición 6.2.2. Se dice que un grafo es *K-perfecto hereditario* si todos sus subgrafos inducidos son *K-perfectos*.

Dado un grafo G , existe una relación entre los parámetros α , k , χ y ω del grafo $K(G)$ y los parámetros α_G , τ_G , F y M del grafo G , estos son justamente los que se corresponden con las cliques de G .

Teorema 6.2.3. [4] Sea G un grafo. Vale lo siguiente:

1. $\alpha_C(G) = \alpha(K(G))$;
2. $\tau_C(G) \geq k(K(G))$;
3. Si G es clique-Helly, entonces $\tau_C(G) = k(K(G))$.

Demostración. Probemos cada item por separado.

1. Se deduce de que un conjunto independiente de cliques en G , se corresponde con un conjunto independiente de vértices en $K(G)$. Luego, $\alpha_C(G) = \alpha(K(G))$.

2. Sea $\{v_1, \dots, v_m\}$ un conjunto de vértices de G que interseca todas las cliques del grafo, se corresponde con conjunto de subgrafos completos H_1, \dots, H_m de $K(G)$ pues todos los vértices que corresponden a cliques a las que pertenece un cierto vértice v_i son adyacentes entre sí en $K(G)$. Como v_1, \dots, v_m es un cubrimiento de las cliques de G , todos los vértices de $K(G)$ pertenecen a alguno de los subgrafos completos H_1, \dots, H_m . Más aún, si reemplazamos cada subgrafo completo H_i por una clique L_i de $K(G)$ que lo contenga, el conjunto de cliques $\{L_1, \dots, L_m\}$ donde puede haber cliques repetidas, cubrirá todos los vértices de $K(G)$. De esta forma, a partir de cierto conjunto de vértices $\{v_1, \dots, v_m\}$ de G que interseca todas las cliques, podemos construir un conjunto $\{L_1, \dots, L_m\}$ de cliques de $K(G)$ con cardinal menor o igual que m , pues podría haber cliques repetidas.

Así vemos que tomando m mínimo, es decir, $m = \tau_C(G)$ podemos conseguir un cubrimiento de los vértices de $K(G)$ por cliques de tamaño a lo sumo m , hemos probado entonces que $\tau_C(G) \geq k(K(G))$.

3. Supongamos que G es clique-Helly. Basta probar que $\tau_C(G) \leq k(K(G))$, pues la otra desigualdad vale siempre y ya la probamos en el ítem 2..

Tomemos L_1, \dots, L_m un cubrimiento por cliques de los vértices de $K(G)$. Como cada clique L_i de $K(G)$ se corresponde con un conjunto de cliques de G que tienen intersección no vacía dos a dos y G es clique-Helly, sabemos que la intersección de las cliques correspondientes a los vértices de L_i es no vacía, es decir, podemos tomar un vértice v_i de G en dicha intersección. De esta forma, construimos un conjunto $\{v_1, \dots, v_m\}$ de vértices de G que interseca todas las cliques, pues dada K una clique de G , el vértice de $K(G)$ correspondiente a esa clique debe estar cubierto por cierta clique L_{i_K} y por lo tanto, el vértice v_{i_K} pertenece a K .

Así vemos que tomando m mínimo, es decir, $m = k(K(G))$ podemos conseguir un conjunto de vértices de G que interseca todas las cliques, con cardinal m , hemos probado entonces que $\tau_C(G) \leq k(K(G))$.

□

Teorema 6.2.4. [3] Sea G un grafo. Vale lo siguiente:

1. $F(G) = \chi(K(G))$;
2. $M(G) \leq \omega(K(G))$;
3. Si G es clique-Helly, entonces $M(G) = \omega(K(G))$.

Demostración. Probemos cada item por separado.

1. Se deduce de que un coloreo de las cliques de G se corresponde con un coloreo de los vértices de $K(G)$. De esta forma, tenemos que $F(G) = \chi(K(G))$.
2. Si un vértice de G pertenece a m cliques, entonces los vértices correspondientes a estas m cliques en $K(G)$ forman un subgrafo completo en $K(G)$. Tomando un vértice tal que $m = M(G)$, probamos que en $K(G)$ hay un subgrafo completo con por lo menos $M(G)$ vértices, es decir, $M(G) \leq \omega(K(G))$.
3. Supongamos que G es clique-Helly. Basta probar que $M(G) \geq \omega(K(G))$, pues la otra desigualdad vale siempre y la probamos en el ítem 2..

Sea Q una clique de $K(G)$ de tamaño máximo, es decir, $|Q| = \omega(K(G))$. Como los vértices de Q se corresponden con un conjunto de cliques de G que tienen intersección no vacía dos a dos y G es clique-Helly, sabemos por definición que la intersección de las cliques correspondientes a los vértices de Q es no vacía, es decir, podemos tomar un vértice v de G en dicha intersección. Este vértice v pertenece a por lo menos las $M(G)$ cliques que corresponden a los vértices de Q , entonces $m_G(v) \geq \omega(K(G))$ y luego, $M(G) \geq \omega(K(G))$.

□

Corolario 6.2.5. Sea \mathcal{G} una clase de grafos hereditaria donde todo grafo de \mathcal{G} es K -perfecto y clique-Helly. Entonces todo grafo de \mathcal{G} es coordinado y clique-perfecto.

Demostración. En una clase hereditaria, probar que todos los grafos son coordinados es equivalente a probar que $M(G) = F(G)$ para todo grafo $G \in \mathcal{G}$, pues todo subgrafo también pertenecerá a la clase y por lo tanto cumplirá la igualdad. Análogamente, para probar que todo grafo de la clase \mathcal{G} es clique-perfecto, basta ver que $\alpha_C(G) = \tau_C(G)$ para todo $G \in \mathcal{G}$.

Dado $G \in \mathcal{G}$, por el teorema 6.2.4 tenemos que $F(G) = \chi(K(G)) = \omega(K(G)) = M(G)$, ya que G es clique-Helly y $K(G)$ es perfecto. Análogamente, por el teorema 6.2.3 tenemos que $\alpha_C(G) = \alpha(K(G)) = k(K(G)) = \tau_C(G)$. Luego, G resulta coordinado y clique-perfecto. □

Ahora, con el objetivo de relacionar los grafos K -perfectos hereditarios con los perfectos, probemos el siguiente lema que fue demostrado por Martín Safe en su tesis doctoral [23].

Lema 6.2.6. [23] Un grafo K -perfecto hereditario no contiene holes impares ni antiholes con más de 6 vértices.

Demostración. Basta probar que los holes impares y los antiholes con más de 6 vértices no son K -perfectos, así ningún grafo K -perfecto hereditario los tendrá como subgrafos inducidos.

Sea C_{2k+1} un hole impar, resulta también que $K(C_{2k+1}) = C_{2k+1}$ ya que las cliques de C_{2k+1} son las aristas. C_{2k+1} no es K -perfecto, dado que C_{2k+1} no es perfecto.

Sea $n > 6$, debemos ver que $\overline{C_n}$ no es K -perfecto hereditario. Veamos que $K(\overline{C_n})$ contiene un hole impar.

Comencemos suponiendo que $n \neq 7, 9, 12$, en este caso, existe una escritura del entero positivo n como $n = 5a + 3b$, con $a \geq 1$ y $b \geq 0$. Tomemos $a_1, \dots, a_k \in \{2, 3\}$ tales que

- $a_1 + a_2 + \dots + a_k = n$;
- existe $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ tal que $a_i = 2$;
- para cada $j \in \{1, 2, \dots, k\}$, $a_j = 2$ implica $a_{j+1} = 3$, donde $a_{k+1} = a_1$.

A partir de esta sucesión, para cada $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ definimos $b_i = a_1 + \dots + a_i$. Llamemos $B = \{b_1, b_2, \dots, b_k\}$, y definimos $B + a$ para cierto $a \in \mathbb{Z}$ como $B + a = \{b + a \mid b \in B\}$ donde la suma está pensada módulo n . Sea $Q_1 = \overline{C_n}[B]$, es decir, el subgrafo de $\overline{C_n}$ inducido por los vértices del conjunto B , notemos que este subgrafo inducido es una clique. Definimos de manera análoga las cliques $Q_2 = \overline{C_n}[B + 2]$, $Q_3 = \overline{C_n}[B + 4]$, $Q_4 = \overline{C_n}[B + 1]$ y $Q_5 = \overline{C_n}[B + 3]$. Observemos que las cliques Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, Q_5 inducen un hole de longitud 5 en $K(\overline{C_n})$. Luego, $\overline{C_n}$ no es K -perfecto, pues contiene un hole de longitud 5.

En el caso de $n = 7$, resulta que $K(\overline{C_7}) = \overline{C_7}$, observar que todas las cliques tienen tamaño 3. En el caso de $n = 9$, se puede ver que los vértices $\{1, 3, 5, 7\}$ inducen una clique en $\overline{C_9}$, a la que llamamos Q y el conjunto de cliques $\{Q, Q + 1, Q + 2, \dots, Q + 8\}$ induce un $\overline{C_9}$ en $K(\overline{C_9})$. Mientras que, en el caso de $n = 12$, podemos tomar las cliques Q_1 inducida por el conjunto de vértices $\{1, 3, 6, 8, 10\}$ y Q_2 inducida por $\{2, 4, 6, 8, 11\}$, y resulta que el conjunto de cliques $\{Q_1, Q_1 + 1, Q_1 + 2, Q_1 + 3, Q_1 + 9, Q_2, Q_2 + 1, Q_2 + 2, Q_2 + 3\}$ inducen un $\overline{C_9}$ en $K(\overline{C_{12}})$. \square

Por último, del lema anterior y el SPGT se deduce lo siguiente.

Teorema 6.2.7. Todo grafo K -perfecto hereditario es perfecto.

Capítulo 7

Caracterizaciones parciales

En este capítulo, estudiaremos la caracterizaciones conocidas de las clases de grafos perfectos, clique-perfectos, coordinados y neighborhood perfectos, restringidas a ciertas clases de grafos. Además, analizaremos la complejidad del problema de reconocimiento en cada uno de los casos.

7.1. Grafos sin triángulos

Veamos cómo se relacionan las clases de grafos perfectos, clique-perfectos, coordinados y neighborhood-perfectos, dentro de la clase de grafos sin triángulos, es decir, los grafos que no contienen subgrafos inducidos isomorfos a K_3 .

En los grafos sin triángulos y sin vértices aislados, las cliques son las aristas, por lo tanto, el máximo conjunto independiente de cliques es un matching de cardinal máximo, y el mínimo conjunto transversal de las cliques es un cubrimiento de las aristas por vértices mínimo, donde un *matching* es un conjunto independiente de aristas.

Recordemos algunos de los conocidos teoremas de König sobre grafos bipartitos.

Teorema 7.1.1 (König, 1931). En un grafo bipartito, el cardinal máximo de un matching coincide con el cardinal mínimo de un cubrimiento de las aristas por vértices.

Denotamos $\Delta(G)$ al grado máximo del grafo G , es decir, al máximo entre los grados de los vértices de G .

Teorema 7.1.2 (König, 1916). [15] Si G es un grafo bipartito, $\Delta(G)$ coincide con el cardinal mínimo de un cubrimiento de las aristas de G por matchings.

Además, el siguiente teorema nos da una caracterización de los grafos bipartitos, que nos permitirá relacionar los grafos bipartitos con los perfectos.

Teorema 7.1.3 (König, 1936). Un grafo es bipartito si y sólo si no contiene ciclos de longitud impar.

Notemos que la clase de grafos bipartitos es hereditaria, esto quiere decir que todo subgrafo inducido de un grafo bipartito es, a su vez, bipartito.

Usaremos estos teoremas y propiedades para probar, en el caso de los grafos libres de triángulos, la siguiente equivalencia.

Teorema 7.1.4. Sea G un grafo sin triángulos. Son equivalentes:

1. G es bipartito.
2. G es perfecto.
3. G es clique-perfecto.
4. G es neighborhood-perfecto.
5. G es coordinado.

Demostración. (2., 3., 4., 5. \implies 1.)

Supongamos que G no es bipartito, es decir, que contiene algún ciclo de longitud impar, según el teorema 7.1.3. Sea $C = v_1, \dots, v_k$ un ciclo impar de G , que podemos suponerlo minimal, es decir, que $G[v_1, \dots, v_k]$ no contiene un ciclo impar propio.

Veamos que C no tiene cuerdas. Si dos vértices no consecutivos del ciclo v_i, v_j fueran adyacentes entre sí, con $i + 1 < j$, tendríamos los ciclos $C' = v_i, \dots, v_j$ y $C'' = v_1, \dots, v_i, v_j, \dots, v_k$, donde las longitudes de los ciclos son $j - i + 1$ y $k - (j - i) + 1$ respectivamente. Como $(j - i + 1) + (k - (j - i) + 1) = k + 2 \equiv 1 \pmod{2}$, alguno de los dos ciclos debe tener longitud impar, lo cual es absurdo, pues supusimos que C era minimal. Así probamos que si C es un ciclo de longitud impar minimal, entonces C no tiene cuerdas.

Por lo tanto, $G[v_1, \dots, v_k]$ es un hole impar o un triángulo. Como G no contiene triángulos y los holes impares no son perfectos, ni clique-perfectos, ni neighborhood-perfectos, ni coordinados, llegamos a un absurdo, que viene de suponer que G contenía un ciclo impar. Esto prueba, en cualquiera de los casos, que G es bipartito.

(1. \implies 2.)

Por el SPGT y por ser la clase de grafos bipartitos hereditaria, basta probar que los holes y antiholes impares no son bipartitos.

- C_{2k+1} no es bipartito pues es un ciclo de longitud impar.
- $\overline{C_{2k+1}}$ con $k \geq 3$ contiene triángulos, por ejemplo, los vértices 1, 3 y 5 son adyacentes dos a dos. Notemos que $\overline{C_5}$ es isomorfo a C_5 , ya fue tenido en cuenta en el punto anterior.

Por lo tanto, si G es bipartito, no contiene holes ni antiholes impares y luego, G es perfecto.

(1. \implies 3.)

Como la clase de grafos bipartitos es hereditaria, basta ver que los parámetros α_C y τ_C coinciden, para todo grafo bipartito.

Sea G bipartito, como no contiene triángulos, las cliques de G son los vértices aislados y las aristas. Llamaremos $X(G)$ el conjunto de vértices aislados de G .

Un conjunto independiente de cliques de cardinal máximo está formado por un matching máximo de las aristas de G y el conjunto $X(G)$, tenemos entonces que el cardinal máximo de un matching de G es $\alpha_C(G) - |X(G)|$. Un conjunto de vértices que interseca todas las cliques de G está formado por un cubrimiento por vértices de las aristas de G y el conjunto $X(G)$, así tenemos que el cardinal mínimo de un cubrimiento por vértices de las aristas de G es $\tau_C(G) - |X(G)|$. Luego, por el teorema 7.1.1 sabemos que $\alpha_C(G) - |X(G)| = \tau_C(G) - |X(G)|$, y por lo tanto, $\alpha_C(G) = \tau_C(G)$.

(1. \implies 4.)

Como la clase de grafos bipartitos es hereditaria, basta ver que los parámetros α_N y ρ_N coinciden, para todo grafo bipartito.

Sea G grafo bipartito. Sabemos que G no contiene 0, 1, 2, 3-pirámide como subgrafos inducidos, pues estos cuatro grafos contienen triángulos. Por lo tanto, G es clique-Helly hereditario.

Por la implicación anterior sabemos que G es clique-perfecto y el teorema 6.1.5 nos permite afirmar que $\alpha_N(G) = \alpha_C(G) = \tau_C(G) = \rho_N(G)$, en particular, $\alpha_N(G) = \rho_N(G)$.

(1. \implies 5.)

Como la clase de grafos bipartitos es hereditaria, basta ver que los parámetros M y F coinciden, para todo grafo bipartito.

Sea G un grafo bipartito. Si $E(G) = \emptyset$, entonces $M(G) = 1 = F(G)$ pues las cliques son los vértices aislados. Si G tiene al menos una arista, sabemos que $M(G) = \Delta(G)$ y $F(G)$ coincide con la cantidad mínima de matchings necesarios para cubrir las aristas de G , pues dada una partición de las aristas de G por matchings, los vértices aislados, que son cliques de tamaño 1, pueden agregarse a cualquiera de los conjuntos independientes de aristas y este seguirá siendo un conjunto independiente de cliques.

Ahora, por el teorema 7.1.2, las aristas de G pueden agruparse en $\Delta(G)$ matchings, es decir, $M(G) = F(G)$. \square

Esto nos permite decir que, en el caso de los grafos sin triángulos, puede reconocerse polinomialmente si el grafo es o no perfecto, clique-perfecto, coordinado y neighborhood-perfecto. Esto se debe a que se puede reconocer si un grafo es bipartito en $\mathcal{O}(n + m)$, donde n es la cantidad de vértices del grafo y m la cantidad de aristas.

Corolario 7.1.5. Existe un algoritmo lineal que permite saber si un grafo sin triángulos es perfecto, clique-perfecto, coordinado y neighborhood-perfecto.

7.2. Grafos paw-free

Un grafo se dice *paw-free* si no tiene grafos paw como subgrafos inducidos. Observemos que la clase de grafos sin triángulos que estudiamos en la sección anterior está contenida en la clase de grafos paw-free.

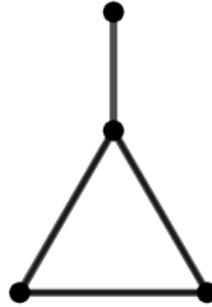


Figura 7.1: Grafo paw.

Empecemos por una caracterización de los grafos paw-free. Para eso necesitamos definir previamente que un *grafo multipartito completo* es un grafo en el cual los vértices se pueden partir en conjuntos disjuntos A_1, \dots, A_k tales que $v \in A_i$ y $w \in A_j$ son adyacentes si y sólo si $i \neq j$. El siguiente teorema fue probado por Stephan Olariu en [21], aunque la demostración que se propone a continuación es propia.

Teorema 7.2.1. [21] Un grafo es paw-free si y sólo si cada una de sus componentes conexas no contiene triángulos o es un grafo multipartito completo.

Demostración. Notemos que se puede suponer que el grafo es conexo, ya que un grafo es paw-free si y sólo si cada una de sus componentes conexas lo es. De esta forma, el teorema se traduce a probar que un grafo conexo es paw-free si y sólo si no contiene triángulos o es un grafo multipartito completo.

(\Leftarrow) Basta ver que los grafos sin triángulos son paw-free, lo cual es evidente porque una paw contiene un triángulo, y que los grafos multipartitos completos son paw-free.

Sea H un grafo multipartito completo, con partes H_1, \dots, H_k .

- Si $k \leq 2$, H no contiene triángulos y en consecuencia, no contiene paws.
- Si $k \geq 3$, sean u, v, w vértices que forman un triángulo, es decir, vértices correspondientes a partes distintas del grafo. Todo otro vértice del grafo es adyacente a por lo menos 2 de estos 3 vértices, pues en un grafo multipartito completo cada vértice es adyacente a todos los vértices que no estén en la misma parte que este.

Luego, H no contiene paws.

(\Rightarrow) Probemos que si G es un grafo conexo y paw-free, entonces G no contiene triángulos o es un grafo multipartito completo. Lo probaremos por inducción en la cantidad de vértices de G , a la que llamaremos n .

Casos base: Sea $n \leq 4$. Si $n < 3$ no hay nada que probar. Si $n \geq 3$ y G contiene triángulos, podemos tomar u, v, w vértices que inducen un triángulo en G :

- Si $n = 3$, tenemos un grafo multipartito completo con 3 partes de 1 vértices cada una.
- Si $n = 4$, al ser G conexo, el cuarto vértice z tiene que ser vecino de al menos uno de los vértices u, v, w . Si fuera vecino de sólo uno de los vértices u, v, w , los cuatro vértices inducirían una paw, por lo tanto z debe ser vecino de al menos 2 de los otros vértices. Si es vecino de 2 vértices, obtenemos un grafo multipartito completo con 3 partes, dos de ellas con 1 vértice cada una y la otra con 2 vértices. Si es vecino de los 3 vértices, obtenemos un grafo multipartito completo con 4 partes de 1 vértice cada una.

Paso inductivo: Sea $n \geq 5$, supongamos que G tiene triángulos y veamos que es un grafo multipartito completo.

Sean v_1, v_2, v_3 vértices de G que inducen un triángulo. Separemos los vértices de G en 4 conjuntos: A_i el conjunto de vértices no adyacentes a v_i , para $i = 1, 2, 3$ y A_0 el conjunto de los vértices restantes, en particular, $v_i \in A_i$ para $i = 1, 2, 3$. Notemos que los conjuntos A_1, A_2, A_3 son disjuntos pues que no hay ningún vértice que sea vecino de exactamente uno de los vértices v_1, v_2, v_3 , caso contrario, estos 4 vértices inducirían una paw en G . Además, A_0 es el conjunto de los vértices vecinos de v_1, v_2 y v_3 simultáneamente.

A_1 es un conjunto independiente, pues si $u, w \in A_1$ fueran adyacentes, los vértices u, w, v_2, v_1 induciría una paw, ya que u y w son ambos adyacentes al vértices v_2 . Análogamente, A_2 y A_3 también son conjuntos independientes de vértices.

Tenemos entonces A_1, A_2, A_3 conjuntos independientes de vértices tales que cada vértice del conjunto A_i es adyacente a todo vértice que no pertenezca a A_i .

Si A_0 es el conjunto vacío, entonces G es un grafo multipartito completo con partes A_1, A_2, A_3 . Sino, por hipótesis inductiva, el grafo inducido por A_0 , que tiene a lo sumo $n - 3$ vértices y es paw-free, no contiene triángulos o es un grafo multipartito completo.

- Si A_0 induce un grafo sin triángulos, veamos que $G[A_0]$ resulta un grafo bipartito completo. Si A_0 es un conjunto independiente de vértices, entonces G es multipartito completo con partes A_0, A_1, A_2, A_3 . Sino, tomemos $v \in A_0$ con grado al menos 1 y consideremos los conjuntos de vértices $B_1 = N_{G[A_0]}(v)$ y $B_2 = A_0 - N_{G[A_0]}(v)$.
 - B_1 es un conjunto independiente, pues si $u, w \in B_1$ fueran adyacentes, u, w, v inducirían un triángulo.
 - Si $u \in B_1$ y $w \in B_2$, entonces u y w son vecinos. Pues sabemos que u es vecino de v , por estar en B_1 , y w no es vecino de v , por estar en B_2 , si (u, w) no fuera una arista de G , el conjunto de vértices $\{v_1, v, u, w\}$ induciría una paw en G .
 - B_2 es un conjunto independiente, pues si $u, w \in B_2$ fueran adyacentes, el conjunto de vértices $\{v_1, v, u, w\}$ induciría una paw en G .

Luego, A_0 induce un grafo bipartito completo, con partes B_1 y B_2 . Esto implica que G es un grafo multipartito completo con partes A_1, A_2, A_3, B_1 y B_2 .

- Si A_0 induce un grafo multipartito completo con partes B_1, \dots, B_k , entonces G es un grafo multipartito completo con partes $A_1, A_2, A_3, B_1, \dots, B_k$.

Hemos probado entonces que un grafo conexo y paw-free no contiene triángulos o es un grafo multipartito completo. \square

Veamos ahora algunos lemas que permiten probar que la clase de grafos perfectos y la de grafos coordinados coinciden dentro de la clase de grafos paw-free. Estos lemas fueron probados por Flavia Bonomo, Guillermo Durán, Francisco Soullignac y Gabriel Sueiro en [7].

Para el siguiente lema necesitamos saber que un grafo se dice *anticonexo* si su complemento es conexo.

Lema 7.2.2. [7] Sea G un grafo paw-free, conexo y anticonexo. Entonces G es perfecto si y sólo si G es bipartito.

Demostración. Todo grafo bipartito es perfecto, según lo probado en el teorema 7.1.4. Basta probar que si G es un grafo paw-free, conexo, anticonexo y perfecto, entonces G es bipartito. Como G es conexo y paw-free, por el teorema 7.2.1 sabemos que G no contiene triángulos o es un multipartito completo, como los multipartitos completos no son anticonexos, concluimos que G no contiene triángulos. Al ser G perfecto y no contener triángulos, podemos usar lo probado en el lema 7.1.4 para afirmar que G es bipartito. \square

La demostración del siguiente lema puede encontrarse en [7].

Lema 7.2.3. [7] Sea G un grafo paw-free. Si G no es anticonexo, entonces G es coordinado.

Lema 7.2.4. [7] Sea G un grafo paw-free. Si G es perfecto y anticonexo, entonces G es coordinado.

Demostración. Sea G un grafo paw-free perfecto y anticonexo. Sea G' un subgrafo inducido de G , probar que el grafo G' es coordinado es equivalente a ver que cada componente conexa de G' lo es, tomemos entonces H una componente conexa de G' .

Como H es conexo y paw-free, sabemos por el teorema 7.2.1 que H no contiene triángulos o es un grafo multipartito completo, pero al ser anticonexo, no puede ser un grafo multipartito completo. Así concluimos que H no contiene triángulos, por el teorema 7.1.4 tenemos que H es coordinado, por ser H perfecto.

Por lo tanto, G es coordinado ya que todo subgrafo inducido lo es. \square

Sabemos que todo grafo coordinado es perfecto, según lo visto en el teorema 4.0.5. Mientras que los lemas 7.2.4 y 7.2.3 nos permiten afirmar que todo grafo paw-free perfecto es coordinado. De esta forma queda probado el siguiente teorema.

Teorema 7.2.5. Sea G un grafo paw-free. G es perfecto si y sólo si G es coordinado.

Además, dentro de esta clase de grafos ser perfecto es equivalente a ser clique-perfecto.

Teorema 7.2.6. [7] Sea G un grafo paw-free. G es perfecto si y sólo si G es clique-perfecto.

Vemos que en la clase de grafos paw-free ser perfecto es equivalente a no contener holes impares, como los holes impares no son perfectos, basta ver que si un grafo paw-free no contiene holes impares, es perfecto. Por el SPGT, nos alcanza con probar que los antiholes impares de longitud mayor que 7 contienen paws inducidas. Sea $\overline{C_{2k+1}}$ con $k \geq 3$, numeramos los vértices del antihole de forma tal que los vértices i y j son adyacentes si y sólo si no son consecutivos módulo $2k+1$, notemos que los vértices 1, 2, 3 y 5 inducen una paw en $\overline{C_{2k+1}}$. Esta observación, junto con los teoremas 7.2.5 y 7.2.6, prueba el siguiente teorema.

Teorema 7.2.7. Sea G un grafo paw-free. Son equivalentes:

1. G es perfecto.
2. G no contiene holes impares.
3. G es clique-perfecto.
4. G es coordinado.

Esta caracterización nos permite, en el caso de los grafos paw-free, poder reconocer si el grafo es perfecto, clique-perfecto y coordinado en tiempo lineal. Esto también fue probado por Flavia Bonomo, Guillermo Durán, Francisco Soullignac y Gabriel Sueiro en [7].

Teorema 7.2.8. [7] Existe un algoritmo con complejidad lineal que dado si un grafo paw-free determina si es perfecto, clique-perfecto y coordinado.

Demostración. Sabemos que un grafo es coordinado si cada una de sus componentes conexas lo es. Sea C una componente conexa de G . Si C es anticonexo, sabemos que C es perfecto si y sólo si C es bipartito, por lema 7.2.2. Si C no es anticonexo, entonces C es coordinado por el lema 7.2.3.

Esto prueba la correctitud del siguiente algoritmo, que según lo probado en teorema 7.2.7, determina dado un grafo paw-free si es perfecto, clique-perfecto y coordinado o no.

IN: Un grafo G paw-free.

OUT: Informa si G es perfecto, clique-perfecto y coordinado o no.

1. Para cada componente conexa C de G hacer
2. Si C es anticonexo y no bipartito entonces indicar que G no es perfecto y terminar.
3. Indicar que G es perfecto.

Las componentes conexas de un grafo H se pueden hallar en $\mathcal{O}(n + m)$, donde n es la cantidad de vértices de H y m la cantidad de aristas. También se puede determinar si un grafo es anticonexo, que es lo mismo que determinar si su complemento es conexo, en $\mathcal{O}(n + m)$ y si es bipartito en $\mathcal{O}(n + m)$.

Dicho esto, determinar las componentes conexas de G tiene complejidad $\mathcal{O}(|V(G)| + |E(G)|)$, esta es el costo del paso 1. del algoritmo. Para cada componente conexa C de G , el costo de determinar si es anticonexo y bipartito es $\mathcal{O}(|V(C)| + |E(C)|)$, este es el costo del paso 2. para cada iteración del ciclo. Así, como las componentes conexas de un grafo son disjuntas, podemos decir que la complejidad total del algoritmo es $\mathcal{O}(|V(G)| + |E(G)|)$. \square

Por otro lado, en la clase de grafos paw-free, no es equivalente ser neighborhood-perfecto a ser perfecto, clique-perfecto y coordinado. Como sabemos que los grafos neighborhood-perfectos son perfectos, por el teorema 5.0.4, basta mostrar un grafo paw-free que sea perfecto pero no neighborhood-perfecto, por ejemplo, la 3-pirámide como se muestra en la figura 7.2.

Con sólo prohibir 3-pirámides como subgrafos inducidos, lo que es equivalente a pedir que sea CHH, pues las 0, 1, 2-pirámides contienen paws, tendríamos la equivalencia entre las cuatro clases de grafos. Es decir, si G es paw-free y CHH son equivalentes G es perfecto, G es clique-perfecto, G es coordinado y G es neighborhood-perfecto. Esto nos lleva al siguiente resultado, que fue probado entre [6] y la tesis de licenciatura de Xavier S. Warnes [27], aunque en ambos casos las demostraciones contienen una equivalencia con los grafos balanceados que no estudiamos en esta tesis, por lo que parte de la demostración de este teorema es propia.

Antes de enunciar el teorema definimos, dados dos grafos G_1 y G_2 , el *join* de G_1 y G_2 que es un grafo al que notamos $G_1 \vee G_2$ tal que el conjunto de vértices es la unión de los conjuntos de vértices de los grafos, es decir, $V(G_1 \vee G_2) = V(G_1) \cup V(G_2)$ y el conjunto de aristas del grafo es $E(G_1 \vee G_2) = E(G_1) \cup E(G_2) \cup (V(G_1) \times V(G_2))$.

Teorema 7.2.9. [6, 27] Sea G un grafo paw-free. Son equivalentes:

1. G es neighborhood-perfecto.
2. G es perfecto y CHH.
3. G no contiene holes impares ni 3-pirámides como subgrafos inducidos.
4. Cada componente conexa de G es bipartita o es join de un grafo bipartito completo y un grafo completo.

Demostración. (1. \implies 2.) Sea G paw-free y neighborhood-perfecto. G es perfecto pues todo

grafo neighborhood-perfecto es perfecto, como fue probado en el teorema 5.0.4. Además, por ser paw-free sabemos que G no contiene 0, 1, 2–pirámides como subgrafos inducidos y por ser neighborhood-perfecto sabemos que no contiene 3–pirámides como subgrafos inducidos, luego por la caracterización del teorema 6.1.2, tenemos que G es CHH.

(2. \implies 3.) Se deduce de que los holes impares no son perfectos, por lema 2.0.5 y las 3–pirámides no son CHH, por teorema 6.1.2.

(3. \implies 4.) Sea C una componente conexa de G grafo paw-free, que no contiene holes impares ni 3–pirámides como subgrafos inducidos.

Si C no contiene triángulos, como tampoco contiene holes impares, resulta que C no tiene ciclos de longitud impar. Probemos que C no contiene ciclos de longitud $2k + 1$ para todo $k \geq 1$, por inducción en k .

- *Caso base:* C no contiene ciclos de longitud 3, pues estos son triángulos.
- *Paso inductivo:* Veamos que C no contiene ciclos de longitud $2k + 1$, con $k \geq 2$. Supongamos que si, entonces existen $\{v_1, v_2, \dots, v_{2k+1}\}$ vértices que forman un ciclo impar en C . Tomamos el subgrafo de C inducido por estos vértices, que debe tener al menos una cuerda pues C no contiene holes impares. Esta cuerda divide al ciclo en dos, uno con cantidad par de vértices y otro con cantidad impar. Si nos quedamos con los vértices que forman el ciclo impar, por hipótesis inductiva, llegamos a un absurdo.

Por lo tanto, C no contiene ciclos de longitud impar y esto es equivalente a que C es bipartito, por el teorema 7.1.3.

Si C contiene algún triángulo, por el teorema 7.2.1, C es un grafo multipartito completo. Sean A_1, \dots, A_k las partes de C , con $|A_1| \geq |A_2| \geq \dots \geq |A_k|$ y $k \geq 3$, pues C contiene al menos un triángulo. Notemos que una 3–pirámide es un grafo multipartito completo con 3 partes de 2 vértices cada una, por lo tanto, si C no contiene 3–pirámides, no puede haber 3 de las partes de C que tengan 2 o más vértices. Luego, $|A_3| = \dots = |A_k| = 1$. Definiendo $A = A_1 \cup A_2$ y $B = A_3 \cup \dots \cup A_k$, vemos que A induce un grafo bipartito completo con partes A_1 y A_2 , mientras que B induce un grafo completo de $k - 2$ vértices. Así notamos que C resulta ser el join entre el grafo bipartito inducido por A y el grafo completo inducido por B .

(4. \implies 1.) Como un grafo es neighborhood-perfecto si y sólo si cada una de sus componentes conexas lo es, basta ver que los grafos bipartitos y los grafos join de un bipartito completo y un grafo completo, son neighborhood perfectos.

Sabemos que todo grafo bipartito es neighborhood-perfecto por lo probado en la demostración del teorema 7.1.4.

Como la clase de grafos que son bipartitos o join de un bipartito completo y un grafo completo es una clase de grafos hereditaria, para ver que todo grafo de esta clase es neighborhood-perfecto, basta ver que $\alpha_N(H) = \rho_N(H)$ para todo grafo H en la clase.

Sean H_1 y H_2 subgrafos de H tales que $H = H_1 \vee H_2$, con H_1 es un grafo bipartito y H_2 es un grafo completo.

Si $|V(H_2)| = 0$, entonces H sería bipartito y en ese caso ya sabemos que vale la igualdad de los parámetros por lema 7.1.4. Caso contrario, $\alpha_N(H) = 1 = \rho_N(H)$, pues dado $v \in V(H_2)$ resulta que $N_H(v) = H$, pues v es un vértice universal. \square

La caracterización de los grafos paw-free neighborhood-perfectos da lugar a un algoritmo de reconocimiento con complejidad lineal. Este algoritmo fue previamente propuesto en [6] para reconocer los grafos balanceados dentro de la clase de grafos paw-free, y en [27] se menciona que el mismo algoritmo funciona para reconocer los grafos neighborhood-perfectos dentro de esta misma clase de grafos.

Teorema 7.2.10. [6, 27] Existe un algoritmo lineal que dado un grafo paw-free decide si es neighborhood-perfecto o no.

Demostración. Sea G un grafo paw-free, probar que G es neighborhood-perfecto es equivalente a ver que cada componente conexa C de G lo es. Por la caracterización del teorema 7.2.9, C es neighborhood-perfecto si y sólo si C es bipartito o es un join de un grafo bipartito y un grafo completo.

Notemos que para decir que C no es neighborhood-perfecto, basta ver que el conjunto de vértices no universales inducen un grafo que no es bipartito, pues esto es equivalente a pedir que no sea bipartito ni el join de un bipartito y un completo. Esto prueba la correctitud del siguiente algoritmo.

IN: Un grafo G paw-free.

OUT: Informa si G es neighborhood-perfecto o no.

1. Para cada componente conexa C de G hacer
2. Si los vértices no universales de C inducen un grafo que no es bipartito, entonces indicar que G no es neighborhood-perfecto y terminar.
3. Indicar que G es neighborhood-perfecto.

Recordemos que las componentes conexas de un grafo H se pueden hallar en $\mathcal{O}(n + m)$, donde n es la cantidad de vértices de H y m la cantidad de aristas, también se puede determinar si es bipartito en $\mathcal{O}(n + m)$. Construir el conjunto de vértices no universales de H tiene complejidad $\mathcal{O}(m)$, pues basta calcular los grados de todos los vértices y quedarse únicamente con los que no tengan grado $n - 1$.

Por lo tanto, determinar las componentes conexas de G tiene complejidad $\mathcal{O}(|V(G)| + |E(G)|)$, esta es el costo del paso 1. del algoritmo. Para cada componente conexa C de G , el costo de construir el conjunto de vértices no universales es $\mathcal{O}(|E(C)|)$, mientras que determinar si este conjunto de vértices inducen un grafo bipartito tiene complejidad a lo sumo $\mathcal{O}(|V(C)| + |E(C)|)$, este es el costo del paso 2. para cada iteración del ciclo. De esta forma, como las componentes

conexas de un grafo son disjuntas, podemos decir que la complejidad total del algoritmo es $\mathcal{O}(|V(G)| + |E(G)|)$. \square

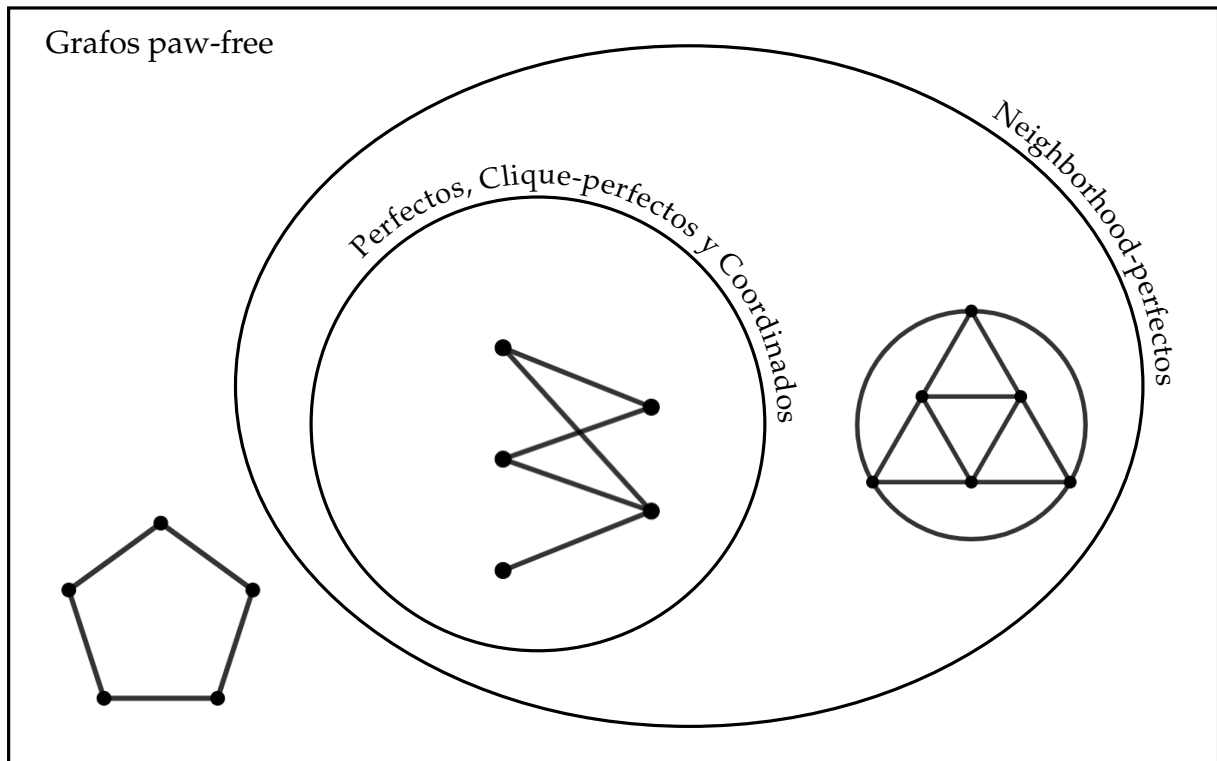


Figura 7.2: Relaciones entre las clases de grafos perfectos, clique-perfectos, coordinados y neighborhood-perfectos dentro de la clase de grafos paw-free.

7.3. Grafos claw-free CHH

Un grafo se dice *claw-free* si no tiene grafos claw como subgrafos inducidos. En esta sección, estudiaremos los grafos que son claw-free y clique-Helly hereditarios.

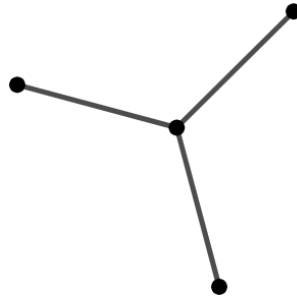


Figura 7.3: Grafo claw.

Caractericemos a las clases de grafos perfectos, clique-perfectos, neighborhood-perfectos y coordinados, dentro de la clase de grafos claw-free y clique-Helly hereditarios. La mayor parte del siguiente teorema fue probado por Flavia Bonomo, Maria Chudnovsky y Guillermo Durán en [2], aunque aquí se agregan algunas equivalencias.

Teorema 7.3.1. [2] Sea G un grafo claw-free y clique-Helly hereditario. Son equivalentes:

1. G es perfecto.
2. G no contiene holes impares ni $\overline{C_7}$ como subgrafos inducidos.
3. G es clique-perfecto.
4. G es neighborhood-perfecto.
5. G es coordinado.
6. G es K-perfecto hereditario.

Demostración. La equivalencia entre 1., 2. y 3. fue probada en [2]. La parte más difícil de esta equivalencia es la prueba de 2. implica 3., ya que 3. implica 2. se deduce de que los holes impares y los antiholes de longitud 7 no son clique-perfectos y la equivalencia entre 1. y 2. es una consecuencia del SPGT. Para esto último, basta ver que los antiholes impares con longitud mayor que 7 no son clique-Helly hereditarios. Sea $\overline{C_{2k+1}}$ con $k \geq 4$, con los vértices numerados de forma que i, j son adyacentes si y sólo si no son consecutivos módulo $2k + 1$, podemos ver que los vértices 1, 2, 4, 5, 7, 8 inducen una 3-pirámide, lo que dice que $\overline{C_{2k+1}}$ no es CHH.

La equivalencia entre 3. y 4. se deduce del teorema 6.1.5, que nos dice que dentro de la clase de grafos clique-Helly hereditarios, es equivalente que un grafo sea neighborhood-perfecto o clique-perfecto.

Por el corolario 6.2.5 podemos afirmar que todo grafo clique-Helly hereditario y K -perfecto es clique-perfecto y coordinado, es decir, que 6. implica 3. y 5.. Mientras que todo grafo K -perfecto hereditario es perfecto, por el teorema 6.2.7, lo que nos demuestra que 6. implica 1..

Además, todo grafo coordinado es perfecto, según el teorema 4.0.5, es decir, 5. implica 1..

Para terminar, nos alcanza con saber que todo grafo claw-free y CHH que no contiene holes impares ni antiholes de longitud 7 como subgrafo inducido, es K -perfecto. Esto también fue probado en [2] y nos permite afirmar que 2. implica 6., y así, terminamos la demostración del teorema. \square

Sabemos que es posible determinar si un grafo es o no perfecto en tiempo polinomial, por el teorema 2.0.7. En el caso de los grafos claw-free y clique-Helly hereditarios, se puede usar el mismo algoritmo para determinar si un grafo es perfecto, clique-perfecto, neighborhood-perfecto y coordinado, ya que las cuatro clases coinciden.

Corolario 7.3.2. [2] Existe un algoritmo polinomial que dado un grafo claw-free y CHH decide si es perfecto, neighborhood-perfecto, clique-perfecto y coordinado o no.

7.4. Grafos $\{\text{gem}, W_4, \text{bull}\}$ -free

Un grafo se dice $\{\text{gem}, W_4, \text{bull}\}$ -free si no tiene grafos gem, W_4 ni bull, que son los que se muestran en la figura 7.4, como subgrafos inducidos.

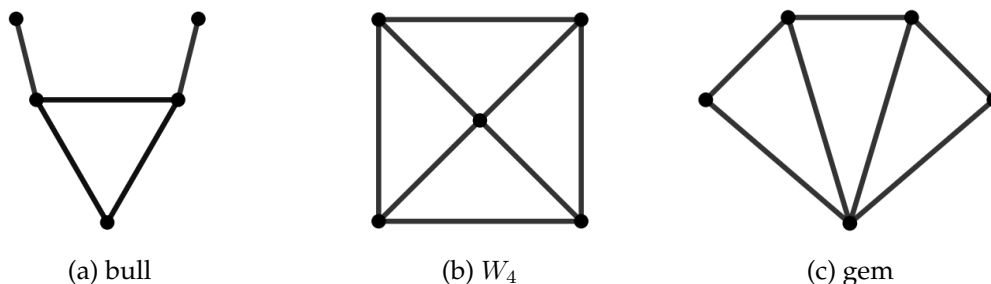


Figura 7.4: Grafos bull, W_4 y gem, respectivamente.

Caractericemos a las clases de grafos perfectos, clique-perfectos, neighborhood-perfectos y coordinados, dentro de la clase de grafos $\{\text{bull}, W_4, \text{gem}\}$ -free. Gran parte del siguiente teorema fue probado por Flavia Bonomo, Guillermo Durán, Francisco Soulignac y Gabriel Sueiro en [7], aunque aquí se menciona que estas equivalencias coinciden además con el hecho de ser neighborhood-perfecto.

Teorema 7.4.1. [7] Sea G un grafo $\{\text{gem}, W_4, \text{bull}\}$ -free. Son equivalentes:

1. G es perfecto.
2. G no contiene holes impares.
3. G es coordinado.
4. G es clique-perfecto.
5. G es neighborhood-perfecto.
6. G es K -perfecto hereditario.

Demostración. Notemos que los antiholes impares $\overline{C_{2k+1}}$ con $k \geq 3$ contienen gems. Si numeramos los vértices del antihole de forma que i es adyacente a j si y sólo si no son consecutivos módulo $2k + 1$, los vértices 1, 2, 3, 4 y 6 inducen una gem en $\overline{C_{2k+1}}$. Por lo tanto, dado un grafo $\{\text{gem}, W_4, \text{bull}\}$ -free ser perfecto es equivalente a no contener holes impares, usando la caracterización dada por el SPGT. Esto prueba la equivalencia entre 1. y 2..

Observemos que todo grafo $\{\text{gem}, W_4, \text{bull}\}$ -free es clique-Helly hereditario, pues las 0-pirámides contienen bulls inducidos, mientras que las 1, 2, 3-pirámides contienen W_4 inducidos. Sabiendo esto, mediante el teorema 6.1.5, podemos afirmar que 4. y 5. son equivalentes.

Además, si suponemos que G es K -perfecto hereditario, al ser también CHH, podemos afirmar 6.2.5 que G resulta coordinado y clique-perfecto, es decir, 6. implica 3. y 4..

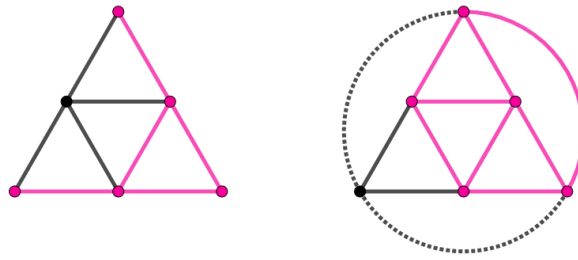


Figura 7.5: 0, 1, 2, 3–pirámides no son $\{\text{gem}, W_4, \text{bull}\}$ -free.

Sabemos que todo grafo coordinado es perfecto, por el teorema 4.0.5, mientras que en el caso de los grafos clique-Helly hereditarios, todo grafo clique-perfecto es perfecto, por el teorema 6.1.4. Esto nos dice que tanto **3.** como **4.** implican **1.**

Por último, nos alcanza con ver que todo grafo $\{\text{gem}, W_4, \text{bull}\}$ -free perfecto, es K -perfecto, es decir, que **1.** implica **6.**, esto fue probado en [7]. Esto completa la demostración del teorema. \square

El teorema anterior junto con el teorema 2.0.7 nos permite afirmar que dentro de la clase de grafos $\{\text{gem}, W_4, \text{bull}\}$ -free, se puede determinar polinomialmente si un grafo es clique-perfecto, neighborhood-perfecto y coordinado, por ser equivalente a determinar si es perfecto.

Corolario 7.4.2. [7] Existe un algoritmo polinomial que dado un grafo $\{\text{gem}, W_4, \text{bull}\}$ -free decide si es perfecto, neighborhood-perfecto, clique-perfecto y coordinado o no.

7.5. Grafos diamond-free

Un grafo se dice *diamond-free* si no tiene grafos diamond como subgrafos inducidos.

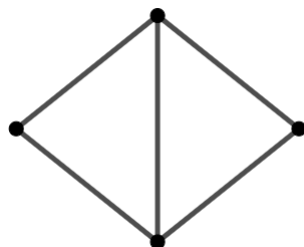


Figura 7.6: Grafo diamond.

Veamos algunas caracterizaciones de grafos perfectos, clique-perfectos, neighborhood-perfectos y coordinados, restringido a la clase de grafos diamond-free.

Notemos que los antiholes impares con longitud mayor o igual a 7 contienen diamonds inducidos, mientras que los holes impares no, esto junto con el SPGT nos permite afirmar lo siguiente.

Lema 7.5.1. Sea G un grafo diamond-free. Entonces G es perfecto si y sólo si G no contiene holes impares como subgrafos inducidos.

Vamos a caracterizar los grafos clique-perfectos y neighborhood-perfectos dentro de la clase de grafos diamond-free.

Dados G un grafo y C en G un ciclo, no necesariamente inducido, decimos que una arista del ciclo C es *impropia* si forma un triángulo con algún otro vértice del ciclo.

Un r -sol generalizado es un grafo formado por un ciclo C_r y un vértice por cada arista impropia que es adyacente únicamente a los extremos de dicha arista.

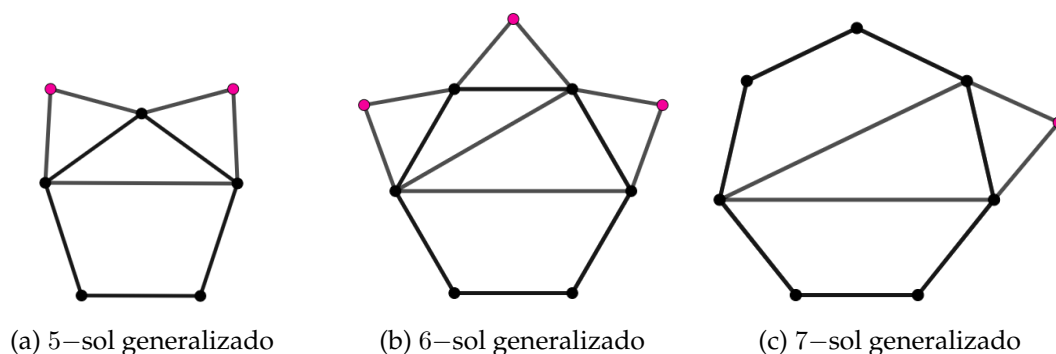


Figura 7.7: Ejemplos de r -soles generalizados.

Lema 7.5.2. $(2k + 1)$ -sol generalizado no es clique-perfecto.

Demostración. Sea G un $(2k + 1)$ -sol generalizado. Para probar que G no es clique-perfecto veamos que $\alpha_C(G) = k$ mientras que $\tau_C(G) \geq k + 1$.

Llamemos X al conjunto de $2k + 1$ vértices que forman el ciclo de G e Y al conjunto de vértices que son vecinos únicamente de los extremos de las aristas impropias.

Si A es un conjunto independiente de cliques, sabemos que $2 \cdot |A| \leq 2k + 1$ pues cada clique contiene al menos 2 vértices del conjunto X , y este tiene $2k + 1$ elementos en total. Por lo tanto, $\alpha_C(G) \leq k$. Efectivamente hay un conjunto independiente de cliques de tamaño k , si elegimos alternadamente aristas del ciclo C_{2k+1} contenido en G , podemos tomar una clique que contenga a cada una de ellas y sea independiente a los otros cliques elegidos

- Si la arista es impropia, tomamos la clique de tamaño 3 que forma dicha arista con el vértice del conjunto Y que le corresponde.
- Si no es impropia, esta arista no es parte de ningún triángulo y luego, es en sí una clique.

Así tenemos un conjunto independiente de cliques de tamaño k y, por lo tanto, probamos que $\alpha_C(G) = k$.

Sea B un conjunto transversal de las cliques de G . Como mencionamos anteriormente, cada arista del ciclo formado por los vértices del conjunto X pertenece a una clique que contiene exactamente dos vértices de X , son $2k + 1$ las aristas que forman el ciclo y cada vértice cubre 2 de ellas, se debe cumplir entonces que $2 \cdot |B| \geq 2k + 1$ y por lo tanto, el conjunto B debe contener al menos $k + 1$ vértices de X para cubrir las cliques mencionadas. Así vemos que $\tau_C(G) \geq k + 1$. Luego, G no es clique-perfecto. \square

Observemos que todo grafo diamond-free es clique-Helly hereditario, por el teorema 6.1.2, basta notar que las 0, 1, 2, 3-pirámides contienen diamonds como subgrafos inducidos, y esto se puede observar en la figura 7.8.

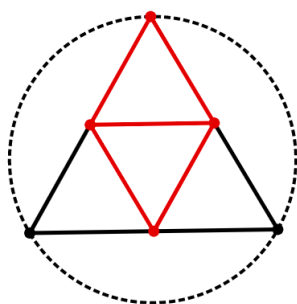


Figura 7.8: Diamond inducido en las 0, 1, 2 y 3-pirámides.

El siguiente teorema fue probado por Flavia Bonomo en [1] y nos permitirá caracterizar los grafos clique-perfectos y neighborhood-perfectos dentro de esta clase de grafos.

Teorema 7.5.3. [1] Sea G un grafo diamond-free. Si G no contiene soles generalizados impares como subgrafos inducidos, entonces G es K -perfecto.

Demostración. Sea G un grafo diamond-free sin soles generalizados impares como subgrafos inducidos, por el SPGT, basta ver que $K(G)$ no contiene holes ni antiholes de longitud impar.

Observación: Si G es diamond-free, entonces $K(G)$ también lo es.

Supongamos que no. Sea $\{K_1, K_2, K_3, K_4\}$ un conjunto de cliques de G que inducen un diamond en $K(G)$, con K_2 y K_4 los únicos no adyacentes en el grafo $K(G)$.

Como G es CHH y los cliques K_1, K_2, K_3 son adyacentes dos a dos, entonces existe un vértice $v_{123} \in K_1 \cap K_2 \cap K_3$. Por el mismo motivo, existe $v_{134} \in K_1 \cap K_3 \cap K_4$.

Tomemos además vértices $v_1 \in K_1$ y $v_3 \in K_3$ que no sean adyacentes entre sí. Esto es posible porque dados dos cliques K, K' y un vértice $v \in K - K'$, entonces v no puede ser adyacente a todos los vértices de K' , porque las cliques son maximales por definición.

El conjunto de vértices $\{v_{123}, v_{134}, v_1, v_3\}$ induce un diamond en G , pues

- los vértices v_{123}, v_{134} y v_1 son adyacentes dos a dos, por pertenecer al clique K_1 ;
- los vértices v_{123}, v_{134} y v_3 son adyacentes dos a dos, por pertenecer al clique K_3 ;
- los vértices v_1 y v_3 no son adyacentes entre sí.

Absurdo, pues G es diamond-free. Esto prueba que $K(G)$ es diamond-free.

Pasemos ahora a probar el teorema.

Todo antihole impar $\overline{C_{2k+1}}$ de longitud mayor o igual a 7, es decir, con $k \geq 2$ contiene diamonds inducidos. En efecto, si numeramos los vértices de $\overline{C_{2k+1}}$ de forma tal que los vértices i, j son adyacentes si y sólo si no son consecutivos módulo $2k+1$, podemos ver que los vértices 1, 3, 4, 6 inducen un diamond. Por lo tanto, si G es diamond-free, $K(G)$ también y luego, $K(G)$ no contiene antiholes de longitud mayor o igual a 7.

Supongamos que $K(G)$ contiene un hole impar, formado por los cliques $K_1, K_2, \dots, K_{2k+1}$, donde K_i es adyacente a K_j en $K(G)$ si y sólo si i y j son consecutivos módulo $2k+1$.

Sea $v_i \in V(G)$ perteneciente a los cliques K_i y K_{i+1} simultáneamente. Así tenemos entonces un ciclo impar C en G , formado por los vértices $v_1, v_2, \dots, v_{2k+1}$.

Como G no contiene soles generalizados impares, C debe contener al menos una arista impropia, sea (v_{i_0}, v_{i_0+1}) tal arista y v_{j_0} otro vértice del ciclo tal que el conjunto $\{v_{i_0}, v_{i_0+1}, v_{j_0}\}$ induce un triángulo.

Por lo mencionado anteriormente, podemos tomar $v \in K_{i_0+1}$ no adyacente a v_{j_0} y así el conjunto de vértices $\{v_{i_0}, v_{i_0+1}, v_{j_0}, v\}$ cumple que

- $v_{i_0}, v_{i_0+1}, v \in K_{i_0+1}$ y por lo tanto, son adyacentes entre sí,
- v_{j_0} es adyacente a v_{i_0} y a v_{i_0+1} , pero no a v .

Luego, este conjunto de vértices induce un diamond en G , lo cual es absurdo.

Hemos probado finalmente que si G es diamond-free y no contiene soles generalizados impares, entonces $K(G)$ es perfecto. \square

De todo lo ya probado se deduce el siguiente teorema que fue probado principalmente por Flavia Bonomo en [1] y completado por Xavier Warnes en [27].

Teorema 7.5.4. [1, 27] Si el grafo G es diamond-free, entonces son equivalentes:

1. G es clique-perfecto.
2. G no contiene $(2k + 1)$ -soles generalizados.
3. G es neighborhood-perfecto.
4. G es K-perfecto hereditario.

Demostración. La equivalencia entre 1. y 3. se deduce del teorema 6.1.5, dado que los grafos diamond-free son CHH. Por el lema 7.5.2, donde probamos que los soles generalizados impares no son clique-perfectos, tenemos que 1. implica 2.. Por último, el teorema 7.5.3 nos dice que 2. implica 4., mientras que el teorema 6.2.5 prueba que 4. implica 1., sabiendo que los grafos diamond-free son CHH. Así queda probado el teorema. \square

Observemos que no todo sol generalizado es diamond-free, los soles generalizados diamond-free no contienen aristas impropias. Sea G un r -sol generalizado con X el conjunto de vértices que inducen el ciclo e Y el conjunto de vértices restantes. Si $|Y| \geq 1$ significa que existe una arista impropia (x, x') que forma un triángulo con otro vértice x'' del ciclo, con $x, x', x'' \in X$ y un vértice $y \in Y$ que induce un triángulo con los vértices x, x' , pero no es adyacente a ningún otro vértice del ciclo. Luego, el conjunto de vértices $\{x, x', x'', y\}$ induce un diamond en G . Por lo tanto, si G es un diamond-free, el conjunto Y debe ser vacío, lo que equivale a decir que el ciclo formado por los vértices de X no contenga aristas impropias.

Para el reconocimiento de los grafos clique-perfectos y neighborhood-perfectos dentro de la clase de grafos diamond-free, debemos determinar, dado un grafo diamond-free, si este contiene ciclos impares sin aristas impropias o no. Queda por pensar si existe un algoritmo polinomial que utilice esta idea para el reconocimiento de grafos clique-perfectos y neighborhood-perfectos, asumiendo que el grafo dado es diamond-free.

Sobre la complejidad del problema de reconocimiento de grafos clique-perfectos y neighborhood-perfectos dentro de la clase de grafos diamond-free, Flavia Bonomo, Guillermo Durán, Martín Safe y Annegret Wagleren probaron en [6] que existe un algoritmo polinomial que resuelve este problema. Aunque el algoritmo propuesto utiliza el hecho de que estas clases coinciden con la clase de grafos balanceados, de los cuales no hablamos en esta tesis, dentro de la clase de grafos diamond-free.

Corolario 7.5.5. [6] Existe un algoritmo polinomial que dado un grafo diamond-free decide si es neighborhood-perfecto y clique-perfecto o no.

Sabemos que todo grafo diamond-free que no contiene soles generalizados impares es clique-Helly hereditario y K -perfecto, esto nos permite afirmar, mediante el teorema 6.2.5, que es coordinado. Es decir, en la clase de grafos diamond-free, todo grafo clique-perfecto o neighborhood-perfecto es coordinado.

Sin embargo, la clase de grafos coordinados no es equivalente a las demás, en la figura 7.9 se muestra un ejemplo de un sol generalizado impar, diamond-free que es coordinado.

Sabemos que todo grafo coordinado es a su vez perfecto, por el teorema 4.0.5. Nos preguntamos ahora si en la clase de grafos diamond-free será equivalente ser coordinado que ser perfecto.

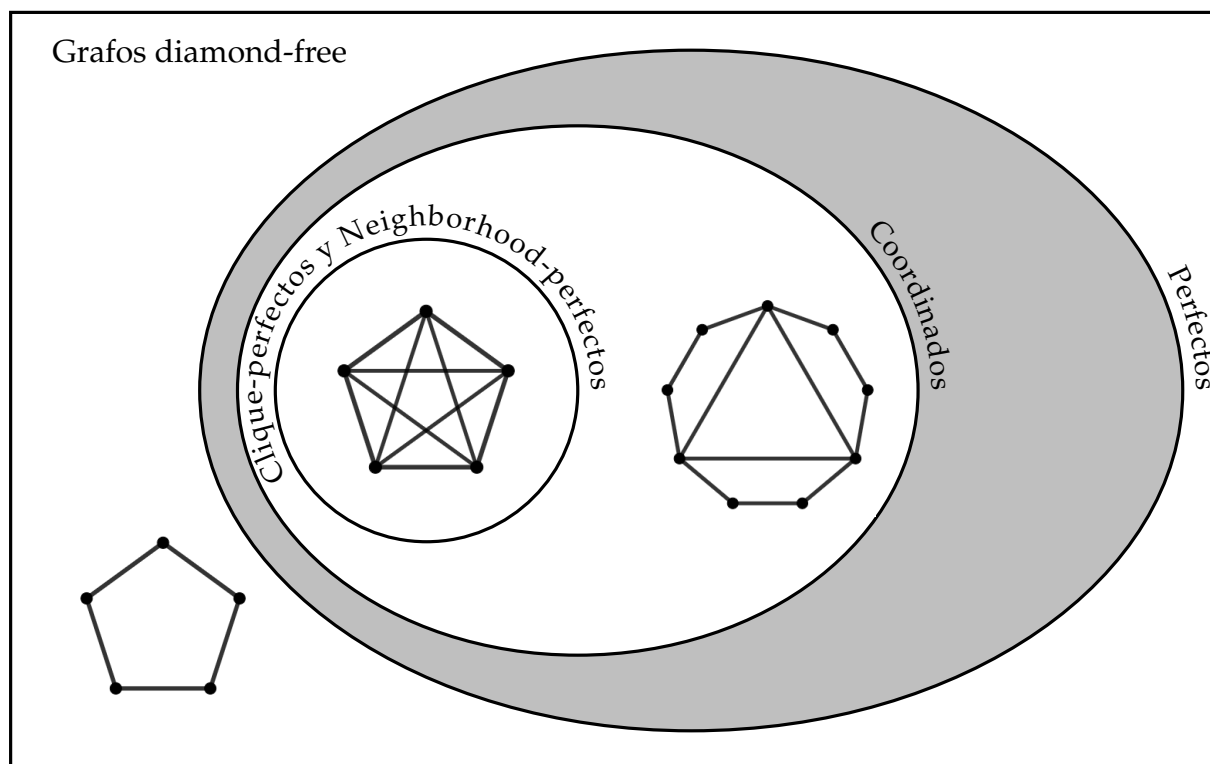


Figura 7.9: Relaciones entre las clases de grafos perfectos, neighborhood-perfectos, clique-perfectos y coordinados dentro de la clase de grafos diamond-free.

Sea G un grafo diamond-free y sean K, K' dos cliques distintos de G , adyacentes entre sí. Tomemos $v \in K$ tal que $v \notin K'$, además v no puede ser adyacente a todos los vértices de K' porque esto contradiría la maximalidad del clique K' , tomemos entonces $v' \in K'$ tal que v' no sea adyacente a v y, en particular, $v' \notin K$. Si K y K' tuvieran al menos 2 vértices en común v_0, v_1 , el conjunto de vértices $\{v, v', v_0, v_1\}$ induciría un diamond en G . Por lo tanto, un par de cliques de un grafo diamond-free tiene a lo sumo un vértice en común, es decir, cada arista de G pertenece a un único clique.

Como la clase de grafos diamond-free y perfectos es hereditaria, para ver que todo grafo de

esta clase es coordinado bastaría con probar que para todo grafo G en esta clase satisface que $M(G) = F(G)$.

Mencionaremos una posible traducción del problema de determinar si un grafo diamond-free es coordinado al universo de los hipergrafos. Un *hipergrafo* \mathcal{H} es un par (X, \mathcal{E}) donde X es un conjunto de vértices y \mathcal{E} es un conjunto de subconjuntos de $\mathcal{P}(X)$ a cuyos elementos llamamos *hiperaristas*.

A partir de un grafo G diamond-free y perfecto podemos construir un hipergrafo \mathcal{H} tal que $V(\mathcal{H}) = V(G)$ y $\mathcal{E}(\mathcal{H})$ sea el conjunto de cliques de G . Sabemos que dos aristas de \mathcal{H} tienen a lo sumo un vértice en común.

De esta forma vemos que el problema de probar que G cumple $M(G) = F(G)$ es equivalente al de probar que el índice cromático de \mathcal{H} coincide con el grado máximo de \mathcal{H} .

Donde definimos, por un lado, el *índice cromático* de un hipergrafo como la cantidad mínima de colores necesarios para colorear las hiperaristas de forma tal que a hiperaristas que tengan al menos un vértice en común se les asignen colores distintos. Por otro lado, definimos el *grado máximo* de un hipergrafo como la cantidad máxima de hiperaristas a la que pertenece un vértice.

7.6. Grafos cordales

Un grafo es *cordal* si todo ciclo de longitud por lo menos 4 tiene al menos una cuerda.

Notemos que los grafos cordales son perfectos. Esto se debe a que los holes impares no son cordales, dado que son ciclos sin cuerdas, y a su vez, los antiholes impares con longitud mayor a 5 no son cordales, por contener C_4 como subgrafos inducidos. Estas observaciones nos permiten afirmar, mediante el SPGT, que todo grafo cordal es perfecto.

Veamos ahora la relación entre los grafos clique-perfectos y neighborhood-perfectos, dentro de la clase de grafos cordales.

Un r -sol es un grafo cordal con un ciclo de longitud r y r vértices cada uno de ellos adyacente a los extremos de una arista del ciclo.

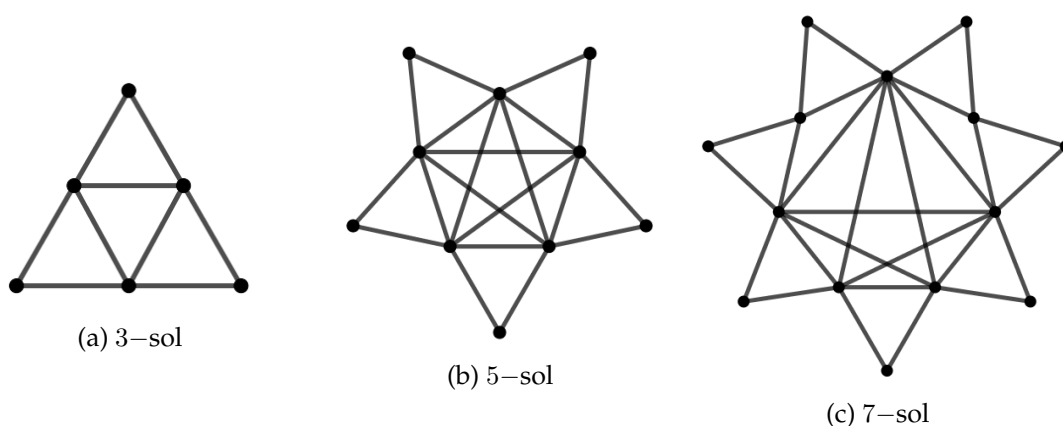


Figura 7.10: Ejemplos de r -soles.

Lema 7.6.1. $(2k + 1)$ -sol no es clique-perfecto.

Demostración. Sea G un $(2k + 1)$ -sol. Veamos que $\alpha_C(G) = k$ mientras que $\tau_C(G) \geq k + 1$. Llamemos X al conjunto de $2k + 1$ vértices que forman el grafo cordal e Y al conjunto de $2k + 1$ vértices exteriores.

Por un lado, notemos que toda clique en G contiene al menos 2 vértices de X , pues no hay vértices aislados y las cliques que contienen vértices del conjunto Y son triángulos con 2 vértices de X . Si C es un conjunto independiente de cliques, sabemos que $2 \cdot |C| \leq 2k + 1$ pues el conjunto C no contiene cliques con vértices en común y cada una de estas cliques contiene por lo menos 2 vértices del conjunto X , que tiene $2k + 1$ elementos en total, con esto concluimos que $\alpha_C(G) \leq k$. Efectivamente hay un conjunto independiente de cliques de tamaño k , que es el formado por los triángulos exteriores elegidos alternadamente. Así tenemos que $\alpha_C(G) = k$. Por otro lado, vemos que cada uno de los vértices del conjunto X cubre 2 de los triángulos exteriores, mientras que los del conjunto Y cubren 1 triángulo exterior cada uno. Si C' es un cubrimiento de las cliques de G por vértices, sabemos que $2 \cdot |C'| \geq 2k + 1$ pues cada uno de los vértices de C' cubre a lo sumo 2 vértices del conjunto Y , que tiene $2k + 1$ elementos en total,

con esto concluimos que $\tau_C(G) \geq k + 1$.

Luego, G no es clique-perfecto. □

Lema 7.6.2. $(2k + 1)$ -sol no es neighborhood-perfecto.

Demostración. Sea G un $(2k + 1)$ -sol. Veamos que $\alpha_N(G) \leq k$ mientras que $\rho_N(G) \geq k + 1$. Llamemos X al conjunto de $2k + 1$ vértices que forman el grafo cordal e Y al conjunto de $2k + 1$ vértices exteriores.

Si C es un conjunto neighborhood-independiente, notemos que cada arista $e \in C$ es de alguno de los siguientes tipos:

- e es una arista del grafo cordal formado por los vértices de X y luego, ambos extremos de e son vértices de X que no pueden ser extremos de otra arista del conjunto X por ser neighborhood-independientes.
- e pertenece a algunos de los triángulos formados por 1 vértice de Y y 2 vértices de X , denotemos x, y a los extremos de e con $x \in X$ e $y \in Y$, y x' al otro vértice de X adyacente a y . Como e pertenece tanto a la vecindad de x como a la de x' , ninguna otra arista de C puede tener a x o a x' como extremos.

Así vemos que $2 \cdot |C| \leq 2k + 1$ pues cada arista de C cubre al menos 2 vértices de X y X tiene $2k + 1$ elementos. Por lo tanto, $\alpha_N(G) \leq k$.

Si C' es un neighborhood-covering set, sabemos que $2 \cdot |C'| \geq 2k + 1$, pues cada vértice $v \in V(G)$ tiene en su vecindad a lo sumo 2 vértices del conjunto Y , y éste tiene $2k + 1$ elementos. Por lo tanto, $\rho_N(G) \geq k + 1$.

Luego, G no es neighborhood-perfecto. □

Ningún grafo clique-perfecto o neighborhood-perfecto puede contener soles impares como subgrafos inducidos, por lo visto en los lemas anteriores. Lehel y Tuza probaron en [17] que en el caso de los grafos neighborhood-perfectos esta condición es suficiente, es decir, un grafo cordal es neighborhood-perfecto si y sólo si no contiene soles impares.

Además, podemos ver que un grafo cordal es CHH si y sólo si no contiene 0-pirámides como subgrafos inducidos, esto se deduce del teorema 6.1.2 viendo que 1, 2, 3-pirámides no son cordales por contener ciclos de longitud 4 sin cuerdas, como se puede ver en la figura 7.11.

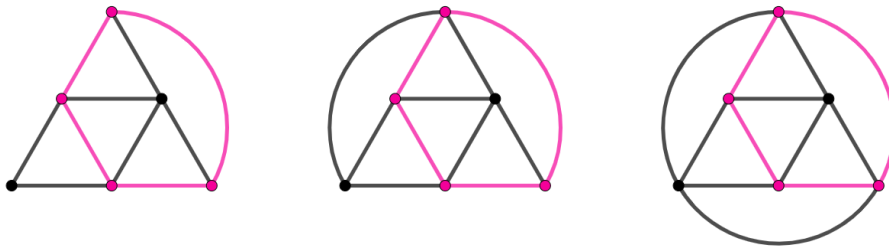


Figura 7.11: C_4 inducidos en 1, 2 y 3-pirámides.

Por lo tanto, dado G un grafo cordal que no contiene soles impares como subgrafos inducidos, en particular no contiene 3-soles, podemos entonces afirmar que G es CHH usando el teorema 6.1.2, ya que 3-sol y 0-pirámide son dos nombres distintos del mismo grafo. Por el corolario 6.1.6, tenemos que si G es un grafo cordal que no contiene soles impares como subgrafos inducidos, entonces es clique-perfecto si y sólo si es neighborhood-perfecto.

Así llegamos entonces al siguiente teorema, que queda probado por todo lo mencionado.

Teorema 7.6.3. [17] Sea G un grafo cordal. Son equivalentes:

1. G es clique-perfecto.
2. G no contiene soles impares como subgrafos inducidos.
3. G es neighborhood-perfecto.

Sobre la complejidad del problema de reconocimiento de grafos clique-perfectos y neighborhood-perfectos dentro de la clase de grafos cordales, J. Lehel y Zs. Tuza probaron en [17] que existe un algoritmo polinomial que resuelve este problema, aunque el algoritmo propuesto utiliza el hecho de que estas clases coinciden con la clase de grafos balanceados, de los cuales no hablamos en esta tesis, dentro de la clase de grafos cordales.

Queda por encontrar un algoritmo de reconocimiento que no implique usar la equivalencia con la clase de grafos balanceados.

Teorema 7.6.4. [17] Existe un algoritmo polinomial que dado un grafo cordal decide si es neighborhood-perfecto y clique-perfecto o no.

En el caso de los grafos coordinados, no se conoce aún una caracterización completa por subgrafos inducidos prohibidos dentro de la clase de grafos cordales. Se sabe que dentro de los grafos cordales, ser clique-perfecto implica ser coordinado, pero nuevamente la prueba de esta propiedad se reduce a observar que la clase de grafos coincide con la clase de grafos balanceados dentro de la clase de grafos cordales [17] y que los grafos balanceados siempre son coordinados, esto último fue probado por Flavia Bonomo, Guillermo Durán, Min Chih Lin y Jayme L Szwarcfiter en [5].

Lema 7.6.5. Sea G un grafo cordal. Si G es clique-perfecto, entonces G es coordinado.

Pero notamos que la clase de grafos coordinados no coincide con la clase de grafos clique-perfectos y neighborhood-perfectos dentro de la clase de grafos cordales, en la figura 7.12 se muestra un 5-sol coordinado, que por lo probado en los lemas 7.6.1 y 7.6.2.

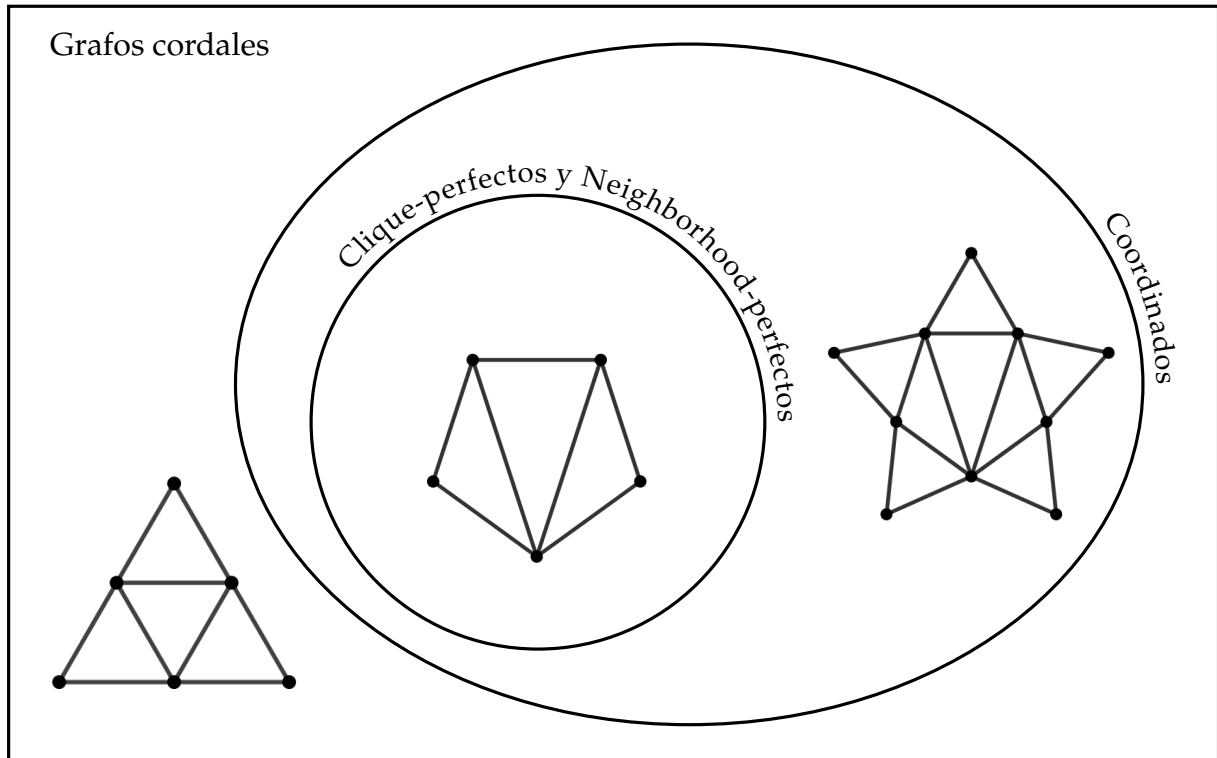


Figura 7.12: Relaciones entre las clases de grafos coordinados, clique-perfectos y neighborhood-perfectos dentro de la clase de grafos cordales.

7.7. Grafos de línea

Recordemos que dada \mathcal{C} una familia finita de conjuntos no vacíos, el grafo de intersección de \mathcal{C} es el que se obtiene al representar cada conjunto con un vértice y dos vértices son adyacentes si y solo si la intersección de dichos conjuntos es no vacía.

Dado G un grafo, el grafo de línea $L(G)$ de G se define como el grafo de intersección de las aristas de G . Un grafo F se dice grafo de línea si existe un grafo H tal que $L(H) = F$.

Notemos que la clase de grafos de línea es hereditaria, es decir, dado un grafo de línea G , todo subgrafo inducido G' de G también es un grafo de línea. Sea H un grafo tal que $G = L(H)$ y sea $V' \subseteq V(G)$ el conjunto de vértices de G que inducen el grafo G' , dichos vértices de G se corresponden con aristas de H . Tomemos H' subgrafo de H tal que $V(H') = V(H)$ y $E(H') = V' \subseteq E(H)$. Resulta que $G' = L(H')$.

Se puede reconocer si un grafo dado es un grafo de línea o no en tiempo lineal. Más aún, en [18] se exhibe un algoritmo lineal que dado un grafo G devuelve un grafo H tal que $G = L(H)$, si existe, y dice que G no es un grafo de línea, en caso contrario.

Los grafos de línea son una subclase de los grafos claw-free, por ser ambas clases de grafos hereditarias, basta ver que un claw no es un grafo de línea. Sea G un claw con $V(G) = \{l_0, l_1, l_2, l_3\}$ y l_0 el vértice de grado 3. Supongamos que existe H tal que $G = L(H)$, las aristas de H representadas por l_1, l_2 y l_3 deben ser todas adyacentes a la arista de H representada por l_0 , hay entonces al menos 2 de estas aristas que comparten un vértice, lo cual es absurdo porque los vértices de G que representan estas aristas no son adyacentes.

Con el objetivo de caracterizar los grafos perfectos dentro de la clase de grafos de línea, veamos el siguiente lema.

Lema 7.7.1. Un grafo de línea no contiene antiholes impares de longitud mayor que 5.

Demostración. Sea G un grafo de línea y H un grafo tal que $L(H) = G$. Supongamos que G contiene un antihole impar de longitud $2k + 1$ con $k > 2$, numeramos los vértices del antihole de forma que i es adyacente a j si y sólo si i, j no son consecutivos módulo $2k + 1$.

En particular, los vértices 1, 2, 3, 5 y 6 de dicho antihole, inducen un grafo isomorfo al de la figura 7.13.

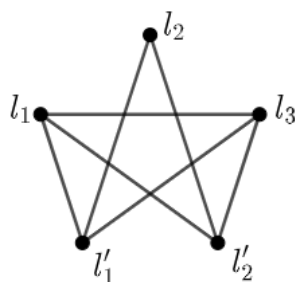


Figura 7.13: Subgrafo inducido de un antihole que no es un grafo de línea.

Como todo subgrafo inducido de un grafo de línea es a su vez un grafo de línea, nos alcanza con probar que el grafo de la figura 7.13 no es un grafo de línea. Denotamos G' al grafo que se muestra en la figura 7.13.

Supongamos que existe cierto grafo H' tal que $G' = L(H')$. Tomemos vértices h_1, h_2, h_3 de H' tales que el vértice l_1 de G' representa a la arista (h_1, h_2) de H' y el vértice l_3 representa a la arista (h_2, h_3) . Como las aristas correspondientes a los vértices l'_1 y l'_2 deben ser adyacentes a las aristas (h_1, h_2) y (h_2, h_3) pero no adyacentes entre sí, uno de ellos corresponde a la arista (h_1, h_3) de H' y otro a la arista (h_2, h_4) , siendo h_4 otro vértice de H' distinto de los ya mencionados. Resta ver qué arista de H' representa a l_2 , esta arista debe ser adyacente a (h_1, h_3) y a (h_2, h_4) , pero no a (h_1, h_2) y (h_2, h_3) , lo cual es imposible, pues al compartir un extremo con la arista (h_1, h_3) , también deberá ser adyacente a alguna de las aristas (h_1, h_2) o (h_2, h_3) .

Así probamos que el grafo G' de la figura 7.13 no es un grafo de línea y, por lo tanto, que los antiholes impares de longitud mayor que 5 tampoco lo son. \square

En el siguiente teorema se caracteriza a los grafos perfectos dentro de la clase de grafos de línea, éste fue probado en [26], aunque la demostración no es la misma que se propone a continuación, la demostración que sigue es propia.

Teorema 7.7.2. [26] Sea H un grafo y $G = L(H)$ su grafo de línea. Entonces, G es perfecto si y sólo si H no contiene ciclos impares de longitud mayor que 3.

Demostración. Sea $G = L(H)$ perfecto, como los holes impares no son perfectos, sabemos que G no contiene holes impares.

Supongamos que H contiene un ciclo impar v_1, \dots, v_{2k+1} con $k \geq 2$, este ciclo induce en ciclo l_1, \dots, l_{2k+1} en $L(H)$ donde l_i es el vértice de $L(H)$ que representa a la arista (v_i, v_{i+1}) para todo $i \in \{1, \dots, 2k\}$ y l_{2k+1} representa a la arista (v_{2k+1}, v_1) . El ciclo en G formado por los vértices l_1, \dots, l_{2k+1} no tiene cuerdas, pues las aristas representadas por los vértices l_i y l_j son adyacentes si y sólo si i y j son consecutivos módulo $2k + 1$. Luego, G contiene un hole impar, lo cual es absurdo. Así vemos que si $G = L(H)$ es perfecto, H no contiene ciclos impares de longitud mayor que 3.

Sea H un grafo sin ciclos impares de longitud mayor que 3, debemos ver que $G = L(H)$ no contiene holes impares, así por medio del SPGT y el lema 7.7.1 podremos afirmar que G es perfecto.

Supongamos que G contiene un hole impar inducido por los vértices l_1, \dots, l_{2k+1} con $k \geq 2$. Veamos que las aristas de H que corresponden a estos vértices forman un ciclo de longitud $2k + 1$. Sean $v_1, v_2, \dots, v_{2k+1}$ vértices de H tales que $v_i \in l_{i-1} \cap l_i$ para cada $i \in \{2, \dots, 2k + 1\}$ y $v_1 \in l_1 \cap l_{2k+1}$, notemos que la intersección de un par de aristas distintas contiene a lo sumo un vértice, esto nos dice que hay una única forma de elegir estos v_i , además, los vértices elegidos cumplen que $v_i \neq v_j$ si $i \neq j$ ya que $l_{i-1} \cap l_i \cap l_{j-1} \cap l_j = \emptyset$. De esta forma, el conjunto de vértices $\{v_1, v_2, \dots, v_{2k+1}\}$ induce un ciclo de longitud $2k + 1$ en H , lo cual es absurdo. Concluimos entonces que G no contiene holes impares y luego, G es perfecto. \square

Veamos ahora cómo se pueden caracterizar las clases de grafos clique-perfectos y la de grafos coordinados, dentro de la clase de grafos de línea.

Por el lema 7.7.1 y el SPGT, sabemos que en la clase de grafos de línea, que un grafo sea perfecto es equivalente a que no contenga holes impares como subgrafos inducidos. Como los holes impares no son clique-perfectos ni coordinados y la 0–pirámide tampoco, la parte importante es la demostración de que un grafo de línea que no contiene holes impares ni 0–pirámides como subgrafos inducidos es clique-perfecto, esto fue probado por Flavia Bonomo, Maria Chudnovsky y Guillermo Durán en [2] y que es coordinado, lo que fue probado por Flavia Bonomo, Guillermo Durán, Francisco Soullignac y Gabriel Sueiro en [8].

Teorema 7.7.3. [2, 8] Sea G un grafo de línea. Son equivalentes:

1. G es clique-perfecto.
2. G no contiene holes impares ni 0–pirámides como subgrafos inducidos.
3. G es perfecto y no contiene 0–pirámides como subgrafos inducidos.
4. G es coordinado.

A partir de la caracterización dada por el teorema anterior y algunas otras, Flavia Bonomo, Guillermo Durán, Francisco Soullignac y Gabriel Sueiro lograron encontrar en [8] un algoritmo que permite reconocer si un grafo es coordinado, dado un grafo de línea.

Teorema 7.7.4. [8] Existe un algoritmo lineal que dado un grafo de línea decide si es coordinado y clique-perfecto o no.

Jenö Lehel probó en [16] la siguiente caracterización de los grafos neighborhood-perfectos dentro de la clase de grafos de línea.

Teorema 7.7.5. [16] Sea G un grafo de línea. Entonces, G es neighborhood-perfecto si y sólo si no contiene holes impares ni ninguno de los grafos de la figura 7.14 como subgrafos inducidos.

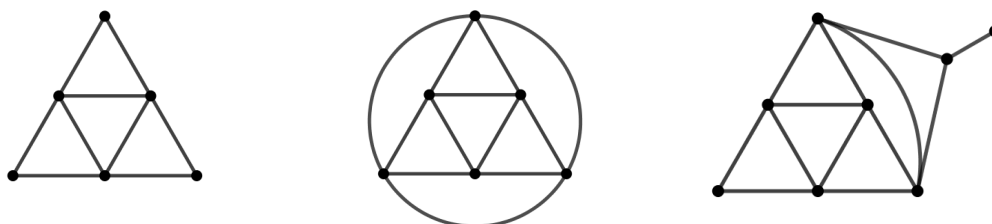


Figura 7.14: Subgrafos prohibidos en grafos linea neighborhood-perfectos.

Observemos que, dentro de la clase de grafos de línea, la clase de grafos neighborhood- perfectos está contenida dentro de la clase de grafos que son coordinados y clique-perfectos, comparando las caracterizaciones dadas por los teoremas 7.7.5 y 7.7.3. Además, esta inclusión es estricta ya que una 3–pirámide es un grafo de línea coordinado y clique-perfecto, pero no neighborhood-perfecto, como se puede ver en la figura 7.15.

Por otro lado, dentro de la clase de grafos de línea, la clase de grafos coordinados y clique-perfectos está contenida dentro de la clase de grafos perfectos, comparando las caracterizaciones dadas por los teoremas 7.7.2 y 7.7.3. Además, esta inclusión es estricta ya que una 0–pirámide es un grafo de línea perfecto, pero no es coordinado ni clique-perfecto, esto también se puede ver en la figura 7.15.

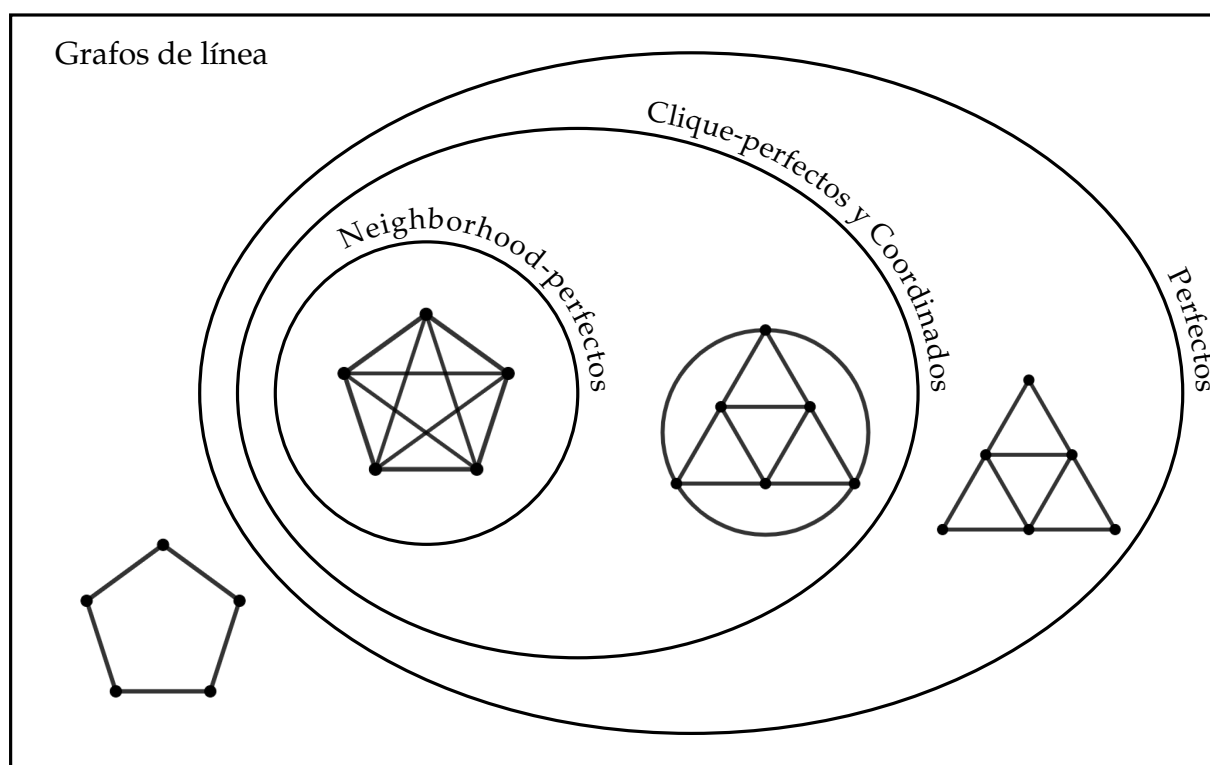


Figura 7.15: Relaciones entre las clases de grafos perfectos, neighborhood-perfectos, clique-perfectos y coordinados dentro de la clase de grafos de línea.

Capítulo 8

Conclusiones y trabajo futuro

En esta tesis trabajamos principalmente con cuatro clases de grafos: perfectos, clique-perfectos, coordinados y neighborhood-perfectos, todas ellas clases de grafos hereditarias definidas por la igualdad entre dos parámetros.

En el caso de los grafos perfectos, mencionamos el teorema fuerte de los grafos perfectos que nos da una caracterización completa de esta clase de grafos por subgrafos inducidos prohibidos y la existencia de un algoritmo de reconocimiento polinomial. Estudiamos la relación entre las otras clases de grafos mencionadas con la clase de grafos perfectos y observamos que tanto la clase de grafos coordinados como la de grafos neighborhood-perfectos están contenidas dentro de la clase de grafos perfectos, no así en el caso de los clique-perfectos.

Para los clique-perfectos, coordinados y neighborhood-perfectos, comentamos que no se conoce aún una caracterización completa por subgrafos inducidos en general, tampoco se conoce la complejidad del problema de reconocimiento en el caso de los clique-perfectos ni en el de los neighborhood-perfectos. En el caso de los grafos coordinados se sabe que el problema de reconocimiento es NP-hard.

En el capítulo 7 definimos y analizamos las clases de grafos sin triángulos, paw-free, claw-free CHH, {gem, W_4 , bull}-free, diamond-free, cordales y los grafos de línea. Para cada una de estas clases, hemos caracterizado tanto los grafos perfectos como sus tres variaciones mencionadas, restringir el problema a estas clases nos permitió dar caracterizaciones por subgrafos inducidos prohibidos en la mayoría de los casos, así como algoritmos polinomiales de reconocimiento. En este capítulo quedaron algunas preguntas por responder, entre ellas, no se conoce aún una caracterización completa por subgrafos inducidos prohibidos de los grafos coordinados dentro de la clase de grafos diamond-free, aunque se conjetura que esta coincide con la clase de grafos perfectos. Tampoco se conoce una caracterización de los grafos coordinados dentro de la clase de grafos cordales, pero se sabe que no coincide con la clase de grafos perfectos ni con la clase de grafos clique-perfectos y neighborhood-perfectos. Queda seguir estudiando estas clases para intentar responder estas preguntas y poder así dar caracterizaciones completas por subgrafos inducidos prohibidos de las clases de grafos coordinados dentro de la clase de grafos diamond-free y dentro de la clase de grafos cordales.

Como trabajo futuro queda también estudiar caracterizaciones por subgrafos inducidos prohibidos y algoritmos de reconocimiento de las clases de grafos perfectos y sus variaciones, restringidos a otras clases de grafos. Además de intentar abordar el problema de caracterización de las clases de grafos clique-perfectos, coordinados y neighborhood-perfectos en el caso general.

Bibliografía

- [1] F. Bonomo. *Sobre subclases y variantes de los grafos perfectos*. Tesis doctoral. Departamento de Computación, FCEyN-UBA. 2008.
- [2] F. Bonomo, M. Chudnovsky y G. Durán. "Partial characterizations of clique-perfect graphs. I. Subclasses of claw-free graphs". En: *Discrete Appl. Math.* 156.7 (2008), págs. 1058-1082.
- [3] F. Bonomo, G. Durán y M. Groshaus. "Coordinated graphs and clique graphs of clique-Helly perfect graphs". En: *Util. Math.* 72 (2007), págs. 175-191.
- [4] F. Bonomo, G. Durán, M. Groshaus y J. L. Szwarcfiter. "On clique-perfect and K -perfect graphs". En: *Ars Combin.* 80 (2006), págs. 97-112.
- [5] F. Bonomo, G. Durán, M. C. Lin y J. L. Szwarcfiter. "On balanced graphs". En: *Math. Program.* 105.2-3, Ser. B (2006), págs. 233-250.
- [6] F. Bonomo, G. Durán, M. D. Safe y A. K. Wagler. "Clique-perfectness and balancedness of some graph classes". En: *Int. J. Comput. Math.* 91.10 (2014), págs. 2118-2141.
- [7] F. Bonomo, G. Durán, F. Soullignac y G. Sueiro. "Partial characterizations of clique-perfect and coordinated graphs: superclasses of triangle-free graphs". En: *Discrete Appl. Math.* 157.17 (2009), págs. 3511-3518.
- [8] F. Bonomo, G. Durán, F. Soullignac y G. Sueiro. "Partial characterizations of coordinated graphs: line graphs and complements of forests". En: *Math. Methods Oper. Res.* 69.2 (2009), págs. 251-270.
- [9] F. Bonomo-Braberman, G. Durán, M. D. Safe y A. Wagler. "On some graph classes related to perfect graphs: A survey". En: *Discret. Appl. Math.* 281 (2020), págs. 42-60.
- [10] M. Chudnovsky, N. Robertson, P. Seymour y R. Thomas. "The strong perfect graph theorem". En: *Ann. of Math. (2)* 164.1 (2006), págs. 51-229.
- [11] M. Chudnovsky, G. Cornuéjols, X. Liu, P. Seymour y K. Vušković. "Recognizing Berge graphs". En: *Combinatorica* 25.2 (2005), págs. 143-186.
- [12] G. Durán, M. C. Lin y J. L. Szwarcfiter. "On clique-transversals and clique-independent sets". En: *Ann. Oper. Res.* 116 (2002), págs. 71-77.
- [13] M. Groshaus. *Sobre grafos perfectos, clique-perfectos, K -perfectos y coordinados*. Tesis de licenciatura. Departamento de Matemática, FCEyN-UBA. 2001.
- [14] V. Guruswami y C. P. Rangan. "Algorithmic aspects of clique-transversal and clique-independent sets". En: *Discrete Appl. Math.* 100.3 (2000), págs. 183-202.

-
- [15] D. König. "Über Graphen und ihre Anwendung auf Determinantentheorie und Mengenlehre". En: *Math. Ann.* 77.4 (1916), págs. 453-465.
- [16] J. Lehel. "Neighbourhood-perfect line graphs". En: *Graphs Combin.* 10.4 (1994), págs. 353-361.
- [17] J. Lehel y Z. Tuza. "Neighborhood perfect graphs". En: *Discrete Math.* 61.1 (1986), págs. 93-101.
- [18] P. G. H. Lehot. "An optimal algorithm to detect a line graph and output its root graph". En: *J. Assoc. Comput. Mach.* 21 (1974), págs. 569-575.
- [19] M. C. Lin y J. L. Szwarcfiter. "Faster recognition of clique-Helly and hereditary clique-Helly graphs". En: *Inform. Process. Lett.* 103.1 (2007), págs. 40-43.
- [20] L. Lovász. "A characterization of perfect graphs". En: *J. Combinatorial Theory Ser. B* 13 (1972), págs. 95-98.
- [21] S. Olariu. "Paw-free graphs". En: *Inform. Process. Lett.* 28.1 (1988), págs. 53-54.
- [22] E. Prisner. "Hereditary clique-Helly graphs". En: *J. Combin. Math. Combin. Comput.* 14 (1993), págs. 216-220.
- [23] M. Safe. *Sobre caracterizaciones estructurales de clases de grafos relacionadas con los grafos perfectos y la propiedad de König*. Tesis doctoral. Departamento de Computación, FCEyN-UBA. 2011.
- [24] F. Soullignac y G. Sueiro. "Exponential families of minimally non-coordinated graphs". En: *Rev. Un. Mat. Argentina* 50.1 (2009), págs. 75-85.
- [25] F. Soullignac y G. Sueiro. "NP-hardness of the recognition of coordinated graphs". En: *Ann. Oper. Res.* 169 (2009), págs. 17-34.
- [26] L. E. Trotter Jr. "Line perfect graphs". En: *Math. Programming* 12.2 (1977), págs. 255-259.
- [27] X. Warnes. *Structural and Algorithmic Results on Neighborhood-Perfect Graphs and Neighborhood Numbers*. Tesis de licenciatura. Departamento de Matemática, FCEyN-UBA. 2014.