UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales

Departamento de Matemática

Tesis de Licenciatura

Teoría de juegos y soluciones viscosas para un sistema de ecuaciones diferenciales parciales

Alfredo Miranda

Director: Julio D. Rossi

15/09/2020

Agradecimientos

Quiero comenzar agradeciendo a mi director de tesis Julio D. Rossi, cuyas enseñanzas exceden lo estrictamente matemático, y quien me permitió tener mis primeras experiencias como investigador, participar en congresos, viajar, conocer otros matemáticos; en pocas palabras, agradecerle por compartir conmigo, generosamente, su experiencia y conocimiento, por su dedicación y por guiarme en este camino para desarrollarme como científico.
En segundo lugar, me gustará hacer una mención especial a mis jurados, Gabriel Acosta y Pablo Groisman, por tomarse el tiempo de corregir y evaluar este trabajo.
También quiero agradecer a todas las personas que estuvieron y están cerca mío, acompañandome y escuchándo incansablemente mis historias de juegos y estrategias.
Finalmente agradezco a mi familia por el apoyo incondicional que me dieron siempre.

1. Introducción

En este trabajo vamos a obtener soluciones viscosas de un sistema de ecuaciones con dos operadores distintos (el Laplaciano y el Infinito Laplaciano) utilizando juegos probabilísticos que aproximen a la solución. Construiremos un juego que combina las reglas *Tug-of-War* y *paseos aleatorios* en dos tablero diferentes. Probaremos que el valor esperado del juego existe y es único. Y finalmente veremos que este valor converge uniformemente a la solución del sistema.

1.1. Nuestro Sistema de Ecuaciones Diferenciales

El objetivo de este trabajo es construir un par de funciones continuas (u, v) soluciones del sistema

$$\begin{cases} -\frac{1}{2}\Delta_\infty u(x) + u(x) - v(x) = 0 & si\ x \in \Omega, \\ -\frac{\kappa}{2}\Delta v(x) + v(x) - u(x) = 0 & si\ x \in \Omega, \\ u(x) = f(x) & si\ x \in \partial\Omega, \\ v(x) = g(x) & si\ x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{1}$$

donde κ es una constante a definir. Al conjunto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ le pediremos que sea abierto conexo con borde Lipschitz, y que además cumpla la propiedad de tener una bola uniforme tangente exterior. Esto quiere decir que existe una constante $\theta > 0$ tal que para todo $y \in \partial\Omega$ existe una bola cerrada de radio θ que solo corta a $\overline{\Omega}$ en y. Esto es equivalente a decir que para todo $y \in \partial\Omega$ extiste un z_y tal que $\overline{B_\theta(z_y)} \cap \overline{\Omega} = \{y\}$. A las funciones f y g vamos a pedirles que sean Lipshitz.

Como se puede ver el sistema relaciona dos operadores diferenciales, por un lado el *Laplaciano* que se define como

$$\Delta\phi = \sum_{i=1}^{n} \partial_{x_i x_i}\phi$$

y el *Infinito Laplaciano* que se define como

$$\Delta_\infty\phi = \begin{cases} \langle D^2\phi \frac{\nabla\phi}{|\nabla\phi|}, \frac{\nabla\phi}{|\nabla\phi|}\rangle & si\ \nabla\phi \neq 0, \\ 0 & si\ \nabla\phi = 0. \end{cases}$$

Siendo

$$\langle D^2\phi \frac{\nabla\phi}{|\nabla\phi|}, \frac{\nabla\phi}{|\nabla\phi|}\rangle = \frac{1}{|\nabla\phi|^2} \sum_{i,j=1}^{n} \partial_{x_i}\phi \partial_{x_i x_j}\phi \partial_{x_j}\phi.$$

Observar que en ambos casos será necesario pedirle a las funciones cierta suavidad, por ejemplo ser $\mathscr{C}^2$, para evaluar setos operadores puntualmente. Las funciones u y v que vamos a construir como soluciones serán continuas, pero no podemos obtener más regularidad. Es por este motivo que debemos considerar a tales u y v (sólo continuas) como soluciones generalizadas, *soluciones viscosas*, del sistema (1.1).

Introduzcamos entonces la definición precisa de solución viscosa para una ecuación en derivadas parciales totalmente no-lineal,

Definición 1. *Sea la ecuación diferencial $F(x, u(x), \nabla u(x), D^2u(x)) = 0$ en Ω. Decimos que u es subsolución viscosa (resp. supersolución viscosa) si y solo si para toda $\phi \in \mathscr{C}^2(\Omega)$ que cumple que $u - \phi$ tiene un máximo (resp. mínimo) en $x_0 \in \Omega$ con $0 = u(x_0) - \phi(x_0)$ entonces sucede que*

$$F(x_0, u(x_0), \nabla\phi(x_0), D^2\phi(x_0)) \leq 0 \quad (resp \geq 0)$$

Decimos que u es solución viscosa si es subsolución y supersolución viscosa.

Ahora bien, para un sistema, tenemos la siguiente definición de solución viscosa,

Definición 2. *Consideremos el sistema:*

$$\begin{cases} F(x, u(x), v(x), \nabla u(x), D^2u(x)) = 0 & si \;\; x \in \Omega, \\ G(x, u(x), v(x), \nabla v(x), D^2v(x)) = 0 & si \;\; x \in \Omega. \\ u(x) = f(x) & si \; x \in \partial\Omega, \\ v(x) = g(x) & si \; x \in \partial\Omega. \end{cases} \tag{2}$$

Decimos que el par $(u, v) \in \mathscr{C}(\overline{\Omega}) \times \mathscr{C}(\overline{\Omega})$ es subsolución viscosa (resp. supersolución viscosa) de (2) si y solo si u es subsolución viscosa (resp. supersolución) de

$$F(x, u(x), v(x), \nabla u(x), D^2u(x)) = 0$$

*en el sentido de la **Definición 1** y v es subsolución viscosa (resp supersolución) de*

$$G(x, u(x), v(x), \nabla v(x), D^2v(x)) = 0$$

*también en el sentido de la **Definición 1** y se cumple*

$$u(x) \leq f(x), \qquad v(x) \leq g(x),$$

para $x \in \partial\Omega$.

Diremos entonces que (u, v) es solución viscosa del sistema si el par es subsolución y supersolución viscosa.

Nuestro objetivo en esta tesis es demostrar el siguiente resultado:

Teorema 1. *El sistema* (1.1) *tiene una solución viscosa.*

Para demostrar este teorema nos valdremos de argumentos que combinan análisis y probabilidad. Más concretamente introducimos una aproximación usando las funciones valor de un juego de dos jugadores de suma cero. Para introducir las reglas de este juego primero debemos describir juegos conocidos que aproximan funciones armónicas (soluciones de $\Delta v = 0$) o funciones $\infty-$armónicas (soluciones de $\Delta_\infty u = 0$).

1.2. Juegos Teóricos

Ahora vamos a describir algunos *juegos teóricos*, y veremos cómo, utilizando la esperanza matemática, obtendremos una forma de caracterizar funciones que describen el valor del juego. Estas funciones, en caso de existir, serán las que luego converjan a límites que resuelvan algunas ecuaciones diferenciales en sentido viscoso. Estos valores de los juegos considerados tienen una caracterización por medio de fórmulas del valor medio. A estas caracterizaciones se las llaman *Dynamic Programming Principle (DPP)*. Analicemos entonces los *juegos teóricos* que se usan típicamente para obtener un DPP adaptado a obtener aproximaciones para los operadores *Laplaciano* e *Infinito Laplaciano*.

1.2.1. El Laplaciano

En el caso del operador *Laplaciano* el juego que se propone, que se suele llamar *juego de paseos al azar*, es el siguiente: Sea Ω un abierto acotado con borde suave, $\overline{g} : \mathbb{R}^n \backslash \Omega \to \mathbb{R}$ una función Lischitz acotada. Entonces dado $\varepsilon > 0$ y dado $x_0 \in \Omega$, vamos a dar un primer paso en el juego eligiendo un punto al azar en $B_\varepsilon(x_0)$con densidad uniforme.

Supongamos que el primer punto elegido x_1 cae en Ω, entonces volvemos a repetir el procedimiento, es decir, vamos a elegir un segundo punto $x_2 \in B_\varepsilon(x_1)$, y así seguiremos repitiendo el procedimiento (ver Figura 1). El juego termina cuando el punto elegido cae fuera de Ω (se puede probar que el juego termina con probabilidad uno) y el jugador recibe como paga el valor de la función $\overline{g}$ en el punto de salida. Es decir, si $x_\tau \in \mathbb{R}^n \backslash \Omega$ es la última posición entonces el jugador recibe como pago la cantidad $\overline{g}(x_\tau)$.

Sea $\mathbb{E}^{x_0}[\overline{g}(x_\tau)]$ la esperanza martemática del pago final (es decir, de salir en el punto $x_\tau \in \mathbb{R}^n \backslash \Omega$ y recibir la paga $\overline{g}(x_\tau)$) habiendo comenzado en x_0. Antes de avanzar introduciremos un(a) nombre/notación: Llamaremos

$$v^\varepsilon(x) = \mathbb{E}^x[\overline{g}(x_\tau)].$$

Ahora llamaremos Y a la variable aleatoria que indica la posición en el juego luego del primer paso. Como este primer punto va a ser elegido al azar en $B_\varepsilon(x_0)$ deducimos que $Y \sim U(B_\varepsilon(x_0))$. La idea ahora es usar la esperanza condicional. Consideremos la función

$$\rho^{x_0}(y) = \mathbb{E}^{x_0}[\overline{g}(x_\tau) \mid Y = y].$$

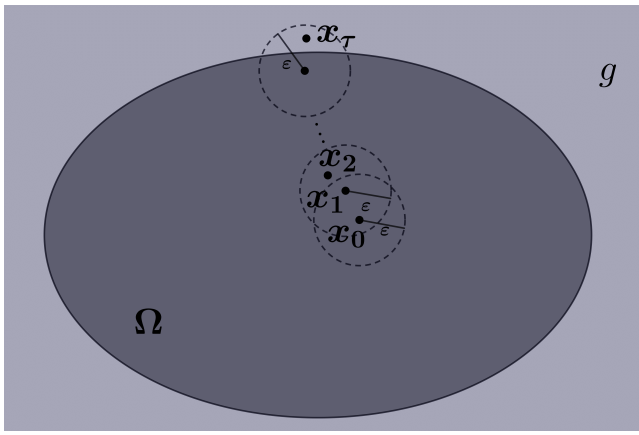

Figura 1: Paseos al azar.

Entonces a través de ρ obtendremos una nueva variable aleatoria

$$Z = \rho^{x_0}(Y) = \mathbb{E}^{x_0}[\overline{g}(x_\tau) \mid Y].$$

Calculemos ahora $\mathbb{E}[Z]$

$$\mathbb{E}[Z] = \mathbb{E}[\rho^{x_0}(Y)] = \int_{\mathbb{R}^n} \rho^{x_0}(y) f_Y(y) dy = \int_{\mathbb{R}^n} \mathbb{E}^{x_0}[\overline{g}(x_\tau) \mid Y = y] \frac{1}{|B_\varepsilon(x_0)|} \chi_{B_\varepsilon(x_0)}(y) dy.$$

Observemos que $\mathbb{E}^{x_0}[\overline{g}(x_\tau) \mid Y = y] = \mathbb{E}^y[\overline{g}(x_\tau)]$ entonces retomando la cuenta anterior obtenemos

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\mathbb{E}^{x_0}[\overline{g}(x_\tau) \mid Y]] &= \int_{\mathbb{R}^n} \mathbb{E}^y[\overline{g}(x_\tau)] \frac{1}{|B_\varepsilon(x_0)|} \chi_{B_\varepsilon(x_0)}(y) dy \\ &= \frac{1}{|B_\varepsilon(x_0)|} \int_{B_\varepsilon(x_0)} v^\varepsilon(y) dy \\ &= \fint_{B_\varepsilon(x_0)} v^\varepsilon(y) dy. \end{aligned}$$

Pero sabemos que $\mathbb{E}[\mathbb{E}^{x_0}[\overline{g}(x_\tau) \mid Y]] = \mathbb{E}^{x_0}[\overline{g}(x_\tau)] = v^\varepsilon(x_0)$. Entonces llegamos al DPP para v^ε

$$v^\varepsilon(x_0) = \fint_{B_\varepsilon(x_0)} v^\varepsilon(y) dy. \tag{3}$$

La observación anterior muestra que si luego de cualquier paso del juego caemos dentro de Ω, podemos pensar que este es el primer paso. Entonces podemos deducir que la propiedad (1.2.1) se puede aplicar no solo en x_0 sino que vale para cualquier punto en Ω.

Se puede probar realizando una cuenta similar a la que haremos en el capítulo 5 que estas funciones convergen uniformemente a una función v que resulta continua en $\overline{\Omega}$ y resulta ser la *solución viscosa* de

$$\Delta v = 0, \qquad \text{en } \Omega$$

con la condición de borde

$$v = \overline{g} \qquad \text{en } \partial\Omega.$$

1.2.2. El Infinito Laplaciano

Para el operador *Infinito Laplaciano* se puede ver en [16] (ver también [4]) que se utiliza lo que se conoce como *Tug-of-War*. Se trata de un *juego de suma cero* entre dos jugadores que compiten entre si mediante unas reglas que describimos a continuación.

Dado Ω abierto acotado y con borde suave y dada $\overline{f} : \mathbb{R}^n \backslash \Omega \to \mathbb{R}$ una función Lipschitz acotada. Tomemos un $\varepsilon > 0$. Desde un punto $x_0 \in \Omega$ dos jugadores se van a disputar el comienzo del juego lanzando una moneda equilibrada. El jugador favorecido eligirá el siguiente punto x_1 en la bola $B_\varepsilon(x_0)$. Si el punto x_1 está dentro de Ω el proceso vuelve a repetirse. El juego finaliza cuando el punto elegido cae fuera de Ω, y en este caso el jugador I recibe el valor de la función en el punto de salida y el jugador II paga este valor. Es decir, si $x_\tau \in \mathbb{R}^n \backslash \Omega$ es la última elección, el jugador II le paga al jugador I la cantidad $\overline{f}(x_\tau)$ (naturalmente si el número $\overline{f}(x_\tau)$ es negativo entonces el jugador I le pagará al jugador II la cantidad positiva $-\overline{f}(x_\tau)$). Llamemos S_I y S_{II} a dos estrategias de los jugadores I y II respectivamente. Por ejemplo supongamos que hemos realizado k pasos $\{x_0, x_1, ..., x_k\}$ sin abandonar Ω entonces sean

$$S_I(x_0, x_1, ..., x_k) = x_{k+1}^I \quad S_{II}(x_0, x_1, ..., x_k) = x_{k+1}^{II}$$

donde x_{k+1}^I es la elección según la estrategia del jugador I y x_{k+1}^{II} según la estrategia del jugador II. Sea

$$\mathbb{E}_{S_I S_{II}}^{x_0}[\overline{f}(x_\tau)]$$

la esperanza matemática de salir en el punto $x_\tau \in \mathbb{R}^n \backslash \Omega$ (y por lo tanto que el jugador II pague al jugador I $\overline{f}(x_\tau)$) habiendo comenzado en $x_0 \in \Omega$. En este punto hay que aclarar que este juego puede no terminar con probabilidad uno (dependiendo de las estrategias usadas por los jugadores, por ejemplo, ambos jugadores puede elegir permanecer en el mismo punto). En este último caso se penalizan severamente las ganancias de ambos jugadores (ambos pierden ∞).

Teniendo en cuenta el objetivo final del juego podemos deducir que las estrategias que van a tener los jugadores serán, la del jugador I buscar el máximo de la esperanza de la función de salida, y la del

jugador II buscar el mínimo. Definimos entonces la función

$$u^\varepsilon(x) = \inf_{S_{II}} \sup_{S_I} \mathbb{E}^x_{S_I S_{II}}[\overline{f}(x_\tau)].$$

Primero observemos que, gracias a los resultados de [16], se puede intercambiar el $\inf$ con el $\sup$ y se tiene que

$$u^\varepsilon(x) = \sup_{S_I} \inf_{S_{II}} \mathbb{E}^x_{S_I S_{II}}[\overline{f}(x_\tau)].$$

Sea $x \in \Omega$ analicemos un poco la función u^ε que definimos como

$$\inf_{S_{II}} \sup_{S_I} \mathbb{E}^x_{S_I S_{II}}[\overline{f}(x_\tau)].$$

Se puede ver en [16] que u^ε cumple el DPP

$$u^\varepsilon(x) = \frac{1}{2} \sup_{y \in B_\varepsilon(x)} u^\varepsilon(y) + \frac{1}{2} \inf_{y \in B_\varepsilon(x)} u^\varepsilon(y). \tag{4}$$

Aquí se ve como el término $\frac{1}{2} \sup_{y \in B_\varepsilon(x)} u^\varepsilon(y)$ representa el caso en que la moneda favoreció al jugador I y el término $\frac{1}{2} \inf_{y \in B_\varepsilon(x)} u^\varepsilon(y)$ el caso contrario.

Estas funciones u^ε convergen uniformemente a una u que resulta continua en $\overline{\Omega}$ y es la *solución viscosa* de la ecuación

$$\Delta_\infty u = 0 \qquad \text{en } \Omega,$$

con la condición de borde

$$u = \overline{f}, \qquad \text{en } \partial\Omega.$$

2. Descripción del Juego para nuestro problema

El objetivo de esta sección será describir el *juego teórico* que nos servirá para llegar, via un DPP adecuado, al sistema de ecuaciones (1). Para llegar a un sistema de dos ecuaciones vamos a construir un juego con dos tableros, donde usaremos diferentes juegos en cada tablero, pero incluiremos la posibilidad de "saltar" de un tablero al otro. Comencemos la construcción.

Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un abierto acotado con borde suave. Llamaremos *tablero* a una copia de $\mathbb{R}^n$ con el abierto Ω contenido. El juego que vamos a contruir va a utilizar dos tableros que llamaremos tablero 1 y tablero 2. Necesitamos dos funciones definidas fuera de Ω en cada tablero. Sean $\overline{f} : \mathbb{R}^n \backslash \Omega \to \mathbb{R}$ y

$\overline{g} : \mathbb{R}^n \backslash \Omega \to \mathbb{R}$ dos funciones Lipschitz y acotadas que corresponderan a los tableros 1 y 2 respectivamente.

En el tablero 1 jugaremos *Tug-of-War*, el juego de suma cero que describimos anteriormente y que está relacionado con el infinito Laplaciano. Es decir, dos jugadores se disputan la elección de la siguiente posición lanzando una moneda equilibrada. El jugador favorecido eligirá un punto no más lejos del anterior que cierto ε. En el tablero 2 utilizaremos los *paseos al azar* que están asociados al Laplaciano. O sea que la elección de la siguiente posición será un punto al azar nuevamente no más lejos que el mismo ε. Pero además de las reglas de cada tablero tenemos que establecer una regla para "saltar" de un tablero al otro con una cierta probabilidad.

Veamos entonces como funciona este juego: Sea $\varepsilon > 0$, elijamos un tablero para comenzar, y un punto $x_0 \in \Omega$ como punto de partida. A veces va a reultar cómodo notar a los puntos como un par (x, j), donde $x \in \Omega$ y $j \in \{1, 2\}$ indica el tablero donde estamos parados. Supongamos que elegimos comenzar el juego parados en el tablero 1, entonces, con probabilidad $(1 - \varepsilon^2)$ vamos a jugar en este tablero con las reglas que describimos antes (jugamos Tug-of-War, es decir, tirando una moneda equilibrada, los jugadores eligen la siguiente posición del juego), y con probabilidad ε^2 vamos a saltar al tablero 2 conservando el mismo punto en Ω. Supongamos que nos quedamos en el tablero 1 y jugamos según las reglas del Tug-of-War y el punto que eligieron el jugador 1 o 2 (dependiendo del lanzamiento de la moneda) cae dentro de Ω, entonces volvemos a repetir el procedimiento, es decir, con probabilidad $(1 - \varepsilon^2)$ jugamos en el tablero 1 y con probabilidad ε^2 pasaremos al tablero dos. Ahora bien, si en cambio del x_0 del tablero 1 hemos saltado al x_0 del tablero 2 (con probabilidad ε^2) entonces partiendo de este punto jugaremos con probabilidad $(1 - \varepsilon^2)$ según las reglas del tablero 2 (el siguiente punto se elige al azar en la bola de radio ε) y volveremos al tablero 1 con probabilidad ε^2. El juego se sigue desenvolviendo de esta manera, es decir, con probabilidad $(1-\varepsilon^2)$ vamos a jugar en el tablero donde estamos con su regla correspondiente, y con probabilidad ε^2 pasaremos al otro tablero. El juego finaliza cuando el punto elegido (en cualquiera de los dos tableros) cae fuera de Ω, y como resultado final el jugador I recibirá el valor de la función correspondiente al tablero donde sale evaluada en el punto de salida y el jugador II pagará esta cantidad. Es decir, si el punto $x_\tau \in \mathbb{R}^n \backslash \Omega$ es la última elección y esta la hicimos en el tablero 1, entonces el jugador I recibe la cantidad $\overline{f}(x_\tau)$ y el jugador II paga esta misma cantidad (recibe $-\overline{f}(x_\tau)$). Naturalmente el caso de terminar el tablero 2 es totalmente análogo, en este caso el jugador I recibe la cantidad $\overline{g}(x_\tau)$ y el jugador II paga esta misma cantidad (recibe $-\overline{g}(x_\tau)$).

Las reglas del juego están esquematizadas en la Figura 2.

En este contexto vamos a llamar "una partida" a una tira finita de pares

$$P = \{(x_0, j_0), (x_1, j_1), ..., (x_\tau, j_\tau)\}$$

con $j_i \in \{1, 2\}$ y $x_i \in \Omega$ en el tablero j_i. Además x_τ es el primer punto que cae fuera de Ω (en el

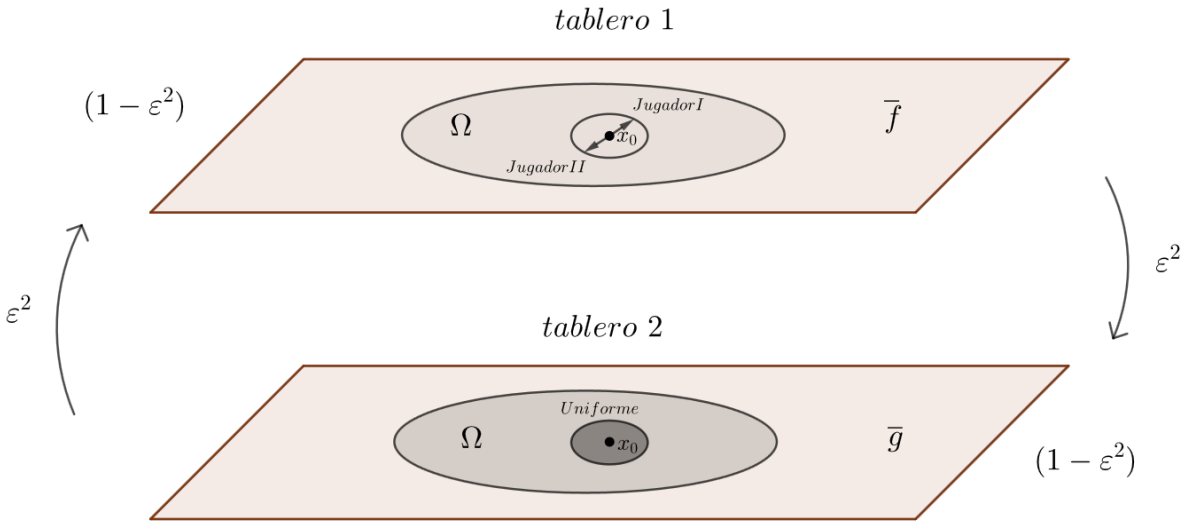

Figura 2: Esquema del juego con dos tableros.

tablero correspondiente j_τ). Por ejemplo, para la tira anterior, el jugador 2 le pagará al jugador 1 $f(x_\tau)$ si $j_\tau = 1$, y $g(x_\tau)$ en caso contrario. Además vale la siguiente regla: cuando en la sucesión $(j_i)_{1\leq i\leq \tau}$ se produce un salto de un entero al otro, debe suceder que el punto elegido en el paso siguiente debe ser el mismo que el anterior (este paso representa un "salto" de una tablero al otro). Es decir, si $j_{i+1} \neq j_i$ entonces $x_{i+1} = x_i$.

Definimos las funciones

$$u^\varepsilon(x_0) = \sup_{S_I} \inf_{S_{II}} \mathbb{E}^{x_0}_{S_I,S_{II}}(pago\ final\ saliendo\ en\ x_\tau) \tag{5}$$

si $x_0 \in \Omega$ jugando en el tablero 1

$$v^\varepsilon(x_0) = \sup_{S_I} \inf_{S_{II}} \mathbb{E}^{x_0}_{S_I,S_{II}}(pago\ final\ saliendo\ en\ x_\tau) \tag{6}$$

si $x_0 \in \Omega$ jugando en el tablero 2. En este caso, como probaremos, también se pueden intercambiar $\inf$ con $\sup$ en la definición de ambas funciones u^ε y v^ε.

Recordamos que S_I y S_{II} son las estrategias de los jugadores I y II cuando juegan en el primer tablero. Observar que estas estrategias se consideran tanto si comenzamos en el primer tablero como

en el segundo, ya que en cada jugada tenemos chances de pasar al otro tablero respecto de donde estamos. Precisamente por eso escribimos la sentencia "pago final saliendo en x_τ", porque no sabemos en cual de los dos tableros vamos a finalizar sea cual sea el tablero en el que comenzamos.

El DPP que corresponde a las funciones u^ε y v^ε en el juego es el siguiente:

$$\begin{cases} u^\varepsilon(x) = \varepsilon^2 v^\varepsilon(x) + (1-\varepsilon^2)\Big\{\frac{1}{2}\sup\limits_{y\in B_\varepsilon(x)} u^\varepsilon(y) + \frac{1}{2}\inf\limits_{y\in B_\varepsilon(x)} u^\varepsilon(y)\Big\} & si\ x\in\Omega, \\ v^\varepsilon(x) = \varepsilon^2 u^\varepsilon(x) + (1-\varepsilon^2)\fint_{B_\varepsilon(x)} v^\varepsilon(y)dy & si\ x\in\Omega, \\ u^\varepsilon(x) = \overline{f}(x) & si\ x\in\mathbb{R}^n\backslash\Omega, \\ v^\varepsilon(x) = \overline{g}(x) & si\ x\in\mathbb{R}^n\backslash\Omega. \end{cases} \tag{7}$$

En este sistema la función $u^\varepsilon(x)$ describe la esperanza del pago final del juego estando en el punto x en el tablero 1, y $v^\varepsilon(x)$ la esperanza del pago final estando en x en el tablero 2. Justamente y, conforme a lo que hemos descripto anteriormente, si miramos la primer ecuación del sistema (2) la función u^ε juega con probabilidad $(1-\varepsilon^2)$ *Tug-of-War* (entonces tenemos allí el DPP (1.2.2)), y con probabilidad ε^2 "salta.ª la función $v^\varepsilon(x)$ correspondiente al tablero 2. De manera análoga podemos ver como estando en un punto $x\in\Omega$ del tablero 2, si miramos la segunda ecuación del sistema (2) nos dice que vamos a jugar con probabilidad $(1-\varepsilon^2)$ en este tablero (usamos DPP (1.2.1)), y con probabilidad ε^2 pasaremos al tablero 1.

Vamos a enunciar y demostrar el primer resultado del trabajo que nos dice que el juego termina con probabilidad 1.

Proposición 2. *(Teorema del mono infinto)*
Sea P una partida comenzando en un punto (x_0, j_0). Entonces

$$\mathbb{P}(la\ partida\ P\ termina) = 1.$$

Antes de demostrar la proposición hagamos un breve comentario: El teorema del mono infinito afirma que un mono tecleando al azar en una maquina de escribir durante un período de tiempo infinito escribirá con probabilidad 1 cualquier texto, por ejemplo El Quijote de la Mancha. La alusión a este famoso resultado de la teoría de probabilidades es porque la demostración que haremos a continuación utiliza la misma idea que la demostración del teorema.

Demostración. Vamos a comenzar probando que vamos a salir con probabilidad 1 si comenzamos a jugar en el tablero 2. Necesitamos hacer una construcción geométrica un poco engorrosa pero útil.

Sea $\xi \in \mathbb{R}^n$ con $|\xi| = 1$ una dirección fija. Definamos el conjunto

$$T_{\xi,x_k} = \left\{ y \in \mathbb{R}^n : y \in B_\varepsilon(x_k) \wedge \langle y - (x_k + \frac{\varepsilon}{2}\xi), \xi \rangle \geq 0 \right\}$$

que resulta una porción de la bola donde los puntos están a distancia por lo menos $\frac{\varepsilon}{2}$ del centro y siempre están en la misma dirección respecto del centro. Esto implica que arrancando desde cualquier punto en Ω si en cada paso elegimos un punto en T_{ξ,x_k} a lo sumo en $\lceil \frac{4R}{\varepsilon} \rceil$ pasos vamos a salir de Ω (aquí denotamos $R = diam(\Omega)$). Además, como T_{ξ,x_k} tiene medidia positiva vale lo siguiente

$$\mathbb{P}(x_{k+1} \in T_{\xi,x_k} | x_k) = \alpha > 0.$$

Por lo tanto, si no saltamos de tablero y jugamos la cantidad de pasos anterior que llamaremos $K = \lceil \frac{4R}{\varepsilon} \rceil$ habremos salido. Luego

$$\mathbb{P}(salir\ en\ K\ pasos) \geq [(1 - \varepsilon^2)\alpha]^K = r > 0$$

y tomando complemento obtenemos

$$\mathbb{P}(no\ salir\ en\ K\ pasos) \leq 1 - r.$$

Ahora argumentamos de la siguiente manera; en K pasos tengo probabilidad menor que $1 - r$ de no salir. En $2K$ pasos tenemos probabilidad menor que $(1 - r)^2$. Inductivamente tenemos que la probabilidad de no salir en nK pasos es menor que $(1 - r)^n$. Así obtenemos lo siguiente

$$\mathbb{P}(no\ salir) \leq (1 - r)^n$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

Es decir

$$\mathbb{P}(no\ salir) = 0.$$

Para el caso en comenzamos en el tablero 1 probaremos que vamos a pasar al otro tablero o terminar con probabilidad 1. En efecto la probabilidad de no cambiar de tablero en n pasos es $(1-\varepsilon^2)^n$. Por lo tanto

$$\mathbb{P}(no\ cambiar\ de\ tablero) \leq (1 - \varepsilon^2)^n$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

Esto nos dice que, comenzando en el tablero 1, vamos a finalizar o vamos a pasar al tablero 2 con probabildad 1. Como el caso de comenzar en el tablero 2 ya lo probamos, hemos garantizado que el juego va a terminar. □

En los siguiente capítulos probaremos que existe un par de funciones que satisfacen (2). Además veremos que estas funciones son únicas y son exactamente la funciones valor esperado del juego definidas en (2) y (2). Una vez que tengamos estas funciones veremos que convergen uniformemente cuando $\varepsilon \to 0$ (via subsucesiónes) a un par de funciones (u, v) continuas en $\overline{\Omega}$ (obtener esta convergencia es la parte mas difícil del trabajo) y, finalmente, probaremos que dicho par limite resulta ser una solución viscosa de nuestro sistema (1.1).

3. Existencia de las funciones u^ε y v^ε que cumplen el DPP (2)

El objetivo de este capítulo es ver que, dado $\varepsilon > 0$ existen funciones u^ε y v^ε que cumplen el DPP (2). Sobre estas funciones no vamos a hacer ninguna presunción sobre su regularidad, de hecho ni siquiera vamos a pedirles que sean continuas. Lo que vamos a hacer ahora es proceder mediante el método que se conoce como *método de Perron*. Es decir, vamos a tomar el supremo de subsoluciones que se encuentran por debajo de una supersolución. Este procedimiento hay que hacerlo con cuidado, ya que en el caso del DPP no tenemos estimaciones de regularidad.

Comencemos construyendo un conjunto de funciones (subsoluciones de nuestro problema). Dado $\varepsilon > 0$ y dadas $\overline{f}$ y $\overline{g}$ dos funciones Lipschitz acotadas definidas en $\mathbb{R}^n \backslash \Omega$ a valores reales. Llamaremos condición **e** a lo siguiente:

$$\mathbf{e}: \begin{cases} z^\varepsilon(x) \leq \varepsilon^2 w^\varepsilon(x) + (1-\varepsilon^2)\Big\{\dfrac{1}{2}\sup\limits_{y\in B_\varepsilon(x)} z^\varepsilon(y) + \dfrac{1}{2}\inf\limits_{y\in B_\varepsilon(x)} z^\varepsilon(y)\Big\} & si\ x \in \Omega, \\ w^\varepsilon(x) \leq \varepsilon^2 z^\varepsilon(x) + (1-\varepsilon^2) \fint_{B_\varepsilon(x)} w^\varepsilon(y)dy & si\ x \in \Omega, \\ z^\varepsilon(x) \leq \overline{f}(x) & si\ x \in \mathbb{R}^n\backslash\Omega, \\ w^\varepsilon(x) \leq \overline{g}(x) & si\ x \in \mathbb{R}^n\backslash\Omega. \end{cases} \tag{8}$$

Observar que es la condición del DPP (2) del capítulo pasado pero con desigualdades. Definamos ahora sí al conjunto de funciones donde queremos tomar supremo

$$\mathscr{A} = \{(z^\varepsilon, w^\varepsilon)/son\ funciones\ acotadas\ que\ cumplen\ \mathbf{e}\}. \tag{9}$$

Observación 1. Observemos que debemos pedir que $(z^\varepsilon, w^\varepsilon)$ sean funciones acotadas, ya que

$$z^\varepsilon(x) = \begin{cases} +\infty & x \in \Omega \\ \overline{f} & x \notin \Omega \end{cases} \quad \text{y} \quad w^\varepsilon(x) = \begin{cases} +\infty & x \in \Omega \\ \overline{g} & x \notin \Omega \end{cases}$$

nos dan un par de funciones que cumplen **e**.

Lo primero que vamos a probar es que este conjunto no es vacío.

Lema 1. $\mathscr{A} \neq \emptyset$.

Demostración. Para probar esto vamos a recordar que las funciones $\overline{f}$ y $\overline{g}$ son acotadas. Sea

$$C = \text{máx}\Big\{ \sup\{|\overline{f}|\}, \sup\{|\overline{g}|\}\Big\}.$$

Entonces si consideramos las funciones

$$z^\varepsilon = -C \qquad \text{y} \qquad w^\varepsilon = -C$$

en Ω obtenemos un par que cumple que $(z^\varepsilon, w^\varepsilon) \in \mathscr{A}$. Con esto hemos probado que $\mathscr{A} \neq \emptyset$. □

Lo siguiente que vamos a probar es que las funciones de este conjunto están acotadas superiormente de manera uniforme. Lo haremos mediante el siguiente lema.

Lema 2. *Dado $\varepsilon > 0$, dadas $\overline{f}$ y $\overline{g}$ dos funciones Lipschitz acotadas y dado el conjunto $\mathscr{A}$ como lo definimos en* (3)*. Sea*

$$M = \text{máx}\Big\{ \sup_{x\in\mathbb{R}^n\setminus\Omega} \overline{f}(x), \sup_{x\in\mathbb{R}^n\setminus\Omega} \overline{g}(x)\Big\}.$$

Entonces vale que

$$\text{máx}\Big\{ \sup_{x\in\mathbb{R}^n} z^\varepsilon(x), \sup_{x\in\mathbb{R}^n} w^\varepsilon(x)\Big\} \leq M$$

para todo $(z^\varepsilon, w^\varepsilon) \in \mathscr{A}$.

Demostración. Vamos a demostrarlo razonando por el absurdo. Es decir, vamos a suponer que existe un par de funciones $(z_0^\varepsilon, w_0^\varepsilon) \in \mathscr{A}$ tales que

$$\text{máx}\Big\{ \sup_{x\in\mathbb{R}^n} z_0^\varepsilon(x), \sup_{x\in\mathbb{R}^n} w_0^\varepsilon(x)\Big\} > M.$$

Llamemos

$$\overline{M} = \text{máx}\Big\{ \sup_{x\in\mathbb{R}^n} z_0^\varepsilon(x), \sup_{x\in\mathbb{R}^n} w_0^\varepsilon(x)\Big\}.$$

Este valor es finito, pues las funciones z_0^ε y w_0^ε son acotadas. Sea $(x_n)_{n\geq 1}$ una sucesión que verifica

$$\text{máx}\{z_0^\varepsilon(x_n), w_0^\varepsilon(x_n)\} > \overline{M} - \frac{\delta}{n} \tag{10}$$

con $\delta = \dfrac{\overline{M} - M}{2}$.

Supongamos que hay infinitos naturales en los que $z_0^\varepsilon(x_n) \geq w_0^\varepsilon(x_n)$ (luego analizaremos el caso contrario). Entonces trabajaremos con una subsucesión de la sucesión original que cumple esta propiedad. Para no hacer engorrosa la notación poniendo subíndices vamos a suponer que $(x_n)_{n\geq 1}$ es la sucesión que cumple la propiedad que supusimos anteriormente que llamaremos propiedad θ_1. Observemos lo siguiente; si $x_n \in \mathbb{R}^n \backslash \Omega$ para todo $n > N$ para cierto $N \in \mathbb{N}$, entonces si $n > N$

$$\overline{M} - \frac{\delta}{n} < z_0^\varepsilon(x_n) \leq M$$

Lo que produce un absurdo si $n \geq 1$.

Luego existe una subsucesión de $(x_n)_{n\geq 1}$ que esta completamente dentro de Ω. Nuevamente para no hacer engorrosa la notación vamos a suponer que esta sucesión es $(x_n)_{n\geq 1} \subseteq \Omega$. Pero como Ω es acotado existe una subsucesión que tiene límite. Nuevamente vamos a suponer que directamente $(x_n)_{n\geq 1}$ es una sucesión convergente. Es decir, existe $x_0 \in \overline{\Omega}$ tal que $x_n \to x_0$. Hagamos ahora con esta sucesión que pudimos construir la siguiente cuenta utilizando la propiedad **e**, (3),

$$z_0^\varepsilon(x_n) \leq \varepsilon^2 w_0^\varepsilon(x_n) + (1-\varepsilon^2)\Big\{\frac{1}{2}\sup_{B_\varepsilon(x_n)} z_0^\varepsilon(y) + \frac{1}{2}\operatorname*{ínf}_{B_\varepsilon(x_n)} z_0^\varepsilon(y)\Big\}.$$

Utilizando la propiedad θ_1 llegamos a

$$z_0^\varepsilon(x_n) \leq \varepsilon^2 z_0^\varepsilon(x_n) + (1-\varepsilon^2)\Big\{\frac{1}{2}\sup_{B_\varepsilon(x_n)} z_0^\varepsilon(y) + \frac{1}{2}\operatorname*{ínf}_{B_\varepsilon(x_n)} z_0^\varepsilon(y)\Big\}.$$

Si pasamos restando el término $\varepsilon^2 z_0^\varepsilon(x_n)$ obtenemos

$$(1-\varepsilon^2) z_0^\varepsilon(x_n) \leq (1-\varepsilon^2)\Big\{\frac{1}{2}\sup_{B_\varepsilon(x_n)} z_0^\varepsilon(y) + \frac{1}{2}\operatorname*{ínf}_{B_\varepsilon(x_n)} z_0^\varepsilon(y)\Big\}.$$

Ahora cancelamos el término $(1-\varepsilon^2)$ para obtener

$$z_0^\varepsilon(x_n) \leq \frac{1}{2}\sup_{B_\varepsilon(x_n)} z_0^\varepsilon(y) + \frac{1}{2}\operatorname*{ínf}_{B_\varepsilon(x_n)} z_0^\varepsilon(y). \tag{11}$$

Ahora bien, como $x_n \to x_0$ existe un $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n > N$ sucede que $x_0 \in B_\varepsilon(x_n)$. Entonces si tomamos un $n > N$ y volvemos a (3), utilizando (3) obtenemos

$$\overline{M} - \frac{\delta}{n} < z_0^\varepsilon(x_n) \leq \frac{1}{2}\overline{M} + \frac{1}{2} z_0^\varepsilon(x_0).$$

Si hacemos un despeje elemental llegamos a

$$\overline{M} - 2\frac{\delta}{n} < z_0^\varepsilon(x_0).$$

Tomando límite $n \to \infty$ se obtiene

$$\overline{M} \leq z_0^\varepsilon(x_0).$$

Pero por definición de $\overline{M}$ sabemos que $z_0^\varepsilon(x_0) \leq \overline{M}$. Así obtenemos

$$z_0^\varepsilon(x_0) = \overline{M}.$$

De acá se puede deducir inmediatamente que x_0 no puede estar en $\partial\Omega$ pues de ser así $\overline{M} = z_0^\varepsilon(x_0) \leq M$ lo que produce un absurdo.

Entonces tenemos que $x_0 \in \Omega$. Ahora bien, si volvemos a **e**, (3), y usamos que $w_0^\varepsilon(x_0) \leq \overline{M}$ y que $\sup_{B_\varepsilon(x_0)} z_0^\varepsilon(y) \leq \overline{M}$ llegamos a

$$\overline{M} = z^\varepsilon(x_0) \leq \varepsilon^2\overline{M} + (1-\varepsilon^2)\Big\{\frac{1}{2}\overline{M} + \frac{1}{2}\inf_{B_\varepsilon(x_o)} z_0^\varepsilon(y)\Big\}.$$

Nuevamente haciendo un despeje elemental obtenemos

$$\overline{M} \leq \inf_{B_\varepsilon(x_o)} z_0^\varepsilon(y).$$

De esto podemos deducir que

$$z_0^\varepsilon \equiv \overline{M}$$

en $B_\varepsilon(x_0)$. Sea $\xi \in \mathbb{R}^n$ un vector de norma 1 que usaremos como dirección. Consideremos el punto $x_0^1 = x_0 + \frac{\varepsilon}{2}\xi$. Entonces sucede que $z_0^\varepsilon(x_0^1) = \overline{M}$, si razonamos de la misma manera que hicimos antes llegaremos a que $z_0^\varepsilon \equiv \overline{M}$ en $B_\varepsilon(x_0^1)$. Si x_0^1 cae en Ω consideraremos el punto $x_0^2 = x_0 + 2\frac{\varepsilon}{2}\xi$. Nuevamente llegaremos a que $z_0^\varepsilon \equiv \overline{M}$ en $B_\varepsilon(x_0^2)$. Si procedemos inductivamente, como ε está fijo, si avanzamos a lo sumo la cantidad de veces $\eta \leq \lceil \frac{2diam(\Omega)}{\varepsilon} \rceil + 1$ vamos a caer afuera de Ω. En este caso sucedería que z_0^ε valdría $\overline{M}$ en puntos fuera de Ω lo que produce un absurdo como vimos anteriormente. Es decir, llegaríamos a $\overline{M} = z_0^\varepsilon(x_0^\eta) \leq M$, lo cual es un absurdo.

En definitiva vimos que en cualquier caso llegamos a un absurdo y este absurdo vino de suponer falsa la tesis del lema.

Nos queda por probar el otro caso. Es decir, vamos a analizar el caso en que no sucede hay infinitos naturales con $z_0^\varepsilon(x_n) \geq w_0^\varepsilon(x_n)$. En este caso hay una subsucesión de $(x_n)_{n\geq 1}$ donde $w_0^\varepsilon(x_n) \geq z_0^\varepsilon(x_n)$. Nuevamente, para no cargar la notación vamos a suponer que toda la sucesión $(x_n)_{n\geq 1}$ cumple esta propiedad que llamamos propiedad θ_2.

Observemos nuevamente que si existe $N \in \mathbb{R}^n$ tal que $x_n \in \mathbb{R}^n \backslash \Omega$ entonces sucede que, si $n > N$

$$\overline{M} - \frac{\delta}{n} < w_0^\varepsilon(x_n) \leq M.$$

Lo cual produce un absurdo. Entonces podemos obtener una subsucesión completamente contenida en Ω, y como este conjunto es acotado existe una subsucesión de la subsucesión anterior con límite en $\overline{\Omega}$. Para simplificar vamos a pensar que la sucesión $(x_n)_{n\geq 1} \in \Omega$ es convergente. Es decir, existe $x_0 \in \overline{\Omega}$ tal que $x_n \to x_0$. Volvemos ahora a la segunda ecuación de la condición **e**, (3),

$$w_0^\varepsilon(x_n) \leq \varepsilon^2 z_0^\varepsilon(x_n) + (1-\varepsilon^2) \fint_{B_\varepsilon(x_n)} w_0^\varepsilon(y)dy.$$

Si utilizamos la condición θ_2 llegamos a

$$w_0^\varepsilon(x_n) \leq \varepsilon^2 w_0^\varepsilon(x_n) + (1-\varepsilon^2) \fint_{B_\varepsilon(x_n)} w_0^\varepsilon(y)dy.$$

Si pasamos restando el término $\varepsilon^2 w_0^\varepsilon(x_n)$, sacamos factor común $w_0^\varepsilon(x_n)$ y cancelamos $(1-\varepsilon^2)$ obtenemos

$$w_0^\varepsilon(x_n) \leq \fint_{B_\varepsilon(x_n)} w_0^\varepsilon(y)dy. \tag{12}$$

Hacemos la siguiente afirmación

$$\fint_{B_\varepsilon(x_n)} w_0^\varepsilon(y)dy \to \fint_{B_\varepsilon(x_0)} w_0^\varepsilon(y)dy, \qquad \text{cuando } n \to \infty.$$

Demostremos esta afirmación

$$\left| \fint_{B_\varepsilon(x_n)} w_0^\varepsilon(y)dy - \fint_{B_\varepsilon(x_0)} w_0^\varepsilon(y)dy \right| \leq \fint_{B_\varepsilon(x_n)\Delta B_\varepsilon(x_0)} |w_0^\varepsilon(y)|dy,$$

donde $B_\varepsilon(x_n)\Delta B_\varepsilon(x_0)$ es la diferencia simétrica entre $B_\varepsilon(x_n)$ y $B_\varepsilon(x_0)$. Es decir, $B_\varepsilon(x_n)\Delta B_\varepsilon(x_0) = (B_\varepsilon(x_n)\backslash B_\varepsilon(x_0)) \cup (B_\varepsilon(x_0)\backslash B_\varepsilon(x_n))$. Para acotar la integral anterior recordemos que w_0^ε es acotada, entonces

$$\fint_{B_\varepsilon(x_n)\triangle B_\varepsilon(x_0)} |w_0^\varepsilon(y)|dy \leq \sup\{|w_0^\varepsilon|\}|B_\varepsilon(x_n)\Delta B_\varepsilon(x_0)| \to 0$$

cuando $n \to \infty$.

Ahora bien, si volvemos a la inecuación (3), utilizando (3) llegamos a

$$\overline{M} - \frac{\delta}{n} \leq w_0^\varepsilon(x_n) \leq \fint_{B_\varepsilon(x_n)} w_0^\varepsilon(y)dy.$$

Tomando límite obtenemos

$$\overline{M} \leq \fint_{B_\varepsilon(x_o)} w_0^\varepsilon(y)dy.$$

Pero por definición de $\overline{M}$ sabemos que

$$\fint_{B_\varepsilon(x_o)} w_0^\varepsilon(y)dy \leq \overline{M}.$$

Luego llegamos a

$$\fint_{B_\varepsilon(x_o)} w_0^\varepsilon(y)dy = \overline{M}.$$

Pero sabemos que si una función acotada cumple que su promedio es su supremo entonces la función es constantemente ese número. Es decir,

$$w_0^\varepsilon \equiv \overline{M}$$

en $B_\varepsilon(x_0)$. Observemos que si $x_0 \in \partial\Omega$ entonces

$$\overline{M} = w_0^\varepsilon(x_0) \leq M.$$

Lo cual produce un absurdo. Por lo tanto tenemos que $x_0 \in \Omega$. Ahora hacemos un argumento idéntico al hecho antes avanzando en alguna dirección hacia el borde para generar un absurdo. Sea entonces $\xi \in \mathbb{R}^n$ un vector de norma 1, y sea $x_0^1 = x_0 + \frac{\varepsilon}{2}\xi$. Como $w_0^\varepsilon(x_0^1) = \overline{M}$ si $x_0^1 \in \Omega$ podemos razonar igual a como hicimos antes para llegar a que $\fint_{B_\varepsilon(x_0^1)} w_0^\varepsilon(y)dy = \overline{M}$ y nuevamente deducimos que $w_0^\varepsilon \equiv \overline{M}$ en $B_\varepsilon(x_0^1)$. Sea $x_0^2 = x_0 + 2\frac{\varepsilon}{2}\xi$,. Nuevamente vamos a hacer el mismo razonamiento para llegar a que $w_0^\varepsilon \equiv \overline{M}$ en $B_\varepsilon(x_0^2)$. Si procedemos inductivamente seguiremos construyendo puntos y a lo sumo para un valor $\eta \leq \lceil \frac{2diam(\Omega)}{\varepsilon} \rceil + 1$ obtnedremos un punto $x_\eta \in \mathbb{R}^n \backslash \Omega$ y en tal caso obtendremos que

$$\overline{M} = w_0^\varepsilon(x_\eta) \leq M$$

Lo que produce un absurdo. Nuevamente lo que termina sucediendo es que en todos los casos llegamos a un absurdo.

Esto agota todas las posibilidades. Por lo tanto hemos finalizado la demostración. □

Esta condición de acotación uniforme o equiacotación la usaremos para obtener las funciones que cumplan el DPP, (2). Por esta misma construcción, esta funciones resultan estar acotadas uniformemente en ε, cosa que necesitaremos en el próximo capítulo. Estamos en condiciones de obtener estas funciones que son soluciones del DPP.

Definición 3. *Sean* $\varepsilon > 0$, $\overline{f}, \overline{g} : \mathbb{R}^n \backslash \Omega \to \mathbb{R}$ *funciones Lipshitz y acotadas y sea* $\mathscr{A}$ *el conjunto definido anteriormente. Llamaremos*

$$u^\varepsilon(x) = \sup_{(z^\varepsilon, w^\varepsilon) \in \mathscr{A}} z^\varepsilon(x)$$

y

$$v^\varepsilon(x) = \sup_{(z^\varepsilon, w^\varepsilon) \in \mathscr{A}} w^\varepsilon(x).$$

El objetivo ahora es probar que estas funciones cumplen el DPP (2). Vamos a enunciar este resultado mediante una proposición.

Proposición 3. *Bajo las condiciones de la definición anterior el par de funciones* $(u^\varepsilon, v^\varepsilon)$ *cumple el DPP* (2) *que recordamos a continuación*

$$\begin{cases} u^\varepsilon(x) = \varepsilon^2 v^\varepsilon(x) + (1-\varepsilon^2)\Big\{\frac{1}{2}\sup\limits_{y \in B_\varepsilon(x)} u^\varepsilon(y) + \frac{1}{2}\inf\limits_{y \in B_\varepsilon(x)} u^\varepsilon(y)\Big\} & si\ x \in \Omega, \\ v^\varepsilon(x) = \varepsilon^2 u^\varepsilon(x) + (1-\varepsilon^2) \fint_{B_\varepsilon(x)} v^\varepsilon(y) dy & si\ x \in \Omega, \\ u^\varepsilon(x) = \overline{f}(x) & si\ x \in \mathbb{R}^n \backslash \Omega, \\ v^\varepsilon(x) = \overline{g}(x) & si\ x \in \mathbb{R}^n \backslash \Omega. \end{cases}$$

Demostración. Comencemos la demostración observando que, como z^ε y w^ε están acotadas superiormente de manera uniforme por $M = \max\{\sup \overline{f}, \sup \overline{g}\}$, entonces las funciones u^ε y v^ε están acotadas por esta constante M. Además, las funciones $z^\varepsilon \equiv w^\varepsilon \equiv -C$ (con $C = \max\{\sup |\overline{f}|, \sup |\overline{g}|\}$) son funciones acotadas inferiormente que pertenecen al conjunto $\mathscr{A}$. Por lo tanto $-C \leq u^\varepsilon$ y $-C \leq v^\varepsilon$. Entonces, como $M \leq C$ llegamos a que $|u^\varepsilon|_\infty \leq C$ y $|v^\varepsilon|_\infty \leq C$. Observar que esta cota no depende de ε, es decir, como las funciones $\overline{f}$ y $\overline{g}$ no dependen de ε, la constante C tampoco.

Lo siguiente que haremos es ver que el par de funciones $(u^\varepsilon, v^\varepsilon)$ están en el conjunto $\mathscr{A}$, definido por (3). Como acabamos de ver que las funciones u^ε y v^ε son acotadas, basta ver que el par cumple la condición **e**, (3). Es evidente que si $x \in \mathbb{R}^n \backslash \Omega$ entonces $u^\varepsilon(x) \leq \overline{f}(x)$ y $v^\varepsilon(x) \leq \overline{g}(x)$. Por lo tanto basta probar **e** (3) para $x \in \Omega$. Tomemos entonces un par $(z^\varepsilon, w^\varepsilon) \in \mathscr{A}$ arbitrario. Este par cumple la condicion **e** (3). Sea $x \in \Omega$ entonces

$$z^\varepsilon(x) \leq \varepsilon^2 w^\varepsilon(x) + (1-\varepsilon^2)\Big\{\frac{1}{2}\sup_{y \in B_\varepsilon(x)} z^\varepsilon(y) + \frac{1}{2}\inf_{y \in B_\varepsilon(x)} z^\varepsilon(y)\Big\}.$$

Como $z^\varepsilon \leq u^\varepsilon$ y $w^\varepsilon \leq v^\varepsilon$ llegamos a

$$z^\varepsilon(x) \leq \varepsilon^2 v^\varepsilon(x) + (1-\varepsilon^2)\Big\{\frac{1}{2}\sup_{y \in B_\varepsilon(x)} u^\varepsilon(y) + \frac{1}{2}\inf_{y \in B_\varepsilon(x)} u^\varepsilon(y)\Big\}.$$

Si tomamos el supremo sobre todas las funciones del conjunto $\mathscr{A}$ (3) en el término de la izquierda obtenemos

$$u^\varepsilon(x) \leq \varepsilon^2 v^\varepsilon(x) + (1-\varepsilon^2)\Big\{\frac{1}{2}\sup_{y\in B_\varepsilon(x)} u^\varepsilon(y) + \frac{1}{2}\inf_{y\in B_\varepsilon(x)} u^\varepsilon(y)\Big\}.$$

Análogamente, podemos trabajar con w^ε de la siguiente manera, tenemos

$$w^\varepsilon(x) \leq \varepsilon^2 z^\varepsilon(x) + (1-\varepsilon^2) \fint_{B_\varepsilon(x)} w^\varepsilon(y)dy.$$

Nuevamente utilizando que $z^\varepsilon \leq u^\varepsilon$ y $w^\varepsilon \leq v^\varepsilon$ llegamos a

$$w^\varepsilon(x) \leq \varepsilon^2 u^\varepsilon(x) + (1-\varepsilon^2) \fint_{B_\varepsilon(x)} v^\varepsilon(y)dy.$$

Si tomamos supremo sobre todas las funciones del conjunto $\mathscr{A}$ en el término de la izquierda llegamos a

$$v^\varepsilon(x) \leq \varepsilon^2 u^\varepsilon(x) + (1-\varepsilon^2) \fint_{B_\varepsilon(x)} v^\varepsilon(y)dy.$$

Con esto acabamos de probar que el par $(u^\varepsilon, v^\varepsilon) \in \mathscr{A}$.

Para finalizar la demostración tenemos que probar que para todo punto $x \in \mathbb{R}^n$ el par de funciones $(u^\varepsilon, v^\varepsilon)$ verifica siempre la igualdad en la condición **e** (3). Nuevamente razonaremos por el absurdo. Es decir supongamos que existe $x_0 \in \mathbb{R}^n$ donde algunas de las desigualdades de la condición **e** (3) es estricta. Comencemos suponiendo que $x_0 \in \mathbb{R}^n \backslash \Omega$, y que la desigualdad estricta se da con u^ε. Es decir, supongamos que vale

$$u^\varepsilon(x_0) < \overline{f}(x_0)$$

Definamos entonces la función u_0^ε de la siguiente manera; $u_0^\varepsilon(x) = u^\varepsilon(x)$ para todo $x \neq x_0$ y $u_0^\varepsilon(x_0) = \overline{f}(x_0)$. Es evidente que que el par $(u_0^\varepsilon, v^\varepsilon) \in \mathscr{A}$ pero $u_0^\varepsilon(x_0) > u^\varepsilon(x_0)$ lo cual produce un absurdo pues u^ε es por construcción el supremo sobre las funciones del conjunto $\mathscr{A}$. De igual manera podemos razonar si hubiera sucedido que $v^\varepsilon(x_0) < \overline{g}(x_0)$.

Consideremos ahora un punto $x_0 \in \Omega$ donde alguna desigualdad de **e** es estricta. Comencemos analizando el caso en que

$$u^\varepsilon(x_0) < \varepsilon^2 v^\varepsilon(x_0) + (1-\varepsilon^2)\Big\{\frac{1}{2}\sup_{y\in B_\varepsilon(x_0)} u^\varepsilon(y) + \frac{1}{2}\inf_{y\in B_\varepsilon(x_0)} u^\varepsilon(y)\Big\}.$$

Sea

$$\delta = \varepsilon^2 v^\varepsilon(x_0) + (1-\varepsilon^2)\Big\{\frac{1}{2}\sup_{y\in B_\varepsilon(x_0)} u^\varepsilon(y) + \frac{1}{2}\inf_{y\in B_\varepsilon(x_0)} u^\varepsilon(y)\Big\} - u^\varepsilon(x_0) > 0.$$

Construyamos entonces la función u_0^ε de la siguiente manera;

$$u_0^\varepsilon = \begin{cases} u^\varepsilon(x) & si \;\; x \neq x_0, \\ u^\varepsilon(x) + \dfrac{\delta}{2} & si \;\; x = x_0. \end{cases}$$

Observemos que

$$u_0^\varepsilon(x_0) = u^\varepsilon(x_0) + \frac{\delta}{2} < \varepsilon^2 v^\varepsilon(x_0) + (1-\varepsilon^2)\Big\{\frac{1}{2}\sup_{y\in B_\varepsilon(x_0)} u^\varepsilon(y) + \frac{1}{2}\inf_{y\in B_\varepsilon(x_0)} u^\varepsilon(y)\Big\}$$

y por construcción podemos poner

$$u_0^\varepsilon(x_0) < \varepsilon^2 v^\varepsilon(x_0) + (1-\varepsilon^2)\Big\{\frac{1}{2}\sup_{y\in B_\varepsilon(x_0)} u_0^\varepsilon(y) + \frac{1}{2}\inf_{y\in B_\varepsilon(x_0)} u_0^\varepsilon(y)\Big\}$$

Con esto hemos probado que el par $(u_0^\varepsilon, v^\varepsilon) \in \mathscr{A}$ pero $u_0^\varepsilon(x_0) > u^\varepsilon(x_0)$ lo cual contradice el hecho que u^ε es el supremo.

De manera completamente análoga podemos probar el caso en que

$$v^\varepsilon(x_0) < \varepsilon^2 u^\varepsilon(x_0) + (1-\varepsilon^2) \fint_{B_\varepsilon(x_0)} v^\varepsilon(y)dy.$$

Es decir, si llamamos δ a esta diferencia y definimos

$$v_0^\varepsilon = \begin{cases} v^\varepsilon(x) & si \;\; x \neq x_0, \\ v^\varepsilon(x) + \dfrac{\delta}{2} & si \;\; x = x_0. \end{cases}$$

Razonando como antes llegaremos a que el par $(u^\varepsilon, v_0^\varepsilon) \in \mathscr{A}$ lo que es contradictorio con la definición de v^ε.

Así hemos probado que en todos los puntos se debe dar la igualdad en la condición **e** (3). Esto concluye la demostración. □

Hagamos un resumen de hecho en este capítulo: Hemos construido un par de funciones $(u^\varepsilon, v^\varepsilon)$ que cumplen el DPP (2) y que están equiacotadas. Es decir, dichas funciones cumplen lo siguiente

$$\text{máx}\Big\{\sup_{\mathbb{R}^n}|u^\varepsilon(x)|, \sup_{\mathbb{R}^n}|v^\varepsilon(x)|\Big\} \leq C. \tag{13}$$

Siendo $C = \max\{\sup_{\mathbb{R}^n\setminus\Omega} |\overline{f}|, \sup_{\mathbb{R}^n\setminus\Omega} |\overline{g}|\}$. Esta contante no depende de ε, es decir que la misma constante C acota a las funciones $(u^\varepsilon, v^\varepsilon)$ para todo ε. Con esto hemos logrado el principal propósito de este capítulo.

Vamos a probar un teorema que nos va a dar unicidad de las funciones que cumplen el DPP, (2). Para demostrar el teorema vamos a construir una sucesión de variables aleatorias que resultarán ser supermartingalas y utilizaremos el *Optimal Stopping Theorem*. Recordemos estos resultados

Definición 4. *Sea $\{M_k\}_{k\geq 1}$ una sucesión de variables aleatorias. Decimos que esta sucesión es una supermartingala (resp. submartingalas) si cumple*

$$\mathbb{E}[M_{k+1}|M_0, M_1, ..., M_k] \leq M_k \ \ (resp. \geq).$$

Diremos que una sucesión de variables aleatorias es una martingala si es submartingala y supermartingala.

Teorema 4 (Optimal Stopping Theorem (OSTh))**.** *Sea $\{M_k\}_{k\geq 0}$ una sucesión de variables aleatorias de variables aleatorias que cumple una de las siguientes propiedades*

(a) El tiempo de detención τ es acotado (salvo medida cero).

(b) Vale que $\mathbb{E}[\tau] < \infty$. Además existe una constante $c > 0$ tal que $\mathbb{E}[M_{k+1} - M_k|M_0, ..., M_k] \leq c$.

(c) Existe una constante $c > 0$ tal que $|M_{\min\{\tau,k\}}| \leq c$ (salvo medida cero).

Entonces la variable aleatoria M_τ esta bien definida (salvo medida cero) y vale

$$\mathbb{E}[M_\tau] \leq \mathbb{E}_[M_0] \ \ (resp \ \geq)$$

si $\{M_k\}_{k\geq 0}$ es supermartingala (resp submartingala).

La demostración de este teorema se puede encontrar en [8, 19]. Ahora sí estamos en condiciones de enunciar y demostrar el siguiente resultado.

Teorema 5. *Dado $\varepsilon > 0$ sea el par $(u^\varepsilon, v^\varepsilon)$ que cumple el DPP* (2)*, entonces vale*

$$u^\varepsilon(x_0) = \sup_{S_I} \inf_{S_{II}} \mathbb{E}^{x_0}_{S_I,S_{II}}[pago\ final\ saliendo\ en\ x_\tau]$$

si $x_0 \in \Omega$ jugando en el tablero 1

$$v^\varepsilon(x_0) = \sup_{S_I} \inf_{S_{II}} \mathbb{E}^{x_0}_{S_I,S_{II}}[pago\ final\ saliendo\ en\ x_\tau]$$

si $x_0 \in \Omega$ jugando en el tablero 2.

Más aún, vale también que se pueden intercambiar $\inf$ *con* $\sup$ *en las igualdades anteriores, es decir el juego tiene un valor en cada tablero que resulta ser la única solución del DPP.*

Demostración. Dado $\varepsilon > 0$ hemos probado que existe un par de funciones $(u^\varepsilon, v^\varepsilon)$ que cumple el DPP, (2). Consideremos un par $(u^\varepsilon, v^\varepsilon)$ fijo cualquiera y fijemos un valor $\delta > 0$.

Comencemos con un valor inicial $(x_0, 1)$. Es decir, comenzamos en el tablero 1.

Vamos a definir una estrategia particular para el jugador I

$$x_{k+1}^I = S_I^*(x_0, ..., x_k)$$

es tal que

$$\sup_{y \in B_\varepsilon(x_k)} u^\varepsilon(y) - \frac{\delta}{2^k} \leq u^\varepsilon(x_{k+1}^I).$$

Dada esta estrategia para el jugador I y sea S_{II} una estrategia cualquiera para el jugador II. Consideremos la sucesión de variables aleatorias para $k \geq 0$ dada por

$$M_k = \begin{cases} u^\varepsilon(x_k) - \dfrac{\delta}{2^k} & si \ \ (x_k, 1), \\ v^\varepsilon(x_k) - \dfrac{\delta}{2^k} & si \ \ (x_k, 2). \end{cases}$$

Vamos a probar que $(M_k)_{\kappa \geq 0}$ es una *submartingala* y vamos a usar el *Optimal Stoping Theorem (OSTh)* para tener una acotación de la esperanza de la variable aleatoria en el paso final.

Comencemos a acotar

$$\mathbb{E}^{(x_0,1)}_{S_I^*, S_{II}}[M_{k+1}|M_k] = \mathbb{E}^{(x_0,1)}_{S_I^*, S_{II}}[M_{k+1}|(x_k, j_k)].$$

Separemos en dos casos:

Caso 1: Supongamos que $j_k = 1$ entonces, utilizando la esperanza condicional

$$\mathbb{E}^{(x_0,1)}_{S_I^*, S_{II}}[M_{k+1}|(x_k, 1)]$$
$$= (1 - \varepsilon^2)\mathbb{E}^{(x_0,1)}_{S_I^*, S_{II}}[M_{k+1}|(x_k, 1) \wedge j_{k+1} = 1] + \varepsilon^2 \mathbb{E}^{(x_0,1)}_{S_I^*, S_{II}}[M_{k+1}|(x_k, 1) \wedge j_{k+1} = 2].$$

Aquí utilizamos que en cada paso la probabilidad de quedarme en el mismo tablero es $(1 - \varepsilon^2)$ y la probabilidad de "saltar" al otro tablero es ε^2. Ahora bien, observemos que si $j_k = 1$ y $j_{k+1} = 2$

entonces $x_{k+1} = x_k$ (cambio de tablero). Por otro lado en el caso en que nos quedamos en el tablero 1 podemos aplicar nuevamente la esperanza condicional para obtener

$$\mathbb{E}^{(x_0,1)}_{S_I^*,S_{II}}[M_{k+1}|(x_k,1)] = (1-\varepsilon^2)\Big\{\frac{1}{2}u^\varepsilon(x^I_{k+1}) + \frac{1}{2}u^\varepsilon(x^{II}_{k+1}) - \frac{\delta}{2^{k+1}}\Big\} + \varepsilon^2(v^\varepsilon(x_k) - \frac{\delta}{2^{k+1}}).$$

Recordemos que estamos usando las estrategias S_I^* y S_{II}, entonces vale que

$$\sup_{y\in B_\varepsilon(x_k)} u^\varepsilon(y) - \frac{\delta}{2^k} \leq u^\varepsilon(x^I_{k+1})$$

y

$$\operatorname{ínf}_{y\in B_\varepsilon(x_k)} u^\varepsilon(y) \leq u^\varepsilon(x^{II}_{k+1}).$$

Por lo tanto llegamos a

$$\mathbb{E}^{(x_0,1)}_{S_I^*,S_{II}}[M_{k+1}|(x_k,1)] \geq (1-\varepsilon^2)\Big\{\frac{1}{2}(\sup_{y\in B_\varepsilon(x_k)} u^\varepsilon(y) - \frac{\delta}{2^k}) + \frac{1}{2}\operatorname*{ínf}_{y\in B_\varepsilon(x_k)} u^\varepsilon(y)\Big\} + \varepsilon^2 v^\varepsilon(x_k) - \frac{\delta}{2^{k+1}}.$$

Es decir,

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}^{(x_0,1)}_{S_I^*,S_{II}}[M_{k+1}|(x_k,1)]\\ &\quad\geq (1-\varepsilon^2)\Big\{\frac{1}{2}\sup_{y\in B_\varepsilon(x_k)} u^\varepsilon(y) + \frac{1}{2}\operatorname*{ínf}_{y\in B_\varepsilon(x_k)} u^\varepsilon(y)\Big\} + \varepsilon^2 v^\varepsilon(x_k) - (1-\varepsilon^2)\frac{\delta}{2^{k+1}} - \frac{\delta}{2^{k+1}}.\end{aligned}$$

Como u^ε cumple el DPP (2) se obtiene

$$\mathbb{E}^{(x_0,1)}_{S_I^*,S_{II}}[M_{k+1}|(x_k,1)] \geq u^\varepsilon(x_k) - \frac{\delta}{2^k} = M_k$$

y con esto hemos probado el caso 1.

Caso 2: Supongamos ahora que $j_k = 2$. Repitiendo un poco la cuenta anterior tenemos

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}^{(x_0,1)}_{S_I^*,S_{II}}[M_{k+1}|(x_k,2)]\\ &\quad= (1-\varepsilon^2)\mathbb{E}^{(x_0,1)}_{S_I^*,S_{II}}[M_{k+1}|(x_k,2)\wedge j_{k+1}=2] + \varepsilon^2\mathbb{E}^{(x_0,1)}_{S_I^*,S_{II}}[M_{k+1}|(x_k,2)\wedge j_{k+1}=1].\end{aligned}$$

Observar que si $j_k = j_{k+1} = 2$ significa que jugaremos en el tablero 2 parados en $x_k \in \Omega$, entonces el punto x_{k+1} será elegido con distribución uniforme en $B_\varepsilon(x_k)$. Entonces tenemos

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}^{(x_0,1)}_{S_I^*,S_{II}}[M_{k+1}|(x_k,2)\wedge j_{k+1}=2]\\ &\quad= \mathbb{E}^{(x_0,1)}_{S_I^*,S_{II}}[v^\varepsilon(x_{k+1}) - \frac{\delta}{2^{k+1}}|(x_k,2)\wedge j_{k+1}=2]\\ &\quad= \fint_{B_\varepsilon(x_k)} v^\varepsilon(y)dy - \frac{\delta}{2^{k+1}}.\end{aligned}$$

Por otro lado

$$\mathbb{E}^{(x_0,1)}_{S_I^*,S_{II}}[M_{k+1}|(x_k,2)\wedge j_{k+1}=1] = u^\varepsilon(x_k) - \frac{\delta}{2^{k+1}}.$$

Juntando todo obtenemos

$$\begin{aligned}\mathbb{E}^{(x_0,1)}_{S_I^*,S_{II}}[M_{k+1}|(x_k,2)] &= (1-\varepsilon^2)(\fint_{B_\varepsilon(x_k)} v^\varepsilon(y)dy - \frac{\delta}{2^{k+1}}) + \varepsilon^2(u^\varepsilon(x_k) - \frac{\delta}{2^{k+1}}) \\ &\geq (1-\varepsilon^2)\fint_{B_\varepsilon(x_k)} v^\varepsilon(y)dy + \varepsilon^2 u^\varepsilon(x_k) - \frac{\delta}{2^k},\end{aligned}$$

es decir,

$$\mathbb{E}^{(x_0,1)}_{S_I^*,S_{II}}[M_{k+1}|(x_k,2)] \geq v^\varepsilon(x_k) - \frac{\delta}{2^k} = M_k.$$

Aquí usamos que v^ε cumple el DPP, (2). Esto concluye el 2do caso.

Así hemos probado que la sucesión de variables aleatorias $(M_k)_{k\geq 0}$ es una *submartingala*. Utilizando el *OSTh* llegamos a

$$\mathbb{E}^{(x_0,1)}_{S_I^*,S_{II}}[M_\tau] \geq M_0$$

donde τ es el paso donde $x_\tau \notin \Omega$ en cualquiera de los dos tableros. Es decir

$$\mathbb{E}^{(x_0,1)}_{S_I^*,S_{II}}[pago\ final] \geq u(x_0) - \delta.$$

Como S_{II} es arbitraria podemos tomar infimo, entonces

$$\inf_{S_{II}} \mathbb{E}^{(x_0,1)}_{S_I^*,S_{II}}[pago\ final] \geq u(x_0) - \delta$$

y ahora tomamos supremo para las estrategias S_I

$$\sup_{S_I}\inf_{S_{II}} \mathbb{E}^{(x_0,1)}_{S_I,S_{II}}[pago\ final] \geq u^\varepsilon(x_0) - \delta.$$

Observemos que si hubieramos comenzado en $(x_0,2)$, es decir, en el tablero 2, la cuenta anterior nos arroja el resultado

$$\sup_{S_I}\inf_{S_{II}} \mathbb{E}^{(x_0,2)}_{S_I,S_{II}}[pago\ final] \geq v^\varepsilon(x_0) - \delta.$$

Nuestro objetivo ahora es probar la desigualdad inversa (invirtiendo inf con sup). Definamos una estrategia para el jugador II de la siguiente manera

$$x^{II}_{k+1} = S^*_{II}(x_0,...,x_k)$$

es tal que

$$\inf_{B_\varepsilon(x_k)} u^\varepsilon(x^{II}_{k+1}) + \frac{\delta}{2^k} \geq u^\varepsilon(x^{II}_{k+1}).$$

Definamos la sucesión de variables aleatorias

$$N_k = \begin{cases} u^\varepsilon(x_k) + \dfrac{\delta}{2^k} & si \ \ (x_k, 1) \\ v^\varepsilon(x_k) + \dfrac{\delta}{2^k} & si \ \ (x_k, 2). \end{cases}$$

Vamos a probar que esta sucesión de variables aleatorias es una *supermartingala*. Consideremos nuevamente un punto $(x_0, 1)$, entonces

$$\mathbb{E}^{(x_0,1)}_{S_I, S^*_{II}}[N_{k+1}|N_k] = \mathbb{E}^{(x_0,1)}_{S_I, S^*_{II}}[N_{k+1}|(x_k, j_k)].$$

Nuevamente separemos el argumento en dos casos,

Caso 1: Supongamos que $j_k = 1$ entonces

$$\mathbb{E}^{(x_0,1)}_{S^*_I, S_{II}}[N_{k+1}|(x_k, 1)] = (1-\varepsilon^2)\Big\{\frac{1}{2}u^\varepsilon(x^I_{k+1}) + \frac{1}{2}u^\varepsilon(x^{II}_{k+1}) + \frac{\delta}{2^{k+1}}\Big\} + \varepsilon^2(v^\varepsilon(x_k) + \frac{\delta}{2^{k+1}}).$$

Como estamos usando las estrategias S_I y S^*_{II}, entonces vale que

$$\inf_{y \in B_\varepsilon(x_k)} u^\varepsilon(y) + \frac{\delta}{2^k} \geq u^\varepsilon(x^{II}_{k+1})$$

y

$$\sup_{y \in B_\varepsilon(x_k)} u^\varepsilon(y) \geq u^\varepsilon(x^I_{k+1}).$$

Por lo tanto llegamos a

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}^{(x_0,1)}_{S_I, S^*_{II}}[N_{k+1}|(x_k, 1)] \\ &\quad \leq (1-\varepsilon^2)\Big\{\frac{1}{2}\sup_{y \in B_\varepsilon(x_k)} u^\varepsilon(y) + \frac{1}{2}(\inf_{y \in B_\varepsilon(x_k)} u^\varepsilon(y) + \frac{\delta}{2^k})\Big\} + \varepsilon^2 v^\varepsilon(x_k) + \frac{\delta}{2^{k+1}}. \end{aligned}$$

Usando que u^ε cumple el DPP (2) y haciendo un manejo algebráico llegamos a

$$\mathbb{E}^{(x_0,1)}_{S_I, S^*_{II}}[N_{k+1}|(x_k, 1)] \leq u^\varepsilon(x_k) + \frac{\delta}{2^k} = N_k,$$

con esto hemos probado el caso 1.

Caso 2: Supongamos ahora que $j_k = 2$. Entonces

$$\mathbb{E}^{(x_0,1)}_{S_I,S^*_{II}}[N_{k+1}|(x_k,2)]$$
$$= (1-\varepsilon^2)\mathbb{E}^{(x_0,1)}_{S_I,S^*_{II}}[N_{k+1}|(x_k,2)\wedge j_{k+1}=2] + \varepsilon^2\mathbb{E}^{(x_0,1)}_{S_I,S^*_{II}}[N_{k+1}|(x_k,2)\wedge j_{k+1}=1].$$

Observamos nuevamente que si $j_k = j_{k+1} = 2$ tenemos

$$\begin{aligned}\mathbb{E}^{(x_0,1)}_{S_I,S^*_{II}}&[N_{k+1}|(x_k,2)\wedge j_{k+1}=2]\\ &= \mathbb{E}^{(x_0,1)}_{S_I,S^*_{II}}[v^\varepsilon(x_{k+1}) + \frac{\delta}{2^{k+1}}|(x_k,2)\wedge j_{k+1}=2]\\ &= \fint_{B_\varepsilon(x_k)} v^\varepsilon(y)dy + \frac{\delta}{2^{k+1}}.\end{aligned}$$

Por otro lado

$$\mathbb{E}^{(x_0,1)}_{S_I,S^*_{II}}[N_{k+1}|(x_k,2)\wedge j_{k+1}=1] = u^\varepsilon(x_k) + \frac{\delta}{2^{k+1}}.$$

Juntando todo obtenemos

$$\begin{aligned}\mathbb{E}^{(x_0,1)}_{S_I,S^*_{II}}[N_{k+1}|(x_k,2)] &= (1-\varepsilon^2)(\fint_{B_\varepsilon(x_k)} v^\varepsilon(y)dy + \frac{\delta}{2^{k+1}}) + \varepsilon^2(u^\varepsilon(x_k) + \frac{\delta}{2^{k+1}})\\ &\leq (1-\varepsilon^2)\fint_{B_\varepsilon(x_k)} v^\varepsilon(y)dy + \varepsilon^2 u^\varepsilon(x_k) + \frac{\delta}{2^k},\end{aligned}$$

es decir,

$$\mathbb{E}^{(x_0,1)}_{S_I,S^*_{II}}[N_{k+1}|(x_k,2)] \leq v^\varepsilon(x_k) + \frac{\delta}{2^k} = N_k$$

aquí usamos que v^ε cumple el DPP (2). Esto concluye el 2do caso.

Hemos probado que la sucesión de variables aleatorias $(N_k)_{k\geq 0}$ es una *supermartingala*. Utilizando el *OSTh* llegamos a

$$\mathbb{E}^{(x_0,1)}_{S^*_I,S_{II}}[N_\tau] \leq N_0$$

donde τ es el paso donde $x_\tau \notin \Omega$ en cualquiera de los dos tableros. Es decir,

$$\mathbb{E}^{(x_0,1)}_{S_I,S^*_{II}}[pago\ final] \leq u(x_0) + \delta.$$

Como S_I es arbitraria podemos tomar supremo, entonces

$$\sup_{S_I} \mathbb{E}^{(x_0,1)}_{S_I,S^*_{II}}[pago\ final] \leq u(x_0) + \delta$$

y ahora tomamos infimo para las estrategias S_{II}

$$\inf_{S_{II}} \sup_{S_I} \mathbb{E}^{(x_0,1)}_{S_I,S_{II}}[pago\ final] \leq u^\varepsilon(x_0) + \delta.$$

Como ya observamos antes la misma cuenta comenzando en $(x_0, 2)$ nos da como resultado

$$\inf_{S_{II}} \sup_{S_I} \mathbb{E}^{(x_0,1)}_{S_I,S_{II}}[pago\ final] \leq v^\varepsilon(x_0) + \delta.$$

Para finalizar la demostración observemos que

$$\sup_{S_I} \inf_{S_{II}} \mathbb{E}_{S_I,S_{II}}[pago\ final] \leq \inf_{S_{II}} \sup_{S_I} \mathbb{E}_{S_I,S_{II}}[pago\ final].$$

Juntando todo llegamos a

$$u^\varepsilon(x_0) - \delta \leq \sup_{S_I} \inf_{S_{II}} \mathbb{E}^{(x_0,1)}_{S_I,S_{II}}[pago\ final] \leq \inf_{S_{II}} \sup_{S_I} \mathbb{E}^{(x_0,1)}_{S_I,S_{II}}[pago\ final] \leq u^\varepsilon(x_0) + \delta$$

y

$$v^\varepsilon(x_0) - \delta \leq \sup_{S_I} \inf_{S_{II}} \mathbb{E}^{(x_0,2)}_{S_I,S_{II}}[pago\ final] \leq \inf_{S_{II}} \sup_{S_I} \mathbb{E}^{(x_0,2)}_{S_I,S_{II}}[pago\ final] \leq v^\varepsilon(x_0) + \delta.$$

Como $\delta > 0$ es arbitrario todas las desigualdades son igualdades y tenemos

$$u^\varepsilon(x_0) = \sup_{S_I} \inf_{S_{II}} \mathbb{E}^{(x_0,1)}_{S_I,S_{II}}[pago\ final] \leq \inf_{S_{II}} \sup_{S_I} \mathbb{E}^{(x_0,1)}_{S_I,S_{II}}[pago\ final]$$

y

$$v^\varepsilon(x_0) = \sup_{S_I} \inf_{S_{II}} \mathbb{E}^{(x_0,2)}_{S_I,S_{II}}[pago\ final] \leq \inf_{S_{II}} \sup_{S_I} \mathbb{E}^{(x_0,2)}_{S_I,S_{II}}[pago\ final],$$

lo que concluye la demostración. □

Este teorema nos dice que el valor esperado del juego es lo que intuitivamente nos dice el DPP que construimos analizando el juego. Además nos indica "buenas estrategias" para los jugadores I y II, en el sentido que jugando con esas estrategias estamos cerca del valor esperado supremizando sobre S_I e infimizando sobre S_{II}. Por último con este teorema podemos hacer la siguiente observación:

Observación 2. Se puede hacer una construcción análoga considerando las desigualdades opuestas, es decir,

$$\textbf{e*}: \begin{cases} z^\varepsilon(x) \geq \varepsilon^2 w^\varepsilon(x) + (1-\varepsilon^2)\Big\{\frac{1}{2}\sup_{y\in B_\varepsilon(x)} z^\varepsilon(y) + \frac{1}{2}\inf_{y\in B_\varepsilon(x)} z^\varepsilon(y)\Big\} & si\ x \in \Omega, \\ w^\varepsilon(x) \geq \varepsilon^2 z^\varepsilon(x) + (1-\varepsilon^2) \fint_{B_\varepsilon(x)} w^\varepsilon(y)dy & si\ x \in \Omega, \\ z^\varepsilon(x) \geq \overline{f}(x) & si\ x \in \mathbb{R}^n \backslash \Omega, \\ w^\varepsilon(x) \geq \overline{g}(x) & si\ x \in \mathbb{R}^n \backslash \Omega. \end{cases}$$

Definamos ahora el conjunto

$$\mathscr{B} = \{(z^\varepsilon, w^\varepsilon)/son\ funciones\ acotadas\ que\ cumplen\ \textbf{e*}\}$$

Y ahora calculemos ínfimos, es decir, consideremos

$$u^{\varepsilon,*}(x) = \inf_{(z^\varepsilon, w^\varepsilon)\in\mathscr{B}} z^\varepsilon(x)$$

y

$$v^{\varepsilon,*}(x) = \inf_{(z^\varepsilon, w^\varepsilon)\in\mathscr{B}} w^\varepsilon(x)$$

que resultan ser soluciones del DPP (esto se puede demostrar por razonamientos análogos a los anteriores). Entonces, por la unicidad de solución del DPP tenemos que

$$u^{\varepsilon,*} = u^\varepsilon \qquad \text{y} \qquad v^{\varepsilon,*} = v^\varepsilon.$$

4. Convergencia cuando $\varepsilon \to 0$

El objetivo de este capítulo es probar que existen funciones continuas u y v límites de las funciones u^ε y v^ε construidas en el capítulo anterior. Para ello vamos usar el siguiente Lema cuyo enunciado (y demostración) es una variante del Teorema de Arzela-Ascoli.

Lema 3 ([14]). *Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un abierto acotado con borde suave. Sea la familia $\{u^\varepsilon : \overline{\Omega} \to \mathbb{R} : \varepsilon > 0\}$ verificando las siguientes dos condiciones:*

1. *Existe una constante $C > 0$ tal que $|u^\varepsilon(x)| \leq C$ para todo $\varepsilon > 0$ para todo $x \in \overline{\Omega}$.*
2. *Dado $\eta > 0$ existe un $r_0 > 0$ y $\varepsilon_0 > 0$ tal que para todo $\varepsilon < \varepsilon_0$ y para todos $x, y \in \overline{\Omega}$ tales que $|x - y| < r_0$ sucede que*
$$|u^\varepsilon(x) - u^\varepsilon(y)| < \eta$$

Entonces existe una función $u : \overline{\Omega} :\to \mathbb{R}$ uniformemente continua que es límite uniforme de la familia $\{u^\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ cuando $\varepsilon \to 0$ a lo largo de una subsucesión.

Para poder usar el Lema tenemos que chequear que las funciones u^ε y v^ε cumplen las dos hipótesis. Observar que la primera hipótesis ya la obtuvimos en (3) en el capítulo anterior. Para probar la segunda hipótesis vamos a usar otros lemas que enunciaremos a continuación recordando las definiciones de u^ε y v^ε que dimos en (2) y (2). Vamos a enunciar los lemas separando dos casos.

4.1. Jugando Tug-of-War

En los lemas que vamos a enunciar a continuación vamos a suponer que jugamos solamente con las reglas de Tug-of-War (siempre jugamos en el tablero 1).

Lema 4. *Dados $\eta > 0$ y $a > 0$, existen $r_0 > 0$ y $\varepsilon_0 > 0$ tales que, dado $y \in \partial\Omega$ si $x_0 \in \Omega$ en el tablero 1 con $|x_0 - y| < r_0$, entonces, si jugamos Tug-of-War, el Jugador I o el Jugador II tiene una estrategia que llamaremos S_I^* y S_{II}^* tal que:*

$$\mathbb{P}(x_\tau : |x_\tau - y| \geq a) < \eta$$

$$\mathbb{P}(\tau \geq \frac{a}{\varepsilon^2}) < \eta$$

para $\varepsilon \leq \varepsilon_0$ y para x_τ el punto donde el juego finaliza sin haber abandonado el tablero 1.

Lo que dice este lema es que si comenzamos a jugar suficientemente cerca del punto borde y, vamos a terminar "rápido" y "cerca" del punto $y \in \partial\Omega$ con probabilidad alta (como muestra la Figura 3). Antes de comenzar la demostración definamos una estrategia particular que llamaremos apuntar en una dirección.

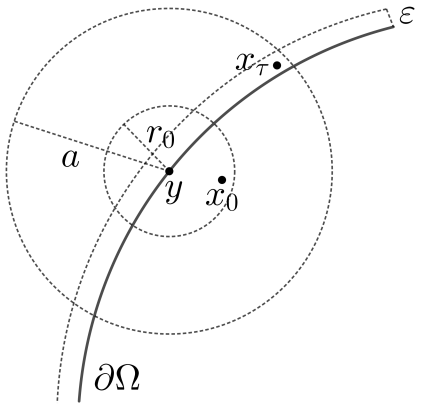

Figura 3: Esquema de salida

Definición 5. *Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un abierto con borde suave, y sea $x_0 \in \Omega$. Si jugamos Tug of War definimos, para cualquiera de los dos jugadores, la estrategia "apuntar en una dirección" de la siguiente manera*

$$x_k = S(x_{k-1}) = x_{k-1} + (\varepsilon - \frac{\varepsilon^3}{2^{k-1}})\xi$$

para todo $k \geq 1$

Observar que usando esta estrategia jugamos en el bola abierta $B_\varepsilon(x_{k-1})$. Observemos también que esta estrategia depende únicamente de la jugada anterior.

Comencemos ahora sí la demostración del Lema 4.

Demostración. Para probar el Lema 4 vamos a enunciar y demostrar el siguiente lema:

Lema 5. *Consideremos sin pérdida de generaldad que $0 \in \partial\Omega$. Sea $x_0 \in \Omega$ (cerca de 0), entonces existe una constante C (independiente de ε) tal que si alguno de los dos jugadores apunta en una dirección vamos a poder acotar el tiempo esperado de salida y la distancia del punto de salida al $0 \in \partial\Omega$ de la siguiente manera:*

$$\mathbb{E}^{x_0}[\tau] \leq C|x_0|^2\varepsilon^{-2}$$
$$\mathbb{E}^{x_0}[|x_\tau|^2] \leq C|x_0|^2$$

para todo $\varepsilon < \varepsilon_0$.

Demostración. Vamos comenzar probando un caso particular. Supongamos primero que el conjunto Ω es **convexo**. Nuevamente sin perdida de generalidad podemos suponer que

$$\Omega \subseteq \{x \in \mathbb{R}^n : 0 < x_n < R\}.$$

Vamos a suponer que alguno de los dos jugadores tiene como estrategia jugar apuntando en la dirección $-e_n$.

El gráfico que se ve en la Figura 4 muestra la situación en $\mathbb{R}^2$.

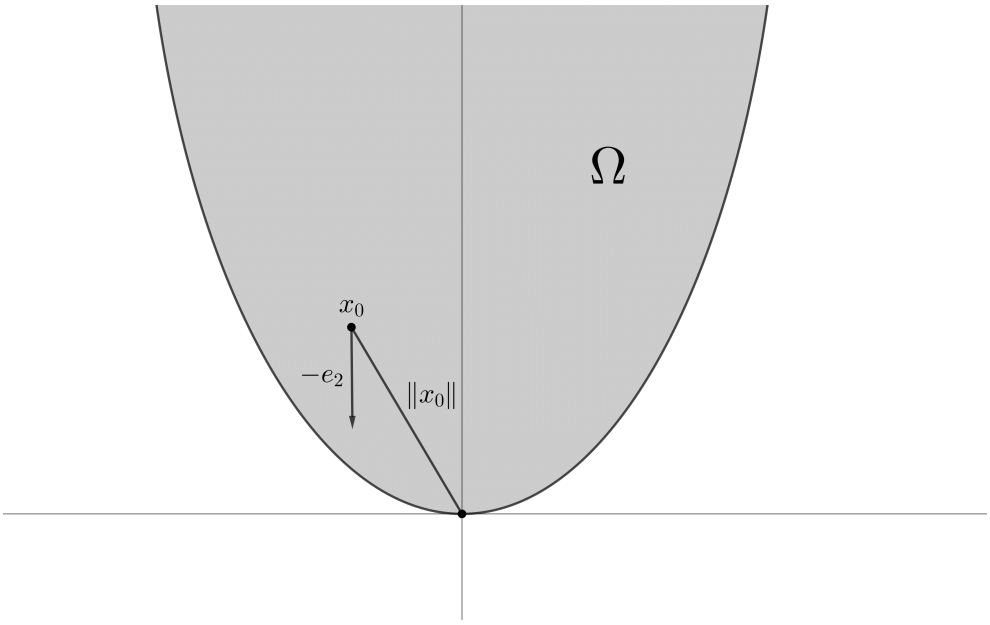

Figura 4: Estrategia apuntar en la dirección $-e_2$

Lo que vamos a probar ahora es que

$$\mathbb{E}^{x_0}[\tau] \leq 3((x_0)_n + \varepsilon^3)^2\varepsilon^{-2}$$

Para eso vamos a definir una sucesión de variables aleatorias $(M_k)_{k\geq 0}$ de la siguiente manera

$$M_k = (x_k)_n + \frac{\varepsilon^3}{2^k}$$

Donde $(x_j)_n$ es la n-ésima coordenada de x_j. Lo que vamos a hacer ahora es probar que la sucesión de variables aleatorias es *supermartingala*. Observemos que en nuestro caso, como cada paso depende únicamente de la posición anterior y del número de pasos que se dieron vale lo siguiente

$$\mathbb{E}[M_{k+1}|M_0, M_1, ..., M_k] = \mathbb{E}[M_{k+1}|M_k]$$

entonces, lo que queremos probar es

$$\mathbb{E}[M_{k+1}|M_k] \leq M_k$$

para eso veamos que si parados en x_k jugamos Tug-of-War, con probabilidad $1/2$ obtendremos

$$(x_{k+1})_n = (x_k)_n - \varepsilon + \frac{\varepsilon^3}{2^k}$$

(es el caso en que usamos la estrategia del jugador que apunta en la dirección $-e_n$). Por otro lado, como $x_{k+1} \in B_\varepsilon(x_k)$, sucede que $(x_{k+1})_n \leq (x_k)_n + \varepsilon$. Entonces

$$\mathbb{E}[(x_{k+1})_n|(x_k)_n] \leq \frac{1}{2}[(x_k)_n - \varepsilon + \frac{\varepsilon^3}{2^k}] + \frac{1}{2}[(x_k)_n + \varepsilon] = (x_k)_n + \frac{\varepsilon^3}{2^{k+1}}$$

como $\dfrac{\varepsilon^3}{2^k}$ es determinístico para todo k llegamos a

$$\mathbb{E}[(x_{k+1})_n + \frac{\varepsilon^3}{2^{k+1}}|(x_k)_n + \frac{\varepsilon^3}{2^k}] \leq (x_k)_n + \frac{\varepsilon^3}{2^{k+1}} + \frac{\varepsilon^3}{2^{k+1}} = (x_k)_n + \frac{\varepsilon^3}{2^k}$$

así hemos probado que $\{M_k\}_{k\leq 1}$ es *supermartingala*.

Consideremos ahora la variable aleatoria

$$(M_{k+1} - M_k)^2$$

llamemos H_k al siguiente evento

$$H_k = \{x_{k+1}\ es\ elegido\ por\ el\ jugador\ que\ apunta\ hacia\ -e_n\} \tag{14}$$

entonces vale lo siguiente

$$\mathbb{E}[(M_{k+1}-M_k)^2|M_k] = \frac{1}{2}\mathbb{E}[(M_{k+1}-M_k)^2|M_k \wedge H_k] + \frac{1}{2}\mathbb{E}[(M_{k+1}-M_k)^2|M_k \wedge H_k^c]$$
$$\geq \frac{1}{2}\mathbb{E}[(M_{k+1}-M_k)^2|M_k \wedge H_k].$$

Ahora observemos que

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\mathbb{E}[(M_{k+1}-M_k)^2|M_k \wedge H_k] \\
&\quad = \frac{1}{2}\mathbb{E}[((x_k)_n - \varepsilon + \frac{\varepsilon^3}{2^k} + \frac{\varepsilon^3}{2^{k+1}} - (x_k)_n - \frac{\varepsilon^3}{2^k})^2] \\
&\quad = \frac{1}{2}\mathbb{E}[(-\varepsilon + \frac{\varepsilon^3}{2^{k+1}})^2] \geq \frac{\varepsilon^2}{3}
\end{aligned}$$

si $\varepsilon < \varepsilon_0$ para algún ε_0 suficientemente chico. Con esto hemos probado que

$$\mathbb{E}[(M_{k+1}-M_k)^2|M_k] \geq \frac{\varepsilon^2}{3}. \tag{15}$$

Vamos a trabajar ahora con la variable aleatoria $M_k^2 - M_{k+1}^2$. Haciendo un manejo algebráico llegaremos a

$$M_k^2 - M_{k+1}^2 = (M_{k+1}-M_k)^2 + 2M_{k+1}(M_k - M_{k+1}) \tag{16}$$

veamos que $\mathbb{E}[M_{k+1}(M_k - M_{k+1})|M_k] \geq 0$. Para eso usaremos nuevamente el conjunto H_k definido en (4.1)

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}[M_{k+1}(M_k - M_{k+1})|M_k] \\
&\quad = \frac{1}{2}\mathbb{E}[M_{k+1}(M_k - M_{k+1})|M_k \wedge H_k] + \frac{1}{2}\mathbb{E}[M_{k+1}(M_k - M_{k+1})|M_k \wedge H_k^c] \\
&\quad = \frac{1}{2}[((x_k)_n - \varepsilon + \frac{\varepsilon^3}{2^k} + \frac{\varepsilon^3}{2^{k+1}})((x_k)_n + \frac{\varepsilon^3}{2^k} - (x_k)_n + \varepsilon - \frac{\varepsilon^3}{2^k} - \frac{\varepsilon^3}{2^{k+1}})] \\
&\qquad + \frac{1}{2}[((x_{k+1})_n + \frac{\varepsilon^3}{2^{k+1}})((x_k)_n + \frac{\varepsilon^3}{2^k} - (x_{k+1})_n - \frac{\varepsilon^3}{2^{k+1}})] \\
&\quad \geq \frac{1}{2}((x_k)_n - \varepsilon + \frac{\varepsilon^3}{2^k} + \frac{\varepsilon^3}{2^{k+1}})(\varepsilon - \frac{\varepsilon^3}{2^{k+1}}) + \frac{1}{2}[((x_k)_n - \varepsilon + \frac{\varepsilon^3}{2^{k+1}})((x_k)_n \\
&\qquad + \frac{\varepsilon^3}{2^k} - (x_k)_n - \varepsilon - \frac{\varepsilon^3}{2^{k+1}})]
\end{aligned}$$

aquí usamos que $(x_k)_n - \varepsilon \leq (x_{k+1})_n \leq (x_k)_n + \varepsilon$. Luego llegamos a

$$\mathbb{E}[M_{k+1}(M_k - M_{k+1})|M_k] \geq \frac{1}{2}((x_k)_n - \varepsilon + \frac{\varepsilon^3}{2^{k+1}} + \frac{\varepsilon^3}{2^k})(\varepsilon - \frac{\varepsilon^3}{2^{k+1}}) + \frac{1}{2}((x_k)_n - \varepsilon + \frac{\varepsilon^3}{2^{k+1}})(-\varepsilon + \frac{\varepsilon^3}{2^{k+1}})$$

si hacemos las distributivas llegamos a

$$\mathbb{E}[M_{k+1}(M_k - M_{k+1})|M_k] \geq \frac{1}{2}[\frac{\varepsilon^3}{2^k}(\varepsilon - \frac{\varepsilon^3}{2^{k+1}})] \geq 0$$

lo cual es cierto si $k \geq 0$ y $0 < \varepsilon < 1$ (lo que podemos suponer pues vamos a hacer tender a ε a cero). Luego si volvemos a (4.1), y usamos el resultado que acabamos de obtener y (4.1) llegamos a

$$\mathbb{E}[M_k^2 - M_{k+1}^2|M_k] \geq \mathbb{E}[(M_{k+1} - M_k)^2|M_k] \geq \frac{\varepsilon^2}{3}.$$

Antes de seguir observemos que calcular la esperanza bajo la condición M_k o M_k^2 es lo mismo porque ambas dependen únicamente del valor $(x_k)_n$ y de la cantidad de pasos dados k. Entonces, si consideramos la sucesión de variables aleatorias

$$\mathbb{Y}_k = M_k^2 + \frac{k\varepsilon^2}{3}$$

y usando nuevamente que calculando esperanza condicional bajo la condición $\mathbb{Y}_k$ es lo mismo que bajo la condición M_k^2 llegamos a

$$\mathbb{E}[\mathbb{Y}_k - \mathbb{Y}_{k+1}|\mathbb{Y}_k] = \mathbb{E}[M_k^2 - M_{k+1}^2 - \frac{\varepsilon^2}{3}|\mathbb{Y}_k] \geq 0$$

como $\mathbb{E}[\mathbb{Y}_k|\mathbb{Y}_k] = \mathbb{Y}_k$ obtenemos

$$\mathbb{E}[\mathbb{Y}_{k+1}|\mathbb{Y}_k] \leq \mathbb{Y}_k$$

con esto hemos probado que la sucesión $\{\ \mathbb{Y}_k\}_{k\geq 1}$ es una *supermartingala*. Pero no estamos en condiciones de usar el *Optimal Stopping Theorem for Submartingales* pues $\{Y_k\}$ no cumple ninguna de las hipótesis del teorema. Hagamos entonces la siguiente construcción: Dado un $m \in \mathbb{N}$ fijo definimos

$$\tau_m = \tau \wedge m := \text{mín}\{\tau, m\}.$$

Entonces sucede que la variable aleatoria τ_m esta acotada pues trivialmente

$$\tau_m \leq m.$$

Con esto cumplimos la primer hipótesis del teorema. Entonces usando *OSTh* obtenemos

$$\mathbb{E}[\mathbb{Y}_{\tau_m}] \leq \mathbb{Y}_0.$$

Por otra parte vale el límite

$$\lim_{m\to\infty} \tau \wedge m = \tau$$

casi seguramente. Entonces si usamos el *Lema de Fatou*, llegamos a

$$\mathbb{E}[\mathbb{Y}_\tau] = \mathbb{E}[\liminf_m \mathbb{Y}_{\tau\wedge m}] \underbrace{\leq}_{Fatou} \liminf_m \mathbb{E}[\mathbb{Y}_{\tau\wedge m}] \underbrace{\leq}_{OSTh} \mathbb{Y}_0.$$

Por lo tanto llegamos al siguiente resultado

$$\mathbb{E}[\mathbb{Y}_\tau] \leq \mathbb{Y}_0,$$

es decir

$$\mathbb{E}\Big[M_\tau^2 + \frac{\tau\varepsilon^2}{3}\Big] \leq M_0^2. \tag{17}$$

Entonces

$$\mathbb{E}[\tau] \leq 3M_0^2\varepsilon^{-2},$$

es decir,

$$\mathbb{E}[\tau] \leq 3((x_0)_n + \varepsilon^3)^2\varepsilon^{-2} \leq 4((x_0)_n)^2\varepsilon^{-2} \leq 4|x_0|^2\varepsilon^{-2}$$

si ε es suficientemente chico (y menor que el elegido anteriormente). Luego

$$\mathbb{E}[\tau] \leq 4|x_0|^2\varepsilon^{-2}$$

para todo $\varepsilon < \varepsilon_0$.

Por otro lado, si volvemos a (4.1) llegamos a

$$\mathbb{E}[M_\tau^2] \leq M_0^2,$$

es decir,

$$\mathbb{E}[((x_\tau)_n)^2] \leq \mathbb{E}[((x_\tau)_n + \frac{\varepsilon^3}{2^\tau})^2] \leq ((x_0)_n + \varepsilon^3)^2 \leq 2(x_0)_n^2 \leq 2|x_0|^2.$$

Para finalizar tendríamos que probar que si la n-ésima coordenada de x_τ es chica entonces la norma de x_τ también lo es, lo cual no es necesariamente cierto si Ω no es estrictamente convexo. Vamos a avanzar un poco más sobre esta idea. En la figura (5) se muestran dos dominios. En el caso I, donde el conjunto Ω no es estríctamente convexo se ve que el punto de salida x_τ tiene coordenada n-ésima muy chica pero el vector tiene norma grande (está lejos de 0). Por otro lado, en el caso II donde el conjunto Ω es estríctamente convexo sucede que la norma de x_τ será chica si la coordenada n-ésima lo es suficientemente (es más, si nuestro dominio tiene en cada punto curvatura mayor o igual una (misma) constante positiva sucede que dado $a > 0$ existe un $b = b(a) > 0$ tal que si $(x_\tau)_n < b$ entonces $|x_\tau| < a$). Por lo tanto, con este argumento, tendremos el resultado para un conjunto estríctamente convexo.

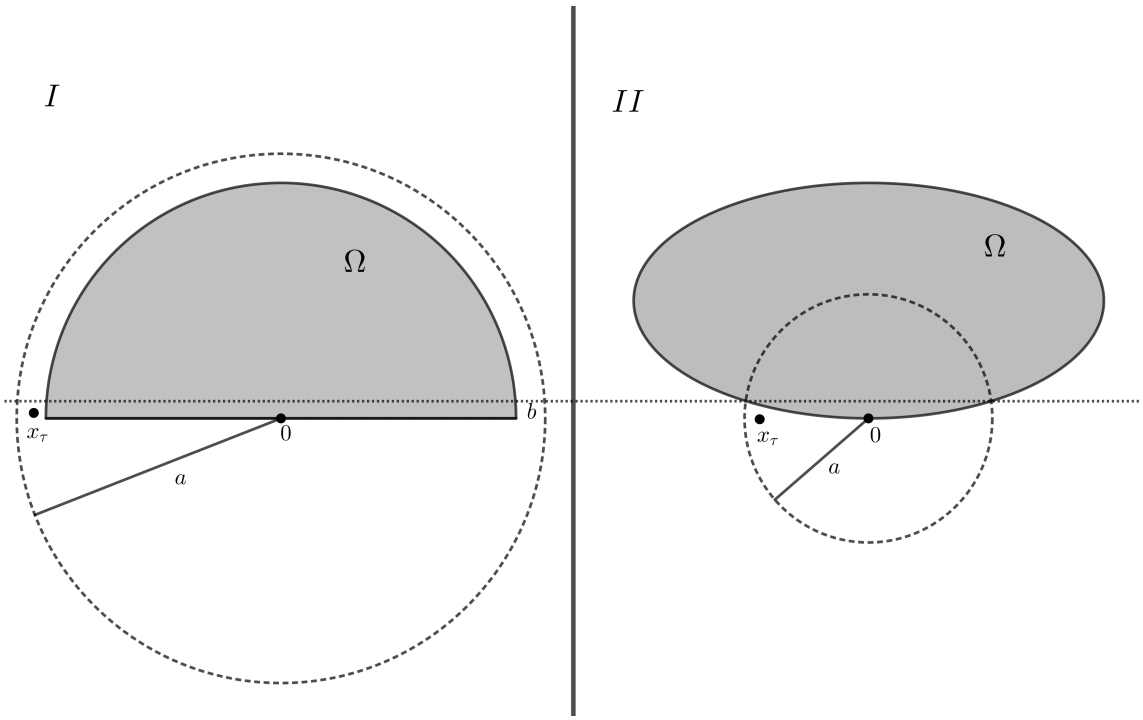

Figura 5: I:conjunto convexo, II:conjunto estrictamente convexo

Supongamos ahora que Ω no es necesariamente convexo. En este caso vamos a utilizar la estrategia (para cualquiera de los dos jugadores) de "apuntar en la dirección $0 \in \partial\Omega$". Es decir

$$x_k = x_{k-1} + (\frac{\varepsilon^3}{2^{k-1}} - \varepsilon)\frac{x_{k-1}}{|x_{k-1}|}.$$

Definamos ahora las variables aleatorias

$$N_k = |x_k| + \frac{\varepsilon^3}{2^k}$$

para $k \geq 0$.

Nuevamente el objetivo es probar que la sucesión de variables aleatorias $\{N_k\}_{k\geq 0}$ es una *supermartingala*. Observemos que, como N_{k+1} depende exclusivamente de N_k y de la cantidad de jugadas k, lo que debemos probar es que

$$\mathbb{E}[N_{k+1}|N_k] \leq N_k.$$

Para probarlo vamos a usar que, con probabilidad $1/2$ obtendremos

$$x_{k+1} = x_k + (\frac{\varepsilon^3}{2^k} - \varepsilon)\frac{x_k}{|x_k|}$$

(este es el caso del jugador que apunta hacia el $0 \in \partial\Omega$) y por otro lado $|x_{k+1}| \leq |x_k| + \varepsilon$. Entonces

$$\mathbb{E}[|x_{k+1}|||x_k|] \leq \frac{1}{2}[|x_k| + (\frac{\varepsilon^3}{2^k} - \varepsilon)] + \frac{1}{2}(|x_k| + \varepsilon) = |x_k| + \frac{\varepsilon^3}{2^{k+1}},$$

por lo tanto obtenemos lo siguiente

$$\mathbb{E}\Big[N_{k+1}|N_k\Big] = \mathbb{E}\Big[|x_{k+1}| + \frac{\varepsilon^3}{2^{k+1}}||x_k| + \frac{\varepsilon^3}{2^k}\Big] \leq |x_k| + \frac{\varepsilon^3}{2^{k+1}} + \frac{\varepsilon^3}{2^{k+1}} = N_k.$$

Acabamos de probar que la sucesión $\{N_k\}_{k\geq 0}$ es una *supermartingala*.

Reproduciendo la cuenta hecha para el caso convexo consideremos ahora la variable aleatoria

$$(N_{k+1} - N_k)^2.$$

Llamemos F_k al siguiente evento

$$F_k = \{x_{k+1}\ es\ elegido\ por\ el\ jugador\ que\ apunta\ hacia\ 0 \in \partial\Omega\} \tag{18}$$

entonces vale lo siguiente

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}[(N_{k+1} - N_k)^2|N_k] \\
&\quad = \frac{1}{2}\mathbb{E}[(N_{k+1} - N_k)^2|N_k \wedge F_k] + \frac{1}{2}\mathbb{E}[(N_{k+1} - N_k)^2|N_k \wedge F_k^c] \\
&\quad \geq \tfrac{1}{2}\mathbb{E}[(N_{k+1} - N_k)^2|N_k \wedge F_k].
\end{aligned}$$

Ahora observemos que

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\mathbb{E}[(N_{k+1} - N_k)^2|N_k \wedge F_k] \\
&\quad = \frac{1}{2}\mathbb{E}[(|x_k| - \varepsilon + \frac{\varepsilon^3}{2^k} + \frac{\varepsilon^3}{2^{k+1}} - |x_k| - \frac{\varepsilon^3}{2^k})^2] \\
&\quad = \frac{1}{2}\mathbb{E}[(-\varepsilon + \frac{\varepsilon^3}{2^{k+1}})^2] \geq \frac{\varepsilon^2}{3}
\end{aligned}$$

si $\varepsilon < \varepsilon_0$ para algún ε_0 suficientemente chico. Con esto hemos probado que

$$\mathbb{E}[(N_{k+1} - N_k)^2|N_k] \geq \frac{\varepsilon^2}{3}. \tag{19}$$

Vamos a trabajar ahora con la variable aleatoria $N_k^2 - N_{k+1}^2$. Haciendo un manejo algebráico llegaremos a

$$N_k^2 - N_{k+1}^2 = (N_{k+1} - N_k)^2 + 2N_{k+1}(N_k - N_{k+1}). \tag{20}$$

Veamos que $\mathbb{E}[N_{k+1}(N_k - N_{k+1})|N_k] \geq 0$. Para eso usaremos nuevamente el conjunto F_k definido en (4.1). Vale que

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}[N_{k+1}(N_k - N_{k+1})|N_k] \\
&\quad = \frac{1}{2}\mathbb{E}[N_{k+1}(N_k - N_{k+1})|N_k \wedge F_k] + \frac{1}{2}\mathbb{E}[N_{k+1}(N_k - N_{k+1})|N_k \wedge F_k^c] \\
&\quad = \frac{1}{2}[|(x_k| - \ + \frac{\varepsilon^3}{2^k} + \frac{\varepsilon^3}{2^{k+1}})(|x_k| + \frac{\varepsilon^3}{2^k} - |x_k| + \varepsilon - \frac{\varepsilon^3}{2^k} - \frac{\varepsilon^3}{2^{k+1}})] \\
&\qquad + \frac{1}{2}[(|x_{k+1}| + \frac{\varepsilon^3}{2^{k+1}})(|x_k| + \frac{\varepsilon^3}{2^k} - |x_{k+1}| - \frac{\varepsilon^3}{2^{k+1}})] \\
&\quad \geq \frac{1}{2}(|x_k| - \varepsilon + \frac{\varepsilon^3}{2^k} + \frac{\varepsilon^3}{2^{k+1}})(\varepsilon - \frac{\varepsilon^3}{2^{k+1}}) \\
&\qquad + \frac{1}{2}[(|x_k| - \varepsilon + \frac{\varepsilon^3}{2^{k+1}})(|x_k| + \frac{\varepsilon^3}{2^k} - |x_k| - \varepsilon - \frac{\varepsilon^3}{2^{k+1}})]
\end{aligned}$$

aquí usamos que $|x_k| - \varepsilon \leq |x_{k+1}| \leq |x_k| + \varepsilon$. Luego llegamos a

$$\mathbb{E}[N_{k+1}(N_k - N_{k+1})|N_k] \geq \frac{1}{2}(|x_k| - \varepsilon + \frac{\varepsilon^3}{2^{k+1}} + \frac{\varepsilon^3}{2^k})(\varepsilon - \frac{\varepsilon^3}{2^{k+1}}) + \frac{1}{2}(|x_k| - \varepsilon + \frac{\varepsilon^3}{2^{k+1}})(-\varepsilon + \frac{\varepsilon^3}{2^{k+1}})$$

y si hacemos las distributivas obtenemos

$$\mathbb{E}[N_{k+1}(N_k - N_{k+1})|N_k] \geq \frac{1}{2}[\frac{\varepsilon^3}{2^k}(\varepsilon - \frac{\varepsilon^3}{2^{k+1}})] \geq 0.$$

Luego si volvemos a (4.1), y usamos el resultado que acabamos de obtener y (4.1) obtenemos

$$\mathbb{E}[N_k^2 - N_{k+1}^2|N_k] \geq \mathbb{E}[(N_{k+1} - N_k)^2|N_k] \geq \frac{\varepsilon^2}{3}.$$

Como la esperanza bajo la condición N_k o N_k^2 es el mismo valor, entonces si consideramos la sucesión de variables aleatorias

$$\mathbb{W}_k = N_k^2 + \frac{k\varepsilon^2}{3}$$

y usamos nuevamente que calculando esperanza condicional bajo la condición $\mathbb{W}_k$ es lo mismo que bajo la condición N_k^2 llegamos a

$$\mathbb{E}[\mathbb{W}_k - \mathbb{W}_{k+1}|\mathbb{W}_k] = \mathbb{E}[N_k^2 - N_{k+1}^2 - \frac{\varepsilon^2}{3}|\mathbb{W}_k] \geq 0.$$

Como $\mathbb{E}[\mathbb{W}_k|\mathbb{W}_k] = \mathbb{W}_k$ obtenemos

$$\mathbb{E}[\mathbb{W}_{k+1}|\mathbb{W}_k] \leq \mathbb{W}_k.$$

Con esto hemos probado que la sucesión $\{\mathbb{W}_k\}_{k\geq 1}$ es una *supermartingala*. De acuedo con el *Optimal Stopping Theorem* y repitiendo la construcción que hicimos más arriba obtenemos el siguiente resultado

$$\mathbb{E}[N_\tau^2 + \frac{\tau\varepsilon^2}{3}] \leq N_0^2. \tag{21}$$

Entonces

$$\mathbb{E}[\tau] \leq 3N_0^2\varepsilon^{-2},$$

es decir,

$$\mathbb{E}[\tau] \leq 3(|x_0| + \varepsilon^3)^2\varepsilon^{-2} \leq 4|x_0|^2\varepsilon^{-2}$$

si ε es suficientemente chico. Luego

$$\mathbb{E}[\tau] \leq 4|x_0|^2\varepsilon^{-2}.$$

Por otro lado, si volvemos a (4.1) podemos llegamos a

$$\mathbb{E}[N_\tau^2] \leq N_0^2,$$

es decir,

$$\mathbb{E}[|x_\tau|^2] \leq \mathbb{E}[(|x_\tau| + \frac{\varepsilon^3}{2^\tau})^2] \leq (|x_0| + \varepsilon^3)^2 \leq 2|x_0|^2.$$

Con esto hemos finalizado la demostración. □

Usemos ahora el Lema 5 para probar

$$\mathbb{P}(\tau \geq \frac{a}{\varepsilon^2}) < \eta$$

y

$$\mathbb{P}(|x_\tau - y| \geq a) < \eta$$

para el caso en que estamos jugando siempre con las reglas de Tug of War (lo que equivale a jugar siempre en el *tablero 1*).

Dado $\eta > 0$ y $a > 0$, y dado $y \in \partial\Omega$, usando el ε_0 que propone el lema, tomamos $x_0 \in \Omega$ tal que $|x_0 - y| < r_0$ para un r_0 que pronto vamos a determinar.

Entonces tenemos

$$Cr_0^2\varepsilon^{-2} \geq C|x_0 - y|^2\varepsilon^{-2} \geq \mathbb{E}^{x_0}[\tau] \geq \mathbb{P}(\tau \geq \frac{a}{\varepsilon^2})\frac{a}{\varepsilon^2}$$

luego

$$\mathbb{P}(\tau \geq \frac{a}{\varepsilon^2}) \leq C\frac{r_0^2}{a} \leq \eta$$

lo cual es verdadero si $r_0 \leq \sqrt{\frac{\eta a}{C}}$.

Por otro lado,

$$Cr_0^2 \geq C|x_0 - y|^2 \geq \mathbb{E}^{x_0}[|x_\tau - y|^2] \geq a^2 \mathbb{P}(|x_\tau - y|^2 \geq a^2)$$

luego

$$\mathbb{P}(|x_\tau - y| \geq a) \leq C\frac{r_0^2}{a^2} \leq \eta$$

lo cual es verdadero si $r_0 \leq \sqrt{\frac{\eta a^2}{C}}$. Observar que si suponemos que $a < 1$ sucede que $\sqrt{\frac{\eta a^2}{C}} < \sqrt{\frac{\eta a}{C}}$, entonces pidiéndole a $r_0 < \sqrt{\frac{\eta a^2}{C}}$ se cumplen automáticamente las dos condiciones. □

4.2. Jugando paseos al azar

Vamos a enunciar y probar un lema similar a los anteriores pero jugando con la regla de paseos al azar. En las demostraciones utilizaremos estrategias similares a lo hecho annteriormente, construyendo variables aleatorias que son supermartingalas o martingalas y usando el *Optimal Stopping Theorem (OSTh)*.

Lema 6. *Dados $\eta > 0$ y $a > 0$, existen $r_0 > 0$ y $\varepsilon_0 > 0$ tales que, dado $y \in \partial\Omega$ si $x_0 \in \Omega$ con $|x_0 - y| < r_0$, entonces, si jugamos paseos al azar se tienen las siguientes estimaciones:*

$$\mathbb{P}(x_\tau : |x_\tau - y| \geq a) < \eta$$

$$\mathbb{P}(\tau \geq \frac{a}{\varepsilon^2}) < \eta$$

para $\varepsilon \leq \varepsilon_0$ y para x_τ el punto donde el juego finaliza sin abandonar el tablero 2.

Demostración. Repitiendo un poco la demostración para el caso que jugamos Tug-of-War vamos a comenzar esta demostración haciendo primero el caso particular en que Ω es un conjunto convexo, y luego haremos el caso general.

- **Caso Convexo**

Consideremos la variable aleatoria

$$M_k = (x_k)_n \tag{22}$$

la n-ésima coordenada de la posición x_k. Veamos que M_k es una *martingala*. En efecto,

$$\mathbb{E}[M_{k+1}|M_k] = \fint_{B_\varepsilon(x_k)} w_n dw.$$

Si hacemos el cambio de variables

$$\begin{cases} w = x_k + \varepsilon z \\ dw = \varepsilon^n dz \end{cases}$$

donde $z \in B_1(0)$, llegamos a

$$\fint_{B_\varepsilon(x_k)} w_n dw = \frac{1}{B_\varepsilon(x_k)} \int_{B_\varepsilon(x_k)} w_n dw = \frac{1}{\varepsilon^n B_1(0)} \int_{B_1(0)} ((x_k)_n + \varepsilon z_n)\varepsilon^n dz.$$

Si cancelamos ε^n, separamos la suma y usamos que $(x_k)_n$ no depende de z y que la función z_n es impar (entonces integra 0 en $B_1(0)$) llegamos a

$$\fint_{B_\varepsilon(x_k)} w_n dw = (x_k)_n.$$

Juntando todo obtuvimos

$$\mathbb{E}[M_{k+1}|M_k] = M_k$$

lo que prueba que M_k es una *martingala*. De acuerdo al *OSTh* vale lo siguiente

$$\mathbb{E}[M_{\text{mín}\{k,\tau\}}] \leq M_0$$

y tomando límite para $k \to \infty$ llegamos a

$$\mathbb{E}[M_\tau] \leq M_0,$$

es decir,

$$\mathbb{E}[(x_\tau)_n] \leq (x_0)_n \leq |x_0|. \tag{23}$$

Llegados a esta instancia vamos a volver sobre lo que hemos analizado antes respecto a la hipótesis extra que le debemos pedir a Ω, a saber, ser estríctamente convexo, y además que cada punto del borde tenga curvatura mayor que un número positivo. En este caso podemos probar los siguiente:

Afirmación: Dado $a > 0$ existe un $b > 0$ tal que si $(x_\tau)_n < b$ entonces $|x_\tau| < a$. Vamos a probar esto para el punto $0 \in \partial\Omega$. Para esto podemos suponer que existe una constante $c > 0$ (curvatura mínima) tal que

$$\Omega \subseteq \Big\{ x_n \geq c \sum_{j=1}^{n-1} x_j^2 \Big\}.$$

Entonces en este sentido el valor b lo obtendremos calculando la intesección entre las superficies

$$\sum_{j=1}^{n} x_j^2 = a^2 \qquad \text{y} \qquad x_n = c\sum_{j=1}^{n-1} x_j^2.$$

Haciendo un despeje elemental llegamos a la ecuación cuadrática

$$x_n^2 + \frac{x_n}{c} - a^2 = 0$$

que tiene una raíz positiva que llamaremos $b(a)$ cuya fórmula es

$$b(a) = \frac{-\frac{1}{c} + \sqrt{\frac{1}{c^2} + 4a^2}}{2}.$$

Analizando esta función llegamos a lo siguiente; $b(0) = 0$, $b'(0) = 0$ y $b''(0) = 2c$. Por lo tanto, si a es suficientemente chico podemos probar que existe $\alpha > 0$ tal que $b(a) \geq \alpha a^2$.

A partir de esto hemos probado la afirmación, por lo tanto

$$\{(x_\tau)_n < b\} \subseteq \{|x_\tau| < a\}.$$

Hagamos a continuación la siguiente observación:

Observación 3. Dado $\eta > 0$ y $a > 0$ si Ω cumple las hipótesis anteriores, sea $b = b(a)$ como antes. Entonces

$$\mathbb{E}[(x_\tau)_n] \geq b\mathbb{P}((x_\tau)_n \geq b) \geq \alpha a^2 \mathbb{P}(|x_\tau| \geq a).$$

Luego, si comenzamos en un punto x_τ con $|x_0| < r_0$ para un r_0 que vamos a determinar a continuación, volviendo a (4.2) obtenemos

$$\alpha a^2 \mathbb{P}(|x_\tau| \geq a) < r_0$$

Por lo tanto vamos a llegar a

$$\mathbb{P}(|x_\tau| \geq a) < \eta$$

si $r_0 < \alpha a^2 \eta$.

Esta observación la usaremos más adelante.

Si volvemos ahora a las variables aleatorias M_k definidas en (4.2) calculemos

$$\mathbb{E}[M_{k+1}^2 - M_k^2 | M_k] = \fint_{B_\varepsilon(x_k)} w_n^2 dw - (x_k)_n^2 = \fint_{B_1(0)} ((x_k + \varepsilon z)_n)^2 dz - (x_k)_n^2,$$

aquí hemos hecho el cambio de variables

$$\begin{cases} w = x_k + \varepsilon z \\ dw = \varepsilon^n dz. \end{cases}$$

Desarrollando el cuadrado del binomio vamos a obtener

$$⨍_{B_1(0)} ((x_k + \varepsilon z)_n)^2 dz - (x_k)_n^2 = (x_k)_n^2 + 2\varepsilon (x_k)_n ⨍_{B_1(0)} z_n dz + \varepsilon^2 ⨍_{B_1(0)} z_n^2 dz - (x_k)_n^2.$$

Si analizamos las integrales es fácil ver que $⨍_{B_1(0)} z_n dz = 0$ pues la función z_n es impar, y $⨍_{B_1(0)} z_n^2 dz = \kappa$ donde κ es la constante positiva que aparece en (1.1), como probaremos en el próximo capítulo. Finalmente hemos llegado a

$$\mathbb{E}[M_{k+1}^2 - M_k^2 | M_k] = \varepsilon^2 \kappa.$$

Consideremos ahora la variable aleatoria

$$\mathbb{Y}_k = -M_k^2 + \kappa \varepsilon^2 k,$$

entonces

$$\mathbb{E}[\mathbb{Y}_{k+1} - \mathbb{Y}_k | \mathbb{Y}_k] = \mathbb{E}[-M_{k+1}^2 + \kappa\varepsilon^2(k+1) + M_k^2 - \kappa\varepsilon^2 k] = 0$$

así obtenemos que la sucesión $(\mathbb{Y}_k)_{k\geq 0}$ es martingala. Si utilizamos el ***OSTh*** (y tomamos límite cuando $k \to \infty$) llegamos a

$$\mathbb{E}[-(x_\tau)_n^2 + \kappa\varepsilon^2 \tau] = -(x_0)_n^2$$

usando que la esperanza es lineal

$$\mathbb{E}[\kappa\varepsilon^2\tau] = -(x_0)_n^2 + \mathbb{E}[(x_\tau)_n^2] \leq \mathbb{E}[(x_\tau)_n^2]$$

acotemos ahora $\mathbb{E}[(x_\tau)_n^2]$ utilizando esperanza condicional

$$\mathbb{E}[(x_\tau)_n^2] = \mathbb{E}[(x_\tau)_n^2 || x_\tau| \leq a]\mathbb{P}(|x_\tau| \leq a) + \mathbb{E}[(x_\tau)_n^2 || x_\tau| > a]\mathbb{P}((|x_\tau| > a).$$

Analicemos cada termino: esta claro que $\mathbb{E}[(x_\tau)_n^2 || x_\tau| \leq a] \leq a^2$ y $\mathbb{P}(|x_\tau| \leq a) \leq 1$. Para acotar $\mathbb{E}[(x_\tau)_n^2 || x_\tau| > a]$ voy a usar el número $R = \max_{y\in\Omega} y_n$. Por último en la Observación 3 se ve que $\mathbb{P}((|x_\tau| > a) < \frac{r_0}{\alpha a^2})$. Con todo esto llegamos a

$$\mathbb{E}[\kappa\varepsilon^2\tau] \leq a^2 + (R^2+1)\frac{r_0}{\alpha a^2}. \tag{24}$$

Antes de seguir vamos a generar una relación entre a y η, a saber $a \leq \frac{\kappa\eta}{2}$.

Hagamos una nueva observación

Observación 4. Dado $\eta > 0$ y $0 < a \leq \frac{\kappa\eta}{2}$ usando (4.2) tenemos la siguiente desigualdad

$$\mathbb{P}(\tau \geq \frac{a}{\varepsilon^2})\frac{a}{\varepsilon^2} \leq \mathbb{E}[\tau] \leq \frac{a^2 + (R^2+1)\frac{r_0}{\alpha a^2}}{\kappa\varepsilon^2}$$

Entonces

$$\mathbb{P}(\tau \geq \frac{a}{\varepsilon^2}) \leq \frac{a}{\kappa} + \frac{(R^2+1)r_0}{\kappa\alpha a^3} \leq \frac{\eta}{2} + \frac{(R^2+1)r_0}{\kappa\alpha a^3} < \eta$$

esta última desigualdad será cierta si $r_0 < \dfrac{\eta\kappa\alpha a^3}{2(R^2+1)}$.

Pidiéndole a r_0 esta condición se cumple automaticamente que $r_0 < \alpha a^2\eta$ si $a < 1$ (pues $\kappa \leq 1$). Esta es la segunda desigualdad que pide el Lema 6. Lo importante en esta cuenta es que κ es un número fijo y los valores R y α dependen exclusivamente de Ω. Por lo tanto r_0 no depende $y \in \partial\Omega$, es decir el valor que obtuvimos de r_0 sirve para todo el borde $\partial\Omega$.

- **Caso General**

Vamos a suponer ahora que Ω no es necesariamente convexo. De todos modos en este caso vamos a pedirle una propiedad al borde de Ω que daremos en forma de definición

Definición 6. *Sea Ω un abierto conexo con borde suave a trozos. Decimos que Ω tiene la propiedad de circunferencia tangente exterior si existe un número $\theta > 0$ tal que para todo $y \in \partial\Omega$ hay una cirncunferencia cerrada de radio θ que solo corta a $\overline{\Omega}$ en y. Es decir, para cada $y \in \partial\Omega$, existe un $z_y \in \mathbb{R}^n \backslash \Omega$ tal que $\overline{B_\theta(z_y)} \cap \overline{\Omega} = y$.*

Veamos algunos ejemplos. En la Figura 6 tenemos cuatro conjuntos. Los primeros dos, Ω_1 y Ω_2, cumplen la propiedad de la circunferencia tangente exterior, mientras que los conjuntos Ω_3 y Ω_4 no cumplen la propiedad. Como se ve en los gráficos el conjunto puede tener puntos cúspides exteriores, pero lo que no puede suceder es que tenga puntos con cúspides interiores.

Observemos lo siguiente: Si un conjunto cumple la definición (6) para cierto $\theta > 0$, lo cumplirá para cualquier otro número menor. Esta observación la usaremos más adelante.

Supongamos entonces que tenemos un Ω que cumple la definición (6) para cierto $\theta_0 > 0$. Sea $\eta > 0$, vamos determinar un valor $0 < a < \theta_0$ que dependerá de η de modo que veremos más adelante. Vamos a construir una función $\mu(x)$ que sea positiva, radialmente creciente y armónica.

Para $n \geq 3$, dado $\theta < \theta_0$, e $y \in \Omega$ vamos a trasladar el punto z_y al 0. Haciendo esto llegamos a que $\overline{B_\theta(0)}$ corta a $\overline{\Omega}$ solo en y (en el trasladado de y en realidad, que llamaremos de igual manera). Sea el conjunto

$$\Omega_\varepsilon = \{x \in \mathbb{R}^n : d(x, \Omega) < \varepsilon\}$$

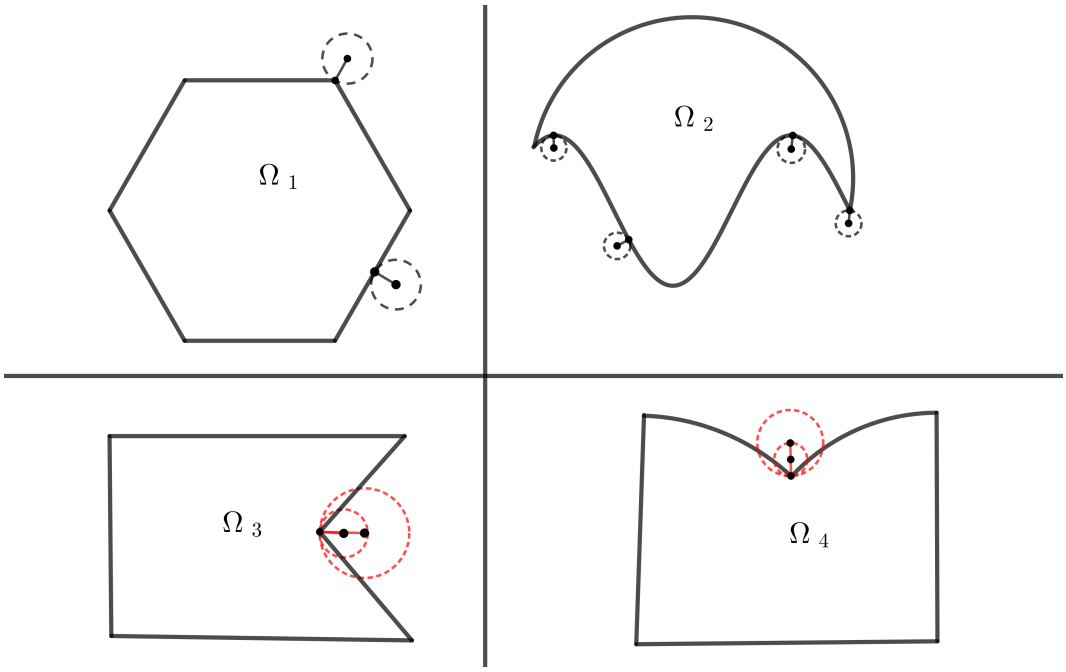

Figura 6: Ejemplos de conjuntos que cumplen y no cumplen la definición (6).

para ε suficientemente chico (menor que $\frac{\theta}{2}$ por ejemplo). Definamos ahora la función $\mu : \Omega_\varepsilon \to \mathbb{R}$ de la siguiente manera

$$\mu(x) = \frac{1}{\theta^{n-2}} - \frac{1}{|x|^{n-2}}. \tag{25}$$

Esta función verifica todo lo pedido antes, es positiva en $\overline{\Omega}\backslash\{y\}$, creciente (radialmente) y armónica en Ω. Además $\mu(y) = 0$.

Vamos a tomar entonces un primer punto $x_0 \in \Omega$ tal que $|x_0 - y| < r_0$ con r_0 que definiremos oportunamente. Sea $(x_k)_{k\geq 0}$ la sucesión de pasos jugando paseos al azar. Consideremos la sucesión de variables aleatorias

$$N_k = \mu(x_k)$$

para $k \geq 0$. Veamos que N_k es una *martingala*. En efecto

$$\mathbb{E}[N_{k+1}|N_k] = \fint_{B_\varepsilon(x_k)} \mu(y)dy = \mu(x_k) = N_k$$

aquí hemos usado que μ es armónica. Utilizando nuevamente el *OSTh* llegamos a

$$\mathbb{E}[\mu(x_\tau)] = \mu(x_0). \tag{26}$$

Acotemos este valor

$$\mu(x_0) = \frac{1}{\theta^{n-2}} - \frac{1}{|x_0|^{n-2}} = \frac{|x_0|^{n-2} - \theta^{n-2}}{\theta^{n-2}|x_0|^{n-2}} = \frac{(|x_0| - \theta)}{\theta^{n-2}|x_0|^{n-2}}\Big(\sum_{j=1}^{n-2} |x_0|^{n-2-j}\theta^{j-1}\Big). \tag{27}$$

El primer término lo acotamos así

$$(|x_0| - \theta) = (|x_0| - |y|) \leq |x_0 - y| < r_0.$$

Para el segundo término pediremos $\theta < 1$ y $|x_0|^l \leq R^{n-2}$ donde $R = \max_{x\in\Omega}\{|x|\}$ (suponemos $R > 1$). Así obtenemos

$$\sum_{j=1}^{n-2} |x_0|^{n-2-j}\theta^{j-1} \leq R^{n-2}(n-2).$$

Por último usemos que $|x_0| > \theta$. Con todo esto, si recuperamos (4.2) llegaremos a

$$\mu(x_0) \leq r_0\Big(\frac{R^{n-2}(n-2)}{\theta^{2(n-2)}}\Big).$$

Ahora bien, si llamamos

$$c(\Omega, \theta) = \frac{R^{n-2}(n-2)}{\theta^{2(n-2)}}$$

y volvemos a (4.2) llegamos a

$$\mathbb{E}[\mu(x_\tau)] < c(\Omega, \theta) r_0. \tag{28}$$

Necesitamos establecer ahora una relación entre $\mu(x_\tau)$ y $|x_\tau - y|$. Para esto vamos a definir la función $b : [\theta, +\infty) \to \mathbb{R}$

$$b(\overline{a}) = \frac{1}{\theta^{n-2}} - \frac{1}{\overline{a}^{n-2}}.$$

Observar que esta función es la versión radial de la función μ, además verifica ser positiva y creciente. Entonces tiene inversa (también creciente) que obtendremos despejando

$$\overline{a}(b) = \frac{\theta}{(1 - \theta^{n-2} b)^{\frac{1}{n-2}}}.$$

La función $\overline{a}(b)$ resulta ser mayor que θ, por lo tanto mayor que cero, creciente y con concavidad positiva ($\overline{a}'' > 0$). Por lo tanto, para $b < 1$, acotando por la recta secante llegamos a lo siguiente,

$$\overline{a}(b) \leq \theta + (\overline{a}(1) - \theta) b.$$

Llamaremos $K(\theta) = (\overline{a}(1) - \theta) > 0$. Observar que aunque aparezca $\overline{a}$ la constante K depende exclusivamente de θ. En este contexto, y utilizando esta relación que establecimos entre $\overline{a}$ y b llegamos a lo siguiente: Dado $\overline{a} > \theta$ existe un $b > 0$ tal que

$$si\ \mu(x_\tau) < b \Rightarrow |x_\tau| < \overline{a}$$

acá estamos usando fuertemente que la función $b(\overline{a})$ es creciente.

Hagamos una **Afirmación:** Para todo $a > 0$, existen $\overline{a} > \theta$ y $\varepsilon_0 > 0$ tal que si

$$|x_\tau| < \overline{a},$$

$$d(x_\tau, \Omega) < \varepsilon_0,$$

entonces se cumple que

$$|x_\tau - y| < a.$$

Vamos a demostrar esta afirmación por el absurdo: Supongamos que negamos la afirmación, entonces existe un $a_0 > 0$ tal que para todo $\overline{a} > \theta$ y para todo $\varepsilon_0 > 0$ existe x_τ con $|x_\tau| < \overline{a}$ y $d(x_\tau, \Omega) < \varepsilon_0$. pero

$$|x_\tau - y| \geq a_0.$$

En este caso podemos construir sucesiones $\overline{a}^n \to \theta$, $\varepsilon_0^n \to 0$ y x_τ^n un conjunto acotado de puntos. Este conjunto tiene una subsucesión convergente que para no cargar la notación llamaremos simplemente $x_\tau^n \to z$. Analicemos un poco que cumple z.

$$\text{como } |x_\tau^n| < \overline{a}^n \Rightarrow |z| \leq \theta,$$

$$\text{como } |x_\tau^n - y| > a_0 \Rightarrow |z - y| \geq a_0,$$

y finalmente

$$\text{como } d(x_\tau^n, \Omega) < \varepsilon_0^n \Rightarrow d(z, \Omega) = 0 \Rightarrow z \in \overline{\Omega}.$$

Esto implica que $|z| = \theta$ y $z \in \overline{\Omega}$. El único punto que cumple esto es y, pero $z \neq y$ pues

$$|z - y| \geq a_0 > 0.$$

Esto produce un absurdo, lo que concluye la demostración.

Juntando todo llegamos a este resultado: Dado $a > 0$ existen $\overline{a} > \theta$,$b > 0$ y $\varepsilon_0 > 0$ tal que

$$si\ \mu(x_\tau) < b \Rightarrow |x_\tau - y| < a\ ,\ d(x_\tau, \Omega) < \varepsilon_0.$$

Vamos a pedir la condición

$$0 < b < a$$

que usaremos más adelante. Por lo tanto tenemos

$$\mathbb{P}(\mu(x_\tau) \geq b) \geq \mathbb{P}(|x_\tau - y| \geq a)$$

si recuperamos (4.2) llegamos a

$$c(\Omega, \theta) r_0 > \mathbb{E}[\mu(x_\tau)] \geq \mathbb{P}(\mu(x_\tau) \geq b) b \geq \mathbb{P}(|x_\tau - y| \geq a) b \tag{29}$$

y si usamos que $\overline{a} - \theta \leq K(\theta) b$ llegamos a

$$c(\Omega, \theta) r_0 > \mathbb{P}(|x_\tau - y| \geq a) \frac{\overline{a} - \theta}{K(\theta)}.$$

Luego

$$\mathbb{P}(|x_\tau - y| \geq a) < \frac{c(\Omega, \theta) r_0 K(\theta)}{\overline{a} - \theta} < \eta$$

lo cual es cierto si

$$r_0 < \frac{\eta(\overline{a} - \theta)}{c(\Omega, \theta) K(\theta)}.$$

Esta es una de las desigualdades que queríamos probar.

Vamos a calcular ahora

$$\mathbb{E}[N_{k+1}^2 - N_k^2 | N_k] = \fint_{B_\varepsilon(x_k)} (\mu^2(w) - \mu^2(x_k)) dw. \tag{30}$$

Llamemos $\varphi = \mu^2$, si hacemos la expansión de Taylor hasta orden dos obtenemos

$$\varphi(w) = \varphi(x_k) + \langle \nabla\varphi(x_k), (w - x_k)\rangle + \frac{1}{2}\langle D^2\varphi(x_k)(w - x_k), (w - x_k)\rangle + O(|w - x_k|^3).$$

Luego llegaremos a

$$\begin{aligned}
&\fint_{B_\varepsilon(x_k)} (\varphi(w) - \varphi(x_k))dw \\
&\quad = \fint_{B_\varepsilon(x_k)} \langle \nabla\varphi(x_k), (w - x_k)\rangle dw \\
&\qquad + \frac{1}{2}\fint_{B_\varepsilon(x_k)} \langle D^2\varphi(x_k)(w - x_k), (w - x_k)\rangle dw \\
&\qquad + \fint_{B_\varepsilon(x_k)} O(|w - x_k|^3)dw.
\end{aligned}$$

Analicemos estas integrales

$$\fint_{B_\varepsilon(x_k)} \langle \nabla\varphi(x_k), (w - x_k)\rangle dw = 0.$$

pues la función que integramos es impar en la bola centrada en x_k. Por otro lado si analizamos el integrando $\langle D^2\varphi(x_k)(w - x_k), (w - x_k)\rangle$ sucede que todos los términos son impares respecto a la bola centrada en x_k salvo los que son de la forma $\partial^2_{x_j x_j}\varphi(x_k)(w_j - (x_k)_j)^2$. Con esto llegamos a

$$\fint_{B_\varepsilon(x_k)} \langle D^2\varphi(x_k)(w - x_k), (w - x_k)\rangle dw = \fint_{B_\varepsilon(x_k)} \sum_{j=1}^{n} \partial^2_{x_j x_j}\varphi(x_k)(w_j - (x_k)_j)^2 dw$$

si aplicamos una vez más el cambio de variables

$$\begin{cases} w = x_k + \varepsilon z \\ dw = \varepsilon^n dz \end{cases}$$

obtendremos

$$\sum_{j=1}^{n} \partial^2_{x_j x_j}\varphi(x_k)\varepsilon^2 \fint_{B_1(0)} z_j^2 dz = \kappa\varepsilon^2 \sum_{j=1}^{n} \partial^2_{x_j x_j}\varphi(x_k)$$

aquí utilizamos nuevamente el número κ que aparece en la ecuación (1.1). Vamos a calcular ahora las derivadas segundas de φ. Recordemos que $\varphi = \mu^2$, entonces

$$\partial_{x_j}\varphi(w) = 2\mu(w)\partial_{x_j}\mu(w)$$

si volvemos a derivar obtenemos

$$\partial^2_{x_jx_j}\varphi(w) = 2(\partial_{x_j}\mu(w))^2 + 2\mu(w)\partial^2_{x_jx_j}\mu(w)$$

entonces

$$\sum_{j=1}^{n}\partial^2_{x_jx_j}\varphi(x_k) = 2\sum_{j=1}^{n}(\partial_{x_j}\mu(w))^2 + 2\mu(x_k)\sum_{j=1}^{n}\partial^2_{x_jx_j}\mu(x_k)$$

la segunda suma es cero pues μ es armónica en Ω. Con esto llagamos a

$$\sum_{j=1}^{n}\partial^2_{x_jx_j}\varphi(x_k) = 2\sum_{j=1}^{n}(\partial_{x_j}\mu(w))^2$$

recordando la definición de μ (4.2) llegamos a

$$(\partial_{x_j}\mu(x_k))^2 = \frac{(n-2)^2(x_k)_j^2}{|x_k|^{2n}}$$

entonces

$$\sum_{j=1}^{n}\partial^2_{x_jx_j}\varphi(x_k) = \frac{2(n-2)^2}{|x_k|^{2(n-2)}}.$$

Juntando todo hemos llegado a

$$\begin{aligned}
&⨍_{B_\varepsilon(x_k)}(\varphi(w)-\varphi(x_k))dw \\
&\quad= \frac{1}{2}\kappa\varepsilon^2\frac{2(n-2)^2}{|x_k|^{2(n-2)}} + O(|w-x_k|^3) \\
&\quad\geq \varepsilon^2\frac{\kappa(n-2)^2}{R^{2(n-2)}} - \gamma\varepsilon^3 \\
&\quad\geq \varepsilon^2\frac{\kappa(n-2)^2}{2R^{2(n-2)}},
\end{aligned}$$

si ε es suficientemente pequeño. Aquí hemos usado nuevamente el número $R = \max_{x\in\Omega}\{|x|\}$. Llamemos

$$\sigma(\Omega) = \frac{\kappa(n-2)^2}{2R^{2(n-2)}}.$$

Si volvemos a (4.2) llegaremos a

$$\mathbb{E}[N^2_{k+1} - N^2_k|N_k] \geq \sigma(\Omega)\varepsilon^2.$$

Consideremos ahora la sucesión de variables aleatorias $(\mathbb{W}_k)_{k\geq 0}$ definida de la siguiente manera

$$\mathbb{W}_k = -N_k^2 + \sigma(\Omega)k\varepsilon^2.$$

Entonces sucede que

$$\mathbb{E}[\mathbb{W}_{k+1} - \mathbb{W}_k|\mathbb{W}_k] = \mathbb{E}[-(N_{k+1}^2 - N_k^2) + \sigma\varepsilon^2|N_k] \leq 0$$

lo que prueba que $\mathbb{W}_k$ es una *supermartingala*. Utilizamos una vez más el *OSTh* y llegamos a

$$\mathbb{E}[-\mu^2(x_\tau) + \sigma\tau\varepsilon^2] \leq -\mu^2(x_0).$$

Si usamos la linealidad de la esperanza obtenemos

$$\mathbb{E}[\sigma\tau\varepsilon^2] \leq -\mu^2(x_0) + \mathbb{E}[\mu^2(x_\tau)] \leq \mathbb{E}[\mu^2(x_\tau)]. \tag{31}$$

Nuestro objetivo ahora es acotar el valor $\mathbb{E}[\mu^2(x_\tau)]$.

$$\mathbb{E}[\mu^2(x_\tau)] = \mathbb{E}[\mu^2(x_\tau)|\mu(x_\tau) < b]\mathbb{P}(\mu(x_\tau) < b) + \mathbb{E}[\mu^2(x_\tau)|\mu(x_\tau) \geq b]\mathbb{P}(\mu(x_\tau) \geq b).$$

Acotemos cada término: $\mathbb{E}[\mu^2(x_\tau)|\mu(x_\tau) < b] \leq b^2$ y $\mathbb{P}(\mu(x_\tau) < b) \leq 1$, con esto hemos acotado el primer sumando. Si llamamos $M(\varepsilon_0) = \max_{x\in\Omega_{\varepsilon_0}} |\mu(x)|$ podemos acotar $\mathbb{E}[\mu^2(x_\tau)|\mu(x_\tau) \geq b] \leq M(\varepsilon_0)^2$. Finalmente usamos (4.2) para llegar a

$$\mathbb{P}(\mu(x_\tau) \geq b) \leq \frac{c(\Omega,\theta)r_0}{b}.$$

Así se obtiene

$$\mathbb{E}[\mu^2(x_\tau)] \leq b^2 + M(\varepsilon_0)^2\frac{c(\Omega,\theta)r_0}{b}.$$

Ahora bien, usando que $0 < b < a$, tenemos

$$\mathbb{E}[\mu^2(x_\tau)] \leq a^2 + M(\varepsilon_0)^2\frac{c(\Omega,\theta)r_0}{b}. \tag{32}$$

Por otro lado

$$\sigma\mathbb{E}[\tau\varepsilon^2] \geq \mathbb{P}(\tau\varepsilon^2 \geq a)a\sigma.$$

Juntando (4.2) y (4.2) llegamos a

$$a\sigma\mathbb{P}(\tau \geq \frac{a}{\varepsilon^2}) \leq a^2 + M(\varepsilon_0)^2\frac{c(\Omega,\theta)r_0}{b}$$

y entonces

$$\mathbb{P}(\tau \geq \frac{a}{\varepsilon^2}) \leq \frac{a}{\sigma} + M(\varepsilon_0)^2\frac{c(\Omega,\theta)r_0}{b\sigma a}.$$

Si pedimos la condición

$$\frac{a}{\sigma} < \frac{\eta}{2}$$

llegaremos a

$$\mathbb{P}(\tau \geq \frac{a}{\varepsilon^2}) \leq \frac{\eta}{2} + M(\varepsilon_0)^2 \frac{c(\Omega,\theta) r_0}{ba\sigma} < \eta$$

lo cual será cierto si

$$r_0 < \frac{b\eta a\sigma}{2M(\varepsilon_0)c(\Omega,\theta)}.$$

Así logramos la segunda desigualdad del lema, por lo tanto hemos finalizado la demostración. □

Con este lema vamos a probar la siguiente proposición donde vamos a obtener la 2da hipótesis del Lema 3 pero comenzando el juego cerca del borde. Vamos a hacer las cuentas para las dos funciones u^ε y v^ε. Estas estimaciones serán similares para ambas funciones u^ε y v^ε, así que sólo incluiremos la demostración para u^ε.

Proposición 6. *Dado $\eta > 0$ y $a > 0$ existen $\varepsilon_0 > 0$ y $r_0 > 0$ tal que dado $y \in \partial\Omega$, si $x_0 \in \Omega$ con $|x_0 - y| < r_0$ entonces*

$$|u^\varepsilon(x_0) - u^\varepsilon(y)| < C(a,\eta)$$

y

$$|v^\varepsilon(x_0) - v^\varepsilon(y)| < C(a,\eta)$$

donde vale que $C(a,\eta) \to 0$ cuando $a \to 0$ y $\eta \to 0$.

Demostración. Antes de comenzar la demostración hagamos una primera aclaración; $u^\varepsilon(y) = \overline{f}(y)$ pues $y \in \partial\Omega$. Sea $\eta > 0$ tomamos a, r_0 y ε_0 como en el Lema 4. Sea además S_I^* la estrategia que propone este lema. Antes de comenzar a acotar definamos el siguiente evento para simplificar un poco la notación. Sea el conjunto

$$A = \Big\{ no\ se\ cambia\ de\ tablero\ en\ \lceil \frac{a}{\varepsilon^2} \rceil\ jugadas\ y\ \tau < \lceil \frac{a}{\varepsilon^2} \rceil \Big\}.$$

Vamos a separar la cuenta de dos casos:

1er caso: Vamos a probar primero que

$$u^\varepsilon(x_0) - \overline{f}(y) \geq -\mathscr{A}(a,\eta)$$

con $\mathscr{A}(a,\eta) \searrow 0$ si $a \to 0$ y $\eta \to 0$.

Comencemos entonces a acotar:

$$u^{\varepsilon}(x_0) \geq \inf_{S_{II}} \mathbb{E}^{x_0}_{S_I^*,S_{II}}[pago\ final\ saliendo\ en\ x_\tau]$$

Analicemos

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}^{x_0}_{S_I^*,S_{II}}[pago\ final\ saliendo\ en\ x_\tau] \\
&\quad = \mathbb{E}^{x_0}_{S_I^*,S_{II}}[pago\ final\ saliendo\ en\ x_\tau|A]\mathbb{P}(A) \\
&\qquad\quad + \mathbb{E}^{x_0}_{S_I^*,S_{II}}[pago\ final\ saliendo\ en\ x_\tau|A^c]\mathbb{P}(A^c) \\
&\quad \geq \mathbb{E}^{x_0}_{S_I^*,S_{II}}[\overline{f}(x_\tau)|A]\mathbb{P}(A) - \max\{|\overline{f}|,|\overline{g}|\}\mathbb{P}(A^c).
\end{aligned}$$

Aquí usamos que bajo la condición A el pago final es $\overline{f}(x_\tau)$ y que cualquier esperanza es mayor que el valor $-\max\{|\overline{f}|,|\overline{g}|\}$.

Acotemos ahora $\mathbb{P}(A)$ y $\mathbb{P}(A^c)$. Para eso observemos que

$$A^c = \Big\{el\ juego\ cambia\ de\ tablero\ antes\ de\ \lceil\frac{a}{\varepsilon^2}\rceil\Big\} \cup \Big\{\tau \geq \frac{a}{\varepsilon^2}\Big\}.$$

Entonces sucede que $\mathbb{P}(A^c) \leq \mathbb{P}(cambia\ de\ tablero\ antes\ de\lceil\frac{a}{\varepsilon^2}\rceil) + \mathbb{P}(\tau \geq \lceil\frac{a}{\varepsilon^2}\rceil)$. Calculemos cada probabilidad.

$$\mathbb{P}\Big(cambia\ de\ tablero\ antes\ de\lceil\frac{a}{\varepsilon^2}\rceil\Big) = 1 - \mathbb{P}\Big(no\ cambia\ de\ tablero\ en\ \lceil\frac{a}{\varepsilon^2}\rceil\Big) = 1 - (1-\varepsilon^2)^{\frac{a}{\varepsilon^2}}.$$

Hagamos la siguiente observación

Observación 5. Como $(1-\varepsilon^2)^{\frac{a}{\varepsilon^2}}$ es creciente entonces vale que

$$(1-\varepsilon^2)^{\frac{a}{\varepsilon^2}} \geq (1-\varepsilon_0^2)^{\frac{a}{\varepsilon_0^2}}$$

si $\varepsilon < \varepsilon_0$. Entonces

$$1-(1-\varepsilon^2)^{\frac{a}{\varepsilon^2}} \leq 1-(1-\varepsilon_0^2)^{\frac{a}{\varepsilon_0^2}}.$$

Como se tiene que

$$\lim_{\varepsilon\to 0}(1-\varepsilon^2)^{\frac{a}{\varepsilon^2}} = e^{-a}$$

entonces sucede que para ε_0 suficientemente chico

$$(1-\varepsilon_0^2)^{\frac{a}{\varepsilon_0^2}} \geq e^{-a} - \eta.$$

Luego

$$1-(1-\varepsilon^2)^{\frac{a}{\varepsilon^2}} \leq 1-(e^{-a}-\eta) = (1-e^{-a}) + \eta.$$

Si retomamos la cuenta anterior usando la observación llegamos a

$$\mathbb{P}\Big(cambiar\ de\ tablero\ antes\ de\ \lceil\frac{a}{\varepsilon^2}\rceil\ jugadas\Big) = 1-(1-\varepsilon^2)^{\frac{a}{\varepsilon^2}} \leq (1-e^{-a})+\eta. \tag{33}$$

Por otro lado para acotar la otra probabilidad observemos que

$$\{\tau \geq \frac{a}{\varepsilon^2}\} \subseteq \{\tau \geq \frac{a}{\varepsilon_0^2}\}$$

si $\varepsilon < \varepsilon_0$. Entonces

$$\mathbb{P}(\tau \geq \frac{a}{\varepsilon^2}) \leq \mathbb{P}(\tau \geq \frac{a}{\varepsilon_0^2}).$$

Nuevamente usando el lema (4) obtenemos

$$\mathbb{P}(\tau \geq \frac{a}{\varepsilon^2}) \leq \mathbb{P}(\tau \geq \frac{a}{\varepsilon_0^2}) \leq \eta. \tag{34}$$

Así, juntando (4.2) y (4.2) llegamos a

$$\mathbb{P}(A^c) \leq (1-e^{-a})+\eta+\eta = (1-e^{-a})+2\eta.$$

De donde se deduce inmediatamente que

$$\mathbb{P}(A) = 1-\mathbb{P}(A^c) \geq 1-[(1-e^{-a})+2\eta].$$

Retomemos la cuenta

$$\mathbb{E}^{x_0}_{S_I^*,S_{II}}[pago\ final\ saliendo\ en\ x_\tau] \geq \mathbb{E}^{x_0}_{S_I^*,S_{II}}[\overline{f}(x_\tau)|A]\mathbb{P}(A) - \text{máx}\{|\overline{f}|,|\overline{g}|\}\mathbb{P}(A^c)$$

usando las acotaciones de $\mathbb{P}(A)$ y $\mathbb{P}(A^c)$ obtenemos

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}^{x_0}_{S_I^*,S_{II}}[pago\ final\ saliendo\ en\ x_\tau]\\ &\quad\geq \mathbb{E}^{x_0}_{S_I^*,S_{II}}[\overline{f}(x_\tau)|A](1-[(1-e^{-a})+2\eta]) - \text{máx}\{|\overline{f}|,|\overline{g}|\}[(1-e^{-a})+2\eta].\end{aligned} \tag{35}$$

Analicemos ahora la esperanza $\mathbb{E}^{x_0}_{S_I^*,S_{II}}[\overline{f}(x_\tau)|A]$. Nuevamente vamos a separar en dos eventos. Sean los eventos:

$$A_1 = A \cap \{|x_\tau - y| < a\}$$

y

$$A_2 = A \cap \{|x_\tau - y| \geq a\}.$$

Es evidente que $A = A_1 \cup A_2$ y esta unión es disjunta.

Entonces

$$\mathbb{E}^{x_0}_{S_I^*,S_{II}}[\overline{f}(x_\tau)|A] = \mathbb{E}^{x_0}_{S_I^*,S_{II}}[\overline{f}(x_\tau)|A_1]\mathbb{P}(A_1) + \mathbb{E}^{x_0}_{S_I^*,S_{II}}[\overline{f}(x_\tau)|A_2]\mathbb{P}(A_2). \tag{36}$$

Nuevamente vamos a acotar convenientemente cada probabilidad. Tenemos

$$\mathbb{P}(A_2) \leq \mathbb{P}(|x_\tau - y| \geq a) \leq \eta. \tag{37}$$

Para acotar la otra probabilidad observemos lo siguiente:

$$A_1^c = A^c \cup \{|x_\tau - y| \geq a\}.$$

Entonces

$$\mathbb{P}(A_1) = 1 - \mathbb{P}(A_1^c) \geq 1 - [\mathbb{P}(A^c) + \mathbb{P}(|x_\tau - y| \geq a)].$$

Usando las acotaciones ya conocidas de cada probabilidad llegamos a

$$\mathbb{P}(A_1) \geq 1 - [(1 - e^{-a}) + 2\eta + \eta] = 1 - [(1 - e^{-a}) + 3\eta]. \tag{38}$$

Si retomamos la cuenta (4.2) y usamos las acotaciones (4.2) y (4.2) llegamos a

$$\mathbb{E}^{x_0}_{S_I^*,S_{II}}[\overline{f}(x_\tau)|A] \geq \mathbb{E}^{x_0}_{S_I^*,S_{II}}[\overline{f}(x_\tau)|A_1](1 - [(1 - e^{-a}) + 3\eta]) - \text{máx}\{|\overline{f}|\}\eta. \tag{39}$$

Hagamos una observación,

Observación 6. Recordemos que $\overline{f}$ es una función Lipschitz, entonces, estando bajo la condición A_1.

$$|\overline{f}(x_\tau) - \overline{f}(y)| < L_{\overline{f}}|x_\tau - y| < L_{\overline{f}}a.$$

Luego

$$\overline{f}(x_\tau) \geq \overline{f}(y) - L|x_\tau - y| \geq \overline{f}(y) - La.$$

Si usamos esta observación en (4.2) llegamos a

$$\mathbb{E}^{x_0}_{S_I^*,S_{II}}[\overline{f}(x_\tau)|A] \geq \mathbb{E}^{x_0}_{S_I^*,S_{II}}[(\overline{f}(y) - La)|A_1](1 - [(1 - e^{-a}) + 3\eta]) - \text{máx}\{|\overline{f}|\}\eta.$$

Como $(\overline{f}(y) - La)$ no depende de las estrategias S_1^* y S_{II} llegamos a

$$\mathbb{E}^{x_0}_{S_I^*,S_{II}}[\overline{f}(x_\tau)|A] \geq (\overline{f}(y) - La)(1 - [(1 - e^{-a}) + 3\eta]) - \text{máx}\{|\overline{f}|\}\eta.$$

Si volvemos a (4.2) vamos a obtener lo siguiente

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}^{x_0}_{S_I^*,S_{II}}[pago\ final\ saliendo\ en\ x_\tau] \\
&\quad \geq \{(\overline{f}(y) - La)(1 - [(1 - e^{-a}) + 3\eta]) - \text{máx}\{|\overline{f}|\}\eta\}(1 - [(1 - e^{-a}) + 2\eta]) \\
&\qquad - \text{máx}\{|\overline{f}|, |\overline{g}|\}[(1 - e^{-a}) + 2\eta].
\end{aligned}$$

Observar que cuando $\eta \to 0$ y $a \to 0$ toda la expresión de la derecha tiende a $\overline{f}(y)$ por abajo. Entonces podemos llegar a lo siguiente

$$\mathbb{E}^{x_0}_{S_I^*, S_{II}}[pago\ final\ saliendo\ en\ x_\tau] \geq \overline{f}(y) - \mathscr{A}(a, \eta)$$

con $\mathscr{A}(a, \eta) \geq 0$. Tomando infimo sobre todas las estrategias S_{II} llegamos a

$$u^\varepsilon(x_0) \geq \overline{f}(y) - \mathscr{A}(a, \eta)$$

con $\mathscr{A}(a, \eta) \to 0$ cuando $\eta \to 0$ y $a \to 0$ que es lo que queríamos probar.

2do caso: Ahora queremos probar que

$$u^\varepsilon(x_0) - \overline{f}(y) \leq \mathscr{B}(a, \eta)$$

con $\mathscr{B}(a, \eta) \searrow 0$ cuando $\eta \to 0$ y $a \to 0$.

Vamos a utilizar en este caso la estrategia S_{II}^* que nos propone el lema (4) para comenzar la acotación:

$$u^\varepsilon(x_0) \leq \sup_{S_{II}} \mathbb{E}^{x_0}_{S_I, S_{II}^*}[pago\ final\ saliendo\ en\ x_\tau]$$

Otra vez vamos a utilizar el conjunto A definido al comienzo de la demostración. Tenemos

$$\mathbb{E}^{x_0}_{S_I, S_{II}^*}[p\ f\ s\ en\ x_\tau] = \mathbb{E}^{x_0}_{S_I, S_{II}^*}[p\ f\ s\ en\ x_\tau | A]\mathbb{P}(A) + \mathbb{E}^{x_0}_{S_I, S_{II}^*}[p\ f\ s\ en\ x_\tau | A^c]\mathbb{P}(A^c).$$

En este caso las acotaciones van a ser un poco más sencillas.

Recordemos que $\mathbb{P}(A^c) \leq (1 - e^{-a}) + 2\eta$. La $\mathbb{P}(A)$ la vamos a acotar simplemente por 1. Si además acotamos la esperanza bajo la condición A^c por $\max\{|\overline{f}|, |\overline{g}|\}$ obtenemos

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}^{x_0}_{S_I, S_{II}^*}[pago\ final\ saliendo\ en\ x_\tau] \\ &\quad \leq \mathbb{E}^{x_0}_{S_I, S_{II}^*}[pago\ final\ saliendo\ en\ x_\tau | A] + \max\{|\overline{f}|, |\overline{g}|\}[(1 - e^{-a}) + 2\eta]. \end{aligned} \tag{40}$$

Trabajemos ahora con

$$\mathbb{E}^{x_0}_{S_I, S_{II}^*}[pago\ final\ saliendo\ en\ x_\tau | A] = \mathbb{E}^{x_0}_{S_I, S_{II}^*}[\overline{f}(x_\tau) | A].$$

Nuevamente vamos a usar los conjuntos A_1 y A_2 definidos anteriormente. Entonces

$$\mathbb{E}^{x_0}_{S_I, S_{II}^*}[\overline{f}(x_\tau) | A] = \mathbb{E}^{x_0}_{S_I, S_{II}^*}[\overline{f}(x_\tau) | A_1]\mathbb{P}(A_1) + \mathbb{E}^{x_0}_{S_I, S_{II}^*}[\overline{f}(x_\tau) | A_2]\mathbb{P}(A_2).$$

Nuevamente si acotamos $\mathbb{P}(A_1)$ por 1, recordamos que $\mathbb{P}(A_2) \leq c\eta$ y acotando toda esperando con salida en el tablero 1 por $\max\{|\overline{f}|\}$ vamos a obtener

$$\mathbb{E}^{x_0}_{S_I,S^*_{II}}[\overline{f}(x_\tau)|A] \leq \mathbb{E}^{x_0}_{S_I,S^*_{II}}[\overline{f}(x_\tau)|A_1] + \max\{|\overline{f}|\}\eta.$$

Trabajemos ahora con $\mathbb{E}^{x_0}_{S_I,S^*_{II}}[\overline{f}(x_\tau)|A_1]$. Si estamos en el conjunto A_1 podemos usar la Observación 6. Entonces obtenemos

$$\overline{f}(x_\tau) \leq \overline{f}(y) + La.$$

Luego

$$\mathbb{E}^{x_0}_{S_I,S^*_{II}}[\overline{f}(x_\tau)|A] \leq \mathbb{E}^{x_0}_{S_I,S^*_{II}}[\overline{f}(y) + La|A_1] + \max\{|\overline{f}|\}\eta.$$

Como $(\overline{f}(y) + La)$ no dependen de las estrategias S_I y S^*_{II} llegamos a

$$\mathbb{E}^{x_0}_{S_I,S^{**}_{II}}[\overline{f}(x_\tau)|A] \leq (\overline{f}(y) + La) + \max\{|\overline{f}|\}\eta.$$

Si retomamos la cuenta (4.2) obtenemos

$$\mathbb{E}^{x_0}_{S_I,S^*_{II}}[pago\ final\ saliendo\ en\ x_\tau] \leq \overline{f}(y) + La + \max\{|\overline{f}|\}\eta + \max\{|\overline{f}|,|\overline{g}|\}[(1-e^{-a}) + 2\eta].$$

Nuevamente podemos escribir lo anterior de la siguiente manera

$$\mathbb{E}^{x_0}_{S_I,S^*_{II}}[p\ f\ s\ en\ x_\tau] \leq \overline{f}(y) + \mathscr{B}(a,\eta)$$

con $\mathscr{B}(a,\eta) \geq 0$. Tomando supremo sobre las estrategias S_I obtenemos

$$u^\varepsilon(x_0) \leq \overline{f}(y) + \mathscr{B}(a,\eta)$$

con $\mathscr{B}(a,\eta) \to 0$ si $\eta \to 0$ y $a \to 0$. Con esto hemos probado el segundo caso.

Para finalizar la demostración vamos a tomar

$$C(a,\eta) = \max\{\mathscr{A}(a,\eta), \mathscr{B}(a,\eta)\}.$$

Llegamos a

$$|u^\varepsilon(x_0) - \overline{f}(y)| < C(a,\eta).$$

Con $C(a,\eta) \to 0$ si $\eta \to 0$ y $a \to 0$. Esto concluye la demostración. □

Observemos que la Proposición 6 nos da la validez de la segunda hipótesis del Lema (3) cuando uno de los puntos está fuera de Ω y el otro se encuentra cerca de este.

Ya estamos en condiciones de probar la segunda hipótesis del Lema (3) en general. Pero antes vamos a dar una notación cómoda respecto a las estrategias. Dada una partida (no concluída) para dos estrategias fijas S_I^0 y S_{II}^0

$$\{(x_0, j_0), (x_1, j_1), ...(x_k, j_k), ...\}$$

recordemos que las estrategias solo se utilizaran cuando estemos en el primer tablero (y no saltamos), es decir, si $j_k = 1$ y $j_{k+1} = 1$ entonces

$$S_I^0((x_0, j_0), ..., (x_k, 1)) = (x_{k+1}^I, 1) \ \ , \ \ S_{II}^0((x_0, j_0), ..., (x_k, 1)) = (x_{k+1}^{II}, 1)$$

donde $x_{k+1}^I \in B_\varepsilon(x_k)$ y $x_{k+1}^{II} \in B_\varepsilon(x_k)$ dentro del tablero 1 son las elecciones de los jugadores I y II respectivamente según las estrategias dadas.

La idea es ahora definir, para un punto inicial distinto, una nueva partida que "persigue" a los puntos de una partida dada. Demos una definición de esto

Definición 7. *Dada una partida (parcial o total) para estrategias fijas S_I^0 y S_{II}^0*

$$P = \{(x_0, j_0), (x_1, j_1), ...(x_k, j_k)...\}$$

y dado un $y_0 \in \Omega$ en el mismo tablero que x_0, decimos que la partida para estrategias $\overline{S}_I^0$ y $\overline{S}_{II}^0$

$$\overline{P} = \{(y_0, l_0), (y_1, l_1), ...(y_k, l_k)...\}$$

es semejante a P si vale lo siguiente

$$j_k = l_k \ \ para\ todo\ k \geq 0$$

$$y_{k+1} - y_k = x_{k+1} - x_k \ \ para\ todo\ k \geq 0.$$

Observar que los puntos x_k e y_k están siempre en el mismo tablero. Además, dado un punto x_k en algún tablero, entonces el punto y_k en el mismo tablero cumple $y_k - x_k = y_0 - x_0$ un vector constante independiente de k. Por otro lado, si en la partida P se produce un "salto" de tablero en el paso k, la partida $\overline{P}$ tendrá el mismo "salto" an el mismo paso k.

Las estrategias $\overline{S}_I^0$ y $\overline{S}_{II}^0$ dependen de S_I^0 y S_{II}^0 y funcionan de la siguiente manera: Si en la partida P el punto elegido por el jugador I es

$$x_{k+1} = S_I^0((x_0, j_0), ..., (x_k, 1)),$$

entonces en la partida $\overline{P}$ el punto eligido por el jugador I es

$$\overline{S}_I^0((y_0, l_0), ..., (y_k, 1)) = y_{k+1} = y_k + x_{k+1} - x_k.$$

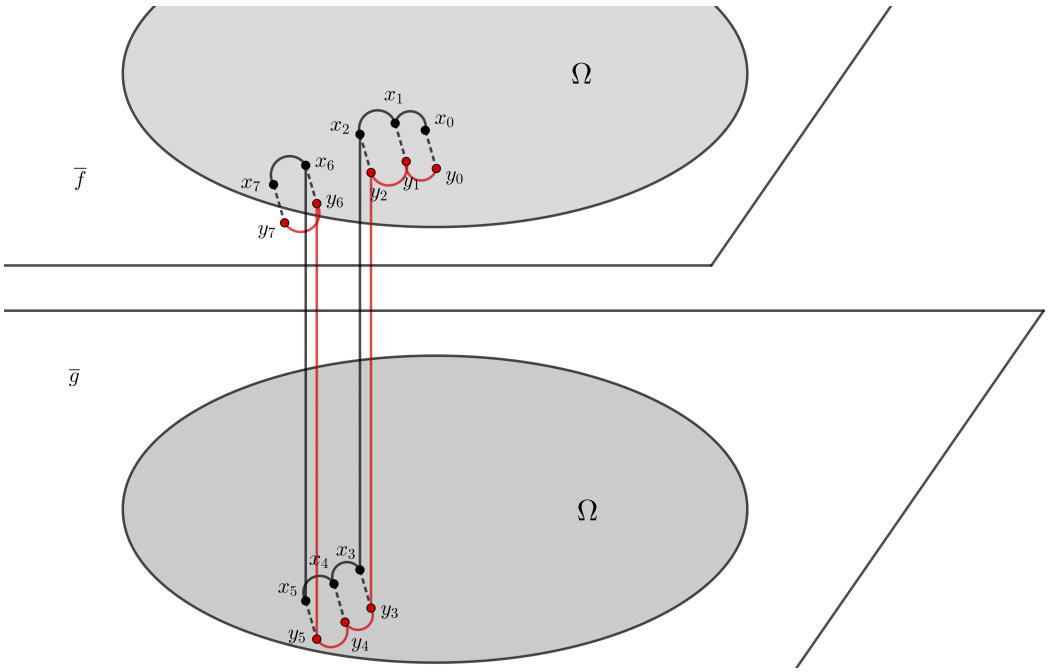

Figura 7: Dos partidas *semejantes* juegan hasta que una termina.

Analogamente el jugador II elige su estrategia $\overline{S}^0_{II}$ asociada con S^0_{II}. Este procedimiento lo repetiremos cada vez que se utilicen las estrategias.

Hagamos una observación importante: Dos partidas semejantes tienen la misma probabilidad de que se jueguen. Esto se deduce de el hecho que si estamos en el tablero 1, cada jugador va a tener la misma probabilidad de elegir el proximo paso ($\frac{1}{2}$) estando parados en x_k o en y_k. Y si estamos en el tablero dos la probabilidad de elegir un punto x_{k+1} en la bola $B_\varepsilon(x_k)$ de manera uniforme es la misma que elegir el punto $y_{k+1} = y_k + x_{k+1} - x_k$ en la bola $B_\varepsilon(y_k)$. Por último la probabilidad de "saltar" de un tablero a otro es la misma en cada punto (ε^2).

Consideremos ahora dos partidas *semejantes* que jugaremos hasta que alguna de las dos termine, es decir, hasta que en alguna de las dos partidas se elija un punto fuera de Ω (en cualquiera de los dos tableros). En la figura (7) se ve un ejemplo de esto.

Dado $\eta > 0$ sean a, $\varepsilon_0 > 0$ y $r_0 > 0$ como en los resultados anteriores donde controlamos que sucede cuando empezamos cerca del borde y sean dos puntos x_0 e y_0 en un mismo tablero tales que $|x_0 - y_0| < r_0$. Comenzamos a jugar con dos partidas semejantes P y $\overline{P}$ que comienzan en x_0 e y_0 respectivamente, hasta que en una de las dos partidas se obtiene un punto fuera de Ω. Supongamos

que esto sucede en la partida $\overline{P}$. Es decir

$$P = \{x_0, x_1, ...x_\tau\}$$

$$\overline{P} = \{y_0, y_1, ..., y_\tau\}$$

donde los puntos $x_k \in \Omega$ para todo $0 \leq k \leq \tau$, $y_k \in \Omega$ para todo $0 \leq k \leq \tau - 1$, pero $y_\tau \notin \Omega$. A partir de aquí seguiremos jugando la partida P a partir de x_τ hasta salir de Ω. Es decir las partidas quedarán de la siguiente manera

$$P = \{x_0, x_1, ...x_\tau, x_{\tau+1}, ..., x_{\overline{\tau}}\}$$

$$\overline{P} = \{y_0, y_1, ..., y_\tau\}$$

donde $x_{\overline{\tau}} \notin \Omega$ es el primer punto donde se abandona Ω. Observar que en el paso τ tenemos que $x_\tau \in \Omega$, $y_\tau \notin \Omega$ y $|x_\tau - y_\tau| < r_0$. Entonces por uno de los dos lemas anteriores tenemos lo siguiente

$$\mathbb{P}(\overline{\tau} \geq \frac{a}{\varepsilon^2} + \tau) < \eta,$$

$$\mathbb{P}(|x_{\overline{\tau}} - y_\tau| \geq a) < \eta.$$

Consideremos el siguiente conjunto de eventos

$$\overline{A} = \Big\{ no\ cambia\ de\ tablero\ y\ termina,\ entre\ la\ jugada\ \tau + 1\ y\ \tau + \frac{a}{\varepsilon^2} \Big\}.$$

Queremos obtener una desigualdad entre ciertas esperanzas. Comencemos la cuenta

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}^{x_0}_{S^0_I, S^0_{II}}[pago\ final\ en\ x_{\overline{\tau}}] \\
&= \mathbb{E}^{x_0}_{S^0_I, S^0_{II}}[pago\ final\ en\ x_{\overline{\tau}} | \overline{A}]\mathbb{P}(\overline{A}) + \mathbb{E}^{x_0}_{S^0_I, S^0_{II}}[pago\ final\ en\ x_{\overline{\tau}} | \overline{A}^c]\mathbb{P}(\overline{A}^c).
\end{aligned}$$

Repitiendo la cuenta que hicimos anteriormente tenemos las siguientes acotaciones

$$\mathbb{P}(\overline{A}) \leq 1\ ,\ \mathbb{E}^{x_0}_{S^0_I, S^0_{II}}[pago\ final\ en\ x_{\overline{\tau}} | \overline{A}^c] \leq \text{máx}\{|\overline{f}|_\infty, |\overline{g}|_\infty\}\ ,\ \mathbb{P}(\overline{A}^c) \leq (1 - e^{-a}) + 2\eta$$

Sigamos con la cuenta anterior. Sean los conjuntos

$$\overline{A}_1 = \overline{A} \cap \{|x_{\overline{\tau}} - y_\tau| < a\}$$

$$\overline{A}_2 = \overline{A} \cap \{|x_{\overline{\tau}} - y_\tau| \geq a\}.$$

Nuevamente vemos que $\overline{A} = \overline{A}_1 \cup \overline{A}_2$ y los conjuntos son disjuntos. Entonces

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}^{x_0}_{S^0_I, S^0_{II}}[pago\ final\ en\ x_{\overline{\tau}} | \overline{A}] \\
&\quad = \mathbb{E}^{x_0}_{S^0_I, S^0_{II}}[pago\ final\ en\ x_{\overline{\tau}} | \overline{A}_1]\mathbb{P}(\overline{A}_1) + \mathbb{E}^{x_0}_{S^0_I, S^0_{II}}[pago\ final\ en\ x_{\overline{\tau}} | \overline{A}_2]\mathbb{P}(\overline{A}_2).
\end{aligned}$$

Acotando, obtenemos las siguientes desigualdades

$$\mathbb{P}(\overline{A}_1) \leq 1 \ , \ \mathbb{E}^{x_0}_{S^0_I, S^0_{II}}[pago\ final\ en\ x_{\overline{\tau}} | \overline{A}_2] \leq \text{máx}\{|\overline{f}|_\infty, |\overline{g}|_\infty\} \ , \ \mathbb{P}(\overline{A}_2) \leq (1 - e^{-a}) + 3\eta,$$

la última desigualdad se obtiene igual a como lo hicimos en la proposición anterior. Supongamos que la partida $\overline{P}$ finaliza en el tablero 1. Entonces, si estamos bajo la condición $\overline{A}$ la partida P también va a finalizar en el mismo tablero. Aquí, la paga final viene dada por la función $\overline{f}$. Recordemos que $\overline{f}$ es Lipschitz, entonces si estamos bajo la condición $\overline{A}_1$ tenemos

$$|\overline{f}(x_{\overline{\tau}}) - \overline{f}(y_\tau)| \leq La.$$

Entonces

$$\overline{f}(x_{\overline{\tau}}) \leq \overline{f}(y_\tau) + La.$$

Así obtenemos la siguiente desigualdad

$$\mathbb{E}^{x_0}_{S^0_I, S^0_{II}}[\overline{f}(x_{\overline{\tau}}) | \overline{A}_1] \leq \mathbb{E}^{x_0}_{S^0_I, S^0_{II}}[\overline{f}(y_\tau) | \overline{A}_1] + La$$

En este punto haremos un paso muy importante. Como las partidas P y $\overline{P}$ pensadas ambas hasta el paso τ tienen la misma probabilidad, vale que

$$\mathbb{E}^{x_0}_{S^0_I, S^0_{II}}[\overline{f}(y_\tau) | \overline{A}_1] = \mathbb{E}^{y_0}_{\overline{S}^0_I, \overline{S}^0_{II}}[\overline{f}(y_\tau) | \overline{A}_1].$$

Observar que hemos cambiado las estrategias, pues pasamos a jugar a la partida $\overline{P}$ comenzando en y_0.

Ahora bien, las condiciones del conjunto $\overline{A}_1$ son sobre cosas que suceden a partir del paso τ, que es donde la partida $\overline{P}$ ya finalizó. Entonces vale que

$$\mathbb{E}^{y_0}_{S^0_I, \overline{S}^0_{II}}[\overline{f}(y_\tau) | \overline{A}_1] = \mathbb{E}^{y_0}_{S^0_I, \overline{S}^0_{II}}[\overline{f}(y_\tau)].$$

Juntando todo obtenemos

$$\mathbb{E}^{x_0}_{S^0_I, S^0_{II}}[pago\ final\ en\ x_{\overline{\tau}}] \leq \mathbb{E}^{y_0}_{\overline{S}^0_I, \overline{S}^0_{II}}[pago\ final\ en\ y_\tau] + La + \text{máx}\{|\overline{f}|_\infty, |\overline{g}|_\infty\}[2(1 - e^{-a}) + 5\eta].$$

Es decir

$$\mathbb{E}^{x_0}_{S^0_I, S^0_{II}}[pago\ final\ en\ x_{\overline{\tau}}] \leq \mathbb{E}^{y_0}_{\overline{S}^0_I, \overline{S}^0_{II}}[pago\ final\ en\ y_\tau] + \mathscr{B}(a, \eta).$$

con $\mathscr{B}(a, \eta) \searrow 0$ cuando $a \to 0$ y $\eta \to 0$.

Como las estrategias son arbitrarias podemos tomar supremo sobre todas las estrategias $\overline{S}_I$

$$\mathbb{E}^{x_0}_{S^0_I, S^0_{II}}[pago\ final\ en\ x_{\overline{\tau}}] \leq \sup_{\overline{S}_I} \mathbb{E}^{y_0}_{\overline{S}_I, \overline{S}^0_{II}}[pago\ final\ en\ y_\tau] + \mathscr{B}(a, \eta)$$

y como esto vale para cualquier estrategia S_I llegamos a

$$\sup_{S_I} \mathbb{E}^{x_0}_{S_I,S^0_{II}}[pago\ final\ en\ x_{\overline{\tau}}] \leq \sup_{\overline{S}_I} \mathbb{E}^{y_0}_{\overline{S}_I,\overline{S}^0_{II}}[pago\ final\ en\ y_\tau] + \mathscr{B}(a,\eta).$$

Ahora podemos tomar infimo sobre todas las estrategias S_{II}, entonces

$$\inf_{S_{II}} \sup_{S_I} \mathbb{E}^{x_0}_{S_I,S_{II}}[pago\ final\ en\ x_{\overline{\tau}}] \leq \sup_{\overline{S}_I} \mathbb{E}^{y_0}_{\overline{S}_I,\overline{S}^0_{II}}[pago\ final\ en\ y_\tau] + \mathscr{B}(a,\eta)$$

y como esto vale para cualquier estrategia $\overline{S}_{II}$ vale también para el infimo. Así obtenemos

$$\inf_{S_{II}} \sup_{S_I} \mathbb{E}^{x_0}_{S_I,S_{II}}[pago\ final\ en\ x_{\overline{\tau}}] \leq \inf_{\overline{S}_{II}} \sup_{\overline{S}_I} \mathbb{E}^{y_0}_{\overline{S}_I,\overline{S}_{II}}[pago\ final\ en\ y_\tau] + \mathscr{B}(a,\eta).$$

Es decir, concluimos que

$$u^\varepsilon(x_0) \leq u^\varepsilon(y_0) + \mathscr{B}(a,\eta)$$

si los puntos x_0 e y_0 están en el tablero 1, o bien

$$v^\varepsilon(x_0) \leq v^\varepsilon(y_0) + \mathscr{B}(a,\eta)$$

si los puntos x_0 e y_0 están en el tablero 2.

De forma análoga se puede probar la otra desigualdad, lo dejamos como ejercicio para el lector. Con esto acabamos de probar el siguiente teorema

Teorema 7. *Dado $\eta > 0$, existen ε_0 y r_0 tal que dados $x_0, y_0 \in \Omega$ con $|x_0 - y_0| < r_0$ y dado $\varepsilon < \varepsilon_0$ vale lo siguiente*

$$|u^\varepsilon(x_0) - u^\varepsilon(y_0)| < \eta$$

si los puntos x_0 e y_0 están en el tablero 1, o

$$|v^\varepsilon(x_0) - v^\varepsilon(y_0)| < \eta$$

si los puntos x_0 e y_0 están en el tablero 2.

Este teorema es exactamente la segunda hipótesis del Lema de tipo Arzela-Ascoli. Con esto hemos logrado el objetivo de este capítulo, a través del Lema del tipo Arzela-Ascoli obtenemos un par de funciones continuas (u, v) que son límite uniforme de una subsucesión de funciones $(u^\varepsilon, v^\varepsilon)$ que cumplen el DPP.

Teorema 8. *Dada la familia de soluciones del DPP $(u^\varepsilon, v^\varepsilon)$ hay una subsucesión $\varepsilon_k \to 0$ y un par de funciones (u, v) continuas en $\overline{\Omega}$ tales que*

$$u^{\varepsilon_k} \to u, \qquad y \qquad v^{\varepsilon_k} \to v,$$

uniformemente en $\overline{\Omega}$.

En el siguiente capítulo veremos que este par de funciones (u, v) son solución (en sentido viscoso) de nuestro sistema (1.1).

5. Existencia de solución viscosa del sistema

El objetivo de este capítulo es ver que las funciones u y v, límites de las funciones u^ε y v^ε respectivamente que cumplen el DPP (5) son *soluciones viscosas* del sistema (1). La forma en que haremos esto será, como se hace muchas veces con este tipo de soluciones, probando que (u, v) son *subsoluciones viscosas* y *supersoluciones viscosas*.

5.1. Infinito Laplaciano

Comencemos probando que u es subsolución viscosa de la ecuación

$$-\frac{1}{2}\Delta_\infty u(x) + u(x) - v(x) = 0$$

Sea $x_0 \in \Omega$ y sea ϕ una función $\mathscr{C}^2(\Omega)$ que cumple $u(x_0) - \phi(x_0) = 0$ tiene un máximo absoluto en x_0. Sea $(x_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ una sucesión con $x_\varepsilon \to x_0$ si $\varepsilon \to 0$ y que verifica

$$u^\varepsilon(y) - \phi(y) \leq u^\varepsilon(x_\varepsilon) - \phi(x_\varepsilon) + \varepsilon^3$$

para todo $y \in \overline{\Omega}$. Entonces sucede que

$$u^\varepsilon(y) - u^\varepsilon(x_\varepsilon) \leq \phi(y) - \phi(x_\varepsilon) + \varepsilon^3 \tag{41}$$

Utilizando el DPP que verifican las funciones,

$$u^\varepsilon(x_\varepsilon) = \varepsilon^2 v^\varepsilon(x_\varepsilon) + (1-\varepsilon^2)\left\{\frac{1}{2}\sup_{y\in B_\varepsilon(x_\varepsilon)} u^\varepsilon(y) + \frac{1}{2}\operatorname*{ínf}_{y\in B_\varepsilon(x_\varepsilon)} u^\varepsilon\right\}$$

si pasamos restando el termino de la derecha $u^\varepsilon(x)$ y lo repartimos en los términos multiplicando por ε^2 y $(1-\varepsilon^2)$ obtenemos

$$0 = \varepsilon^2(v^\varepsilon(x_\varepsilon) - u^\varepsilon(x_\varepsilon)) + (1-\varepsilon^2)\left\{\frac{1}{2}\sup_{y\in B_\varepsilon(x_\varepsilon)}(u^\varepsilon(y) - u^\varepsilon(x_\varepsilon)) + \frac{1}{2}\operatorname*{ínf}_{y\in B_\varepsilon(x_\varepsilon)}(u^\varepsilon(y) - u^\varepsilon(x_\varepsilon))\right\}.$$

Entonces si usamos (5.1) obtenemos

$$0 \leq \varepsilon^2(v^\varepsilon(x_\varepsilon) - u^\varepsilon(x_\varepsilon)) + (1-\varepsilon^2)\left\{\frac{1}{2}\sup_{y\in B_\varepsilon(x_\varepsilon)}(\phi(y) - \phi(x_\varepsilon)) + \frac{1}{2}\operatorname*{ínf}_{y\in B_\varepsilon(x_\varepsilon)}(\phi(y) - \phi(x_\varepsilon))\right\} + \varepsilon^3.$$

Como la función ϕ es $\mathscr{C}^2$ en particular es continua, entonces los supremos e infimos en $B_\varepsilon(x_\varepsilon)$ son máximos y mínimos en $\overline{B}_\varepsilon(x_\varepsilon)$. Entonces obtenemos

$$0 \leq \varepsilon^2(v^\varepsilon(x_\varepsilon) - u^\varepsilon(x_\varepsilon)) + (1-\varepsilon^2)\left\{\frac{1}{2}\max_{y\in\overline{B}_\varepsilon(x_\varepsilon)}(\phi(y)-\phi(x_\varepsilon)) + \frac{1}{2}\min_{y\in\overline{B}_\varepsilon(x_\varepsilon)}(\phi(y)-\phi(x_\varepsilon))\right\} + \varepsilon^3. \tag{42}$$

Como sabemos, la función $\phi \in \mathscr{C}^2$ cumple que, si $\nabla\phi \neq 0$, la dirección de máximo crecimiento es $\nabla\phi$ (y la de mínimo crecimiento será naturalmente $-\nabla\phi$). Supongamos entonces que $\nabla\phi(x_0) \neq 0$, por continuidad del gradiente, si ε es lo suficientemente chico sucede que $\nabla\phi \neq 0$ en toda $B_\varepsilon(x_\varepsilon)$, en particular $\nabla\phi(x_\varepsilon) \neq 0$. Llamemos $w_\varepsilon = \frac{\nabla\phi(x_\varepsilon)}{|\nabla\phi(x_\varepsilon)|}$. Usando que $\nabla\phi \neq 0$ obtenemos

$$\max_{y\in\overline{B}_\varepsilon(x_\varepsilon)}\phi(y) = \max_{y\in\partial B_\varepsilon(x_\varepsilon)}\phi(y).$$

Construyamos una sucesión z_ε con $|z_\varepsilon| = 1$ tal que

$$\max_{y\in\partial B_\varepsilon(x_\varepsilon)}\phi(y) = \phi(x_\varepsilon + \varepsilon z_\varepsilon)$$

Ahora bien

$$\begin{aligned}
&\phi(x_\varepsilon + \varepsilon z_\varepsilon) - \phi(x_\varepsilon)\\
&\quad = \varepsilon\langle\nabla\phi(x_\varepsilon), z_\varepsilon\rangle + o(\varepsilon)\\
&\quad \leq \varepsilon\langle\nabla\phi(x_\varepsilon), w_\varepsilon\rangle + o(\varepsilon)\\
&\quad = \phi(x_\varepsilon + \varepsilon w_\varepsilon) - \phi(x_\varepsilon) + o(\varepsilon).
\end{aligned}$$

Pero por otro lado

$$\phi(x_\varepsilon + \varepsilon w_\varepsilon) - \phi(x_\varepsilon) = \varepsilon\langle\nabla\phi(x_\varepsilon), w_\varepsilon\rangle + o(\varepsilon) \leq \phi(x_\varepsilon + \varepsilon z_\varepsilon) - \phi(x_\varepsilon)$$

Luego llegamos a

$$\varepsilon\langle\nabla\phi(x_\varepsilon), w_\varepsilon\rangle + o(\varepsilon) \leq \varepsilon\langle\nabla\phi(x_\varepsilon), z_\varepsilon\rangle + o(\varepsilon) \leq \varepsilon\langle\nabla\phi(x_\varepsilon), w_\varepsilon\rangle + o(\varepsilon)$$

si dividimos por ε y tomamos límite obtenemos

$$\langle\nabla\phi(x_0), w_0\rangle = \langle\nabla\phi(x_0), z_0\rangle$$

sinedo $w_0 = \frac{\nabla\phi(x_0)}{|\nabla\phi(x_0)|}$ como el valor $\langle\nabla\phi(x_0), w_0\rangle$ es el mayor valor que toma la función $\langle\nabla\phi(x_0), -\rangle$ en $\partial B_1(0)$ no queda otra posibilidad que tener

$$z_0 = w_0 = \frac{\nabla\phi(x_0)}{|\nabla\phi(x_0)|}.$$

Con todo esto lo que logramos es construir una sucesión de vectores unitarios z_ε tales que

$$\max_{y\in\partial B_\varepsilon(x_\varepsilon)} \phi(y) = \phi(x_\varepsilon + \varepsilon z_\varepsilon)$$

que probamos que cumple $z_\varepsilon \to w_0$. Volviendo a (5.1) obtenemos

$$0 \leq \varepsilon^2(v^\varepsilon(x_\varepsilon) - u^\varepsilon(x_\varepsilon)) + (1-\varepsilon^2)\left\{\frac{1}{2}(\phi(x_\varepsilon+\varepsilon z_\varepsilon) - \phi(x_\varepsilon)) + \frac{1}{2}(\phi(x_\varepsilon - \varepsilon z_\varepsilon) - \phi(x_\varepsilon))\right\} + \varepsilon^3. \quad (43)$$

Ahora, si hacemos la expansión de Taylor hasta orden dos de ϕ nos quedan las siguientes ecuaciones

$$\phi(x_\varepsilon+\varepsilon z_\varepsilon) - \phi(x_\varepsilon) = \varepsilon\langle\nabla\phi(x_\varepsilon), z_\varepsilon\rangle + \varepsilon^2\frac{1}{2}\langle D^2\phi(x_\varepsilon)z_\varepsilon, z_\varepsilon\rangle + o(\varepsilon^2)$$

$$\phi(x_\varepsilon-\varepsilon z_\varepsilon) - \phi(x_\varepsilon) = -\varepsilon\langle\nabla\phi(x_\varepsilon), z_\varepsilon\rangle + \varepsilon^2\frac{1}{2}\langle D^2\phi(x_\varepsilon)z_\varepsilon, z_\varepsilon\rangle + o(\varepsilon^2).$$

De estas ecuaciones se deduce que

$$\left\{\frac{1}{2}(\phi(x_\varepsilon+\varepsilon z_\varepsilon) - \phi(x_\varepsilon)) + \frac{1}{2}(\phi(x_\varepsilon - \varepsilon z_\varepsilon) - \phi(x_\varepsilon))\right\} = \frac{1}{2}\varepsilon^2\langle D^2\phi(x_\varepsilon)z_\varepsilon, z_\varepsilon\rangle + o(\varepsilon^2)$$

Entonces si volvemos a (5.1), dividiendo todo por ε^2, obtenemos

$$0 \leq v^\varepsilon(x_\varepsilon) - u^\varepsilon(x_\varepsilon) + (1-\varepsilon^2)\frac{1}{2}\langle D^2\phi(x_\varepsilon)z_\varepsilon, z_\varepsilon\rangle + \frac{o(\varepsilon^2)}{\varepsilon^2}.$$

Luego tomando límite cuando $\varepsilon \to 0$ llegamos a

$$0 \leq v(x_0) - u(x_0) + \frac{1}{2}\langle D^2\phi(x_0)w_0, w_0\rangle$$

o lo que es lo mismo

$$-\frac{1}{2}\Delta_\infty\phi(x_0) + u(x_0) - v(x_0) \leq 0.$$

Nos queda analizar el caso en que $\nabla\phi(x_0) = 0$. Para esto tenemos que usar lo que se llaman las funciones envolventes semicontinuas superior e inferior. Demos las definiciones correspondientes.

Definición 8. *Sean $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ una matriz simétrica y sea $\xi \in \mathbb{R}^n$ un vector, definimos*

$$F(\xi, M) = \begin{cases} -\langle M\frac{\xi}{|\xi|}; \frac{\xi}{|\xi|}\rangle & \xi \neq 0 \\ 0 & \xi = 0 \end{cases}$$

Entonces a partir de la definición anterior definimos las envolventes semiconitnuas superiores e inferiores asociadas a F como

$$F^*(\xi, M) = \begin{cases} -\langle M\frac{\xi}{|\xi|}; \frac{\xi}{|\xi|}\rangle & \xi \neq 0 \\ \text{máx}\{\limsup_{\eta\to 0} -\langle M\frac{\eta}{|\eta|}; \frac{\eta}{|\eta|}\rangle; 0\} & \xi = 0. \end{cases}$$

y

$$F_*(\xi, M) = \begin{cases} -\langle M\frac{\xi}{|\xi|}; \frac{\xi}{|\xi|}\rangle & \xi \neq 0 \\ \text{mín}\{\liminf_{\eta\to 0} -\langle M\frac{\eta}{|\eta|}; \frac{\eta}{|\eta|}\rangle; 0\} & \xi = 0. \end{cases}$$

respectivamente.

Hagamos la siguiente observación que tiene que ver con resultados del *álgebra lineal*.

Observación 7. *Si $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ una matriz simétrica y $v \in \mathbb{R}^n$ que cumple $|v| = 1$, entonces existe $B = \{v_1, ..., v_n\}$ una base donde M se diagonaliza de la forma*

$$[M]_B = D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}.$$

Es decir, existe un matriz $O \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ortogonal que cumple

$$M = ODO^t.$$

Entonces sucede que

$$\langle Mv, v\rangle = vMv^t = vODO^tv^t$$

llamemos $w = vO$, entonces $O^tv^t = (vO)^t = w^t$. Como O es ortogonal vale que $|w| = |v| = 1$. Así llegamos a que si $w = [w_1, ..., w_n]$ vale que $w_1^2 + ... + w_n^2 = 1$ y sucede que

$$vMv^t = wDw^t = [w_1, ..., w_n]\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix} = \lambda_1 w_1^2 + ... + \lambda_n w_n^2 \leq 1.\ \max_{1\leq i\leq n}\{\lambda_i\}.$$

Si hacemos una deducción similar a la anterior acotando con el mínimo de los autovalores obtenemos lo siguiente

$$\min_{1\leq i\leq n}\{\lambda_i\} \leq \langle M\frac{\xi}{|\xi|}, \frac{\xi}{|\xi|}\rangle \leq \max_{1\leq i\leq n}\{\lambda_i\}$$

Y multiplicando por (-1) llegamos a

$$-\max_{1\leq i\leq n}\{\lambda_i\} \leq -\langle M\frac{\xi}{|\xi|}, \frac{\xi}{|\xi|}\rangle \leq -\min_{1\leq i\leq n}\{\lambda_i\}$$

Utilizando este resultado vemos que se puede modificar la **Definición 3** considerando

$$F^*(\xi, M) = \begin{cases} -\langle M\frac{\xi}{|\xi|}; \frac{\xi}{|\xi|}\rangle & \xi \neq 0 \\ \max\{-\min_{1\leq i\leq n}\{\lambda_i\}; 0\} & \xi = 0. \end{cases}$$

y

$$F_*(\xi, M) = \begin{cases} -\langle M\frac{\xi}{|\xi|}; \frac{\xi}{|\xi|}\rangle & \xi \neq 0 \\ \min\{-\max_{1\leq i\leq n}\{\lambda_i\}; 0\} & \xi = 0. \end{cases}$$

Volvamos entonces a las hipótesis que teníamos antes. Es decir, sea u límite uniforme de las u^ε y sea $\phi \in \mathscr{C}^2(\Omega)$ una función que verifica que $u(x_0) - \phi(x_0) = 0$ es un máximo de la función $u - \phi$. Observemos que el caso en que $\nabla\phi(x_0) \neq 0$ ya hemos probado que $-\frac{1}{2}\Delta_\infty\phi(x_0)+u(x_0)-v(x_0) \leq 0$. Es decir

$$-\frac{1}{2}\langle D^2\phi(x_0)\frac{\nabla\phi(x_0)}{|\nabla\phi(x_0)|}, \frac{\nabla\phi(x_0)}{|\nabla\phi(x_0)|}\rangle + u(x_0) - v(x_0) \leq 0.$$

Lo que queremos hacer notar es que hemos probado

$$\frac{1}{2}F_*(\nabla\phi(x_0), D^2\phi(x_0)) + u(x_0) - v(x_0) \leq 0.$$

Para el caso $\nabla\phi(x_0) = 0$ vamos a probar que

$$\frac{1}{2}F_*(0, D^2\phi(x_0)) + u(x_0) - v(x_0) \leq 0.$$

Nuevamente vamos a usar una red $(x_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ que cumple $x_\varepsilon \to x_0$ y sucede que $u^\varepsilon(x_\varepsilon) - \phi(x_\varepsilon) = 0$ es un máximo de la función $u^\varepsilon - \phi$. De nuevo tenemos que

$$u^\varepsilon(y) - \phi(y) \leq u^\varepsilon(x_\varepsilon) - \phi(x_\varepsilon) \Rightarrow u^\varepsilon(y) - u^\varepsilon(x_\varepsilon) \leq \phi(y) - \phi(x_\varepsilon). \tag{44}$$

Utilizando el DPP correspondiente a u^ε obtenemos lo siguiente

$$0 = (1-\varepsilon^2)\Big\{\frac{1}{2}\sup_{y\in B_\varepsilon(x_\varepsilon)}(u^\varepsilon(y)-u^\varepsilon(x_\varepsilon))+\frac{1}{2}\inf_{y\in B_\varepsilon(x_\varepsilon)}(u^\varepsilon(y)-u^\varepsilon(x_\varepsilon))\Big\}+\varepsilon^2(v^\varepsilon(x_\varepsilon)-u^\varepsilon(x_\varepsilon))$$

con la desigualdad (5.1) obtenemos

$$0 \leq (1-\varepsilon^2)\Big\{\frac{1}{2}\sup_{y\in B_\varepsilon(x_\varepsilon)}(\phi(y)-\phi(x_\varepsilon))+\frac{1}{2}\inf_{y\in B_\varepsilon(x_\varepsilon)}(\phi(y)-\phi(x_\varepsilon))\Big\}+\varepsilon^2(v^\varepsilon(x_\varepsilon)-u^\varepsilon(x_\varepsilon))$$

como ϕ es continua el supremo e ínfimo en $B_\varepsilon(x_\varepsilon)$ son máximos y mínimos en $\overline{B_\varepsilon(x_\varepsilon)}$. Entonces

$$0 \leq (1-\varepsilon^2)\Big\{\frac{1}{2}\operatorname*{máx}_{\overline{B_\varepsilon(x_\varepsilon)}}(\phi(y)-\phi(x_\varepsilon))+\frac{1}{2}\operatorname*{mín}_{\overline{B_\varepsilon(x_\varepsilon)}}(\phi(y)-\phi(x_\varepsilon))\Big\}+\varepsilon^2(v^\varepsilon(x_\varepsilon)-u^\varepsilon(x_\varepsilon)). \tag{45}$$

Sea $w_\varepsilon \in \overline{B_\varepsilon(x_\varepsilon)}$ tal que

$$\phi(w_\varepsilon)-\phi(x_\varepsilon)=\operatorname*{máx}_{\overline{B_\varepsilon(x_\varepsilon)}}(\phi(y)-\phi(x_\varepsilon)).$$

Es decir, $\phi(w_\varepsilon)=\operatorname{máx}_{\overline{B_\varepsilon(x_\varepsilon)}}\phi(y)$. Llamemos $\overline{w_\varepsilon}$ al simétrico de w_ε respecto de x_ε en la bola $B_\varepsilon(x_\varepsilon)$. Entonces, si volvemos a la cuenta (5.1) obtenemos

$$0 \leq (1-\varepsilon^2)\Big\{\frac{1}{2}(\phi(w_\varepsilon)-\phi(x_\varepsilon))+\frac{1}{2}(\phi(\overline{w_\varepsilon})-\phi(x_\varepsilon))\Big\}+\varepsilon^2(v^\varepsilon(x_\varepsilon)-u^\varepsilon(x_\varepsilon)).$$

Nuevamente vamos a hacer la expansión de Taylor hasta orden 2

$$\phi(w_\varepsilon)=\phi(x_\varepsilon)+\langle\nabla\phi(x_\varepsilon),(w_\varepsilon-x_\varepsilon)\rangle+\frac{1}{2}\langle D^2\phi(x_\varepsilon)(w_\varepsilon-x_\varepsilon),(w_\varepsilon-x_\varepsilon)\rangle+o(\varepsilon^2)$$

y

$$\phi(\overline{w_\varepsilon})=\phi(x_\varepsilon)-\langle\nabla\phi(x_\varepsilon),(w_\varepsilon-x_\varepsilon)\rangle+\frac{1}{2}\langle D^2\phi(x_\varepsilon)(w_\varepsilon-x_\varepsilon),(w_\varepsilon-x_\varepsilon)\rangle+o(\varepsilon^2).$$

Entonces si volvemos a lo anterior y dividimos por ε^2 nos queda

$$0 \leq (1-\varepsilon^2)\frac{1}{2}\langle D^2\phi(x_\varepsilon)\frac{(w_\varepsilon-x_\varepsilon)}{\varepsilon},\frac{(w_\varepsilon-x_\varepsilon)}{\varepsilon}\rangle+v^\varepsilon(x_\varepsilon)-u^\varepsilon(x_\varepsilon)+o(1).$$

Si para infinitos $\varepsilon\to 0$ tenemos

$$\left|\frac{(w_\varepsilon-x_\varepsilon)}{\varepsilon}\right|=1$$

entonces via una subsucesión hay un $z\in\mathbb{R}^n$ con $\|z\|=1$ tal que

$$\frac{(w_\varepsilon-x_\varepsilon)}{\varepsilon}\to z.$$

Pasando al limite nos queda

$$0 \leq \frac{1}{2}\langle D^2\phi(x_0)z, z\rangle + v(x_0) - u(x_0).$$

Entonces

$$0 \leq \frac{1}{2} \max_{1\leq i\leq n}\{\lambda_i\} + v(x_0) - u(x_0).$$

O lo que es lo mismo

$$-\frac{1}{2} \max_{1\leq i\leq n}\{\lambda_i\} + u(x_0) - v(x_0) \leq 0.$$

Con esto llegamos a

$$\frac{1}{2}F_*(0, D^2\phi(x_0)) + u(x_0) - v(x_0) \leq 0.$$

Ahora bien, si para ε pequeño tenemos

$$\left|\frac{(w_\varepsilon - x_\varepsilon)}{\varepsilon}\right| < 1$$

entonces en esos puntos de máximo interiores a la bola se tiene que $D^2\phi(w_\varepsilon)$ es semidefinida negativa. Entonces pasando al limite concluimos que $D^2\phi(x_0)$ es semidefinida negativa. Es decir, todos los autovalores de $D^2\phi(x_0)$ son menores o iguales a 0, por lo tanto el máximo de los autovalores es menor o igual a 0. Así concluimos lo siguiente

$$F_*(0, D^2\phi(x_0)) = \min\{-\max_{1\leq i\leq n}\{\lambda_i\}; 0\} = 0.$$

Además para ε chico tenemos que $\langle D^2\phi(x_\varepsilon)\frac{(w_\varepsilon - x_\varepsilon)}{\varepsilon}, \frac{(w_\varepsilon - x_\varepsilon)}{\varepsilon}\rangle \leq 0$. Entonces obtenemos

$$0 \leq v^\varepsilon(x_\varepsilon) - u^\varepsilon(x_\varepsilon) + o(1)$$

Tomando límite cuando $\varepsilon \to 0$ llegamos a

$$0 \leq v(x_0) - u(x_0).$$

O lo que es lo mismo

$$u(x_0) - v(x_0) \leq 0.$$

Nuevamente llegamos a

$$\frac{1}{2}F_*(0, D^2\phi(x_0)) + u(x_0) - v(x_0) \leq 0.$$

que es lo que queriamos probar.

Si recuperamos todas las cuentas lo que hemos probado es

$$\frac{1}{2}F_*(\nabla\phi(x_0), D^2\phi(x_0)) + u(x_0) - v(x_0) \leq 0.$$

De forma análoga podemos llegar a la desigualdad

$$\frac{1}{2}F^*(\nabla\phi(x_0), D^2\phi(x_0)) + u(x_0) - v(x_0) \geq 0,$$

cuando $x_0 \in \Omega$ y ϕ es una función $\mathscr{C}^2(\Omega)$ que cumple $u(x_0) - \phi(x_0) = 0$ y $u - \phi$ tiene un mínimo en x_0.

5.2. Laplaciano

Ahora vamos a ver que la función v es *solución viscosa* de la ecuación

$$-\frac{\kappa}{2}\Delta v(x) + v(x) - u(x) = 0,$$

para $x \in \Omega$.

En esta cuenta vamos a determinar también el valor de la constante κ (que ya apareció antes). Dicho valor κ es una constante que va a depender sólo de la dimensión del espacio donde estemos trabajando. Nuevamente vamos a ver primero que v es *subsolución viscosa*. Para eso como siempre vamos a cosniderar una función $\psi \in \mathscr{C}^2(\Omega)$ que cumple $v(x_0) - \psi(x_0) = 0$ es un máximo de la función $v - \psi$ con $x_0 \in \Omega$. Como antes vamos a usar una red $(x_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ que cumple que $x_\varepsilon \to x_0$ y $v^\varepsilon - \psi$ tiene un máximo en x_ε. Nuevamente tenemos este resultado

$$v^\varepsilon(y) - \psi(y) \leq v^\varepsilon(x_\varepsilon) - \psi(x_\varepsilon) \Rightarrow v^\varepsilon(y) - v^\varepsilon(x_\varepsilon) \leq \psi(y) - \psi(x_\varepsilon) \tag{46}$$

Entonces si tomamos el DPP correspondiente a las funciones v^ε, si pasamos restando $v^\varepsilon(x_\varepsilon)$ y lo distribuimos multiplicando por ε^2 y por $(1-\varepsilon^2)$ obtenemos

$$0 = \varepsilon^2(u^\varepsilon(x_\varepsilon) - v^\varepsilon(x_\varepsilon)) + (1-\varepsilon^2)\fint_{B_\varepsilon(x_\varepsilon)}(v^\varepsilon(y) - v^\varepsilon(x_\varepsilon))dy.$$

Entonces usando (5.2) y dividiendo por ε^2 obtendremos

$$0 \leq (u^\varepsilon(x_\varepsilon) - v^\varepsilon(x_\varepsilon)) + (1-\varepsilon^2)\frac{1}{\varepsilon^2}\fint_{B_\varepsilon(x_\varepsilon)}(\psi(y) - \psi(x_\varepsilon))dy.$$

Nuevamente vamos a usar la expansión de Taylor hasta orden 2 de la función ψ

$$\psi(y) = \psi(x_\varepsilon) + \langle \nabla\psi(x_\varepsilon), (y - x_\varepsilon)\rangle + \frac{1}{2}\langle D^2\psi(x_\varepsilon)(y - x_\varepsilon), (y - x_\varepsilon)\rangle + o(|y - x_\varepsilon|^2)$$

Con $y \in B_\varepsilon(x_\varepsilon)$.

Entonces

$$\frac{1}{\varepsilon^2} \fint_{B_\varepsilon(x_\varepsilon)} (\psi(y) - \psi(x_\varepsilon))dy = \frac{1}{\varepsilon^2} \fint_{B_\varepsilon(x_\varepsilon)} (\langle \nabla\psi(x_\varepsilon), (y - x_\varepsilon)\rangle + \frac{1}{2}\langle D^2\psi(x_\varepsilon)(y - x_\varepsilon), (y - x_\varepsilon)\rangle)dy.$$

Aquí falta sumar el término $o(|y - x_\varepsilon|^2)$, pero como este término va a cero cuando $\varepsilon \to 0$ lo vamos a eliminar ahora.

Vamos a analizar la integral anterior separando la suma,

$$\fint_{B_\varepsilon(x_\varepsilon)} \langle \nabla\psi(x_\varepsilon), (y - x_\varepsilon)\rangle dy = \sum_{j=1}^{n} \fint_{B_\varepsilon(x_\varepsilon)} \partial_{x_j}(x_\varepsilon)(y_j - (x_\varepsilon)_j)dy.$$

Observar que dentro de la integral $\partial_{x_j}(x_\varepsilon)$ es constante y el factor $(y_j - (x_\varepsilon)_j)$ es impar en $B_\varepsilon(x_\varepsilon)$ para todo j. Entonces podemos deducir que todas las integrales son 0, es decir,

$$\frac{1}{\varepsilon^2} \fint_{B_\varepsilon(x_\varepsilon)} \langle \nabla\psi(x_\varepsilon), (y - x_\varepsilon)\rangle dy = 0.$$

Por otro lado

$$\frac{1}{2} \fint_{B_\varepsilon(x_\varepsilon)} \langle D^2\psi(x_\varepsilon)\frac{(y - x_\varepsilon)}{\varepsilon}, \frac{(y - x_\varepsilon)}{\varepsilon}\rangle dy = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} \fint_{B_\varepsilon(x_\varepsilon)} \partial_{x_i x_j}(x_\varepsilon)\frac{(y_i - (x_\varepsilon)_i)}{\varepsilon}\frac{(y_j - (x_\varepsilon)_j)}{\varepsilon}dy.$$

Razzonando de manera similar a lo anterior, es decir, usando que $(y_i - (x_\varepsilon)_i)(y_j - (x_\varepsilon)_j)$ es impar en $B_\varepsilon(x_\varepsilon)$ si $i \neq j$ obtenemos lo siguiente

$$\fint_{B_\varepsilon(x_\varepsilon)} \partial_{x_i x_j}(x_\varepsilon)\frac{(y_i - (x_\varepsilon)_i)}{\varepsilon}\frac{(y_j - (x_\varepsilon)_j)}{\varepsilon}dy = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ \frac{1}{2}\partial_{x_i^2}\psi(x_\varepsilon) \fint_{B_\varepsilon(x_\varepsilon)} \frac{(y_j - (x_\varepsilon)_j)^2}{\varepsilon^2}dy & i = j. \end{cases}$$

Calculemos la integral

$$\fint_{B_\varepsilon(x_\varepsilon)} \frac{(y_j - (x_\varepsilon)_j)^2}{\varepsilon^2}dy = \frac{1}{|B_\varepsilon(x_\varepsilon)|}\int_{B_\varepsilon(x_\varepsilon)} \left(\frac{y_j - (x_\varepsilon)_j}{\varepsilon}\right)^2 dy.$$

Hagamos el siguiente cambio de variables $z = \frac{y-x_\varepsilon}{\varepsilon}$ entonces $dz = dy\frac{1}{\varepsilon^n}$ y así obtenemos la constante κ,

$$\frac{1}{\varepsilon^n|B_1(0)|}\int_{B_1(0)} z_j^2\varepsilon^n dz = \frac{1}{|B_1(0)|}\int_{B_1(0)} z_j^2 dz = \kappa.$$

Así llegamos a que

$$\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} \fint_{B_\varepsilon(x_\varepsilon)} \partial_{x_ix_j}(x_\varepsilon)\frac{(y_i-(x_\varepsilon)_i)}{\varepsilon}\frac{(y_j-(x_\varepsilon)_j)}{\varepsilon}dy = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\kappa\partial_{x_jx_j}\psi(x_\varepsilon) = \frac{\kappa}{2}\Delta\psi(x_\varepsilon).$$

Luego si volvemos a nuestra cuenta anterior obtenemos

$$0 \leq u^\varepsilon(x_\varepsilon) - v^\varepsilon(x_\varepsilon) + (1-\varepsilon^2)\frac{\kappa}{2}\Delta\psi(x_\varepsilon).$$

Entonces tomando límite cuando $\varepsilon \to 0$ y usando la convergencia uniforme de u^ε y v^ε y la continuidad de $\Delta\psi$ llegamos a

$$0 \leq u(x_0) - v(x_0) + \frac{\kappa}{2}\Delta\psi(x_0).$$

O lo que es lo mismo

$$-\frac{\kappa}{2}\Delta\psi(x_0) + v(x_0) - u(x_0) \leq 0.$$

Lo que prueba que v es subsolución viscosa de la ecuación

$$-\frac{\kappa}{2}\Delta v(x_0) + v(x_0) - u(x_0) = 0.$$

Probar que v es supersolución viscosa es totalmente análogo.

6. El sistema en una dimensión

Si escribimos nuestro sistema en un intervalo se simplifica mucho, ya que el infinito laplaciano unidimensional es la derivada segunda usual. Tenemos

$$\begin{cases} -\frac{1}{2}u''(x) + u(x) - v(x) = 0 & si\ x \in (0,1) \\ -\frac{1}{2}v''(x) + v(x) - u(x) = 0 & si\ x \in (0,1) \\ u(x) = f(x) & si\ x = 0,1 \\ v(x) = g(x) & si\ x = 0,1. \end{cases}$$

que se puede resolver explícito usando que $w := u + v$ es solución de

$$\begin{cases} -\frac{1}{2}w''(x) = 0 & si\ x \in (0,1) \\ w(x) = f(x) + g(x) & si\ x = 0, 1. \end{cases}$$

De esta ecuación se obtiene que

$$w(x) = (f(0) + g(0)) + [(f(1) + g(1)) - (f(0) + g(0))]x.$$

Y nos quedan por resolver

$$\begin{cases} -\frac{1}{2}u''(x) + 2u(x) - w(x) = 0 & si\ x \in (0,1) \\ u(x) = f(x) & si\ x = 0, 1. \end{cases}$$

y

$$\begin{cases} -\frac{1}{2}v''(x) + 2v(x) - w(x) = 0 & si\ x \in (0,1) \\ v(x) = g(x) & si\ x = 0, 1. \end{cases}$$

Terminemos con una simple observacón que es valida en cualquier dimensión.

Observación 8. *si*

$$\text{ínf } f > \sup g \tag{47}$$

entonces

$$u^\epsilon(x) > v^\epsilon(x), \qquad \forall x \in \Omega$$

(siempre conviene estar jugando en el primer tablero porque salir en el primer tablero paga mas que en el segundo). Y de ahi que, pasando al limite, si se cumple (8) *se tiene*

$$u(x) > v(x), \qquad \forall x \in \Omega.$$

7. Extensiones

En este último capítulo describiremos brevemente una serie de posibles formas de extender nuestros resultados para abordar nuevos problemas.

7.1. Iteraciones

En esta subsección esbozaremos que sucede cuando iteramos los juegos considerando la cantidad de saltos que se pueden producir.

Si en el juego no admitimos ningún cambio de tablero (ambos juegos se juegan en tableros que no están conectados) nos queda una solución del DPP

$$\begin{cases} u_0^\varepsilon(x) = \left\{ \frac{1}{2} \sup\limits_{y \in B_\varepsilon(x)} u_0^\varepsilon(y) + \frac{1}{2} \inf\limits_{y \in B_\varepsilon(x)} u_0^\varepsilon(y) \right\} & si\ x \in \Omega, \\ v_0^\varepsilon(x) = \fint_{B_\varepsilon(x)} v_0^\varepsilon(y) dy & si\ x \in \Omega, \\ u_0^\varepsilon(x) = \overline{f}(x) & si\ x \in \mathbb{R}^n \backslash \Omega, \\ v_0^\varepsilon(x) = \overline{g}(x) & si\ x \in \mathbb{R}^n \backslash \Omega, \end{cases}$$

que nos lleva (pasando al limite como antes) a una solución del sistema desacoplado

$$\begin{cases} -\frac{1}{2} \Delta_\infty u_0(x) = 0 & si\ x \in \Omega \\ -\frac{\kappa}{2} \Delta v_0(x) = 0 & si\ x \in \Omega \\ u_0(x) = f(x) & si\ x \in \partial\Omega \\ v_0(x) = g(x) & si\ x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

Ahora bien, si dejamos que cambie solo una vez (una vez que se produce un cambio de tablero nunca mas se puede volver al tablero anterior), nos queda

$$\begin{cases} u_1^\varepsilon(x) = \varepsilon^2 v_0^\varepsilon(x) + (1-\varepsilon^2) \left\{ \frac{1}{2} \sup\limits_{y \in B_\varepsilon(x)} u_1^\varepsilon(y) + \frac{1}{2} \inf\limits_{y \in B_\varepsilon(x)} u_1^\varepsilon(y) \right\} & si\ x \in \Omega, \\ v_1^\varepsilon(x) = \varepsilon^2 u_0^\varepsilon(x) + (1-\varepsilon^2) \fint_{B_\varepsilon(x)} v_1^\varepsilon(y) dy & si\ x \in \Omega, \\ u_1^\varepsilon(x) = \overline{f}(x) & si\ x \in \mathbb{R}^n \backslash \Omega, \\ v_1^\varepsilon(x) = \overline{g}(x) & si\ x \in \mathbb{R}^n \backslash \Omega. \end{cases}$$

Pasando al limite obtenemos una solución de

$$\begin{cases} -\frac{1}{2}\Delta_\infty u_1(x) + u_1(x) - v_0(x) = 0 & si\ x \in \Omega \\ -\frac{\kappa}{2}\Delta v_1(x) + v_1(x) - u_0(x) = 0 & si\ x \in \Omega \\ u_1(x) = f(x) & si\ x \in \partial\Omega \\ v_1(x) = g(x) & si\ x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

Y si le dejamos hacer solo n cambios, llamando $(u_n^\varepsilon, v_n^\varepsilon)$ al valor del juego con a lo sumo n cambios, nos queda

$$\begin{cases} u_n^\varepsilon(x) = \varepsilon^2 v_{n-1}^\varepsilon(x) + (1-\varepsilon^2)\Big\{\frac{1}{2}\sup\limits_{y\in B_\varepsilon(x)} u_n^\varepsilon(y) + \frac{1}{2}\inf\limits_{y\in B_\varepsilon(x)} u_n^\varepsilon(y)\Big\} & si\ x \in \Omega, \\ v_1^\varepsilon(x) = \varepsilon^2 u_{n-1}^\varepsilon(x) + (1-\varepsilon^2)\fint_{B_\varepsilon(x)} v_n^\varepsilon(y)dy & si\ x \in \Omega, \\ u_n^\varepsilon(x) = \overline{f}(x) & si\ x \in \mathbb{R}^n\backslash\Omega, \\ v_n^\varepsilon(x) = \overline{g}(x) & si\ x \in \mathbb{R}^n\backslash\Omega. \end{cases}$$

y llegamos a una solución de

$$\begin{cases} -\frac{1}{2}\Delta_\infty u_n(x) + u_n(x) - v_{n-1}(x) = 0 & si\ x \in \Omega \\ -\frac{\kappa}{2}\Delta v_n(x) + v_n(x) - u_{n-1}(x) = 0 & si\ x \in \Omega \\ u_n(x) = f(x) & si\ x \in \partial\Omega \\ v_n(x) = g(x) & si\ x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

Conjeturamos que estas funciones (u_n, v_n) convergen a una solución de nuestro problema original $n \to \infty$ (y los correspondientes valores de los juegos convergen a una solución del DPP original).

7.2. Sistemas con coeficientes dependientes de x

Podemos mirar el caso en que la probabilidad de saltar de un tablero a otro depende del punto. Por ejemplo, podemos poner que para saltar del tablero 1 al 2 la probabilidad es $a(x)\varepsilon^2$ y del tablero 2 al 1 $b(x)\varepsilon^2$, para dos funciones $a(x)$, $b(x)$ no-negativas. Para este juego el correspondiente DPP toma la

forma

$$\begin{cases} u^\varepsilon(x) = a(x)\varepsilon^2 v^\varepsilon(x) + (1-a(x)\varepsilon^2)\Big\{\frac{1}{2}\sup\limits_{y\in B_\varepsilon(x)} u^\varepsilon(y) + \frac{1}{2}\inf\limits_{y\in B_\varepsilon(x)} u^\varepsilon(y)\Big\} & si\ x\in\Omega, \\ v^\varepsilon(x) = b(x)\varepsilon^2 u^\varepsilon(x) + (1-b(x)\varepsilon^2)\fint_{B_\varepsilon(x)} v^\varepsilon(y)dy & si\ x\in\Omega, \\ u^\varepsilon(x) = \overline{f}(x) & si\ x\in\mathbb{R}^n\backslash\Omega, \\ v^\varepsilon(x) = \overline{g}(x) & si\ x\in\mathbb{R}^n\backslash\Omega. \end{cases}$$

Y, si pasáramos al limite como antes (notemos que las estimaciones necesarias para usar el lema de tipo Arzela-Ascoli no son exactamente iguales a las hechas en este trabajo, ya que la idea de seguir una trayectoria de puntos empezando en x_0 por otra empezando en y_0 en el mismo tablero es posible pero los saltos ya no tienen la misma probabilidad), obtendríamos soluciones del sistema

$$\begin{cases} -\frac{1}{2}\Delta_\infty u(x) + a(x)u(x) - a(x)v(x) = 0 & si\ x\in\Omega, \\ -\frac{\kappa}{2}\Delta v(x) + b(x)v(x) - b(x)u(x) = 0 & si\ x\in\Omega, \\ u(x) = f(x) & si\ x\in\partial\Omega, \\ v(x) = g(x) & si\ x\in\partial\Omega, \end{cases}$$

7.3. Sistemas $N \times N$

Podemos abordar el sistema de N ecuaciones con N incógnitas, $u_1, ..., u_N$,

$$\begin{cases} -L_i u_i(x) + b_i u_i(x) - \sum\limits_{j\neq i} a_{ij}u_j(x) = 0 & si\ x\in\Omega, \\ u_i(x) = f_i(x) & si\ x\in\partial\Omega. \end{cases}$$

Aqui L_i es el operador eliptico Δ_∞ o Δ, y los coeficientes b_i, a_{ij} son no-negativos y verifican

$$b_i = \sum_{j\neq i} a_{ij}.$$

Cuando pensamos en el correspondiente juego debemos contemplar N tableros y poner que la probabilidad de saltar del tablero i al j es $a_{ij}\varepsilon^2$ (y entonces la probabilidad de seguir jugando en el tablero i es $1 - \sum_{j\neq i} a_{ij}\varepsilon^2$).

El correspondiente DPP es

$$\begin{cases} u_i^\varepsilon(x) = \varepsilon^2 \displaystyle\sum_{j\neq i} a_{ij} u_j^\varepsilon(x) + (1-b_i\varepsilon^2)\Big\{\frac{1}{2}\sup_{y\in B_\varepsilon(x)} u_i^\varepsilon(y) + \frac{1}{2}\inf_{y\in B_\varepsilon(x)} u_i^\varepsilon(y)\Big\} \\ \text{ o bien} \\ u_i^\varepsilon(x) = \varepsilon^2 \displaystyle\sum_{j\neq i} a_{ij} u_j^\varepsilon(x) + (1-b_i\varepsilon^2) \fint_{B_\varepsilon(x)} u_i^\varepsilon(y)dy \qquad si\ x\in\Omega, \\ u_i^\varepsilon(x) = \overline{f}(x) \qquad si\ x\in\mathbb{R}^n\backslash\Omega. \end{cases}$$

7.4. Sistemas con el $p-$Laplaciano normalizado

El $p-$Laplaciano normalizado se define como

$$\Delta_p^N u(x) = \alpha\Delta_\infty u(x) + \beta\Delta u(x),$$

con $\alpha(p)$, $\beta(p)$ dependiendo de p y verificando

$$\alpha+\beta = 1$$

(ver [14]).

Nuestros resultados se pueden extender para cubrir sistemas de la forma:

$$\begin{cases} -\Delta_p^N u(x) + u(x) - v(x) = 0 & si\ x\in\Omega, \\ -\Delta_q^N v(x) + v(x) - u(x) = 0 & si\ x\in\Omega, \\ u(x) = f(x) & si\ x\in\partial\Omega, \\ v(x) = g(x) & si\ x\in\partial\Omega. \end{cases}$$

Para este problema un juego cuyas funciones valor aproximen las soluciones se basa en reglas similares a las estudiadas en esta tesis pero sorteando con una moneda desbalanceada con probabilidad $\alpha(p)$ de cara y $\beta(p)$ de ceca cual juego (si jugamos Tug-of-War o jugamos al azar) determina la posición en el tablero 1. También usamos una moneda cargada en el tablero 2 (pero en este caso con probabilidades $\alpha(q)$ de cara y $\beta(q)$ de ceca).

Para este juego el correspondiente DPP es el siguiente:

$$\begin{cases} u^\varepsilon(x) = \varepsilon^2 v^\varepsilon(x) + (1-\varepsilon^2)\left[\alpha(p)\Big\{\frac{1}{2}\sup\limits_{y\in B_\varepsilon(x)} u^\varepsilon(y) + \frac{1}{2}\inf\limits_{y\in B_\varepsilon(x)} u^\varepsilon(y)\Big\} + \beta(p)\fint_{B_\varepsilon(x)} u^\varepsilon(y)dy\right] \\ \qquad\qquad si\ x\in\Omega, \\ v^\varepsilon(x) = \varepsilon^2 u^\varepsilon(x) + (1-\varepsilon^2)\left[\alpha(q)\Big\{\frac{1}{2}\sup\limits_{y\in B_\varepsilon(x)} v^\varepsilon(y) + \frac{1}{2}\inf\limits_{y\in B_\varepsilon(x)} v^\varepsilon(y)\Big\} + \beta(q)\fint_{B_\varepsilon(x)} v^\varepsilon(y)dy\right] \\ \qquad\qquad si\ x\in\Omega, \\ u^\varepsilon(x) = \overline{f}(x) \qquad si\ x\in\mathbb{R}^n\backslash\Omega, \\ v^\varepsilon(x) = \overline{g}(x) \qquad si\ x\in\mathbb{R}^n\backslash\Omega. \end{cases}$$

7.5. Sistemas parabólicos

Nos referimos a sistemas de la forma

$$\begin{cases} u_t(x,t) - \frac{1}{2}\Delta_\infty u(x,t) + u(x,t) - v(x,t) = 0 & si\ x\in\Omega,\ t>0, \\ v_t(x,t) - \frac{\kappa}{2}\Delta v(x,t) + v(x,t) - u(x,t) = 0 & si\ x\in\Omega,\ t>0, \\ u(x,t) = f(x) & si\ x\in\partial\Omega,\ t>0, \\ v(x,t) = g(x) & si\ x\in\partial\Omega,\ t>0, \\ u(x,0) = u_0(x) & si\ x\in\Omega, \\ v(x,0) = v_0(x) & si\ x\in\Omega. \end{cases}$$

Para diseñar un juego cuyas funciones valor aproximen sistema de este tipo podemos pensar en reglas similares a las estudiadas en esta tesis con el agregado de una variable, t, que en cada jugada decrece a $t-\varepsilon^2$. El juego termina si la posición x_τ cae fuera de Ω con $t_\tau > 0$ (y en este caso el pago final viene dado por $f(x_\tau)$ o por $g(x_\tau)$ dependiendo si estamos en el primer tablero o en el segundo) o bien si $t_\tau \leq 0$ (y en este caso el pago final viene dado por $u_0(x_\tau)$ o por $v_0(x_\tau)$ dependiendo si estamos en el primer tablero o en el segundo).

Para este juego el correspondiente DPP es el siguiente:

$$\begin{cases} u^\varepsilon(x,t) = \varepsilon^2 v^\varepsilon(x,t-\varepsilon^2) + (1-\varepsilon^2)\Big\{\frac{1}{2}\sup\limits_{y\in B_\varepsilon(x)} u^\varepsilon(y,t-\varepsilon^2) + \frac{1}{2}\inf\limits_{y\in B_\varepsilon(x)} u^\varepsilon(y,t-\varepsilon^2)\Big\} \\ \qquad\qquad si\ x\in\Omega,\ t>0, \\ v^\varepsilon(x,t) = \varepsilon^2 u^\varepsilon(x,t-\varepsilon^2) + (1-\varepsilon^2)\fint_{B_\varepsilon(x)} v^\varepsilon(y,t-\varepsilon^2)dy \\ \qquad\qquad si\ x\in\Omega,\ t>0, \\ u^\varepsilon(x,t) = \overline{f}(x) \qquad si\ x\in\mathbb{R}^n\backslash\Omega,\ t>0, \\ v^\varepsilon(x,t) = \overline{g}(x) \qquad si\ x\in\mathbb{R}^n\backslash\Omega,\ t>0, \\ u^\varepsilon(x,t) = u_0(x) \qquad si\ x\in\Omega,\ t\le 0, \\ v^\varepsilon(x,t) = v_0(x) \qquad si\ x\in\Omega,\ t\le 0. \end{cases}$$

También podemos encarar el estudio de sistemas con una ecuación parabólica y una elíptica, por ejemplo,

$$\begin{cases} u_t(x,t) - \frac{1}{2}\Delta_\infty u(x,t) + u(x,t) - v(x,t) = 0 & si\ x\in\Omega,\ t>0, \\ -\frac{\kappa}{2}\Delta v(x,t) + v(x,t) - u(x,t) = 0 & si\ x\in\Omega,\ t>0, \\ u(x,t) = f(x) & si\ x\in\partial\Omega,\ t>0, \\ v(x,t) = g(x) & si\ x\in\partial\Omega,\ t>0, \\ u(x,0) = u_0(x) & si\ x\in\Omega. \end{cases}$$

Observemos que en este sistema la función $v(x,t)$ depende de t (ya que aparece $u(x,t)$ en la correspondiente ecuación).

En este caso, decrecemos t a $t-\varepsilon^2$ sólo si jugamos en el tablero 1, mientras que si jugamos en el tablero 2 no modificamos la variable t en cada jugada,

7.6. Sistemas con decisión de saltar

Now referimos a introducir la posibilidad de que uno de los jugadores (por ejemplo el jugador I que busca maximizar el pago final) puede decidir en el primer tablero si saltar al otro tablero o jugar

Tug-of-War, mientras que en el segundo tablero las reglas son las que ya hemos descripto en este trabajo (con la probabilidad de saltar de tablero dada por ε^2). Para este juego el DPP es

$$\begin{cases} u^\varepsilon(x) = \max\left\{v^\varepsilon(x);\ \left\{\frac{1}{2}\sup\limits_{y\in B_\varepsilon(x)} u^\varepsilon(y) + \frac{1}{2}\inf\limits_{y\in B_\varepsilon(x)} u^\varepsilon(y)\right\}\right\} & si\ x\in\Omega, \\ v^\varepsilon(x) = \varepsilon^2 u^\varepsilon(x) + (1-\varepsilon^2)\fint_{B_\varepsilon(x)} v^\varepsilon(y)dy & si\ x\in\Omega, \\ u^\varepsilon(x) = \overline{f}(x) \qquad si\ x\in\mathbb{R}^n\backslash\Omega, \\ v^\varepsilon(x) = \overline{g}(x) \qquad si\ x\in\mathbb{R}^n\backslash\Omega. \end{cases}$$

Si lográsemos tener un límite uniforme llegaríamos a soluciones del sistema,

$$\begin{cases} \max\{v(x)-u(x);\ \Delta_\infty u(x)\} = 0 & si\ x\in\Omega, \\ -\Delta v(x) + v(x) - u(x) = 0 & si\ x\in\Omega, \\ u(x) = f(x) & si\ x\in\partial\Omega, \\ v(x) = g(x) & si\ x\in\partial\Omega. \end{cases}$$

Para este problema hay que suponer que

$$f(x)\geq g(x), \qquad x\in\partial\Omega,$$

para tener chances de tener una solución continua hasta el borde (observemos que de la ecuación tenemos $v(x)-u(x)\leq 0$ para $x\in\Omega$).

Si es el jugador II (el que quiere minimizar) el que tiene la decisión de saltar se obtendría una ecuación de la forma

$$\min\{v(x)-u(x);\ \Delta_\infty u(x)\} = 0.$$

Referencias

[1] T. Antunovic, Y. Peres, S. Sheffield, y S. Somersille. *Tug-of-war and infinity Laplace equation with vanishing Neumann boundary condition*. Comm. Partial Differential Equations, 37(10), 2012, 1839–1869.

[2] S. N. Armstrong y C. K. Smart. *An easy proof of Jensen's theorem on the uniqueness of infinity harmonic functions.* Calc. Var. Partial Differential Equations 37(3-4) (2010), 381–384.

[3] P. Blanc y J. D. Rossi. *Games for eigenvalues of the Hessian and conca- ve/convex envelopes.* J. Math. Pures et Appliquees. 127, (2019), 192–215.

[4] P. Blanc y J. D. Rossi. Game Theory and Partial Differential Equations. De Gruyter Series in Nonlinear Analysis and Applications Vol. 31. 2019. ISBN 978-3-11-061925-6. ISBN 978-3-11-062179-2 (eBook).

[5] C. Bjorland, L.A. Caffarelli y A. Figalli. *Nonlocal tug-of-war and the infinty fractional Laplacian*. Comm. Pure Appl. Math. 65(3), (2012), 337–380.

[6] F. Charro, J. Garcia Azorero y J. D. Rossi. *A mixed problem for the infinity laplacian via Tug-of-War games.* Calc. Var. Partial Differential Equations, 34(3), (2009), 307–320.

[7] M.G. Crandall; H. Ishii y P.L. Lions. *User's guide to viscosity solutions of second order partial differential equations*. Bull. Amer. Math. Soc. 27 (1992), 1–67.

[8] J.L. Doob, *What is a martingale ?*, Amer. Math. Monthly, 78 (1971), no. 5, 451–463.

[9] B. Kawohl, J.J. Manfredi, y M. Parviainen. *Solutions of nonlinear PDEs in the sense of averages*. J. Math. Pures Appl. 97(3), (2012), 173–188.

[10] Q. Liu y A. Schikorra. *General existence of solutions to dynamic programming principle.* Commun. Pure Appl. Anal. 14 (2015), no. 1, 167–184.

[11] G. Lu y P. Wang. *Inhomogeneous infinity Laplace equation.* Adv. Math., 217, (2008), 1838–1868.

[12] J. J. Manfredi, M. Parviainen y J. D. Rossi. *An asymptotic mean value characterization for p-harmonic functions*. Proc. Amer. Math. Soc. 138 (2010), no. 3, 881–889.

[13] J. J. Manfredi, M. Parviainen y J. D. Rossi. *Dynamic programming principle for tug-of-war games with noise.* ESAIM, Control, Opt. Calc. Var., 18, (2012), 81–90.

[14] J. J. Manfredi, M. Parviainen y J. D. Rossi. *On the definition and properties of p-harmonious functions.* Ann. Scuola Nor. Sup. Pisa, 11, (2012), 215–241.

[15] H. Mitake y H. V. Tran, *Weakly coupled systems of the infinity Laplace equations*, Trans. Amer. Math. Soc. 369 (2017), 1773–1795.

[16] Y. Peres, O. Schramm, S. Sheffield y D. Wilson, *Tug-of-war and the infinity Laplacian.* J. Amer. Math. Soc., 22, (2009), 167–210.

[17] Y. Peres y S. Sheffield, *Tug-of-war with noise: a game theoretic view of the p-Laplacian*, Duke Math. J., 145(1), (2008), 91–120.

[18] J. D. Rossi. *Tug-of-war games and PDEs.* Proc. Royal Soc. Edim. 141A, (2011), 319–369.

[19] D. Williams, Probability with martingales, Cambridge University Press, Cambridge, 1991.