UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Departamento de Matemática

Tesis de Licenciatura

Una generalización del Teorema de Puiseux

María Solange Scelza

Directora: Dra. Gabriela Jeronimo

Julio de 2017

Índice general

Introducción **3**

1. Teorema de Puiseux **5**
1.1. Series de potencias fraccionarias 5
1.1.1. Series formales de potencias 5
1.1.2. El cuerpo $K(x)^*$ de series de potencias fraccionarias 8
1.2. Teorema de Puiseux 9
1.2.1. Polígono de Newton 9
1.2.2. Demostración del teorema principal 10
1.2.3. Ejemplo 20
1.2.4. Raíces múltiples 24

2. Una generalización a varias variables **28**
2.1. Construcciones y definiciones preliminares 28
2.1.1. Polinomios en varias variables y polítopos 28
2.1.2. Conos y anillos de series formales 31
2.1.3. Conos duales 33
2.1.4. Conos asociados a polítopos 34
2.2. Series de potencias fraccionarias para resolver ecuaciones algebraicas . . 41
2.2.1. Construcción recursiva de las series 42
2.2.2. Demostración del lema principal 45
2.2.3. El soporte de la serie 57
2.2.4. Solución de la ecuación 62
2.2.5. Soluciones y multiplicidad 65

Bibliografía **69**

Introducción

La resolución de ecuaciones polinomiales es un problema clásico que ha recobrado interés en los últimos años debido a las diversas aplicaciones en las que surgen ecuaciones de este tipo y a las nuevas posibilidades dadas por el desarrollo de la computación (ver [2], [3]). En este contexto, resulta importante el estudio de distintas maneras de representar a las soluciones de ecuaciones polinomiales en varias variables y métodos efectivos que permitan su determinación o aproximación.

En este trabajo, analizamos un método clásico para la determinación de soluciones de una ecuación del tipo $f(x, y) = 0$, con f un polinomio en dos variables con coeficientes en un cuerpo algebraicamente cerrado K, y una generalización de este método para la determinación de soluciones de una ecuación polinomial en varias variables con coeficientes complejos. Más precisamente, dada una ecuación del tipo $F(x_1, \ldots, x_N, x_{N+1}) = 0$, con F un polinomio con coeficientes complejos, el objetivo es hallar una solución, considerando como incógnita a la variable x_{N+1}, que esté representada en función de $x_1, \ldots, x_N$.

En el caso $N = 1$, un procedimiento para calcular soluciones de $f(x, y) = 0$ ya era conocido por Newton y fue posteriormente formalizado por V. Puiseux [5]. Estas soluciones pertenecen al cuerpo de series de potencias en una variable con coeficientes en K y exponentes fraccionarios llamadas *series de Puiseux*, que resulta ser un cuerpo algebraicamente cerrado. El primer capítulo de esta tesis está dedicado a la presentación de este resultado, conocido como *Teorema de Puiseux*.

La demostración del Teorema de Puiseux que presentaremos sigue el desarrollo de [6, Capítulo IV]. Se trata de una demostración constructiva que produce recursivamente, término a término, una serie de Puiseux que es solución de la ecuación $f(x, y) = 0$. La herramienta fundamental utilizada es un objeto geométrico, llamado el *polígono de Newton* de f. A partir de segmentos de polígonos de Newton se determinan, sucesivamente, los exponentes de los términos de la serie y, en cada paso de la recursión, para

el segmento elegido, se obtiene una ecuación polinomial en una variable cuyos ceros son los posibles valores para el coeficiente del término correspondiente.

John McDonald, en [4], dio una generalización del método de Newton-Puiseux al caso de ecuaciones polinomiales $F(x_1, \ldots, x_N, x_{N+1}) = 0$ con $N > 1$. Esta generalización se basa en considerar sumas formales de términos de la forma $c_I x_1^{i_1} \ldots x_N^{i_N}$ con exponentes $I = (i_1, \ldots, i_N)$ en un cono C de $\mathbb{R}^N$ que no contiene rectas (esta condición sobre el cono asegura que el conjunto formado por todas las series de este tipo es un anillo).

McDonald probó que, dado un polinomio $F \in \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_N, x_{N+1}]$, puede hallarse un cono $C \subset \mathbb{R}^N$ tal que el anillo de series correspondiente contiene una solución $x_{N+1} = \Phi(x_1, \ldots, x_N)$ de la ecuación $F(x_1, \ldots, x_N, x_{N+1}) = 0$. Más aún, mostró cómo este cono y la serie Φ pueden obtenerse a partir del *polítopo de Newton* de F, extendiendo el método de Newton-Puiseux. Si bien los anillos de series formales considerados por McDonald no son cuerpos, más recientemente, en [1], se probó que ciertas uniones infinitas de estos anillos dan lugar a cuerpos algebraicamente cerrados.

El segundo capítulo de este trabajo está dedicado a dar una demostración detallada del resultado principal de [4]. En primer lugar, introduciremos los objetos algebraicos y geométricos en los que se basa la construcción y probaremos algunas propiedades básicas que serán de utilidad. A continuación, describiremos el método recursivo mediante el cual se obtiene una serie de potencias fraccionarias $\Phi(x_1, \ldots, x_N)$ que es solución de la ecuación $F(x_1, \ldots, x_N, x_{N+1}) = 0$ y, finalmente, daremos una demostración de su validez.

Capítulo 1

Teorema de Puiseux

El objetivo de este capítulo es presentar una demostración del Teorema de Puiseux acerca de las soluciones de una ecuación polinomial en dos variables, $f(x, y) = 0$, con f un polinomio con coeficientes en un cuerpo algebraicamente cerrado K. El teorema establece que las soluciones en la variable y, vistas como funciones de la variable x, pueden representarse como ciertas series de potencias con exponentes fraccionarios y coeficientes en K, conocidas como *series de Puiseux*.

La demostración del teorema que daremos, siguiendo el desarrollo de [6, Capítulo IV], es constructiva y se basa en la utilización del llamado *polígono de Newton* del polinomio f.

1.1. Series de potencias fraccionarias

1.1.1. Series formales de potencias

Sea D un dominio. Un polinomio sobre D en una variable es una suma formal finita, $a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$, donde $a_i \in D$ para todo $0 \leq i \leq n$ y x es una indeterminada. Si permitimos sumas infinitas de este tipo

$$a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n$$

obtenemos expresiones llamadas *series formales de potencias* sobre D. Estas series pueden sumarse y multiplicarse de la misma manera que los polinomios:

$$\Big(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\Big) + \Big(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n\Big) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) x^n$$

$$\Big(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\Big) \cdot \Big(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n\Big) = \sum_{n=0}^{\infty} \Big(\sum_{i+j=n} a_i b_j\Big) x^n$$

y con estas operaciones constituyen un dominio que será notado $D[[x]]$.

Lema 1.1.1 *Una serie formal de potencias $a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + \ldots$ es una unidad en $D[[x]]$ si y sólo si a_0 es una unidad en D.*

Demostración. Llamemos $f = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + \ldots$.

Supongamos que existe $g = b_0 + b_1 x + \cdots + b_m x^m + \cdots \in D[[x]]$ tal que

$$f.g = c_0 + c_1 x + \cdots + c_s x^s + \cdots = 1.$$

De aquí se deduce que

$$a_0 b_0 = c_0 = 1.$$

Así, a_0 es una unidad en D.

Ahora supongamos que a_0 es una unidad en D; es decir, que existe un elemento $a_0^{-1} \in D$ tal que $a_0 a_0^{-1} = 1$. Estamos buscando una serie $g = b_0 + b_1 x + \cdots + b_m x^m + \ldots$ en $D[[x]]$ tal que $f.g = 1$. Para definirla, procedemos como sigue:

- tomamos $b_0 = a_0^{-1} \in D$ de modo que $a_0 b_0 = 1$;
- para que $a_1 b_0 + a_0 b_1 = 0$, tomamos $b_1 = -a_0^{-1} a_1 b_0$;
- para que $a_1 b_1 + a_0 b_2 + a_2 b_0 = 0$, tomamos $b_2 = -a_0^{-1}(a_1 b_1 + a_2 b_0) \in D$;
- en general, para cada $n \geq 2$, para que $a_n b_0 + a_{n-1} b_1 + \cdots + a_1 b_{n-1} + a_0 b_n = 0$, tomamos $b_n = -a_0^{-1}(a_n b_0 + a_{n-1} b_1 + \cdots + a_1 b_{n-1}) \in D$.

Es claro que la serie g construida de este modo verifica que $fg = 1$ en $D[[x]]$. □

En lo que sigue, trabajaremos con el anillo de series formales de potencias con coeficientes en un cuerpo K y con su cuerpo de fracciones, que notaremos $K((x))$.

Lema 1.1.2 *Si K es un cuerpo, cualquier elemento del cuerpo de fracciones $K((x))$ de $K[[x]]$ puede escribirse en la forma*

$$\frac{a_0 + a_1x + \dots}{x^h}, \quad h \geq 0.$$

Demostración. Sea $f \in K((x))$, $f \neq 0$. Supongamos que

$$f = \frac{b_0 + b_1x + \cdots}{c_0 + c_1x + \cdots} \in K((x)),$$

y sea h el menor entero para el cual $c_h \neq 0$. Como K es un cuerpo, c_h es una unidad en K, y así, por el lema anterior, $c_h + c_{h+1}x + c_{h+2}x^2 + \cdots$ tiene una inversa $d_0 + d_1x + \cdots$. Luego

$$f = \frac{(b_0 + b_1x + \dots)(d_0 + d_1x + \dots)}{x^h(c_h + c_{h+1}x + \dots)(d_0 + d_1x + \dots)} = \frac{a_0 + a_1x + \dots}{x^h}.$$

□

En consecuencia, $K((x))$ consiste de todas las series de potencias formales con una cantidad finita de términos con exponentes negativos. Estas series pueden sumarse y multiplicarse de la misma manera que los elementos de $K[[x]]$.

Cada elemento no nulo de $K((x))$ puede expresarse de manera única en la forma

$$f = x^k(a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n + \cdots)$$

donde $k \in \mathbb{Z}$ y $a_0 \neq 0$. El entero k se dice que es el *orden de* f, y será notado con $O(f)$. Será conveniente definir $O(0) = \infty$, donde el símbolo ∞ tiene las propiedades $\infty > n$, $\infty + n = n + \infty = \infty$, para cada entero n, y $\infty + \infty = \infty$.

Con estas definiciones, observemos que, para todos los elementos f y g de $K((x))$, se tiene que:

- $O(fg) = O(f) + O(g)$,
- $O(f \pm g) \geq \text{mín}\{O(f), O(g)\}$; más aún, cuando $O(f) \neq O(g)$ vale la igualdad.

1.1.2. El cuerpo $K(x)^*$ de series de potencias fraccionarias

A continuación vamos a presentar una generalización de la noción de serie de potencias.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, introducimos el símbolo $x^{\frac{1}{n}}$. Introducimos también las siguientes relaciones entre estos símbolos para $n \in \mathbb{N}$:

$$x^{\frac{1}{1}} = x, \quad (x^{\frac{1}{rn}})^r = x^{\frac{1}{n}} \quad \text{para todo } r \in \mathbb{N}.$$

Escribiremos, para cada entero m,

$$x^{\frac{m}{n}} = (x^{\frac{1}{n}})^m.$$

Como $(x^{\frac{1}{rn}})^r = x^{\frac{1}{n}}$, cualquier serie de potencias en el símbolo $x^{\frac{1}{n}}$, puede pensarse como una serie escrita en potencias de $(x^{\frac{1}{rn}})^r$. De aquí, se sigue que $K((x^{\frac{1}{n}})) \subseteq K((x^{\frac{1}{rn}}))$. Consideremos la unión de todos los conjuntos $K((x^{\frac{1}{n}})), n = 1, 2, \ldots$. Denotamos a este conjunto

$$K(x)^* = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} K((x^{\frac{1}{n}})).$$

Lema 1.1.3 *El conjunto de series de potencias fraccionarias $K(x)^*$ es un cuerpo.*

Demostración. Si $\bar{a}$ y $\bar{b}$ son dos elementos de $K(x)^*$, entonces existen m y n en $\mathbb{N}$, tales que $\bar{a} \in K((x^{\frac{1}{m}}))$ y $\bar{b} \in K((x^{\frac{1}{n}}))$. Así $\bar{a}$, $\bar{b} \in K((x^{\frac{1}{nm}}))$ y, por lo tanto, su suma y producto están definidos en $K((x^{\frac{1}{nm}}))$; luego, pertenecen a $K(x)^*$. De este modo, se tienen una suma y un producto definidos en $K(x)^*$.

Asimismo, si $\bar{a} \neq 0$, entonces $\bar{a}$ tiene inverso definido en $K((x^{\frac{1}{m}}))$, que resulta ser el inverso en $K(x)^*$ con el producto definido anteriormente.

Como consecuencia de las propiedades de la suma y el producto de $K((x^{\frac{1}{n}}))$ para $n \in \mathbb{N}$, se sigue que, con las operaciones definidas, $K(x)^*$ es un cuerpo. □

Dado un elemento $\bar{a} \in K(x)^*$ no nulo, si

$$\bar{a} = a_1 x^{\frac{\rho_1}{n_1}} + a_2 x^{\frac{\rho_2}{n_2}} + \cdots + a_i x^{\frac{\rho_i}{n_i}} + \cdots,$$

donde

$$\frac{\rho_1}{n_1} < \frac{\rho_2}{n_2} < \ldots < \frac{\rho_i}{n_i} < \ldots \quad \text{y} \quad a_1 \neq 0,$$

definimos el *orden de* $\bar{a}$ como

$$O(\bar{a}) = \frac{\rho_1}{n_1}.$$

El conjunto de los elementos de $K(x)^*$ de orden no negativo es un dominio, que notaremos $K[x]^*$. Si $\bar{a} \in K[x]^*$, el coeficiente de x^0 en $\bar{a}$ será designado por $\bar{a}(0)$. Es claro que $\bar{a}(0) \neq 0$ si y sólo si $O(\bar{a}) = 0$.

1.2. Teorema de Puiseux

El resultado principal de este capítulo es el siguiente:

Teorema 1.2.1 *Sea K un cuerpo algebraicamente cerrado. Entonces, el cuerpo $K(x)^*$ es algebraicamente cerrado.*

Presentaremos en detalle la demostración de este teorema dada en [6, Capítulo IV]. Una construcción que resulta fundamental para esta demostración es la del *polígono de Newton* de un polinomio en una variable con coeficientes en $K(x)^*$, que introducimos a continuación.

1.2.1. Polígono de Newton

Sea $f \in K(x)^*[y]$ un polinomio de grado positivo,

$$f = \bar{a}_0 + \bar{a}_1 y + \cdots + \bar{a}_n y^n, \tag{1.1}$$

con $\bar{a}_i \in K(x)^*, \bar{a}_n \neq 0, n > 0$.

Para $i = 0, \ldots, n$, graficamos en un sistema de coordenadas cartesianas los puntos $P_i = (i, \alpha_i)$ con $\alpha_i = O(\bar{a}_i)$ (si $\alpha_i = \infty$, omitimos el punto P_i). Luego, unimos P_0 con P_n con un arco poligonal convexo, donde cada uno de sus vértices es uno de los puntos P_i y tal que ningún P_i se encuentre por debajo del arco. La poligonal así construida se llama el *polígono de Newton de f*. Vale aclarar que si $\bar{a}_0 = \cdots = \bar{a}_{e-1} = 0, \bar{a}_e \neq 0$, de manera que f tiene al cero como raíz con multiplicidad e, comenzamos el polígono con P_e en lugar de P_0.

La figura siguiente muestra el polígono de Newton de un polinomio como en (1.1), de grado $n = 8$ y tal que

$$\alpha_0 = 5, \alpha_1 = \frac{7}{2}, \alpha_2 = 1, \alpha_3 = -1, \alpha_4 = \infty, \alpha_5 = -\frac{1}{2}, \alpha_6 = \frac{1}{2}, \alpha_7 = \frac{10}{3}, \alpha_8 = \frac{5}{2}.$$

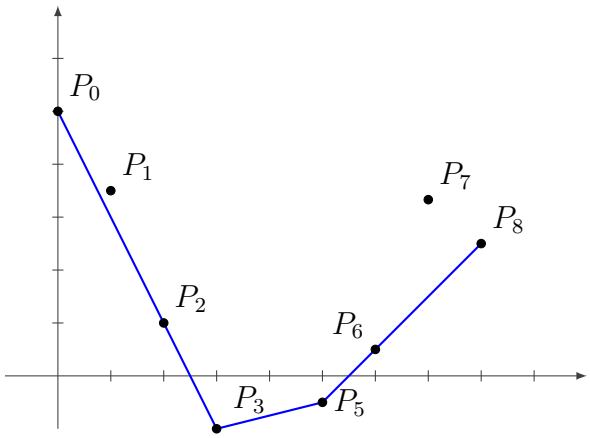


Figura 1

Observemos que si L es una recta que contiene a alguno de los segmentos del polígono de Newton de f, todos los puntos $P_i = (i, \alpha_i)$ asociados a los coeficientes de f quedan en el semiplano superior determinado por L.

1.2.2. Demostración del teorema principal

Estamos en condiciones de dar la demostración del Teorema 1.2.1.

Demostración. Queremos mostrar que si $f(x, y)$ es un elemento de $K(x)^*[y]$ pero no de $K(x)^*$, entonces hay un $\bar{y} \in K(x)^*$ tal que $f(x, \bar{y}) = 0$.

Supongamos que

$$f(x, y) = \bar{a}_0 + \bar{a}_1 y + \cdots + \bar{a}_n y^n,$$

con $\bar{a}_i \in K(x)^*, \bar{a}_n \neq 0, n > 0$.

Estableceremos, en primer lugar, condiciones necesarias sobre $\bar{y}$ para que resulte ser una raíz de $f(x, y) = 0$.

Si $\bar{y} \in K(x)^*$ satisface $f(x, \bar{y}) = 0$, entonces $\bar{y}$ puede ser cero si y sólo si $\bar{a}_0 = 0$. Así consideraremos solamente el caso $\bar{y} \neq 0$. Luego, podemos escribir $\bar{y}$ de la forma

$$\bar{y} = c_1 x^{\gamma_1} + c_2 x^{\gamma_1+\gamma_2} + c_3 x^{\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3} + \cdots, \tag{1.2}$$

con $c_i \neq 0$ para todo i, $\gamma_2 > 0, \gamma_3 > 0, \ldots$; y el conjunto de c_i podría ser finito o infinito. Abreviemos, por ahora, la expresión para $\bar{y}$ como

$$\bar{y} = x^{\gamma}(c + \bar{y}_1),$$

donde $\gamma = \gamma_1$, $c = c_1$, $\bar{y}_1 = c_2 x^{\gamma_2} + c_3 x^{\gamma_2+\gamma_3} + \cdots$.

Luego,

$$\begin{aligned} f(x, \bar{y}) &= \bar{a}_0 + \bar{a}_1 x^{\gamma}(c + \bar{y}_1) + \cdots + \bar{a}_n x^{n\gamma}(c + \bar{y}_1)^n \\ &= \bar{a}_0 + c\bar{a}_1 x^{\gamma} + \cdots + c^n \bar{a}_n x^{n\gamma} + g(x, \bar{y}_1), \end{aligned}$$

donde g contiene todos los términos que involucran a $\bar{y}_1$. Observamos que, como $O(\bar{y}_1) = \gamma_2 > 0$, cada término que aparece en g tiene orden mayor que el de alguno de los $c^i \bar{a}_i x^{i\gamma}$.

Para cada i, $0 \leq i \leq n$, si $O(\bar{a}_i) = \alpha_i < \infty$, escribimos $\bar{a}_i = a_i x^{\alpha_i} + \cdots$.

Como una condición necesaria para que $f(x, \bar{y}) = 0$ es que los términos de menor orden se cancelen, debemos tener que:

i) Al menos dos de los $c^i \bar{a}_i x^{i\gamma}$ tienen el mismo orden, siendo este orden el menor de los órdenes de los $c^i \bar{a}_i x^{i\gamma}$ (pues si llamamos o al menor de los órdenes de los términos de g, sabemos que algún $c^i \bar{a}_i x^{i\gamma}$ tiene orden menor estricto que o y, por lo tanto, este último no podrá ser cancelado por ninguno de los términos de g). Es decir, hay al menos dos índices, j y k, tales que

$$O(c^j \bar{a}_j x^{j\gamma}) = O(c^k \bar{a}_k x^{k\gamma}) \leq O(c^i \bar{a}_i x^{i\gamma}), \quad \forall\, i = 0, \ldots, n,$$

o, equivalentemente,

$$\alpha_j + j\gamma = \alpha_k + k\gamma \leq \alpha_i + i\gamma, \quad \forall\, i = 0, \ldots, n. \tag{1.3}$$

ii) Los coeficientes de todos los términos que tienen el orden más chico deben cancelarse, esto es,

$$\sum a_h c^h = 0. \tag{1.4}$$

donde sumamos sobre todos los valores de h para los cuales $\alpha_h + h\gamma = \alpha_j + j\gamma$.

Para determinar los posibles valores de γ que satisfacen (1.3) usaremos el polígono de Newton de f. Para $i = 0, \ldots, n$, consideremos el punto $P_i = (i, \alpha_i)$, donde recordemos que $\alpha_i = O(\bar{a}_i)$ (si $\alpha_i = \infty$, omitimos el punto P_i).

La condición (1.3) establece que hay un valor β tal que todos los P_i están sobre o por arriba de la recta L de ecuación $y + \gamma x = \beta$, y al menos dos de estos puntos, P_j y P_k, están sobre L. Entonces, las únicas elecciones posibles para L son las que contienen

a los segmentos del polígono de Newton de f. Así, los posibles valores de γ quedan determinados por las pendientes de los segmentos de este polígono de Newton (notar que estas magnitudes tienen signo contrario).

Para un valor dado de γ, y así para una recta L dada, el valor de c debe satisfacer la ecuación (1.4); más precisamente,

$$\sum_{0\leq h\leq n:\, P_h\in L} a_h c^h = 0.$$

Así, tenemos determinadas las condiciones necesarias sobre el exponente γ_1 y el coeficiente c_1 que forman el primer término de la solución (1.2).

Para proceder de la misma manera y hallar condiciones para γ_2 y c_2, ponemos

$$f_1(x, y_1) := x^{-\beta_1} f(x, x^{\gamma_1}(c_1 + y_1)),$$

donde $y+\gamma_1 x = \beta_1$ es la recta que contiene al segmento elegido del polígono de Newton de f, y buscamos una raíz $\bar{y}_1$ de $f_1(x, y_1) = 0$.

Notemos que si $\bar{y}_1$ es raíz de f_1, entonces $x^{\gamma_1}(c_1 + \bar{y}_1)$ será raíz de f. La idea es aplicar el procedimiento anterior a f_1 para obtener condiciones sobre el orden y el primer coeficiente de $\bar{y}_1$: γ_2 y c_2 respectivamente. De esta manera, se irán obteniendo recursivamente condiciones sobre todos los γ_i y c_i que dan los sucesivos sumandos de $\bar{y}$. Como queremos que $\gamma_2 > 0$, al aplicar el procedimiento anterior a f_1, debemos considerar solamente segmentos de su polígono de Newton que tengan pendiente negativa, y lo mismo para cada $i \geq 2$.

Mostraremos ahora que el proceso recursivo explicado arriba puede aplicarse a cualquier polinomio de la forma (1.1) para construir una raíz de la ecuación $f(x, y) = 0$. Tenemos que demostrar tres cosas:

1) en cada etapa del proceso, la ecuación (1.4) tiene solución no nula (así garantizamos la existencia de los c_i);

2) después del primer paso, el polígono de Newton tiene al menos un segmento con pendiente negativa (así garantizamos que $\gamma_i > 0, i = 2, \dots$);

3) después de una cantidad finita de pasos, todos los γ_i tienen un denominador común (así garantizamos que las raíces encontradas pertenecen a $K((x^{\frac{1}{m_0}}))$ para algún m_0 y, por lo tanto, pertenecen a $K(x)^*$).

La primera afirmación es consecuencia de que el polinomio que da la ecuación $\sum_{0\leq h\leq n:P_h\in L} a_h c^h = 0$ tiene al menos dos términos (ya que la recta L contiene al menos dos de los puntos P_j y P_k) y, como K es algebraicamente cerrado, la ecuación tiene una o más soluciones no nulas (si la ecuación tuviera como única raíz al cero, constaría de un solo término).

Para mostrar que se satisfacen las otras condiciones debemos hacer una investigación más profunda del polígono de Newton.

En primer lugar, notemos que como cada $\bar{a}_i$, $i = 0, \ldots, n$, es un elemento de algún $K((x^{\frac{1}{n_i}}))$, existe un $m \in \mathbb{N}$ tal que todos los $\bar{a}_i \in K((x^{\frac{1}{m}}))$. Así tenemos $\alpha_i = \frac{\rho_i}{m}$. Si $P_j = (j, \alpha_j)$ y $P_k = (k, \alpha_k)$ son los extremos izquierdo y derecho, respectivamente, del segmento elegido del polígono de Newton de f (segmento incluido en la recta L: $y + \gamma_1 x = \beta_1$), entonces

$$\alpha_j + j\gamma_1 = \alpha_k + k\gamma_1,$$

con lo cual,

$$\gamma_1 = \frac{\alpha_j - \alpha_k}{k - j} = \frac{\rho_j - \rho_k}{m(k - j)} = \frac{p}{mq},$$

donde $q > 0$ y p y q son enteros coprimos. Si $P_h = (h, \alpha_h)$ es otro punto que está sobre L, tenemos también

$$\frac{p}{mq} = \gamma_1 = \frac{\alpha_j - \alpha_h}{h - j} = \frac{\rho_j - \rho_h}{m(h - j)}.$$

Así,

$$q(\rho_j - \rho_h) = p(h - j),$$

y como p y q no tienen factores comunes, q divide a $h - j$ (por ejemplo, $h - j = q.s$, donde $s > 0$, pues $h > j$ y $q > 0$). Así, para cada P_h sobre L tenemos $h = j + sq$, donde s es un entero no negativo (notemos que $s = 0$, para P_j).

Por lo tanto, la ecuación (1.4) tiene la forma

$$c^j \Phi(c^q) = 0, \tag{1.5}$$

(sacando en cada término c^j de factor común) donde $\Phi(t)$ es un polinomio de grado $\frac{k-j}{q}$ tal que $\Phi(0) \neq 0$. Si $c_1 \neq 0$ es una raíz de multiplicidad r, $r \geq 1$, de $\Phi(t^q)$, tenemos que

$$\Phi(t^q) = (t - c_1)^r \Psi(t), \quad \text{con } \Psi(c_1) \neq 0.$$

Ahora,

$$\begin{aligned} f_1(x,y_1) &= x^{-\beta_1} f(x, x^{\gamma_1}(c_1+y_1)) \\ &= x^{-\beta_1}\Big(\bar{a}_0 + \bar{a}_1 x^{\gamma_1}(c_1+y_1) + \cdots + \bar{a}_n x^{n\gamma_1}(c_1+y_1)^n\Big) \\ &= x^{-\beta_1} \sum_{0\le h\le n: P_h\in L} \bar{a}_h x^{h\gamma_1}(c_1+y_1)^h + x^{-\beta_1} \sum_{0\le l\le n: P_l\notin L} \bar{a}_l x^{l\gamma_1}(c_1+y_1)^l. \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que $\bar{a}_h = a_h x^{\alpha_h} + \cdots$,

$$\begin{aligned} f_1(x,y_1) &= x^{-\beta_1} \sum_{h:P_h\in L} a_h x^{\alpha_h + h\gamma_1}(c_1+y_1)^h + \\ &\quad + x^{-\beta_1}\left(\sum_{h:P_h\in L} (\bar{a}_h - a_h x^{\alpha_h}) x^{h\gamma_1}(c_1+y_1)^h + \sum_{l:P_l\notin L} \bar{a}_l x^{l\gamma_1}(c_1+y_1)^l \right). \end{aligned}$$

Como $\alpha_h + h\gamma_1 = \beta_1$ para los h correspondientes a puntos en L, la primera suma (antes de multiplicarla por $x^{-\beta_1}$) se reduce a

$$x^{\beta_1} \sum_{h:P_h\in L} a_h (c_1+y_1)^h = x^{\beta_1}(c_1+y_1)^j \Phi((c_1+y_1)^q) = x^{\beta_1} y_1^r (c_1+y_1)^j \Psi(c_1+y_1).$$

Luego, podemos escribir

$$f_1(x,y_1) = y_1^r (c_1+y_1)^j \Psi(c_1+y_1) + g(x,y_1),$$

donde

$$g(x,y_1) = x^{-\beta_1}\left(\sum_{h:P_h\in L} (\bar{a}_h - a_h x^{\alpha_h}) x^{h\gamma_1}(c_1+y_1)^h + \sum_{l:P_l\notin L} \bar{a}_l x^{l\gamma_1}(c_1+y_1)^l \right).$$

Usando:

- el desarrollo del polinomio $(c_1+y_1)^j \Psi(c_1+y_1)$ en potencias de y_1;
- que $O(\bar{a}_h - a_h x^{\alpha_h}) > \alpha_h$ (de donde resulta que, para cada h tal que $P_h \in L$, $(\bar{a}_h - a_h x^{\alpha_h}) x^{h\gamma_1}$ tiene orden mayor que $\alpha_h + h\gamma_1 = \beta_1$);

- que $O(\bar{a}_l x^{l\gamma_1}) = \alpha_l + l\gamma_1 > \beta_1$, para cada l tal que $P_l \notin L$;

obtenemos

$$f_1(x, y_1) = b_1 y_1^r + b_2 y_1^{r+1} + \cdots + g(x, y_1),$$

donde $b_1 = c_1^j \Psi(c_1) \neq 0$ y cada potencia de y_1 en $g(x, y_1)$ tiene un coeficiente de orden positivo.

Así, si escribimos

$$f_1(x, y_1) = \bar{b}_0 + \bar{b}_1 y_1 + \cdots + \bar{b}_n y_1^n,$$

tenemos que

- $O(\bar{b}_i) \geq 0$, si $i = 0, \ldots, n$
- $O(\bar{b}_i) > 0$, si $i = 0, \ldots, r-1$ (estos $\bar{b}_i$ "provienen de g")
- $O(\bar{b}_r) = 0$.

Notemos que $\bar{b}_r$ se obtiene al sumar b_1 (que tiene orden nulo) y el coeficiente de y_1^r de g (que tiene orden > 0).

En consecuencia, el arco P_0P_r del polígono de Newton de f_1 está formado por segmentos de pendiente negativa, los que corresponden a valores de $\gamma_2 > 0$.

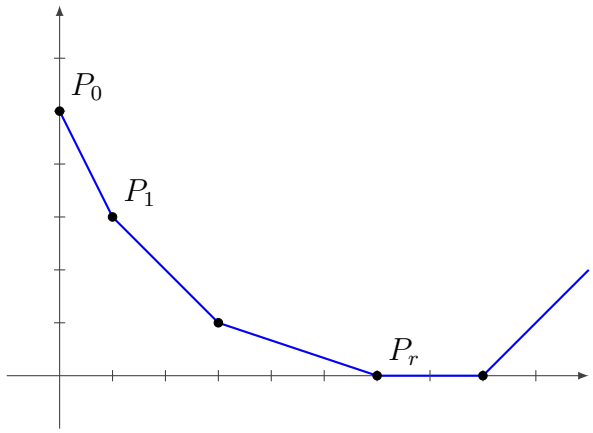


Figura 2

En particular, hay al menos una elección de $\gamma_2 > 0$ excepto en el caso en el cual $\bar{b}_0 = \cdots = \bar{b}_{r-1} = 0$. En este caso particular tenemos la raíz $\bar{y}_1 = 0$ o $\bar{y} = c_1 x^{\gamma_1}$. En cualquier otro caso el proceso puede continuar: ponemos $y_1 = x^{\gamma_2}(c_2 + y_2)$, usando uno de los valores positivos de $\gamma_2 > 0$ que se obtienen del arco P_0P_r del polígono de Newton de $f_1(x, y_1)$.

Para terminar la demostración de las tres afirmaciones enunciadas tenemos que mostrar que los γ_i, $i \in \mathbb{N}$, tienen denominadores acotados. Necesitaremos retomar algunas ideas.

Recordemos que

- $K((x^{\frac{1}{n_1}})) \subseteq K((x^{\frac{1}{n_1 n_2}}))$ para $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$,
- $\bar{y} \in K((x^{\frac{1}{n_1}}))$, $\bar{z} \in K((x^{\frac{1}{n_2}}))$, entonces $\bar{y}.\bar{z} \in K((x^{\frac{1}{n_1 n_2}}))$.

Con esto, usando que los $\bar{a}_i \in K((x^{\frac{1}{m}}))$ para $i = 1, \ldots, n$ y que $x^{\gamma_1} \in K((x^{\frac{1}{mq}}))$, tenemos que

$$f(x, x^{\gamma_1}(c_1 + y_1)) = \bar{a}_0 + \bar{a}_1 x^{\gamma_1}(c_1 + y_1) + \cdots + \bar{a}_n x^{n\gamma_1}(c_1 + y_1)^n \in K((x^{\frac{1}{mq}}))[y_1]$$

y, como $\beta_1 = \alpha_h + h\gamma_1$ y dado que α_h y γ_1 tienen como denominador común a mq, tenemos que

$$x^{-\beta_1} \in K(x^{\frac{1}{mq}}). \tag{1.6}$$

En consecuencia,

$$x^{-\beta_1} f(x, x^{\gamma_1}(c_1 + y_1)) \in K((x^{\frac{1}{mq}}))[y_1].$$

Si llamamos $m_1 = mq$, resulta que

$$f_1(x, y_1) \in K((x^{\frac{1}{m_1}}))[y_1].$$

Este mismo argumento sirve para todos los pasos de la construcción: en cada paso, si

$$f_{i-1}(x, y_{i-1}) \in K((x^{\frac{1}{m_{i-1}}}))[y_{i-1}],$$

la pendiente del segmento elegido será de la forma

$$\gamma_i = \frac{p_i}{q_i m_{i-1}}.$$

Entonces, si $m_i = q_i m_{i-1}$, resulta que β_i tiene como denominador a m_i (este hecho se ve, por ejemplo, como lo hicimos para llegar a (1.6)) y, en consecuencia, $x^{-\beta_i} \in K(x^{\frac{1}{m_i}})$. Así,

$$f_i(x, y_i) = x^{-\beta_i} f_{i-1}(x, x^{\gamma_i}(c_i + y_i)) \in K((x^{\frac{1}{m_i}}))[y_i].$$

Resumiendo, para $i > 1$,

$$m_i = q_i m_{i-1} \quad \text{y} \quad f_i(x, y_i) \in K((x^{\frac{1}{m_i}}))[y_i]. \tag{1.7}$$

Por otra parte, en cada paso tendremos, como en (1.5), un polinomio $\Phi_i(t^{q_i})$ de grado igual a la longitud horizontal del segmento elegido en el polígono de Newton correspondiente, y una raíz $c_i \neq 0$ del polinomio $\Phi_i(t^{q_i}) = 0$ de multiplicidad $r_i \geq 1$. La idea es que como r_i es a lo sumo la longitud horizontal del segmento elegido en el polígono de Newton, y como el segmento elegido en el próximo paso debe tener una longitud horizontal de a lo sumo r_i -ya que debe ser un segmento del arco $P_0 P_{r_i}$- los valores de los r_i no pueden incrementarse paso a paso. Veamos esto detalladamente.

Tenemos

$$r_1 \leq \text{gr}(\Phi_1(t^{q_1})) = \text{ longitud del segmento elegido en el paso 1.} \tag{1.8}$$

En el paso 2, el polígono de Newton es análogo al de la Figura 2, donde aquí $r = r_1$. Luego,

$$\text{longitud del segmento elegido en el paso 2} \leq r_1. \tag{1.9}$$

Pero como la longitud del segmento elegido en el paso 2 es igual al grado del polinomio $\Phi_2(t^{q_2})$, resulta que

$$r_2 \leq \text{gr}(\Phi_2(t^{q_2})) = \text{ longitud del segmento elegido en el paso 2.} \tag{1.10}$$

Juntando lo visto en (1.8), (1.9) y (1.10) concluimos que

$$r_2 \leq r_1.$$

De la misma manera, haciendo inducción en i, si en el paso $i+1$-ésimo elegimos un segmento del arco $P_0 P_{r_i}$, construimos el polinomio $\Phi_{i+1}(t^{q_{i+1}})$, cuyo grado es la longitud del segmento, y r_{i+1} es la multiplicidad de la raíz c_{i+1} elegida de este polinomio, tenemos que

$$r_{i+1} \leq \text{gr}(\Phi_{i+1}(t^{q_{i+1}})) \leq r_i.$$

Concluimos que,

$$r_{i+1} \leq r_i \leq \cdots \leq r_2 \leq r_1$$

y, como $r_i \geq 0$ para todo $i \in \mathbb{N}$, la sucesión debe estacionarse.

Luego, después de un número finito de pasos, digamos a partir del paso i_0-ésimo, el polígono de Newton de $f_i(x, y_i)$ tiene un único segmento de pendiente negativa (ver Figura 3) y r_i tiene un valor constante r_0.

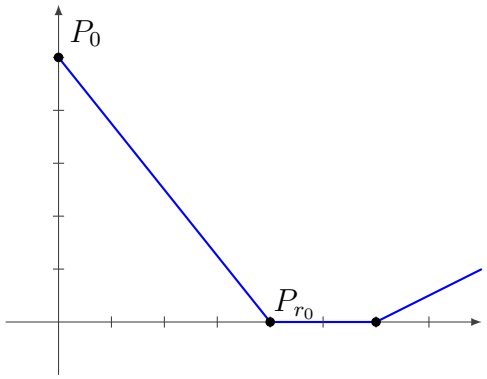


Figura 3

Así, todos los segmentos considerados a partir del paso i_0-ésimo, tienen la misma longitud horizontal, r_0, y como $\Phi_i(t^{q_i})$ es de grado r_0 y tiene a c_i como raíz de multiplicidad r_0, resulta que

$$\Phi_i(t^{q_i}) = d_i(t - c_i)^{r_0} = d_i t^{r_0} + \cdots \pm r_0 d_i c_i^{r_0 - 1} t \pm d_i c_i^{r_0}.$$

Como el cuerpo K es de característica cero y r_0, d_i, c_i son no nulos, resulta que el coeficiente lineal del polinomio es no nulo y, por lo tanto, t aparece en el polinomio a la potencia 1. Pero en el polinomio aparecen potencias de t^{q_i}. De ahí que $q_i = 1$.

Teniendo en cuenta todo lo anterior deducimos que, a partir del paso i_0-ésimo, tendremos que $q_i = 1$ y, como consecuencia de lo visto en (1.7),

$$m_i = m_{i_0} \quad \forall i \geq i_0.$$

Luego, para $i \geq i_0$,

$$\gamma_i = \frac{p_i}{m_{i_0}} \quad \text{y} \quad f_i(x, y_i) \in K((x^{\frac{1}{m_{i_0}}}))[y_i].$$

Es decir, a partir del paso i_0-ésimo, todos los denominadores de los γ_i son el mismo m_{i_0}. De aquí que la raíz de $f(x,y)$ construida es una serie de potencias en $x^{\frac{1}{m_{i_0}}}$.

Para terminar, veamos que la serie construida siguiendo el procedimiento anterior, $\bar{y} = c_1x^{\gamma_1} + c_2x^{\gamma_1+\gamma_2} + c_3x^{\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3} + \cdots$, satisface $f(x,\bar{y}) = 0$.

Recordemos que, por construcción,

(1) $f(x, x^{\gamma_1}(c_1 + y_1)) = x^{\beta_1}f_1(x, y_1)$;

(2) $f_{i-1}(x, x^{\gamma_i}(c_i + y_i)) = x^{\beta_i}f_i(x, y_i)$ para todo $i \geq 2$.

Y entonces, inductivamente, deducimos que

$$f(x, c_1x^{\gamma_1} + c_2x^{\gamma_1+\gamma_2} + \cdots + x^{\gamma_1+\cdots+\gamma_s}(c_s + y_s)) = x^{\beta_1+\beta_2+\cdots+\beta_s}f_s(x, y_s).$$

para todo $s \in \mathbb{N}$. En efecto:

- Para $s = 1$ es simplemente la definición (1) de f_1.
- Para $s \geq 2$, a partir de la igualdad

  $$f(x, c_1x^{\gamma_1} + c_2x^{\gamma_1+\gamma_2} + \cdots + x^{\gamma_1+\cdots+\gamma_{s-1}}(c_{s-1} + y_{s-1})) = x^{\beta_1+\beta_2+\cdots+\beta_{s-1}}f_{s-1}(x, y_{s-1}),$$

  especializando $y_{s-1} = x^{\gamma_s}(c_s + y_s)$ y teniendo en cuenta (2), se obtiene que

  $$\begin{aligned} &f(x, c_1x^{\gamma_1} + \cdots + x^{\gamma_1+\cdots+\gamma_{s-1}}c_{s-1} + x^{\gamma_1+\cdots+\gamma_{s-1}+\gamma_s}(c_s + y_s))) = \\ &= f(x, c_1x^{\gamma_1} + \cdots + x^{\gamma_1+\cdots+\gamma_{s-1}}(c_{s-1} + x^{\gamma_s}(c_s + y_s))) = \\ &= x^{\beta_1+\cdots+\beta_{s-1}}f_{s-1}(x, x^{\gamma_s}(c_s + y_s)) = x^{\beta_1+\cdots+\beta_{s-1}+\beta_s}f_s(x, y_s). \end{aligned}$$

Como consecuencia, tenemos que

$$f(x, c_1x^{\gamma_1} + c_2x^{\gamma_1+\gamma_2} + \cdots + c_sx^{\gamma_1+\cdots+\gamma_s}) = x^{\beta_1+\beta_2+\cdots+\beta_s}f_s(x, 0)$$

para todo $s \in \mathbb{N}$. En particular, comparando órdenes, deducimos que

$$\begin{aligned} O(f(x, c_1x^{\gamma_1} + c_2x^{\gamma_1+\gamma_2} + \cdots + c_sx^{\gamma_1+\cdots+\gamma_s})) &= O(x^{\beta_1+\beta_2+\cdots+\beta_s}f_s(x, 0)) \\ &\geq \beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_s, \end{aligned}$$

puesto que $O(f_s(x,0)) \geq 0$ para todo $s \in \mathbb{N}$.

Definamos, ahora, $B_s = \sum_{i=0}^{s} \beta_i$. Veamos que la sucesión $(B_s)_{s\in\mathbb{N}}$ tiende a $+\infty$. Recordemos que, a partir del paso i_0-ésimo, los denominadores de los β_i son el mismo $m_{i_0} \in \mathbb{N}$. Luego, podemos escribir

$$\beta_i = \frac{k_i}{m_{i_0}} \ \forall i \geq i_0$$

con $k_i \in \mathbb{N}$ si $i \geq 2$ (pues $\beta_i > 0$ para todo $i \geq 2$, pues son las ordenadas al origen de rectas de pendiente negativa que contienen segmentos que están en el primer cuadrante). Entonces,

$$B_s = B_{i_0} + \sum_{i=i_0+1}^{s} \beta_i \geq B_{i_0} + \frac{s - i_0}{m_{i_0}} \quad \forall\, s \geq i_0.$$

Luego, $\lim_{s\to+\infty} B_s = +\infty$, como queríamos.

Concluimos entonces que debe ser

$$O(f(x, c_1x^{\gamma_1} + c_2x^{\gamma_1+\gamma_2} + \cdots + c_ix^{\gamma_1+\cdots+\gamma_i} + \cdots)) = +\infty,$$

es decir, $f(x, \bar{y}) = 0$. □

1.2.3. Ejemplo

Veamos en un ejemplo la construcción descripta en la demostración del Teorema 1.2.1.

Consideremos

$$f(x,y) = (-x^3 + x^4) - 2x^2y - xy^2 + 2xy^4 + y^5.$$

Su polígono de Newton (ver Figura 4) es la poligonal convexa formada a partir de los puntos $P_0 = (0,3)$, $P_1 = (1,2)$, $P_2 = (2,1)$, $P_3 = (3,\infty)$, $P_4 = (4,1)$ y $P_5 = (5,0)$ como se explicó en la Sección 1.2.1. Tiene dos segmentos: el segmento P_0P_2 y el segmento P_2P_5.

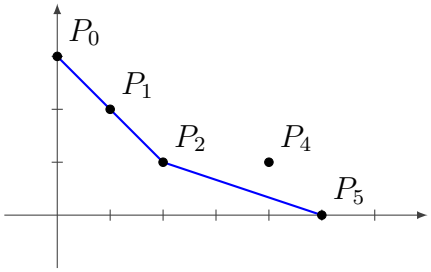


Figura 4

El segmento P_0P_2 está sobre la recta de ecuación $y + x = 3$, con lo cual, al elegir este segmento, tenemos que

$$\gamma_1 = 1 \quad \text{y} \quad \beta_1 = 3.$$

Así, $m = 1$, $p_1 = 1$ y $q_1 = 1$.

Luego, la ecuación (1.4) queda

$$-1 - 2c - c^2 = 0,$$

de donde en (1.5) obtenemos el polinomio

$$\Phi_1(t) = -(1 + t)^2.$$

De aquí que $c_1 = -1$ es raíz doble, y así $r_1 = 2$. Luego,

$$\begin{aligned} f_1(x, y_1) &= x^{-3} f(x, x(-1 + y_1)) \\ &= x^{-3}\Big((-x^3 + x^4) - 2x^3(-1 + y_1) - x^3(-1 + y_1)^2 + \\ &\qquad + 2x^5(-1 + y_1)^4 + x^5(-1 + y_1)^5\Big) \\ &= (x + x^2) - 3x^2y_1 + (-1 + 2x^2)y_1^2 + 2x^2y_1^3 - 3x^2y_1^4 + x^2y_1^5. \end{aligned}$$

En la figura siguiente se muestra el polígono de Newton de f_1.

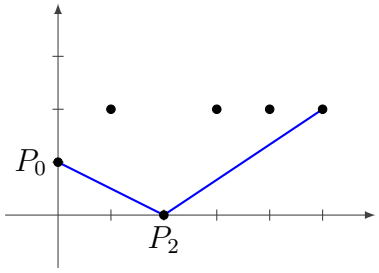


Figura 5

En el segundo paso de la construcción, debemos considerar solamente segmentos del polígono de Newton que tengan pendiente negativa. En este caso, el único segmento de pendiente negativa es P_0P_2 y, para éste, obtenemos

$$\gamma_2 = \frac{1}{2} \quad \text{y} \quad \beta_2 = 1.$$

Así, $p_2 = 1$ y $q_2 = 2$. La ecuación para el coeficientes c_2 está dada por

$$\Phi_2(t^2) = 1 - t^2.$$

De aquí que hay dos elecciones posibles para este coeficiente, $c_2 = \pm 1$, y ambas son raíces simples de la ecuación; por lo tanto,

$$r_2 = 1.$$

Continuemos con el ejemplo tomando $c_2 = 1$.

$$\begin{aligned} f_2(x, y_2) &= x^{-1} f_1(x, x^{\frac{1}{2}}(1 + y_2)) \\ &= (x - 3x^{\frac{3}{2}} + 2x^2 + 2x^{\frac{5}{2}} - 3x^3 + x^{\frac{7}{2}}) + \\ &\quad + (-2 - 3x^{\frac{3}{2}} + 4x^2 + 6x^{\frac{5}{2}} - 12x^3 + 5x^{\frac{7}{2}})y_2 + \\ &\quad + (-1 + 2x^2 + 6x^{\frac{5}{2}} - 18x^3 + 10x^{\frac{7}{2}})y_2^2 + (2x^{\frac{5}{2}} - 12x^3 + 10x^{\frac{7}{2}})y_2^3 + \\ &\quad + (-3x^3 + 5x^{\frac{7}{2}})y_2^4 + x^{\frac{7}{2}}y_2^5 \\ &= (x - 3x^{\frac{3}{2}} + \cdots) + (-2 - 3x^{\frac{3}{2}} + \cdots)y_2 + (-1 + 2x^2 + \ldots)y_2^2 + \\ &\quad + (2x^{\frac{5}{2}} - \cdots)y_2^3 + (-3x^3 + \cdots)y_2^4 + x^{\frac{7}{2}}y_2^5. \end{aligned}$$

Hemos llegado al momento a partir del cual $r_i = r_0 = 1$, y sabemos que, de aquí en más, $\bar{y}_2$ será una serie de potencias en $x^{\frac{1}{2}}$:

$$\bar{y}_2 = c_3 x^{\frac{1}{2}} + c_4 x + c_5 x^{\frac{3}{2}} + \cdots$$

Entonces, podemos determinar los valores de los coeficientes $c_3, c_4, c_5, \ldots$ sustituyendo esta expresión en la ecuación $f_2(x, \bar{y}_2) = 0$ y despejando sucesivamente. Obtenemos:

$$f_2(x, c_3 x^{\frac{1}{2}} + c_4 x + c_5 x^{\frac{3}{2}} + \cdots) =$$

$$\begin{aligned} &= (x - 3x^{\frac{3}{2}} + \cdots) + (-2 - 3x^{\frac{3}{2}} + \cdots)(c_3 x^{\frac{1}{2}} + c_4 x + c_5 x^{\frac{3}{2}} + \cdots) + \\ &\quad + (-1 + 2x^2 + \cdots)(c_3 x^{\frac{1}{2}} + c_4 x + \cdots)^2 + \cdots \\ &= -2c_3 x^{\frac{1}{2}} + (1 - 2c_4 - c_3^2)x + (-3 - 2c_5 - 2c_3 c_4)x^{\frac{3}{2}} + \cdots , \end{aligned}$$

de donde se deduce que

$$c_3 = 0,\ c_4 = \frac{1}{2},\ c_5 = -\frac{3}{2}, \ldots$$

Por lo tanto, una raíz de $f(x, y) = 0$ es

$$x\Big(-1 + x^{\frac{1}{2}}\big(1 + \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}x^{\frac{3}{2}} + \cdots\big)\Big) = -x + x^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{2}x^{\frac{5}{2}} - \frac{3}{2}x^3 + \cdots .$$

De manera similar, si tomamos $c_2 = -1$, obtenemos la raíz

$$-x - x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2}x^{\frac{5}{2}} + \frac{3}{2}x^3 + \cdots .$$

Consideremos ahora el segmento P_2P_5 del polígono de Newton de la Figura 4. Aquí tenemos

$$\gamma_1 = \frac{1}{3} \quad \text{y} \quad \beta_1 = \frac{5}{3}.$$

Entonces $p_1 = 1, q_1 = 3$. La ecuación (1.4) es

$$-c^2 + c^5 = 0$$

y, por lo tanto, el polinomio en (1.5) es

$$\Phi_1(t^3) = -1 + t^3.$$

Así, los posibles valores de c_1 son $c_1 = 1, \omega, \omega^2$, donde ω es una solución de $\omega^2+\omega+1 = 0$. En los tres casos se trata de una raíz simple del polinomio y, por lo tanto, $r_1 = 1$.

Tomando $c_1 = \omega$, por ejemplo, obtenemos

$$\begin{aligned} f_1(x, y_1) &= x^{-\frac{5}{3}} f(x, x^{\frac{1}{3}}(\omega + y_1)) \\ &= (-x^{\frac{4}{3}} + x^{\frac{7}{3}}) + (3\omega + 6x^{\frac{2}{3}})y_1 + (9 + 12\omega^2 x^{\frac{2}{3}})y_1^2 + \\ &\quad + (10\omega^2 + 8\omega x^{\frac{2}{3}})y_1^3 + (5\omega + 2x^{\frac{2}{3}})y_1^4 + y_1^5. \end{aligned}$$

Hemos llegado, otra vez, al caso $r = 1$ y, así, $\bar{y}_1$ (y, por lo tanto, también $\bar{y}$) puede ser expresada como una serie de potencias en $x^{\frac{1}{3}}$ y los coeficientes pueden determinarse, como en el caso anterior, sustituyendo en $f_1(x, y_1)$ la variable y_1 por una serie con coeficientes indeterminados y despejando sucesivamente.

1.2.4. Raíces múltiples

El ejemplo anterior muestra cómo el cálculo de una raíz de $f(x,y) \in K(x)^*[y]$ se simplifica al conocer el momento en el cual las multiplicidades r_i toman un valor constante r_0. Si $r_0 = 1$ este momento se reconoce fácilmente, pero si $r_0 > 1$, no tenemos manera de saber si habrá o no, efectivamente, una disminución en el valor de r_i posteriormente. En esta sección veremos que el caso $r_0 > 1$ puede darse sólo si $f(x,y)$ tiene una raíz múltiple.

Para probarlo usaremos el siguiente hecho. Mantenemos la misma notación que en la Sección 1.2.2.

Lema 1.2.2 *Se tiene que $\bar{y} = c_1 x^{\gamma_1} + c_2 x^{\gamma_1+\gamma_2} + \cdots$ es raíz múltiple de $f(x,y)$ si y sólo si, para $s \in \mathbb{N}$, $\bar{y}_s = c_{s+1} x^{\gamma_{s+1}} + c_{s+2} x^{\gamma_{s+1}+\gamma_{s+2}} + \cdots$ es raíz múltiple de $f_s(x, y_s)$. Más aún, las multiplicidades coinciden.*

Demostración. La demostración es muy sencilla, haciendo inducción en s y aplicando la regla de la cadena.

Para $s = 1$: Por definición, tenemos que

$$f_1(x, y_1) = x^{-\beta_1} f(x, x^{\gamma_1}(c_1 + y_1))$$

y, además,

$$\bar{y} = x^{\gamma_1}(c_1 + \bar{y}_1).$$

Por la regla de la cadena, para cada $j \in \mathbb{N}$,

$$f_1^{(j)}(x, y_1) = x^{-\beta_1 + j\gamma_1} f^{(j)}(x, x^{\gamma_1}(c_1 + y_1)).$$

Así, especializando en $\bar{y}_1$, obtenemos que

$$f_1^{(j)}(x, \bar{y}_1) = x^{-\beta_1 + j\gamma_1} f^{(j)}(x, x^{\gamma_1}(c_1 + \bar{y}_1)) = x^{-\beta_1 + j\gamma_1} f^{(j)}(x, \bar{y}),$$

de donde deducimos que

$$f_1^{(j)}(x, \bar{y}_1) = 0 \text{ si y sólo si } f^{(j)}(x, \bar{y}) = 0.$$

En consecuencia,

$$\operatorname{mult}(\bar{y}_1, f_1) = \operatorname{mult}(\bar{y}, f),$$

como queríamos.

Para $s > 2$, se prueba, de la misma manera, que

$$\text{mult}(\bar{y}_s, f_s) = \text{mult}(\bar{y}_{s-1}, f_{s-1}),$$

teniendo en cuenta que, por construcción,

$$f_s(x, y_s) = x^{-\beta_s} f_{s-1}(x, x^{\gamma_s}(c_s + y_s)) \quad \text{e} \quad \bar{y}_{s-1} = x^{\gamma_s}(c_s + \bar{y}_s).$$

Esto concluye la demostración del Lema. □

Consideremos ahora la sucesión $(r_i)_{i\in\mathbb{N}}$ introducida en la Sección 1.2.2 (recordemos que r_i es la multiplicidad del i-ésimo coeficiente de $\bar{y}$, c_i, como raíz de $\Phi_i(t^{q_i})$). Como se vio en esa sección, esta sucesión es decreciente y, por lo tanto, se estaciona en algún valor $r_0 \in \mathbb{N}$.

Proposición 1.2.3 *Si la sucesión $(r_i)_{i\in\mathbb{N}}$ se estaciona en un valor $r_0 > 1$, entonces $f(x, y) \in K(x)^*[y]$ tiene una raíz múltiple en $K(x)^*$.*

Demostración. Supongamos que la sucesión se estaciona en $r_0 > 1$ en el paso i_0-ésimo, con $i_0 \geq 1$.

Por el Lema 1.2.2, basta ver que $f_{i_0}(x, y_{i_0})$ tiene una raíz múltiple.

Notemos, para simplificar, $y = y_{i_0}$, $F = f_{i_0}$ y $m = m_{i_0}$, de modo que

$$F(x, y) = f_{i_0}(x, y_{i_0}) \in K((x^{\frac{1}{m}}))[y],$$

y

$$c_1, c_2, \ldots \in K; \gamma_1, \gamma_2, \ldots \in \mathbb{Q}$$

los coeficientes y exponentes de los términos obtenidos recursivamente al buscar una raíz de F.

Tenemos que $\gamma_i = \frac{p_i}{m} > 0$ para todo i, y que el segmento elegido en el paso i está incluido en la recta $y + \gamma_i x = \beta_i$. Como $(r_0, 0)$ pertenece a esa recta, resulta que

$$\beta_i = r_0\gamma_i = \frac{r_0 p_i}{m}.$$

Dado que todas las fracciones que aparecen tienen denominador común m, toda la construcción se realiza utilizando potencias de $x^{\frac{1}{m}}$. Por este motivo, haremos la sustitución $t = x^{\frac{1}{m}}$. Obtenemos:

- $F(t^m, t^{p_1}(c_1 + y_1)) = t^{r_0 p_1} F_1(t^m, y_1)$,
- $F_1(t^m, t^{p_2}(c_2 + y_2)) = t^{r_0 p_2} F_2(t^m, y_2)$,

de donde

$$F(t^m, c_1 t^{p_1} + c_2 t^{p_1+p_2} + t^{p_1+p_2} y_2) = F(t^m, t^{p_1}(c_1 + t^{p_2}(c_2 + y_2))) = t^{r_0 p_1} F_1(t^m, t^{p_2}(c_2 + y_2))) =$$

$$= t^{r_0 p_1} t^{r_0 p_2} F_2(t^m, y_2) = t^{r_0(p_1+p_2)} F_2(t^m, y_2)$$

Así, usando que $F_{i-1}(t^m, t^{p_i}(c_i + y_i)) = t^{r_0 p_i} F_i(t^m, y_i)$ y procediendo por inducción, se obtiene que

$$F(t^m, c_1 t^{p_1} + c_2 t^{p_1+p_2} + \cdots + t^{p_1+\cdots+p_s} y_s) = t^{r_0(p_1+\cdots+p_s)} F_s(t^m, y_s) \tag{1.11}$$

para todo $s \in \mathbb{N}$.

Derivando respecto de y_s ambos miembros de la igualdad anterior, usando regla de la cadena, tenemos

$$F'(t^m, c_1 t^{p_1} + c_2 t^{p_1+p_2} + \cdots + t^{p_1+\cdots+p_s} y_s) t^{p_1+\cdots+p_s} = t^{r_0(p_1+\cdots+p_s)} F'_s(t^m, y_s).$$

donde $F'(x, y)$ y $F'_s(x, y)$ son, respectivamente, las derivadas de $F(x, y)$ y $F_s(x, y)$ respecto de y. De esta igualdad obtenemos que

$$F'(t^m, c_1 t^{p_1} + c_2 t^{p_1+p_2} + \cdots + t^{p_1+\cdots+p_s} y_s) = t^{(r_0-1)(p_1+\cdots+p_s)} F'_s(t^m, y_s). \tag{1.12}$$

Como $p_i \geq 1$ (pues $\gamma_i > 0, m \in \mathbb{N}$ y $p_i \in \mathbb{Z}$), de la ecuación (1.11) deducimos que

$$F(t^m, c_1 t^{p_1} + c_2 t^{p_1+p_2} + \cdots + t^{p_1+\cdots+p_s} y_s) \equiv 0 \pmod{t^s},$$

y, como $r_0 > 1$, de (1.12) concluimos también que

$$F'(t^m, c_1 t^{p_1} + c_2 t^{p_1+p_2} + \cdots + t^{p_1+\cdots+p_s} y_s) \equiv 0 \pmod{t^s}.$$

Sea $R(x) := \mathrm{Res}_y(F, F')$ la resultante de $F(x, y)$ y $F'(x, y)$ con respecto a la variable y (la definición y propiedades básicas de la resultante de dos polinomios en una variable pueden verse, por ejemplo, en [6, Capítulo I, §9]). Como $F, F' \in K[[x^{\frac{1}{m}}]][y]$, resulta que $R \in K[[x^{\frac{1}{m}}]]$ y existen A y B en $K[[x^{\frac{1}{m}}]][y]$ tales que

$$R(x) = A(x,y)F(x,y) + B(x,y)F'(x,y).$$

Reemplazando x por t^m e y por $c_1t^{p_1} + c_2t^{p_1+p_2} + \cdots + t^{p_1+\cdots+p_s}y_s$, en virtud de lo observado anteriormente, nos queda

$$R(t^m) \equiv 0 \pmod{t^s}.$$

Como esto es verdadero para cada $s \in \mathbb{N}$ tenemos que $R(t^m) = 0$, o sea, $R(x) = 0$. Así, $F(x,y)$ y $F'(x,y)$ tienen un factor en común de grado positivo en y y, por lo tanto, F tiene una raíz múltiple en $K(x)^*$, que era lo que queríamos probar. □

Volvamos al caso general, donde tenemos el polinomio $f(x,y) \in K(x)^*[y]$ y consideremos $f'(x,y)$ la derivada de f respecto de la variable y.

La presencia de raíces múltiples para f puede ser detectada por la anulación de $R(x)$, donde ahora $R(x)$ es la resultante entre $f(x,y)$ y $f'(x,y)$ respecto a y. Así, el caso $r_0 > 1$ puede evitarse trabajando con un polinomio que tiene las mismas raíces que f pero todas simples:

- se calcula el máximo común divisor entre f y f' (como polinomios en y);
- se considera el polinomio $\widetilde{f} = \dfrac{f}{\operatorname{mcd}(f, f')}$.

La ventaja de considerar $\widetilde{f}$ es que este polinomio tiene exactamente las mismas raíces que f y todas con multiplicidad 1 y, por lo tanto, tendremos $r_0 = 1$ en la construcción de la Sección 1.2.2.

Capítulo 2

Una generalización a varias variables

Sea $F(x_1, \ldots, x_{N+1}) = 0$ una ecuación polinomial con coeficientes complejos. Estamos interesados en determinar series de potencias fraccionarias $\Phi(x_1, \ldots, x_N)$ tales que $F(x_1, \ldots, x_N, \Phi) = 0$. Ya hemos visto, en el Capítulo 1, el caso $N = 1$, donde tales series pueden obtenerse usando el polígono de Newton de F.

En este capítulo nos concentraremos en el caso general, mediante la búsqueda de soluciones que sean series de potencias en N variables cuyos exponentes estén en algún cono convexo en $\mathbb{Q}^N$. Siguiendo el desarrollo de [4], veremos que, como en el caso de una variable, los desarrollos de estas series de potencias están estrechamente relacionados con el polítopo de Newton de F.

2.1. Construcciones y definiciones preliminares

2.1.1. Polinomios en varias variables y polítopos

En este capítulo trabajaremos con polinomios en varias variables con coeficientes complejos. Para representar polinomios en $\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_{N+1}]$, notaremos

- $x = x_1, \ldots, x_{N+1}$,
- $x^I = x_1^{i_1} \ldots x_{N+1}^{i_{N+1}}$, para $I = (i_1, \ldots, i_{N+1}) \in (\mathbb{Z}_{\geq 0})^{N+1}$.

Con esta notación, un elemento $F \in \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_{N+1}]$ es una suma finita

$$F(x) = \sum_I a_I x^I, \text{ con } a_I \in \mathbb{C}.$$

Al conjunto de todos los exponentes que aparecen en el polinomio F con coeficientes no nulos lo llamaremos *soporte de* F y lo notaremos $\mathrm{Sop}(F)$:

$$\mathrm{Sop}(F) = \{I \in (\mathbb{Z}_{\geq 0})^{N+1} : a_I \neq 0\}.$$

En lo que sigue, le asociaremos a cada polinomio en $\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_{N+1}]$ un subconjunto convexo de $\mathbb{R}^{N+1}$ construido a partir de su soporte.

Definición Un conjunto $A \subset \mathbb{R}^{N+1}$ es *convexo* si para todo par de puntos pertenecientes al conjunto A, el segmento que los une está incluido en A.

Definición La *cápsula convexa* de un conjunto de puntos X en $\mathbb{R}^{N+1}$, que notamos $\mathrm{conv}(X)$, es la intersección de todos los conjuntos convexos que contienen a X. Dados k puntos $p_1, \ldots, p_k$ en $\mathbb{R}^{N+1}$, su cápsula convexa viene dada por

$$\mathrm{conv}(p_1, \ldots, p_k) = \left\{ \sum_{i=1}^{k} \lambda_i p_i : \lambda_i \in \mathbb{R}, \lambda_i \geq 0, \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1 \right\}.$$

La cápsula convexa $P = \mathrm{conv}(p_1, \ldots, p_k)$ se llama un *polítopo* en $\mathbb{R}^{N+1}$.

Una *cara* de un polítopo P es la intersección de P con un hiperplano H tal que $P \cap H \neq \emptyset$ y P está enteramente contenido en uno de los dos semiespacios determinados por H.

Definición Un polítopo de $\mathbb{R}^{N+1}$ se dice *racional* si sus vértices tienen coordenadas racionales o, equivalentemente, si puede describirse como las soluciones de un sistema de inecuaciones lineales sobre $\mathbb{R}^{N+1}$ donde los coeficientes están en $\mathbb{Q}$.

La noción fundamental mediante la cual asociamos polítopos a polinomios en varias variables es la siguiente:

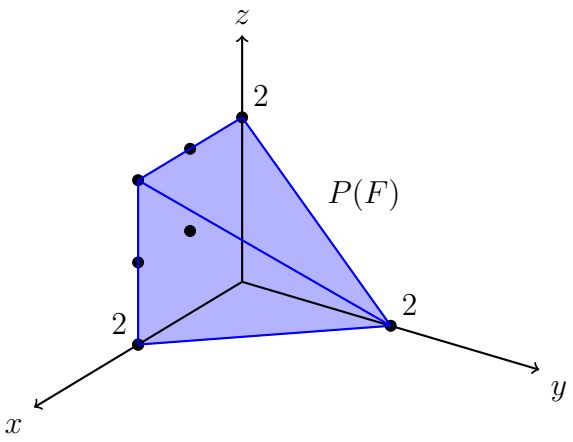
Definición Sea F un polinomio $F(x) = \sum a_I x^I \in \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_{N+1}]$. El *polítopo de Newton de* F es la cápsula convexa en $\mathbb{R}^{N+1}$ del conjunto de los exponentes de los monomios que aparecen en F, es decir,

$$P(F) = \text{conv}\{I \in (\mathbb{Z}_{\geq 0})^{N+1} : a_I \neq 0\} = \text{conv}(\text{Sop}(F)) \subset \mathbb{R}^{N+1}.$$

Ejemplo. Para el polinomio $F(x, y, z) = z^2 + 2xz^2 + 2xz + x^2z^2 + 2x^2z + x^2 + y^2$, el polítopo de Newton es

$$P(F) = \text{conv}\{(0, 0, 2), (1, 0, 2), (1, 0, 1), (2, 0, 2), (2, 0, 1), (2, 0, 0), (0, 2, 0)\}.$$

Lo graficamos en la siguiente figura:



□

La construcción principal que presentaremos se basa en considerar polítopos de Newton de polinomios y, más generalmente, de sumas finitas de términos en $N + 1$ variables, $F(x) = \sum a_I x^I$, en las que los exponentes I son $(N + 1)$-uplas de números racionales. A este tipo de expresiones se les asocia un polítopo de Newton $P(F)$ de la misma manera.

Observamos que, en todos los casos, los polítopos de Newton que consideraremos son polítopos racionales.

Trabajaremos fundamentalmente con ciertas caras de polítopos de Newton.

Definición Llamaremos *arista* del polítopo $P(F)$ a una cara de dimensión 1 de $P(F)$ y *vértice* de $P(F)$ a una cara de dimensión 0.

2.1.2. Conos y anillos de series formales

Definición Un *cono poliedral convexo en* $\mathbb{R}^N$ es un conjunto C de la forma

$$C = \{r_1 v_1 + \cdots + r_k v_k : r_i \in \mathbb{R}, r_i \geq 0 \ \forall 1 \leq i \leq k\},$$

donde $v_1, \ldots, v_k \in \mathbb{R}^N$. El cono C se llama *racional* si está definido por vectores, v_i, tales que $v_i \in \mathbb{Q}^N$ para cada i, y se llama *fuertemente convexo* si no contiene subespacios lineales no triviales.

Sea C un cono racional poliedral fuertemente convexo. Para $n \in \mathbb{N}$, el conjunto

$$C_n = C \cap \left(\frac{1}{n}\mathbb{Z}^N\right)$$

es un semigrupo con la suma usual de $\mathbb{Q}^N$. A partir de este semigrupo podemos formar el anillo del semigrupo $\mathbb{C}[C_n]$, es decir, el anillo de todas las sumas formales finitas de la forma $\sum a_\alpha x^\alpha$ donde $\alpha \in C_n$ y $a_\alpha \in \mathbb{C}$. Consideraremos a los elementos de $\mathbb{C}[C_n]$ como polinomios de Laurent con exponentes fraccionarios en las variables $x_1, \ldots, x_N$. Sea $\mathbb{C}[[C_n]]$ la completación del anillo $\mathbb{C}[C_n]$, es decir, el anillo de todas las series formales de potencias fraccionarias con exponentes en C_n:

$$\mathbb{C}[[C_n]] = \Big\{ \sum_{\alpha \in C_n} a_\alpha x^\alpha : a_\alpha \in \mathbb{C} \Big\}.$$

Definición Si C es un cono poliedral racional fuertemente convexo en $\mathbb{R}^N$, se define el *anillo de series de potencias fraccionarias en las variables* $x_1, \ldots, x_N$ *con soporte en* C como

$$\mathbb{C}[[C_{\mathbb{Q}}]] = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{C}[[C_n]].$$

y el *anillo de series de potencias fraccionarias con soporte en algún trasladado de* C como

$$\mathbb{C}((C_{\mathbb{Q}})) = \bigcup_{\beta \in \mathbb{Q}^N} x^\beta \mathbb{C}[[C_{\mathbb{Q}}]].$$

En la definición anterior es esencial pedir que C sea fuertemente convexo para que el conjunto $\mathbb{C}[[C_{\mathbb{Q}}]]$ tenga una estructura multiplicativa bien definida. De lo contrario,

hallar un coeficiente cuando se multiplican dos series podría involucrar una suma infinita, tal como se ve en el siguiente ejemplo: en el producto $\left(\sum_{n=1}^{\infty} x^n\right).\left(\sum_{n=1}^{\infty} x^{-n}\right)$, el término x^0 debería obtenerse de la suma $x^1x^{-1} + x^2x^{-2} + x^3x^{-3} + \cdots = 1 + 1 + 1 + \ldots$ y, por lo tanto, no puede ser determinado.

Sea C un cono poliedral racional fuertemente convexo. Para cada

$$\Phi(x) = \sum_{\alpha \in \mathbb{Q}^N} a_\alpha x^\alpha \in \mathbb{C}((C_{\mathbb{Q}})),$$

definimos el *soporte de* Φ como el conjunto de los exponentes que aparecen en Φ, es decir,

$$\mathrm{Sop}(\Phi) = \{\alpha \in \mathbb{Q}^N : a_\alpha \neq 0\}.$$

Como $\Phi \in x^\beta \mathbb{C}[[C_n]]$ para algún $\beta \in \mathbb{Q}^N$ y algún $n \in \mathbb{N}$, el soporte de Φ debe estar en algún reticulado $(\frac{1}{m})\mathbb{Z}^N$.

Ejemplo. Para $N = 1$ y $C = \mathbb{R}_{\geq 0}$, se tiene que $\mathbb{C}((C_{\mathbb{Q}}))$ es el cuerpo $\mathbb{C}(x)^*$ de las series de potencias fraccionarias en una variable con coeficientes en $\mathbb{C}$; en efecto:

- Para cada $n \in \mathbb{N}$,
$$C_n = C \cap \frac{1}{n}\mathbb{Z} = \left\{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \frac{3}{n}, \ldots\right\},$$
y, entonces,
$$\mathbb{C}[[C_n]] = \left\{\sum_{j=0}^{\infty} a_{j/n}\, x^{\frac{j}{n}} : a_{j/n} \in \mathbb{C}\right\} = \mathbb{C}[[x^{\frac{1}{n}}]].$$

- $\mathbb{C}[[C_{\mathbb{Q}}]] = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{C}[[x^{\frac{1}{n}}]]$.

- $\mathbb{C}((C_{\mathbb{Q}})) = \bigcup_{\beta \in \mathbb{Q}} x^\beta (\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{C}[[x^{\frac{1}{n}}]]) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{C}((x^{\frac{1}{n}})) = \mathbb{C}(x)^*$.

□

2.1.3. Conos duales

En lo que sigue, identificaremos $(\mathbb{R}^N)^*$ con $\mathbb{R}^N$, mediante la asociación

$$w \in \mathbb{R}^N \leftrightsquigarrow \langle w, \cdot \rangle \in (\mathbb{R}^N)^*.$$

Sea C un cono poliedral racional fuertemente convexo en $\mathbb{R}^N$. Definimos su *cono dual*, $C^* \subseteq (\mathbb{R}^N)^* \simeq \mathbb{R}^N$, como el conjunto

$$C^* = \{u \in \mathbb{R}^N : \langle u, x \rangle \leq 0 \ \forall x \in C\}.$$

Sea w una funcional lineal sobre $\mathbb{R}^N$. Podemos extender w trivialmente a una funcional lineal sobre $\mathbb{R}^{N+1}$ definiendo, para $x = (x_1, \ldots, x_N, x_{N+1}) \in \mathbb{R}^{N+1}$,

$$\langle w, x \rangle := \langle w, (x_1, \ldots, x_N) \rangle.$$

Definición Sea $w \in \mathbb{R}^N$. Un hiperplano H en $\mathbb{R}^{N+1}$ se dice *w-constante* si, para cada $c \in \mathbb{R}$, existe $d_c \in \mathbb{R}$ tal que $\langle w, x \rangle = d_c$ para todo $x \in H \cap \{x_{N+1} = c\}$; es decir, si la funcional lineal inducida por w es constante en cada sección "horizontal" de H.

Si $H \subset \mathbb{R}^{N+1}$ es un hiperplano de ecuación $\langle \eta, x \rangle = b$, con $\eta \in \mathbb{R}^{N+1}$ y $b \in \mathbb{R}$, para cada $c \in \mathbb{R}$, se tiene que $H \cap \{x_{N+1} = c\}$ es el hiperplano en $\mathbb{R}^N$ de ecuación $\langle \eta', (x_1, \ldots, x_N) \rangle = b - \eta_{N+1} c$, donde $\eta' = (\eta_1, \ldots, \eta_N)$. En consecuencia,

$$H : \langle \eta, x \rangle = b \text{ es } w\text{-constante si y sólo si } \eta' = k.w \text{ para algún } k \in \mathbb{R} - \{0\}.$$

Al hiperplano $x_1 \ldots x_N$, con el que trabajaremos frecuentemente, lo llamaremos *hiperplano nulo*.

Observación 2.1.1 *Sea $w \in \mathbb{R}^N$. Dada una recta L en $\mathbb{R}^{N+1}$ no paralela al hiperplano nulo existe un único hiperplano w-constante que la contiene.*

Demostración. Sea $L : \lambda v + p$, $\lambda \in \mathbb{R}$, una recta no paralela al hiperplano nulo, es decir, tal que $v_{N+1} \neq 0$. Sea H un hiperplano de ecuación $\langle \eta, x \rangle = b$, donde $\eta \in \mathbb{R}^{N+1}$ y $b \in \mathbb{R}$.

Sabemos que H es un hiperplano w-constante si y sólo si $\eta' = kw$ para algún $k \in \mathbb{R} - \{0\}$. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer $k = 1$; entonces

$$\eta = (w, \eta_{N+1}) \text{ para algún } \eta_{N+1} \in \mathbb{R}.$$

Por otro lado, $L \subset H$ si y sólo si $b = \langle \eta, \lambda v + p \rangle = \lambda \langle \eta, v \rangle + \langle \eta, p \rangle$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ o, equivalentemente,

$$\langle \eta, v \rangle = 0 \qquad \text{y} \qquad \langle \eta, p \rangle = b.$$

Si notamos $v = (v', v_{N+1})$ y $p = (p', p_{N+1})$, donde v' y p' son vectores de $\mathbb{R}^N$, de las ecuaciones anteriores se tiene que

$$\langle w, v' \rangle + \eta_{N+1}.v_{N+1} = 0 \quad \text{y} \quad b = \langle w, p' \rangle + \eta_{N+1}.p_{N+1}.$$

Como $v_{N+1} \neq 0$, resulta que

$$\eta_{N+1} = -\frac{1}{v_{N+1}} \langle w, v' \rangle \quad \text{y} \quad b = \langle w, p' \rangle - \frac{1}{v_{N+1}} \langle w, v' \rangle.p_{N+1}.$$

Finalmente, $\eta := (w, -\frac{1}{v_{N+1}} \langle w, v' \rangle)$ y $b := \langle w, p' \rangle - \frac{1}{v_{N+1}} \langle w, v' \rangle.p_{N+1}$ definen un hiperplano w-constante H que contiene a L y, por construcción, es único. □

2.1.4. Conos asociados a polítopos

A continuación introducimos dos construcciones asociadas a polítopos que nos serán de utilidad.

Definición Sea P un polítopo y sea v un vértice de P. El *cono barrera* de v se define como

$$C(v) = \{\lambda(p - v) : \lambda \in \mathbb{R}_{\geq 0},\ p \in P\}.$$

El cono dual de $C(v)$ se llama el *cono normal de* v y se lo nota $C^*(v)$.

Sea P un polítopo racional en $\mathbb{R}^{N+1}$. Sea e una arista de P no paralela al hiperplano nulo. A una arista con esta característica la llamaremos *arista admisible*. Los vértices de e con mayor y menor coordenada x_{N+1} serán llamados, respectivamente, el mayor y el menor vértice de e y serán notados $M(e)$ y $m(e)$, respectivamente.

Definición Sea e una arista admisible y sean

$$m(e) = (p_1, \ldots, p_N, p_{N+1}) \ \text{ y } \ M(e) = (q_1, \ldots, q_N, q_{N+1})$$

los dos puntos extremos de e. Definimos la *pendiente de* e *con respecto a* x_{N+1}, y la notamos $s(e)$, como el vector

$$s(e) := \frac{1}{q_{N+1} - p_{N+1}} (q_1 - p_1, \ldots, q_N - p_N).$$

Este vector $s(e)$ está unívocamente asociado a la dirección de la recta que contiene al segmento e (que no es paralela al hiperplano nulo por ser e admisible): para tener unicidad consideramos el vector director que tiene coordenada $x_{N+1} = 1$, es decir, el vector $\frac{1}{q_{N+1}-p_{N+1}}(q_1 - p_1, \ldots, q_N - p_N, q_{N+1} - p_{N+1})$. Como la última coordenada es 1, nos alcanzan las N primeras coordenadas (la pendiente) para saber a qué dirección nos referimos.

Definición Sea L_e la recta en $\mathbb{R}^{N+1}$ que contiene al segmento e, y sea y_e el punto de intersección de L_e con el hiperplano nulo (tal punto existe pues e no es paralelo a este hiperplano). Se define el *ángulo barrera* de e en $\mathbb{R}^{N+1}$ asociado a P como

$$W(e) = \{\lambda(p - x) + x : \lambda \in \mathbb{R}_{\geq 0},\ p \in P,\ x \in L_e\}.$$

En lo que sigue, relacionaremos las construcciones de ángulo barrera y cono barrera.

Sea $\Pi_e : \mathbb{R}^{N+1} \to \{x_{N+1} = 0\}$ la proyección sobre el hiperplano nulo en la dirección de e, definida por

$$\Pi_e(q) := q - q_{N+1}.\,(s(e), 1).$$

Geométricamente, dado $q \in \mathbb{R}^{N+1}$, $\Pi_e(q)$ se obtiene como el punto de intersección de la recta paralela a e que pasa por q con el hiperplano nulo. En particular, $y_e = \Pi_e(q)$ para cualquier q en la recta que contiene al segmento e.

El siguiente resultado relaciona el ángulo barrera definido a partir de una arista admisible e del polítopo P con el cono barrera de y_e asociado al polítopo $\Pi_e(P)$.

Lema 2.1.2 *Con las hipótesis y notación anteriores,*

$$W(e) \bigcap \{x_{N+1} = 0\} = C(y_e) + y_e,$$

donde $C(y_e) = \{\lambda(\Pi_e(p) - y_e) : \lambda \in \mathbb{R}_{\geq 0},\ p \in P\}$ *es el cono barrera de* y_e *asociado a* $\Pi_e(P)$.

Demostración. Sea $z \in W(e) \bigcap \{x_{N+1} = 0\}$, digamos, $z = \lambda(p - x) + x$, donde $x \in L_e,\ \lambda \geq 0,\ p \in P$. Como $z \in \{x_{N+1} = 0\}$, la proyección Π_e es lineal y $\Pi_e(x) = y_e$ para todo $x \in L_e$, tenemos que

$$z = \Pi_e(z) = \lambda(\Pi_e(p) - \Pi_e(x)) + \Pi_e(x) = \lambda(\Pi_e(p) - y_e) + y_e$$

de donde se ve que $z \in C(y_e) + y_e$.

Veamos, ahora, la otra contención. Sea $z \in C(y_e) + y_e$. Entonces, $z = \lambda(\Pi_e(p) - y_e) + y_e$ con $\lambda \geq 0$ y $p \in P$. Si $z = y_e$, es claro que $z \in W(e) \bigcap \{x_{N+1} = 0\}$, con lo cual, podemos suponer que $\lambda > 0$ y $p \notin L_e$.

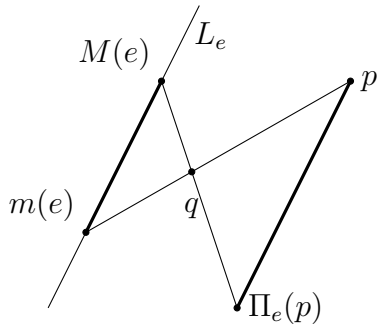
- Supongamos que $\lambda \neq 1$. Sea x_z el punto tal que $z - x_z = \lambda(p - x_z)$, es decir,

$$x_z = \frac{1}{\lambda - 1}(\lambda p - z) = \frac{1}{\lambda - 1}\Big(\lambda p - \lambda(\Pi_e(p) - y_e) - y_e\Big) =$$

$$= \frac{1}{\lambda - 1}\Big(\lambda(p - \Pi_e(p)) + (\lambda - 1)y_e\Big) = \frac{\lambda}{\lambda - 1}(p - \Pi_e(p)) + y_e.$$

  Como $p - \Pi_e(p)$ es paralelo a e, resulta que $x_z \in L_e$. Luego, $z = \lambda(p - x_z) + x_z$ con $\lambda \geq 0$, $p \in P$ y $x_z \in L_e$, con lo cual $z \in W(e)$.

- Supongamos ahora que $\lambda = 1$. Luego, $z = \Pi_e(p)$. Sin pérdida de generalidad, supongamos $p_{N+1} > 0$. Los segmentos $[m(e), p]$ y $[M(e), \Pi_e(p)]$ se intersecan en un punto, digamos en q, ya que son las diagonales del trapecio de lados paralelos e y $[\Pi_e(p), p]$, como se muestra en la figura:



  Se tiene que $z - M(e) = \widetilde{\lambda}(q - M(e))$ para algún $\widetilde{\lambda} \geq 0$. Además, el punto q pertenece al polítopo P, pues como $m(e)$ y p pertenecen a P, todo el segmento que los une está incluido en P. Luego, $z = \widetilde{\lambda}(q - M(e)) + M(e) \in W(e)$, como queríamos.

□

Por abuso de notación, escribiremos $C(e) \subset \mathbb{R}^N \simeq \{x_{N+1} = 0\}$ para el cono $C(y_e)$ y lo llamaremos, simplemente, el *cono barrera de e*. Al cono dual de este cono lo notaremos $C^*(e) \subset (\mathbb{R}^N)^*$ y lo llamaremos el *cono normal de e*.

Lema 2.1.3 *Sea P un polítopo en $\mathbb{R}^{N+1}$ y sea e una arista admisible de P. Si $w \in C^*(e)$, $w \neq 0$, entonces el hiperplano w-constante $H_{w,e}$ que contiene a L_e soporta a P.*

Demostración. Escribimos $L_e : tv_e + y_e$, donde $v_e = (s(e), 1)$ con $s(e)$ la pendiente de e e y_e el punto de intersección de L_e con el hiperplano nulo. Por la Observación 2.1.1 y su demostración, el (único) hiperplano w-constante que contiene a L_e tiene ecuación

$$H_{w,e} : \langle \eta, x \rangle = b, \qquad \text{con} \quad \eta = (w, -\langle w, s(e) \rangle) \ \text{ y } \ b = \langle w, y_e \rangle. \tag{2.1}$$

Recordemos que si $x \in \mathbb{R}^{N+1}$, definimos $\langle w, x \rangle := \langle w, (x_1, \ldots, x_N) \rangle$, con lo cual, notamos al producto escalar entre w y un elemento de $\mathbb{R}^N$ y $\mathbb{R}^{N+1}$ de la misma manera, haciendo un abuso de notación.

Queremos ver que $H_{w,e}$ soporta a P; es decir, que si $p \in P$, entonces p satisface

$$\langle \eta, p \rangle \leq b.$$

Ahora bien, dado $p \in P$, si notamos $p' = (p_1, \ldots, p_N)$ al vector formado por las primeras coordenadas de p, se tiene que

$$\begin{aligned} \langle \eta, p \rangle = \langle (w, -\langle w, s(e) \rangle), (p', p_{N+1}) \rangle &= \langle w, p' \rangle - \langle w, s(e) \rangle . \, p_{N+1} \\ &= \langle w, p' - p_{N+1} . \, s(e) \rangle = \langle w, \Pi_e(p) \rangle, \end{aligned}$$

recordando que $\Pi_e(p) = p - p_{N+1} . \, (s(e), 1)$.

Como por la definición del cono barrera se tiene que $\Pi_e(p) - y_e \in C(e)$ y por hipótesis se tiene que $w \in C^*(e)$, resulta que

$$\langle w, \Pi_e(p) - y_e \rangle \leq 0;$$

equivalentemente,

$$\langle w, \Pi_e(p) \rangle \leq \langle w, y_e \rangle.$$

Finalmente, concluimos que

$$\langle \eta, p \rangle = \langle w, \Pi_e(p) \rangle \leq \langle w, y_e \rangle = b,$$

como queríamos, con lo cual el hiperplano definido en (2.1) soporta a P. □

Para terminar esta sección, estableceremos propiedades del ángulo barrera $W(e)$ que nos resultarán de utilidad en lo sucesivo.

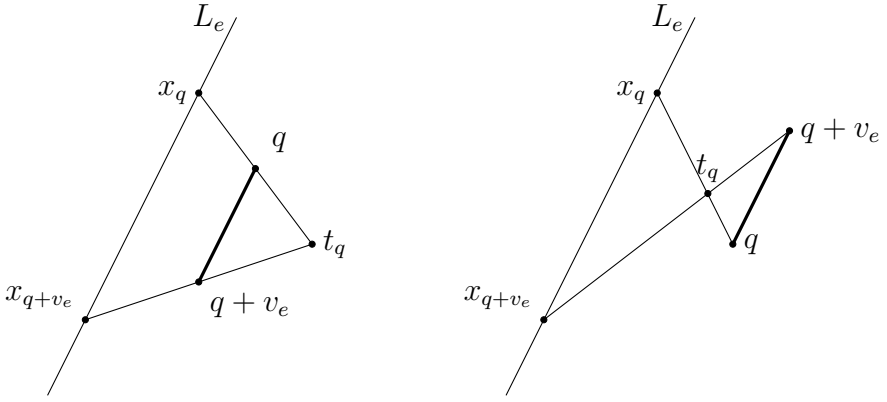
Lema 2.1.4 *Sean P un polítopo en $\mathbb{R}^{N+1}$ y e una arista de P. Sean L_e la recta de $\mathbb{R}^{N+1}$ que contiene a e y $W(e)$ el ángulo barrera de e asociado a P. Se tiene que:*

(a) Si $q \in W(e)$, entonces $q + v_e \in W(e)$ para todo $v_e \parallel L_e$,

(b) Si $p \in L_e$ y $v \in \mathbb{R}^{N+1}$ son tales que $p + v \in W(e)$, entonces $q + \lambda.v \in W(e)$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ y $q \in W(e)$.

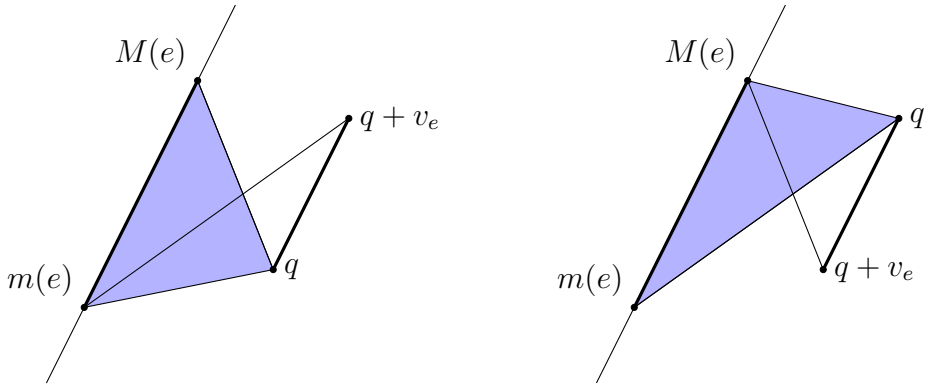
Demostración. (a) Sea $q \in W(e)$. Si $q \in L_e$ entonces, para v_e paralelo a L_e, es claro que $q + v_e \in L_e \subset W(e)$, tal como queríamos.

Supongamos ahora que $q \notin L_e$. Sabemos que $q \in W(e)$ pertenece a una semirrecta que empieza en un punto $x_q \in L_e$ y pasa un punto $t_q \in P$. Supongamos que $q \notin P$, luego, $q \neq t_q$. Consideremos el plano π que contiene a la recta L_e y a la semirrecta de origen x_q que pasa por q y t_q. Notemos que el punto $q + v_e$ con $v_e \parallel L_e$ pertenece a π. La recta que pasa por los puntos t_q y $q + v_e$ (contenida en π) se interseca con L_e en un punto, digamos en el punto x_{q+v_e}. Luego, $q + v_e$ pertenece a una semirrecta que empieza en un punto de la recta L_e y pasa por un punto de P, o sea, $q + v_e \in W(e)$. Las siguientes figuras ilustran esta situación.



Si $q \in P$, el triángulo de vértices $m(e)$, $M(e)$ y q está incluido en P. Ahora consideremos el trapecio de vértices $m(e)$, $M(e)$, q y $q + v_e$ (ordenados adecuadamente).

Si r es el punto de intersección de las diagonales de este trapecio, dependiendo de si $\overrightarrow{m(e)M(e)}$ y $\overrightarrow{q, q+v_e}$ tienen sentidos iguales u opuestos, vemos que $q + v_e$ pertenece a una semirrecta que sale de $m(e)$ (respectivamente de $M(e)$), un punto de L_e, y pasa por puntos de P, como puede verse en la figura. Así, $q + v_e \in W(e)$.

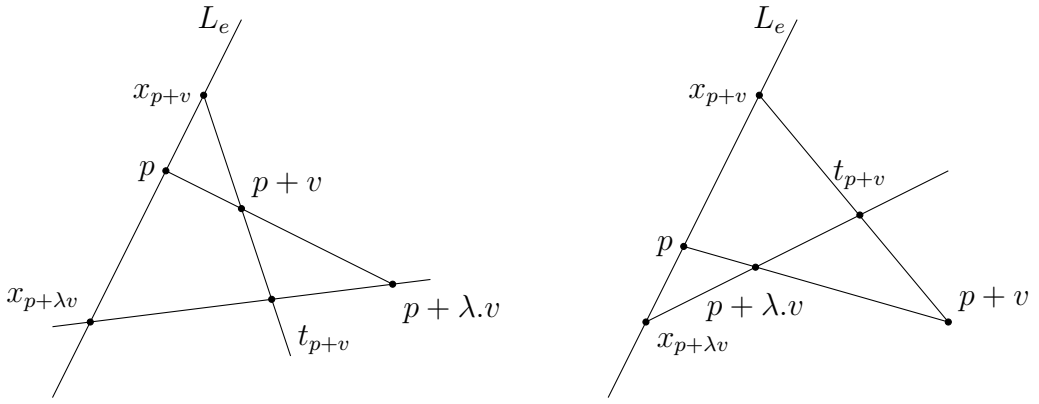


(b) Probaremos el resultado en varias etapas.

(b.1) En primer lugar, veamos que si $p \in L_e$ y $p+v \in W(e)$, entonces $p+\lambda.v \in W(e)$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}_{\geq 0}$.

Si $p + v \in L_e$, entonces $p + \lambda.v \in L_e \subseteq W(e)$, como queríamos.

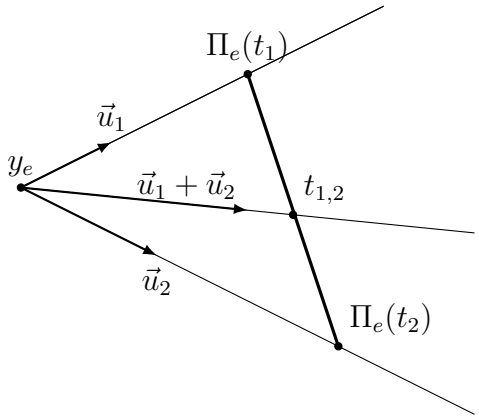
Supongamos, ahora, que $p + v \notin L_e$. Consideremos el plano π que contiene a L_e y a $p+v$. Como p y $p+v \in \pi$, se tiene que $p+\lambda.v \in \pi$. Por otra parte, como $p+v \in W(e)$, existen un punto $x_{p+v} \in L_e$ y un punto $t_{p+v} \in P$ tales que $p+v$ pertenece a la semirrecta con origen en x_{p+v} y que pasa por t_{p+v}. Esta semirrecta está incluida en π; en particular, $t_{p+v} \in \pi$. Luego, la recta que pasa por los punto t_{p+v} y $p + \lambda.v$ está incluida en π y, en consecuencia, interseca a L_e en un punto, $x_{p+\lambda.v}$. De aquí se sigue que $p + \lambda.v \in W(e)$.



(b.2) Veamos ahora que, si $p \in L_e$, $p+v_1 \in W(e)$ y $q \in W(e)$, entonces $q+v_1 \in W(e)$.

Notemos $v_2 := q-p$. Entonces $q = p+v_2$ y debemos probar que $p+v_1+v_2 \in W(e)$. Recordemos que $\Pi_e(p) = y_e$ es el punto de intersección de la recta L_e con el hiperplano nulo. Como $p+v_1$ y $p+v_2 \in W(e)$, tenemos que $\Pi_e(p+v_1) = y_e+u_1$ y $\Pi_e(p+v_2) = y_e+u_2$, donde u_1 y $u_2 \in C(e)$; digamos, $u_i = \lambda_i.(\Pi_e(t_i) - y_e)$, con $t_i \in P$ y $\lambda_i \geq 0$ para $i = 1, 2$.

Por la convexidad de P, el segmento $[t_1, t_2] \subset P$ y, por la linealidad de Π_e, resulta que el segmento $[\Pi_e(t_1), \Pi_e(t_2)] \subset \Pi_e(P)$. Entonces, la semirrecta con origen en y_e en la dirección de $u_1 + u_2$ interseca al segmento $[\Pi_e(t_1), \Pi_e(t_2)]$ en un punto, digamos, en el punto $t_{1,2}$, de $\Pi_e(P)$, tal como se muestra en la figura.



De aquí se deduce que $u_1+u_2+y_e \in C(e)+y_e \subset W(e)$. Por otro lado, $\Pi_e(p+v_1+v_2) = \Pi_e((p+v_1)+(v_2+p)-p) = u_1+u_2+y_e$. Luego, $p+v_1+v_2 = (u_1+u_2+y_e)+v_e$, donde $v_e \parallel L_e$. Por el inciso (a), resulta que $p+v_1+v_2 \in W(e)$, como queríamos.

Combinando lo demostrado en (b.1) y (b.2), estamos en condiciones de probar lo afirmado en el inciso (b) del Lema: si $p \in L_e$ y $p + v \in W(e)$, por lo visto en (b.1), $p + \lambda.v \in W(e)$ para $\lambda \geq 0$. Finalmente, por lo demostrado en (b.2) aplicado a $p \in L_e$, $v_1 := \lambda.v$ y $q \in W(e)$, se tiene que $q + \lambda.v \in W(e)$. □

2.2. Series de potencias fraccionarias para resolver ecuaciones algebraicas

En esta sección nos concentraremos en la construcción de series de potencias fraccionarias $\Phi(x_1, \ldots, x_N)$ que satisfacen la ecuación $F(x_1, \ldots, x_N, \Phi(x_1, \ldots, x_N)) = 0$ para un polinomio dado $F \in \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_N, x_{N+1}]$. Para esto trabajaremos con el polítopo de Newton de F y ciertos conos asociados que definimos en la sección anterior.

Dado que los exponentes de las series que vamos a construir serán vectores con coordenadas racionales, necesitaremos introducir un orden en $\mathbb{Q}^N$. Para esto, trabajaremos con la siguiente noción:

Definición Una funcional lineal $w \in (\mathbb{R}^N)^*$ se llama *irracional* si sus coordenadas son linealmente independientes sobre $\mathbb{Q}$.

Notar que una funcional lineal w irracional induce un orden total sobre $\mathbb{Q}^N$, ya que si $\alpha, \alpha' \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ y $\alpha \neq \alpha'$, se tiene que $\langle w, \alpha \rangle \neq \langle w, \alpha' \rangle$.

El resultado principal que demostraremos en esta tesis es la siguiente generalización del Teorema 1.2.1:

Teorema 2.2.1 *Sea $F(x_1, \ldots, x_N, x_{N+1})$ un polinomio en $\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_N, x_{N+1}]$. Sea e una arista admisible del polítopo $P(F)$ y sea $C^* = C^*(e) \subset \mathbb{R}^N$ su cono normal. Entonces, para cada $w \in C^*$ irracional, existe un cono poliedral racional fuertemente convexo C_w tal que $w \in C_w^*$ y tal que el anillo $\mathbb{C}((C_{w\mathbb{Q}}))$ contiene una serie Φ que satisface $F(x_1, \ldots, x_N, \Phi) = 0$.*

Para probar el Teorema 2.2.1, nos basaremos en la construcción introducida en [4]. Veremos cómo construir, inductivamente, una serie de la forma

$$\Phi := \sum_{n=1}^{\infty} c_n x_1^{\alpha_{n,1}} \ldots x_N^{\alpha_{n,N}} = \sum_{n=1}^{\infty} \Psi_n$$

tal que $F(x_1, \ldots, x_N, \Phi) = 0$.

Con este objetivo, procederemos a construir sus sumandos $\Psi_1, \Psi_2, \ldots, \Psi_n, \ldots$ recursivamente. Comenzaremos mostrando cómo obtener Ψ_1 y luego, una vez obtenidas $\Psi_1, \ldots, \Psi_{n-1}$, cómo construir Ψ_n. Ambas construcciones serán similares.

2.2.1. Construcción recursiva de las series

A continuación presentamos la construcción recursiva de Φ.

El primer término

Bajo las hipótesis del Teorema 2.2.1, sea

$$F_1(x_1, \ldots, x_{N+1}) := F(x_1, \ldots, x_{N+1}) = \sum_{I \in S_1} a_I x^I,$$

donde $S_1 = \mathrm{Sop}(F)$. Sea $e_1 = e$ la arista de $P(F_1)$ elegida y sea $C(e_1)$ el cono barrera de e_1.

La arista e_1 tiene una pendiente con respecto a x_{N+1}, digamos $s(e_1) = (s_{1,1}, \ldots, s_{1,N})$. Definimos

$$\Psi_1 = c_1 x_1^{-s_{1,1}} \ldots x_N^{-s_{1,N}},$$

con $c_1 \in \mathbb{C}$ una raíz del polinomio

$$F_{e_1}(t) := \sum_{(i_1,\ldots,i_{N+1}) \in e_1 \bigcap S_1} a_{i_1,\ldots,i_{N+1}} t^{i_{N+1} - m(e_1)_{N+1}} \tag{2.2}$$

donde $m(e_1)_{N+1}$ es la coordenada $N+1$ del menor vértice de e_1. La suma recorre todos los términos de F_1 que corresponden a puntos de la arista e_1.

El grado del polinomio $F_{e_1}(t)$ definido en (2.2) es igual a la diferencia entre el mayor y el menor valor de la coordenada $(N+1)$-ésima de puntos que aparecen en $e_1 \bigcap S_1$; por lo tanto, la cantidad de raíces, contando multiplicidad, es igual a la longitud de la proyección de la arista $e = e_1$ sobre el eje x_{N+1}. En particular, como la arista considerada es admisible, el polinomio $F_{e_1}(t)$ tiene al menos una raíz c_1. Nos referiremos a la ecuación

$$F_{e_1}(t) = 0$$

como la *ecuación de la arista* e_1.

La recursión

Para el resto de la construcción necesitaremos usar el elemento elegido w del cono normal de e_1. Estamos suponiendo que w es irracional. Luego, queda inducido un orden sobre $\mathbb{Q}^N$.

Supongamos definido $F_{n-1}(x_1, \ldots, x_{N+1})$, elegida una arista e_{n-1} del polítopo de Newton $P(F_{n-1})$ tal que $w \in C^*(e_{n-1})$ y construida $\Psi_{n-1} = c_{n-1}x_1^{-s_{n,1}} \ldots x_N^{-s_{n,N}}$ a partir de la pendiente $s(e_{n-1}) = (s_{n-1,1}, \ldots, s_{n-1,N})$ y de una solución c_{n-1} de la ecuación $F_{e_{n-1}}(t) = 0$ correspondiente a la arista e_{n-1}. Notaremos k_{n-1} a la multiplicidad de c_{n-1} como raíz de $F_{e_{n-1}}(t)$.

Sea F_n definido por

$$F_n(x_1, \ldots, x_{N+1}) := F_{n-1}(x_1, \ldots, x_N, \Psi_{n-1} + x_{N+1}).$$

Asumimos que $x_{N+1} = 0$ no es solución de $F_n = 0$. Si es solución, ya tenemos una raíz para F: en efecto, si

$$0 = F_n(x_1, \ldots, x_N, 0) = F_{n-1}(x_1, \ldots, x_N, \Psi_{n-1}),$$

entonces Ψ_{n-1} es raíz de F_{n-1}. Como

$$F_{n-1}(x_1, \ldots, x_N, x_{N+1}) = F_{n-2}(x_1, \ldots, x_N, \Psi_{n-2} + x_{N+1}),$$

tenemos que $\Psi_{n-1}+\Psi_{n-2}$ es raíz de F_{n-2}; de la misma forma, inductivamente, deducimos que $\Phi = \sum_{j=1}^{n-1} \Psi_j$ es una raíz de $F_1 = F$.

Para construir Ψ_n elegiremos una arista del polítopo de Newton de F_n de manera que satisfaga ciertas condiciones. Usaremos la siguiente noción:

Definición Sea P un polítopo en $\mathbb{R}^{N+1}$. Un *camino monótono de aristas en P* es una secuencia $E = \epsilon_1, \ldots, \epsilon_k$ tal que, para cada i, ϵ_i es una arista de P que no es paralela al hiperplano nulo y $M(\epsilon_i) = m(\epsilon_{i+1})$. Diremos que el camino monótono de aristas E es *coherente* si $\bigcap_{i=1}^{k} C^*(\epsilon_i) \neq \{0\}$.

El próximo lema garantiza la existencia de un camino monótono de aristas en el polítopo $P(F_n)$ que satisface, además, ciertas propiedades adicionales.

Lema 2.2.2 *En el polítopo de Newton $P(F_n)$ hay un único camino monótono de aristas coherente $E = e_{1,n}, \ldots, e_{k,n}$ tal que:*

a) El mayor vértice $M(e_{k,n})$ está en la recta L_{n-1} que contiene a e_{n-1}.

b) El menor vértice $m(e_{1,n})$ está en el hiperplano nulo.

c) La coordenada x_{N+1} del mayor vértice $M(e_{k,n})$ es igual a k_{n-1}.

d) $\langle w, s(e_{n-1})\rangle < \langle w, s(e_{k,n})\rangle < \ldots < \langle w, s(e_{1,n})\rangle$.

e) $w \in \bigcap_{i=1}^{k} C^*(e_{i,n})$.

Supongamos que

$$F_n(x_1, \ldots, x_{N+1}) = \sum_{I \in S_n} a_{n,I}\, x^I,$$

donde $S_n = \mathrm{Sop}(F_n)$.

Sea e_n una arista del camino monótono coherente dado por el Lema 2.2.2. Sean

- $s(e_n) = (s_{n,1}, \ldots, s_{n,N})$ la pendiente de la arista e_n,
- c_n una raíz del polinomio $F_{e_n}(t) \in \mathbb{C}[t]$ asociado a F_n y la arista e_n:

$$F_{e_n}(t) = \sum_{I=(i_1,\ldots,i_{N+1}) \in e_n \bigcap S_n} a_{n,I}\, t^{i_{N+1} - m(e_n)_{N+1}}. \tag{2.3}$$

Definimos

$$\Psi_n = c_n x_1^{-s_{n,1}} \ldots x_N^{-s_{n,N}}.$$

Notar la analogía entre esta construcción recursiva y la descripta en el Capítulo 1 en el caso de una variable, donde al trabajar con el polígono de Newton de f_{i-1}, se elige el exponente γ_i de modo que su valor sea el opuesto al de la pendiente de cierto segmento del polítopo de Newton de f_{i-1} y los posibles coeficientes c_i como ceros de un polinomio, en una variable, asociado al segmento elegido (ver Sección 1.2.2).

Habiendo construido inductivamente Ψ_n para todo $n \in \mathbb{N}$, nuestro candidato a solución de $F(x_1, \ldots, x_N, x_{N+1}) = 0$ será, como anticipamos,

$$\Phi(x_1, \ldots, x_N) = \sum_{n=1}^{\infty} \Psi_n.$$

En las próximas subsecciones nos dedicaremos a completar la construcción anterior y demostrar que Φ satisface las condiciones del Teorema 2.2.1. Para esto, en primer lugar, probaremos el Lema 2.2.2. En particular, el hecho que

$$\langle w, s(e_n)\rangle > \langle w, s(e_{n-1})\rangle > \ldots > \langle w, s(e_1)\rangle,$$

consecuencia del ítem (d) de dicho lema, nos asegura que los exponentes de los términos de Φ están ordenados decrecientemente bajo el orden inducido por w en $\mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$. Para terminar, mostraremos que:

1. Los exponentes de Φ pertenecen a algún reticulado $(1/m)\mathbb{Z}^N$.
2. $\mathrm{Sop}(\Phi)$ está incluido en algún cono propio de $\mathbb{R}^N$.
3. $F(x_1, \ldots, x_N, \Phi) = 0$.

2.2.2. Demostración del lema principal

En esta sección nos abocaremos a la demostración del Lema 2.2.2.

Primero construiremos el camino de aristas deseado y simultáneamente probaremos las partes a), b) y e) del enunciado del lema.

Consideremos F_n y su polítopo de Newton $P(F_n)$. Investigaremos su relación con F_{n-1} y $P(F_{n-1})$. Esto nos permitirá mostrar, en primer lugar, que en $P(F_n)$ hay puntos sobre la recta L_{n-1}.

Sea $S_{n-1} = \mathrm{Sop}(F_{n-1})$, el soporte de F_{n-1}. Supongamos que

$$F_{n-1}(x_1, \ldots, x_{N+1}) = \sum_{I=(i_1,\ldots,i_{N+1})\in S_{n-1}} a_{n-1,I}\, x^I,$$

con $i_{N+1} \in \mathbb{N}_0$ para cada $I = (i_1, \ldots, i_{N+1}) \in S_{n-1}$.

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} F_n(x_1, \ldots, x_{N+1}) &= F_{n-1}(x_1, \ldots, x_N, \Psi_{n-1} + x_{N+1}) \\ &= \sum_{I \in S_{n-1}} a_{n-1,I}\, x_1^{i_1} \ldots x_N^{i_N} (\Psi_{n-1} + x_{N+1})^{i_{N+1}} \\ &= \sum_{I \in S_{n-1}} a_{n-1,I}\, x_1^{i_1} \ldots x_N^{i_N} \sum_{j=0}^{i_{N+1}} \binom{i_{N+1}}{j} \Psi_{n-1}^{j}\, x_{N+1}^{i_{N+1}-j}. \end{aligned}$$

Si reemplazamos $\Psi_{n-1} = c_{n-1} x_1^{-s_{n-1,1}} \ldots x_N^{-s_{n-1,N}}$, donde $(s_{n-1,1}, \ldots, s_{n-1,N}) = s(e_{n-1})$, en la última expresión y reacomodamos sus términos, obtenemos

$$F_n(x_1, \ldots, x_{N+1}) = \sum_{I \in S_{n-1}} \sum_{j=0}^{i_{N+1}} \binom{i_{N+1}}{j} a_{n-1,I} c_{n-1}^{j} x_1^{i_1 - j\, s_{n-1,1}} \ldots x_N^{i_N - j\, s_{n-1,N}} x_{N+1}^{i_{N+1}-j}. \tag{2.4}$$

Notar que, en esta expresión, los exponentes de x_{N+1} son siempre enteros no negativos. Examinando estas expresiones, también podemos ver que, para cada término

$$\binom{i_{N+1}}{j} a_{n-1,I}\, c_{n-1}^{j} x_1^{i_1 - j\, s_{n-1,1}} \ldots x_N^{i_N - j\, s_{n-1,N}} x_{N+1}^{i_{N+1}-j},$$

el punto del polítopo de Newton $P(F_n)$ que le corresponde está sobre la recta que pasa por I, un punto del soporte de F_{n-1}, con dirección $(-s_{n-1,1}, \ldots, -s_{n-1,N}, -1) = (-s(e_{n-1}), -1)$. Diremos que dicho punto está sobre la recta que pasa por I con *pendiente* $s(e_{n-1})$, es decir, la pendiente de la arista e_{n-1} que vimos anteriormente. Deducimos que:

Observación Cada punto del polítopo de Newton $P(F_n)$ está sobre una recta que pasa por un punto de $P(F_{n-1})$ y es paralela a la arista e_{n-1}.

En efecto, un punto p de $P(F_n)$ está sobre un segmento cuyos extremos son dos puntos q_1 y q_2 de $\mathrm{Sop}(F_n)$, los cuales son de la forma $q_1 = I_1 - j_1(s(e_{n-1}), 1)$ y $q_2 = I_2 - j_2(s(e_{n-1}), 1)$ respectivamente. Entonces tenemos, para algún $0 \leq \lambda \leq 1$,

$$p = \lambda q_1 + (1-\lambda) q_2 = \lambda(I_1 - j_1(s(e_{n-1}), 1)) + (1-\lambda)(I_2 - j_2(s(e_{n-1}), 1)) =$$

$$= (\lambda I_1 + (1-\lambda)I_2) - (\lambda j_1 + (1-\lambda)j_2)(s(e_{n-1}), 1).$$

Como $I_1, I_2 \in \mathrm{Sop}(F_{n-1})$, resulta que $\lambda I_1 + (1-\lambda)I_2 \in P(F_{n-1})$. Luego, hemos escrito a p como un punto de $P(F_{n-1})$ más un múltiplo de la dirección de la arista e_{n-1}, tal como queríamos.

Como una consecuencia de esto se obtiene:

Observación El polítopo de Newton $P(F_n)$ está soportado por el hiperplano w-constante determinado por e_{n-1}, que notamos $H_{w,e_{n-1}}$.

En efecto, como por hipótesis e_{n-1} es una arista admisible de $P(F_{n-1})$ y $w \in C^*(e_{n-1})$, por el Lema 2.1.3, sabemos que $H_{w,e_{n-1}}$ es un hiperplano soporte para $P(F_{n-1})$. Recordemos que $H_{w,e_{n-1}} : \langle \eta, x\rangle = b$ se define como en (2.1), considerando $P = P(F_{n-1})$ y $e = e_{n-1}$.

Ahora, dado $p \in P(F_n)$, vimos que $p = q - t.\,(s(e_{n-1}), 1)$ para algún $q \in P(F_{n-1})$ y $t \in \mathbb{R}$. Entonces,

$$\langle \eta, p\rangle = \langle \eta, q - t.\,(s(e_{n-1}), 1)\rangle = \langle \eta, q\rangle - t.\,\langle \eta, (s(e_{n-1}), 1)\rangle.$$

Recordando que $\langle \eta, (s(e_{n-1}), 1)\rangle = 0$, pues $H_{w,e_{n-1}}$ contiene a e_{n-1}, resulta que

$$\langle \eta, p\rangle = \langle \eta, q\rangle$$

y, como $H_{w,e_{n-1}}$ soporta a $P(F_{n-1})$, se tiene que $\langle \eta, q\rangle \leq b$. Concluimos que

$$\langle \eta, p\rangle \leq b.$$

Consideremos los sumandos de F_n cuyos exponentes corresponden a puntos de $P(F_n)$ que están sobre la recta L_{n-1} que contiene a e_{n-1}. Sea p_1 el punto de intersección entre L_{n-1} y el hiperplano nulo y sea $p_2 = M(e_{n-1})$ el mayor vértice de e_{n-1}. Examinaremos los coeficientes de los monomios en F_n que corresponden a p_1 y a p_2.

Observamos que cada término $a_{n-1,I}\, x^I$ de F_{n-1} contribuye a términos de F_n con exponentes $I - j(s(e_{n-1}), 1)$ con $0 \leq j \leq i_{N+1}$. Estos exponentes corresponden a puntos que están sobre la recta paralela a e_{n-1} que pasa por I y por "abajo" de I, ya que sus coordenadas x_{N+1} son de la forma $i_{N+1} - j$ con $0 \leq j \leq i_{N+1}$, luego, menores o iguales que i_{N+1}. Esto implica que los puntos $I \in S_{n-1}$ que contribuyen a términos de F_n con exponentes sobre L_{n-1} están sobre la arista e_{n-1}.

En consecuencia, para analizar los coeficientes de los monomios en F_n que corresponden a p_1 y a p_2, que están ambos sobre L_{n-1}, basta mirar las contribuciones que provienen de monomios cuyos exponentes son puntos de $S_{n-1} \cap e_{n-1}$.

Para p_1, el coeficiente del monomio correspondiente en F_n es

$$\sum_{I \in e_{n-1} \bigcap S_{n-1}} a_{n-1,I}\, c_{n-1}^{i_{N+1}}. \tag{2.5}$$

Notar que lo obtenemos poniendo $j = i_{N+1}$ en la expresión (2.4), ya que los exponentes de x_{N+1} deben ser nulos. Ahora bien, por construcción, c_{n-1} es un cero de la ecuación de la arista e_{n-1} para F_{n-1}, es decir, una raíz del polinomio

$$F_{e_{n-1}}(t) = \sum_{I=(i_1,\ldots,i_{N+1}) \in e_{n-1} \bigcap S_{n-1}} a_{n-1,I}\, t^{i_{N+1} - m(e_{n-1})_{N+1}}. \tag{2.6}$$

En consecuencia, la suma en (2.5) es igual a 0. Por lo tanto, p_1 no está en $P(F_n)$.

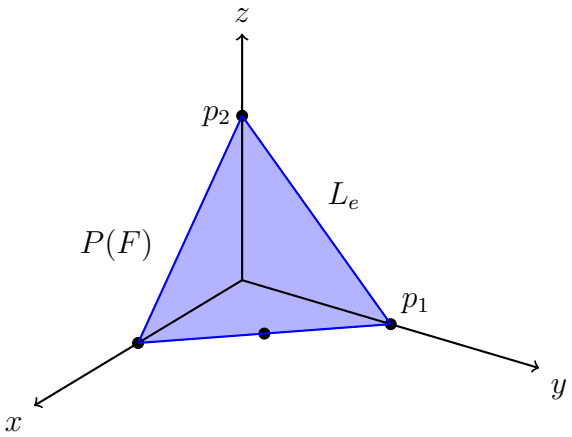
Por otro lado, el coeficiente del término correspondiente a p_2 en F_n es el mismo con el que el monomio aparecía en F_{n-1}. En efecto, cada punto $I \in S_{n-1} \bigcap e_{n-1}$ contribuye en F_n con términos cuyos exponentes son puntos de la forma $I - j.\,(s(e_{n-1}), 1)$ con $0 \leq j \leq i_{N+1}$. Como $p_2 = M(e_{n-1})$ es el punto de e_{n-1} con máxima coordenada x_{N+1}, si $I \in e_{n-1}$, $I \neq p_2$, se tiene que $i_{N+1} - j \leq i_{N+1} < (p_2)_{N+1}$; por lo tanto, I no contribuye al término correspondiente a p_2 en F_n. Haciendo lo mismo para p_2, tenemos que p_2 contribuye en F_n con términos con exponentes de la forma $p_2 - j(s(e_{n-1}), 1)$, con $0 \leq j \leq (p_2)_{N+1}$; de éstos sólo es igual a p_2 el que corresponde a $j = 0$. Concluimos que el único término de F_{n-1} que contribuye al término correspondiente a p_2 en F_n es $a_{n-1,p_2} x^{p_2}$.

El ejemplo siguiente ilustra esta situación:

Ejemplo. Sean $F \in \mathbb{C}[x, y, z]$ el polinomio

$$F(x, y, z) = x^2 + xy - y^2 + z^2$$

y $P(F)$ su polítopo de Newton tal como se ve en la figura:



Sea e la arista del polítopo que une los puntos $p_1 = (0, 2, 0)$ y $p_2 = (0, 0, 2)$.

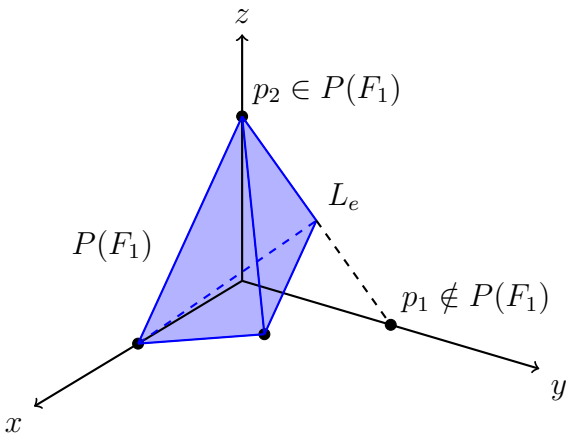
En el primer paso, $F_1(x, y, z) = F(x, y, z)$. Tenemos que la pendiente de $e_1 = e$ es $s(e_1) = (0, -1)$ y el polinomio que da la ecuación de la arista e_1 es $F_{e_1}(t) = t^2 - 1$, cuyas raíces son 1 y -1. Tomando $c_1 = 1$, construimos

$$\Psi_1 := cx^{-s_{1,1}}y^{-s_{1,2}} = 1.\, x^0y^1 = y.$$

Entonces, en el siguiente paso se continúa con

$$F_2(x, y, z) := F_1(x, y, z + \Psi_1) = F(x, y, z + y) = x^2 + xy + z^2 + 2zy.$$

Aquí vemos que el coeficiente de p_2 sigue siendo el mismo que en F y que $p_1 \notin P(F_2)$ pues no aparece el término y^2. También podemos observarlo en la siguiente figura:



□

Por último notemos que hay términos en F_n cuyos exponentes corresponden a puntos en el hiperplano nulo. Esto es consecuencia de que estamos suponiendo que $x_{N+1} = 0$ no es raíz de F_n: si todos los términos de F_n fueran de la forma $a_{n,I}\, x_1^{i_1} \dots x_N^{i_N} x_{N+1}^{i_{N+1}}$, con $i_{N+1} \neq 0$, entonces $x_{N+1} = 0$ sería raíz de F_n.

Juntando todo lo anterior, tenemos que hay puntos de $P(F_n)$ que están sobre L_{n-1} y tienen su $(N+1)$-ésima coordenada estrictamente positiva, y que hay puntos de este polítopo que están en el hiperplano nulo, es decir, estrictamente "abajo" de todos los puntos de $P(F_n)$ que están sobre L_{n-1}. Con esto, vemos que podemos empezar un camino monótono de aristas E en $P(F_n)$ con una arista cuyo vértice menor esté en el hiperplano nulo y podemos terminar el camino en una arista cuyo vértice mayor esté sobre L_{n-1}.

Más precisamente, el camino de aristas E se construye de manera que cumpla la propiedad de maximizar la funcional lineal w en cada sección horizontal de $P(F_n)$.

Sea $h = \text{mín}\{i_{N+1} \mid I = (i_1, \dots, i_{N+1}) \in P(F_n) \cap L_{n-1}\}$, es decir, la mínima coordenada $(N+1)$-ésima de los puntos de $P(F_n)$ que están sobre L_{n-1}. Dado $c \in \mathbb{R}$, $0 \leq c \leq h$, será un punto de E el punto de $P(F_n) \bigcap \{x_{N+1} = c\}$ que maximice $\langle w, x \rangle$.

Observación Para cada $0 \leq c \leq h$, existe un único punto de $P(F_n) \bigcap \{x_{N+1} = c\}$ en el que se maximiza $\langle w, x \rangle$.

Demostración. Consideremos $c \in \mathbb{Q}$, $0 \leq c \leq h$, y miremos la sección horizontal $P(F_n) \bigcap \{x_{N+1} = c\}$, que es no vacía por la definición de h. Como $P(F_n)$ es un polítopo racional y $c \in \mathbb{Q}$, resulta que $P(F_n) \bigcap \{x_{N+1} = c\}$ es un polítopo racional. Sabemos que el máximo de una función lineal sobre un polítopo se alcanza sobre una cara. Si w alcanzara el máximo sobre una cara de dimensión mayor o igual a uno de $P(F_n) \bigcap \{x_{N+1} = c\}$, habría dos vértices de esa cara, digamos, p y q, tales que $p, q \in \mathbb{Q}^{N+1}$ y $\langle w, p \rangle = \langle w, q \rangle$. Esto es absurdo pues w es irracional. Luego, w alcanza el máximo en una cara de dimensión cero, es decir, en un solo punto de $P(F_n) \bigcap \{x_{N+1} = c\}$. La observación se sigue de la densidad de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$ y la continuidad de la funcional lineal $\langle w, x \rangle$. □

Recordemos que $\eta = (w_1, \dots, w_N, -\langle w, s(e_{n-1}) \rangle)$ es la normal del hiperplano w-constante $H_{w,e_{n-1}}$ que contiene a L_{n-1}. Para $x \in P(F_n) \bigcap \{x_{N+1} = c\}$, tenemos que

$$\langle w, x\rangle \text{ es máximo si y sólo si } \langle \eta, x\rangle = \sum_{i=1}^{N} w_i x_i - c.\langle w, s(e_{n-1})\rangle \text{ es máximo}$$

pues $c.\langle w, s(e_{n-1})\rangle$ está fijo para $x \in P(F_n) \bigcap \{x_{N+1} = c\}$. Geométricamente, esto implica que nos sirve para el camino de aristas el punto $x \in P(F_n) \bigcap \{x_{N+1} = c\}$ más cercano a $H_{w,e_{n-1}}$. (Recordemos que como $P(F_n)$ está soportado por $H_{w,e_{n-1}}$, se tiene que $\langle \eta, x\rangle \leq b \ \forall x \in P(F_n) \ \bigcap \ \{x_{N+1} = c\}$.)

Dado que en cada sección horizontal $\{x_{N+1} = c\}$ del polítopo $P(F_n)$ para $0 \leq c \leq h$, el máximo de $\langle w, x\rangle$ se alcanza en un único punto p_c, deducimos que el conjunto de todos los puntos p_c, $0 \leq c \leq h$, forma un camino monótono de aristas admisibles de $P(F_n)$. Llamemos

$$E = e_{1,n}, \ldots, e_{k,n}$$

a este camino, donde $e_{1,n}, \ldots, e_{k,n}$ son aristas de $P(F_n)$ y $M(e_{i,n}) = m(e_{i+1,n})$ para cada $1 \leq i \leq k-1$. Tenemos que $m(e_{1,n})$ es el punto de $P(F_n) \bigcap \{x_{N+1} = 0\}$ que maximiza $\langle w, x\rangle$ (en particular, $m(e_{1,n})$ está en el hiperplano nulo), y $M(e_{k,n})$ es el punto de $P(F_n) \bigcap L_{n-1}$ con menor coordenada x_{N+1} (es claro que en $M(e_{k,n})$ se maximiza $\langle w, x\rangle$ pues este punto está sobre el hiperplano $H_{w,e_{n-1}}$).

De esta manera, hemos construido un camino monótono de aristas E de $P(F_n)$ y hemos probado los ítems a) y b) del enunciado del lema.

Veamos e), es decir, que $w \in C^*(e_{i,n}) \ \forall i = 1, \ldots, k$. Para esto, debemos ver que, para cada i, se tiene que $\langle w, z\rangle \leq 0$ para todo $z \in C(e_{i,n})$.

Sea $z \in C(e_{i,n})$ y sea $y_{e_{i,n}} = \Pi_{e_{i,n}}(M(e_{i,n}))$ el punto de intersección de la recta que contiene a $e_{i,n}$ con el hiperplano nulo. Como $C(e_{i,n}) = C(y_{e_{i,n}})$, tenemos que $z = \lambda \ (\Pi_{e_{i,n}}(p) - y_{e_{i,n}})$ con $p \in P(F_n)$ y $\lambda \geq 0$. Podemos suponer $\lambda > 0$, es decir, que p no pertenece a la recta que contiene a $e_{i,n}$. Sea $c = p_{N+1}$.

Si $m(e_{i,n})_{N+1} \leq c \leq M(e_{i,n})_{N+1}$, por construcción de E, el máximo de $\langle w, x\rangle$ sobre $P(F_n) \bigcap \{x_{N+1} = c\}$ se alcanza en un punto q de $e_{i,n}$. Como $p \notin e_{i,n}$, resulta que

$$\langle w, p\rangle < \langle w, q\rangle.$$

Luego,

$$\begin{aligned}\langle w, \Pi_{e_{i,n}}(p)\rangle &= \langle w, p - c(s(e_{i,n}), 1)\rangle = \langle w, p\rangle - c\langle w, s(e_{i,n})\rangle \\ &< \langle w, q\rangle - c\langle w, s(e_{i,n})\rangle = \langle w, \Pi_{e_{i,n}}(q)\rangle = \langle w, y_{e_{i,n}}\rangle,\end{aligned}$$

de donde deducimos que

$$\langle w, z\rangle = \lambda(\langle w, \Pi_{e_{i,n}}(p)\rangle - \langle w, y_{e_{i,n}}\rangle) < 0.$$

Si $c > M(e_{i,n})_{N+1}$, el segmento que une $m(e_{i,n})$ y p está incluido en $P(F_n)$ e interseca el hiperplano $\{x_{N+1} = M(e_{i,n})_{N+1}\}$ en un punto $\widetilde{p} = \mu(p - m(e_{i,n})) + m(e_{i,n})$, $0 < \mu < 1$. Entonces

$$\Pi_{e_{i,n}}(\widetilde{p}) = \mu(\Pi_{e_{i,n}}(p) - y_{e_{i,n}}) + y_{e_{i,n}},$$

con lo cual

$$\widetilde{z} := \Pi_{e_{i,n}}(\widetilde{p}) - y_{e_{i,n}} = \mu(\Pi_{e_{i,n}}(p) - y_{e_{i,n}}) = \frac{\mu}{\lambda}.\, z.$$

Por lo visto en el caso anterior, $\langle w, \widetilde{z}\rangle < 0$ y, por lo tanto, $\langle w, z\rangle < 0$.

Finalmente, el caso en que $c < m(e_{i,n})_{N+1}$ se prueba análogamente, considerando el segmento que une p y $M(e_{i,n})$.

Notemos que usando el Lema 2.1.3, vemos que el item e) asegura que para cada arista $e_{i,n}$ el único hiperplano w-constante que contiene a $e_{i,n}$ es un hiperplano soporte para el polítopo $P(F_n)$.

Ahora demostremos d).

Veamos que $\langle w, s(e_{n-1})\rangle < \langle w, s(e_{k,n})\rangle$. Las otras desigualdades se prueban en forma análoga.

Sean

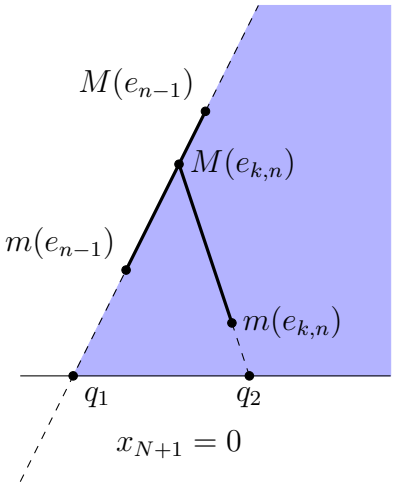
$$q_1 := \Pi_{e_{n-1}}(M(e_{k,n})) = M(e_{k,n}) - (M(e_{k,n}))_{N+1}(s(e_{n-1}), 1)$$

y

$$q_2 := \Pi_{e_{k,n}}(M(e_{k,n})) = M(e_{k,n}) - (M(e_{k,n}))_{N+1}(s(e_{k,n}), 1).$$

Consideremos $H_{w,e_{n-1}} : \langle \eta, x\rangle = b$ el hiperplano w-constante que contiene a e_{n-1}. Recordemos que es un hiperplano soporte para $P(F_{n-1})$ y $P(F_n)$ y que deja a ambos polítopos "del mismo lado".

Se tiene que $q_1 \in H_{w,e_{n-1}}$. Afirmamos que q_2 está en el interior del semiespacio determinado por $H_{w,e_{n-1}}$ que contiene a ambos polítopos.



En efecto:

- $q_2 \notin H_{w,e_{n-1}}$ (de lo contrario, $\langle w, q_2\rangle = \langle w, q_1\rangle$, pero esto no puede pasar pues $q_1, q_2 \in \mathbb{Q}^{N+1}$ y w es irracional);
- la recta $L_{e_{k,n}}$ interseca a $H_{w,e_{n-1}}$ en un solo punto, $M(e_{k,n})$;
- $m(e_{k,n})$ está en el interior del semiespacio determinado por $H_{w,e_{n-1}}$ que contiene a $P(F_n)$;
- $q_2 = \Pi_{e_{k,n}}(M(e_{k,n})) = \Pi_{e_{k,n}}(m(e_{k,n}))$ está en el mismo semiespacio determinado por $H_{w,e_{n-1}}$ que $m(e_{k,n})$.

Luego,

$$\langle \eta, q_2\rangle < b = \langle \eta, q_1\rangle$$

y entonces, como las primeras N coordenadas de η forman el vector w, se tiene que

$$\langle w, q_2\rangle < \langle w, q_1\rangle.$$

Esta desigualdad implica que

$$-(M(e_{k,n}))_{N+1}\langle w, s(e_{k,n})\rangle < -(M(e_{k,n}))_{N+1}\langle w, s(e_{n-1})\rangle$$

Como $-(M(e_{k,n}))_{N+1} < 0$, finalmente obtenemos que

$$\langle w, s(e_{k,n})\rangle > \langle w, s(e_{n-1})\rangle.$$

Para terminar la demostración del lema, veamos c).

Queremos ver que $M(e_{k,n})_{N+1} = k_{n-1}$, es decir, que $M(e_{k,n})_{N+1}$ coincide con la multiplicidad de c_{n-1} como raíz de

$$F_{e_{n-1}}(t) = \sum_{I=(i_1,\ldots,i_{N+1})\in e_{n-1}\bigcap S_{n-1}} a_{n-1,I}\, t^{i_{N+1}-m(e_{n-1})_{N+1}},$$

la ecuación de la arista e_{n-1}, definida en (2.6).

Recordemos que, por construcción, $M(e_{k,n})$ es el punto de $P(F_n)\bigcap L_{n-1}$ con menor coordenada x_{N+1}.

Analicemos los coeficientes de F_n. Si escribimos

$$F_{n-1}(x_1,\ldots,x_{N+1}) = \sum_{I=(i_1,\ldots,i_{N+1})\in S_{n-1}} a_{n-1,I}\, x^I,$$

tenemos

$$\begin{aligned}
F_n(x_1,\ldots,x_{N+1}) &= F_{n-1}(x_1,\ldots,x_N,\Psi_{n-1}+x_{N+1}) \\
&= \sum_{I\in S_{n-1}} a_{n-1,I}\, x_1^{i_1}\ldots x_N^{i_N}(\Psi_{n-1}+x_{N+1})^{i_{N+1}} \\
&= \sum_{I\in S_{n-1}} a_{n-1,I}\, x_1^{i_1}\ldots x_N^{i_N}\sum_{j=0}^{i_{N+1}}\binom{i_{N+1}}{j}\Psi_{n-1}^{j}\, x_{N+1}^{i_{N+1}-j} \\
&= \sum_{I\in S_{n-1}}\sum_{j=0}^{i_{N+1}}\binom{i_{N+1}}{j} a_{n-1,I}\, c_{n-1}^{j}\,\bar{x}^{I'-j.s(e_{n-1})}\, x_{N+1}^{i_{N+1}-j},
\end{aligned}$$

donde $\overline{x} = (x_1,\ldots,x_N)$ e $I' = (i_1,\ldots,i_N)$ para cada $I \in S_{n-1}$.

Notemos que los exponentes de los monomios de F_n son de la forma $I - j(s(e_{n-1}),1)$, con $0 \le j \le i_{N+1},\ I \in S_{n-1}$. Estamos interesados en aquellos exponentes de monomios de F_n que están en L_{n-1}. Estos son de la forma

$$I - j(s(e_{n-1}),1), \text{ con } 0 \le j \le i_{N+1},\ I \in e_{n-1}.$$

Notemos $F_n|_{L_{n-1}}$ a la suma de los términos de F_n cuyos exponentes están sobre la recta L_{n-1} y $F_{n-1}|_{e_{n-1}}$ a la suma de los términos de F_{n-1} cuyos exponentes están sobre la arista e_{n-1}. Entonces:

$$\begin{aligned} F_n|_{L_{n-1}} &= \sum_{I\in S_{n-1}\bigcap e_{n-1}} \sum_{j=0}^{i_{N+1}} \binom{i_{N+1}}{j} a_{n-1,I}\, c_{n-1}^{j}\, \overline{x}^{I'-j.s(e_{n-1})}.x_{N+1}^{i_{N+1}-j} \\ &= \sum_{I\in S_{n-1}\bigcap e_{n-1}} a_{n-1,I}\, x_1^{i_1}\ldots x_N^{i_N}(\Psi_{n-1}+x_{N+1})^{i_{N+1}} \\ &= F_{n-1}|_{e_{n-1}}(x_1,\ldots,x_N,\Psi_{n-1}+x_{N+1}). \end{aligned}$$

Como $M(e_{k,n})$ es, en definitiva, el punto con menor potencia de x_{N+1} que aparece en los términos de $F_n|_{L_{n-1}}$ vamos a concentrarnos en los coeficientes de las potencias de x_{N+1} que aparecen en este polinomio. Para esto, analizaremos el desarrollo de Taylor del polinomio $F_n|_{L_{n-1}} \in R[x_{N+1}]$ alrededor del 0, donde R es el anillo de polinomios de Laurent con exponentes fraccionarios en las variables $x_1,\ldots,x_N$.

Los términos que corresponden a $(x_{N+1})^0$ son:

$$\sum_{I\in S_{n-1}\bigcap e_{n-1}} a_{n-1,I}\, c_{n-1}^{i_{N+1}}\, \overline{x}^{p_{n-1}},$$

donde $(p_{n-1},0)$ es el punto de $L_{n-1}\bigcap\{x_{N+1}=0\}$. Notemos que el coeficiente que le corresponde al monomio con exponente $(p_{n-1},0)$ es

$$\sum_{I\in S_{n-1}\bigcap e_{n-1}} a_{n-1,I} c_{n-1}^{i_{N+1}} = (t^{m(e_{n-1})_{N+1}} F_{e_{n-1}}(t))\ |_{t=c_{n-1}} = 0,$$

pues c_{n-1} es raíz de $F_{e_{n-1}}(t)$. En consecuencia, $M(e_{k,n})_{N+1} > 0$.

Los términos en los que aparece $(x_{N+1})^1$ corresponden al punto

$$(p_{n-1}^{(1)},1) \in L_{n-1}\bigcap\{x_{N+1}=1\}.$$

Entonces para analizar la parte de $F_n|_{L_{n-1}}$ con $(x_{N+1})^1$, miramos

$$\begin{aligned} (F_n\ |_{L_{n-1}})'(x_1,\ldots,x_N,0) &= (F_{n-1}\ |_{e_{n-1}})'(x_1,\ldots,x_N,\Psi_{n-1}) \\ &= \sum_{I\in S_{n-1}\bigcap e_{n-1};\, i_{N+1}\geq 1} i_{N+1}.\, a_{n-1,I}\, c_{n-1}^{i_{N+1}-1}\, \bar{x}^{p_{n-1}^{(1)}}. \end{aligned}$$

Luego, el coeficiente en F_n del monomio con exponente $(p_{n-1}^{(1)}, 1)$ es

$$\sum_{I \in S_{n-1} \bigcap e_{n-1};\ i_{N+1} \geq 1} i_{N+1}.a_{n-1,I}\, c_{n-1}^{i_{N+1}-1} = (t^{m(e_{n-1})_{N+1}} F_{e_{n-1}}(t))' \mid_{t=c_{n-1}} .$$

Observamos que este coeficiente es 0 si y sólo si $k_{n-1} \geq 2$.

Deducimos entonces que si $k_{n-1} = 1$, el coeficiente en F_n del monomio con exponente $(p_{n-1}^{(1)}, 1)$ es no nulo. Entonces $M(e_{k,n}) = (p_{n-1}^{(1)}, 1)$ y, por lo tanto, $M(e_{k,n})_{N+1} = 1 = k_{n-1}$. Por otro lado, si $k_{n-1} \geq 2$, el coeficiente del monomio con exponente $(p_{n-1}^{(1)}, 1)$ es nulo y entonces, todos los puntos de $P(F_n) \cap L_{n-1}$ satisfacen $x_{N+1} \geq 2$.

Similarmente, para $h \geq 1$, los términos en los que aparece $(x_{N+1})^h$ corresponden al punto

$$(p_{n-1}^{(h)}, h) \in L_{n-1} \bigcap \{x_{N+1} = h\}.$$

Tenemos que el coeficiente de x_{N+1}^h en $F_n|_{L_{n-1}}$ es

$$\frac{1}{h!}(F_n|_{L_{n-1}})^{(h)}(x_1, \ldots, x_N, 0) = \frac{1}{h!}(F_{n-1}|_{e_{n-1}})^{(h)}(x_1, \ldots, x_N, \Psi_{n-1})$$

$$= \frac{1}{h!} \sum_{I \in S_{n-1} \bigcap e_{n-1}; i_{N+1} \geq h} \frac{i_{N+1}!}{(i_{N+1}-h)!}\ a_{n-1,I}\, c_{n-1}^{i_{N+1}-h}\, \overline{x}^{p_{n-1}^{(h)}}.$$

En consecuencia, el coeficiente en F_n del monomio que corresponde a $(p_{n-1}^{(h)}, 0)$ es

$$\frac{1}{h!} \sum_{I \in S_{n-1} \bigcap e_{n-1}; i_{N+1} \geq h} \frac{i_{N+1}!}{(i_{N+1}-h)!}\ a_{n-1,I}\, c_{n-1}^{i_{N+1}-h} = \frac{1}{h!}(t^{m(e_{n-1})_{N+1}} F_{e_{n-1}}(t))^{(h)} \mid_{t=c_{n-1}} .$$

Así, concluimos que, para cada h, el coeficiente en F_n correspondiente al punto de $L_{n-1} \bigcap \{x_{N+1} = h\}$ es

$$\frac{1}{h!}(t^{m(e_{n-1})_{N+1}} F_{e_{n-1}}(t))^{(h)} \mid_{t=c_{n-1}} .$$

En consecuencia, este coeficiente es 0 para todo $0 \leq h < k_{n-1}$ y es no nulo para $h = k_{n-1}$. Concluimos entonces que el punto $M(e_{k,n})$ de altura mínima de $P(F_n)$ que está sobre la recta L_{n-1} es $(p_{n-1}^{(k_{n-1})}, k_{n-1})$, que satisface $(M(e_{k,n}))_{N+1} = k_{n-1}$, como queríamos.

De este modo, se completa la demostración del Lema 2.2.2.

2.2.3. El soporte de la serie

En esta sección analizaremos el soporte de la serie formal construida, con el objeto de mostrar que está incluido en un reticulado de puntos racionales y en un cono propio de $\mathbb{R}^N$. Para esto, comenzaremos probando un resultado auxiliar.

Mantenemos la misma notación que en la sección anterior.

Lema 2.2.3 *Existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \geq n_0$, el camino monótono de aristas E dado por el Lema 2.2.2 consta de una única arista e_n tal que $m(e_n)$ está en el hiperplano nulo. Además, $M(e_n) = M(e_{n_0})$ para todo $n \geq n_0$.*

Demostración. Para cada $n \in \mathbb{N}$, notemos $l_n = (M(e_n) - m(e_n))_{N+1}$ a la longitud de e_n en la coordenada x_{N+1}. Observamos que, si $F_{e_n}(t)$ es el polinomio definido en (2.3) correspondiente a la arista e_n y $c_n \in \mathbb{C}$ es la raíz de F_{e_n} elegida en la construcción, entonces

$$k_n = \text{mult}(c_n, F_{e_n}) \leq \text{gr}(F_{e_n}) = l_n.$$

Por otro lado, si $n > 1$, por el Lema 2.2.2, teniendo en cuenta que e_n se elige como una arista del camino monótono $e_{1,n}, \ldots, e_{k,n}$, sabemos que

$$m(e_n)_{N+1} \geq m(e_{1,n})_{N+1} = 0 \quad \text{y} \quad M(e_n)_{N+1} \leq M(e_{k,n})_{N+1} \leq k_{n-1}. \tag{2.7}$$

Luego, se tiene que,

$$l_n = M(e_n)_{N+1} - m(e_n)_{N+1} \leq k_{n-1}.$$

En consecuencia,

$$k_n \leq l_n \leq k_{n-1}.$$

Deducimos entonces que $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión decreciente. Como $k_n \in \mathbb{N}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, la sucesión debe estacionarse, es decir, debe existir algún $n_0 > 1$ tal que

$$k_n = k_{n-1} \quad \forall n \geq n_0.$$

Procedemos ahora a probar las afirmaciones del Lema.

Sea $n \geq n_0$. La igualdad $k_n = k_{n-1}$ implica que $l_n = k_{n-1}$, ya que $k_n \leq l_n \leq k_{n-1}$ para todo n. Como consecuencia, en (2.7) deben ser todas igualdades; en particular,

$$M(e_n)_{N+1} = k_{n-1}, \qquad m(e_n)_{N+1} = 0,$$

y entonces $e_n = e_{1,n} = e_{k,n}$. Luego, el camino monótono de aristas $e_{1,n}, \ldots, e_{k,n}$ consta de una única arista e_n cuyo vértice menor está sobre el hiperplano nulo y cuyo vértice mayor está sobre la recta L_{n-1} que contiene a e_{n-1}.

Finalmente, probemos inductivamente que $M(e_n) = M(e_{n_0})$ para todo $n \geq n_0$.

La igualdad $k_n = k_{n-1} = k_{n_0-1}$ nos dice que $M(e_{n+1})_{N+1} = M(e_n)_{N+1} = k_{n_0-1}$. Además, como ya vimos, $M(e_{n+1})$ está sobre la recta L_n que contiene a e_n. Así, $M(e_{n+1})$ y $M(e_n)$ están ambos en la intersección de L_n con el hiperplano $\{x_{N+1} = k_{n_0-1}\}$. Dado que e_n no es paralela al hiperplano nulo, esta intersección consta de un único punto, con lo cual $M(e_{n+1}) = M(e_n)$. □

En lo que sigue, sea

$$\Phi = \sum_{n=1}^{\infty} c_n x_1^{-s_{n,1}} \ldots x_N^{-s_{n,N}} = \sum_{n=1}^{\infty} \Psi_n$$

una serie formal con exponentes fraccionarios construida mediante el procedimiento descripto en la Sección 2.2.1.

Recordemos que, para cada $n \in \mathbb{N}$, $(s_{n,1}, \ldots, s_{n,N}) = s(e_n)$ es la pendiente de la arista e_n elegida en el n-ésimo paso de la recursión.

Lema 2.2.4 *Los exponentes de Φ están en un reticulado.*

Demostración. El argumento es similar al que vimos en la Sección 1.2.2 para el caso de una variable.

En el Lema 2.2.3 vimos que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, $\forall n \geq n_0$,

- el camino monótono de aristas dado por el Lema 2.2.2 consiste de una única arista, e_n;
- $m(e_n)$ está en el hiperplano nulo;
- $M(e_n) = M(e_{n_0})$ y, por lo tanto, $(M(e_n))_{N+1} = k_{n_0-1}$.

Sea $m \in \mathbb{N}$ tal que las pendientes $s(e_1), \ldots, s(e_{n_0-1})$ están en el reticulado $\frac{1}{m}\mathbb{Z}^N$. Como, para cada $n \geq 2$, los exponentes de F_n son de la forma $I - j(s(e_{n-1}), 1)$, con $I \in \mathrm{Sop}(F_{n-1})$ y $j \in \mathbb{N}$, resulta que, para $n = 1, \ldots, n_0$, los exponentes de F_n están en el reticulado $\frac{1}{m}\mathbb{Z}^{N+1}$.

Veremos inductivamente que, para todo $n \geq n_0$, $s(e_n) \in \frac{1}{m}\mathbb{Z}^N$. Simultáneamente, el razonamiento anterior implica que los exponentes de F_{n+1} están en el reticulado $\frac{1}{m}\mathbb{Z}^{N+1}$.

Sea $n \geq n_0$. Sea $e_n = E$ el camino de aristas del polítopo $P(F_n)$. Por lo que dijimos arriba, podemos escribir $M(e_n) = (q_0, k_{n_0-1})$ y $m(e_n) = (q_n, 0)$, donde q_0 y $q_n \in \mathbb{R}^N$. Así, $e_n = [(q_n, 0), (q_0, k_{n_0-1})]$.

Como los exponentes de F_n están en el reticulado $\frac{1}{m}\mathbb{Z}^{N+1}$ hay vectores $Q_0,\ Q_n \in \mathbb{Z}^N$ tales que $q_0 = \dfrac{Q_0}{m}$ y $q_n = \dfrac{Q_n}{m}$. Luego,

$$s(e_n) = \frac{q_0 - q_n}{k_{n_0-1}} = \frac{Q_0 - Q_n}{mk_{n_0-1}} = \frac{D}{md}$$

donde $D = (D_1, \ldots, D_N) \in \mathbb{Z}^N$ y $d \in \mathbb{N}$ son tales que existe ℓ, $1 \leq \ell \leq n$, con D_ℓ y d coprimos.

Veamos que la ecuación de la arista e_n está dada por un polinomio en t^d. Recordemos que

$$F_{e_n}(t) = \sum_{I \in e_n \bigcap S_n} a_{n,I}\, t^{i_{N+1}},$$

pues $m(e_n)_{N+1} = 0$. Luego, basta ver que d divide a i_{N+1} para todo $I \in e_n \bigcap S_n$.

Sea $I = (I', i_{N+1}) \in e_n \bigcap S_n$. Existe un vector $Q' \in \mathbb{Z}^N$ tal que $I' = \frac{Q'}{m}$; luego

$$\frac{D}{md} = s(e_n) = \frac{I' - q_n}{i_{N+1}} = \frac{Q' - Q_n}{m.\, i_{N+1}}$$

y entonces,

$$i_{N+1}.\, D = d.(Q' - Q_n).$$

Si miramos las ℓ-ésimas coordenadas, tenemos que $i_{N+1}D_\ell = d(Q' - Q_n)_\ell$ y, como D_ℓ y d son coprimos, resulta que $d \mid i_{N+1}$. Así, existe $j_I \in \mathbb{N}_0$ tal que $i_{N+1} = d.j_I$.

Por lo tanto, la ecuación de la arista e_n tiene la forma

$$F_{e_n}(t) = \sum_{I \in e_n \bigcap S_n} a_{n,I}\, t^{i_{N+1}} = \sum_{I \in e_n \bigcap S_n} a_{n,I}\, (t^d)^{j_I} =: g(t^d).$$

Sabemos que c_n es una raíz de F_{e_n} de multiplicidad k_{n-1}, pero para $n \geq n_0$,

$$\mathrm{gr}(F_{e_n}) = (M(e_n) - m(e_n))_{N+1} = k_{n-1};$$

entonces,

$$F_{e_n}(t) = \alpha_n (t - c_n)^{k_{n-1}}$$

con $\alpha_n \in \mathbb{R},\ \alpha_n \neq 0$. Como $\alpha_n,\ c_n$ y k_{n-1} son no nulos, de esta expresión deducimos que el coeficiente de t en $F_{e_n}(t)$ es no nulo.

Teniendo en cuenta que $F_{e_n}(t) = g(t^d)$, concluimos que $d = 1$ y, por lo tanto, $s(e_n) \in \frac{1}{m}\mathbb{Z}^N$. □

Recordemos que para $n \geq n_0$, podemos escribir $e_n = [(q_n, 0), (q_0, h_0)]$, con (q_0, h_0) independiente de n y $h_0 := k_{n_0-1} > 0$.

Observación 2.2.5 *Con las notaciones previas,* $\langle w, q_n \rangle < \langle w, q_{n-1} \rangle\ \forall\, n > n_0$.

Demostración. Para $n \geq n_0$, $q_n = q_0 - h_0 s(e_n)$. Entonces, para todo $n > n_0$,

$$q_n - q_{n-1} = (q_0 - h_0 s(e_n)) - (q_0 - h_0 s(e_{n-1})) = h_0 \,.(s(e_{n-1}) - s(e_n)),$$

de donde,

$$\langle w, q_n - q_{n-1} \rangle = \langle w, h_0 \,(s(e_{n-1}) - s(e_n)) \rangle = h_0 \,.\, (\langle w, s(e_{n-1}) \rangle - \langle w, s(e_n) \rangle)\,.$$

Por el Lema 2.2.2, se tiene que $\langle w, s(e_{n-1}) \rangle < \langle w, s(e_n) \rangle$ y, como $h_0 > 0$, concluimos que $\langle w, q_n - q_{n-1} \rangle < 0$. □

A partir de esta observación, con los Lemas 2.2.2 y 2.2.3 podemos probar que el soporte de la serie Φ construida está incluido en un cono trasladado.

Lema 2.2.6 *El soporte de* Φ *está incluido en un trasladado del cono* $C(e_{n_0})$.

Demostración. Utilizaremos la noción de ángulo barrera introducida en la Sección 2.1.4. Tenemos que:

- $P(F_{n_0})$ está incluido en el ángulo barrera $W(e_{n_0})$ asociado a $P(F_{n_0})$.
- Cada punto $p \in P(F_{n_0+1})$ está en una recta paralela a $L_{e_{n_0}}$ y que pasa por un punto $q \in P(F_{n_0}) \subseteq W(e_{n_0})$. Luego, $p = q + v$ con $v \parallel L_{e_{n_0}}$ y entonces, por el Lema 2.1.4 (a), resulta que $p \in W(e_{n_0})$. En consecuencia, $P(F_{n_0+1}) \subset W(e_{n_0})$. En particular, $m(e_{n_0+1}) = (q_{n_0+1}, 0) \in W(e_{n_0})$; más aún, está en el interior de $W(e_{n_0})$, pues $q_{n_0+1} \neq q_{n_0}$.

Veamos, inductivamente, que $P(F_n) \subset W(e_{n_0})$ para todo $n > n_0$. Ya vimos que esto vale para $n = n_0 + 1$.

Sea $n > n_0$ y supongamos que $P(F_n) \subset W(e_{n_0})$. En particular, $m(e_n) = (q_n, 0) \in W(e_{n_0})$; más aún, como $\langle w, q_n \rangle < \langle w, q_{n_0} \rangle$ (consecuencia de la Observación 2.2.5), entonces $(q_n, 0) \notin L_{e_{n_0}}$. Por otro lado, por el Lema 2.2.3, $M(e_n) = M(e_{n_0}) = (q_0, h_0) \in L_{e_{n_0}}$.

Por la construcción de F_{n+1} a partir de F_n, cada punto del polítopo $P(F_{n+1})$ es de la forma $q - \lambda(s(e_n), 1)$, con $q \in P(F_n)$ y $\lambda \geq 0$.

Ahora, vimos que

$$(q_n, 0) = (q_0, h_0) - h_0(s(e_n), 1) \in W(e_{n_0}), \text{ con } (q_0, h_0) \in L_{e_{n_0}}.$$

Entonces, para $v = -h_0(s(e_n), 1)$, se tiene que $(q_0, h_0) + v \in W(e_{n_0})$. Por el Lema 2.1.4 (b), se sigue que

$$q + tv \in W(e_{n_0}) \text{ para todo } q \in W(e_{n_0}) \text{ y } t \geq 0.$$

Así, dado $q - \lambda(s(e_n), 1) \in P(F_{n+1})$, con $q \in P(F_n)$ y $\lambda \geq 0$, aplicando lo anterior a $q \in P(F_n) \subset W(e_{n_0})$ y $t = \lambda/h_0 \geq 0$ (pues $h_0 > 0$), resulta que $q - \lambda(s(e_n), 1) \in W(e_{n_0})$. Luego, $P(F_{n+1}) \subset W(e_{n_0})$, como queríamos.

Como consecuencia, para todo $n > n_0$, el menor vértice $m(e_n) = (q_n, 0)$ de e_n está en $W(e_{n_0})$ pero no está sobre la recta que contiene a e_{n_0}. Con esto tenemos que $q_n \neq q_{n_0}$ satisface

$$(q_n, 0) \in W(e_{n_0}) \bigcap \{x_{N+1} = 0\} \ \forall n > n_0.$$

Por el Lema 2.1.2, sabemos que $W(e_{n_0}) \bigcap \{x_{N+1} = 0\} = C(e_{n_0}) + (q_{n_0}, 0)$. Luego, se tiene que

$$0 \neq q_n - q_{n_0} \in C(e_{n_0}) \ \forall n > n_0.$$

Sea $z \in C^*(e_{n_0})$. Sea $n > n_0$. Tenemos que $\langle q_n - q_{n_0}, z \rangle \leq 0$. Recordando que $q_n = q_0 - h_0 s(e_n)$ con $h_0 > 0$ para todo $n \geq n_0$, nos queda que

$$q_n - q_{n_0} = h_0(s(e_{n_0}) - s(e_n)), \tag{2.8}$$

con lo cual

$$\langle s(e_{n_0}) - s(e_n), z \rangle = \frac{1}{h_0} \langle q_n - q_{n_0}, z \rangle \leq 0.$$

Como esto vale para todo $z \in C^*(e_{n_0})$, concluimos que

$$s(e_{n_0}) - s(e_n) \in (C^*(e_{n_0}))^* = C(e_{n_0}).$$

Luego,

$$-s(e_n) \in C(e_{n_0}) - s(e_{n_0}) \ \forall n > n_0.$$

Como todos los exponentes $-s(e_n)$ de Φ, salvo finitos, están en $C(e_{n_0}) - s(e_{n_0})$, se tiene que el soporte de toda la serie está en un trasladado de este cono, o sea, en definitiva, está en algún trasladado de $C(e_{n_0})$. □

2.2.4. Solución de la ecuación

Lema 2.2.7 *Sea* $\Phi = \sum_{n=1}^{\infty} c_n\, x^{-s(e_n)}$ *una serie construida siguiendo el procedimiento descripto en la Sección 2.2.1. Entonces* $F(x_1, \ldots, x_N, \Phi) = 0$.

Demostración. Sea $\mathsf{C} \subset \mathbb{R}^N$ un cono como en el Lema 2.2.6, es decir, un cono racional poliedral convexo que contiene al soporte de Φ. Consideremos a F como un elemento del anillo de polinomios en una variable sobre $\mathbb{C}((\mathsf{C}))$. Como Φ es también un elemento de este anillo, $\mathbb{C}((\mathsf{C}))$, tenemos una noción bien definida de que Φ satisface $F(\Phi) = 0$, donde $F(\Phi) = F(x_1, \ldots, x_N, \Phi)$.

En primer lugar, compararemos $\mathrm{Sop}(F(\Phi_n))$ con $\mathrm{Sop}(F(\Phi_{n+1}))$ para $n \in \mathbb{N}$. Asumimos que ni $F(x_1, \ldots, x_N, \Phi_n)$ ni $F(x_1, \ldots, x_N, \Phi_{n+1})$ son cero pues, si no, tendríamos trivialmente el resultado deseado. Para esto observemos que

$$\begin{aligned} F(\Phi_n) &= F(x_1, \ldots, x_N, \Phi_n) = F(x_1, \ldots, x_N, \Phi_n + x_{N+1})|_{x_{N+1}=0} \\ &= F_n(x_1, \ldots, x_N, \Psi_n + x_{N+1})|_{x_{N+1}=0} = F_{n+1}(x_1, \ldots, x_N, 0), \end{aligned}$$

donde

$$F_n(x_1, \ldots, x_{N+1}) = \sum_{I \in S_n} a_{n,I} x_1^{i_1} \ldots x_N^{i_N} x_{N+1}^{i_{N+1}}.$$

Entonces

$$F_{n+1}(x_1, \ldots, x_N, 0) = \sum_{I \in S_n} a_{n,I} x_1^{i_1} \ldots x_N^{i_N} \Psi_n^{i_{N+1}} = \sum_{I=(I', i_{N+1}) \in S_n} a_{n,I} c_n^{i_{N+1}} \bar{x}^{I' - i_{N+1} s(e_n)},$$

donde $\bar{x} = (x_1, \ldots, x_N)$. Notando que

$$I' - i_{N+1} s(e_n) = \Pi_{e_n}(I', i_{N+1}) = \Pi_{e_n}(I), \quad \text{para } I = (I', i_{N+1}),$$

concluimos que

$$\mathrm{Sop}(F(\Phi_n)) \subseteq \Pi_{e_n}(S_n).$$

Observemos que $q_n = L_{e_n} \bigcap \{x_{N+1} = 0\} = \Pi_{e_n}(e_n)$. Como $w \in C^*(e_n)$,

$$\langle w, p - q_n \rangle \leq 0 \quad \forall p \in \Pi_{e_n}(S_n).$$

En particular, la desigualdad anterior vale para todo $p \in \mathrm{Sop}(F(\Phi_n))$, de donde se tiene que

$$\langle w, p \rangle \leq \langle w, q_n \rangle \ \forall p \in \mathrm{Sop}(F(\Phi_n)). \tag{2.9}$$

Es decir, tenemos que q_n es una cota superior para los puntos de $\mathrm{Sop}(F(\Phi_n))$ con el orden inducido por w.

Por la Observación 2.2.5, sabemos que $\langle w, q_{n+1} \rangle < \langle w, q_n \rangle \ \forall \ n \geq n_0$. Esto nos dice que la cota superior para $\mathrm{Sop}(F(\Phi_n))$ decrece para $n \geq n_0$.

Miremos ahora la sucesión $(\langle w, q_n \rangle)_{n \in \mathbb{N}}$. Por lo que vimos recién, a partir de un momento, es una sucesión estrictamente decreciente. Por lo tanto, tiene límite finito o tiende a $-\infty$. Veamos que sucede lo segundo. Teniendo en cuenta que, para $n \geq n_0$,

$$q_n - q_{n_0} = h_0(s(e_{n_0}) - s(e_n)) \text{ con } h_0 > 0$$

(ver ecuación (2.8)), consideremos la sucesión $(D_n)_{n \in \mathbb{N}}$ definida por

$$D_n := \langle w, s(e_{n_0}) - s(e_n) \rangle.$$

Como se vio en la demostración del Lema 2.2.6, $s(e_{n_0}) - s(e_n) \in C(e_{n_0})$. Si escribimos

$$C(e_{n_0}) = \{r_1 v_1 + \cdots + r_k v_k \ : \ r_j \in \mathbb{R}, \ r_j \ \geq 0 \ \forall \, 1 \leq j \leq k\},$$

con $v_j \in \mathbb{Q}^N$ para $j = 1, \ldots, k$, tenemos que, para cada $n \in \mathbb{N}$, existen $\lambda_{j,n} \geq 0$ tales que

$$s(e_{n_0}) - s(e_n) \ = \lambda_{1,n} v_1 + \cdots + \lambda_{k,n} v_k.$$

Como $D_{n+1} - D_n = \langle w, s(e_n) \rangle - \langle w, s(e_{n+1}) \rangle \ < 0$ tenemos que $(D_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión estrictamente decreciente. Por lo tanto, tiene límite finito o tiende a $-\infty$. Supongamos que $\lim\limits_{n \to +\infty} D_n = D_0 \in \mathbb{R}$. De esto se tiene que $(D_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es acotada. Sea $M \in \mathbb{R}$ tal que $|D_n| \leq M$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Ahora, como $w \in C^*(e_{n_0})$ es irracional y $v_j \in C(e_{n_0})$ tiene coordenadas racionales, resulta que $\langle w, -v_j\rangle > 0\ \forall j = 1, \ldots, k$; entonces, para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$-D_n = \lambda_{1,n}\langle w, -v_1\rangle + \cdots + \lambda_{k,n}\langle w, -v_k\rangle,$$

donde

$$\lambda_{j,n} \geq 0 \quad \text{y} \quad \langle w, -v_j\rangle > 0\ \forall\, j = 1, \ldots, k.$$

Observemos que para $j = 1, \ldots, k$,

$$0 \leq \lambda_{j,n} \leq \frac{-D_n}{\langle w, -v_j\rangle} \leq \frac{M}{\langle w, -v_j\rangle},\ \forall\, n \in \mathbb{N};$$

luego, si $\lambda_n := (\lambda_{1,n}, \ldots, \lambda_{k,n})$, para $n \in \mathbb{N}$, se tiene que $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^k$ es una sucesión de vectores incluidos en un subconjunto compacto de $\mathbb{R}^k$ y, por tal motivo, tiene una subsucesión $(\lambda_{n_l})_{l\in\mathbb{N}}$ que converge, digamos, a $\lambda^{(0)} = (\lambda_1^{(0)}, \ldots, \lambda_k^{(0)}) \in \mathbb{R}^k$. Sea

$$v_0 := \lambda_1^{(0)} v_1 + \cdots + \lambda_k^{(0)} v_k.$$

Existe una subsucesión, $s(e_{n_l})_{l\in\mathbb{N}}$, de $s(e_n)$, tal que $\lim\limits_{l\to+\infty}(s(e_{n_0}) - s(e_{n_l})) = v_0$; luego

$$\lim_{l\to+\infty} s(e_{n_l}) = s(e_{n_0}) - v_0. \tag{2.10}$$

Recordemos que, para l suficientemente grande, $s(e_{n_l}) \in \frac{1}{m}\mathbb{Z}^N$, con $m > 0$ (ver Lema 2.2.4). Luego, podemos escribir

$$s(e_{n_l}) = \frac{1}{m}(S_{1,l}, \ldots, S_{N,l}),\ \text{con}\ S_{i,l} \in \mathbb{Z}\ \forall i = 1, \ldots, N.$$

Por lo visto en (2.10) tenemos que cada coordenada de $s(e_{n_l})$ converge, es decir, existe $\lim\limits_{l\to+\infty} S_{i,l} := a_i$. Como $S_{i,l} \in \mathbb{Z}$ para todo l, resulta que $a_i \in \mathbb{Z}$ y existe $l_i \in \mathbb{N}$ tal que si $l \geq l_i,\ S_{i,l} = a_i$. De aquí se deduce que $s(e_{n_l}) = s(e_{n_0}) - v_0$ para l suficientemente grande, lo que es absurdo. Este absurdo provino de suponer que $(D_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Luego,

$$\lim_{n\to+\infty} D_n = -\infty$$

y entonces

$$\lim_{n\to+\infty} \langle w, q_n\rangle = -\infty.$$

Finalmente, veamos que esto implica que $\mathrm{Sop}(F(\Phi)) = \emptyset$. Supongamos que existe $p \in \mathrm{Sop}(F(\Phi))$. Como $\lim_{n\to\infty} \langle w, q_n\rangle = -\infty$, existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq n_1$, $\langle w, q_n\rangle < \langle w, p\rangle$. Luego, por (2.9),

$$p \notin \mathrm{Sop}(F(\Phi_n)) \ \forall n \geq n_1.$$

Por otra parte, como $p \in \mathrm{Sop}(F(\Phi))$, existe $n_2 \in \mathbb{N}$ tal que $p \in \mathrm{Sop}(F(\Phi_n)) \ \forall n \geq n_2$. Tomando $n \geq \max\{n_1, n_2\}$, llegamos a una contradicción, que provino de suponer la existencia de $p \in \mathrm{Sop}(F(\Phi))$. Luego, $\mathrm{Sop}(F(\Phi)) = \emptyset$. □

2.2.5. Soluciones y multiplicidad

Sea $\Phi = \sum_{n=1}^{\infty} c_n x^{-s(e_n)}$ una serie de potencias fraccionarias, solución de $F(\Phi) = 0$, construida mediante el proceso descripto en las secciones anteriores. En esta sección, analizaremos la multiplicidad de Φ como raíz de F.

Por el ítem c) del Lema 2.2.2 y por el Lema 2.2.3 sabemos que, para n suficientemente grande, el coeficiente c_n tiene multiplicidad fija como raíz de la ecuación de la arista F_{e_n}; llamemos k_Φ a esta multiplicidad. Además, sabemos que k_Φ coincide con la longitud en el eje x_{N+1} de la arista e_n para n suficientemente grande.

Proposición 2.2.8 *La multiplicidad de Φ como raíz de F es al menos k_Φ.*

Demostración. Supongamos que $k_\Phi > 1$. Como $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión decreciente, por el Lema 2.2.2 tenemos que, para cada $n \in \mathbb{N}$, c_n es una raíz de la derivada l-ésima, $F_{e_n}^{(l)}(t)$, para todo $1 \leq l < k_\Phi$.

De aquí se deduce que Φ es una raíz de $F^{(l)}$, la derivada l-ésima de F respecto de x_{N+1}, para todo $1 \leq l < k_\Phi$ y, así, Φ tiene multiplicidad al menos k_Φ como raíz de F. Haremos la demostración para el primer orden de derivación; es decir, mostraremos que $F'(\Phi) = 0$ (aquí notamos F' a la derivada de F con respecto a x_{N+1}). Para las derivadas de órdenes superiores el razonamiento es análogo.

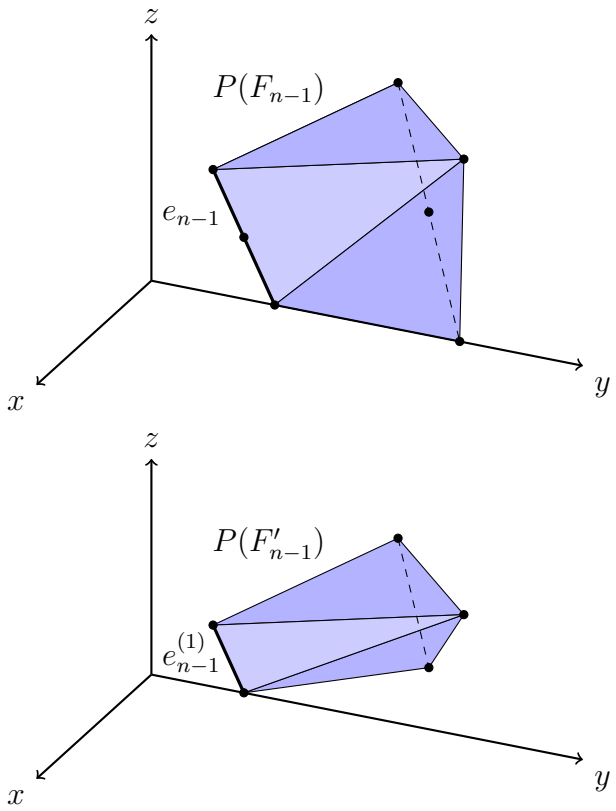
Antes de comenzar hagamos algunas observaciones:

- Si $F_{n-1} = \sum_{I\in S_{n-1}} a_{n-1,I}\, x^I$, entonces

$$F'_{n-1} = \sum_{I\in S_{n-1}, i_{N+1}\geq 1} i_{N+1} a_{n-1,I}\, x^{I-(0,\ldots,0,1)}.$$

Así, el soporte de F'_{n-1} se obtiene trasladando con $-(0,\ldots,0,1)$ los puntos del soporte de F_{n-1} con última coordenada positiva.

- Dada una arista e_{n-1} del polítopo $P(F_{n-1})$, como estamos suponiendo que $k_{n-1} > 1$, es decir, que c_{n-1} es raíz de $F_{e_{n-1}}(t)$ de multiplicidad mayor que uno, el polinomio que da la ecuación de la arista, $F_{e_{n-1}}(t)$, tiene al menos tres términos. En consecuencia, la arista e_{n-1} contiene al menos tres puntos del soporte de F_{n-1}. Así, al derivar, vemos que una de las aristas admisibles de $P(F'_{n-1})$ es paralela a e_{n-1}; más aún, sus extremos se obtienen restando $(0,\ldots,0,1)$ a puntos de e_{n-1}. Notaremos $e^{(1)}_{n-1}$ a dicha arista de $P(F'_{n-1})$.



- Si $L_{e_{n-1}}$ es la recta que contiene a e_{n-1}, entonces la recta que contiene a $e^{(1)}_{n-1}$ es

la trasladada $L_{e^{(1)}_{n-1}} = L_{e_{n-1}} - (0,\dots,0,1)$. Notaremos

$$q_{n-1} := L_{e_{n-1}} \bigcap \{x_{N+1} = 0\} \quad \text{y} \quad q^{(1)}_{n-1} := L_{e^{(1)}_{n-1}} \bigcap \{x_{N+1} = 0\}.$$

- Si $C(e_{n-1})$ y $C(e^{(1)}_{n-1})$ son los conos barrera asociados a F_{n-1} y F'_{n-1} para las correspondientes aristas, entonces $C(e^{(1)}_{n-1}) \subset C(e_{n-1})$: Si $z \in C(e^{(1)}_{n-1})$, podemos escribir

  $$z = \lambda\Big(\Pi_{e^{(1)}_{n-1}}(p') - q^{(1)}_{n-1}\Big)$$

  con $\lambda \geq 0$ y $p' \in P(F'_{n-1})$, es decir, $p' = p - (0,\dots,0,1)$, con $p \in P(F_{n-1})$.

  Luego, como $\Pi_{e^{(1)}_{n-1}} = \Pi_{e_{n-1}}$ y $q^{(1)}_{n-1} = (L_{e_{n-1}} \cap \{x_{N+1} = 1\}) - (0,\dots,0,1)$, obtenemos

  $$z = \lambda\big(\Pi_{e_{n-1}}(p) - \Pi_{e_{n-1}}(0,\dots,0,1) - q^{(1)}_{n-1}\big) = \lambda\big(\Pi_{e_{n-1}}(p) - q_{n-1}\big) \in C(e_{n-1}).$$

  Con esto, dado que $w \in C^*(e_{n-1})$, tenemos que $w \in C^*(e^{(1)}_{n-1})$.

- El polinomio $F'_{e^{(1)}_{n-1}}$ que da la ecuación de la arista $e^{(1)}_{n-1}$ para F'_{n-1} satisface:

  $$\begin{aligned} t^{m(e_{n-1})_{N+1}-1} F'_{e^{(1)}_{n-1}}(t) &= \sum_{I \in e_{n-1} \bigcap S_{n-1}, i_{N+1} \geq 1} i_{N+1} a_{n-1,I}\, t^{i_{N+1}-1} \\ &= \Big(t^{m(e_{n-1})_{N+1}} F_{e_{n-1}}(t)\Big)'. \end{aligned}$$

  En consecuencia, $F'_{e^{(1)}_{n-1}}(c_{n-1}) = 0$, es decir, c_{n-1} es un cero de la ecuación de la arista correspondiente a F'_{n-1}.

Haciendo cuentas similares a las de la demostración del Lema 3.2.7 y usando regla de la cadena, se ve que

$$F'(\Phi_{n-1}) = F'_n(x_1,\dots,x_N,0).$$

Por otro lado,

$$F'_n(x_1,\dots,x_{N+1}) = \sum_{I \in S_{n-1}, i_{N+1} \geq 1} a_{n-1,I} i_{N+1}\, x_1^{i_1} \dots x_N^{i_N} (\Psi_{n-1} + x_{N+1})^{i_{N+1}-1}.$$

Entonces,

$$\begin{aligned} F'_n(x_1,\dots,x_N,0) &= \sum_{I\in S_{n-1}, i_{N+1}\geq 1} a_{n-1,I} i_{N+1} x_1^{i_1}\dots x_N^{i_N} (\Psi_{n-1})^{i_{N+1}-1} \\ &= \sum_{I\in S_{n-1}, i_{N+1}\geq 1} a_{n-1,I} i_{N+1} c_{n-1}^{i_{N+1}-1} \bar{x}^{I'-(i_{N+1}-1)s(e_{n-1})}, \end{aligned}$$

con $\bar{x} = (x_1,\dots,x_n)$. Notando que

$$I' - (i_{N+1}-1)s(e_{n-1}) = \Pi_{e_{n-1}}(I', i_{N+1}-1) = \Pi_{e_{n-1}^{(1)}}(I - (0,\dots,0,1)),$$

donde $I = (I', i_{N+1})$, si $S_{n-1}^{(1)}$ es el soporte de F'_{n-1}, tenemos que

$$\mathrm{Sop}(F'(\Phi_{n-1})) \subseteq \Pi_{e_{n-1}^{(1)}}(S_{n-1}^{(1)}).$$

Como $w \in C^*(e_{n-1}^{(1)})$, tenemos que $\langle w, p - q_{n-1}^{(1)}\rangle \leq 0$ para todo $p \in \Pi_{e_{n-1}^{(1)}}(S_{n-1}^{(1)})$; en particular, esto vale para todo $p \in \mathrm{Sop}(F'(\Phi_{n-1}))$, de donde se tiene que

$$\langle w, p\rangle \leq \langle w, q_{n-1}^{(1)}\rangle \quad \forall p \in \mathrm{Sop}(F'(\Phi_{n-1})).$$

Finalmente, observemos que $q_n^{(1)} = q_n - (0,\dots,1) + (s(e_n),1)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Además, por el Lema 2.2.3, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para $n > n_0$, e_n tiene un extremo en q_n y el otro fijo en un punto de la forma (q_0, k_Φ). Si a q_n, para $n > n_0$, lo escribimos usando la notación de la Observación 2.2.5, es decir, escribimos $q_n = q_0 - k_\Phi.s(e_n)$, deducimos que

$$q_n^{(1)} - q_{n_0}^{(1)} = (k_\Phi - 1)\big(s(e_{n_0}) - s(e_n)\big).$$

Como $k_\Phi > 1$ y $\lim_{n\to\infty}\langle w, s(e_{n_0}) - s(e_n)\rangle = -\infty$ (ver la demostración del Lema 2.2.7), resulta que

$$\lim_{n\to\infty}\langle w, q_n^{(1)}\rangle = -\infty$$

y, como en el Lema 2.2.7, concluimos que $\mathrm{Sop}(F'(\Phi)) = \emptyset$. □

Bibliografía

[1] Fuensanta Aroca, Giovanna Ilardi, A family of algebraically closed fields containing polynomials in several variables. Comm. Algebra 37 (2009), No. 4, 1284–1296.

[2] David Cox, John Little, Donal O'Shea, Ideals, varieties, and algorithms. An introduction to computational algebraic geometry and commutative algebra. Fourth edition. Undergraduate Texts in Mathematics. Springer, Cham, 2015.

[3] Alicia Dickenstein, Ioannis Z. Emiris, Solving polynomial equations. Foundations, Algorithms and Applications, Algorithms Comput. Mathematics 14, Springer, Berlin, 2005.

[4] John McDonald, Fiber polytopes and fractional power series. J. Pure Appl. Algebra, Vol. 104, Issue 2 (1995), 213–233.

[5] Victor Puiseux, Recherches sur les fonctions algébriques, J. Math. Pures Appl. 15 (1850) 365–480.

[6] Robert J. Walker, Algebraic curves. Dover Publications, Inc., New York 1962.