UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales

Departamento de Matemática

Tesis de Licenciatura

Teoría de $\mathcal{D}$-Módulos

Bruno Robbio

Director: Fernando Miguel Cukierman

Fecha de Presentación: 15/04/2016

Agradecimientos

Primeramente, quisiera agradecer a Fernando Cukierman por aceptar ser mi director, proponerme este tema tan interesante, lleno de matemática muy buena y adecuada a mis intereses. Además de guiarme en el trayecto que culminó en este trabajo, siempre dispuesto a dar una mano y con la manera exacta de presentar los temas como para que resulten más accesibles.

Gracias a los jurados Alicia Dickenstein y Pablo Amster por tomarse el tiempo para leer la tesis, el entusiasmo y la ayuda aportada al trabajo.

A mis viejos por su apoyo absoluto e incondicional tanto moral como económicamente para que no me falte nunca nada, por alentarme siempre a hacer lo que me gustara y pueda dedicarme a mis intereses; por su cariño, confianza y amor. Gracias a Marcelo y Mónica por proveer la doble cuota de cariño paternal. Gracias a Juan, Paula y Emilio por ser grandes hermanos, por lo que aprendo de ellos y por bancarse mis abusos de hermano mayor a lo largo de los años.

A Natalia, por elegir recorrer conmigo estos últimos años, por su amor, por todos los lugares a los que fuimos (e iremos) y porque mirar adelante es siempre mejor si está conmigo. A toda la familia de Nati por recibirme siempre con asados y una sonrisa, gracias Vivi y Mario. Gracias Male por las charlas, los mates y siempre la buena onda que te caracteriza.

Gracias Fido, Marian, Andrés, Petris, y Agus por las milanesas completas compartidas en VV junto a Javi y por ser la mejor manera de descomprimir la semana.

Gracias al grupo de excelentes profesores de la UBA que tuve a lo largo de la carrera que me inculcaron el amor por la matemática, por su dedicación a la docencia y su compromiso. Gracias Gabriel Minian, Matías Graña, Daniel Carando, Gabriel Larotonda, Guillermo Cortiñas, Inés Armendariz.

Detrás de este trabajo y los previos años de carrera universitaria hay muchas horas de estudio que fueron muy importantes, pero más importante aún son las personas con las que lo compartí, muchas personas que aportaron para llegar a ver la matemática (y la vida) de maneras nuevas y fascinantes. Gracias a Sofi, Maxi y Andrés, compañeros del tortuoso sendero desde el primer peldaño. Gracias a Meli por hacer que preparar finales y escuchar Gloria Trevi vayan de la mano y darle broche de oro a la licenciatura con 'Tesis de Matemática'.

Gracias a Melt, Luz y Nati por un gran verano en el IMPA; por la polenta, el açaí y el abacaxí.

Quiero agradecer especialmente a aquellos compañeros que siempre estan dispuestos al intercambio de ideas y con los cuales aprendí algo nuevo cada vez que hablé. Mil gracias Santi Vega, Santi Durán, Ariel Bortz, Matías Saucedo, Dani K, Melt, Maxi Frungillo, Rafa, Fran Vibrentis, Carlo, Manu, Mari, Diego, Lucho, Marce, Juanma y Facu.

Gracias al hermoso grupo de seres humanos mejor conocido como 'Botella de Klein': Kari, Diana, Pablo, Mati, Nati, los Santis, Jaz, Euge, Xime, Aye, Maxi, Rafa y Sofi.

Gracias a Joey, Johnny, Dee Dee, David, Iggy y Steven Patrick por toda la magia.

Por último, quería agradecer a todos mis compañeros de matemática pura y a Gonzalo Chebi.

Índice general

Capítulo 1

Introducción

La idea de pensar a un sistemas de ecuaciones lineales como módulo sobre un anillo es básica para la geometría algebraica; sin embargo, apenas surgió durante la década de 1970 para sistemas de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales con coeficientes analíticos gracias a charlas presentadas por Sato durante la década de 1960 y la tesis de Quillen, en 1964. Dos textos que resultaron fundamentales para el asentamiento de la teoría fueron la tesis de Kashiwara (alumno de Sato) y las notas publicadas por Bernstein en 1971 y 1972.

Antes de que los $\mathcal{D}$-módulos fueran estudiados como objetos propios, la comunidad matemática estaba interesada en las soluciones de ecuaciones diferenciales consideradas en los distintos espacios de funciones (distribuciones, funciones C^{∞}, etcétera). La teoría, por tanto, tiene sus raíces en el análisis microlocal, el cual fue introducido por M. Sato a fines de la década de 1960 y fue posteriormente desarrollada por Kashiwara y Kawai en años subsiguientes.

Dentro de los $\mathcal{D}$-módulos hay una clase que resulta de particular importancia, llamadas $\mathcal{D}$-módulos holónomos, los cuales generalizan la noción de ecuaciones diferenciales ordinarias. Kashiwara probó en 1975 que si $\mathcal{M}$ es un $\mathcal{D}$-módulo holónomo y si llamamos Sol al funtor que a cada módulo le asocia su complejo de soluciones complejas entonces $Sol(\mathcal{M})$ es un haz construíble e incluso resulta un *haz perverso* . Inspirado en la teoría de Picard-Fuchs y junto con Oshima y Kawai, Kashiwara desarrolla la teoría de módulos holónomos regulares.

En un lenguaje categórico, el estudio de ecuaciones diferenciales parciales resulta análogo al estudio del funtor contravariante $Hom_{\mathcal{D}}(\bullet, \mathcal{O})$ entre la categoría de $\mathcal{D}$-módulos que admiten presentación finita en la categoría de $\mathbb{C}$-módulos. Para desarrollar tal idea, resulta conveniente plantear los problemas en el contexto de teoría de haces y usar herramientas de álgebra homológica. Por un lado, la teoría de haces resulta conveniente debido a que ocasionalmente el estudio local de soluciones de sistema de ecuaciones en derivadas parciales es más importante que el global; por ejemplo, en el caso de ecuaciones diferenciales ordinarias, el espacio de soluciones locales es siempre de dimensión finita y sin embaro, podría suceder que la continuación analítica de las soluciones alrededor de un camino cerrado difieran de la original. Tal fenómeno se denomina 'monodromía', por lo que debemos tener en cuenta, además, como es que las soluciones locales se conectan entre sí globalmente.

La teoría de haces es el mejor lenguaje para abordar tales problemas. Por lo tanto, en vez de tomar los anillos $\mathcal{O}$ y $\mathcal{D}$ los consideramos como haces sobre una variedad compleja X y los llamamos $\mathcal{O}_X$ y $\mathcal{D}_X$. Entonces, si el objetivo es tratar la categoría de $\mathcal{D}$-módulos de presentación finita (localmente), los principales objetos a considerar son los *$\mathcal{D}$-módulos coherentes*. Asimismo, también es conveniente considerar el funtor contravariante $\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\bullet, \mathcal{O}_X)$ pero ahora entre las categorías de $\mathcal{D}_X$ módulos en la categoría de $\mathbb{C}$-módulos en su versión de haces.

La necesidad de las herramientas de álgebra homológica se evidencian en el siguiente hecho: Aunque las categorías de $\mathcal{D}_X$-módulos y de $\mathbb{C}$-módulos, el funtor $\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\bullet, \mathcal{O}_X)$ no es un funtor exacto; por lo que si tomamos una sucesión exacta corta $0 \to M_1 \to M_2 \to M_3 \to 0$ y aplicamos el funtor en cuestión queda la sucesión exacta $0 \to \mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(M_3, \mathcal{O}_X) \to \mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(M_2, \mathcal{O}_X) \to \mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(M_1, \mathcal{O}_X)$. Como la última flecha de la sucesión exacta no es sobreyectiva, no podremos recuperar información de las soluciones de M_2 a partir de M_1 y M_3; una manera de remediar ésto es extender la última sucesión exacta y considerar el espacio de soluciones 'extra' $\mathcal{E}xt^i_{\mathcal{D}_X}(M, \mathcal{O}_X)$. La sucesión exacta extendida con los espacios $\mathcal{E}xt^i_{\mathcal{D}_X}(M, \mathcal{O}_X)$ es, a su vez, exacta y por lo tanto la teoría se desarrolla de manera más precisa considerando tales espacios.

Para poder desarrollar con mayor generalidad es aún más conveniente considerar el complejo $\mathbf{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{O}_X)$ en la categoría derivada de $\mathcal{D}_X$-módulos; tal complejo tiene la propiedad de que la i-ésima cohomología da como resultado a $\mathcal{E}xt^i_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{O}_X)$, de esa manera, no resulta necesario considerar a los espacios $\mathcal{E}xt^i$ de manera independiente.

Empecemos con un ejemplo

Ejemplo 1.0.1. Consideremos sobre el espacio de n dimensiones al sistema de ecuaciones en derivadas parciales

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x_1} u = 0 \\ (x_1 \frac{\partial}{\partial x_2} + x_2 \frac{\partial}{\partial x_3} + \ldots + x_{n-1} \frac{\partial}{\partial x_n}) u = 0 \end{cases} \tag{1.1}$$

Afirmamos que tal sistema es equivalente al sistema

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x_1} u = 0 \\ \frac{\partial}{\partial x_2} u = 0 \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_n} u = 0 \end{cases} \tag{1.2}$$

En efecto, de las relaciones

$$\left[\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right] = 0 \qquad \left[\frac{\partial}{\partial x_i}, x_j\right] = \delta_{ij}$$

Notando $P = x_1 \frac{\partial}{\partial x_2} + x_2 \frac{\partial}{\partial x_3} + \ldots + x_{n-1} \frac{\partial}{\partial x_n}$ se tiene que:

$$\left[\frac{\partial}{\partial x_i}, P\right] = \frac{\partial}{\partial x_{i+1}}, \qquad 1 \leq i \leq n-1$$

Resulta claro que si una función u es solución de $Pu = 0$, $Qu = 0$ entonces $[P, Q]\, u = 0$ cualesquiera sean los operadores P y Q. De ésto último se deduce que (1.1) $\Rightarrow$ (1.2); la recíproca resulta evidente. Observar que el razonamiento anterior es válido para cualquier espacio de soluciones $\mathcal{F}$ considerado. El razonamiento es puramente algebraico y se resume a decir que sobre el anillo $\mathcal{D}$ de operadores diferenciales, $\left\langle \frac{\partial}{\partial x_1}, P \right\rangle = \left\langle \frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right\rangle$.

A continuación se dará un breve resumen de los capítulos del trabajo y su principal objetivo.

En el Capítulo 2 se expone, para comenzar, el anillo $\mathcal{D}_n$ de operadores diferenciales y se dan resultados generales sobre el anillo en sí; a continuación se construye el *haz* de operadores diferenciales $\mathcal{D}_X$ motivado a partir de lo desarrollado previamente; la relación que existe entre ambos objetos resultará evidente en capítulos posteriores y se resume a decir que el stalk en un punto x_0 del anillo $\mathcal{D}_X$ resultará isomorfo al anillo $\mathcal{D}_n$ si $n = dim(X)$. A partir de la definición de $\mathcal{D}_X$ se definen los $\mathcal{D}_X$ módulos y se exponen ejemplos de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales que motivan una clase de $\mathcal{D}_X$-módulos que nos resultará de particular interés (los $\mathcal{D}_X$-módulos coherentes); con estos objetos se verá la relación entre $\mathcal{D}_X$-módulos y soluciones de sistemas diferenciales y se definirán objetos que resultarán de particular interés en capítulos siguientes. Por último se dan resultados y ejemplos importantes sobre el anillo $\mathcal{D}_X$.

En el Capítulo 3 se da una breve introducción a la teoría de Fuchs de ecuaciones diferenciales en una variable, se define la *monodromía* de una ecuación diferencial y se define, también, las *conexiones*. Una conexión es un objeto que provee a un $\mathcal{O}_X$-módulo con la estructura de $\mathcal{D}_X$-módulo y será el objeto apropiado para generalizar a $\mathcal{D}_X$-módulos de mayor dimensión más adelante.

En el Capítulo 4 se introduce la noción de símbolo de operador diferencial y a partir del mismo, se construye un anillo conmutativo $Gr\mathcal{D}_X$. Con herramientas de álgebra conmutativa y usando la definición de anillo graduado se construye la *variedad característica* de un $\mathcal{D}_X$-módulo $\mathcal{M}$; el cual es un subconjunto analítico de T^*X y se ve que la variedad característica es involutiva. Finalmente, se define una clase particular de $\mathcal{D}_X$-módulos llamados módulos holónomos en donde la dimensión de la variedad característica es mínimo.

En la teoría de ecuaciones diferenciales ordinarias, se tiene una clase buena de ecuaciones llamada 'ecuaciones diferenciales con singularidades regulares' (la cual se expone en el Capítulo 3) y, básicamente, son ecuaciones con singularidades 'ligeras'. En el Capítulo 5 se expone una buena generalización de ésta clase de ecuaciones en dimensiones más grandes y se motiva la misma a partir de la teoría de Fuchs. Para finalizar, se da la definición de funtor de solución en lenguaje de categorías derivadas.

Si se tiene un morfismo de variedades $\pi : X \to Y$ se puede levantar una función sobre Y a una función sobre X. Si asumimos que la función sobre Y cumple un cierto sistema de ecuaciones, buscamos entender cómo describir el sistema de ecuaciones que debería cumplir la función levantada en X. En el Capítulo 6 se expone una versión algebraica del problema a partir de funtores de pullback de $\mathcal{D}$-módulos, y se da una formulación distinta del conocido teorema de ecuaciones diferenciales mejor conocido como Cauchy Kovalevskaya.

Finalmente, en el Capítulo 7 se demuestra que el funtor solución aplicado a un $\mathcal{D}_X$-módulo holónomo $\mathcal{M}$ es constructible y se termina de cerrar así la idea de que un módulo holónomo es la generalización de una ecuación diferencial ordinaria. Para terminar se presenta la correspondencia de Riemann-Hilbert, el cual es la generalización más sofisticada del problema 23 de Hilbert.

Capítulo 2

Módulos sobre el anillo de operadores diferenciales

La idea de éste capítulo es introducir la noción de operadores diferenciales definidos en una variedad X, la cual asumiremos que es una variedad holomorfa, y daremos algunos resultados de interés que resultarán útiles más adelante.

2.1 El anillo $\mathcal{D}_n$

Sea A una $\mathbb{C}$-álgebra conmutativa. En esta sección vamos a construir el anillo $\mathcal{D}_n$ de operadores diferenciales sobre A a partir de $Hom_{\mathbb{C}}(A, A)$ el conjunto de funciones $\mathbb{C}$-lineales sobre A.

Primero que nada observemos que A puede ser incluído en $Hom_{\mathbb{C}}(A, A)$ asociando cada elemento a $\in$ A con el morfismo $x \mapsto a.x$; es decir, $A \hookrightarrow Hom_{\mathbb{C}}(A, A)$ y podemos pensar a A como una subálgebra de $Hom_{\mathbb{C}}(A, A)$.

Definición 2.1.1. Se define $\mathcal{D}(0) := A$ y para $m \geq 1$

$$\mathcal{D}(m) := \{P \in Hom_{\mathbb{C}}(A, A) : [P, \mathcal{D}(0)] \subset \mathcal{D}(m-1)\}$$

Proposición 2.1.2. *Se tiene que $\mathcal{D}(m)\mathcal{D}(k) \subset \mathcal{D}(m+k)$ y $\mathcal{D}(m) \subset \mathcal{D}(m+1)$.*

Demostración. Sean P, Q y R elementos de $Hom_{\mathbb{C}}(A, A)$ entonces

$$\begin{aligned}[RP, Q] &= R(PQ - QP) + (RQ - QR)P \\ &= R[P, Q] + [R, Q]P.\end{aligned}$$

Si asumimos que $Q \in \mathcal{D}(0)$, $P \in \mathcal{D}(m)$ y $R \in \mathcal{D}(k)$ se concluye que

$$[\mathcal{D}(m)\mathcal{D}(k), \mathcal{D}(0)] \subset \mathcal{D}(k)\mathcal{D}(m-1) + \mathcal{D}(k-1)\mathcal{D}(m).$$

Usando un argumento inductivo en $n = m + k$ se puede mostrar que el lado derecho de la contención está incluído en $\mathcal{D}(m+k-1)$; lo cual muestra que $[\mathcal{D}(m)\mathcal{D}(k), \mathcal{D}(0)] \subset \mathcal{D}(m+k-1)$ y por definición significa que $\mathcal{D}(m)\mathcal{D}(k) \subset \mathcal{D}(m+k)$. La segunda parte de la proposición es inmediata de lo anterior. $\square$

Definición 2.1.3. El álgebra de operadores diferenciales sobre A se define como la unión de todos los $\mathcal{D}(m)$; es decir, $\mathcal{D}(A) := \bigcup_m \mathcal{D}(m)$

Observación 2.1.4. Por como fue definido, $\mathcal{D}(A)$ resulta una $\mathbb{C}$-álgebra filtrada. La filtración $\mathcal{D}(m)$ produce un anillo graduado asociado

$$Gr\,(\mathcal{D}(A)) = \bigoplus_{m \geq 0} \mathcal{D}(m)/\mathcal{D}(m-1).$$

Proposición 2.1.5. *$Gr\,(\mathcal{D}(A))$ resulta una $\mathbb{C}$-álgebra conmutativa.*

Demostración. Para elementos P, Q y R en $Hom_{\mathbb{C}}\,(A, A)$ se tiene la identidad de Jacobi:

$$[[P, Q], R] = [P, [Q, R]] + [Q, [R, P]].$$

Si asumimos que $Q \in \mathcal{D}(m)$, $P \in \mathcal{D}(k)$ y $R \in \mathcal{D}(0)$ resulta que

$$[[\mathcal{D}(k), \mathcal{D}(m)], \mathcal{D}(0)] \subset [\mathcal{D}(k), \mathcal{D}(m-1)] + [\mathcal{D}(m), \mathcal{D}(k-1)].$$

Usando un argumento inductivo en $n = m + k$ se puede mostrar que el lado derecho de la contención está incluído en $\mathcal{D}(m+k-2)$ y por lo tanto

$$[\mathcal{D}(m), \mathcal{D}(k)] \subset \mathcal{D}(m+k-1),$$

con lo cual se tiene que $Gr(A)$ es conmutativo. $\square$

Notación. Se denota $\mathcal{O}_n$ al anillo local de series de potencia convergentes. Es decir, todo elemento de $\mathcal{O}_n$ admite un desarrollo como $\sum c_\alpha z^\alpha$ y existe $\delta > 0$ de manera tal que $\sum |c_\alpha| \delta^{|\alpha|} < \infty$. En general, se considerará a $\mathcal{D}\,(\mathcal{O}_n)$ y denotaremos $\mathcal{D}_n$ al subanillo de $\mathcal{D}\,(\mathcal{O}_n)$ generado por $\mathcal{O}_n$ y $\partial_1, \ldots, \partial_n$.

Observación 2.1.6. En el anillo $\mathcal{O}_n$ se tiene la derivación ∂_j que actúa en $\mathcal{O}_n$ de manera tal que $\partial_j(f) = \frac{\partial f}{\partial z_j}$ y resulta claro, además, que $[\partial_j, f] = \partial_j(f) \in \mathcal{D}_n(0)$. Se tiene por definición, entonces, que $\partial_j \in \mathcal{D}_n(1)$ para todo $j = 1, \ldots, n$.

Notación. Para cada multiíndice $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0}$ se denota $\partial^\alpha = \partial_1^{\alpha_1} \ldots \partial_n^{\alpha_n}$.

Teorema 2.1.7. *El anillo $\mathcal{D}(\mathcal{O}_n)$ es igual a $\mathcal{D}_n$.*

Para demostrar el teorema usaremos los siguientes resultados

Proposición 2.1.8. $\mathcal{D}_n = \bigoplus_{\alpha \geq 0} \mathcal{O}_n \partial^\alpha$.

Demostración. Como el anillo $\mathcal{D}_n$ está generado por $\mathcal{O}_n$ y $\partial_1, \ldots, \partial_n$ es claro que todo elemento $P \in \mathcal{D}_n$ se escribe de manera única como

$$P = \sum_\alpha c_\alpha \partial^\alpha;\ c_\alpha \in \mathcal{O}_n \text{ (donde } \alpha = 0 \text{ para casi todo } \alpha \text{ en el sumando)} \tag{2.1}$$

ya que cualesquiera ∂_i, ∂_j conmutan entre sí y la identidad $\partial^\alpha.f = \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} \partial^\beta(f).\partial^{\alpha-\beta}$ muestra que toda multiplicación entre elementos de $\mathcal{O}_n$ y ∂^α se puede expresar ubicando en el lado izquierdo de la multiplicación elementos de $\mathcal{O}_n$, y por lo tanto expresarlo como en (2.1).

Se considera ahora $P = \sum c_\alpha \partial^\alpha$ donde al menos un $c_\alpha \neq 0$. Sea m el menor entero positivo tal que $c_\alpha \neq 0$ con $|\alpha| = m$; evaluando el operador P en x^α da la igualdad $P(x^\alpha) = \alpha! c_\alpha \neq 0$, es decir que $P \neq 0$ con lo que se obtiene el resultado de la proposición. □

Corolario 2.1.9. *Para cada $m \geq 0$ se tiene que $\mathcal{D}_n(m) = \sum_{|\alpha| \leq m} \mathcal{O}_n \partial^\alpha$ da una filtración del anillo $\mathcal{D}_n$.*

Definición 2.1.10. Se denota $\mathcal{P}_m = \mathbb{C}[z_1, \ldots, z_n]_{\leq m}$ al espacio de polinomios en n variables de grado a lo sumo m. Entonces $\mathcal{P}_m$ es un subespacio vectorial de $\mathcal{O}_n$ de dimensión finita. Si $P \in Hom_{\mathbb{C}}(\mathcal{O}_n, \mathcal{O}_n)$, entonces P induce $P|_{\mathcal{P}_m} : \mathcal{P}_m \to \mathcal{O}_n$; lo que induce un morfismo $\mathbb{C}$-lineal $j_m : Hom_{\mathbb{C}}(\mathcal{O}_n, \mathcal{O}_n) \to Hom_{\mathbb{C}}(\mathcal{P}_m, \mathcal{O}_n)$.

Proposición 2.1.11. *El morfismo j_m restringido a $j_m : \mathcal{D}_n(m) \to Hom_{\mathbb{C}}(\mathcal{P}_m, \mathcal{O}_n)$ es un isomorfismo.*

Demostración. Los monomios $\{x^\alpha : |\alpha| \leq m\}$ es una base de $\mathcal{P}_m$, por lo que $Hom_{\mathbb{C}}(\mathcal{P}_m, \mathcal{O}_n)$ es un $\mathcal{O}_n$-módulo libre de rango finito; los generadores de tal módulo son $\{e_\alpha\}$ que cumplen

$$e_\alpha(x^\beta) = \delta_{\alpha\beta} \text{ donde } 1 \leq |\alpha|, |\beta| \leq m.$$

Para ver la imagen de ∂^α a través del morfismo j_m se puede expresar

$$j_m(\partial^\alpha) = \sum_\beta a_\beta e_\beta \text{ (con } a_\beta \in \mathcal{O}_n),$$

por lo tanto, evaluando en los monomios se tiene: x^δ con $|\delta| \geq |\alpha|$

$$j_m(\partial^\alpha)(x^\delta) = \sum_{|\beta|\leq|\alpha|} a_\beta e_\beta(x^\delta)$$

$$\partial^{\alpha_1} {x_1}^{\delta_1} \ldots \partial^{\alpha_n} {x_n}^{\delta_n} = a_\delta$$

$$\frac{\delta_1!}{(\delta_1-\alpha_1)!} {x_1}^{\delta_1-\alpha_1} \cdots \frac{\delta_n!}{(\delta_n-\alpha_n)!} {x_n}^{\delta_n-\alpha_n} = a_\delta$$

$$\frac{\delta!}{(\delta-\alpha)!} x^{\delta-\alpha} = a_\delta$$

De la cuenta anterior se deduce que j_m es un morfismo sobreyectivo; la inyectividad resulta como corolario de la proposición 2.1.8 □

Lema 2.1.12. *Sea $P \in Hom_{\mathbb{C}}(\mathcal{O}_n, \mathcal{O}_n)$ que satisface que $P(1) = 0$ y $[P, x_j] = 0$ para todo $1 \leq j \leq n$. Entonces, $P = 0$*

Demostración. Por las hipótesis del lema se sabe que $1 \in Ker(P)$ y que $P(x^j g) = x^j P(g)$ para todo $g \in \mathcal{O}_n$ (en particular, $P(x^j) = x^j P(1) = 0$); por lo que se tiene que $Ker(P)$ es un $\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$-submódulo de $\mathcal{O}_n$ que contiene a $\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$ como subanillo. Sea $\mathfrak{M}$ el ideal maximal del anillo local $\mathcal{O}_n$; para cada $k \geq 1$ se tiene que

$$\mathfrak{M}^{k+1} = x_1\mathfrak{M}^k + \ldots + x_n\mathfrak{M}^k.$$

Aplicando P se tiene que

$$P(\mathfrak{M}^{k+1}) \subset x_1 P(\mathfrak{M}^k) + \ldots + x_n P(\mathfrak{M}^k).$$

Veamos por inducción que $P(\mathfrak{M}^k) \subset \mathfrak{M}^k$ para todo $k \in \mathbb{N}_0$:

Cuando $k = 0$ se comprueba fácilmente; asumamos ahora que se tiene que $P(\mathfrak{M}^k) \subset \mathfrak{M}^k$ y veamos que $P(\mathfrak{M}^{k+1}) \subset \mathfrak{M}^{k+1}$:

$$P(\mathfrak{M}^{k+1}) \subset x_1 P(\mathfrak{M}^k) + \ldots + x_n P(\mathfrak{M}^k) \subset x_1\mathfrak{M}^k + \ldots + x_n\mathfrak{M}^k = \mathfrak{M}^{k+1}.$$

Se toma ahora $f \in \mathcal{O}_n$ y se construye la serie truncada $S_N(f) = \sum_{|\alpha|\leq N} c_\alpha x^\alpha$ para cada $N \geq 0$; por lo que $f - S_N(f) \in \mathfrak{M}^{N+1}$ y el polinomio $S_N(f)$ pertenece a $Ker(P)$. Por lo tanto, $P(f - S_N(f)) = P(f) \in \mathfrak{M}^{N+1}$ y como el N tomado era arbitrario, se tiene que $P(f) = 0$. □

Proposición 2.1.13. *Vale que $\mathcal{D}_n(m) = \mathcal{D}(m)$ para todo m.*

Demostración. Ya se vio que $\mathcal{D}_n(m) \subset \mathcal{D}(m)$; veamos ahora que el morfismo $j_m : \mathcal{D}(m) \to Hom_{\mathbb{C}}(\mathcal{P}_m, \mathcal{O}_n)$ es inyectivo. Para ello, vamos a usar inducción en m:

Se tiene trivialmente que, cuando $m = 0$, j_0 es inyectivo. Paso siguiente, se ve el paso inductivo; supongamos que j_{m-1} es inyectivo y veamos que j_m también lo es. Sea $P \in \mathcal{D}(m)$ tal que $j_m(P) = 0$. Entonces, $j_{m-1}([P, x_k])(\varphi) = P(x_k\varphi) - x_kP(\varphi) = 0$ para cada $\varphi \in \mathcal{P}_{m-1}$; por hipótesis inductiva se tiene que $[P, x_k] = 0$ para todo k. Dado que $1 \in \mathcal{P}_m$ se sigue que $P(1) = 0$ y por el lema anterior, $P = 0$. Por lo tanto, $Ker(j_m) = 0$.

Para terminar la demostración, se toma $P \in \mathcal{D}(m)$. Por la sobreyectividad de j_m se toma $Q \in \mathcal{D}_n(m)$ tal que $j_m(P) = j_m(Q)$. Luego, $P - Q \in Ker(j_m)$, con lo cual $P - Q = 0$ y finalmente se tiene que $P = Q$. Como el $P \in \mathcal{D}(m)$ era arbitrario, resulta que $P \in \mathcal{D}_n(m)$. □

Demostración. (del teorema 2.1.7) Dado que $\mathcal{D}(\mathcal{O}_n) = \cup\mathcal{D}(m)$ se tiene que $\mathcal{D}(\mathcal{O}_n) = \mathcal{D}_n$. □

2.2 El haz $\mathcal{D}_X$

Sea U un subconjunto abierto de $\mathbb{C}^n$. Un operador diferencial sobre U es un operador de la forma

$$P = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(z)\partial_z^\alpha$$

donde a_α son funciones holomorfas sobre U; α representa el multiíndice $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$; $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$ y $\partial_z^\alpha = \partial_{z^1}^{\alpha_1} \dots \partial_{z^n}^{\alpha_n}$.

Se puede chequear fácilmente que el anillo de operadores diferenciales sobre U forma un subanillo de $End_{\mathbb{C}}(\mathcal{O}(U))$ y que, la restricción de un operador

$$P = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha \partial_x^\alpha$$

definido en un abierto U a un abierto V es el operador

$$P_{|V} = \sum_{|\alpha| \leq m} a_{\alpha|V} \partial_x^\alpha$$

Con tales morfismos de restricciones, los operadores diferenciales resultan prehaces de anillos en $\mathbb{C}^n$. Denotamos $\mathcal{D}_{\mathbb{C}^n}$ al haz asociado al prehaz mencionado previamente y $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}$ al haz de funciones analíticas en $\mathbb{C}^n$. Observemos que $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}$ tiene estructura natural de $\mathcal{D}_{\mathbb{C}^n}$-módulo.

La motivación del estudio de los $\mathcal{D}$-módulos surge del problema básico del estudio de sistemas de ecuaciones de la forma

$$\sum_{j=1}^{n} P_{ij} u_j = v_i \qquad (i = 1, \dots m) \tag{2.2}$$

Donde $\{v_i\}_{i=1}^m$ son funciones conocidas y $\{u_j\}_{j=1}^n$ son indeterminadas en algún espacio de funciones a especificar en el cual el anillo de secciones $\Gamma(U;\mathcal{D}_{\mathbb{C}^n})$ actúe. Debido a que el presente capítulo hace un marcado uso de la teoría de haces, podremos pensar al espacio de funciones en cuestión como $\mathcal{S}(U)$ el anillo de secciones de un $\mathcal{D}$-módulo. Por ejemplo, el espacio podría referir a $\mathcal{O}_U$ el anillo de funciones holomorfas en el abierto U así como también a $\mathcal{C}^\infty{}_U$ el anillo de funciones infinitamente diferenciables en el abierto U o incluso a $\mathcal{C}^\infty{}^*_U$ el espacio de distribuciones.

Para comenzar el estudio, nos resultará de principal interés determinar cuando dos sistemas resultan equivalentes. Consideremos, primero, el caso de ecuaciones homogéneas

$$\sum_{j=1}^{n} P_{ij}u_j = 0 \qquad (i = 1, \ldots m)$$

Intuitivamente, sistemas equivalentes serán sistemas que tienen las mismas soluciones en cualquier espacio de soluciones $\mathcal{S}$.

Denotemos P la matriz (P_{ij}) y $\mathcal{S}^P$ el haz de soluciones del sistema asociado a P en el $\mathcal{D}$-módulo $\mathcal{S}$ se tiene , entonces que

$$\Gamma(U;\mathcal{S}^P) = \{u \in \Gamma(U;\mathcal{S})^n : P.u = 0\}$$

La aplicación $\mathcal{S} \to \mathcal{S}^P$ define un funtor entre la categoría de $\mathcal{D}$-módulos y la categoría de haces de $\mathbb{C}$-espacios vectoriales; dos operadores P y Q serán considerados equivalentes cuando los funtores asociados $\mathcal{S} \to \mathcal{S}^P$ y $\mathcal{S} \to \mathcal{S}^Q$ son naturalmente equivalentes.

Consideremos ahora el morfismo

$$\mathcal{D}^m \to \mathcal{D}^n$$
$$R \mapsto R.P$$

y denotemos $\mathcal{M}_P$ su Cokernel. Se tiene la siguiente sucesión exacta corta

$$\mathcal{D}^m \xrightarrow{.P} \mathcal{D}^n \longrightarrow \mathcal{M}_P \longrightarrow 0$$

Como $\mathcal{H}om_{\mathcal{D}}(\ .\ ,\mathcal{S})$ es un funtor exacto a izquierda, se tiene la siguiente sucesión exacta

$$0 \longrightarrow \mathcal{H}om_{\mathcal{D}}(\mathcal{M}_P,\mathcal{S}) \longrightarrow \mathcal{S}^n \xrightarrow{P.} \mathcal{S}^m$$

y por lo tanto, una equivalencia entre funtores

$$\mathcal{H}om_{\mathcal{D}}(\mathcal{M}_P,\mathcal{S}) \cong \mathcal{S}^P.$$

De ésto último se deduce que los operadores P y Q son equivalentes si y sólo si $\mathcal{M}_P \cong \mathcal{M}_Q$ como $\mathcal{D}$-módulos.

Por lo tanto, parecería ser que que objeto intrínseco que representa a un sistema de ecuaciones diferenciales parciales homogénea es el $\mathcal{D}$-módulo $\mathcal{M}_P$ y no las funciones $\{u_j\}_{j=1}^n$. En éste sentido, tales funciones servirán simplemente al propósito de presentar escritura del sistema explícitamente y no resultarán intrínsecas al mismo.

Contemplemos ahora el caso de un sistema no homogéneo: Supongamos que tenemos $\{u_j\}_{j=1}^n$; $\{v_i\}_{i=1}^m \in \Gamma(U;\mathcal{S})$ y tomemos

$$\sum_{j=1}^{n} P_{ij}u_j = v_i \qquad (i=1,\dots m) \tag{2.3}$$

Tomemos $Q_1,\dots,Q_m$ operadores diferenciales en U, se tiene, entonces que

$$\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{m} Q_iP_{ij}\right)u_j = \sum_{i=1}^{m} Q_iv_i$$

y por lo tanto

$$\sum_{i=1}^{m} Q_iP_{ij} = 0 \quad \Rightarrow \quad \sum_{i=1}^{m} Q_iv_i = 0$$

A tal vector $(Q_1,\dots,Q_m) \in \mathcal{D}_U^m$ llamaremos *condiciones de compatibilidad* para el sistema no homogéneo 2.3. Por definición, las condiciones de compatibilidad son las secciones del núcleo del morfismo

$$\mathcal{D}_U^m \xrightarrow{.P} \mathcal{D}_U^n$$

Por lo tanto se tienen las siguientes sucesiones exactas

$$0 \to Ker(.P) \to \mathcal{D}_U^m \to Im\,(.P) \to 0$$

$$0 \to Im\,(.P) \to \mathcal{D}_U^n \to \mathcal{M}_P \to 0$$

y por lo tanto

$$0 \to \mathcal{H}om_{\mathcal{D}_U}(\mathcal{M}_P,\mathcal{S}) \to \mathcal{S}^n \to \mathcal{H}om_{\mathcal{D}_U}(Im\,(.P),\mathcal{S}) \to \mathcal{E}xt^1_{\mathcal{D}_U}(\mathcal{M}_P,\mathcal{S}) \to 0$$

$$0 \to \mathcal{H}om_{\mathcal{D}_U}(Im\,(.P),\mathcal{S}) \to \mathcal{S}^m \to \mathcal{H}om_{\mathcal{D}_U}(Ker\,(.P),\mathcal{S}) \to \mathcal{E}xt^1_{\mathcal{D}_U}(Im\,(.P),\mathcal{S}) \to 0$$

De la segunda sucesión se puede ver que

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_U}(Im\,(.P),\mathcal{S}) &= Im\,(\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_U}(Im\,(.P),\mathcal{S}) \hookrightarrow \mathcal{S}^m) \\
&= Ker\,(\mathcal{S}^m \to \mathcal{H}om_{\mathcal{D}_U}(Ker\,(.P),\mathcal{S})) \\
&= Ker\,(\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_U}(\mathcal{D}_U^m,\mathcal{S}) \to \mathcal{H}om_{\mathcal{D}_U}(Ker\,(.P),\mathcal{S})) \\
&= \{v \in \mathcal{S}^m : Q.v = 0, \forall Q \in Ker\,(.P)\}
\end{aligned}$$

Por lo que resulta que $Im\,(.P)$ es un $\mathcal{D}_U$-módulo que representa el sistema de condiciones de compatibilidad del sistema P. De la primer sucesión podemos ver que , a nivel de gérmenes, los elementos de $\mathcal{E}xt^1_{\mathcal{D}_U}(\mathcal{M}_P, \mathcal{S})_x$ son las clases de vectores $v_x \in \mathcal{S}^m_x$ satisfaciendo las condiciones de compatibilidad. Por lo tanto, en el lenguaje categórico, el estudio de las ecuaciones diferenciales lineales no es más que el estudio del funtor contravariante $\mathcal{H}om_{\mathcal{D}}(\bullet, \mathcal{O})$ de la categoría de $\mathcal{D}$-módulos que admiten presentación finita a la categoría de $\mathbb{C}$-módulos.

Como se vio en lo discutido recién, cuando se busque estudiar las soluciones de un cierto $\mathcal{D}_X$-módulo resultará conveniente hacerlo sobre aquellos que admitan presentación finita; a continuación se desarrollará con mayor precisión y se dará una definición concreta de tal noción.

Definición 2.2.1. (Módulos coherentes) Sea M un haz de R-módulos. Se dice localmente finitamente generado (respectivamente localmente finitamente presentado), si para cada $x \in X$ existe una sucesión exacta $R^p|_U \to M|_U \to 0$ (respectivamente $R^q|_U \to R^p|_U \to M|_U \to 0$) en algún entorno abierto $U \ni x$. M es un *módulo coherente* (como R-módulo) si las siguientes condiciones se cumplen:

- M es localmente finitamente generado.
- Para cada U abierto de X, cada submódulo localmente finitamente generado $N \subset M|_U$ es localmente finitamente presentado.

Un anillo R se dirá coherente (como haz de anillos) si lo es como R-módulo.

Para resultados y/o propiedades sobre módulos coherentes se sugiere consultar [Har77] y [Pha13].

Ejemplo 2.2.2. Consideremos la ecuación

$$\left(z\frac{d}{dz} - \lambda\right)u = 0, \quad \lambda \in \mathbb{C} \tag{2.4}$$

Si tomo $v(z) = zu(z)$ la ecuación se convierte en

$$\left(z\frac{d}{dz} - \lambda - 1\right)v = 0 \tag{2.5}$$

Por otro lado, si v es solución de 2.5, entonces $u = \frac{1}{1+\lambda}\frac{d}{dz}v$ satisface la ecuación 2.4. Más aún, tomando $v = zu(z)$ con u solución de 2.4 obtenemos $u = \frac{1}{1+\lambda}\frac{d}{dz}v$, ya que

$$\frac{1}{1+\lambda}\frac{d}{dz}v - u = \frac{1}{1+\lambda}\left(\frac{d}{dz}z - \lambda - 1\right)u = 0.$$

Recíprocamente, tomando $u = \frac{1}{1+\lambda}\frac{d}{dz}v$ con v una solución de 2.5 obtenemos $v = zu$, ya que

$$zu - v = \frac{1}{\lambda+1}\left(z\frac{d}{dz} - \lambda - 1\right)v = 0.$$

Por lo tanto, con las transformaciones $v = zu$ y $u = \frac{1}{1+\lambda}\frac{d}{dz}v$ podemos ver que (en el caso en el que $\lambda \neq -1$) las ecuaciones 2.4 y 2.5 son mutuamente equivalentes. Esto significa que son la misma ecuación, pero que sin embargo tienen presentaciones distintas; hecho que reafirma lo anterior: las funciones u que sirven de incógnitas para la ecuación diferencial no sirven otro propósito más que el de dar una presentacion de la misma.

Desarrollemos un poco más el ejemplo. Por lo desarrollado previamente, deducimos que las soluciones a la ecuación diferencial 2.4 pueden ser recuperadas a partir de $\mathcal{H}om_{\mathcal{D}}(\mathcal{M}_P, S)$ la cual depende solamente de $\mathcal{M}_P$. Recíprocamente, dado $\mathcal{M}$ un $\mathcal{D}$-módulo, por cada isomorfismo

$$\mathcal{M} \cong Coker\left(\mathcal{D} \xrightarrow{.P} \mathcal{D}\right),$$

obtenemos una presentación de la ecuación diferencial en cuestión; por lo tanto, la ecuación 2.4 es considerada una presentación explícita del módulo $\mathcal{M}_P$ correspondiente al isomorfismo entre $\mathcal{M}$ y el Cokernel. Cada isomorfismo dará una presentación explícita de la ecuación diferencial 2.4; por lo tanto, el $\mathcal{D}$-módulo correspondiente tendrá dos isomorfismos distinguidos

$$Coker\left(\mathcal{D} \xrightarrow{z\frac{d}{dz}-\lambda} \mathcal{D}\right) \cong Coker\left(\mathcal{D} \xrightarrow{z\frac{d}{dz}-\lambda-1} \mathcal{D}\right).$$

las cuales representan a 2.4 y 2.5 respectivamente.

Motivados por el análisis y ejemplo previo, trataremos de estudiar los sistemas de ecuaciones diferenciales

$$\sum_{j=1}^{n} P_{ij}u_j = v_i \qquad (i = 1, \dots m)$$

a partir del estudio del $\mathcal{D}_U$-módulo $\mathcal{M}_P$ definido como el Cokernel de la sucesión

$$\mathcal{D}^m \xrightarrow{.P} \mathcal{D}^n \longrightarrow \mathcal{M}_P \longrightarrow 0$$

y de su haz de soluciones $\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_U}(\mathcal{M}_P, \mathcal{S})$.

Con éstas ideas desarrolladas y debidamente motivadas en mente, ya podemos pasar al caso de operadores diferenciales en variedades holomorfas generales

Definición 2.2.3. Sea X una variedad holomorfa n-dimensional; denotamos $\mathcal{O}_X$ el haz de funciones holomorfas en X. *Un operador diferencial* (holomorfo) es un morfismo de haces $P : \mathcal{O}_X \to \mathcal{O}_X$ cuya escritura en coordenadas locales es de la forma

$$P = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha \partial_x^\alpha$$

$$\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0}, \quad \partial^\alpha_x = \frac{\partial^{\alpha_1 + \ldots + \alpha_n}}{\partial {x_1}^{\alpha_1} \ldots \partial {x_n}^{\alpha_n}}, \quad a_\alpha \in \mathcal{O}.$$

Asumiremos que $a_\alpha = 0$ para todos salvo finitos de los sumandos de P.

Llamaremos a P operador diferencial de orden a lo sumo "m" si $a_\alpha = 0$ para cualquier α tal que $|\alpha| := \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n > m$

Denotamos $\mathcal{D}_X$ al haz de operadores diferenciales sobre la variedad holomorfa X

Observación 2.2.4. Dado un sistema de coordenadas locales $(U; x_1, \ldots, x_n)$ se tiene la n-upla $\partial_1, \ldots, \partial_n$ donde ∂_i es la derivación con respecto a x_i. La proposición 2.1.13 se puede aplicar a stalks de $\mathcal{D}_X$ en U. Se sigue, entonces, que el haz restringido $\mathcal{D}_X|_U$ es un haz de anillos generado por $\mathcal{D}_X(0)$ y $\partial_1, \ldots, \partial_n$. Más aún, para cada x_0 se tiene que $\mathcal{D}_{X,x_0} \cong \mathcal{D}_n$.

2.3 Soluciones de un sistema diferencial

Como se dijo antes, para hablar de soluciones de un sistema de ecuaciones diferenciales hay que especificar primero $\mathcal{F}$ el haz de funciones donde se buscan las soluciones. En lenguaje clásico, dado un sistema

$$\sum_{j=1}^{q} R_{ij} u_j = 0 \;\; i = 1, 2, \ldots, p \tag{2.6}$$

resolverlo sobre $\mathcal{F}$ significa encontrar $(f_1, \ldots, f_q) \in \mathcal{F}^q$ que sustituyan a $(u_1, \ldots, u_q)$ en 2.6. Por lo dicho en párrafos anteriores, las soluciones del sistema corresonden a elementos de $\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{F})$ donde $\mathcal{M} = \mathcal{D}^q_X / \mathrm{Im}\,(\rho)$.

Definición 2.3.1. Una solución $\overline{f} \in \mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{F})$ se dirá *genérica* si $\overline{f}$ es inyectiva y diremos que $(f_1, \ldots, f_q)$ es solución genérica de 2.6.

Observación 2.3.2. En otras palabras, una solución genérica corresponde a un isomorfismo $\overline{f} : \mathcal{M} \to \overline{f}(\mathcal{M}) = \mathcal{D}_X f_1 + \ldots + \mathcal{D}_X f_q$

Ejemplo 2.3.3. Sea $\mathcal{F}$ el espacio de distribuciones sobre $\mathbb{R}^n$ y sea δ la distribución de Dirac en el origen de coordenadas. Entonces, δ es solución genérica del sistema

$$\begin{cases} x_1 u = 0 \\ x_2 u = 0 \\ \vdots \\ x_n u = 0 \end{cases} \tag{2.7}$$

Es decir, hay un isomorfismo

$$\mathcal{D}_X/\mathcal{D}_X x_1 + \ldots + \mathcal{D}_X x_n \to \mathcal{D}_X \delta$$

Es claro que $x_1\delta = x_2\delta = \ldots = x_n\delta = 0$.

Por otro lado, todo $P \in \mathcal{D}_X$ se puede escribir de manera única como $\sum_{|\alpha|\leq m} \partial^\alpha b_\alpha$ y separando cada b_α en sus términos constantes y sus términos divisibles por x_i el operador P se puede escribir como

$$\sum_{i=1}^{n} P_i x_i + R \quad \text{con } P_i \in \mathcal{D}_X, R \in \mathbb{C}\left[\partial_{x_1}, \ldots, \partial_{x_n}\right]$$

y por lo tanto la ecuación $P\delta = 0$ es equivalente a $R\delta = 0$, por lo que resta ver que el único operador diferencial a coeficientes constantes que anula a δ es el operador nulo; lo cual es un resultado conocido de teoría de distribuciones.

2.4 Sistema de generadores

Definición 2.4.1. Si X es una variedad compleja y $\mathcal{O}_X$ es el haz de funciones holomorfas sobre X, se denota Θ_X el haz de campos de vectores sobre X como:

$$\begin{aligned}\Theta_X &= Der_{\mathbb{C}_X}(\mathcal{O}_X) \\ &= \left\{\theta \in End_{\mathbb{C}_X}(\mathcal{O}_X) : \theta(fg) = \theta(f)g + f\theta(g) \quad (f, g \in \mathcal{O}_X)\right\}.\end{aligned}$$

Sea Θ_X el haz de campos de vectores sobre X. Luego, Θ_X es un subhaz de $\mathcal{D}_X$. El anillo $\mathcal{D}_X$ está generado por $\mathcal{O}_X$ y Θ_X con las siguientes relaciones:

1. $\mathcal{O}_X \longrightarrow \mathcal{D}_X$ es morfismo de anillos.

2. $\Theta_X \longrightarrow \mathcal{D}_X$ es $\mathcal{O}_X$-lineal a izquierda.

3. $\Theta_X \longrightarrow \mathcal{D}_X$ es morfismo de álgebras de Lie.

4. $[v, a] = v(a)$ para todo $v \in \Theta_X, a \in \mathcal{O}_X$.

Lema 2.4.2. *Sea R un haz de anillos sobre X y sean $\varsigma : \mathcal{O}_X \to R$, $\varphi : \Theta_X \to R$ morfismos de haces tales que:*

1. *$\varsigma : \mathcal{O}_X \to R$ es morfismo de anillos.*

2. *$\varphi : \Theta_X \to R$ es $\mathcal{O}_X$-lineal a izquierda, con $\varphi(av) = \varsigma(a)\varphi(v)$.*

3. $\varphi : \Theta_X \to R$ *es morfismo de álgebras de Lie, con* $[\varphi(u), \varphi(v)] = \varphi([u,v])$.

4. $[\varphi(v), \varsigma(a)] = \varsigma(v(a))$ *para todo* $v \in \mathcal{O}_X$, $a \in \mathcal{O}_X$.

Entonces existe un único morfismo de anillos $\Phi : \mathcal{D}_X \to R$ *tal que* $\mathcal{O}_X \to \mathcal{D}_X \to R$ *coincide con* ς *y* $\Theta_X \to \mathcal{D}_X \to R$ *coincide con* φ.

Demostración. Sea $(U; z)$ sistema de coordenadas locales, se define

$$\Phi\left(\sum a_\alpha \partial^\alpha\right) = \sum \varsigma(a_\alpha)\,\varphi(\partial_1)^{\alpha_1} \ldots \varphi(\partial_n)^{\alpha_n}.$$

La unicidad de tal morfismo se demuestra trivialmente debido a que $\mathcal{D}_X$ es un anillo generado por $\mathcal{O}_X$ y Θ_X. □

Corolario 2.4.3. *Si* $\mathcal{M}$ *es un* $\mathcal{O}_X$*-módulo con el morfismo*

$$\begin{aligned} \mu : \mathcal{O}_X &\to End(\mathcal{M}) \\ u &\mapsto (m \mapsto um) \end{aligned}$$

y además $\alpha : \Theta_X \to End(\mathcal{M})$ *es un morfismo* $\mathbb{C}$*-lineal que cumple:*

1. $[\alpha(\theta), \mu(h)] = \mu(L_\theta h)$.
2. $[\alpha(\theta), \alpha(\psi)] = \alpha([\theta, \psi])$.
3. $\mu(h) \circ \alpha(\theta) = \alpha(h\theta)$.

para todo $\theta, \psi \in \Theta_X$ *y para todo* $h \in \mathcal{O}_X$. *Entonces, existe una única estructura a izquierda de* $\mathcal{D}_X$*-módulo en* $\mathcal{M}$ *que extiende las acciones de* $\mathcal{O}_X$ *y* Θ_X.

Ejemplos 2.4.4. Analicemos el $\mathcal{D}_X$-módulo más sencillo: el $\mathcal{D}_X$-módulo $\mathcal{O}_X$

$\mathcal{O}_X$ es generado por el elemento 1 como $\mathcal{D}_X$-módulo, y además, $Ker(\mathcal{D}_X \to \mathcal{O}_X) = \mathcal{D}_X\mathcal{O}_X$. Por lo tanto, se tiene la sucesión exacta

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X \xrightarrow{\delta} \mathcal{D}_X \to \mathcal{O}_X \to 0 \\ (P \otimes a) \mapsto P.a \end{aligned}$$

Por lo tanto, su funtor de soluciones será $\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{O}_X, \mathcal{S}) = \left\{u \in \mathcal{S} : \frac{\partial}{\partial z_i}u = 0, \quad \forall i = 1, \ldots, n\right\}$

Capítulo 3

Teoría de Fuchs y conexiones meromorfas

En el presente capítulo desarrollaremos la teoría de Fuchs para ecuaciones diferenciales en variedades holomorfas, la cual servirá como motivación principal para el análisis posterior.

Notación. Denotaremos:

- $\mathbb{D}_\varepsilon = \{z \in \mathbb{C}, |z| < \varepsilon\}$ al disco abierto de radio ε
- $\mathbb{K}$ al cuerpo de gérmenes en 0 de funciones meromorfas
- $\widetilde{\mathcal{O}}\left(\mathbb{D}_\varepsilon^*\right)$ es el anillo de funciones holomorfas multivaluadas en D_ε^* es decir, el anillo de funciones holomorfas en el revestimiento universal $\widetilde{D_\varepsilon^*}$
- $\widetilde{\mathcal{O}}$ denotará el anillo de *stalks* de funciones holomorfas multivaluadas en $\mathbb{C}$ en 0. En otras palabras: $\lim_{\varepsilon\to 0}\widetilde{\mathcal{O}}\left(D_\varepsilon^*\right)$

Sea $P = \sum_{i=0}^n a_i(z)\left(\frac{d}{dz}\right)^{n-i}$ un operador diferencial sobre $\mathbb{C}$ y consideremos la ecuación diferencial $Pu = 0$ con $a_i \in K$, $a_0 \neq 0$. Tal sistema resulta equivalente a

$$\frac{d}{dz}u_i(z) = \sum_{j=0}^{n} a_{ij}(z)u_j(z) \quad i = 1, \ldots, n$$

con $a_{ij} \in K$. A su vez, el mismo sistema se puede expresar de la forma

$$\frac{dU}{dz}(z) = A(z)U(z)$$

donde $A(z) = (a_{ij}(z)) \in End(n, K)$ y $U(z) = (u_1(z), \ldots, u_n(z))$ de manera que usando la notación matricial, el sistema de ecuaciones diferenciales puede ser tratado como un sistema de orden uno.

Para $A_1, A_2 \in End(n, K)$ diremos que dos sistemas $\frac{d}{dz}u(z) = A_i(z)u(z)$ $i = 1, 2$ se dicen *equivalentes* si existe una matriz $T \in Gl_n(K)$ de manera tal que

$$A_1 = TA_2T^{-1} - T\frac{d}{dz}T^{-1}$$

lo cual resulta simplemente de realizar el cambio de variables $v(z) = Tu(z)$.

Sea $\varepsilon > 0$ suficientemente chico como para que los coeficientes $a_{ij}(z)$ sean funciones meromorfas en D_ε sin polos fuera de cero.

El revestimiento universal $\widetilde{D_\varepsilon^*}$ de D_ε^* es simplemente conexo, de manera que las soluciones al sistema vistas en el revestimiento (obtenidas a partir del cambio de variable $z = e^{2\pi it}$) forman un $\mathbb{C}$-espacio vectorial de dimensión n.

Sea $\widetilde{S}(t) = (\widetilde{U}^1(t), \ldots, \widetilde{U}^n(t))$ n soluciones linealmente independientes, donde cada $\widetilde{U}^k(t)$ es un vector columna con coeficientes en $\mathcal{O}\left(\widetilde{D_\varepsilon^*}\right)$. Claramente, $(\widetilde{U}^1(t+1), \ldots, \widetilde{U}^n(t+1))$ también resulta linealmente independiente. Por lo tanto, $t \mapsto t+1$ define un automorfismo; lo que significa que existe una matriz $C \in Gl_n(\mathbb{C})$ tal que

$$\widetilde{S}(t+1) = \widetilde{S}(t)C$$

A la matriz C se le llama matriz de *monodromía* del sistema. Dos sistemas serán equivalentes sí y sólo sí sus matrices de monodromía son conjugadas

Definición 3.0.1. Sea $u \in \widetilde{\mathcal{O}}$ una solución del sistema $\frac{d}{dz}u(z) = A(z)u(z)$. Se dice que la solución tiene la propiedad de *crecimiento moderado* si para cualquier sector de la forma

$$S = \{z = (r, \theta) : 0 < r < \varepsilon, \theta_0 < \theta < \theta_1\}$$

existe una constante $c > 0$ y un $j \in \mathbb{N}$ tal que

$$|u(z)| < \frac{c}{|z|^j}$$

para todo $z \in S$. Si todas las soluciones del sistema tienen la propiedad del crecimiento moderado, diremos que el sistema es *regular*, o que tiene singularidad regular en 0.

Definición 3.0.2. Un sistema de ecuaciones diferenciales del tipo $dU/dz = A(z)u(z)$ donde $A \in \mathbb{K}$ tiene coeficientes holomorfos en $\mathbb{C}$ salvo en finitos puntos $\{a_1, \ldots, a_k\}$ y polos de orden 1 en cada a_j se dice de *tipo fuchs*; es decir, es un sistema de tipo Fuchs sí y sólo sí se puede escribir como

$$A(z) = \sum_{j=1}^{k} \frac{B_j}{z - a_j}.$$

Donde B_i son constantes.

Antes de continuar el capítulo, resulta apropiado mencionar el problema número 21 de Hilbert, el cual juega un papel protagónico en la teoría de $\mathcal{D}$-módulos; el mismo se formula de la siguiente manera: Dada una matriz C de monodromía y singularidades fijas en $\mathbb{C}$ mostrar que se puede construir un sistema de tipo Fuchs que tenga a esos mismos puntos singulares y correspondiente monodromía asociada.

Para una monodromía en general, la respuesta al problema 21 de Hilbert es afirmativo y fue demostrado en 1908 por Josip Plemelj. Sin embargo, Plemejl dejó de lado ciertos casos degenerados particulares, de los cuales fue demostrado por Andrei Bolibrukh que en estos casos la respuesta es negativa.

El último capítulo del trabajo generaliza a variedades de mayor dimensión, gracias a la correspondencia de Riemann-Hilbert, el problema 21 de Hilbert.

A continuación definiremos la noción de conexión meromorfa; la cual será el concepto indicado para generalizar a variedades.

Definición 3.0.3. Una conexión meromorfa en $\mathbb{C}$ en 0 es un espacio vectorial M de dimensión finita sobre $\mathbb{K}$ junto con una función $\mathbb{C}$-lineal $\nabla : M \to M$ tal que

$$\nabla(fm) = \frac{df}{dz}m + f\nabla(m) \quad \forall f \in \mathbb{K}, \ \forall m \in M.$$

Diremos que dos conexiones meromorfas $(M_1, \nabla_1), (M_2, \nabla_2)$ son isomorfas si existe un isomorfismo $\phi : M_1 \to M_2$ de manera tal que $\phi \circ \nabla_1 = \nabla_2 \circ \phi$.

Observación 3.0.4. Existe una correspondencia entre sistemas de ecuaciones de la forma $\frac{d}{dz}u(z) = A(z)u(z)$ y conexiones meromorfas.

Sea (M, ∇) una conexión meromorfa. Sea $\{e_1, \ldots, e_n\}$ una base del espacio vectorial M, para cada $j = 1, \ldots, n$ existen coeficientes $a_{ij} \in \mathbb{K}$ tal que

$$\nabla e_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} e_i.$$

Por lo tanto, para cada $u \in M$

$$\begin{aligned}
\nabla u = 0 &\Leftrightarrow \nabla\left(\sum_i u_i e_i\right) = 0 \\
&\Leftrightarrow \sum_i \left(\frac{du_i}{dz} - \sum_j a_{ij} u_j\right) e_i = 0 \\
&\Leftrightarrow \frac{du_i}{dz} - \sum_j a_{ij} u_j = 0 \ \forall i \\
&\Leftrightarrow \frac{d}{dz}u(z) = A(z)u(z)
\end{aligned}$$

Recíprocamente, dado un sistema de ecuaciones $\frac{d}{dz}u(z) = A(z)u(z)$ recuperamos una conexión meromorfa definida a partir de

$$\nabla e_i = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} e_i$$

donde $e_1, \ldots, e_n$ es base de un espacio vectorial K de dimensión n. A partir de la correspondencia mostrada, resulta claro que las clases de equivalencia de ecuaciones diferenciales se corresponde biyectivamente con las clases de isomorfismos de conexiones meromorfas.

Teorema 3.0.5. *Los siguientes ítems son equivalentes:*

1. $\frac{d}{dz}u(z) = A(z)u(z)$ *es regular.*
2. *El sistema del ítem 1 es equivalente a uno de la forma* $\frac{d}{dz}u(z) = \frac{B(z)}{z}u(z)$ *donde* $B(z)$ *es una matriz con coeficientes holomorfos.*
3. *El sistema del ítem 1 es equivalente a uno de la forma* $\frac{d}{dz}u(z) = \frac{C}{z}u(z)$ *donde* C *es una matriz con coeficientes constantes.*
4. *Cualquier solución multivaluada del sistema tiene la propiedad de crecimiento moderado.*

Para la demostración consultar [BGKH88].

Veamos ahora el teorema clásico de Fuchs:

Teorema 3.0.6. *Sea* $P = \sum_{i=0}^{n} a_i(z) \left(\frac{d}{dz}\right)^{n-i}$ *un operador diferencial sobre* $\mathbb{C}$ *con* $a_i(z) \in \mathbb{K}$ *y* $a_0(z) \not\equiv 0$. *Las soluciones multivaluadas* $u \in \widetilde{\mathcal{O}}$ *de la ecuación* $Pu = 0$ *tienen la propiedad de crecimiento moderado si y sólo si el orden del polo de* $\frac{a_i}{a_0}$ *en 0 es a lo sumo* i *para* $i = 1, \ldots, n$.

Demostración. Una dirección es inmediata: si los coeficientes a_i satisfacen la *condición de Fuchs*, entonces el sistema resulta regular gracias a 3.0.5. Recíprocamente, supongamos que el sistema es regular, procederemos por inducción en n el orden de P. Para hacerlo, notemos que si multiplicamos a ambos lados por $\frac{z^n}{a_0(z)}$, la ecuación es equivalente a una de la forma

$$\theta^n u + \sum_{i=1}^{n} b_i(z)\theta^{n-i} u = Qu = 0$$

donde $\theta = z\frac{d}{dz}$, y las condiciones de Fuchs resultan equivalentes a pedir que todas las b_i sean holomorfas. Siempre podemos conseguir soluciones de la forma $u(z) = z^{\alpha}h(z)$, donde $h \in \mathbb{K}$ y $e^{2\pi i\alpha}$ es un autovalor de la monodromía.

Sea $v \in \widetilde{\mathcal{O}}$

$$Q(uv) = 0 \Leftrightarrow \left(\theta^{n-1} + c_1\theta^{n-2} + \ldots + c_{n-1}\right)(\theta v) = 0$$

donde los c_i tienen la forma

$$c_i = b_i + f_{i,i-1}b_{i-1} + \ldots + f_{i,1}b_1 \quad f_{i,j} \text{ holomorfas}$$

Por regularidad observamos que, dado que la solución uv tiene crecimiento moderado, también lo tienen las soluciones θv de esta ecuación de grado menor. De esta manera, aplicamos la hipótesis inductiva para mostrar que todos los coeficientes c_i deben ser holomorfos y que por lo tanto, todos los b_i deben ser holomorfos. □

Definición 3.0.7. Sea (M, ∇) una conexión meromorfa. Decimos que la conexión es *regular* (en 0) si existe una base $\{e_1 \ldots e_n\}$ de M sobre $\mathbb{K}$ tal que

$$\nabla e_i = -\sum_j \frac{b_{ij}(z)}{z} e_j \quad b_{ij} \in \mathcal{O}.$$

Observación 3.0.8. Por lo visto en los últimos dos teoremas, la definición es equivalente a pedir la regularidad del sistema de ecuaciones diferenciales asociado. En efecto, la conexión meromorfa corresponde al sistema

$$\frac{du_i}{dz} = \sum_j \frac{b_{ij}(z)}{z} u_j$$

el cual, gracias a 3.0.5 resulta regular cuando podemos elegir $b_{ij} \in \mathcal{O}$, es decir, cuando existe una base de la forma anterior para la conexión meromorfa asociada.

3.1 Conexiones Integrables

Denotemos $L(\mathcal{M}) = \mathcal{H}om_{\mathbb{C}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{M})$ donde $\mathcal{M}$ es un $\mathcal{O}_X$-módulo; claramente resulta que $L(\mathcal{M})$ tiene estructura de $\mathcal{O}_X$-módulo. Se considera ahora el haz $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\Theta_X, L(\mathcal{M}))$ y se toma ∇ una sección del mismo; para cada elemento $\delta \in \Theta_X$ se nota ∇_δ a la imagen bajo el morfismo ∇. Por linealidad se tiene que

$$\nabla_{f\delta}(m) = f\nabla_\delta(m);\ f \in \mathcal{O}_X,\ m \in \mathcal{M}.$$

Definición 3.1.1. Una sección global ∇ de $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\Theta_X, L(\mathcal{M}))$ se llama 'conexión integrable' sobre $\mathcal{M}$ si se cumple

(1) $\nabla_\delta(fm) = \delta(f).m + f.\nabla_\delta(m)$

(2) $\nabla_{[\delta,\delta']} = [\nabla_\delta, \nabla_{\delta'}]$

Definición 3.1.2. (Categoría de conexiones integrables) Se denota $\mathcal{A}$ a la categoría cuyos objetos son pares $(\mathcal{M}, \nabla)$ donde $\mathcal{M}$ es un $\mathcal{D}_X$-módulo y ∇ es una conexión integrable; los morfismos en la categoría entre dos objetos $(\mathcal{M}, \nabla)$ y $(\mathcal{M}', \nabla')$ son secciones globales φ del haz $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{M}')$ tales que $\varphi \circ \nabla = \nabla' \circ \varphi$.

Teorema 3.1.3. *La categoría de $\mathcal{D}_X$-módulos y $\mathcal{A}$ son equivalentes*

Demostración. Se define un funtor μ entre la categoría de $\mathcal{D}_X$-módulos y $\mathcal{A}$ de manera tal que $\mu(\mathcal{M}) = (\mathcal{M}, \nabla)$; donde $\mathcal{M}$ es considerado como $\mathcal{O}_X$-módulo con la estructura inducida por ser $\mathcal{D}_X$-módulo y $\nabla_\delta(m) = \delta(m)$ para cada $\delta \in \Theta_X$ y $m \in \mathcal{M}$. Es claro que ∇ satisface la primer condición para conexiones integrables ya que es una derivación y por lo tanto $\delta(fm) = \delta(f)m + f\delta(m)$.

La segunda condición vale puesto que

$$\begin{aligned}\left[\nabla_\delta, \nabla_{\delta'}\right](m) &= \nabla_\delta\left(\nabla_{\delta'}(m)\right) - \nabla_{\delta'}\left(\nabla_\delta(m)\right) = \delta\left(\delta'(m)\right) - \delta'\left(\delta(m)\right) \\ &= \left[\delta, \delta'\right](m) = \nabla_{[\delta,\delta']}(m)\end{aligned}$$

Para completar la demostración hay que ver que el funtor μ es plenamente fiel y sobreyectivo.

Sobreyectividad Sea $(\mathcal{M}, \nabla)$ una conexión integrable; es decir que $\mathcal{M}$ es un $\mathcal{O}_X$-módulo y ∇ es una sección de $\mathcal{H}om_{\mathbb{C}_X}(\Theta_X, L(\mathcal{M}))$, por corolario 2.4.3 resulta que $\mathcal{M}$ tiene estructura única de $\mathcal{D}_X$-módulo que extiende la de $\mathcal{O}_X$-módulo.

El funtor es plenamente fiel Sean $\mathcal{M}$ y $\mathcal{N}$ $\mathcal{D}_X$-módulos y consideremos el morfismo natural

$$\varphi : \mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{N}) \to \mathcal{H}om_{\mathcal{A}}(\mu((\mathcal{M}), \mu(\mathcal{N}))\,.$$

Por construcción del funtor μ se ve fácil que φ es inyectivo; por el lema 2.4.2 se ve que φ es sobreyectivo. □

Por lo tanto, podremos pensar a un $\mathcal{D}_X$-módulo a izquierda como una conexión integrable de un $\mathcal{O}_X$-módulo que no es necesariamente localmente libre ni de rango finito.

Definición 3.1.4. Decimos que un $\mathcal{D}_X$-módulo $\mathcal{M}$ es una conexión integrable si es localmente libre de rango finito como $\mathcal{O}_X$-módulo

Ejemplo 3.1.5. Consideremos un operador diferencial ordinario

$$P = \sum_{i=0}^{m} a_i(z)\partial_z^i \text{ con } \partial_z = \frac{d}{dz}; a_i \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}}$$

sobre $\mathbb{C}$. Como ya sabemos, el $\mathcal{D}_{\mathbb{C}}$-módulo correspondiente a la ecuación diferencial $Pu = 0$ es $\mathcal{D}_{\mathbb{C}}/\mathcal{D}_{\mathbb{C}}P$. Por lo tanto, en $U = \{z \in \mathbb{C} : a_m(z) \neq 0\}$ resulta que

$$\mathcal{M}|_U \cong \bigoplus_{i=0}^{m-1} \mathcal{O}_U u^{(i)} \text{ con } u^{(0)} = u; u^{(i)} = \partial_z^i u \text{ para } i = 1, 2, \ldots$$

para u tal que $Pu = 0$. Es decir que resulta una conexión integrable de rango m sobre U.

Teorema 3.1.6. *Un $\mathcal{D}_X$-módulo coherente es una conexión integrable si y sólo si es coherente sobre $\mathcal{O}_X$*

Demostración. Para verlo, hay que chequear que todo $\mathcal{D}_X$-módulo coherente sobre $\mathcal{O}_X$ es localmente libre como $\mathcal{O}_X$-módulo. Alcanza con ver que, para cada $z \in X$ el stalk $\mathcal{M}_z$ es libre sobre $\mathcal{O}_{X,z}$. Sea $\mathfrak{M}$ el ideal maximal del anillo $\mathcal{O}_{X,x}$. Se pueden conseguir elementos $P_1, \ldots, P_k$ de $\mathcal{M}_x$ de manera tal que $\left\{\overline{P_1}, \ldots, \overline{P_k}\right\}$ generen $\mathcal{M}_x/\mathfrak{M}\mathcal{M}_x$ como $\mathcal{O}_{X,x}/\mathfrak{M}$-espacio vectorial (se consigue tomando una base del $\mathbb{C}$-espacio vectorial $\mathcal{M}_x/\mathfrak{M}\mathcal{M}_x$ y aplicando el lema de Nakayama).

Defino, para cada conjunto $F = \{f_1, \ldots, f_k\} \subset \mathcal{O}_{X,x}$ el orden de F de la siguiente manera:

$$ord(F) = \min_i (\max \{p : f_i \in \mathfrak{M}^p\})$$

Así que si $ord(F) = 0$ entonces $f_i \notin \mathfrak{M}$ para algún i. Supongamos que existe $f_1, \ldots, f_k$ de manera tal que

$$\sum_i f_i P_i = 0. \tag{3.1}$$

y tomamos $F = \{f_1, \ldots, f_k\}$.

Si podemos reducir siempre $ord(F)$ entonces llegamos a un absurdo, pues podemos reducir $ord(F)$ a cero y tomando módulo $\mathfrak{M}$ encontramos una relación entre los $\overline{P_i}$.

El orden de F lo podemos reducir siempre aplicando el diferencial ∂_j a la relación 3.1 para conseguir

$$\sum_i (\partial_j h_i) P_i + h_i (\partial_j P_i) = 0,$$

la cual resulta una nueva relación de dependencia. Se puede conseguir siempre algún j de manera tal que el orden de F decrezca, porque $ord(f + g) = \min \{ord(f), ord(g)\}$ y siempre existe algún ∂_j que reduce el orden de una $f \in \mathcal{O}_{X,x}$. □

Definición 3.1.7. Para cada $1 \leq p \leq dim(X)$ se tiene el haz de p-formas holomorfas Ω_X^p. Si $\mathcal{M}$ es un $\mathcal{D}_X$-módulo a izquierda, se define $\Omega^p(\mathcal{M}) = \Omega_X^p \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{M}$ para cada $p \geq 0$.

Observación 3.1.8. Cuando $p = 1$ se tiene el isomorfismo canónico $\Omega^1(\mathcal{M}) = \mathcal{H}om_{\mathcal{O}}(\Theta_X, \mathcal{M})$. Dado que $\mathcal{M}$ tiene estructura de $\mathcal{D}_X$-módulo a izquierda, esta provisto de una conexión integrable

∇. Se define una función $\mathcal{O}_X$-lineal $d^0 : \mathcal{M} \to \Omega^1_X \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{M}$ como $d^0(m)(\delta) = \nabla_\delta(m)$. Por lo tanto, tenemos el morfismo

$$\mathcal{M} \xrightarrow{d^0} \Omega^1_X \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{M},$$

el cual puede ser extendido a $d^p : \Omega^p(\mathcal{M}) \to \Omega^{p+1}(\mathcal{M})$ para todo $1 \leq p \leq dim(X)$ de manera tal que

$$d^p(\alpha \otimes m) = d\alpha \otimes m + (-1)^p \alpha \wedge d^0(m) \text{ para todo } \alpha \in \Omega^p_X \text{ y } m \in \mathcal{M}.$$

Es importante notar que, en un sistema de coordenadas locales $z : U \to \mathbb{C}$ se puede expresar a $d^0(m)$ como $\sum_{j=1}^n dz^j \otimes \partial_j m$ (puesto que $d^0(m)(\delta) = \delta(m)$).

Con el mismo sistema de coordenadas locales se puede escribir $d^p(\alpha \otimes m) = d\alpha \otimes m + (-1)^p \alpha \wedge d^0(m) = d\alpha \otimes m + (-1)^p \sum_{j=1}^n \alpha \wedge dz^j \otimes \partial_j m = d\alpha \otimes m + \sum_{j=1}^n dz^j \wedge \alpha \otimes \partial_j m$. Se verifica ahora que $d^{p+1} \circ d^p = 0$:

$$\begin{aligned}
d^{p+1}d^p(\alpha \otimes m) &= d^{p+1}(d\alpha \otimes m) + \sum_{j=1}^n d^{p+1}\left(dz^j \wedge \alpha \otimes \partial_j m\right) \\
&= d(d\alpha) \otimes m + (-1)^p d\alpha \wedge d^0(m) + \\
&\quad \sum_{j=1}^n \left[d\left(dz^j \wedge \alpha\right) \otimes \partial_j m + \sum_{i=1}^n dz^i \wedge dz^j \wedge \alpha \otimes \partial_i \partial_j m \right] \\
&= (-1)^p d\alpha \wedge d^0(m) + \sum_{j=1}^n d(dz^j \wedge \alpha) \otimes \partial_j m + 0 \\
&= (-1)^p d\alpha \wedge d^0(m) - \sum_{j=1}^n dz^j \wedge d\alpha \otimes \partial_j m \\
&= (-1)^p d\alpha \wedge d^0(m) - (-1)^p \sum_{j=1}^n d\alpha \wedge dz^j \otimes \partial_j m \\
&= (-1)^p d\alpha \wedge d^0(m) - (-1)^p d\alpha \wedge d^0(m) = 0
\end{aligned}$$

Por lo tanto, se tiene un complejo

$$0 \to \Omega^0(\mathcal{M}) \to \Omega^1(\mathcal{M}) \to \ldots \to \Omega^n(\mathcal{M}) \to 0.$$

Tal complejo se llama el *complejo de de Rham* del $\mathcal{D}_X$-módulo $\mathcal{M}$ y se denota $DR_X(\mathcal{M})$.

Como último comentario queda remarcar que en un sistema de coordenadas locales $z : U \to \mathbb{C}^n$ el complejo $DR_X(\mathcal{M})$ es igual al complejo de Koszul $K^\cdot(\Phi, \mathcal{M})$.

Definición 3.1.9. Llamaremos *sistema local* sobre una variedad compleja X a un haz localmente constante de $\mathbb{C}_X$-módulos con stalks de dimensión finita. Suponiendo que X es conexo se tiene que los stalks tienen la misma dimensión, que se llama el *rango* del sistema local.

El concepto de sistema local se generalizará en el último capítulo a lo que se conoce como haces constructibles.

Ejemplo 3.1.10. • El haz constante $\mathbb{C}_X^n$ es un sistema local de rango n.

- Sea $X = \mathbb{C}^\times$. Entonces, existe una correspondencia biyectiva entre sistemas locales de rango uno en X y números $\lambda \in \mathbb{C}^\times$. Explícitamente, dado un sistema local $\mathcal{F}$, sea $\gamma \in \pi_1(X, 0)$ se puede cubrir a tal lazo a partir de abiertos de manera tal que el haz $\mathcal{F}$ sea trivial en cada abierto; de manera que componiendo los isomorfismos de los abiertos solapados se tiene un isomorfismo $\mathbb{C} \xrightarrow{\lambda} \mathbb{C}$

El último ejemplo corresponde a un fenómeno ya discutido previamente en el presente capítulo que se denomina monodromía. Se puede interpretar a cada λ como antes como una representación de dimension uno del grupo fundamental de $\mathbb{C}^\times$.

Teorema 3.1.11. *Sea $\mathcal{M}$ una conexión integrable de rango m en una variedad compleja X. Entonces, $H^i(DR_X(M)) = 0$ para $i \neq -d_X$ y $H^{-d_X}(DR_X(\mathcal{M}))$ es un sistema local. Más aún, se tiene una equivalencia de categorías*

$$H^{-d_X}(DR_X(\bullet)) : Con(X) \to Loc(X).$$

Donde $Con(X)$ representa la categoría de conexiones integrables sobre X y $Loc(X)$ representa la categoría de sistemas locales sobre X.

Demostración. Para comenzar, hay que chequear que $H^{-d_X}(DR_X(\mathcal{M}))$ es un sistema local de rango m en X. En la categoría derivada, se tiene un representante de $DR_X(\mathcal{M})[-d_X]$

$$\Omega_X^0 \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{M} \to \ldots \to \Omega_X^{d_X} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{M}$$

esto es así porque existe la resolución del módulo $\Omega_X = \bigwedge^{d_X} \Omega_X^1$

$$0 \to \Omega_X^0 \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{D}_X \to \ldots \to \Omega_X^n \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{D}_X \to \Omega_X \to 0$$

donde los diferenciales son definidos como antes y la última flecha $\Omega_X^{d_X} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{D}_X \to \Omega_X$ está dada como $\omega \otimes P \mapsto \omega P$.

Mirando la cohomología en grado cero se tiene como resultado

$$Ker\left(\nabla : \mathcal{M} \to \Omega_X^1 \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{M}\right)$$

donde $\nabla(m) = \sum_i (x_i \otimes \partial_i m)$. Por lo tanto resulta que

$$H^0(DR_X(\mathcal{M})) = \{m \in \mathcal{M} : \nabla(m) = 0\},$$

que es el haz de secciones horizontales de $\mathcal{M}$. Para ver que es localmente libre sobre $\mathbb{C}_X$ se utiliza el teorema de Frobenius. Para mayor precisión, mirar [Voi02].

Se puede construir un inverso de este funtor de la siguiente manera; Sea $\mathcal{F}$ un sistema local de rango m. Sea $\mathcal{M} = \mathcal{O}_X \otimes_{\mathbb{C}_X} \mathcal{F}$, con la conexión integrable definida por

$$\nabla : \Omega_X^0 \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{M} \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_X \otimes_{\mathbb{C}_X} \mathcal{F} \xrightarrow{d\otimes 1_{\mathcal{F}}} \Omega_X^1 \otimes_{\mathbb{C}_X} \mathcal{F} \xrightarrow{\sim} \Omega_X^1 \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{M}.$$

Para ver que estos funtores dan una equivalencia, primero hay que observar que si $\mathcal{M}$ es una conexión integrable entonces $\mathcal{O}_X \otimes_{\mathbb{C}_X} \mathcal{M}^\nabla \cong \mathcal{M}$. De manera similar, si $\mathcal{F}$ es un sistema local, entonces $(\mathcal{O}_X \otimes_{\mathbb{C}_X} \mathcal{F})^\nabla \cong \mathcal{F}$ para la conexión dada. $\square$

Capítulo 4

Variedad Característica

4.1 Símbolo de un operador diferencial

Definición 4.1.1. Sea X variedad holomorfa y P un operador diferencial. Sea $(U; z)$ una carta en X de manera tal que $P = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha \partial_z^\alpha$. Se define el *símbolo total de P* como

$$p\,(z;\xi) := \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(z)\xi^\alpha$$

Observación 4.1.2. Notar que la definición depende fuertemente del sistema de coordenadas elegido.

Definición 4.1.3. Para cada operador $P = \sum a_\alpha \partial_z^\alpha$ sobre la variedad X podemos asociar un número $m \in \mathbb{Z}$ de manera tal que $a_\alpha = 0\ \forall\ |\alpha| > m$. A tal número lo llamaremos el orden del operador diferencial P y denotaremos $\mathcal{D}_X^{(m)} = \{P \in \mathcal{D}_X /\ ord(P) \leq m\}$

Observación 4.1.4. A partir de la definición de orden de un operador diferencial se puede definir una *filtración* del anillo $\mathcal{D}_X$; lo cual será la principal herramienta de la sección siguiente.

La siguiente proposición muestra que, si bien la definición previa hace uso del sistema de coordenadas elegido; no depende del mismo.

Proposición 4.1.5. *Sea $f \in \mathcal{O}_X$, se define $m_f \in \mathcal{E}nd(\mathcal{O}_X)$ el operador de multiplicación por f. Entonces*

1. $\mathcal{D}_X^{(m)} = 0\ \forall m < 0$
2. $\mathcal{D}_X^{(m)} = \left\{P \in \mathcal{D}_X : [P, m_f] \in \mathcal{D}_X^{(m-1)}\ \ \forall f \in \mathcal{O}_X\right\}$

3. $\mathcal{D}_X^{(0)} = \mathcal{O}_X$

Demostración. Observemos primero que $\mathcal{D}_X^{(1)} = \mathcal{O}_X \oplus \Theta_X$. Si tomamos $f, g \in \mathcal{O}_X$ entonces $[m_f, m_g](h) = f.g.h - g.f.h = 0 \in \mathcal{D}_X^{(-1)}$

Veamos el caso general: supongamos que $P = \sum_{|\alpha|\le m} a_\alpha \partial_z^\alpha \in \mathcal{D}_X^{(m)}$ entonces

$$\begin{aligned}
[P, m_f](h) &= \left[\sum_{|\alpha|\le m} a_\alpha \partial_z^\alpha, m_f\right](h) \\
&= \sum_{|\alpha|\le m} [a_\alpha \partial_z^\alpha, m_f](h) \\
&= \sum_{|\alpha|\le m} (a_\alpha \partial_z^\alpha \circ m_f - m_f \circ a_\alpha \partial_z^\alpha)(h) \\
&= \sum_{|\alpha|\le m} \left(a_\alpha \underbrace{\partial_z^\alpha (f.h)}_{(*)} - f.a_\alpha \partial_z^\alpha (h) \right) = \sum_{|\alpha|\le m} \sum_{|\beta|>0} \binom{\alpha}{\beta} a_\alpha \left(\partial_z^\beta f\right)(z) \left(\partial_z^{\alpha-\beta} h\right)(z)
\end{aligned}$$

De la última igualdad se puede ver que, como $|\beta| > 0$ entonces $|\alpha - \beta| = |\alpha| - |\beta| < |\alpha| \le m$ y, por lo tanto, $|\alpha - \beta| \le (m-1)$. □

Observación 4.1.6. $(*)$ se hizo uso de la identidad de Leibniz; la cual afirma que

$$\partial_z^\alpha (f(z).h(z)) = \sum_{|\beta|\le|\alpha|} \binom{\alpha}{\beta} \left(\partial_z^\beta f\right)(z) \left(\partial_z^{\alpha-\beta} h\right)(z)$$

A partir de la proposición anterior, se puede ver que $\mathcal{D}_X^{(n)}$ puede ser definido de manera inductiva a partir de 1. y 2.

Proposición 4.1.7. *Valen las siguientes propiedades*

1. $\mathcal{D}_X^{(n_1)}.\mathcal{D}_X^{(n_2)} \subset \mathcal{D}_X^{(n_1+n_2)}$

2. $\left[\mathcal{D}_X^{(n_1)}, \mathcal{D}_X^{(n_2)}\right] \subset \mathcal{D}_X^{(n_1+n_2-1)}$

Demostración. Las comprobaciones son totalmente análogas a las de 2.1.2 y 2.1.5. □

Notación. Denotaremos $Gr_n(\mathcal{D}_X) := \mathcal{D}_X^{(n)}/\mathcal{D}_X^{(n-1)}$ y $Gr(\mathcal{D}_X) := \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} Gr_n(\mathcal{D}_X)$

Observación 4.1.8. Por 1. de la proposición anterior resulta que $Gr(\mathcal{D}_X)$ tiene estructura de anillo y por 2. resulta que el anillo es conmutativo. En particular, $Gr(\mathcal{D}_X)$ resulta una $\mathcal{O}_X$-álgebra conmutativa.

Definición 4.1.9. El haz Θ_X. El haz de campo de vectores holomorfos en X se denota Θ_X. Si $(U; z_1, \ldots, z_n)$ es una carta, entonces $\Theta_X|_U$ es un $\mathcal{O}_X$-módulo libre de rango n generado por $\partial_1, \ldots, \partial_n$.

Más aún, se tiene que $\mathcal{D}_X(1) = \mathcal{D}_X(0) \oplus \Theta_X$

Teorema 4.1.10. *Existe un isomorfismo de anillos graduados*

$$Sim_{\mathcal{O}_X}(\Theta_X) \cong Gr(\mathcal{D}_X)$$

donde $Sim_{\mathcal{O}_X}$ denota el álgebra simétrica de Θ_X sobre $\mathcal{O}_X$.

Demostración. Por la observación 4.1.8 y usando la propiedad universal del producto simétrico deducimos que la inclusión $\Theta_X \overset{i}{\hookrightarrow} Gr(\mathcal{D}_X)$ puede ser extendida de manera tal que el diagrama

$$\begin{tikzcd} \Theta_X = Gr_1(\mathcal{D}_X) \arrow[r, hook, "i"] \arrow[d, hook] & Gr(\mathcal{D}_X) \\ Sim_{\mathcal{O}_X}(\Theta_X) \arrow[ur, dotted, "\widetilde{i}"'] & \end{tikzcd}$$

conmuta

Es claro que tomando coordenadas locales Θ_X es igual a $\bigoplus_{i=1}^{n} \mathcal{O}_X \frac{\partial}{\partial z_i}$. Si además consideramos la correspondencia

$$\Theta_X \to \bigoplus_{i=1}^{n} \mathcal{O}_X \xi_i$$
$$\frac{\partial}{\partial z_i} \mapsto \xi_i$$

resulta que Θ_X es un módulo libre con base $\{\xi_1, \ldots, \xi_n\}$. Luego, $Sim_{\mathcal{O}_X}(\Theta_X) = \mathcal{O}_X[\xi_1, \ldots, \xi_n]$. De la última igualdad se puede pensar al morfismo $\widetilde{i} : Sim_{\mathcal{O}_X}(\Theta_X) \to Gr(\mathcal{D}_X)$ como $\widetilde{i}(\xi^\alpha) = \partial_z^\alpha$. Finalmente, como $Gr(\mathcal{D}_X)$ es igual (en coordenadas locales) a $\bigoplus_{\alpha \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^n} \mathcal{O}_X \partial_z^\alpha$ resulta que $\widetilde{i}$ es un isomorfismo de $\mathcal{O}_X$-álgebras. □

Observación 4.1.11. Por el teorema anterior, para cada $m \in \mathbb{Z}$ tenemos un morfismo de $\mathcal{O}_X$-álgebras

$$\begin{tikzcd} \mathcal{D}_X^{(m)} \arrow[r, hook] \arrow[rr, bend right, "\sigma_m"'] & Gr(\mathcal{D}_X) \arrow[r, "\widetilde{i}^{-1}"] & Sim_{\mathcal{O}_X}\Theta_X \end{tikzcd} \tag{4.1}$$

Definición 4.1.12. Al morfismo de la observación 4.1.11 aplicado a un operador $P \in \mathcal{D}_X^{(m)}$ lo llamamos *símbolo principal del operador P*.

Si al operador P lo escribimos en coordenadas locales, se tiene que

$$\sigma_m(P) = \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha \xi^\alpha \in \mathcal{O}_X[\xi_1, \ldots, \xi_n]_m$$

Donde $\mathcal{O}_X[\xi_1, \ldots, \xi_n]_m$ denota los polinomios homogéneos de grado m con coeficientes en $\mathcal{O}_X$. Notar que si hubiesemos definido $\sigma_m(P)$ usando coordenadas locales, la observación 4.1.11 y el teorema 4.1.10 garantizan que tal definición no depende de la carta utilizada.

Observación 4.1.13. Un vector tangente sobre una variedad holomorfa X se puede pensar como una función lineal sobre el espacio vectorial cotangente T^*X. De la misma manera, un campo de vectores tangentes sobre un abierto U se pueden pensar como una función sobre el fibrado vectorial cotangente T^*U.

Más específicamente, $\pi_X : T^*X \to X$ resulta $Sim_{\mathcal{O}_X}(\Theta_X) \subset \pi_{X*}\mathcal{O}_{T^*X}$

Por lo mencionado en la observación anterior, resulta claro que cada símbolo total de un operador diferencial es una función $\sigma_m(P) : T^*X \to \mathbb{C}$ sobre el fibrado cotangente.

Una sección sobre de $\mathcal{O}_{T^*X}$ en un abierto U denso es de grado $k \in \mathbb{Z}$ si para cada $(z;\omega) \in U$ existe un entorno W de $0 \in \mathbb{C}$ tal que $h(z;t\omega) = t^k h(z;\omega)$ para todo $t \in W$.

Observación 4.1.14. El teorema 4.1.10 da una correspondencia entre los anillos $Gr(\mathcal{D}_X)$ y $\mathcal{O}_X[\xi_1, \ldots, \xi_n]$. Dado que $Gr(\mathcal{D}_X) \cong Sim_{\mathcal{O}_X}(\Theta_X) = \mathcal{O}_X[\xi_1, \ldots, \xi_n]$ se puede pensar a las secciones de $Gr(\mathcal{D}_X)$ como elementos del álgebra de polinomios $\mathcal{O}_X[\xi_1, \ldots, \xi_n]$ y viceversa; éste hecho resultará de utilidad cuando querramos estudiar la variedad característica de un $\mathcal{D}_X$-módulo $\mathcal{M}$.

Observación 4.1.15. Es importante notar que la noción de anillo graduado asociado a una filtración como fue definido recién podría haberse aplicado en el primer capítulo donde se estudiaron los anillos $\mathcal{D}_n$ y $\mathcal{O}_n$ (que resultan ser el anillo de gérmenes de funciones holomorfas alrededor de un punto $x_0 \in X$). En otras palabras, como en el anillo $\mathcal{D}_n$ se tiene la filtración $\{\mathcal{D}_n(m)\}$ también puede definirse el anillo graduado asociado $Gr(\mathcal{D}_n) := \bigoplus gr_m(\mathcal{D}_n)$; donde $gr_m(\mathcal{D}_n) = \mathcal{D}_n(m)/\mathcal{D}_n(m-1)$ y en tal caso los morfismos se define $\xi_j = \sigma_1(\partial_j)$.

La $\mathbb{C}$-álgebra $gr(\mathcal{D}_n)$ es generada por $gr_0(\mathcal{D}_n), \xi_1, \ldots, \xi_n$ y por la representación standard de elementos en $\mathcal{D}_n$ se tiene que $gr(\mathcal{D}_n) \cong \mathcal{O}_n[\xi_1, \ldots, \xi_n]$.

Como corolario, se deduce que $\mathcal{D}_n$ es un anillo Noetheriando, ya que $\mathcal{O}_n$ es un anillo Noetheriano y, por lo tanto, $\mathcal{O}_n[\xi_1, \ldots, \xi_n] \cong gr(\mathcal{D}_n)$ también lo es, de donde se deduce que $\mathcal{D}_n$ es noetheriano.

Proposición 4.1.16.

1. $\sigma_m : \mathcal{D}_X^{(m)} \to \mathcal{O}_X[\xi_1, \ldots, \xi_n]_m$ *es lineal y suryectiva*
2. $P \in \mathcal{D}_X^{(m)}, Q \in \mathcal{D}_X^{(n)}$ *tal que* $P.Q \in \mathcal{D}_X^{(n+m)} \Rightarrow \sigma_{m+n}(P.Q) = \sigma_m(P).\sigma_n(Q)$

4.1.1 Ideal graduado asociado

Sea $\mathcal{I} \subset \mathcal{D}_X$ ideal a izquierda de $\mathcal{D}_X$, defino $I_m := \sigma_m\left(\mathcal{I} \cap \mathcal{D}_X^{(m)}\right)$. Entonces, resulta que $\mathcal{O}_X[\xi_1, \ldots, \xi_n]_n . I_m \subset I_{(m+n)}$ y $I = \bigoplus_{m=0}^{\infty} I_m$ es ideal de $\mathcal{O}_X[\xi_1, \ldots, \xi_n]$. Por lo tanto, como $\mathcal{O}_X[\xi_1, \ldots, \xi_n]$ es Noetheriano, entonces I es finitamente generado; $I = \langle \varphi_1, \ldots, \varphi_n \rangle$ puedo tomar φ_j homogéneo. Luego, I es un ideal graduado de $\mathcal{O}[\xi_1, \ldots, \xi_n]$ asociado a $\mathcal{I} \subset \mathcal{D}_X$.

Notación. $I = Gr(\mathcal{I})$

Observaciones 4.1.17.

1. Si $\mathcal{I} \subset \mathcal{D}$ es un ideal tal que $\mathcal{I} = \langle P_1, \ldots, P_k \rangle$ no necesariamente vale que $\langle \sigma(P_1), \ldots, \sigma(P_k) \rangle = I$.

2. Considero $\mathcal{I} \subset \mathcal{D}_X$ ideal y $\mathcal{M} = \mathcal{D}_X / \mathcal{I}$, entonces $Gr(\mathcal{I}) = I$ depende de la presentación de $\mathcal{M}$ como cociente de $\mathcal{D}_X$.

Ejemplo 4.1.18. En el ejemplo 1.0.1 $\mathcal{I}$ está generado por $\frac{\partial}{\partial x_1}$ y $x_1 \frac{\partial}{\partial x_2} + \ldots + x_{n-1} \frac{\partial}{\partial x_n}$, cuyos símbolos principales son ξ_1 y $x_1\xi_2 + \ldots + x_{n-1}\xi_n$ y no alcanza para generar $\langle \xi_1, \ldots, \xi_n \rangle$.

Ejemplo 4.1.19. Volviendo al ejemplo 2.3.3 pero tomando el caso dimensión 1 se denota δ' la derivada de δ (la delta de Dirac) y $\partial = d/dx$. Entonces, $\mathcal{D}\delta = \mathcal{D}\delta'$. Es claro que $\delta' \in \mathcal{D}\delta$; por otro lado, como $x\delta = 0$ derivando a ambos lados de la igualdad se tiene que $\delta + x\delta' = 0$ con lo que se tiene que $\delta \in \mathcal{D}\delta'$. Afirmo: δ' es solución genérica del sistema

$$\begin{cases} x^2 u = 0 \\ (x\partial + 2)u = 0 \end{cases} \tag{4.2}$$

En otras palabras, hay un isomorfismo $\mathcal{D}/\mathcal{D}x^2 + \mathcal{D}(x\partial + 2) \cong \mathcal{D}\delta' = \mathcal{D}\delta$. Como $\delta' = \partial\delta$, $Q\delta' = 0$ se tiene que $Q\partial \in \mathcal{D}x$. Escribiendo $Q = Px^2 + R_1 x + R_0$ donde $P \in \mathcal{D}$ y R_0, $R_1 \in \mathbb{C}[\partial]$. Entonces, $Q\partial = Px^2\partial + R_1 x\partial + R_0\partial = (P\partial x - 2P + R_1\partial)x - R_1 + R_0\partial$.

Con lo último, $Q\partial \in \mathcal{D}x$ sí y sólo sí $R_1 = R_0\partial$. Es decir que $Q = Px^2 + R_0(\partial x + 1) = Px^2 + R_0(x\partial + 2)$ lo cual concluye la afirmación. Por lo tanto, como $\mathcal{D}/\mathcal{D}x = \mathcal{D}\delta = \mathcal{D}\delta' = \mathcal{D}/\mathcal{D}x^2 + \mathcal{D}(x\partial + 2)$. Tales operadores Q y R se pueden tomar de manera tal que $\max\{ord(Q), ord(R) + 1\} = ord(P)$ y tomando símbolo principal queda

$$\sigma_m(P) = \sigma_m(Q)x^2 + \sigma_{m-1}(R)x\xi.$$

De manera que $I = \mathcal{O}[\xi]x^2 + \mathcal{O}[\xi]x\xi \neq \mathcal{O}[\xi]x$.

A continuación se demuestra la afirmación del ejemplo anterior donde se afirma que se puede tomar Q y R de manera que $\max\{ord(Q), ord(R) + 1\} = ord(P)$:

Supongamos que $ord(P) < r = \max\{ord(Q), ord(R)+1\}$,o sea $\sigma_r(Q)x^2 + \sigma_{r-1}(R)x\xi = 0$, por lo tanto, $\sigma_r(Q)x + \sigma_{r-1}(R)\xi = 0$ por lo que existe un $\varphi \in \mathcal{O}[\xi]$ tal que $\sigma_r(Q) = \varphi\xi$, $\sigma_{r-1}(R) = -\varphi x$. Se puede denotar

$$\begin{aligned} Q &= \phi\partial + Q' \text{ con } ord(Q') < r \\ R &= -\phi x + R' \text{ con } ord(R') < r-1 \end{aligned}$$

donde $\sigma_{r-1}(\phi) = \varphi$. Como $P = Qx^2 + R(x\partial + 2)$ se tiene que los términos multiplicados por ϕ se anulan, por lo que $P = Q'x^2 + R'(x\partial + 2)$; repitiendo el proceso se tiene finalmente operadores P y Q como se buscaba.

4.2 Filtraciones Buenas

En la sección anterior vimos un tipo de filtración sobre el anillo $\mathcal{D}_X$ dado a partir del orden de los operadores diferenciales. En ésta sección veremos la definición de filtración tanto sobre el anillo $\mathcal{D}_X$ como sobre $\mathcal{D}_X$-módulos $\mathcal{M}$.

Definición 4.2.1. Sea $\mathcal{M}$ un $\mathcal{D}_X$-módulo. Una filtración de $\mathcal{M}$ es una sucesión creciente $\{\mathcal{M}_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ de sub $\mathcal{O}_X$-módulos $\mathcal{M}_k$ de $\mathcal{M}$ tal que $\mathcal{D}_X^{(l)}\mathcal{M}_k \subset \mathcal{M}_{k+l}$

Un $\mathcal{D}_X$*-módulo filtrado* es un $\mathcal{D}_X$-módulo con una filtración asociada.

Definición 4.2.2. Una filtración $\mathcal{F}$ sobre un $\mathcal{D}_X$-módulo $\mathcal{M}$ se dice buena si se cumple:

1. $\mathcal{M}_k$ es un $\mathcal{O}_X$-módulo coherente

2. $\mathcal{M} = \bigcup_k \mathcal{M}_k$ y $\mathcal{M}_k = 0\ \forall k \ll 0$

3. $Gr\mathcal{M}$ es un $Gr\mathcal{D}_X$-módulo coherente

Notación. En la definición previa estamos denotando $Gr(\mathcal{M}) = \bigoplus_{k\in\mathbb{Z}} Gr_k(\mathcal{M})$ el *graduado asociado* a $\mathcal{M}$ donde $Gr_k(\mathcal{M}) = \mathcal{M}_k/\mathcal{M}_{k-1}$

Proposición 4.2.3. *Sea $\mathcal{M}$ un $\mathcal{D}_X$-módulo provisto de la buena filtración $\{\mathcal{M}_k\}_k$. Luego, $\mathcal{M}$ resulta un $\mathcal{D}_X$-módulo coherente y*

$$\mathcal{D}_X^{(l)}\mathcal{M}_k = \mathcal{M}_{k+l} \ \text{para } 0 \ll k \tag{4.3}$$

Demostración. Recordemos que si $\mathcal{A}$ es un haz de anillos coherente, entonces todo $\mathcal{M}$ $\mathcal{A}$-módulo resulta coherente sí y solamente sí es localmente de presentación finita. Luego, para probar la proposición, tomemos $x \in X$ y $U \subset X$ entorno de x de manera tal que existe sucesión exacta $\mathcal{D}_X^p|_U \to Gr(\mathcal{M})|_U \to 0$. En otras palabras, existen $\overline{h_1}, \ldots, \overline{h_p} \in \Gamma(U, Gr(\mathcal{M}))$ tales que $\overline{h_{1,x}}, \ldots, \overline{h_{p,x}}$ generan $Gr(\mathcal{M})_x$.

Tomo $h_{i,x} \in (\mathcal{M}_{j_i})_x$ representante de $\overline{h_{ix}}$ y considero $m_0 = \max\{j_i\}_{i=1}^p$. Afirmo que, si $m > m_0$ entonces $(\mathcal{M}_{m+r})_x = \mathcal{D}_X^{(r)}(\mathcal{M}_m)_x$ para todo $r > 0$.

Si $m_x \in (\mathcal{M}_{m+r})_x$ entonces $\overline{m_x} \in (Gr\mathcal{M})_x$ se puede expresar como $\overline{m_x} = \sum_j \overline{p_j h_{j,x}}$. Ya que $h_{j,x} \in (\mathcal{M}_{j_i})_x \subset (\mathcal{M}_{m_0})_x$ entonces $p_j \in \mathcal{D}_X^{(r)}$ y por lo tanto, $m_x \in \mathcal{D}_X^{(r)}(\mathcal{M}_m)_x$

En particular, esto muestra que $\mathcal{M}$ es localmente de presentación finita, en particular, es $\mathcal{D}_X$-coherente. □

Proposición 4.2.4. *Sea $\mathcal{M}$ un $\mathcal{D}_X$-módulo coherente. Una filtración $\{\mathcal{M}_k\}$ es buena si se cumplen las dos primeras condiciones de 4.2.2 y 4.3.*

Demostración. Como $\mathcal{M}_k$ es un $\mathcal{O}_X$-módulo coherente, entonces $\mathcal{M}_k/\mathcal{M}_{k-1}$ es un $\mathcal{O}_X$-módulo coherente y además $\bigoplus_{k=1}^{m_0} \mathcal{M}_k/\mathcal{M}_{k-1}$ resulta $\mathcal{O}_X$-módulo coherente(m_0 es el correspondiente a 4.3).

Sea $\overline{m_x} \in (Gr\mathcal{M})_x$, entonces $\overline{m_x} = \sum_{k=1}^r \overline{m_k}$ (con $m_k \in \mathcal{M}_{p_k}$). Para todo $k/\ p_k < m_0$ existen $u_1, \ldots, u_{t_k}$ tal que $\overline{m_k} = \sum^{t_k} h_j u_j$ con $h_j \in \mathcal{O}_X$.

Si tomo $\overline{m_k}$ con $p_k \geq m_0$ entonces $p_k = m_0 + r_k$. Luego, $m_k \in \mathcal{M}_{m_0+r_k} = \mathcal{F}_{r_k}\mathcal{D}_X\mathcal{M}_{m_0}$. Luego

$$m_k = \sum p_j u_j = \sum \underbrace{(p_j h_j)}_{\in \mathcal{D}_X^{(r_k)}} \widetilde{u_j}$$

de donde se deduce que $\overline{m_k}$ es generado como $Gr\mathcal{D}_X$-módulo por finitos $\overline{\widetilde{u_j}} \in Gr\mathcal{M}$.

Finalmente, se tiene que $Gr\mathcal{M} = \bigoplus_{k=1}^{\infty} \mathcal{M}_k/\mathcal{M}_{k-1}$ es $Gr\mathcal{D}_X$-coherente. □

Lema 4.2.5. *(Equivalencia de buenas filtraciones)*

Sea $\mathcal{M}$ un $\mathcal{D}_X$-módulo coherente, sean $\{\mathcal{M}_k\}, \{\mathcal{M}'_k\}$ dos buenas filtraciones de $\mathcal{M}$. Entonces, para cada $x \in X$ existe $U \ni x$ y enteros d, d' tal que

$$\mathcal{M}_k|_U \subset \mathcal{M}'_{k+d}|_U \quad y \quad \mathcal{M}'_k|_U \subset \mathcal{M}_{k+d'}|_U$$

Demostración. Como $Gr\mathcal{M}$ es un $Gr\mathcal{D}_X$-módulo coherente, existe un entorno U de x y generadores $m_1, \ldots, m_p$ de ordenes $d_1, \ldots, d_p$ de $Gr\mathcal{M}$ sobre U. Achicando el entorno U , podemos asumir que los generadores $m_1, \ldots, m_p$ tienen ordenes $d'_1, \ldots, d'_p$ para la filtración $\mathcal{M}'_k$; si tomamos $d = \max\{d'_i - d_i\}_{i=1}^p$ se tiene que

$$\mathcal{M}_k|_U \subset \mathcal{M}'_{k+d}|_U \text{ para todo } k \in \mathbb{Z}$$

Haciendo la misma cuenta se consigue la otra parte del lema. □

Lema 4.2.6. *Todo $\mathcal{M}$ $\mathcal{D}_X$-módulo coherente admite localmente una buena filtración.*

Demostración. Si $\mathcal{M}$ es un $\mathcal{D}_X$-módulo coherente, entonces existe U abierto de X tal que $\mathcal{M}|_U$ es finitamente presentado, i.e. existe una sucesión exacta corta

$$\mathcal{D}_X^p|_U \xrightarrow{\rho} \mathcal{D}_X^q|_U \xrightarrow{u} \mathcal{M} \to 0$$

Denotamos $\mathcal{M}|_U^{(m)}$ a la imagen por u de $\mathcal{D}_X^{(m)^q}|_U$, donde $\mathcal{D}_X^{(m)}$ denota a los operadores diferenciales de orden $\leq m$.

De esta manera, $\left\{\mathcal{M}|_U^{(m)}\right\}$ forma una buena filtración del módulo $\mathcal{M}|_U$ □

Proposición 4.2.7. *Sea $I = Ann\ Gr\mathcal{M}$ el anulador del módulo $Gr\mathcal{M}$, i.e. el ideal de $Gr\mathcal{D}_X$ formado por los φ tales que $\varphi\bar{u} = 0\ \forall \bar{u} \in Gr\mathcal{M}$. Consideramos el radical de I, es decir, el ideal*

$$\sqrt{I} = \left\{a \in \mathcal{O}_X[\xi_1, \ldots, \xi_n] : \exists k \in \mathbb{N}, a^k \in I\right\}$$

Entonces, $\sqrt{I}$ depende sólo de $\mathcal{M}$ y no de la buena filtración

Ejemplo 4.2.8. Antes de hacer la demostración del teorema, miremos primero el caso particular en el que $\mathcal{M} = \mathcal{D}_X/\mathcal{I}$ con $\mathcal{I}$ un ideal de $\mathcal{D}_X$. Dada una filtración $\left\{\mathcal{D}_X^{(l)}\right\}$ podemos definir una filtración en el ideal $\mathcal{I}$ como: $\mathcal{I}^{(l)} := \mathcal{D}_X^{(l)} \bigcap \mathcal{I}$.

De la definición se deduce fácilmente que $Gr\mathcal{M} = Gr\mathcal{D}_X/Gr\mathcal{I}$ y, por lo tanto, se tiene que Ann $Gr\mathcal{M} = Gr\mathcal{I}$

En este caso, el ideal graduado

$$Gr\mathcal{I} := \bigoplus_{l\geq 0} \mathcal{I}^{(l)}/\mathcal{I}^{(l-1)}$$

es generado por los símbolos principales $\sigma(P)$ con $P \in \mathcal{I}$. Por lo tanto, para un conjunto arbitrario $\{\sigma(P_i) : 1 \leq i \leq m\}$ de generadores de $Gr\mathcal{I}$ tenemos que $\mathcal{I} = \bigoplus_{i=1}^m \mathcal{D}_X P_i$

Demostración. (de la proposición) Es claro que I resulta un ideal homogéneo, y por lo tanto, lo mismo ocurre para $\sqrt{I}$. Sea a un elemento homogéneo de orden m perteneciente a $\mathcal{I}$, y sea

$A \in \mathcal{D}_X$ un operador de orden m de manera que $\sigma_m(A) = a$. Decir que $a \in \sqrt{I}$ es equivalente a decir que existe $k \in \mathbb{N}$ tal que a^k anula a $Gr\mathcal{M}$, i.e. para todo $l \in \mathbb{N}$ se tiene $A^k\mathcal{M}^{(l)} \subset \mathcal{M}^{(l+km-1)}$ y, por lo tanto, $A^{pk}\mathcal{M}^{(l)} \subset \mathcal{M}^{(l+kpm-p)}$.

Sea $s \in \mathbb{N}$, escribimos $s = pk + r$ con $p = p(s)$; $0 \leq r = r(s) < k$ en $\mathbb{Z}$. Entonces

$$\begin{aligned} A^s\mathcal{M}^{(l)} &= A^{pk+r}\mathcal{M}^{(l)} \\ &= A^r A^{pk}\mathcal{M}^{(l)} \subset A^r\mathcal{M}^{(l+kpm-p)} \\ &\subset \mathcal{M}^{(l+kpm-p+rm)} = \mathcal{M}^{(l+sm-p(s))} \text{ Donde } \lim_{s\to+\infty} p(s) = +\infty \end{aligned}$$

Recíprocamente, si $A^s\mathcal{M}^{(l)} \subset \mathcal{M}^{(l+sm-p(s))}$ con $a^sGr\mathcal{M} = 0$ tal que $p(s) \geq 1$ entonces $a \in \sqrt{I}$. Por lema de equivalencia de buenas filtraciones se ve que ésta última condición no depende de la buena filtración elegida para $\mathcal{M}$ y , por tanto, queda la proposición demostrada. □

Sobre cada abierto U suficientemente pequeño se puede tomar una buena filtración de $\mathcal{M}|_U$ y construir el modulo graduado asociado a esta buena filtración $Gr\mathcal{M}|_U$. Se ve inmediatamente, que $Gr\mathcal{M}|_U$ es un $Gr\mathcal{D}_U$-módulo coherente, de manera que su anulador I, así como su radical $\sqrt{I}$ son ideales coherentes sobre U. Por lo visto en la proposición anterior $\sqrt{I}$ no depende de la presentación local elegida, y por lo tanto define globalmente sobre la variedad holomorfa X un ideal coherente asociado canónicamente al $\mathcal{D}_X$-módulo $\mathcal{M}$.

Definición 4.2.9. La variedad de ceros del ideal coherente descripto es un subconjunto analítico de T^*X llamado la *variedad característica* del sistema diferencial $\mathcal{M}$.

Observación 4.2.10. Puesto que el ideal $\sqrt{I}$ es generado por polinomios homogéneos en ξ, la variedad característica resulta un conjunto cónico; es decir, que es invariante por homotecias $\xi \to \lambda\xi$ y puede ser considerado como una familia analítica parametrizada por X de conos.

Ejemplo 4.2.11. Volviendo al ejemplo 4.2.8 y teniendo en cuenta que $\{\sigma(P_i) : 1 \leq i \leq m\}$ es un sistema de generadores de $Gr\mathcal{I}$ como la variedad característica es la variedad de ceros del ideal $Gr\mathcal{I}$ resulta que

$$Ch(\mathcal{M}) = \{(z,\xi) \in T^*X : \sigma(P_i)(z,\xi) = 0, i = 1,\ldots,m\}$$

De ésta forma, cada vez que se presente un $\mathcal{D}_X$-módulo $\mathcal{M} = \mathcal{D}_X/\mathcal{I}$ el cálculo de la variedad característica asociada será sencillo.

Intuitivamente, la variedad característica trata de generalizar el conjunto de ceros comunes de los símbolos principales en un ideal, como se puede ver en el ejemplo anterior.

Observación 4.2.12. El cálculo de la variedad característica no resulta sencillo en general. Dado un conjunto de generadores $\{Q_i\}$ de $\mathcal{I}$ no es verdad en general que $Ch(\mathcal{M}) = \{(z,\xi) \in T^*X : \sigma(Q_i)(z,\xi) = 0, i = 1,\dots,m\}$, sin embargo, se tiene la inclusión

$$Ch(\mathcal{M}) \subset \{(z,\xi) \in T^*X : \sigma(Q_i)(z,\xi) = 0, i = 1,\dots,m\}.$$

Proposición 4.2.13. *Sea $\mathcal{M}$ un $\mathcal{D}_X$-módulo coherente no nulo. Entonces son equivalentes*

1. $Ch(\mathcal{M}) = T^*_X X \cong X$ *(la sección nula de T^*X)*
2. *$\mathcal{M}$ es una conexión integrable*
3. *$\mathcal{M}$ es $\mathcal{O}_X$-módulo coherente*

Demostración. 1⇒3 Sobre un sistema de coordenadas locales $(U, z = (z^1,\dots,z^n))$ de X le corresponde canónicamente el sistema de coordenadas $(z^1,\dots,z^n;\xi_1,\dots,\xi_n)$ de T^*X. Si asumimos que $Ch(\mathcal{M})$ es la sección nula de T^*X, entonces la misma está determinada por las ecuaciones $\xi_1 = \xi_2 = \dots = \xi_n = 0$. Esto significa que para una buena filtración local $\{\mathcal{M}_k\}$ de $\mathcal{M}$ se tiene que

$$\sqrt{Ann_{\mathcal{O}_X[\xi_1,\dots,\xi_n]}(Gr\mathcal{M})} = \sum_{i=1}^{n} \mathcal{O}_X[\xi_1,\dots,\xi_n]\,\xi_i$$

Debido a la proposición 4.2.7 se tiene que, para cada $i = 1,\dots,n$:

$$\forall l \in \mathbb{N} \ \left(\frac{\partial}{\partial z_i}\right)^s \mathcal{M}^{(l)} \subset \mathcal{M}^{(l+sm-p_i(s))}, \text{ con } \lim_{s\to\infty} p_i(s) = +\infty \quad (*)$$

Como la tercer condición de una buena filtración afirma que $\sum_i \frac{\partial}{\partial z_i}\mathcal{M}_k = \mathcal{M}_{k+1}$ para k suficientemente grande, la relación (*) implica que $\mathcal{M}_k = \mathcal{M}_{k+1}$ para k suficientemente grande, i.e. la filtración es estacionaria.

En consecuencia, el módulo $\mathcal{M}$ es igual a $\mathcal{M}_k$ para k suficientemente grande; de donde se deduce que $\mathcal{M}$ es un $\mathcal{O}_X$-módulo coherente.
2⇔3 Está demostrado en 3.1.6
2⇒1 Sea $\mathcal{M}$ una conexión integrable. Tomo $\{\mathcal{M}_k\}$ de la siguiente manera:

$$\mathcal{M}_k = 0 \text{ para } k < 0$$

$$\mathcal{M}_k = \mathcal{M} \text{ para } k \geq 0$$

Por hipótesis, $\mathcal{M}$ es una conexión integrable; lo que implica que es un $\mathcal{O}_X$-módulo coherente. Por la proposición 4.2.4 se tiene que $\{\mathcal{M}_k\}$ define una buena filtración de $\mathcal{M}$ y, localmente, $Gr(\mathcal{M}) \cong \mathcal{M} \cong \mathcal{O}_X^r$.

Por ecuación 4.3 se tiene que $\mathcal{D}_X^{(1)}\mathcal{M}_{k_0} = \mathcal{M}_{k_0+1}$ para $k_0 \geq 0$ suficientemente grande. Como $\mathcal{M}_k = \mathcal{M}$ para todo k positivo, se tiene que:

$$\mathcal{D}_X^{(1)}\mathcal{M} = \mathcal{M}$$
$$\mathcal{O}_X\mathcal{M} \oplus \Theta_X\mathcal{M} = \mathcal{M}$$
$$\mathcal{M} \oplus \Theta_X\mathcal{M} = \mathcal{M}$$

Por lo tanto, resulta que $\Theta_X \subset Ann_{\mathcal{O}_X[\xi_1,\ldots,\xi_n]}(Gr\mathcal{M})$ y $Ch(\mathcal{M}) \subset \{(z;\xi) : \xi_i = 0\}$; es decir, $Ch(\mathcal{M}) = T_X^*X$. □

4.3 Módulos holónomos

Definición 4.3.1. Una variedad compleja X se llama *variedad simpléctica* si existe una 2-forma σ definida globalmente en X que induce una forma simpléctica en T_xX para cada $x \in X$. Notar que necesariamente, una variedad simpléctica es necesariamente de dimensión par.

Proposición 4.3.2. *Si X es una variedad compleja su fibrado cotangente T^*X tiene estructura de variedad simpléctica.*

Demostración. Denotamos $\pi : T^*X \to X$ la proyección canónica. Tomando π' el morfismo inducido en sus espacios tangentes , es decir, $\pi' : T(T^*X) \to (T^*X) \times_X (TX)$ tenemos su dual

$$\rho_\pi : (T^*X) \times_X (T^*X) \to T^*(T^*X)$$

y si restringimos a la diagonal tenemos un morfismo

$$\rho_\pi|_\Delta : T^*X \to T^*(T^*X).$$

Dado que este morfismo es una sección del fibrado $T^*(T^*X) \to T^*X$ corresponde a una 1-forma α_X definida globalmente sobre T^*X. Si $(U, z = (z^1, \ldots, z^n))$ es un sistema de coordenadas y $(z;\xi) : T^*U \to V \times \mathbb{C}^n$ su correspondiente trivialización del fibrado T^*U se tiene que

$$\alpha_X|_{T^*U} = \sum_{k=1}^{n} \xi_k dz^k.$$

Le damos estructura de variedad simpléctica a X asociandole la 2-forma $\sigma = d\alpha_X$. Con las coordenadas tomadas como recién, podemos ver que

$$\sigma|_{T^*U} = \sum_{k=1}^{n} d\xi_k \wedge dz^k.$$

Dado que existe el isomorfismo hamiltoniano $H : T_p^*(T^*X) \cong T_p(T^*X)$ en cada $p \in T^*X$ y por lo tanto, tenemos definido un isomorfismo global $H : T^*(T^*X) \cong T(T^*X)$. □

Definición 4.3.3. Para $f \in \mathcal{O}_{T^*X}$ definimos al campo vectorial H_f como la imagen de la 1-forma $\mathrm{d}f$ a través del morfismo H definido en la proposición anterior.

Lema 4.3.4. *Sea $P \in \mathcal{D}_X^{(l)}$ y $Q \in \mathcal{D}_X^{(m)}$ de manera tal que $[P,Q] \in \mathcal{D}_X^{(l+m-1)}$, $\sigma_l(P) = f$ y $\sigma_m(Q) = g$. Entonces, tomando coordenadas locales $(z^1, \dots, z^n, \xi_1, \dots, \xi_n)$ de T^*X el símbolo de $[P,Q]$ está dado por la fórmula*

$$\sigma_{l+m-1}([P,Q]) = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial \xi_i} \frac{\partial g}{\partial z^i} - \frac{\partial f}{\partial z^i} \frac{\partial g}{\partial \xi_i} \right).$$

Definición 4.3.5. Al término $\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial \xi_i} \frac{\partial g}{\partial z_i} - \frac{\partial f}{\partial z_i} \frac{\partial g}{\partial \xi_i} \right)$ se lo llama *corchete de Poisson* de las funciones f y g y se lo denota $\{f,g\}$.

Demostración. Dado que el problema es de caracter local, podemos asumir que X es un subconjunto abierto de $\mathbb{C}^n$. El cálculo resulta sencillo usando las siguientes propiedades del corchete de Poisson:

1. $\{,\} : \mathcal{O}_{T^*X} \times \mathcal{O}_{T^*X} \to \mathbb{C}$ es bilineal y antisimétrica
2. $\{f, gh\} = \{f,g\} h + g \{f,h\}$
3. $\{\{f,g\},h\} + \{\{g,h\},f\} + \{\{h,f\},g\} = 0$

Usando un argumento inductivo, se pueden considerar los casos en que $m \leq 1$ y $l \leq 1$ y luego generalizar a operadores de orden mayor. □

Observación 4.3.6. El corchete de poisson no es otra cosa más que $\{f,g\} = H_f(g)$.

En efecto, tomando coordenadas locales se tiene que $\{f,g\} = H_f(g) = \sigma(H_f, H_g)$ y, por lo tanto, $H_f = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial \xi_i} \frac{\partial}{\partial z_i} - \frac{\partial f}{\partial z_i} \frac{\partial}{\partial \xi_i} \right)$.

Teorema 4.3.7. *El ideal $\sqrt{I}$ definido en la proposición 4.2.7 es involutivo con respecto a $\{,\}$, i.e.*

$$f \in \sqrt{I}, g \in \sqrt{I} \Rightarrow \{f,g\} \in \sqrt{I}$$

Para la demostración del teorema ver [Gab81].

Observación 4.3.8. El teorema de involutividad de $\sqrt{I}$ se puede reformular de la siguiente manera:

$$f \in \sqrt{I} \Rightarrow H_f\left(\sqrt{I}\right) \subset \sqrt{I}$$

Sea $(z;\xi)$ un punto de la variedad característica. Entonces el conjunto de los diferenciales $d_{(z;\xi)}f$ de aquellas funciones f tales que $f|_{Ch(\mathcal{M})} = 0$ coincide con el espacio conormal a $Ch\,(\mathcal{M})$, i.e. el espacio de formas lineales sobre $T_{(z;\xi)}\,(T^*X)$ que son nulas sobre $T_{(z;\xi)}Ch\,(\mathcal{M})$. Por el isomorfismo $H_{(z;\xi)} : T^*_{(z;\xi)}\,(T^*X) \to T_{(z;\xi)}\,(T^*X)$, este espacio se transforma en el espacio $T_{(z;\xi)}Ch\,(\mathcal{M})^{\perp}$ (el complemento ortogonal de $T_{(z;\xi)}Ch\,(\mathcal{M})$ a través de la forma bilineal $H_{(z;\xi)}$. La condición de involutividad del ideal $\sqrt{I}$ quiere decir, entonces, que

$$T_{(z;\xi)}Ch\,(\mathcal{M})^{\perp} \subset T_{(z;\xi)}Ch\,(\mathcal{M})\,.$$

Corolario 4.3.9. *$dim\,(Ch\,(\mathcal{M})) \geq n$.*

Demostración. Como $T_{(z;\xi)}Ch\,(\mathcal{M})^{\perp} \subset T_{(z;\xi)}Ch\,(\mathcal{M})$, entonces, si $p = dim\,(Ch\,(\mathcal{M}))$ se tiene que $2n - p \leq p$. □

Ejemplo 4.3.10. Sea $P = \sum_{i=0}^{m} a_i\partial^i$ un operador diferencial no nulo en $\mathbb{C}$ con a_i holomorfa, $\partial = \frac{d}{dz}$ y $a_m \neq 0$. La ecuación diferencial $Pu = 0$ corresponde al $\mathcal{D}$-módulo $\mathcal{M} = \mathcal{D}_{\mathbb{C}}/\mathcal{D}_{\mathbb{C}}P$.

Como se vio en la sección anterior, la variedad característica está dada por los ceros del símbolo principal del operador P, es decir, por los ceros de $\sigma_m(P)$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} Ch\,(\mathcal{M}) &= \{(z;\xi) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C} : a_m(z)\xi^m = 0\} \\ &= \mathbb{C} \times 0 \bigcup \left(\bigcup_{a_m(z)=0} z \times \mathbb{C} \right). \end{aligned}$$

O sea, la unión de la sección nula y las fibras de puntos singulares $a_m(z) = 0$; por lo tanto, $dim(Ch(\mathcal{M})) = 1$.

Definición 4.3.11. Una variedad $V \subset T^*X$ se dirá

1. *involutiva* si $(T_{(z,\xi)}V)^{\perp} \subset T_{(z,\xi)}V$
2. *isotropa* si $T_{(z,\xi)}V \subset (T_{(z,\xi)}V)^{\perp}$
3. *holónoma* si es involutiva e isotropa a la vez en cada punto suave (z,ξ) de T^*X

Lema 4.3.12. *Sea $V \subset T^*X$ una variedad isotropa cónica, y sea $\pi : T^*X \to X$ la aplicación canónica. Entonces, todo punto $(z,\xi) \in V$ suave es conormal a la imagen de la aplicación tangente $T_{(z,\xi)}(\pi|_V)$.*

Demostración. Supongamos que el covector $\overline{\xi} \neq 0$, entonces puedo asociar a X un sistema de coordenadas locales $(U, z = (z^1, \ldots, z^n))$ centrado en el punto $\pi(\overline{\xi})$ tal que $\overline{\xi} = dz^1$. En coordenadas locales $(z^1, \ldots, z^n, \xi_1, \ldots, \xi_n)$ canónicamente asociado a $z = (z^1, \ldots, z^n)$ el covector $\overline{\xi}$ se escribe como $(0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$ por ser V cónica contiene a todo el eje ξ_1.

Por la hipótesis de isotropía se tiene que $\frac{\partial}{\partial \xi_1} \in T_{(z,\xi)}V \subset (T_{(z,\xi)}V)^{\perp}$.

Aplicando el isomorfismo $H : T^*_{\overline{\xi}}(T^*X) \to T_{\overline{\xi}}(T^*X)$ de la proposición 4.3.2 se ve que $\mathrm{d}z^1$ es conormal a V en el punto $\overline{\xi}$. Es decir, se anula sobre $T_{\overline{\xi}}V$. $\square$

Corolario 4.3.13. *Sea V un germen sobre T^*V de variedad cónica suave tal que la proyección $\pi|_V$ es de rango constante r (es decir, una submersión, de manera tal que se tiene que $\pi(V)$ es un germen de subvariedad suave de X de dimensión r). Entonces*

1. *V es isótropo si y sólo si $V \subset T^*_{\pi(V)}X$*
2. *V es holónomo si y sólo si $V = T^*_{\pi(V)}X$*

Proposición 4.3.14. *Sea $V \subset T^*X$ una variedad cónica holónoma irreducible. Entonces, $\pi(V)$ es una variedad irreducible y V no es más que fibrado conormal a la variedad*

$$V = T^*_{\pi(V)}X.$$

Llamamos fibrado conormal a una variedad X a la clausura en T^*X del fibrado conormal de la parte suave de la variedad.

Definición 4.3.15. Llamaremos *módulo holónomo* a aquellos tales que $dim\,(Ch\,(\mathcal{M})) = n$. Es decir, aquellos módulos cuya variedad característica sea holónoma.

Definición 4.3.16. (Lugar singular de un sistema holónomo)

Sobre una variedad analítica compleja X conexa de dimensión n tomamos un módulo holónomo $\mathcal{M}$ con variedad característica $Ch\,(\mathcal{M})$. Cada componente irreducible $Ch\,(\mathcal{M})_\alpha$ de la variedad característica puede escribirse como

$$Ch\,(\mathcal{M})_\alpha = T^*_{S_\alpha}X$$

donde $S_\alpha = \pi\,(Ch\,(\mathcal{M})_\alpha)$ un subconjunto analítico irreducible de X.

En particular, si $S_\alpha = X$ entonces $Ch\,(\mathcal{M})_\alpha = T^*_X X$.

Proposición 4.3.17. *Fuera de su lugar singular, un sistema holónomo es o bien nulo o es una conexión integrable*

Ejemplo 4.3.18. En una variedad riemanniana(es decir, una variedad holomorfa de dimensión 1) el $\mathcal{D}_X$-módulo asociado a una ecuación diferencial $Pu = 0$ es $\mathcal{D}_X/\mathcal{D}_X P$ y resulta un módulo holónomo ya que su variedad característica correspondiente será los ceros del símbolo principal del operador diferencial P, el cual tiene dimensión 1 en el fibrado cotangente T^*X (que resulta de dimensión 2).

En el ejemplo 3.1.5 se puede ver cual es el abierto U sobre el cual el $\mathcal{O}_X$-módulo resulta libre de rango finito. El abierto en cuestión es $U = \{z : a_m(z) \neq 0\}$ es decir, los puntos singulares regulares. El mismo ejemplo muestra la razón por la cual se debe excluir el lugar singular de la variedad característica para que resulte libre sobre $\mathcal{O}_X$.

Ejemplo 4.3.19. Siguiendo el razonamiento del ejemplo anterior, si se quiere buscar un ejemplo de un módulo que no sea holónomo, alcanza con considerar un operador diferencial P en una variedad X de dimensión mayor estricta que dos y su $\mathcal{D}_X$-módulo asociado. Una vez más, la variedad característica será el conjunto de ceros del símbolo principal de P, el cual tendrá codimensión 1 en T^*X.

Más explícitamente, tomemos $X = \mathbb{C}^n$ y $P = \frac{\partial}{\partial z_1}$ entonces $\sigma_1(\frac{\partial}{\partial z_1}) = \xi_1$ y por lo tanto

$$Ch(\mathcal{D}_{\mathbb{C}^n}/\mathcal{D}_{\mathbb{C}^n}P) = \{(z,\xi) \in T^*X : \xi_1 = 0\}.$$

Observación 4.3.20. La proposición 4.3.17 muestra el hecho de que un módulo holónomo es una generalización de una ecuación diferencial ordinaria. Si consideramos el funtor solución $\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\bullet, \mathcal{O}_X)$ aplicado a un módulo holónomo $\mathcal{M}$ tal que $\mathcal{M}|_U \cong \bigoplus_{i=0}^m \mathcal{O}_X|_U$ resulta que

$$\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X|_U}\left(\bigoplus_{i=0}^m \mathcal{O}_X|_U, \mathcal{O}_X|_U\right) \cong \bigoplus_{i=0}^m \mathcal{O}_X|_U.$$

Es decir que localmente el funtor solución es localmente libre de rango finito sobre $\mathcal{O}_X$.

Capítulo 5

Sistemas holonomos regulares

En éste capítulo se tratan un tipo particular de sistemas holonomos que surgen como generalización de la noción de punto singular regular de un sistema de ecuaciones diferenciales. Para empezar resulta conveniente considerar el caso de ecuaciones diferenciales en el plano complejo y su respectivo $\mathcal{D}$-módulo asociado.

Sea X un abierto en $\mathbb{C}$ y P un operador diferencial ordinario de orden m. Vamos a denotar $\mathcal{D} = \mathcal{D}_X(X)$ la sección global y $\partial = \frac{d}{dz}$.

Tomo $\mathcal{M} = \mathcal{D}/\mathcal{D}P$. Entonces $P(z, \partial) = \sum_{k=0}^{m} a_k(z)\partial^k$.

En un entorno de de z_0 en el que $a_m(z_0) \neq 0$, $\mathcal{M} \cong \mathcal{O}_X^m$ como $\mathcal{D}$-módulo. Por lo tanto, la ecuación $Pu = 0$ tiene m soluciones holomorfas linealmente independientes. Por otro lado, si consideramos entornos de z_0 donde $a_m(z_0) = 0$ no es sencillo en general conocer su comportamiento. Por ejemplo, mientras que $L = \mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{O}_X)$ es un haz de rango localmente constante m en $X - z_0$ y sin embargo no se conoce una manera de calcular su monodromía en general. Una manera de calcular la monodromía en el caso de dimensión 1 en el caso de ecuaciones diferenciales con singularidades regulares.

Teorema 5.0.1. *Las siguientes condiciones son equivalentes*

1. *Sea $k = ord_{z=z_0} a_m(z)$. Entonces, $ord_{z=z_0} a_j(z) \geq k-(m-j)$para todo j donde $ord_{z=z_0} f(z)$ denota el orden de cero de $f(z)$ en $z = z_0$.*

2. *$Pu = 0$ tiene m soluciones linealmente independientes de la forma*

$$(z - z_0)^\lambda \sum_{j=0}^{s} u_j(z)(log(z - z_0))^j$$

para algún $s \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ y $\lambda \in \mathbb{C}$, donde $u_j(z)$ son holomorfas en un entorno de z_0

Observación 5.0.2. Como ya fue definido en el Capítulo 3, si alguna de las dos condiciones equivalentes anteriores se cumple entonces diremos que z_0 es un punto **singular regular** de $Pu = 0$.

Supongo que $z_0 = 0$ es una singularidad regular. Dependiendo de si k es mayor o menor a m en la ecuación $Pu = 0$ se puede reemplazar a P por $z^l P$ o $\partial^l P$ para poder asumir que $k = m$. Por lo tanto, P se puede escribir como $\sum_{j=0}^{m} c_j(z) z^j \partial^j$ para algunas funciones holomorfas $c_0, \ldots, c_m$; por lo tanto $c_m(0) \neq 0$. En consecuencia, multiplicando por $c_m(z)^{-1}$ se puede asumir que

$$P = (z\partial)^m + \sum_{j=0}^{m-1} c_j(z)(z\partial)^j.$$

En la última igualdad se usó que $z^j \partial^j = (z\partial)(z\partial - 1) \ldots (z\partial - j + 1)$.

Definimos una filtración $\{\mathcal{M}_k\}_k$ en $\mathcal{M} = \mathcal{D}/\mathcal{D}P = \mathcal{D}u$ donde $u = 1 \bmod \mathcal{D}P$

$$\mathcal{M}_k = \sum_{j=0}^{m-1} \mathcal{D}(k)(z\partial)^j u.$$

Donde $\{\mathcal{D}(k)\}_k$ denota la filtración de $\mathcal{D}$ dada por el orden de los operadores.

Por lo tanto, se tiene que $(z\partial)\mathcal{M}_k \subset \mathcal{M}_k$ y, en consecuencia, $z\xi Gr\,(\mathcal{M}) = 0$. Recíprocamente, se puede mostrar que $z = 0$ es una singularidad regular de $\mathcal{M}$ si $\mathcal{M}$ admite una buena filtración que satisfaga la condición anterior. Debido a que

$$Ch\,(\mathcal{M}) \subset \{(z; \xi) : z\xi = 0\}$$

para cualquier filtración buena de $\mathcal{M}$, existe un $n_0 > 0$ tal que

$$(z\xi)^{n_0}\, Gr\,(\mathcal{M}) = 0,$$

incluso cuando z=0 es una singularidad no regular. La caracterización previa quiere decir que para una singularidad regular podemos tomar $n_0 = 1$.

5.1 $\mathcal{D}$-módulos en dimensión 1

Muchos de los resultados y propiedades de módulos holónomos regulares se consiguen a partir de resultados en los casos particulares en los que dim(X)=1; por lo que la sección presente se enfocará en obtener tales resultados y las siguientes en generalizarlos a dimensiones arbitrarias

Sea $\mathcal{M}$ un $\mathcal{D}_X$-módulo holónomo; por lo visto en capítulos anteriores, $dim\,(Ch\,(\mathcal{M})) = 1$. Denotemos $\sum$ al conjunto de puntos $x \in X$ tales que su fibra $\pi^{-1}(x)$ bajo la proyección π :

$T^*X \to X$ está totalmente contenida en $Ch(\mathcal{M})$ y recordemos que a tal subconjunto se lo denomina "parte singular" del módulo holónomo $\mathcal{M}$. Se tiene entonces que el conjunto $\sum$ es un conjunto analítico de dimensión cero y por lo tanto, un conjunto discreto.

Por teorema (referenciar) se tiene que el módulo $\mathcal{M}$ sobre $X - \sum$ es una conexión; por lo tanto, el estudio local de un $\mathcal{D}_X$-módulo puede ser restringido a cartas en un punto $x \in X$ tal que $\sum$ es o bien vacío o un sólo punto. Por lo tanto, existe una correspondencia 1-1 entre gérmenes de $\mathcal{D}_X$-módulos holónomos y módulos holónomos sobre el anillo $\mathcal{D}_1$.

En lo que sigue denotamos $\mathcal{D} = \mathcal{D}_1$, $\mathcal{O} = \mathcal{O}_1$ y $\partial = \partial/\partial_z$

Proposición 5.1.1. *1. $\mathcal{D}$ es un anillo simple cuya dimensión homológica es 1.*

2. Todo $\mathcal{D}$-módulo holónomo es cíclico.

3. Para cualquier $P \in \mathcal{D}$ se tiene que $\mathcal{D}/\mathcal{D}P$ es holónomo.

Definición 5.1.2. Un $\mathcal{D}$-módulo se dice 'de torsión' si para todo elemento $m \in \mathcal{M}$ existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $x^k m = 0$

Observación 5.1.3. Sea $\mathcal{M}$ un $\mathcal{D}$-módulo de torsión y considero $\mathcal{M}_0 = \{m \in \mathcal{M} : xm = 0\}$; teniendo en cuenta que $d_X = 1$ se tiene que $\mathcal{M}_0$ es un espacio vectorial de dimensión finita que genera a $\mathcal{M}$ como $\mathcal{D}$-módulo. Tomando $u_1, \ldots, u_k$ una base del espacio vectorial $\mathcal{M}_0$ se tiene que $\mathcal{M} = \bigoplus_{i=0}^k \mathcal{D}u_i \cong (\mathcal{D}/\mathcal{D}x)^k$.

Definición 5.1.4.

1. Sea $L \subset \mathcal{D}$ un ideal a izquierda no nulo. Denotamos a $m(L)$ como el menor entero positivo de entre todos los grados de operadores $P \in L$. Un elemento $P \in L$ se dice de 'minimal del primer tipo' si $deg(P) = m(L)$.

2. Con las mismas notaciones que en el primer ítem, dado $Q \in L$ decimos que es 'minimal del segundo tipo' si el orden de su coeficiente principal es el menor posible; lo denotamos $k(L)$.

Proposición 5.1.5. *Sea $P \in L$ un operador minimal del primer tipo, entonces $L/\mathcal{D}P$ es de torsión.*

Demostración. Tomo $m = m(L)$ y $P = \sum_{i=0}^m a_m(z)\partial^i$. Como $\mathcal{O}$ es un anillo de valuación discreta, el elemento a_m se puede expresar como $a_m(z) = z^k\alpha(z)$ donde $\alpha(z)$ es un elemento inversible en el anillo $\mathcal{O}$. Dividiendo en el anillo $\mathcal{D}$ se tiene que

$$x^{k(n+1)}\mathcal{D}(m+n) \subset \mathcal{D}(n)P + \mathcal{D}(n-1) \text{ para todo } n \geq 0.$$

Si $Q \in L \cap \mathcal{D}(m+n)$ entonces existe un $G \in \mathcal{D}(m-1)$ de manera tal que $x^{k(n+1)}Q - G \in \mathcal{D}P$. Por lo tanto, $G \in L \cap \mathcal{D}(m-1)$ y en consecuencia, $G = 0$, dado que el m que habíamos tomado era minimal en L. De ésto último se sigue que $L/\mathcal{D}P$ es de torsión $\square$

Proposición 5.1.6. *Sea $Q \in L$ minimal del segundo tipo, entonces $L/\mathcal{D}Q \cong \mathcal{O}^s$ para algún $s \in \mathbb{N}_0$.*

Demostración. Q se puede expresar como $\sum_{i=0}^{m} q_i(z)\partial^i$. Dado que $ord(q_m) = k(L)$ y como $L \subset \mathcal{D}Q + \mathcal{D}(m-1)$ resulta que $L/\mathcal{D}P$ es un $\mathcal{O}$-módulo finitamente generado. Por teorema (referenciar) se tiene el resultado. $\square$

Observación 5.1.7. gl.dim$(\mathcal{D})$ $= 1$, es decir, la dimensión homológica global del anillo $\mathcal{D}$ es igual a 1. En general, se puede ver que la dimensión homológica global de los anillos $\mathcal{D}_n$ es igual a n con herramientas de álgebra homológica; sin embargo, con la ayuda de los operadores minimales definidos se puede dar una demostracion más directa.

En capítulos anteriores vimos que $\mathcal{D}$ es un anillo filtrado cuyo graduado asociado $Gr(\mathcal{D}) = \mathcal{O}[z]$; dado que el anillo $\mathcal{O}$ tiene dimensión homológica igual a 1, entonces resulta que la dimensión homológica del anillo $Gr(\mathcal{D})$ tiene dimensión homológica 2 y por lo tanto, $\mathcal{D}$ tiene dimensión homológica *a lo sumo* 2. La igualdad gl.dim$(\mathcal{D}) = 1$ vale si $Ext^2_{\mathcal{D}}(\mathcal{D}/L, \mathcal{D}) = 0$ para todo ideal a izquierda L. Para verlo, se toma $P \in \mathcal{D}$ un operador diferencial minimal de primer tipo y las siguientes sucesiones exactas cortas

$$0 \to \mathcal{D} \xrightarrow{.P} \mathcal{D} \to \mathcal{D}/\mathcal{D}P \to 0 \tag{5.1}$$

$$0 \to L/\mathcal{D}P \to \mathcal{D}/\mathcal{D}P \to \mathcal{D}/L \to 0 \tag{5.2}$$

La sucesión exacta (5.1) resulta una resolución libre de $\mathcal{D}/\mathcal{D}P$ debido a que el morfismo $.P$ es inyectivo. Como tal resolución tiene longitud 2 resulta entonces que $Ext^k_{\mathcal{D}}(\mathcal{D}/\mathcal{D}P, \mathcal{D}) = 0$ para todo $k \geq 2$. La sucesión exacta corta (5.2) induce la sucesión exacta larga

$$\begin{aligned} 0 \to Hom_{\mathcal{D}}(\mathcal{D}/L, \mathcal{D}) \to Hom_{\mathcal{D}}(\mathcal{D}/\mathcal{D}P, \mathcal{D}) \to Hom_{\mathcal{D}}(L/\mathcal{D}P, \mathcal{D}) \to \\ \to Ext^1_{\mathcal{D}}(\mathcal{D}/L, \mathcal{D}) \to Ext^1_{\mathcal{D}}(\mathcal{D}/\mathcal{D}P, \mathcal{D}) \to Ext^1_{\mathcal{D}}(L/\mathcal{D}P, \mathcal{D}) \to \\ \to Ext^2_{\mathcal{D}}(\mathcal{D}/L, \mathcal{D}) \to Ext^2_{\mathcal{D}}(\mathcal{D}/\mathcal{D}P, \mathcal{D}) \to Ext^2_{\mathcal{D}}(L/\mathcal{D}P, \mathcal{D}) \to 0 \end{aligned}$$

Debido a que $Ext^2_{\mathcal{D}}(\mathcal{D}/\mathcal{D}P, \mathcal{D}) = 0$ resulta que $Ext^2_{\mathcal{D}}(\mathcal{D}/L, \mathcal{D})$ es cociente del módulo $Ext^1_{\mathcal{D}}(L/\mathcal{D}P, \mathcal{D})$. Dado que $L/\mathcal{D}P \cong \mathcal{D}^s/\mathcal{D}^s x$ para algún s entero positivo y $Ext^1_{\mathcal{D}}(\mathcal{D}/\mathcal{D}x, \mathcal{D}) = \mathcal{D}/x\mathcal{D}$, concluímos entonces que $Ext^1_{\mathcal{D}}(\mathcal{D}/L, \mathcal{D})$ es cero o de tipo torsión. Utilizando P un operador minimal del segundo tipo, por la proposición anterior y haciendo un argumento similar al de recién se ve que $Ext^2_{\mathcal{D}}(\mathcal{D}/L, \mathcal{D})$ es o bien cero o bien isomorfo a $\mathcal{D}^t/\partial\mathcal{D}^t$ para algún entero t. De ésto último se sigue la observación inicial.

Se toma ahora un elemento no nulo $P \in \mathcal{D}$ y considero

$$Ker(P) = \{f \in \mathcal{O} : P(z, \partial)(f) = 0\} \text{ y } Coker(P) = \mathcal{O}/P(\mathcal{O}).$$

Observación 5.1.8. $Coker(P) = Ext^1_{\mathcal{D}}(\mathcal{D}/\mathcal{D}P, \mathcal{O})$ y $Hom_{\mathcal{D}}(\mathcal{D}/\mathcal{D}P, \mathcal{O}) = Ext^0_{\mathcal{D}}(\mathcal{D}/\mathcal{D}P, \mathcal{O}) \cong Ker(P)$

Para verlo, se toma la sucesión exacta corta

$$0 \to \mathcal{D}P \to \mathcal{D} \to \mathcal{D}/\mathcal{D}P \to 0$$

y la sucesión exacta extendida a partir de los grupos Ext

$$\begin{aligned} 0 \to Hom_{\mathcal{D}}(\mathcal{D}/\mathcal{D}P, \mathcal{O}) \to Hom_{\mathcal{D}}(\mathcal{D}, \mathcal{O}) \to Hom_{\mathcal{D}}(\mathcal{D}P, \mathcal{O}) \to \\ \to Ext^1_{\mathcal{D}}(\mathcal{D}/\mathcal{D}P, \mathcal{O}) \to Ext^1_{\mathcal{D}}(\mathcal{D}, \mathcal{O}) \to Ext^1_{\mathcal{D}}(\mathcal{D}P, \mathcal{O}) \to 0 \end{aligned}$$

Resulta evidente que $Ext^1_{\mathcal{D}}(\mathcal{D}, \mathcal{O}) = 0$. Paso siguiente, se ve que la sucesión

$$\begin{aligned} Hom_{\mathcal{D}}(\mathcal{D}, \mathcal{O}) \xrightarrow{\omega} Hom_{\mathcal{D}}(\mathcal{D}P, \mathcal{O}) \xrightarrow{\pi} \mathcal{O}/P(\mathcal{O}) \to 0 \\ \varphi \mapsto [\varphi(P)] \end{aligned}$$

es exacta. Es evidente que $\pi\omega = 0$; para ver que $Ker(\pi) \subset Im(\omega)$ se toma $\varphi \in Hom_{\mathcal{D}}(\mathcal{D}P, \mathcal{O})$ tal que $\pi(\varphi) = 0$ por lo que se tiene que $[\varphi(P)] = 0$, lo que significa que $\varphi(P) = P(g)$ para algún $g \in \mathcal{O}$. Se define $\widetilde{\varphi} \in Hom_{\mathcal{D}}(\mathcal{D}, \mathcal{O})$, como $\widetilde{\varphi}(1) = g$ y como consecuencia de lo anterior resulta que $\widetilde{\varphi}$ extiende a φ y con ello, $\varphi \in Im(\omega)$. Por otro lado, el morfismo π es claramente sobreyectivo. Finalmente resulta que $Ext^1_{\mathcal{D}}(\mathcal{D}/\mathcal{D}P, \mathcal{O}) = \mathcal{O}/P(\mathcal{O})$.

Para la última parte hay que ver que el morfismo canónico $Hom_{\mathcal{D}}(\mathcal{D}/\mathcal{D}P, \mathcal{O}) \to Ker(P)$ es un isomorfismo. El mismo está dado por

$$\begin{aligned} Hom_{\mathcal{D}}(\mathcal{D}/\mathcal{D}P, \mathcal{O}) \to Ker(P) \\ \varphi \to \varphi([1]) \end{aligned}$$

Está bien definido pues $P.\varphi([1]) = \varphi([P]) = 0$; es claramente inyectivo y la suryectividad sale de considerar para cada $Q \in Ker(P)$ un $\varphi \in Hom_{\mathcal{D}}(\mathcal{D}, \mathcal{O})$ tal que $\varphi(1) = Q$; dado que $Q \in Ker(P)$ se tiene entonces que el morfismo φ se factoriza a través de $\pi : \mathcal{D} \to \mathcal{D}/\mathcal{D}P$ y se tiene, entonces, un morfismo $\widetilde{\varphi} \in Hom_{\mathcal{D}}(\mathcal{D}/\mathcal{D}P, \mathcal{O})$ tal que $\widetilde{\varphi}([1]) = Q$.

Observación 5.1.9. Si $\mathcal{D}/\mathcal{D}P$ es holónomo, entonces $Ker(P)$ y $Coker(P)$ son espacios vectoriales finitamente generados. La verificación del resultado se realiza en el teorema 7.2.8

Definición 5.1.10. Sea P un elemento no nulo en $\mathcal{D}$. Denotamos

$$\chi(\mathcal{D}/\mathcal{D}P) = dim_{\mathbb{C}}(Ker(P)) - dim_{\mathbb{C}}(Coker(P))$$

y lo llamaremos 'índice analítico de P'.

Reemplazando ahora al anillo $\mathcal{O}$ por el anillo $\widehat{\mathcal{O}}$ de series de potencia formales se consigue un $\mathcal{D}$-módulo a izquierda donde se tiene respectivamente un núcleo y un conúcleo como recién y que a su vez da la siguiente definición.

Definición 5.1.11. $\widehat{\chi}(\mathcal{D}/\mathcal{D}P) = dim_{\mathbb{C}}\left(\widehat{Ker(P)}\right) - dim_{\mathbb{C}}\left(\widehat{Coker(P)}\right)$ se denominará el 'índice formal de P'.

Definición 5.1.12. Sea $P = \sum_{i=0}^{m} a_i\partial^i$, definimos

1. $\delta(P) = m - ord(a_m)$
2. $\widehat{\delta}(P) = \max_{i=0,\dots,m}\{i - ord(a_i)\}$

donde $ord(a_i)$ es el orden de a_i en el anillo de valuación discreta $\mathcal{O}$. Asumiremos que $ord(a_i) = +\infty$ en el caso en el que $a_i = 0$.

Proposición 5.1.13. *Sea $P \in \mathcal{D}$ no nulo. Valen las siguientes igualdades*

1. $\delta(P) = \chi(\mathcal{D}/\mathcal{D}P)$
2. $\widehat{\delta}(P) = \widehat{\chi}(\mathcal{D}/\mathcal{D}P)$

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$ arbitrario y consideremos D_ε el disco de radio ε centrado en el origen en $\mathbb{C}$. Sea P un operador diferencial de orden m y denotamos $A^m(D_\varepsilon)$ el espacio de funciones m veces continuamente diferenciables en el disco cerrado $\overline{D_\varepsilon}$ y holomorfas en D_ε. Notemos que el espacio $A^m(D_\varepsilon)$ resulta un espacio de Banach con la norma dada a partir de la suma de los máximos de las derivadas hasta orden m.

Sea $P \in \mathcal{D}$, elegimos ε_0 suficientemente pequeño demanera tal que los coeficientes de P sean holomorfos en el disco D_{ε_0}; tomando $0<\varepsilon < \varepsilon_0$ se concluye que P induce un operador lineal continuo de $A^m(D_\varepsilon)$ a $A^0(D_\varepsilon)$.

Si denotamos $Q = P - a_m \partial^m \in \mathcal{D}(m-1)$, por Arzelá-Ascoli resulta que $Q : A^m(D_\varepsilon) \to A^0(D_\varepsilon)$ es un operador lineal compacto. Además, resulta fácil calcular el índice del operador

$$f \to a_m(z) \partial^m f / \partial x^m$$

de $A^m(D_\varepsilon)$ a $A^0(D_\varepsilon)$ el cual es $m - deg(a_m)$. Como el operador anterior resulta de Fredholm y Q es un operador compacto, por teorema de Fredholm se deduce que el índice de la suma de los operadores es igual a $m - deg(a_m)$. Como el ε que tomamos al principio era arbitrario, pasando al límite con $\varepsilon \to 0$ se tiene la primer parte del resultado.

Para la segunda parte, tomamos $\widehat{\mathfrak{M}}$ el ideal maximal de $\widehat{\mathcal{O}}$. Si $\alpha(z) \in \widehat{\mathcal{O}}$ tiene orden k y c_k es el coeficiente del término principal z^k se tiene que

$$\alpha(z)\partial^n(z^j) - \frac{j!}{(j-n)!} c_k z^{j+k-n} \in \widehat{\mathfrak{M}}^{j+k+1-n} \text{ con } j \geq n \tag{5.3}$$

ya que $\partial^n(z^j) = \frac{j!}{(j-n)!} z^{j-n}$ y por lo lo tanto el elemento de 5.3 es igual a

$$\partial^n(z^j)\left(\alpha(z) - c_k z^k\right) \in \widehat{\mathfrak{M}}^{j-n} \widehat{\mathfrak{M}}^{k+1} \subset \widehat{\mathfrak{M}}^{j+k+1-n}.$$

Por 5.3 y la definición de $\widehat{\delta}(P)$ se deduce

$$P(z^j) - \rho(j) z^{j-\widehat{\delta}(P)} \in \widehat{\mathfrak{M}}^{j-\widehat{\delta}(P)+1} \text{ cuando } j \geq \max\left\{\widehat{\delta}(P), m\right\}. \tag{5.4}$$

Donde $\rho(j)$ es un polinomio cuyo grado es el entero ω más grande de manera tal que $\omega - ord(a_\omega) = \widehat{\delta}(P)$. Sea j_0 un entero tal que $\rho(j) \neq 0$ para todo $j \geq j_0$. Por definición de $\widehat{\delta}(P)$ se ve que $P : \widehat{\mathfrak{M}}^{j_0} \hookrightarrow \widehat{\mathfrak{M}}^{j_0 - \widehat{\delta}(P)}$. Más aún, 5.4 con un argumento recursivo muestra que $P : \widehat{\mathfrak{M}}^{j_0} \to \widehat{\mathfrak{M}}^{j_0 - \widehat{\delta}(P)}$ es biyectiva. Denotamos

$$V = \widehat{\mathcal{O}} / \widehat{\mathfrak{M}}^{j_0} \text{ y } W = \widehat{\mathcal{O}} / \widehat{\mathfrak{M}}^{j_0 - \widehat{\delta}(P)}. \tag{5.5}$$

Entonces P induce un morfismo $\mathbb{C}$-lineal $\overline{P}$ de V en W. Entonces, $\overline{P}$ tiene índice $dim(V) - dim(W) = \widehat{\delta}(P)$. Dado que $P : \widehat{\mathfrak{M}}^{j_0} \to \widehat{\mathfrak{M}}^{j_0 - \widehat{\delta}(P)}$ es biyectiva, concluímos que P tiene índice $\widehat{\delta}(P)$ en $\mathcal{O}$. □

Observación 5.1.14. El teorema anterior muestra que para cualquier $P \in \mathcal{D}$ existe un entero ω de manera tal que $P(\widehat{\mathcal{O}}) \supset \widehat{\mathfrak{M}}^\omega$, con lo cual $\mathcal{P}_{\omega-1} + P(\mathcal{O}) = \widehat{\widehat{\mathcal{O}}}$ donde $\mathcal{P}_{\omega-1}$ es el espacio de polinomios en una variable de grado a lo sumo $\omega - 1$. Como consecuencia se tiene que el morfismo $\mathcal{O}/P(\mathcal{O}) \to \widehat{\mathcal{O}}/P(\widehat{\mathcal{O}})$ es sobreyectivo. De esta manera, resulta que el conúcleo formal de P es un cociente del conúcleo analítico de P. Por lo tanto

$$dim_{\mathbb{C}}\left(Ext^1_{\mathcal{D}}\left(\mathcal{D}/\mathcal{D}P, \widehat{\mathcal{O}}\right)\right) \leq dim_{\mathbb{C}}\left(Ext^1_{\mathcal{D}}(\mathcal{D}/\mathcal{D}P, \mathcal{O})\right). \tag{5.6}$$

Notemos también que $Ker(P) \subset \widehat{Ker(P)}$ gracias a la inclusión $\mathcal{O} \subset \widehat{\mathcal{O}}$ lo cual dice que

$$dim_{\mathbb{C}}\left(Ext^0_{\mathcal{D}}\left(\mathcal{D}/\mathcal{D}P, \mathcal{O}\right)\right) \leq dim_{\mathbb{C}}\left(Ext^0_{\mathcal{D}}\left(\mathcal{D}/\mathcal{D}P, \widehat{\mathcal{O}}\right)\right). \tag{5.7}$$

De 5.6 y 5.7 se tiene entonces que

$$\chi\left(\mathcal{D}/\mathcal{D}P\right) \leq \widehat{\chi}\left(\mathcal{D}/\mathcal{D}P\right) \tag{5.8}$$

Proposición 5.1.15. *Sea $P \in \mathcal{D}$. Se tiene la equivalencia*

(1) $\chi\left(\mathcal{D}/\mathcal{D}P\right) = \widehat{\chi}\left(\mathcal{D}/\mathcal{D}P\right)$.

(2) $\boldsymbol{R}Hom_{\mathcal{D}}\left(\mathcal{D}/\mathcal{D}P, \widehat{\mathcal{O}}/\mathcal{O}\right) = 0$.

Para la demostración consultar [Bjö13].

Definición 5.1.16. Usando las definiciones formuladas en los párrafos anteriores, definimos análogamente el índice analítico y formal de un $\mathcal{D}$-módulo $\mathcal{M}$ holónomo como:

$$\chi\left(\mathcal{M}\right) = dim_{\mathbb{C}}\left(Ext^0_{\mathcal{D}}\left(\mathcal{M}, \mathcal{O}\right)\right) - dim_{\mathbb{C}}\left(Ext^1_{\mathcal{D}}\left(\mathcal{M}, \mathcal{O}\right)\right)$$

$$\widehat{\chi}\left(\mathcal{M}\right) = dim_{\mathbb{C}}\left(Ext^0_{\mathcal{D}}\left(\mathcal{M}, \widehat{\mathcal{O}}\right)\right) - dim_{\mathbb{C}}\left(Ext^1_{\mathcal{D}}\left(\mathcal{M}, \widehat{\mathcal{O}}\right)\right)$$

respectivamente.

Decimos que un $\mathcal{D}$-módulo holónomo $\mathcal{M}$ se dice *holónomo regular* si $\chi\left(\mathcal{M}\right) = \widehat{\chi}\left(\mathcal{M}\right)$. La clase de $\mathcal{D}$-módulos holónomos regulares se denota $RH\left(\mathcal{D}\right)$.

Índice de irregularidad. Sea $\mathcal{M}$ un $\mathcal{D}$-módulo holónomo, definimos $Irr\left(\mathcal{M}\right) = \widehat{\chi}\left(\mathcal{M}\right) - \chi\left(\mathcal{M}\right)$.

Observación 5.1.17. Vimos que todo $\mathcal{D}$-módulo holónomo es cíclico $\mathcal{M} = \mathcal{D}/L$. Tomando $P \in L$un operador del primer tipo, por la discusión anterior, resulta claro que $Irr\left(\mathcal{M}\right) \geq 0$. Además, por Proposición 5.1.5 $L/\mathcal{D}P$ es o bien nulo o suma directa de $\mathcal{D}/\mathcal{D}x$. Claramente, $Irr\left(\mathcal{D}/\mathcal{D}x\right) = \widehat{\delta}(x) - \delta(x) = 0$. Se sigue, entonces, que $Irr(\mathcal{M}) \geq 0$. Más aún, resulta que

1. $dim_{\mathbb{C}}\left(Ext^0_{\mathcal{D}}\left(\mathcal{M}, \mathcal{O}\right)\right) \leq dim_{\mathbb{C}}\left(Ext^0_{\mathcal{D}}\left(\mathcal{M}, \widehat{\mathcal{O}}\right)\right)$
2. $dim_{\mathbb{C}}\left(Ext^1_{\mathcal{D}}\left(\mathcal{M}, \widehat{\mathcal{O}}\right)\right) \leq dim_{\mathbb{C}}\left(Ext^1_{\mathcal{D}}\left(\mathcal{M}, \mathcal{O}\right)\right)$

Corolario 5.1.18. *Sea $0 \to \mathcal{M}'' \to \mathcal{M} \to \mathcal{M}' \to 0$ una sucesión exacta corta de módulos holónomos. Entonces $\mathcal{M}$ es holónomo regular $\Leftrightarrow$ $\mathcal{M}''$ y $\mathcal{M}'$ son holónomos regulares.*

Demostración. Se sigue del hecho de que para todo módulo $\mathcal{M}$ holónomo $Irr\left(\mathcal{M}\right) \geq 0$. □

Proposición 5.1.19. *Sea $\mathcal{M}$ un $\mathcal{D}$-módulo holónomo. Entonces*

$$\mathcal{M} \text{ es holónomo regular } \Leftrightarrow \boldsymbol{R}Hom_{\mathcal{D}}\left(\mathcal{M}, \widehat{\mathcal{O}}/\mathcal{O}\right) = 0$$

Demostración. Como $\mathcal{M}$ es cíclico, entonces $\mathcal{M} = \mathcal{D}/L$ y elegimos en L un operador diferencial del primer tipo P. El módulo $\mathcal{D}/\mathcal{D}x$ cumple que $\mathbf{R}Hom_{\mathcal{D}}\left(\mathcal{D}/\mathcal{D}x, \widehat{\mathcal{O}}/\mathcal{O}\right) = 0$. Dado que $L/\mathcal{D}P$ es suma directa de $\mathcal{D}/\mathcal{D}x$ entonces la demostración se puede reducir al caso en el que $\mathcal{M} = \mathcal{D}/\mathcal{D}P$ y la Proposición 5.1.13 la completa. □

Definición 5.1.20. Denotamos $\nabla = z\partial \in \mathcal{D}$. Un operador de la forma

$$P = \alpha\left(\nabla^m + a_{m-1}\nabla^{m-1} + \ldots + a_0\right) \text{ con } \alpha, a_i \in \mathcal{D}(0) = \mathcal{O}$$

se dice de tipo Fuchs. Observemos que un operador P es de tipo Fuchs si y sólo si $\delta(P) = \widehat{\delta}(P)$. Por lo tanto, un operador $P \in \mathcal{D}$ es de tipo Fuchs si y sólo si $\mathcal{D}/\mathcal{D}P$ es holónomo regular.

Observación 5.1.21. Sea $\mathcal{M} = \mathcal{D}/L$ un módulo holónomo cíclico. Consideremos la sucesión exacta corta

$$0 \to L/\mathcal{D}P \to \mathcal{D}/\mathcal{D}P \to \mathcal{D}/L \to 0.$$

Si P es un operador diferencial del primer tipo, entonces $L/\mathcal{D}P$ es suma directa de $\mathcal{D}/\mathcal{D}x$ (y, por lo tanto, holónomo regular); si P es operador diferencial del segundo tipo entonces $L/\mathcal{D}P$ es $\mathcal{O}^s$ y como $\mathcal{O}$ es holónomo regular, entonces $L/\mathcal{D}P$ también lo será. En ambos casos, resulta de aplicar el corolario 5.1.16 a la sucesión exacta corta anterior que $\mathcal{M}$ es holónomo regular si y sólo si P es de tipo Fuchs.

Recordemos brevemente, antes de continuar, que la definición de una conexión meromorfa de la manera en la que fue definida en el capítulo 3 se puede denotar como $(\mathbb{K}^n, \nabla)$ con $\mathbb{K}^n$ un $\mathbb{K} = \mathcal{O}\left[z^{-1}\right]$ espacio vectorial de dimensión finita. $\mathbb{K}^n$ tiene estructura de $\mathcal{D}$-módulo de manera tal que $\partial\left(g.u\right) = \partial u/\partial z.u + g.A$ con $g \in \mathbb{K}$, $u \in \mathbb{K}^n$ y $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$.

Proposición 5.1.22. *Toda conexión meromorfa es un $\mathcal{D}$-módulo holónomo*

Demostración. Sea r un entero de manera tal que $z^r a_{ij} \in \mathcal{O}$ para cada a_{ij} elemento de la matriz A. Sea $\{e_1, \ldots, e_n\}$ una base de $\mathbb{K}^n$ de manera tal que $\partial e_k = Ae_k$. Entonces

$$z^r\partial e_k \in \mathcal{O}e_1 + \ldots + \mathcal{O}e_n \text{ para cada k.}$$

Dado que $\mathcal{O}$ es un anillo Noetheriano, resulta que para cada e_k existe un elemento en $\mathcal{D}$ de la forma $\sum f_j(z^r\partial)^j$ tal que anula a e_k. Se sigue, entonces, que $\sum \mathcal{D}e_k$ es un $\mathcal{D}$-módulo holónomo. Tomando el módulo $\mathcal{O}\left[z^{-1}\right] \otimes_{\mathcal{O}} \sum \mathcal{D}e_k$ resulta que también es holónomo. Como $\mathbb{K} = \mathcal{O}\left[z^{-1}\right]$ entonces $\mathcal{O}\left[z^{-1}\right] \otimes_{\mathcal{O}} \sum \mathcal{D}e_k = (\mathbb{K}^n, \nabla)$. □

5.2 $\mathcal{D}_X$-módulos holónomos regulares

En lo que sigue del trabajo se hará un marcado uso de la teoría de categorías derivadas sobre la categoría abeliana de $\mathcal{D}_X$-módulos y se asumirá conocidos los resultados clásicos de la misma. Como referencia se puede utilizar [BGKH88] o [KS13] de Kashiwara y Schapira.

Notación. Denotaremos $D^b(\mathcal{D}_X)$ a la categoría derivada cuyos objetos son complejos $\left\{\mathcal{M}^l\right\}_{l\in\mathbb{Z}}$ acotados de $\mathcal{D}_X$-módulos (es decir, complejos de $\mathcal{D}_X$-módulos tales que existe un $j \geq 0$ para el cual $\mathcal{M}^k = 0$ si $k \geq j$ o $k \leq -j$) y sus morfismos son la localización categórica con respecto a los cuasi-isomorfismos salvo homotopía.

Definición 5.2.1. Si $\mathcal{M}^\bullet$ es un objeto de $D^b(\mathcal{D}_X)$ y $x_0 \in X$ se define

$$\widehat{Sol}_{x_0}(\mathcal{M}) = \mathbf{R}Hom_{\mathcal{D}_{X,x_0}}\left(\mathcal{M}_{x_0}, \widehat{\mathcal{O}}_{X,x_0}\right)$$

el complejo de soluciones formal de $\mathcal{M}$ en x_0. Análogamente se define

$$Sol_{X,x_0}(\mathcal{M}) = \mathbf{R}Hom_{\mathcal{D}_{X,x_0}}(\mathcal{M}_{x_0}, \mathcal{O}_{X,x_0})$$

Observación 5.2.2. Como $\mathcal{O}_{X,x_0}$ es un $\mathcal{D}_{X,x_0}$-submódulo de $\widehat{\mathcal{O}}_{X,x_0}$ se tiene que el morfismo natural $\iota : \mathcal{O}_{X,x_0} \hookrightarrow \widehat{\mathcal{O}}_{X,x_0}$ induce un morfismo $\rho_{x_0} : Sol_{X,x_0}(\mathcal{M}) \to \widehat{Sol}_{x_0}(\mathcal{M})$.

Definición 5.2.3. Un objeto $\mathcal{M} \in D^b_h(\mathcal{D}_X)$ se denomina un *complejo holónomo regular* si cumple

$$\mathbf{R}Hom_{\mathcal{D}_{X,x_0}}\left(\mathcal{M}_{x_0}, \widehat{\mathcal{O}}_{X,x_0}/\mathcal{O}_{X,x_0}\right) = 0 \text{ para cada } x_0 \in X.$$

Se denota $D^b_{r,h}(\mathcal{D}_X)$ a la familia de complejos holónomos regulares.

Observación 5.2.4. Si bien la categoría de $\mathcal{D}_X$-módulos es una categoría abeliana, las categorías $D^b(\mathcal{D}_X)$, $D^b_h(\mathcal{D}_X)$ y $D^b_{r,h}(\mathcal{D}_X)$ resultan aditivas pero no abelianas; por lo que es necesario un substituto para aquellas propiedades que se obtienen a partir de sucesiones exactas cortas. Las categorías aditivas mencionadas previamente resultan categorías trianguladas y el objeto que actúa como substituto de sucesiones exactas cortas son los *triangulos* de la categoría.

Observación 5.2.5. Dado un triángulo en $D^b_h(\mathcal{D}_X)$, si dos vértices del mismo son holónomos regulares, entonces el tercer también lo es.

Definición 5.2.6. Un $\mathcal{D}_X$-módulo holónomo $\mathcal{M}$ cuyo complejo asociado (de un sólo grado) está en $D^b_{r,h}(\mathcal{D}_X)$ se lo denomina un $\mathcal{D}_X$-módulo holónomo regular.

Capítulo 6

Teorema de Cauchy-Kovalevskaya-Kashiwara

En éste capítulo daremos una nueva formulación del teorema de Cauchy-kovalevskaya para ecuaciones en derivadas parciales a partir de la teoría desarrollada en los capítulos anteriores.

6.1 Imagen inversa de $\mathcal{D}$-módulos

Sea $f : X \to Y$ un morfismo entre variedades complejas; podemos levantar una función de Y a X. Si satisfacen un cierto sistema de ecuaciones, entonces su imagen también deberán satisfacer otro sistema de ecuaciones ¿Cómo podemos describir tal sistema?

La respuesta es que se puede formular una versión algebraica del problema; es decir, construir un funtor entre las categorías $Mod(\mathcal{D}_X)$ y $Mod(\mathcal{D}_Y)$.

Definición 6.1.1. Se define $\mathcal{D}_{X\to Y} = \mathcal{O}_X \otimes_{f^{-1}\mathcal{O}_Y} f^{-1}\mathcal{D}_Y$. Se puede observar que el haz definido tiene estructura de $f^{-1}\mathcal{D}_Y$-módulo a derecha.

Observación 6.1.2. En la definición anterior se denota $f^{-1}\mathcal{F}$ a la imagen inversa de haces en el sentido usual para cualquier haz $\mathcal{F}$ sobre Y.

Definición 6.1.3. Se define el funtor de imagen inversa de la categoría $Mod(\mathcal{O}_Y)$ en $Mod(\mathcal{O}_X)$ como

$$\mathcal{M} \mapsto \mathbf{D}f^*\mathcal{M} = \mathcal{O}_X \otimes_{f^{-1}\mathcal{O}_Y} f^{-1}\mathcal{M}$$

Proposición 6.1.4. *Sea $\mathcal{M} \in Mod(\mathcal{D}_Y)$. Existe una única conexión integrable ∇ en $\mathbf{D}f^*\mathcal{M}$ (donde $\mathcal{M}$ es considerado como $\mathcal{O}_Y$-módulo) tal que si se toma $(U, z_1, \dots, z_n)$ una carta en Y*

entonces $\nabla|_{f^{-1}(U)}$ *satisface:*

$$\begin{aligned}&\nabla_\delta\left(g\otimes_{f^{-1}\mathcal{O}_Y} f^{-1}(m)\right)\\&=\delta(g)\otimes_{f^{-1}\mathcal{O}_Y} f^{-1}(m)+\sum_{k=1}^{n} g\delta(f_k)\otimes_{f^{-1}\mathcal{O}_Y} f^{-1}(\partial_k(m)),\end{aligned}$$

donde $\partial_k=\partial/\partial z_k$ *y* $f(z)=(f_1(z),\ldots,f_n(z))$ *cuando* $z\in f^{-1}(U)$.

Demostración. Resulta sencillo verificar que la definición anterior verifica las condiciones de 3.1.1, falta ver que la misma no depende del sistema de coordenadas elegido en Y. Sea $(U',z'_1,\ldots,z'_n)$ otro sistema de coordenadas y se elijen $g_1,\ldots,g_n\in\mathcal{O}_Y(U\cap U')$ de manera tal que $z'_k=g_k(z)$. Notamos

$$z_k=f_k(z);\quad f'_k=g_k(f(z));\quad \partial'_k=\partial/\partial z'_k.$$

En $\Theta_X(U\cap U')$ se tiene que $\partial_j=\sum_{k=1}^n \partial g_k/\partial z_j.\partial'_k$. Si $\delta\in\Theta_X$ por regla de la cadena vale que

$$\begin{aligned}&\sum_{k=1}^{n}\delta(f'_k)\otimes_{f^{-1}\mathcal{O}_Y} f^{-1}\left(\partial'_k(m)\right)\\&=\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\delta(f_j)\partial g_k/\partial z^j(f(z))\otimes_{f^{-1}\mathcal{O}_Y} f^{-1}(\partial'_k(m))\\&=\sum_{j=1}^{n}\delta(f_j)\otimes_{f^{-1}\mathcal{O}_Y} f^{-1}(\partial_j(m)).\end{aligned}$$

Con lo que se tiene la proposición. □

Definición 6.1.5. Se denota $\mathcal{D}_{X\to Y}=\mathcal{O}_X\otimes_{f^{-1}\mathcal{O}_Y} f^{-1}\mathcal{D}_Y$ y se llama 'módulo de transferencia'.

Definición 6.1.6. Sea $\mathcal{M}\in Mod(\mathcal{D}_Y)$. Se define $\mathcal{M}_{X\to Y}=\mathcal{D}_{X\to Y}\otimes_{f^{-1}\mathcal{D}_Y} f^{-1}\mathcal{M}$ y se lo llama imagen inversa de $\mathcal{M}$ en al categoría de $\mathcal{D}$-módulos.

Ejemplos 6.1.7. Tomemos como ejemplo un morfismo de variedades $\iota: X\hookrightarrow Y$ que sea un embedding cerrado. Tomando coordenadas locales $(y_1,\ldots,y_n)$ en Y estudiemos el módulo de transferencia $\mathcal{D}_{X\to Y}$ bajo el embedding ι; el cual se puede ver como $\iota:\mathbb{C}^n\to\mathbb{C}^m$ con $n<m$. El anillo $\mathcal{D}_{\mathbb{C}^m}$ se puede descomponer como

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_{\mathbb{C}^m}&\cong\bigoplus\mathcal{O}_{\mathbb{C}^m}\partial_1^{m_1}\ldots\partial_n^{m_n}\otimes_{\mathbb{C}}\mathbb{C}\left[\partial_{n+1},\ldots,\partial_m\right]\\&=\mathcal{D}'\otimes_{\mathbb{C}}\mathbb{C}\left[\partial_{n+1},\ldots,\partial_m\right]\end{aligned}$$

Por lo tanto, por definición de módulo de transferencia

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}_{\mathbb{C}^n\to\mathbb{C}^m} &= \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}\otimes_{\iota^{-1}\mathcal{O}_{\mathbb{C}^m}}\iota^{-1}\mathcal{D}_{\mathbb{C}^m}\\
&\cong \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}\otimes_{\iota^{-1}\mathcal{O}_{\mathbb{C}^m}}\iota^{-1}\left(\mathcal{D}'\otimes_{\mathbb{C}}\mathbb{C}\left[\partial_{n+1},\dots,\partial_m\right]\right)\\
&\cong \left(\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}\otimes_{\iota^{-1}\mathcal{O}_{\mathbb{C}^m}}\iota^{-1}\mathcal{D}'\right)\otimes_{\mathbb{C}}\mathbb{C}\left[\partial_{n+1},\dots,\partial_m\right]\\
&\cong \mathcal{D}_{\mathbb{C}^n}\otimes_{\mathbb{C}}\mathbb{C}\left[\partial_{n+1},\dots,\partial_m\right]
\end{aligned}$$

Observación 6.1.8. Aún cuando $\mathcal{M}$ es un $\mathcal{D}_Y$-módulo coherente, $\mathbf{D}f^*\mathcal{M}$ podría no ser un $\mathcal{D}_X$-módulo coherente

Ejemplos 6.1.9. Sea $X = Y = \mathbb{C}$ y $f(x) = x^2$, entonces $\mathcal{D}_Y = \bigoplus \mathcal{O}_Y\partial_y^n$, $\mathbf{D}f^*\mathcal{D}_Y = \bigoplus_{n\geq 0}\mathcal{O}_X\otimes_{\mathbb{C}}\mathbb{C}\partial_y^n$ y se tiene la acción $\partial_x(a\otimes\partial_y^n) = \partial a/\partial x\otimes\partial_y^n + 2ax\otimes\partial_y^{n+1}$.

Aunque $Df^*\mathcal{D}_Y$ sea isomorfo a $\mathcal{D}_X$ en $X-\{0\}$, no resulta coherente sobre $\mathcal{D}_X$ en un entorno de $x=0$; $Df^*\mathcal{D}_Y = \sum_{n=0}^{\infty}\mathcal{O}_X\left(x^{-1}\partial_x\right)^n \subset \mathcal{D}_X\left[x^{-1}\right]$.

Observación 6.1.10. Aplicando la proposición anterior en el caso particular en el que $\mathcal{M} = \mathcal{D}_Y$ considerado como un $\mathcal{O}_Y$-módulo resulta que podemos conseguir una conexión integrable de manera tal que $\mathbf{D}f^*\left(\mathcal{D}_Y\right)$ tenga estructura de $\mathcal{D}_X$-módulo a izquierda gracias al teorema 3.1.3. Se tiene, por lo tanto, que $\mathbf{D}f^*\left(\mathcal{D}_Y\right)$ está dotado de una estructura de $\mathcal{D}_X$-$f^{-1}\left(\mathcal{D}_Y\right)$ bimódulo.

6.1.1 Coherencia de imagenes inversas

Como vimos, el funtor $\mathbf{D}f^*$ no preserva coherencia en $\mathcal{D}$-módulos; sin embargo, podemos dar una condición suficiente en términos de la variedad característica para que la imagen inversa de un $\mathcal{D}$-módulo sea coherente.

Para un morfismo de variedades complejas $f: X\to Y$ se toma el morfismo inducido en sus espacios tangentes en cada $x\in X$, $T_xX\to T_{f(x)}Y$ y en sus espacios cotangentes $T^*_{f(x)}Y\to T^*_xX$ y por lo tanto, se tiene $f_d: X\times_Y T^*Y\to T^*X$. Donde $X\times_Y T^*Y$ denota el fibrado de base X que resulta de imagen inversa bajo el morfismo f de T^*Y; es decir el conjunto de pares (x,η) donde $x\in X$y $\eta\in T^*_{f(x)}Y$.

Por otro lado, se toma la proyección canónica $f_\pi: X\times_Y T^*Y\to T^*Y$. Se tiene, entonces

$$T^*X \xleftarrow{f_d} X\times_Y T^*Y \xrightarrow{f_\pi} T^*Y$$

Se denota T^*_XX la sección nula del fibrado cotangente y se define

$$\overset{\circ}{T^*}X := T^*X - T^*_XX.$$

Definición 6.1.11. Se define $T_X^*Y := f_d^{-1}(T_X^*X) \subset X \times_Y T^*Y$; donde T_X^*X denota la sección nula del fibrado T^*X. Cuando el morfismo f es un embedding, se llama a T_X^*Y el *fibrado conormal* de X.

Definición 6.1.12. Sea $f : X \to Y$ morfismo de variedades y sea $\mathcal{M}$ un $\mathcal{D}_Y$-módulo coherente. Se dice que X es *no característico* con respecto a $\mathcal{M}$ si $T_X^*Y \cap f_\pi^{-1}(Ch\mathcal{M}) \subset X \times_Y T_Y^*Y$.

Observación 6.1.13. Considerando en particular el caso en el que $f : X \to Y$ es una inmersión, la noción de variedad no característica con respecto a un $\mathcal{D}_X$-módulo significa que. La definición de X variedad no característica con respecto a un $\mathcal{D}_X$-módulo recupera, de alguna manera, la noción de clásica de 'hipersuperficie no característica para una ecuación en derivadas parciales'. Por otra parte, si V es una variedad holónoma irreducible, $V = T_{\pi(V)}^*Y$ una inmersión es no característica para V si y solamente si es transversal con respecto a $\pi(V)$.

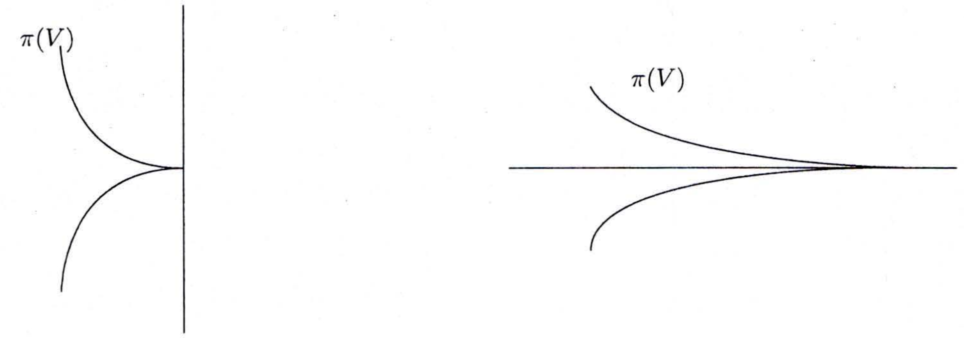

Figura 6.1: A la izquierda se muestra una inmersión transversal (no característica) y a la derecha, una inmersión que resulta característica.

Teorema 6.1.14. *La hipótesis de no característico equivale a la condición para todo $\mathcal{M}$ $\mathcal{D}_X$-módulo coherente:*

$$Df^*(Gr\mathcal{M}) \text{ es un haz coherente de } Gr\mathcal{D}_X - \text{módulos.}$$

Del teorema anterior se deduce lo siguiente:

Corolario 6.1.15. *$Df^*\mathcal{M}$ es un haz coherente de $\mathcal{D}_X$-módulos.*

Para la demostración del teorema ver [Pha13].

Definición 6.1.16. (funtor derivado de imagen inversa) Si denotamos $Mod(\mathcal{D}_X)$ la categoría abeliana de $\mathcal{D}_X$-módulos, $D(\mathcal{D}_X)$ la categoría derivada de $\mathcal{D}_X$-módulos y $D^b(\mathcal{D}_X)$ la subcategoría de $D(\mathcal{D}_X)$ que consiste de complejos acotados. Vimos que se tiene el funtor

$$\mathbf{D}f^* : Mod(\mathcal{D}_Y) \to Mod(\mathcal{D}_X) \text{ exacto a izquierda.}$$

Consideremos ahora su derivado a izquierda $\mathbf{LD}f^*$

$$\mathbf{LD}f^* : D^- (\mathcal{D}_Y) \to D^- (\mathcal{D}_X) .$$

Tal funtor manda $D^b (\mathcal{D}_Y)$ a $D^b (\mathcal{D}_X)$; finalmente, se denota $\mathbb{D}f^*$ al funtor

$$\mathbb{D}f^* : D^b (\mathcal{D}_Y) \to D^b (\mathcal{D}_X) .$$

Tal funtor se calcula de la siguiente manera. Sea $\mathcal{N} \in D^b (\mathcal{D}_X)$ y se elije una resolución playa $Flat(\mathcal{M})$ de $\mathcal{M}$. Entonces

$$\mathbb{D}f^*\mathcal{M} = \mathcal{D}_{X\to Y} \otimes_{f^{-1}\mathcal{D}_Y} f^{-1}(Flat(\mathcal{M})) = \mathcal{D}_{X\to Y} \otimes^{\mathbf{L}}_{f^{-1}\mathcal{D}_Y} f^{-1}\mathcal{M}$$

Teorema 6.1.17. *Sea $f : X \to Y$ un morfismo de variedades y sea $\mathcal{M}$ un $\mathcal{D}_Y$-módulo coherente tal que X es no característico con respecto a $\mathcal{M}$. Se tienen las siguientes propiedades*

(1) $H^k (\mathbb{D}f^*\mathcal{M}) = 0$ *para* $k \neq 0$.

(2) $H^0 (\mathbb{D}f^*\mathcal{M}) = \boldsymbol{D}f^*\mathcal{M}$ *es un* $\mathcal{D}_X$*-módulo coherente.*

(3) $Ch (\boldsymbol{D}f^*\mathcal{M}) = f_d f_\pi^{-1} Ch (\mathcal{M})$.

La demostracion del teorema no se realizará y se puede consultar en [Kas03]

Lema 6.1.18. *Sean $f : X \to Y$ y $g : Y \to Z$ morfismos de variedades y supongamos que el teorema anterior vale localmente tanto para f como g. Entonces*

- *Si $g \circ f$ es no característico para un $\mathcal{D}_Z$-módulo $\mathcal{N}$, entonces g es no característico para $\mathcal{N}$ en un entorno de $f(X)$ y f es no característico para $\boldsymbol{D}g^*\mathcal{N}$.*
- *El teorema anterior vale para $g \circ f$.*

Demostración. Se tiene el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
T^*X & X \times_Y T^*Y \arrow[l, "f_d"'] \arrow[d, "f_\pi"] & X \times_Z T^*Z \arrow[l, "\varphi"'] \arrow[d, "\phi"] \\
 & T^*Y & Y \times_Z T^*Z \arrow[l, "g_d"'] \arrow[d, "g_\pi"] \\
 & & T^*Z
\end{tikzcd}$$

Entonces se tiene que $(g \circ f)_d = f_d \circ \varphi$, $(g \circ f)_\pi = g_\pi \circ \phi$ y $\phi^{-1} T_Y^* Z \subset T_X^* Z$. Para la primer parte del lema se usa que por hipótesis

$$\phi^{-1}\left(g_\pi^{-1} Ch(\mathcal{N}) \bigcap T_Y^* Z\right) \subset (g \circ f)_\pi^{-1} Ch(\mathcal{N}) \bigcap T_X^* Z \subset X \times_Z T_Z^* Z.$$

Entonces, $g_\pi^{-1} Ch(\mathcal{N}) \bigcap T_Y^* Z \subset Y \times_Z T_Z^* Z$ (en algún entorno de $f(X)$); es decir, g resulta no característica para $\mathcal{N}$ en algún entorno de $f(X)$. Por el teorema anterior se tiene, entonces, que $Ch(\mathbf{D}g^*\mathcal{N}) = g_d g_\pi^{-1} Ch(\mathcal{N})$. Ahora, como $\varphi^{-1} T_X^* Y = \varphi^{-1}\left(f_d^{-1}(T_X^* X)\right) = (f_d \circ \varphi)^{-1}(T_X^* X) = (g \circ f)_d^{-1}(T_X^* X) = T_X^* Z$, se deduce que

$$\begin{aligned}
\left(f_\pi^{-1} g_d g_\pi^{-1} Ch(\mathcal{N})\right) \bigcap T_X^* Y &= \varphi\left(\phi^{-1} g_\pi^{-1} Ch(\mathcal{N}) \bigcap T_X^* Y\right) \\
&= \varphi\left((g \circ f)_\pi^{-1} Ch(\mathcal{N}) \bigcap T_X^* Z\right) \\
&\subset \varphi(X \times_Z T_Z^* Z) = X \times_Y T_Y^* Y.
\end{aligned}$$

Con lo que se tiene la primer parte del lema.

Para la segunda parte, notemos que $\mathbf{D}(g \circ f)^*\mathcal{N} = \mathbf{D}f^* \circ \mathbf{D}g^*\mathcal{N} = \mathbf{D}f^*\mathbf{D}g^*\mathcal{N}$, de donde se obtiene que

$$\begin{aligned}
Ch(\mathbf{D}f^*\mathbf{D}g^*\mathcal{N}) &= f_d f_\pi^{-1} Ch(\mathbf{D}g^*\mathcal{N}) \\
&= f_d f_\pi^{-1} g_d g_\pi^{-1} Ch(\mathcal{N}) \\
&= f_d \varphi \phi^{-1} g_\pi^{-1} Ch(\mathcal{N}) \\
&= (g \circ f)_d (g \circ f)_\pi^{-1} Ch(\mathcal{N}).
\end{aligned}$$

□

Teorema 6.1.19. *Sea $f : X \to Y$ un morfismo de variedades complejas y sea $\mathcal{N}$ un $\mathcal{D}_Y$-módulo. Si f no es característica para $\mathcal{N}$, entonces*

$$f^{-1} \boldsymbol{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_Y}(\mathcal{N}, \mathcal{O}_Y) \to \boldsymbol{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathbb{D}f^*\mathcal{N}, \mathcal{O}_X)$$

es un isomorfismo, donde tal morfismo viene dado a partir de

$$f^{-1} \boldsymbol{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_Y}(\mathcal{N}, \mathcal{O}_Y) \to \boldsymbol{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathbb{D}f^*\mathcal{N}, \mathbb{D}f^*\mathcal{O}_Y)$$

y $\mathbb{D}f^*\mathcal{O}_Y \cong \mathcal{O}_X$.

Antes de ver la demostración, consideremos el siguiente caso particular:

Sea Y un subconjunto abierto de $\mathbb{C}^n$, sea $X = \{z = (z^1, \ldots, z^n) \in Y : z^1 = 0\}$ y sea f el embedding estandar. Se considera $\mathcal{N} = \mathcal{D}_Y / \mathcal{D}_Y P$ con $P \in \mathcal{D}_Y^{(m)}(Y)$ con $\sigma_m(P) \neq 0$; luego, $Ch(\mathcal{N}) = \{(z; \xi) : \sigma_m(P) = 0\}$, por lo que f es no característica si y sólo si

$$\sigma_m(P)\left(0, z^2, \ldots, z^n; 1, 0, \ldots, 0\right) \neq 0,$$

lo que es equivalente a $a_{(m,0,\ldots,0)}\left(0,z^2,\ldots,z^n\right)\neq 0$; donde $P=\sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha\partial^\alpha$.

Sea u el generador de $\mathcal{D}_Y/\mathcal{D}_Y P$, entonces $Pu=0$ y

$$\mathbb{D}f^*\mathcal{N}\cong\bigoplus_{j=0}^{m-1}\mathcal{D}_X u_j \quad \left(u_j=1_{X\to Y}\otimes\partial_1^j u\right)$$

De esta manera, $R\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}\left(\mathbb{D}f^*\mathcal{N},\mathcal{O}_X\right)=\mathcal{O}_X^m$. Esto último significa que

$$H^j\left(f^{-1}\mathbf{R}\mathcal{H}om\left(\mathcal{N},\mathcal{O}_Y\right)\right)=0 \text{ para } j\neq 0 \tag{6.1}$$

$$f^{-1}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_Y}\left(\mathcal{N},\mathcal{O}_Y\right)\cong\mathcal{O}_X^m \tag{6.2}$$

. Razonando de manera análoga a como se hizo en la observación 5.1.8 se toma la sucesión exacta corta

$$0\to\mathcal{D}_Y\to\mathcal{D}_Y\to\mathcal{N}\to 0$$

y se tiene que

$$H^j\left(\mathbf{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_Y}\left(\mathcal{N},\mathcal{O}_Y\right)\right)=\mathcal{E}xt^j_{\mathcal{D}_Y}\left(\mathcal{N},\mathcal{O}_Y\right)=\begin{cases} Ker\left(\mathcal{O}_Y\xrightarrow{P}\mathcal{O}_Y\right) & (j=0)\\ Coker\left(\mathcal{O}_Y\xrightarrow{P}\mathcal{O}_Y\right) & (j=1)\\ 0 & (j\neq 0,1)\end{cases}$$

La ecuación (6.2) afirma que $Coker(P)=0$, lo que implica la suryectividad de $P:\mathcal{O}_Y\to\mathcal{O}_Y$ y (6.3) afirma $f^{-1}Ker\left(\mathcal{O}_Y\xrightarrow{P}\mathcal{O}_Y\right)\cong\mathcal{O}_X^m$. A continuación se estudiará el morfismo en cuestión.

Para cada $g\in Ker\left(\mathcal{O}_Y\xrightarrow{P}\mathcal{O}_Y\right)$ le corresponde un $\varphi\in\mathcal{H}om\left(\mathcal{N},\mathcal{O}_Y\right)$ que satisfaga $\varphi(u)=g$. Como $\varphi:\mathcal{N}\to\mathcal{O}_Y$ entonces se tiene que

$$\mathbf{D}f^*\varphi:\mathcal{O}_Y\otimes_{f^{-1}\mathcal{O}_Y}f^{-1}\mathcal{N}\to\mathcal{O}_X\otimes_{f^{-1}\mathcal{O}_Y}f^{-1}\mathcal{O}_Y.$$

Tal morfismo actúa en u_j de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}\left(\mathbf{D}f^*\varphi\right)(u_j)&=\left(\mathbf{D}f^*\varphi\right)\left(1_{X\to Y}\otimes\partial_1^j u\right)\\ &=1_{X\to Y}\otimes f^*\varphi\left(\partial_1^j u\right)\\ &=f^*\varphi\left(\partial_1^j u\right)\\ &=f^*\partial_1^j\left(\varphi(u)\right)\\ &=\partial_1^j g|_X\end{aligned}$$

Por lo tanto se puede ver que el morfismo $f^{-1}Ker\left(\mathcal{O}_Y\xrightarrow{P}\mathcal{O}_Y\right)$ asigna cada g con $Pg=0$ a $\left(g|_X,\ldots,\partial_1^{m-1}g|_X\right)\in\mathcal{O}_X^m$.

El hecho de que tal morfismo sea un isomorfismo afirma que para funciones $(v_j)_{j=0}^{m-1} \in \mathcal{O}_X^m$ se puede resolver de manera única el siguiente sistema

$$\begin{cases} Pg = 0 \\ \partial_1^j g|_X = v_j \quad (0 \leq j < m) \end{cases}$$

Lo cual se conoce como el teorema de Cauchy-Kovalevskaya

Teorema 6.1.20. *Sea $\mathcal{M}$ un $\mathcal{D}_X$-módulo coherente. Sea Y una subvariedad no característica para $\mathcal{M}$. Entonces, $\mathcal{M}_Y = \mathcal{O}_Y \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{M} = \mathcal{D}_{Y \to X} \otimes_{\mathcal{D}_X} \mathcal{M}$ es un $\mathcal{D}_Y$-módulo coherente y*

$$\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_Y}(\mathcal{M}, \mathcal{O}_X)|_Y \to \mathcal{H}om_{\mathcal{D}_Y}(\mathcal{M}_Y, \mathcal{O}_Y)$$

es un isomorfismo

Teorema 6.1.21. *(Cauchy-Kovalevskaya-Kashiwara) Sea Y una subvariedad de X de codimensión 1. Sea P un operador de orden m. Si Y no es característica para P; tomando $\mathcal{M} = \mathcal{D}_X/\mathcal{D}_X P$ se puede aplicar el teorema 6.1.20 para $\mathcal{M}$. Más aún, $\mathcal{M}$ resulta localmente libre como $\mathcal{O}_X$-módulo y, localmente $\mathcal{M}_Y \cong \mathcal{D}_Y^m$.*

Demostración. Si $\mathcal{M} = \mathcal{D}_X/\mathcal{D}_X P$ con $P \in \mathcal{D}_X$. Como se vio en capítulos anteriores:

$$Ch(\mathcal{M}) = \{x^* \in T^*X : \sigma_m(P)(x^*) = 0\}$$

donde $\sigma_m(P)$ denota el símbolo principal del operador P. Como Y es una hipersuperficie de X de codimensión 1, para que Y sea no característica con respecto a $\mathcal{M}$ es necesario y suficiente que Y sea no característica con respecto a P. Más aún, si P es un operador de grado m, tomando un sistema de coordenadas $(U, z = (z^1, \ldots, z^n))$ donde $Y = \{z : z^1 = 0\}$ podemos asumir que

$$P = \partial_{z^1}^m + P_1(z, \partial_{z'})\,\partial_{z^1}^{m-1} + \ldots + P_m(z, \partial_{z'})$$

donde $z' = (z^2, \ldots, z^n)$, $\partial_{z'} = (\partial_{z^2}, \ldots, \partial_{z^n})$ y $P_i(z, \partial_{z'})$ es un operador de grado i que no depende de ∂_{z^1}. Tenemos que

$$P\partial_{z^1}^i = \partial_{z^1}^{m+i} + P_1(z, \partial_{z'})\,\partial_{z^1}^{m+i-1} + \ldots + P_m(z, \partial_{z'})\,\partial_{z^1}^i$$

Por lo tanto, $\mathcal{M}$ está generado (como $\mathcal{O}_X$-módulo por $\partial_z^\alpha = \partial_{z^1}^{\alpha_1} \ldots \partial_{z^n}^{\alpha_n} (\alpha_1 < m)$. Más precisamente:

$$\mathcal{M} = \bigoplus_{\alpha_1 < m} \mathcal{O}_X \partial_z^\alpha$$

De hecho, si

$$\sum_{\alpha_1 < m} f_\alpha(z)\partial_z^\alpha = 0 \text{ en } \mathcal{M}$$

entonces

$$\sum_{\alpha_1<m} f_\alpha(z)\partial_z^\alpha = Q(z,\partial_z)P(z,\partial_z) \quad \text{en } \mathcal{D}_X.$$

Comparando los términos de mismo grado para ∂_{z^1} sale que $Q = 0$. Por lo tanto, $f_\alpha = 0$. Entonces,

$$\mathcal{M}_Y = \mathcal{O}_Y \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{M} = \bigoplus_{\alpha_1<m} \mathcal{O}_Y\partial_z^\alpha = \bigoplus_{\alpha_1<m} \mathcal{D}_Y\partial_{z^1}^{\alpha_1}$$

y así obtenemos la función

$$\begin{aligned} \mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M},\mathcal{O}_X)|_Y &\to \mathcal{H}om_{\mathcal{D}_Y}(\mathcal{M}_Y,\mathcal{O}_Y) = \mathcal{O}_Y^m \\ u &\mapsto \left(u|_Y, \partial_{z^1}u|_Y, \ldots, \partial_{z^1}^{m-1}u|_Y\right) \end{aligned}$$

donde $u \in \mathcal{O}_X|_Y$ es tal que $Pu = 0$. Gracias al teorema clásico de Cauchy-Kovalevskaya, resulta claramente un isomorfismo. □

Demostración. (de 6.1.19) La demostración del teorema en cuestión se divide en casos y el primero es considerar X como un hiperplano de Y con el correspondiente embedding de X en Y como morfismo f. La hipótesis del teorema dice que $\mathcal{N}$ es un $\mathcal{D}_Y$-módulo coherente, por lo que localmente se puede expresar como $\sum_j \mathcal{D}_Y u_j$. Se define $\overset{\circ}{T_X^*}Y = T_X^*Y \bigcap \overset{\circ}{T^*}Y$. Sin pérdida de generalidad se puede asumir que Y es un subconjunto abierto de $\mathbb{C} \times \mathbb{C}^n$ y que $X = \{(t,x) \in Y : t = 0\}$. Como vimos previamente en el capítulo, se tienen los morfismos

$$T^*Y \overset{f_\pi}{\leftarrow} X \times_Y T^*Y \overset{f_d}{\to} T^*X$$

Resulta sencillo notar que el morfismo $f_\pi : X \times_Y T^*Y \hookrightarrow T^*Y$ es un embedding; por lo que $f_\pi^{-1}(Ch(\mathcal{D}_Y u_j)) = Ch(\mathcal{D}_Y u_j) \bigcap X \times_Y T^*Y$. Por la definición de no característico, sabemos entonces que

$$T_X^*Y \bigcap Ch(\mathcal{D}_Y u_j) \bigcap X \times_Y T^*Y \subset X \times_Y T_Y^*Y.$$

De la última contención se deduce que $Ch(\mathcal{D}_Y u_j) \bigcap \overset{\circ}{T_X^*}Y = \emptyset$; por lo tanto, existe $P_j \in \mathcal{D}_Y$ de manera tal que $\sigma(P_j)^{-1}(0) \cap \overset{\circ}{T_X^*}Y = \emptyset$ y $P_j u_j = 0$.

Definiendo $\mathcal{F}_0 = \bigoplus_j \mathcal{D}_Y/\mathcal{D}_Y P_j$ se tiene la sucesión exacta corta

$$0 \to \mathcal{N}' \to \mathcal{F}_0 \to \mathcal{N} \to 0.$$

Dado que $Ch(\mathcal{N}') \subset Ch(\mathcal{F}_0)$ f es no característica para $\mathcal{N}'$. De manera inductiva se puede construir un complejo

$$\ldots \to \mathcal{F}_1 \to \mathcal{F}_0 \to \mathcal{N} \to 0,$$

donde cada $\mathcal{F}_k$ es de la forma $\bigoplus_j \mathcal{D}_Y/\mathcal{D}_Y P_{kj}$ con $\sigma(P_{kj})^{-1}(0) \cap \overset{\circ}{T_X^*}Y = \emptyset$. Por definición, resulta que $\mathbf{D}f^*\mathcal{F}_\bullet \cong \mathbb{D}f^*\mathcal{N}$.

Por Cauchy-Kovalevskaya versión clásica que se expuso anteriormente, se tiene que

$$f^{-1}\mathbf{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_Y}(\mathcal{F}_k, \mathcal{O}_Y) \cong \mathbf{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathbf{D}f^*\mathcal{F}_k, \mathcal{O}_X).$$

El resultado final se obtiene ya que $\mathcal{N}$ y $\mathcal{F}_\bullet$ son isomorfos en $D^-(\mathcal{D}_Y)$ y $\mathbf{D}f^*\mathcal{F}_\bullet$ y $\mathbb{D}f^*\mathcal{N}$ en $D^-(\mathcal{D}_X)$.

Para el segundo paso, se asume que f es un embedding y factorizamos a f por medio de

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, hook, "f''"] \arrow[rr, bend right, "f"'] & X' \arrow[r, hook, "f'"] & Y \end{tikzcd}$$

donde X' es un hiperplano de Y. Por el lema 6.1.18 se tiene que

$$\begin{aligned} f^{-1}\mathbf{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_Y}(\mathcal{N}, \mathcal{O}_Y) &\cong (f')^{-1}(f'')^{-1}\mathbf{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_Y}(\mathcal{N}, \mathcal{O}_Y) \\ &\cong (f')^{-1}\mathbf{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_{X'}}(\mathbb{D}(f'')^*\mathcal{N}, \mathcal{O}_{X'}) \\ &\cong \mathbf{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathbb{D}(f')^*\mathbb{D}(f'')^*\mathcal{N}, \mathcal{O}_X) \\ &\cong \mathbf{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathbb{D}f^*\mathcal{N}, \mathcal{O}_X). \end{aligned}$$

Se ve, ahora, el caso en el que f es un morfismo suave. Sea $\Omega^1_{X/Y}$ el haz de 1-formas relativo a f. Es decir

- $\Omega^1_{X/Y} = Coker(f^*\Omega^1_Y \to \Omega^1_X)$
- $\Omega^p_{X/Y} = \bigwedge^p \Omega^1_{X/Y}$

Se tiene, entonces, el complejo de De Rham relativo

$$\Omega^0_{X/Y} \to \Omega^1_{X/Y} \to \ldots \to \Omega^n_{X/Y} \to 0$$

donde n es la dimensión de las fibras de f. Tal complejo induce

$$\Omega^0_{X/Y} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{D}_X \to \ldots \to \Omega^n_{X/Y} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{D}_X$$

Aplicando el funtor $\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\bullet, \mathcal{D}_X)$ se tiene

$$\mathcal{D}_X \leftarrow \mathcal{D}_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \Theta_{X/Y} \leftarrow \ldots \leftarrow \mathcal{D}_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \bigwedge^n \Theta_{X/Y}$$

donde $\Theta_{X/Y} = \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}\left(\Omega^1_{X/Y}, \mathcal{O}_X\right)$.

Proposición 6.1.22. *Sea $f : X \to Y$ un morfismo suave con fibras de dimensión n, entonces*

$$0 \leftarrow \mathcal{D}_{X\to Y} \leftarrow \mathcal{D}_X \leftarrow \ldots \leftarrow \mathcal{D}_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \bigwedge^n \Theta_{X/Y} \leftarrow 0$$

es exacta.

Para la demostración consultar [HT07].

Lema 6.1.23. *$f^{-1}\mathcal{O}_Y \cong \boldsymbol{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{D}_{X\to Y}, \mathcal{O}_X)$ en $D^b(f^{-1}\mathcal{D}_Y)$.*

Demostración. Por la proposición anterior se tiene que $\mathbf{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{D}_{X\to Y}, \mathcal{O}_X)$ puede ser representado por el complejo $\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}\left(\mathcal{D}_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \bigwedge^{\bullet} \Theta_{X/Y}, \mathcal{O}_X\right) \cong \Omega^{\bullet}_{X/Y}$. Tomando cohomología en el complejo de De Rham relativo se tiene que

$$\mathcal{H}^j\left(\Omega^{\bullet}_{X/Y}\right) = \begin{cases} f^{-1}\mathcal{O}_Y & (j=0) \\ 0 \quad (j \neq 0) \end{cases}$$

□

Con el lema se puede ver que si f es un morfismo suave, entonces

$$\begin{aligned} \mathbf{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathbb{D}f^*\mathcal{N}, \mathcal{O}_X) &= \mathbf{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}\left(\mathcal{D}_{X\to Y} \otimes^{\mathbf{L}}_{f^{-1}\mathcal{D}_Y} f^{-1}\mathcal{N}, \mathcal{O}_X\right) \\ &\cong \mathbf{R}\mathcal{H}om_{f^{-1}\mathcal{D}_Y}\left(f^{-1}\mathcal{N}, \mathbf{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{D}_{X\to Y}, \mathcal{O}_X)\right) \\ &\cong \mathbf{R}\mathcal{H}om_{f^{-1}\mathcal{D}_Y}\left(f^{-1}\mathcal{N}, f^{-1}\mathcal{O}_Y\right) \\ &\cong f^{-1}\mathbf{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_Y}(\mathcal{N}, \mathcal{O}_Y). \end{aligned}$$

Para el último paso, se toma $f = p \circ j$, donde $j : X \to Z = X \times Y$ es el morfismo que manda $x \mapsto (x, f(x))$ y $p : Z \to Y$ es el morfismo proyección. Por los pasos previos, se tiene que

$$\begin{aligned} \mathbf{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathbb{D}f^*\mathcal{N}, \mathcal{O}_X) &\cong \mathbf{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathbb{D}j^*\mathbb{D}p^*\mathcal{N}, \mathcal{O}_X) \\ &\cong j^{-1}\mathbf{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_Z}(\mathbb{D}p^*\mathcal{N}, \mathcal{O}_Z) \\ &\cong j^{-1}p^{-1}\mathbf{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_Y}(\mathcal{N}, \mathcal{O}_Y). \end{aligned}$$

□

Capítulo 7

Complejos de solución holónomos

7.1 Haces constructibles

En líneas generales, un haz constructible es un haz que puede ser armado a partir de sistemas locales, a continuación se desarrollará con precisión tal noción.

Definición 7.1.1. Sea X una variedad compleja. Una estratificación de X es una descomposición de X como unión disjunta

$$X = \bigsqcup_{\alpha} X_\alpha$$

donde $X_\alpha \neq \emptyset$ son subconjuntos conexos (estratos) tal que $\partial X_\alpha = \bigsqcup_\beta X_\beta$ (con $\{X_\beta\}$ algunos de los estratos) $\{X_\alpha\}$; $\overline{X_\alpha}$ y ∂X_α son variedades complejas.

Definición 7.1.2. Un $\mathbb{C}_X$-módulo $\mathcal{M}$ se dice constructible si existe una estratificación $X = \bigsqcup X_\alpha$ tal que la restricción $\mathcal{M}|_{X_\alpha}$ es un sistema local. El concepto de haz constructible se extiende al de categorías derivadas en $D^b(\mathbb{C}_X)$; un objeto $\mathcal{M}^\bullet$ de $D^b(\mathbb{C}_X)$ se dice constructible si sus haces de cohomología son constructibles. Tal categoría se denota $D^b_c(\mathbb{C}_X)$.

Observación 7.1.3. El funtor natural $D^b(Const(\mathbb{C}_X)) \hookrightarrow D^b_c(\mathbb{C}_X)$ no es una equivalencia de categorías.

Definición 7.1.4. **(Condición de Whitney)** Dado X una variedad compleja, una *estratificación de Whitney* es una estratificación por subvariedades de manera tal que, dados dos estratos Y, Y' y sucesiones $(y_i)_{i\in\mathbb{N}} \in Y$, $(y'_k)_{k\in\mathbb{N}} \in Y'$.

- Si $y_i \to y' \in Y'$ y los espacios tangentes $T_{y_i}Y$ convergen a ψ, entonces $\psi \subset T_{y'}Y'$
- $\lim (y_i - y'_i)/||y_i - y'_i|| = \delta$ existe en $T_{y'}Y'$

Se sigue que $\delta \in \psi$

Es bien sabido (aunque no se demostrará aquí) que la condición de Whitney es intrínseca; es decir, no depende del sistema de coordenadas empleado. En líneas generales, la condición de Whitney lo que asegura es que si δ es el límite de secantes formadas por una sucesión dada a partir de pares (y_i, y_i') en estratos Y, Y' entonces $\delta \in \psi$(donde ψ representa el límite de espacios tangentes como fue definido antes). En otras palabras, si una estratificación cumple la condición de Whitney significa que el espacio tangente T_yY está contenido en cada límite de espacios tangentes cercanos del estrato Y'. Mirando en los fibrados cotangentes, esto da la inclusión

$$\pi^{-1}(Y) \cap \overline{T^*_{Y'}(X)} \subset T^*_Y(X).$$

Sea X una variedad compleja. La categoría derivada de haces construibles se denota $D^b_c(\mathbb{C}_X)$. Sea $\mathcal{F}$ un objeto de $D^b_c(\mathbb{C}_X)$, se dice que una estratificación de Whitney $\{X_\alpha\}$ es $\mathcal{F}$-regular si la restricción de cada haz de cohomología de $\mathcal{F}$ a cada estrato es cero o un sistema local. Cada complejo de haces $\mathbb{C}$-construíble tiene alguna estratificación de Whitney regular.

7.2 $Sol_X(\mathcal{M})$ es constructible

Si $\mathcal{M}$ es un objeto de $D^b_{hol}(\mathcal{D}_X)$ entonces el funtor de solución Sol_X aplicado a $\mathcal{M}$ está en $D^b(\mathbb{C}_X)$. El objetivo de la sección es ver que $Sol_X(\mathcal{M}) \in D^b_c(\mathbb{C}_X)$.

Para verlo, primero deberemos establecer algunos resultados acerca de la prolongación de soluciones bajo deformaciones no características.

Notación. Si X es una variedad compleja, denotamos X_R la variedad real subyacente. la estructura compleja de X da la descomposición de cada 1-forma en X_R en formas del tipo $(1,0)$ y $(0,1)$. Si $\varphi : X \to \mathbb{C}$ se descompone $d\varphi$ en $\partial\varphi + \overline{\partial}\varphi$; por lo tanto, $(x, \partial\varphi(x)) \in T^*X$.

Ejemplo 7.2.1. Sea $X = \mathbb{C}^n$ y $\varphi(x) = |x_1|^2 + \ldots + |x_n|^2$, por lo tanto, $d\varphi = \sum \overline{x_k}_k dx_k + \sum x_k d\overline{x_k}$. Es decir, $\partial\varphi(x) = \sum \overline{x_k} dx_k$. Si (x, ξ) son las coordenadas canónicas en T^*X se tiene que $(x\partial\varphi(x)) = (x, \xi)$, con $\xi = \overline{x_k}$ para cada k.

Definición 7.2.2. Sea $\Omega = \{x \in X : \varphi(x) < 0\}$ un dominio C^1 donde $\varphi : X \to \mathbb{R}$ es diferenciable y $d\varphi(x) \neq 0$ para cada $x \in \partial\Omega$. Asumiendo que $\Omega \Subset X$ de manera tal que $\partial\Omega$ sea una hipersuperficie compacta real de tipo C^1. Se define

$$N^*_\Omega(X) = \{(x, \partial\varphi(x)) : x \in \partial\Omega\} \subset T^*X$$

Definición 7.2.3. Se dice que un dominio Ω relativamente compacto de tipo C^1 tiene frontera no característica con respecto a un $\mathcal{M} \in D^b_{coh}(\mathcal{D}_X)$ si $SS(\mathcal{M}) \bigcap N^*_\Omega X = \emptyset$.

Proposición 7.2.4. *Si Ω tiene frontera no característica con respecto a $\mathcal{M} \in D^b_{coh}(\mathcal{D}_X)$. Entonces $\boldsymbol{R}\Gamma_{X-\Omega} \circ Sol_X(\mathcal{M})|_{\partial\Omega} = 0$.*

Demostración. Si $K = X - \Omega$ veamos que $\mathbf{R}\Gamma_K \circ Sol_X(\mathcal{M}) = \mathbf{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathbf{R}\Gamma_K(\mathcal{O}_X))$. Sea $i(\mathcal{M})$ una resolución inyectiva de $\mathcal{M}$ y usando que $\Gamma_K(i(\mathcal{M}))$ es un complejo de módulos inyectivos.

$$\begin{aligned}\mathbf{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathbf{R}\Gamma_K \mathcal{O}_X) &= \mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \Gamma_K(i(\mathcal{O}_X))) \\ &= \Gamma_K(\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, i(\mathcal{O}_X))) \\ &= \mathbf{R}\Gamma_K \circ \mathbf{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{O}_X)\end{aligned}$$

Haciendo inducción sobre la cantidad de módulos de cohomología no nulos de $\mathcal{M}$ se puede reducir la demostración de la proposición al caso en el que $\mathcal{M}$ es un complejo de un único grado. Por el resultado que se mostró recién se puede ver que la sucesión espectral

$$E_2^{p,q} = \mathcal{E}xt^p_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{H}^q_K(\mathcal{O}_X))$$

converge a $\mathbf{R}\Gamma_K(Sol_X(\mathcal{M}))$. Si se puede mostrar que $E_2^{p,q}|_{\partial\Omega} = 0$ para cada p, q se tiene el resultado deseado.

Sea $x_0 \in \partial\Omega$ y se considera la familia $\mathcal{A}$ de gérmenes de $\mathcal{D}_X$-módulos coherentes en x_0 cuya variedad característica no contiene a $(x_0, \partial\varphi(x_0))$. Se mostrará que

$$Ext^p_{\mathcal{D}_{X,x_0}}(\mathcal{M}_{x_0}, \mathcal{H}^q_K(\mathcal{O}_{X,x_0})) = 0$$

para cada p, q y $\mathcal{M} \in \mathcal{A}$. Cada $P \in \mathcal{D}_{X,x_0}$ cuyo símbolo principal no es cero en $(x_0, \partial\varphi(x_0))$ cumple que $\mathcal{D}_X/\mathcal{D}_X P \in \mathcal{A}$. Ya que $\mathcal{M}$ es coherente, se puede notar localmente como suma finita de módulos de la forma $\mathcal{D}_X/\mathcal{D}_X P$ donde cada uno de los sumandos cumple que su símbolo principal en $(x_0, \partial\varphi(x_0))$ es distinto de cero por hipótesis de frontera no característica. Es decir que, entonces, la demostración se reduce al caso $\mathcal{M} = \mathcal{D}_X/\mathcal{D}_X P$.

El módulo $\mathcal{D}_X/\mathcal{D}_X P$ tiene una resolución libre de longitud uno, por lo que para ver que sus grupos Ext^p son nulos alcanza con ver $p = 0, 1$. Tales casos, como se vio en capítulos anteriores, corresponde a ver que el conúcleo y núcleo definidos por P son nulos en $\mathcal{H}^q_K(\mathcal{O}_X)_{x_0}$ para cada $q \geq 0$. Dado que $\sigma(P)(x_0, \partial\varphi(x_0)) \neq 0$ se tiene que $P : \mathcal{H}^q_K(\mathcal{O}_X)_{x_0} \to \mathcal{H}^q_K(\mathcal{O}_X)_{x_0}$ es biyectivo. □

Observación 7.2.5. Para la verificación de la última afirmación del teorema se utilizan herramientas de análisis microlocal, que no serán discutidas en el trabajo, para referencias consultar [Kas03].

Definición 7.2.6. Sea $\{\Omega_t\}$ una familia de dominios relativamente compactos de tipo C^1. Se dice que satisfacen la condición de Mittag-Leffler si se cumple lo siguiente para la familia $\{\Omega_t : 0 \leq t \leq 1\}$

$$\Omega_t = \bigcup_{s<t} \Omega_s \quad ; \quad \overline{\Omega_t} = \bigcap_{s>t} \Omega_s.$$

El siguiente resultado da una prolongación del complejo de soluciones de un complejo coherente bajo la hipótesis de no característico.

Teorema 7.2.7. *Sea una familia $\{\Omega_t\}$ como antes que satisface la condición de Mittag-Leffler. Para cada $\mathcal{M}$ en $D^b_{coh}(\mathcal{D}_X)$ donde $\partial\Omega_t$ son no características para $\mathcal{M}$ cuando $0 < t < 1$, entonces el morfismo de restricción*

$$\boldsymbol{R}\Gamma(\Omega_1, Sol_X(\mathcal{M})) \to \boldsymbol{R}\Gamma(\Omega_t, Sol_X(\mathcal{M}))$$

es un isomorfismo para cada $0 < t < 1$.

Para la demostración del teorema, ver [Bjö13]

En lo que sigue se trabajará localmente y se asumirá que $X = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{C}^n : |x_i| \leq r\}$ para algún $r \geq 0$. Se ve claramente que si se denota B_ε a la bola de radio $\varepsilon > 0$ centrada en el origen, entonces la familia $\Omega_t = B_{t\varepsilon_0}$ con $0 < t \leq 1$ satisface la condición de Mittag-Leffler para cada $\varepsilon_0 > 0$.

Proposición 7.2.8. *Sea $\mathcal{M}$ un $\mathcal{D}_X$-módulo coherente tal que existe algún ε_0 tal que ∂B_ε es no característico para $\mathcal{M}$ con $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$. Entonces, el stalk en el origen del haz $\mathcal{E}xt^p_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{O}_X)$ es un espacio vectorial de dimensión finita para cada $p \geq 0$.*

Antes de ver la demostración vamos a recordar un resultado de análisis funcional. Definimos un complejo de espacios de Frechet acotado como un complejo

$$0 \to F_0 \xrightarrow{d_0} F_1 \xrightarrow{d_1} \ldots \xrightarrow{d_{m-1}} F_m \to 0$$

donde F_i son espacios de Frechet y los d_i son operadores lineales continuos.

Consideremos dos complejos acotados $V^\bullet$ y $W^\bullet$ y supongamos que existen morfismos $T^i : V^i \to W^i$ que son operadores compactos de manera tal que el diagrama

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & V_0 \arrow[r, "d_0"] \arrow[d, "T^0"] & V_1 \arrow[r, "d_1"] \arrow[d, "T^1"] & \ldots \arrow[r, "d_{m-1}"] & V_m \arrow[r] \arrow[d, "T^m"] & 0 \\
0 \arrow[r] & W_0 \arrow[r, "d'_0"] & W_1 \arrow[r, "d'_1"] & \ldots \arrow[r, "d'_{m-1}"] & W_m \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

conmuta. Si los morfismos inducidos en sus respectivas homologías son isomorfismos (es decir, el conjunto de morfismos T^k es cuasi-isomorfismo) entonces los grupos de cohomología son espacios vectoriales de dimensión finita.

Demostración. Asumiendo que $\mathcal{M}$ es un $\mathcal{D}_X$-módulo coherente se puede achicar ε_0 de manera tal que $\mathcal{M}$ tenga una resolución libre acotada sobre $\mathcal{D}_X$ cuyos diferenciales están dados a partir de matrices con coeficientes sobre $\mathcal{D}_X(B_{\varepsilon_0})$. Entonces, se tiene que $Sol_X(\mathcal{M})$ está representado por

$$0 \to \mathcal{O}_X^{s_0} \to \ldots \to \mathcal{O}_X^{s_m} \to 0.$$

El morfismo de restricción $j : \mathcal{O}_X(B_{\varepsilon_0}) \to \mathcal{O}_X(B_\varepsilon)$ resulta un operador lineal compacto entre los dos espacios. Por el teorema 7.2.7 y las hipótesis de la proposición, resulta que el morfismo inducido $\mathcal{O}_X(B_{\varepsilon_0})^\bullet \to \mathcal{O}_X(B_\varepsilon)^\bullet$ es un cuasi-isomorfismo para cada $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ y, por lo tanto, por el resultado de análisis funcional previamente mencionado, sus respectivas homologías son espacios vectoriales de dimensión finita; es decir, el stalk en el origen de $\mathcal{E}xt^p_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{O}_X)$ es un espacio vectorial de dimensión finita para todo $p \geq 0$. □

Teorema 7.2.9. *Sea $\mathcal{M} \in D^b_{hol}(\mathcal{D}_X)$. Entonces $Sol_X(\mathcal{M})$ es un complejo de haces construíble y toda estratificación de Whitney $\{X_\alpha\}$ tal que $Ch(\mathcal{M}) \subset \cup T^*_{X_\alpha}(X)$ es una estratificación regular con respecto a $Sol_X(\mathcal{M})$.*

Demostración. Para empezar se puede ver que, para cada triangulo exacto en $D^b_c(\mathbb{C}_X)$ si dos de sus vértices son construibles, entonces el tercero también lo es. Por tal razón, se puede considerar sin pérdida de generalidad el caso en el que $\mathcal{M}$ es un complejo de un sólo grado. Se considera una estratificación de Whitney $\{X_\alpha\}$ tal que $Ch(\mathcal{M}) \subset \cup T^*_{X_\alpha}X$. Para empezar, hay que ver que los haces $\mathcal{E}xt^p_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{O}_X)|_{X_\alpha}$ son localmente constates para cada p, α.

Se toma X_α uno de los estratos y $x_0 \in X_\alpha$; tomando coordenadas locales consideramos la familia $\Omega_t(x) = \{y \in B_{\varepsilon_0} : |ty - (1-t)x| < \varepsilon_0 t\}$.

Existe un $\varepsilon_0 > 0$ de manera tal que

$$N^*_{\partial\Omega^*_t(x)}(X) \cap \cup T_{X_\alpha}X^* = \emptyset; x \in X_\alpha \cap B_{\varepsilon_0} \text{ para cada } 0 < t < 1.$$

Dado que $\Omega_1(x) = B_{\varepsilon_0}$ para cualquier $x \in X_\alpha \cap B_{\varepsilon_0}$ de la inclusión $Ch(\mathcal{M}) \subset \cup T_{X_\alpha}X^*$ y el teorema 7.2.7 se deduce que los morfismos

$$\mathbf{R}\Gamma(B_{\varepsilon_0}, Sol_X(\mathcal{M})) \to \mathbf{R}\Gamma(\Omega_t(x), Sol_X(\mathcal{M}))$$

son isomorfismos para cada $x \in X_\alpha \cap B_{\varepsilon_0}$ y cada $t > 0$. Tomando t arbitrariamente chico, se tiene que los haces restringidos $\mathcal{E}xt^p_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{O}_X)|X_\alpha \cap B_{\varepsilon_0}$ son constantes para cada p.

Para finalizar el teorema falta ver que los haces $\mathcal{E}xt^p_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{O}_X)$ tienen stalks de dimensión finita. Sea $x_0 \in X$ y se toma un sistema de coordenadas locales centrado en x_0; el teorema de Bertini-Sard se aplica a $Ch(\mathcal{M})$ y la función $\varphi(x) = |x - x_0|^2$. Ésto último muestra que el gérmen del $\mathcal{D}_X$-módulo coherente $\mathcal{M}$ satisface las hipótesis de la proposición 7.2.8, con lo que se tiene el resultado. □

Para terminar el trabajo se mencionará la correspondendecia de Riemann-Hilbert. Como vimos anteriormente, tenemos dos categorías $D^b_{rh}(\mathcal{D}_X)$ y $D^b_c(\mathbb{C}_X)$ para una variedad compleja X y un funtor

$$DR_X : D^b_{rh}(\mathcal{D}_X) \to D^b_c(\mathbb{C}_X).$$

Teorema 7.2.10. *Sea X una variedad compleja. Entonces se tiene una equivalencia de categorías*

$$D^b_{rh} \xrightarrow{\sim} D^b_c(\mathbb{C}_X)$$

dado por el funtor de De Rham.

Consideremos ahora el problema número 21 de Hilbert que fue expuesto en el Capítulo 3. Sea P un operador diferencial y sea $X = \mathbb{C} - S$ con S un conjunto finito y supongamos que P es regular en cada $s \in S$; es decir que $P \in Mod_{rh}(\mathcal{D}_X)$. Entonces, se puede construir una representación de $\pi_1(X, x)$ (monodromía) por un procedimiento análogo presentado en el Capítulo 3. Concretamente, el problema número 21 de Hilbert pregunta si se puede ir en el sentido inverso del que se acaba de hacer; por el teorema formulado recién se puede responder afirmativamente la pregunta y, más aún, se puede generalizar tal situación a n variables en dimensión n.

93318

Bibliografía

[BGKH88] A. Borel, P-P Grivel, B. Kaup, and A. Haefliger, *Algebraic d-modules.* (1988).

[Bjö13] J.-E. Björk, *Analytic d-modules and applications*, Vol. 247, Springer Science & Business Media, 2013.

[Gab81] O. Gabber, *The integrability of the characteristic variety*, American Journal of Mathematics **103** (1981), no. 3, 445–468.

[Har77] R. Hartshorne, *Algebraic geometry*, Vol. 52, Springer Science & Business Media, 1977.

[HT07] R. Hotta and T. Tanisaki, *D-modules, perverse sheaves, and representation theory*, Vol. 236, Springer Science & Business Media, 2007.

[Kas03] M. Kashiwara, *D-modules and microlocal calculus*, Vol. 217, American Mathematical Soc., 2003.

[KS13] M. Kashiwara and P. Schapira, *Sheaves on manifolds: With a short history.«les débuts de la théorie des faisceaux». by christian houzel*, Vol. 292, Springer Science & Business Media, 2013.

[Pha13] F. Pham, *Singularités des systemes différentiels de gauss-manin*, Vol. 2, Springer Science & Business Media, 2013.

[Voi02] C. Voisin, *Hodge theory and complex algebraic geometry. i, volume 76 of cambridge studies in advanced mathematics*, Cambridge University Press, Cambridge, 2002.