

TFL MAT  
000973



UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES  
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales  
Departamento de Matemática

Tesis de Licenciatura

# El tipo homotópico de los posets de $p$ -subgrupos

Kevin Iván Piterman

Director: Gabriel Minian

Fecha de Presentación: Junio de 2016

93311

11679

11679

# Agradecimientos

A Gabriel, por todo su apoyo y dedicación. Por todos sus consejos y correcciones. Aprendí muchísimo junto a él y espero aprender mucho más. ¡Muchas gracias Gabriel!

A Jonathan y Leandro, por leer este trabajo en tan poco tiempo.

A mis viejos, quienes me brindan toda su ayuda y apoyo para que pueda estudiar en esta facultad.

A Vanesa, mi hermana y amiga de toda la vida.

A mis compañeros de la facu, que me ayudaron con muchísimos ejercicios y me hicieron ver las cosas desde otro punto de vista.

A mis amigos de Mendoza, por mostrarme otras formas de vida.

A mis hermosas sobrinas del alma Freya y Frida, por estar.

Al profe Lucas, por iniciarme en el hermoso deporte de la natación y por todos sus consejos.

A los chicos del club, por esos pequeños momentos y sufrimientos compartidos. Por su apoyo todos estos años.

A la UBA y a todos aquellos que hacen posible que pueda estudiar en esta gran facultad.

# Contenidos

Introducción	7
Lista de símbolos	11
<b>1 Preliminares</b>	<b>15</b>
1.1 Teoría básica de grupos finitos	15
1.2 Espacios topológicos finitos	23
1.3 $G$ -posets y tipos homotópicos equivariantes	35
<b>2 Los posets de <math>p</math>-subgrupos de un grupo</b>	<b>39</b>
2.1 La conjetura de Quillen	40
2.2 La relación entre $\mathcal{S}_p(G_1 \times G_2)$ y $\mathcal{S}_p(G_1) * \mathcal{S}_p(G_2)$	54
2.3 Conexión y simple conexión de $\mathcal{S}_p(G)$	59
2.4 Otros posets de $p$ -subgrupos	63
2.5 Característica de Euler y posets de puntos fijos	74
2.6 Espacios de órbitas y una conjetura de P. Webb	76
<b>3 Tipo homotópico del poset <math>\mathcal{A}_p(G)</math></b>	<b>83</b>
3.1 Contractibilidad en pasos	83
3.2 Casos para los que $\mathcal{A}_p(G) \simeq \mathcal{S}_p(G)$	90
3.3 El subgrupo de Fitting y una equivalencia para la contractibilidad de $\mathcal{S}_p(G)$	93
3.4 Una reducción para el poset $\mathcal{A}_p(G)$	95
3.5 El grupo diedral $D_n$	97
3.6 Grupos de orden $p^\alpha q$	100
3.7 Algunos contraejemplos	104
Bibliografía	109

# Introducción

En el artículo [15] del año 1975, Kenneth Brown hace referencia por primera vez al poset de  $p$ -subgrupos no triviales de un grupo  $G$ , que denotamos  $\mathcal{S}_p(G)$ . Al complejo asociado al poset  $\mathcal{S}_p(G)$  se lo denomina a menudo “complejo de Brown” y lo denotamos  $\mathcal{K}(\mathcal{S}_p(G))$ . Recordemos que en general, a todo poset  $X$  podemos asignarle el complejo simplicial  $\mathcal{K}(X)$  cuyos simplices son las cadenas finitas no vacías de  $X$ . De esta manera, pasando a la realización geométrica del complejo  $\mathcal{K}(X)$ , tiene sentido hablar de grupos de homotopía y de homología del poset  $X$ . En [15], Brown demuestra entre otras cosas que la característica de Euler de  $\mathcal{K}(\mathcal{S}_p(G))$  es congruente a 1 módulo  $|G|_p$ , es decir,  $\chi(|\mathcal{K}(\mathcal{S}_p(G))|) \equiv 1 \pmod{(|G|_p)}$ , donde  $G$  es un grupo finito y  $|G|_p$  es la potencia más grande de  $p$  que divide al orden de  $G$ . En 1978 D. Quillen [28] estudia con más profundidad el tipo homotópico del complejo  $\mathcal{K}(\mathcal{S}_p(G))$  para  $G$  un grupo finito comparándolo con un nuevo poset, al que denota  $\mathcal{A}_p(G)$  y que consiste de los  $p$ -subgrupos elementales abelianos  $G$ . Recordemos que un  $p$ -grupo es elemental abeliano si es abeliano y de exponente  $p$ . Equivalentemente, si es isomorfo a  $\mathbb{Z}_p^n$  para algún  $n \geq 1$ . A su complejo asociado se lo conoce como “Complejo de Quillen”. Utilizando una versión para posets de su reconocido teorema A, Quillen prueba que  $\mathcal{K}(\mathcal{S}_p(G))$  y  $\mathcal{K}(\mathcal{A}_p(G))$  son homotópicamente equivalentes. También observa que si  $G$  posee un  $p$ -subgrupo normal no trivial entonces  $\mathcal{K}(\mathcal{S}_p(G))$  es contráctil, y luego conjetura que vale la recíproca. Es decir, si  $\mathcal{K}(\mathcal{S}_p(G))$  es contráctil entonces  $G$  posee un  $p$ -subgrupo normal no trivial. Quillen demuestra algunos casos de la conjetura en su artículo, como por ejemplo el caso en que  $G$  es un grupo soluble. Hasta el momento, la conjetura sigue abierta, pero se hicieron importantes avances sobre ella. El estudio del tipo homotópico de estos dos complejos ha despertado mucho interés entre la comunidad matemática. Uno de los trabajos más importantes es el Aschbacher y Smith [3] donde logran reducir la conjetura a ciertos casos particulares, habiéndola demostrado para la “mayoría” de los grupos. Sus trabajos se basan esencialmente en la Clasificación de grupos finitos simples. Esto de alguna manera nos dice que en el fondo hay una estrecha relación entre la estructura del grupo y la estructura de los posets  $\mathcal{A}_p(G)$  y  $\mathcal{S}_p(G)$ , pareciendo casi ineludible la posibilidad de evadir argumentos que involucren teoremas fuertes sobre clasificación de grupos finitos. También, en [3], Aschbacher utiliza los teoremas de clasificación de grupos para describir los grupos, módulo cierta conjetura, cuyos  $\mathcal{S}_p(G)$  es simplemente conexo. También se utilizaron otros tipos de argumentos para avanzar sobre este tema. Por ejemplo, en el trabajo de Hawkes e Isaacs (ver [19]), utilizan argumentos más combinatorios para ver que si  $G$  es un grupo soluble con  $p$ -Sylows abelianos, entonces  $G$  posee un  $p$ -subgrupo normal no trivial si y solo si  $\chi(\mathcal{S}_p(G)) = 0$ .

En 1984 R.E. Stong investiga la conjetura de Quillen y la relación entre los posets

$\mathcal{A}_p(G)$  y  $\mathcal{S}_p(G)$  desde un enfoque totalmente novedoso, analizando a ambos posets como espacios finitos. Un poset finito puede ser visto como un espacio topológico finito en el cual los abiertos son los “downsets” del poset. En la década del 60, Stong ([31]) y McCord ([25]) investigaron la topología de los espacios finitos comparándola con la topología de los complejos simpliciales asociados a los posets correspondientes. Lo que demuestra McCord es que un poset  $X$  visto como espacio finito es débilmente equivalente a su complejo asociado  $\mathcal{K}(X)$ . Esto resalta la diferencia que existe entre una equivalencia homotópica entre complejos simpliciales y una equivalencia homotópica entre espacios finitos: mientras que para los complejos simpliciales una equivalencia homotópica es lo mismo que una equivalencia débil (teorema de Whitehead), para espacios finitos no lo es (no vale el teorema de Whitehead). De esta manera, tener un complejo simplicial  $\mathcal{K}(X)$  contráctil, en un principio solo nos dice que el poset  $X$  es homotópicamente trivial. Aplicando esto a los posets de  $\mathcal{S}_p(G)$  y  $\mathcal{A}_p(G)$ , Stong demuestra que la existencia de un  $p$ -subgrupo normal no trivial es equivalente a que el poset  $\mathcal{S}_p(G)$  sea contráctil, y que por lo tanto la conjetura de Quillen se puede estudiar desde otro punto vista: si  $\mathcal{K}(\mathcal{S}_p(G))$  es contráctil, entonces  $\mathcal{S}_p(G)$  es contráctil. O de manera equivalente, si  $\mathcal{S}_p(G)$  es homotópicamente trivial, entonces es contráctil.

Este enfoque de Stong dio lugar a muchas nuevas preguntas relacionadas sobre el tipo homotópico del poset. Por ejemplo, Stong muestra que el poset  $\mathcal{A}_p(G)$  que introdujo Quillen no es homotópico a  $\mathcal{S}_p(G)$ . Sin embargo, observa que si  $\mathcal{A}_p(G)$  es contráctil entonces  $\mathcal{S}_p(G)$  es contráctil, y una de las cosas que se pregunta es si valdrá la recíproca.

En [6], Jonathan Barmak retoma el enfoque de Stong sobre el estudio del tipo homotópico de los posets  $\mathcal{S}_p(G)$  y  $\mathcal{A}_p(G)$  y muestra, por ejemplo, que en realidad tienen el mismo tipo homotópico simple como espacios finitos. Esto le permitió reformular la conjetura de diversas formas, mostrando que la existencia de un  $p$ -subgrupo normal no trivial en  $G$  es equivalente, por ejemplo, a que el poset  $\mathcal{S}_p(G)$  sea  $G$ -colapsable.

A partir de todo esto y de la pregunta de Stong sobre si la contractibilidad de  $\mathcal{S}_p(G)$  implica la del poset  $\mathcal{A}_p(G)$ , nosotros en este trabajo investigamos un poco más a fondo qué significa la contractibilidad del poset  $\mathcal{A}_p(G)$  y cuándo es homotópicamente equivalente a  $\mathcal{S}_p(G)$ . Respondemos a la pregunta de Stong mostrando que existe un grupo  $G$  para el cual  $\mathcal{S}_p(G)$  es contráctil y  $\mathcal{A}_p(G)$  no, por lo que el estudio de este último poset parece requerir de más teoría. Una de las cosas que observamos inmediatamente es que todos los contraejemplos que encontramos para los cuales  $\mathcal{S}_p(G)$  y  $\mathcal{A}_p(G)$  no son homotópicamente equivalentes son para el primo  $p = 2$ . Todavía no sabemos si hay contraejemplos para primos impares. Para buscar y analizar ejemplos utilizamos los programas SageMath y GAP. Vimos por ejemplo que el grupo de orden más chico para el cual  $\mathcal{S}_p(G)$  es contráctil y  $\mathcal{A}_p(G)$  no es de orden  $576 = 2^6 * 3^2$ . Además pudimos probar que para grupos de orden  $p^\alpha * q$ , ambos posets son homotópicamente equivalentes, lo cual nos permite descartar una gran cantidad de casos a la hora de buscar contraejemplos y probar, junto con otros resultados, que el orden más chico para el cual existe un grupo  $G$  con  $\mathcal{S}_p(G)$  y  $\mathcal{A}_p(G)$  no homotópicamente equivalentes es 72, mientras que el que había exhibido Stong era  $\mathbb{S}_5$  de orden 120. Si uno quisiera buscar un contraejemplo para la contractibilidad con otro primo, por ejemplo, para  $p = 3$ , uno piensa que como mínimo tal primo esté con potencia 6, ya que cuando analizamos para el primo 2 el primer contraejemplo que encontramos fue con potencia sexta. En tal caso, el orden más chico que deberíamos chequear es

$2^2 * 3^6 = 4 * 729 = 2916$ , y este no está en la tabla de grupos chicos GAP, por lo cual no tenemos una manera directa de buscar un contraejemplo. De hecho, tanto para 2 como para 3 probamos con potencias cuartas y quintas, y no encontramos contraejemplos respecto de la contractibilidad. Queda abierta entonces la pregunta de si los posets  $\mathcal{S}_p(G)$  y  $\mathcal{A}_p(G)$  son homotópicos para primos impares, y si no fuese así si la contractibilidad de  $\mathcal{S}_p(G)$  implica la de  $\mathcal{A}_p(G)$ .

En el estudio de la contractibilidad del poset  $\mathcal{A}_p(G)$ , introdujimos la noción de contractibilidad en  $n$  pasos, la cual solo tiene sentido cuando estamos trabajando con posets, o equivalentemente, espacios finitos  $T_0$ . Un poset  $X$  es contráctil en  $n$  pasos si existen  $n + 1$  morfismos de posets  $f_0, f_1, \dots, f_n : X \rightarrow X$  y un elemento distinguido  $x_0 \in X$  de manera que  $f_0 = \text{id}_X$ ,  $f_n = \text{cte}_{x_0}$  y  $f_0 \leq f_1 \geq f_2 \leq \dots$  o bien  $f_0 \geq f_1 \leq f_2 \geq \dots$ . En el caso del poset  $\mathcal{A}_p(G)$ , la contractibilidad en 0, 1, 2 y 3 pasos se puede describir en términos de cierto subgrupo de  $G$ . Hasta el momento, no pudimos encontrar una caracterización general para la contractibilidad de  $\mathcal{A}_p(G)$  en  $n$  pasos en términos de un subgrupo en particular sin necesidad de pasar por el poset  $\mathcal{A}_p(G)$ . Sin embargo, cuando probamos en SageMath, luego de introducir algunas restricciones coherentes para los grupos, vimos que hay muy pocos grupos  $G$  para los que  $\mathcal{A}_p(G)$  es contráctil en más de dos pasos. Esto nos hace preguntar qué tan exóticos son tales grupos, si hay alguna relación entre todos ellos y en cuántos pasos son contráctiles, o si no lo son. De esta manera, pudimos restringir significativamente la búsqueda de grupos  $G$  para los que  $\mathcal{S}_p(G)$  es contráctil y  $\mathcal{A}_p(G)$  no es contráctil en menos de tres pasos, con el primo  $p = 2$ . Una vez que obtuvimos una lista mucho más pequeña (de tan solo 28 grupos), con otro programa hecho en SageMath analizamos si el poset  $\mathcal{A}_p(G)$  era contráctil o no. Esto nos llevó a la conclusión de que el primer grupo para el cual  $\mathcal{A}_p(G)$  no es contráctil y  $\mathcal{S}_p(G)$  sí, es el grupo de orden 576 e id 8654 de la tabla de SmallGroups de GAP. Además nos dio que es el único grupo de tal orden con esa propiedad.

En el capítulo 1, damos los resultados teóricos básicos que necesitaremos a lo largo de este trabajo. En el capítulo 2, introducimos los posets  $\mathcal{S}_p(G)$  y  $\mathcal{A}_p(G)$ , estudiamos algunas propiedades homotópicas básicas y demostramos la conjetura de Quillen para el caso soluble, traduciendo todo al lenguaje de espacios finitos y en algunos casos haciendo demostraciones alternativas a las que se encuentran en la literatura. Describimos brevemente otros casos de la conjetura y el trabajo de Aschbacher-Smith sobre la misma. También probamos de manera alternativa que los espacios topológicos  $|\mathcal{K}(\mathcal{S}_p(G))|$  y  $|\mathcal{K}(\mathcal{A}_p(G))|$  tienen el mismo tipo homotópico  $G$ -equivariante y damos distintos enfoques sobre la conjetura de P. Webb (actualmente probada) que afirma que  $|\mathcal{K}(\mathcal{S}_p(G))|/G$  es contráctil. Finalmente en el capítulo 3 describimos la noción de contractibilidad en pasos y trabajando con retículos reducidos atómicos y coatómicos, logrando describir explícitamente la cantidad de pasos necesarios para la contractibilidad de este tipo de posets. En particular, esto se aplica al poset  $\mathcal{A}_p(G)$ . Además incluimos varios resultados parciales que nos permiten decidir cuándo los posets  $\mathcal{A}_p(G)$  y  $\mathcal{S}_p(G)$  son homotópicos. Por ejemplo, describimos explícitamente cuándo  $\mathcal{A}_p(G) \subset \mathcal{S}_p(G)$  es un retracto, qué quiere decir la contractibilidad de  $\mathcal{A}_p(G)$  en a lo sumo 3 pasos, si el grupo es de orden  $p^\alpha q$  entonces ambos posets son homotópicamente equivalentes. Por último, cerramos ese capítulo con un análisis del grupo diedral y algunos ejemplos que desafían nuestra intuición.

# Lista de símbolos

Sean  $G, H$  dos grupos finitos y  $\pi \subset \mathbb{N}$  un conjunto finito de números primos.

$1$	elemento neutro o grupo trivial
$G^{op}$	grupo opuesto a $G$
$H \leq G$	$H$ subgrupo de $G$
$H < G$	$H$ subgrupo propio de $G$
$1 < H$	$H$ grupo no trivial
$H \trianglelefteq G$	$H$ subgrupo normal de $G$
$H \text{ char } G$	$H$ subgrupo característico de $G$
$\mathbb{Z}_n$	grupo cíclico de orden $n$
$ G $	orden del grupo $G$
$ord(g)$	orden del elemento $g$
$[g, h]$	es el elemento $ghg^{-1}h^{-1}$
$g^h$	es el elemento $h^{-1}gh$
$H^g$	es el subgrupo $g^{-1}Hg$
$gH$	coclase a izquierda
$Hg$	coclase a derecha
$G/H$	conjunto de coclases, grupo cociente si $H \trianglelefteq G$
$ G : H $	índice de $H$ en $G$ , el cardinal del conjunto $G/H$
$G \times H$	producto directo de $G$ y $H$
$G \rtimes H$	producto semidirecto de $G$ por $H$
$\langle S \rangle$	subgrupo generado por los elementos de $S$
$XY$	para $X, Y \subset G$ , es el conjunto $\{xy : x \in X, y \in Y\}$
$ G _\pi$	mayor divisor de $ G $ que es potencia y producto de los primos de $\pi$
$ G _p$	es $ G _\pi$ para $\pi = \{p\}$
$m_p(G)$	la potencia de $p$ más grande que divide a $ G $
$r_p(B)$	si $B$ es un $p$ -toro finito, es la dimensión de $B$ como $\mathbb{F}_p$ -espacio vectorial
$Z(G)$	el centro de $G$ : $\{x \in G : xg = gx \text{ para todo } g \in G\}$
$[G, H]$	el conmutador de $G$ y $H$ : $\langle [g, h] : g \in G, h \in H \rangle$
$G'$	el derivado de $G$ , el subgrupo $[G, G]$
$C_G(h)$	el centralizador de $h$ en $G$ : $\{g \in G : [g, h] = 1\}$
$C_G(H)$	el centralizador de $H$ en $G$ : $\{g \in G : [g, H] = 1\}$
$N_G(H)$	el normalizador de $H$ en $G$ : $\{g \in G : H^g = H\}$

$\Omega_1(H)$	subgrupo de $H$ generado por los elementos $x \in H$ tales que $x^p = 1$
$\text{Syl}_p(G)$	conjunto de $p$ -subgrupos de Sylow de $G$
$n_p$	cantidad de $p$ -Sylows de $G$
$\mathcal{O}_\pi(G)$	$\pi$ -subgrupo normal más grande de $G$
$\text{Ker}(f)$	núcleo del morfismo de grupos $f$
$\text{Im}(f)$	imagen del morfismo de grupos $f$
$c_g$	automorfismo de $G$ que es conjugar por $g$
$\text{End}(G)$	endomorfismos del grupo $G$
$\text{Aut}(G)$	automorfismos del grupo $G$
$\text{Inn}(G)$	automorfismos interiores del grupo $G$
CGSF	Clasificación de grupos simple finitos
$\mathbb{S}_n$	grupo simétrico en $n$ letras
$\mathbb{A}_n$	grupo alterno de $n$ letras
$F(G)$	subgrupo de Fitting de $G$
$F^*(G)$	subgrupo de Fitting generalizado de $G$

Supongamos que  $G$  actúa a derecha en un conjunto  $X$ .

$\text{Sym}(X)$	grupo de funciones biyectivas de $X$ con la composición
$x^g$	notación para la acción a derecha $(x, g) \mapsto x^g$
$X^g$	el conjunto de elementos de la forma $x^g$ , con $x \in X$ y $g \in G$
$X^G$	es el conjunto de puntos fijos de la acción de $G$ en $X$
$\mathcal{O}_x$	es la órbita por la acción de $G$ del elemento $x \in X$
$G_x$	es el estabilizador por la acción de $G$ del elemento $x \in X$

Sean  $X, Z$  dos  $G$ -posets, sea  $Y \subset X$  y sean  $x, y \in Y$ .

$U_x^Y$	abierto más chico en $Y$ que contiene a $x$
$F_x^Y$	clausura de $\{x\}$ en $Y$
$\hat{U}_x^Y$	es $U_x^Y - x$
$Y_{<x}$	es $\hat{U}_x^Y$
$\hat{F}_x^Y$	es $F_x^Y - x$
$Y_{>x}$	es $\hat{F}_x^Y$
$\mathcal{K}(X)$	complejo simplicial asociado al poset $X$
$\mathcal{X}(K)$	poset de caras del complejo simplicial $K$
$x \prec y$	el elemento $y$ cubre a $x$
$h(X)$	altura del poset $X$
$h(x)$	altura del elemento $x$ , o sea $h(x) = h(U_x)$
$X \searrow Y$	colapso fuerte de $X$ a $Y$
$X \searrow^G Y$	colapso fuerte equivariante de $X$ a $Y$
$X \searrow^e Y$	colapso elemental de $X$ a $Y$
$X \searrow Y$	colapso de $X$ a $Y$

$X \searrow^{G^c} Y$	colapso elemental equivariante de $X$ a $Y$
$X \searrow^G Y$	colapso equivariante de $X$ a $Y$
$X \frown Z$	$X$ se deforma a $Z$ , mismo tipo homotópico simple
$X \frown^G Z$	$X$ se $G$ -deforma a $Z$ , mismo tipo homotópico simple equivariante
$X \simeq Z$	mismo tipo homotópico
$X \underset{w}{\sim} Z$	mismo tipo homotópico débil (mismos grupos de homotopía)
$\mu_X$	equivalencia débil canónica $\mu_X :  \mathcal{K}(X)  \rightarrow X$ , definida por $\mu_X(\sum_i t_i x_i) = \min_i x_i$
$X \underset{w}{\rightarrow} Z$	equivalencia débil



# Capítulo 1

## Preliminares

### 1.1 Teoría básica de grupos finitos

En este trabajo asumimos que todos los grupos que utilizamos son finitos. La mayoría de las definiciones y proposiciones que nombramos pueden encontrarse en cualquier libro básico de álgebra que incluya teoría de grupos. Para una demostración y entendimiento más profundo de los teoremas más avanzados que aparecen hacia el final de esta sección recomendamos el excelente libro de I. Martin Isaacs [24]. El lector que posea un mínimo de conocimiento sobre teoría de grupos finitos puede saltarse esta sección tranquilamente. La mayoría de las notaciones que damos sobre grupos pueden consultarse en la Lista de Símbolos.

Sea  $G$  un grupo finito. Para referirnos a un subgrupo  $H$  de  $G$ , notamos  $H \leq G$ . Al subgrupo trivial lo notamos como  $1$  o  $\{1\}$ , y para decir que  $H$  es un grupo no trivial escribimos  $1 < H$ . En general, para decir que  $H$  es un subgrupo propio de  $G$  notamos  $H < G$ . Si  $X \subset G$  es un subconjunto, el subgrupo generado por  $X$  lo notamos  $\langle X \rangle$ . El grupo opuesto de  $G$  lo denotamos  $G^{op}$ .

Si  $X, Y \subset G$  son dos subconjuntos, entonces  $XY = \{xy : x \in X, y \in Y\}$ . Este conjunto no es necesariamente un subgrupo de  $G$ . En el caso de que  $X, Y \leq G$  son subgrupos, entonces  $XY \leq G$  si y solo si  $XY = YX$ .

El orden del grupo  $G$  es la cantidad de elementos que posee y lo notamos  $|G|$ . El orden de un elemento  $g \in G$  es el orden del subgrupo cíclico  $\langle g \rangle$ . Lo notamos  $|g| = ord(g)$  y tiene la siguiente propiedad: si  $g^n = 1$ , entonces  $ord(g) \mid n$ . Si  $p$  es un primo, el número  $|G|_p$  es la potencia de  $p$  más grande que divide a  $G$ . Esto es, si  $|G| = p^\alpha m$  con  $p$  y  $m$  coprimos, entonces  $|G|_p = p^\alpha$ . También escribimos  $m = |G|_{p'}$ . Más en general, si  $\{p_1, \dots, p_n\}$  es un conjunto de primos tales que  $|G| = p_1^{\alpha_1} \dots p_n^{\alpha_n}$ , y  $\pi \subset \{p_1, \dots, p_n\}$  es un subconjunto, entonces

$$|G|_\pi = \prod_{i:p_i \in \pi} p_i^{\alpha_i}$$

y

$$|G|_{\pi'} = \prod_{i:p_i \notin \pi} p_i^{\alpha_i}$$

Notamos  $\pi' = \{p_1, \dots, p_n\} - \pi$  al complemento de  $\pi$ . Un  $\pi$ -grupo es un grupo  $G$  tal que

$|G|_\pi = |G|$ . Así, un  $p$ -grupo es un grupo  $G$  cuyo orden es una potencia de  $p$ . El grupo trivial es considerado un  $\pi$ -grupo. De la misma manera se tiene la noción de  $\pi$ -subgrupo. También podemos escribir  $\pi(G)$  para denotar al conjunto de primos  $p$  que dividen al orden de  $G$ . De esta manera,  $G$  es un  $\pi$ -grupo si y solo si  $\pi(G) \subset \pi$ .

De los teoremas de Sylow (ver teorema 1.1.11), si  $p$  es un primo que divide al orden de  $G$ , entonces existen subgrupos de orden  $|G|_p$ , que llamamos  $p$ -Sylows, y son todos conjugados. Además, si  $n_p$  denota a la cantidad de  $p$ -Sylows, entonces  $p \mid n_p - 1$  y  $n_p \mid |G|_{p'}$ . Los teoremas de Sylow también nos dicen que todo  $p$ -subgrupo de  $G$  está contenido en algún  $p$ -Sylow. Es inmediato ver que los  $p$ -Sylows son los  $p$ -subgrupos maximales de  $G$ . Notamos por  $\text{Syl}_p(G)$  al conjunto de  $p$ -subgrupos de Sylow de  $G$ . Si  $p$  no divide al orden de  $G$ , entonces  $\text{Syl}_p(G) = \{1\}$ . Escribiremos  $m_p(G)$  para denotar el mayor entero  $\alpha$  tal que  $p^\alpha \mid |G|$ . Es decir,  $m_p(G) = \log_p(|G|_p)$ .

Si  $H \leq G$  es un subgrupo, el conjunto de coclases a derecha de  $H$  en  $G$  es

$$G/H = \{Hg : g \in G\}$$

donde  $Hg = \{hg : h \in H\}$ . De manera análoga tenemos las coclases a izquierda. Recordemos que dos coclases son iguales o disjuntas y que  $G$  es unión disjunta de estas. El índice de  $H$  en  $G$  es el cardinal del conjunto de coclases  $G/H$  y lo notamos  $|G : H|$ . Del teorema de Lagrange, tenemos que  $|G| = |H||G : H|$ . Además, si  $K \leq H \leq G$ , entonces  $|G : K| = |G : H||H : K|$ . En particular, si  $g \in G$  entonces  $\text{ord}(g) \mid |G|$ .

Si  $g \in G$ , notamos por  $c_g : G \rightarrow G$  al morfismo de grupos dado por

$$c_g(h) = ghg^{-1}$$

También escribimos  $h^g = c_{g^{-1}}(h) = g^{-1}hg$ . Si  $X \subset G$  es un subconjunto, entonces

$$X^g = c_{g^{-1}}(X) = \{g^{-1}xg : x \in X\}$$

Tenemos un morfismo canónico

$$\Phi : G \rightarrow \text{Aut}(G)$$

$$g \mapsto c_g$$

El núcleo de este morfismo son los  $g \in G$  tales que  $c_g = \text{id}_G$ . Esto es, los  $g \in G$  tales que  $ghg^{-1} = h$  para todo  $h \in G$ . Este subgrupo es el centro de  $G$  y lo notamos  $Z(G)$ . Un grupo  $G$  es abeliano si  $Z(G) = G$ . La imagen de este morfismo  $\Phi$  es  $\text{Inn}(G)$ , el conjunto de automorfismos interiores. Esto es, el conjunto de automorfismos dados por la conjugación por un elemento de  $G$ . De los teoremas de isomorfismos 1.1.6 se tiene que  $\text{Inn}(G) \simeq G/Z(G)$ .

Supongamos que  $G$  actúa a derecha en un conjunto  $X$ , y tomemos elementos  $g \in G$  y  $x \in X$ , entonces denotamos  $x^g$  a la acción de  $g$  en  $x$ . Si  $Y \subset X$  es un subconjunto, entonces  $Y^g = \{y^g : y \in Y\}$ . Si  $x \in X$ , la órbita de  $x$  por la acción de  $G$  es el conjunto  $\mathcal{O}_x = \varphi(x, G)$  y el estabilizador de  $x$  en  $G$  es el subgrupo de  $G$

$$G_x = \{g \in G : x^g = x\}$$

El conjunto de puntos fijos de la acción es

$$X^G = \{x \in X : x^g = x \text{ para todo } g \in G\}$$

Si  $H \leq G$  es un subgrupo, podemos considerar la acción de  $H$  en  $X$  que es la restricción de la acción de  $G$ . De manera análoga, si  $Y \subset X$  es un subconjunto invariante por la acción de  $G$ , podemos restringir la acción de  $G$  a  $Y$ . Recordemos que  $Y$  es invariante, o  $G$ -invariante, si  $Y^g = Y$  para todo  $g \in G$ . Recordemos que si  $x \in X$ , entonces  $|\mathcal{O}_x| = |G : G_x|$ , y en particular  $|G| = |G_x| |\mathcal{O}_x|$ .

La acción regular de  $G$  es la acción de  $G$  sobre sí mismo que está dada por multiplicar. Esto es, la acción que proviene de la función  $G \times G \rightarrow G$  dada por  $(g, h) \mapsto gh$ .

La acción de  $G$  sobre sí mismo por conjugación (a derecha) está dada por la función  $c : G \times G \rightarrow G$ ,  $c(g, h) = g^h = h^{-1}gh$ . Si  $g \in G$ , entonces la órbita de  $g$  por esta acción es la clase de conjugación de  $g$  en  $G$ . Si restringimos la acción a un subgrupo  $H \leq G$ , la órbita es la clase de conjugación de  $g$  en  $H$ . La notamos  $\text{Cl}_H(g)$ . Dos elementos de  $G$  que están en la misma clase de conjugación se dicen conjugados. El estabilizador de  $g \in G$  es el subgrupo  $\{h \in G : g^h = g\}$ , es decir, es el centralizador de  $g$  en  $G$ , que notamos  $C_G(g)$ . Más en general, si  $L(G)$  denota el reticulado de subgrupos de  $G$ , entonces  $G$  actúa en  $L(G)$  por conjugación. Si  $H \in L(G)$ , la órbita de  $H$  es la clase de conjugación de  $H$  y es el conjunto  $\text{Cl}_G(H) = \{H^g : g \in G\}$ . Dos subgrupos que están en la misma clase de conjugación decimos que son conjugados. Un subgrupo normal de  $G$  es un  $H \leq G$  tal que  $\text{Cl}_G(H) = \{H\}$ , y lo denotamos  $H \trianglelefteq G$ . Es decir, si para todo  $g \in G$ ,  $H^g = H$ . Por otro lado, el estabilizador de  $H$  es el subgrupo  $\{g \in G : H^g = H\} = N_G(H)$ , que llamamos el normalizador de  $H$  en  $G$ . Así,  $H$  es normal en  $G$  si y solo si  $N_G(H) = G$ . Si  $K \leq G$  es un subgrupo, entonces podemos considerar  $N_K(H) = N_G(H) \cap K$ , que es simplemente el estabilizador de  $H$  con la acción restringida a  $K$ . Cuando  $H \leq K$ , tiene sentido entonces decir que  $H$  es normal en  $K$ . Recordemos que ser normal no es una propiedad transitiva. El núcleo de cualquier morfismo de grupos es un subgrupo normal del dominio. Además, si  $H \trianglelefteq G$  entonces  $G/H$  posee una estructura de grupo y lo llamamos grupo cociente. Hay un morfismo de grupos canónico  $q : G \rightarrow G/H$  tal que  $q(g) = \bar{g} = Hg$ . Al grupo cociente  $G/H$  a veces lo notaremos  $\bar{G}$ . Del teorema de correspondencia (ver teorema 1.1.7), existe una biyección entre los subgrupos de  $G$  que contienen a  $H$  y los subgrupos de  $\bar{G}$ . Más aún, si  $H \leq K \leq G$  se corresponde con  $\bar{K} \leq \bar{G}$ , entonces  $K \trianglelefteq G$  si y solo si  $\bar{K} \trianglelefteq \bar{G}$ , y  $[G : K] = [\bar{G} : \bar{K}]$ .

Sea  $X$  un conjunto. Notamos por  $\text{Sym}(X)$  al grupo de funciones biyectivas de  $X$  con la operación de la composición. Si  $G$  actúa a derecha en un conjunto  $X$ , tenemos un morfismo de grupos  $\varphi : G \rightarrow \text{Sym}(X)^{\text{op}}$  dado por  $g \mapsto \varphi(g)$ , donde  $\varphi(g)(x) = x^g$ . Cuando la acción es a izquierda, no necesitamos tomar el opuesto de  $\text{Sym}(X)$ . El núcleo de la acción de  $G$  en  $X$  es el núcleo de este morfismo, y cuando éste es trivial, decimos que la acción es fiel. Decimos que la acción es transitiva si para todo  $x, y \in X$ , existe  $g \in G$  tal que  $x^g = y$ .

Por ejemplo, la acción regular es fiel y transitiva.

Para la acción de  $G$  por conjugación (a derecha), el morfismo es  $\tilde{\Phi} : G \rightarrow \text{Aut}(G)^{\text{op}}$ ,  $g \mapsto c_{g^{-1}}$ , y el núcleo es el centro de  $G$ .

Si  $H \leq G$ , podemos considerar el conjunto  $G/H = \{Hx : x \in G\}$  de las coclases a derecha. Entonces  $G$  actúa en este conjunto por multiplicación a derecha. El estabilizador de  $Hx$  es el conjunto  $\{g \in G : Hxg = Hx\} = \{g \in G : g^{x^{-1}} \in H\} = H^x$ . El núcleo de

esta acción es lo que se llama el core de  $H$ :

$$\text{core}_G(H) = \bigcap_{x \in G} xHx^{-1}$$

Este es el subgrupo normal de  $G$  más grande contenido en  $H$ .

**Definición 1.1.1.** Para  $\pi$  un conjunto de primos, el subgrupo  $\mathcal{O}_\pi(G)$  es el  $\pi$ -subgrupo normal más grande de  $G$ . A menudo lo llamamos  $\pi$ -core de  $G$ . De la misma manera se define el  $\pi'$ -core. Cuando  $\pi = \{p\}$ , el  $p$ -core de  $G$  es el grupo  $\mathcal{O}_p(G) = \mathcal{O}_{\{p\}}(G)$ .

**Observación 1.1.2.** El  $p$ -core de  $G$  coincide con la intersección de todos los  $p$ -Sylows de  $G$ . Para ver esto, notemos que un  $p$ -subgrupo normal de  $G$  debe estar contenido en la intersección de todos los  $p$ -Sylows, ya que si  $K \trianglelefteq G$  es un  $p$ -grupo y  $P \leq G$  es un  $p$ -Sylow con  $K \leq P$ , entonces  $K \leq P^g$  para todo  $g \in G$ . Por otro lado, la intersección de todos los  $p$ -Sylows  $\text{core}_G(P)$ , con  $P \in \text{Syl}_p(G)$ , es normal en  $G$ , y así

$$\text{core}_G(P) \leq \mathcal{O}_p(G) \leq \text{core}_G(P)$$

Para dos elementos  $k, h \in G$ , el conmutador de  $h$  y  $k$  es el elemento  $[k, h] = khk^{-1}h^{-1}$ . Si  $K, H \leq G$  son dos subgrupos, el conmutador de  $K$  y  $H$  es el grupo

$$[K, H] = \langle \{[k, h] : k \in K, h \in H\} \rangle$$

El conmutador de  $G$  es el grupo  $[G, G]$ , que también se llama derivado de  $G$  y se nota  $G'$ . El grupo  $G$  es perfecto si  $G' = G$ .

Si  $G_1$  y  $G_2$  son dos grupos, el producto directo (externo) lo notamos  $G_1 \times G_2$ . Si  $G$  es un grupo y  $H, K$  son dos subgrupos, decimos que  $G$  es el producto directo interno de  $H$  y  $K$  si ambos son normales en  $G$ ,  $H \cap K = 1$  y  $HK = G$ . Notar que si  $H, K \trianglelefteq G$ , entonces  $H \cap K = 1$  si y solo si todo elemento de  $H$  conmuta con todo elemento de  $K$ .

En general, si  $H, K \leq G$  y  $K \leq N_G(H)$ , entonces  $HK \leq G$ . Si además  $H \cap K = 1$  y  $HK = G$ , decimos que  $G$  es el producto semidirecto interno de  $H$  por  $K$ . Notar que en tal caso  $H \trianglelefteq G$ . Por otro lado, si  $G_1$  y  $G_2$  son dos grupos junto con un morfismo  $\alpha : G_2 \rightarrow \text{Aut}(G_1)$ , entonces podemos formar el producto semidirecto externo de  $G_1$  por  $G_2$ , que notamos por  $G_1 \rtimes G_2$ . Se puede chequear que todo producto (semi)directo interno proviene de un externo y viceversa.

**Definición 1.1.3.** Un subgrupo  $H \leq G$  se dice que es característico en  $G$ , y notamos  $H \text{ char } G$ , si para cada automorfismo  $\varphi : G \rightarrow G$  se tiene que  $\varphi(H) = H$ .

**Ejemplo 1.1.4.** Los subgrupos  $Z(G)$ ,  $G'$ ,  $\mathcal{O}_\pi(G)$ ,  $1$ ,  $G$  son característicos en  $G$ .

**Observación 1.1.5.** Es fácil chequear que la propiedad de ser característico es transitiva y que todo subgrupo característico es normal. Además si  $H \text{ char } G$  y  $K \trianglelefteq H$  entonces  $K \trianglelefteq G$ .

A continuación, enunciamos algunos resultados básicos de la teoría de grupos.

**Teorema 1.1.6.** (*Teoremas de isomorfismo*)

1. Si  $f : G \rightarrow H$  es un morfismo de grupos, entonces  $G/\text{Ker}(f) \simeq \text{Im}(f)$
2. Si  $K \leq H \leq G$  y ambos subgrupos son normales en  $G$ , entonces  $K$  es normal en  $H$  y  $(G/H)/(H/K) \simeq G/H$
3. Si  $H, K \leq G$  y  $K \leq N_G(H)$ , entonces  $HK \leq G$  y  $K/(K \cap H) \simeq HK/H$ .

**Teorema 1.1.7.** (Teorema de correspondencia) Sea  $G$  un grupo y sea  $N$  un subgrupo normal de  $G$ . Notemos por  $q : G \rightarrow \overline{G} = G/N$  al morfismo cociente. Entonces se tiene una biyección de conjuntos

$$\{H \leq G : N \leq H\} \leftrightarrow \{\overline{H} \leq \overline{G}\}$$

que está dada  $H \mapsto q(H) = H/N$  con inversa  $\overline{H} \mapsto q^{-1}(\overline{H})$ . Si  $N \leq H, K \leq G$ , se tienen las siguientes:

- $H \leq K$  si y solo si  $\overline{H} \leq \overline{K}$
- $H \trianglelefteq K$  si y solo si  $\overline{H} \trianglelefteq \overline{K}$
- Si  $H \leq K$ , entonces  $|K : H| = |\overline{K} : \overline{H}|$
- Si  $H \trianglelefteq K$ , entonces  $K/H \simeq \overline{K}/\overline{H}$

**Proposición 1.1.8.** Sea  $G$  un grupo finito. Se tienen las siguientes:

1. Si  $x \in G$  entonces  $|\text{Cl}_G(x)| = |G : C_G(x)|$
2. Si  $H \leq G$  entonces  $|\text{Cl}_G(H)| = |G : N_G(H)|$

**Teorema 1.1.9.** (Ecuación de clases) Si  $G$  actúa sobre un conjunto finito  $X$ , entonces existe un subconjunto  $\{x_1, \dots, x_s\}$  de  $X$  tales que  $|\mathcal{O}_{x_i}| > 1$  para todo  $i$ , las órbitas de éstos son todas distintas y

$$|X| = |X^G| + \sum_{i=1}^s |\mathcal{O}_{x_i}| = |X^G| + \sum_{i=1}^s |G : G_{x_i}|$$

En particular, cuando  $X = G$  y la acción es la conjugación,

$$|G| = |Z(G)| + \sum_{i=1}^s |G : C_G(x_i)|$$

con  $(G : C_G(x_i)) \geq 2$  para todo  $i$ .

**Proposición 1.1.10.** (Cauchy) Si  $p \mid |G|$ , entonces  $G$  tiene un elemento de orden  $p$ .

**Teorema 1.1.11.** (Sylow) Sea  $G$  un grupo finito y sea  $p$  un primo que divide al orden de  $G$ . Notemos  $n_p$  a la cantidad de  $p$ -subgrupos de Sylow de  $G$ . Entonces:

(E) Existen  $p$ -subgrupos de Sylow, es decir,  $n_p > 0$ .

(C) Dos  $p$ -subgrupos de Sylow son conjugados en  $G$ .

(S) Todo  $p$ -subgrupo de  $G$  está contenido en algún  $p$ -Sylow.

(D) Si  $n_p > 1$  y  $S, T$  son dos  $p$ -Sylows distintos tales que  $|S \cap T|$  es maximal, entonces  $n_p(G) \equiv 1 \pmod{|S : S \cap T|}$ . En particular,  $n_p \equiv 1 \pmod{p}$ . Más aún,  $n_p = |G : N_G(P)|$  para  $P \leq G$  un  $p$ -Sylow. También se tiene que  $n_p \mid |G|_p$ .

**Corolario 1.1.12.** De la parte (D) del teorema anterior,  $n_p = 1$  si y solo si hay un  $p$ -Sylow normal.

**Proposición 1.1.13.** Supongamos que  $P$  es un  $p$ -subgrupo de Sylow de un grupo  $G$  y sea  $Q \leq N_G(P)$  un  $p$ -subgrupo. Entonces  $Q \leq P$ .

Las siguientes proposiciones nos serán de gran utilidad en este trabajo, y como no siempre se demuestran en los cursos básicos de álgebra, incluimos sus demostraciones.

**Proposición 1.1.14.** Sea  $P$  un  $p$ -grupo y sea  $1 < N \trianglelefteq P$  un subgrupo normal. Entonces  $N \cap Z(P) > 1$ . En particular  $Z(P) > 1$  y si  $N$  es normal minimal entonces  $N \leq Z(P)$ .

*Demostración.* Como  $N$  es normal en  $P$ , podemos considerar la acción por conjugación de  $P$  sobre  $N$ . Así, el conjunto de puntos fijos de la acción es

$$N^P = \{n \in N : n^g = n \text{ para todo } g \in P\} = C_N(P) = N \cap Z(P)$$

Del teorema de la ecuación de clases 1.1.9, tenemos que

$$|N| = |N^P| + \sum_{i=1}^r (P : P_{x_i})$$

para ciertos elementos  $x_i \in N$  con  $(P : P_{x_i}) > 1$ . Como  $N$  y  $P$  son  $p$ -grupos no triviales, se tiene que  $p \mid |N|$  y  $p \mid (P : P_{x_i})$  para todo  $i$ . Tomando resto módulo  $p$  en esta ecuación de clases, deducimos que  $|N \cap Z(P)| = |N^P| \equiv 0 \pmod{p}$ . En consecuencia,  $N \cap Z(P)$  es un  $p$ -grupo no trivial.

Si  $N = P$ , tenemos que  $Z(P) = N \cap Z(P) > 1$ . Por otro lado, si  $N$  es normal minimal en  $P$ , entonces  $N \cap Z(P)$  es un subgrupo no trivial y normal en  $P$ . Por minimalidad de  $N$  debe ser que  $N = N \cap Z(P) \leq Z(P)$ .  $\square$

**Lema 1.1.15.** Sea  $N \trianglelefteq G$  y sea  $H \leq G$  tal que  $N \leq H$ . Notemos  $\overline{G} = G/N$ . Entonces  $\overline{N_G(H)} = N_{\overline{G}}(\overline{H})$ .

*Demostración.* La demostración se basa puramente en el teorema de correspondencia. Como  $N \leq H \trianglelefteq N_G(H)$ , tomando cociente tenemos que  $\overline{H} \trianglelefteq \overline{N_G(H)}$ . Si  $\overline{H} \trianglelefteq K'$ , por el teorema de correspondencia, existe  $K \leq G$  que contiene a  $H$  y tal que  $\overline{K} = K'$ . Luego  $H \trianglelefteq K$  y así  $K \leq N_G(H)$ . Por lo tanto  $K' = \overline{K} \leq \overline{N_G(H)}$ . Esto prueba que  $\overline{N_G(H)}$  es el subgrupo más grande en el que  $\overline{H}$  es normal, y entonces  $\overline{N_G(H)} = N_{\overline{G}}(\overline{H})$ .  $\square$

**Proposición 1.1.16.** Sea  $G$  un  $p$ -grupo. Si  $H < G$  es un subgrupo propio, entonces  $H < N_G(H)$ .

*Demostración.* Por inducción en  $|G|$ . Si  $|G| = p$  no hay nada que decir. Supongamos que  $|G| > p$  y sea  $H < G$  un subgrupo propio. Si  $H = 1$  ya estamos, por lo que podemos suponer que  $1 < H$ . Sea  $Z = Z(G)$ , que es no trivial. Supongamos por el absurdo que  $H = N_G(H)$ . Entonces  $Z(G) \leq N_G(H) = H$ . Consideremos  $\overline{G} = G/Z(G)$ . Sea  $\overline{H} = H/Z(G)$ . Como  $Z(G) \leq H < G$ , vale que  $\overline{H} < \overline{G}$ . Por hipótesis inductiva,  $\overline{H} < N_{\overline{G}}(\overline{H})$ . Del lema anterior,  $N_G(H) = N_{\overline{G}}(\overline{H})$ , y del teorema de correspondencia,  $H < N_G(H)$ , lo cual es una contradicción.  $\square$

**Proposición 1.1.17.** Sea  $G$  un grupo de orden  $p^2$ , con  $p$  primo. Entonces  $G \simeq \mathbb{Z}_{p^2}$  o  $G \simeq \mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_p$ .

Recordamos ahora algunos conceptos y resultados relacionados con solubilidad de grupos.

**Definición 1.1.18.** Si  $G$  es un grupo, una serie es una sucesión de subgrupos  $H_n \leq H_{n-1} \leq \dots \leq H_0$ . La serie se dice normal si  $H_i \trianglelefteq H_0$  para todo  $i$ , y se dice subnormal si  $H_{i+1} \trianglelefteq H_i$  para todo  $i < n$ . Los factores de una serie subnormal son los grupos  $H_i/H_{i+1}$ .

**Definición 1.1.19.** La serie derivada de un grupo  $G$  es la serie  $H_i = G^{(i)}$ , donde  $G^{(1)} = G'$  y  $G^{n+1} = (G^{(n)})'$ . Por convención,  $H_0 = G^{(0)} := G$ .

**Definición 1.1.20.** Un grupo finito  $G$  se dice soluble si cumple alguna (y por lo tanto, todas) de las siguientes condiciones equivalentes:

1. Existe una serie normal que empieza en 1 y termina en  $G$  cuyos factores son abelianos.
2. Existe una serie subnormal que empieza en 1 y termina en  $G$  cuyos factores son cíclicos.
3. Su serie derivada termina en el grupo trivial
4. Existe una serie de subgrupos característicos cuyos factores son abelianos.

**Definición 1.1.21.** Un grupo  $G$  se dice  $\pi$ -separable si posee una serie normal cuyos factores sucesivos son  $\pi$ -grupos o  $\pi'$ -grupos.

Un grupo  $G$  se dice  $\pi$ -soluble si posee una serie normal cuyos factores sucesivos son  $\pi$ -grupos solubles o  $\pi'$ -grupos.

**Proposición 1.1.22.** Todo cociente y todo subgrupo de un grupo soluble es soluble. Si  $H \trianglelefteq G$  entonces  $G$  es soluble si y solo si  $H$  y  $G/H$  son solubles.

**Proposición 1.1.23.** Si  $G$  es un  $p$ -grupo y  $p^\alpha \mid |G|$  entonces  $G$  posee un subgrupo normal de orden  $p^\alpha$ . En particular, todo  $p$ -grupo es soluble.

La proposición anterior nos dice que en particular un grupo  $p$ -separable es un grupo  $p$ -soluble.

Finalizamos esta sección enunciando algunos resultados sobre grupos finitos que necesitaremos en los próximos capítulos. Las demostraciones pueden encontrarse en [24].

**Teorema 1.1.24.** (*Burnside*) Todo grupo de orden  $p^\alpha q^\beta$ , con  $p, q$  primos, es soluble.

**Definición 1.1.25.** Un  $\pi$ -subgrupo de Hall de  $G$  es un  $\pi$ -subgrupo cuyo índice en  $G$  es coprimo con su orden. Es decir, es un  $H \leq G$  tal que  $|H|_\pi = |H|$  y  $|G : H|_{\pi'} = |G : H|$ .

**Teorema 1.1.26.** (*Schur–Zassenhaus*) Sea  $G$  un grupo finito y sea  $N$  un  $\pi$ -subgrupo de Hall que es normal en  $G$ . Entonces existe un  $\pi'$ -subgrupo  $H \leq G$  tal que  $NH = G$ . Es decir,  $G \simeq N \rtimes G/N$ . Un tal  $H$  se llama un complemento de  $N$ . Más aún, todos los complementos de  $N$  son conjugados.

**Proposición 1.1.27.** Un grupo soluble es  $\pi$ -separable para todo  $\pi$  conjunto de primos. En particular, un grupo soluble es  $p$ -soluble para todo  $p$  primo.

**Teorema 1.1.28.** (*Hall-Higman Lemma 1.2.3*) Si  $G$  es un grupo  $\pi$ -separable y  $\mathcal{O}_{\pi'}(G) = 1$  entonces  $\mathcal{O}_\pi(G) \supset C_G(\mathcal{O}_\pi(G))$ .

En particular el teorema anterior vale para grupos solubles y  $p$ -solubles.

## 1.2 Espacios topológicos finitos

En esta sección haremos un breve repaso de la teoría de espacios topológicos finitos, que comenzó a desarrollarse con los trabajos de Alexandroff ([1]), McCord ([25]) y Stong ([31]) y luego, más recientemente, se profundizó con los trabajos de Barmak y Minian ([8], [10], [6], [7]). En general no daremos las demostraciones de los resultados que enunciemos, y para ello referimos al lector el libro [6] de Jonathan Barmak, el cual vamos a seguir en esta sección.

Un espacio topológico finito (o espacio finito para abreviar) es un espacio topológico  $X$  con finitos puntos. Dado un punto  $x \in X$ , consideramos el conjunto  $U_x$  que es la intersección de todos los abiertos que contienen a  $x$ . Como  $X$  es finito, hay una cantidad finita de tales abiertos y por lo tanto  $U_x$  es un abierto. Es fácil ver que estos abiertos forman una base para la topología de  $X$  y que si  $U \subset X$  es un abierto entonces

$$U = \bigcup_{x \in U} U_x$$

Con esto, obtenemos una relación

$$y \in U_x \text{ si y solo si } U_y \subset U_x$$

lo cual nos permite definir un preorden en  $X$

$$y \leq x \text{ si } U_y \subset U_x$$

Recíprocamente, si uno tiene un preorden  $\leq$  en un conjunto  $X$ , podemos asignarle la topología generada por la base que consiste de los conjuntos  $U_x = \{y \in X : y \leq x\}$  para  $x \in X$ . Es inmediato chequear que esto efectivamente es una base para una topología y que tal construcción es inversa a la que realizamos anteriormente. Esto nos da una equivalencia entre espacios finitos y preórdenes en conjuntos finitos.

Dado un espacio finito  $X$ , la relación  $U_x = U_y$  nos dice, en términos del preorden que le asignamos, que  $x \leq y$  e  $y \leq x$ . El espacio finito  $X$  será  $T_0$  si y solo si  $U_x = U_y$  implica  $x = y$ . En términos de la correspondencia significa que  $X$  es un poset. A lo largo de este trabajo no vamos a hacer distinción entre posets y espacios finitos  $T_0$ .

Dado un elemento  $x$  de un espacio finito  $X$ , podemos considerar  $F_x$  el cerrado más chico que contiene a  $x$ , es decir, la clausura de  $\{x\}$ . Es fácil ver que en términos del preorden que le asignamos esto significa que  $F_x = \{y \in X : y \geq x\}$ . Cuando sea necesario notaremos  $F_x^X$  y  $U_x^X$  para referirnos a los conjuntos  $F_x$  y  $U_x$  del espacio  $X$ . Si consideramos  $X^{op}$ , el poset finito cuyo conjunto subyacente es  $X$  y con el preorden opuesto. Así,  $U_x^{X^{op}} = F_x^X$  y  $F_x^{X^{op}} = U_x^X$ . Notamos  $\hat{U}_x = U_x - x$  y  $\hat{F}_x = F_x - x$ .

Un elemento minimal de un poset  $X$  es un  $x \in X$  tal que  $y \leq x$  implica que  $y = x$ . Un mínimo para  $X$  es un  $x \in X$  tal que para todo  $y \in X$  se tiene que  $x \leq y$ . Análogamente se tiene la noción de elemento maximal y de máximo. Un poset finito siempre tiene elementos minimales y maximales, aunque no siempre tiene máximo o mínimo. Si  $x \in X$ , decimos que  $y \in X$  cubre a  $x$  si cada vez que  $x \leq z \leq y$  entonces  $z = x$  o bien  $z = y$ . En tal caso notamos  $x \prec y$ . Esto es equivalente a decir que  $F_x \cap U_y = \{x, y\}$ .

Una cadena en un poset  $X$  es un subconjunto  $c \subset X$  que está totalmente ordenado, mientras que una anticadena es un subconjunto  $a \subset X$  en la que dos elementos distintos no son comparable. La altura de un poset  $X$  es el número

$$h(X) = \sup \{|c| - 1 : c \subset X \text{ cadena}\}$$

y si  $x \in X$  definimos su altura como  $h(x) := h(U_x)$ .

Si  $A \subset X$  es un subespacio, entonces para todo  $x \in A$  vale que  $U_x^A = A \cap U_x$  y  $F_x^A = A \cap F_x$ . Esto nos dice que la topología de subespacio de  $A$  se corresponde con el preorden de  $X$  restringido a  $A$ . Si  $X$  e  $Y$  son espacios finitos y consideramos la topología producto en  $X \times Y$ , entonces  $U_{(x,y)} = U_x \times U_y$  para cada  $x \in X$  e  $y \in Y$ . Es decir, el orden en  $X \times Y$  es el orden coordenada a coordenada.

Una función  $f : X \rightarrow Y$  entre espacios finitos es continua si y solo si preserva el orden:  $x \leq y$  implica que  $f(x) \leq f(y)$ . En general a las funciones continuas entre espacios finitos  $T_0$  las llamaremos morfismos de posets o simplemente morfismos.

Es inmediato verificar que  $f : X \rightarrow Y$  es continua si y solo si  $f^{op} : X^{op} \rightarrow Y^{op}$ , la función que toma los mismos valores que  $f$  pero vista con la topología opuesta, es continua.

### Conexión y funciones homotópicas en espacios finitos

Si  $X$  es un espacio finito, entonces dos elementos  $x, y \in X$  están arcoconectados si y solo si existen puntos  $x_0, x_1, \dots, x_n \in X$  de manera que  $x_0 = x$ ,  $x_n = y$  y para todo  $i$  se los puntos  $x_i$  y  $x_{i+1}$  son comparables. Además, para cada  $x \in X$ , el abierto  $U_x$  es conexo, por lo que  $X$  es localmente arcoconexo. Luego un espacio finito  $X$  es conexo si y solo si es arcoconexo, si y solo si el preorden que le asignamos es conexo.

Si  $X$  e  $Y$  son dos espacios finitos y consideramos el espacio  $Y^X$  de las funciones continuas de  $X$  a  $Y$  con la topología compacto abierta, entonces el preorden de  $Y^X$  con esta topología se corresponde con el orden  $f \leq g$  si  $f(x) \leq g(x)$  para todo  $x \in X$ , donde  $f, g : X \rightarrow Y$  son continuas.

Una función  $H : [0, 1] \times X \rightarrow Y$  es continua si y solo si  $\hat{H} : [0, 1] \rightarrow Y^X$  es continua, donde  $\hat{H}(t) = (x \mapsto H(t, x))$  (ver discusión debajo de [6, Proposition 1.2.5] para más detalles). De esta manera, dos funciones  $f, g : X \rightarrow Y$  son homotópicas si y solo si están arcoconectadas en  $Y^X$ . Esto equivale a decir que existen funciones continuas  $f_0, f_1, \dots, f_n : X \rightarrow Y$  tales que  $f_0 = f$ ,  $f_n = g$  y  $f_i, f_{i+1}$  son comparables para todo  $i$ . En particular, si  $f \leq g$  entonces  $f \simeq g$ .

Si  $A \subset X$  es un subespacio, entonces dos funciones  $f, g : X \rightarrow Y$  son homotópicas relativas a  $A$  si y solo si están arcoconectadas en  $X^Y$  vía funciones que restringidas a  $A$  valen lo mismo. En tal caso notamos  $f \simeq g \text{ rel } A$ .

En conclusión, tenemos el siguiente teorema.

**Teorema 1.2.1.** ([6, Corollary 1.2.6]) *Si  $f, g : X \rightarrow Y$  son dos funciones continuas entre dos espacios finitos entonces  $f \simeq g$  si y solo si existen  $f_0, f_1, \dots, f_n : X \rightarrow Y$  continuas tales que  $f_0 = f$ ,  $f_n = g$  y  $f_i, f_{i+1}$  son comparables para todo  $i$ . Más aún, si  $A \subset X$  entonces  $f \simeq g \text{ rel } A$  si existen  $f_i$  como antes y que además  $f_i|_A = f|_A$  para todo  $i$ .*

En particular,  $f \simeq g$  si y solo si  $f^{op} \simeq g^{op}$ . De esta manera, dos espacios finitos tienen el mismo tipo homotópico si y solo si sus opuestos tienen el mismo tipo homotópico.

Por último, destacamos que para estudiar espacios finitos basta con considerar solo los que son  $T_0$ , ya que si  $X$  es un espacio finito entonces existe un subespacio  $X_0$  de  $X$  que es un retracto por deformación fuerte. Para una construcción del mismo véase [6, Proposition 1.3.1, Remark 1.3.2]. En este trabajo consideraremos siempre espacios finitos  $T_0$ .

## Beat Points y espacios minimales

Una de las ideas de Stong para estudiar el tipo homotópico de espacios finitos  $T_0$  fue la de ver qué sucedía cuando se realizaban *movimientos* dentro del poset, los cuales consistían en sacar o agregar puntos. Más precisamente, si  $x \in X$  es un punto que verifica cierta propiedad, entonces ¿qué relación homotópica existe entre  $X - x$  y  $X$ ? Esto es lo que da origen a la noción de beat point.

**Definición 1.2.2.** Un punto  $x$  en un espacio finito  $T_0 X$  se dice que es un up beat point si  $\hat{F}_x$  posee un mínimo. Decimos que  $x$  es un down beat point si  $\hat{U}_x$  posee un máximo. Si sucede alguna de estas dos decimos que  $x$  es un beat point. Cuando  $X$  no tiene beat points se dice que es un espacio minimal.

**Observación 1.2.3.** Un  $x \in X$  es un down beat point si y solo si existe un único  $y$  tal que  $y \prec x$ . Análogamente,  $x$  es un up beat point si y solo si existe un único  $y$  tal que  $x \prec y$ .

Notemos que  $x \in X$  es un beat point si y solo si es un beat point de  $X^{op}$ .

**Proposición 1.2.4.** Si  $x \in X$  es un beat point en un poset  $X$ , entonces  $X - x \hookrightarrow X$  es un retracto por deformación fuerte.

*Demostración.* Supongamos que  $x$  es un up beat point y sea  $y$  el mínimo de  $\hat{F}_x$ . Entonces la función  $r : X \rightarrow X - x$  definida como  $r(x) = y$  y la identidad en el resto es el retracto que buscamos.  $\square$

**Definición 1.2.5.** Un core de un espacio finito  $T_0$  es un retracto por deformación fuerte que es un espacio minimal.

Con este método de sacar puntos, podemos ir reduciendo el estudio del tipo homotópico del poset  $X$  a uno más chico, hasta llegar a uno minimal, es decir, a un core. Lo sorprendente de este método es que no importa en qué orden se vayan extrayendo los beat points, los espacios minimales a los que llegamos son siempre homeomorfos. O sea, todo espacio finito  $T_0$  posee un único core, módulo homeomorfismos.

Para ver esto, necesitamos la siguiente proposición.

**Proposición 1.2.6.** Si  $X$  es un espacio minimal y  $f : X \rightarrow X$  es homotópica a la identidad, entonces  $f = \text{id}_X$ .

*Demostración.* De teorema 1.2.1, aplicando un argumento inductivo y tomando posets opuestos, basta analizar el caso  $f \leq \text{id}_X$ . Si  $x \in X$  es minimal, entonces  $f(x) \leq x$  implica que  $f(x) = x$ . Supongamos entonces que  $x$  no es minimal y que ya sabemos que  $f|_{\hat{U}_x} = \text{id}_{\hat{U}_x}$ . Veamos que  $f(x) = x$ . Si no fuese así, entonces  $f(x) < x$ , por lo que

$y = f(x) \in \hat{U}_x$ . Además, si  $z \in \hat{U}_x$ , entonces  $z = f(z) \leq f(x) = y$ . Es decir,  $x$  es un down beat point, en contradicción con nuestra hipótesis de que  $X$  era un espacio minimal. Por lo tanto  $f(x) = x$ .  $\square$

**Corolario 1.2.7.** (Teorema de Clasificación) Una equivalencia homotópica entre espacios minimales es un homeomorfismo. Por lo tanto, todos los posibles cores de un espacio finito son homeomorfos.

*Demostración.* Sea  $f : X \rightarrow Y$  una equivalencia homotópica con inversa  $g : Y \rightarrow X$  entre espacios finitos  $T_0$ . Entonces  $gf : X \rightarrow X$  y  $fg : Y \rightarrow Y$  son dos funciones homotópicas a la identidad  $\text{id}_X$  e  $\text{id}_Y$  respectivamente. Por la proposición anterior, debe ser que  $gf = \text{id}_X$  y  $fg = \text{id}_Y$ .

Si  $X_0$  y  $X_1$  son dos cores de  $X$ , entonces  $X_0 \simeq X \simeq X_1$ , y como son espacios minimales, de lo anterior deducimos que son homeomorfos.  $\square$

**Observación 1.2.8.** Del teorema de clasificación, un espacio finito es contráctil si y solo si su core posee un solo punto. Es decir, si existe un punto que es un retracto por deformación fuerte. Sin embargo, no es verdad que todo punto sea un retracto por deformación fuerte en tal caso (ver [6, Example 2.2.6]), y en general esta propiedad es falsa en espacios no finitos.

## La teoría de McCord y equivalencias débiles

Recordemos que una equivalencia débil es una función continua entre dos espacios topológicos que induce una biyección en todos los grupos de homotopía. En general, una equivalencia débil no es una equivalencia homotópica, y que dos espacios tengan los mismos grupos de homotopía no implican que exista una equivalencia débil entre ellos. Sin embargo, lo que sí vale es que para todo espacio topológico  $X$  existe un CW complejo y una equivalencia débil del CW a  $X$ , y toda equivalencia débil entre CW complejos es una equivalencia homotópica (teorema de Whitehead).

El teorema de McCord es una herramienta fundamental en la teoría de espacios finitos. A todo espacio finito  $T_0$   $X$  podemos asignarle un complejo simplicial  $\mathcal{K}(X)$  cuyos simplices son las cadenas no vacías de elementos de  $X$ . Utilizando el teorema de McCord veremos que existe una equivalencia débil entre  $|\mathcal{K}(X)|$  y  $X$ . Esto nos dice que todo espacio finito tiene el mismo tipo homotópico débil que un complejo simplicial.

**Definición 1.2.9.** Si  $X$  es un espacio topológico y  $\mathcal{U}$  es un cubrimiento por abiertos de  $X$ , decimos que  $\mathcal{U}$  es una base como cubrimiento si  $\mathcal{U}$  verifica las condiciones para servir de base a una topología (no necesariamente la que ya tiene  $X$ ). Esto es, si  $U, V \in \mathcal{U}$  y  $x \in X$  entonces existe  $W \in \mathcal{U}$  tal que  $x \in W \subset U \cap V$ .

En el caso de un espacio finito  $X$ , los abiertos básicos  $\{U_x\}_{x \in X}$  forma una base como cubrimiento, y es la que usaremos en general para espacios finitos.

**Teorema 1.2.10.** (McCord) Supongamos que  $X$  e  $Y$  son dos espacios topológicos, que  $f : X \rightarrow Y$  es una función continua y que existe  $\mathcal{U}$  una base como cubrimiento de  $Y$  de manera que  $f|_{f^{-1}(U)} : f^{-1}(U) \rightarrow U$  es una equivalencia débil para todo  $U \in \mathcal{U}$ . Entonces  $f$  es una equivalencia débil.

El teorema de McCord está muy relacionado con el Teorema A de Quillen. La demostración original de McCord se encuentra en [25, Theorem 6]. Para ver la relación entre el teorema de McCord y el Teorema A de Quillen, ver [7].

**Observación 1.2.11.** Si  $X$  e  $Y$  son dos espacios finitos  $T_0$  y  $f : X \rightarrow Y$  es una función continua entre ellos, entonces  $\mathcal{K}(f) : \mathcal{K}(X) \rightarrow \mathcal{K}(Y)$  definida por  $\mathcal{K}(f)(x) = f(x)$  es un morfismo simplicial. De hecho,  $\mathcal{K}(X) = \mathcal{K}(X^{op})$  y  $\mathcal{K}(f) = \mathcal{K}(f^{op})$ .

Sea  $X$  un espacio finito  $T_0$ . Si  $\alpha \in |\mathcal{K}(X)|$ , entonces existe una cadena  $x_0 < x_1 < \dots < x_n$  de elementos de  $X$  y escalares  $t_0, \dots, t_n > 0$  tales que  $\alpha = \sum_{i=0}^n t_i x_i$  y  $\sum_{i=0}^n t_i = 1$ . Definimos entonces  $\text{Supp}(\alpha) = \{x_0, \dots, x_n\}$  y  $\mu_X(\alpha) = \min(\text{Supp}(\alpha)) = x_0$ . El siguiente teorema nos dice que la función  $\mu_X : |\mathcal{K}(X)| \rightarrow X$  es una equivalencia débil. Aquí solo comentaremos la idea general de la demostración. Los detalles pueden verse en [6, Theorem 1.4.6].

**Teorema 1.2.12.** La función  $\mu_X : |\mathcal{K}(X)| \rightarrow X$  es una equivalencia débil.

*Demostración.* (Idea) Tenemos que ver que  $\mu_X$  es una función continua y que es una equivalencia débil. Lo primero que notamos, es que para ver que es continua basta con probar que  $\mu_X^{-1}(U_x)$  es abierto en  $|\mathcal{K}(X)|$  para todo  $x \in X$ . Por otro lado, la idea para ver que es una equivalencia débil es utilizar el teorema de McCord.

Si  $L = \mathcal{K}(X - U_x)$ , entonces  $L$  es el subcomplejo de  $\mathcal{K}(X)$  que consiste de las cadenas de elementos de  $X$  que no son menores o iguales a  $x$ . Es decir, el subcomplejo pleno de  $\mathcal{K}(X)$  generado por los vértices que no están en  $U_x$ . Notar que podría suceder que  $L = \emptyset$ . De esta manera, es fácil chequear que

$$\mu_X^{-1}(U_x) = |\mathcal{K}(X)| - |L|$$

En particular esto nos dice que  $\mu_X$  es continua.

Para aplicar el teorema de McCord, debemos chequear que

$$\mu_X|_{\mu_X^{-1}(U_x)} : \mu_X^{-1}(U_x) \rightarrow U_x$$

es una equivalencia débil. Como  $U_x$  es contráctil, es suficiente con ver que  $\mu_X^{-1}(U_x) = |\mathcal{K}(X)| - |L|$  es contráctil. De hecho, lo que se puede probar es que  $|\mathcal{K}(U_x)|$  es un retracto por deformación fuerte de  $|\mathcal{K}(X)| - |L|$ , y  $|\mathcal{K}(U_x)|$  es contráctil por ser un cono.  $\square$

**Observación 1.2.13.** Si  $f : X \rightarrow Y$  es una función continua entre espacios finitos  $T_0$ , entonces  $f\mu_X = \mu_Y|\mathcal{K}(f)|$ . Es decir, el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} |\mathcal{K}(X)| & \xrightarrow{|\mathcal{K}(f)|} & |\mathcal{K}(Y)| \\ \downarrow \mu_X & & \downarrow \mu_Y \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

En particular,  $f$  es una equivalencia débil si y solo si  $|\mathcal{K}(f)|$  es una equivalencia débil, si y solo si es una equivalencia homotópica.

De esto mismo, como  $|\mathcal{K}(X)| = |\mathcal{K}(X^{op})|$  y  $|\mathcal{K}(f)| = |\mathcal{K}(f^{op})|$ , es decir, desde el complejo simplicial no distinguimos entre un poset y su opuesto, se sigue que  $f : X \rightarrow Y$  es una equivalencia débil si y solo si  $f^{op}$  es una equivalencia débil.

Si  $K$  es un complejo simplicial finito, podemos asociarle el poset de caras de  $K$  que es el poset  $\mathcal{X}(K)$  cuyos elementos son los símlices de  $K$  ordenados por la inclusión. Si  $f : K \rightarrow L$  es un morfismo entre complejos simpliciales, podemos asignarle un morfismo entre los posets de caras  $\mathcal{X}(f) : \mathcal{X}(K) \rightarrow \mathcal{X}(L)$  definida por  $\mathcal{X}(f)(\sigma) = f(\sigma)$ . Que  $f$  sea un morfismo simplicial nos asegura que  $\mathcal{X}(f)$  sea un morfismo de posets bien definido.

Recordemos que  $K'$ , la subdivisión baricéntrica de  $K$ , es el complejo simplicial cuyos vértices son los símlices de  $K$  y cuyos símlices son las cadenas no vacías de símlices de  $K$ . Con la notación de lo anterior, vemos que  $K' = \mathcal{K}(\mathcal{X}(K))$ , y que si  $f : K \rightarrow L$  es un morfismo simplicial entonces  $\mathcal{K}(\mathcal{X}(f)) : K' \rightarrow L'$  es el morfismo inducido en la subdivisión baricéntrica.

Sea  $h_K : |K'| \rightarrow |K|$  el homeomorfismo  $h_K(\sigma) = b(\sigma)$ , donde  $b(\sigma) = \sum_{v \in \sigma} \frac{1}{\#\sigma} v$  es el baricentro de  $\sigma$ , y definamos  $\mu_K : |K| \rightarrow \mathcal{X}(K)$  como  $\mu_K = \mu_{\mathcal{X}(K)} h_K^{-1}$ . Como  $\mu_{\mathcal{X}(K)}$  es una equivalencia débil y  $h_K$  es un homeomorfismo, resulta que  $\mu_K$  es una equivalencia débil. Además, para todo morfismo simplicial  $f : K \rightarrow L$  entre complejos finitos, se tiene un diagrama conmutativo salvo homotopía

$$\begin{array}{ccc} |K| & \xrightarrow{|f|} & |L| \\ \downarrow \mu_K & & \downarrow \mu_L \\ \mathcal{X}(K) & \xrightarrow{\mathcal{X}(f)} & \mathcal{X}(L) \end{array}$$

Para una demostración precisa de este hecho ver [6, Proposition 1.4.13]. En particular,  $|f| : |K| \rightarrow |L|$  es una equivalencia homotópica si y solo si  $\mathcal{X}(f) : \mathcal{X}(K) \rightarrow \mathcal{X}(L)$  es una equivalencia débil.

Del teorema de McCord y de estas observaciones, se puede deducir el famoso Quillen's Fiber Theorem, que puede ser enunciado de la siguiente manera:

**Teorema 1.2.14.** (McCord, Quillen) *Sea  $f : X \rightarrow Y$  un morfismo entre posets tal que  $f^{-1}(U_y)$  es homotópicamente trivial para todo  $y \in Y$ . Entonces  $f$  es una equivalencia débil. Lo mismo vale si suponemos que  $f^{-1}(F_y)$  es homotópicamente trivial para todo  $y \in Y$ .*

*Demostración.* Que  $|\mathcal{K}(f^{-1}(U_y))|$  sea contráctil es equivalente a decir que  $f^{-1}(U_y)$  es homotópicamente trivial, y por lo tanto del teorema de McCord obtenemos que  $f : X \rightarrow Y$  es una equivalencia débil. Luego  $|\mathcal{K}(f)|$  es una equivalencia homotópica.

Para el otro caso podemos tomar los posets opuestos y proceder de la misma manera. □

El teorema anterior se puede encontrar también en [28, Proposition 1.6], donde Quillen refiere a [27, Theorem A] y al final de [27, Section 7] para una demostración.

Por último, veamos la relación que existe entre equivalencias homotópicas entre posets y morfismos contiguos entre complejos simpliciales.

Recordemos que si  $f, g : K \rightarrow L$  son dos morfismos simpliciales, decimos que son elementalmente contiguos si  $f(\sigma) \cup g(\sigma)$  es un símplex de  $L$  para todo símplex  $\sigma$  de  $K$ . En general,  $f$  y  $g$  se dicen contiguos si existe una serie de morfismos simpliciales  $f_0, f_1, \dots, f_n : K \rightarrow L$  de manera que  $f_i$  y  $f_{i+1}$  son contiguos para todo  $i$ .

Un hecho estándar de topología algebraica es que dos morfismos contiguos entre complejos simpliciales inducen funciones homotópicas en la realizaciones geométricas.

Si  $f, g : X \rightarrow Y$  son dos funciones continuas entre espacios finitos tales que  $f \leq g$  entonces  $\mathcal{K}(f)$  y  $\mathcal{K}(g)$  son elementalmente contiguos. En particular, si  $f \simeq g$  entonces  $\mathcal{K}(f)$  y  $\mathcal{K}(g)$  son contiguos.

Análogamente, si  $\varphi, \psi : K \rightarrow L$  son dos morfismos simpliciales contiguos entonces  $\mathcal{X}(\varphi), \mathcal{X}(\psi) : \mathcal{X}(K) \rightarrow \mathcal{X}(L)$  son homotópicas.

## Algunas construcciones especiales

En esta sección veremos algunas construcciones a partir de espacios finitos que nos resultarán de gran utilidad a lo largo de nuestro trabajo. Todas ellas se pueden encontrar en el libro de Barmak [6].

### Colapsos fuertes y colapsos

**Definición 1.2.15.** Si  $X$  es un poset y  $x \in X$  es un beat point, decimos que hay un colapso fuerte elemental de  $X$  a  $X - x$  y notamos  $X \searrow^e X - x$ . Decimos que  $X$  colapsa fuertemente a un subespacio  $Y$  si existe una serie de colapsos fuertes elementales que empiezan en  $X$  y terminan en  $Y$ . Notamos  $X \searrow Y$ .

**Observación 1.2.16.** De la definición se deduce que  $X$  colapsa fuertemente a un subespacio  $Y$  si y solo si  $Y$  se obtiene de  $X$  removiendo beat points. En particular,  $Y \subset X$  es un retracto por deformación fuerte. Lo sorprendente es que estos movimientos caracterizan completamente los retracts por deformación fuertes.

**Proposición 1.2.17.** Si  $X$  es un poset, entonces  $Y \subset X$  es un retracto por deformación fuerte si y solo si  $X \searrow Y$ .

*Demostración.* Ver [6, Section 2.2, “Minimal Pairs”]. □

La condición de beat point es bastante fuerte, puesto que un  $x \in X$  es un beat point si y solo si  $\hat{F}_x$  posee un mínimo o  $\hat{U}_x$  posee un máximo. Uno podría requerir algo un poco más débil, como por ejemplo, que  $\hat{F}_x$  o  $\hat{U}_x$  sea contráctil. Esto da la noción de weak point y describe lo que se llama tipo homotópico simple en espacios finitos, teoría desarrollada por Barmak y Minian en [8].

**Definición 1.2.18.** Sea  $X$  un poset. Decimos que  $x \in X$  es un up weak point si  $\hat{F}_x$  es contráctil. Decimos que  $x$  es un down weak point si  $\hat{U}_x$  es contráctil. Si alguna de estas dos sucede, decimos que  $x$  es un weak point.

**Definición 1.2.19.** Decimos que un poset  $X$  colapsa elementalmente a  $X - x$ , con  $x \in X$  cuando  $x \in X$  es un weak point. Notamos  $X \searrow^e X - x$ . Si  $Y \subset X$  decimos que  $X$  colapsa a  $Y$ , y notamos  $X \searrow Y$  si  $Y$  se obtiene de  $X$  a partir de ir sacando weak points. Decimos que  $Y$  se expande a  $X$ , y notamos  $Y \nearrow X$ , si  $X \searrow Y$ . Un weak core de  $X$  es un  $Y \subset X$  tal que  $X \searrow Y$  e  $Y$  no tiene weak points.

**Observación 1.2.20.** En los colapsos fuertes, cuando llegábamos a un espacio que no tiene más beat points decíamos que era un core de nuestro poset y probamos que estos eran todos homeomorfos entre sí, es decir, que no importaba cómo iba eligiendo los beat points para ir sacando, siempre llegaba al mismo espacio. En el caso de los colapsos esto no es necesariamente cierto. De hecho existen espacios finitos que colapsan a distintos subespacios que no son homotópicos. Véase [6] para tales contraejemplos.

**Definición 1.2.21.** Si  $X$  e  $Y$  son dos posets, decimos que  $X$  e  $Y$  tienen el mismo tipo homotópico simple si existe una serie de espacios finitos  $X = X_0, X_1, \dots, X_n = Y$  de manera que para todo  $i$  se tiene que  $X_i \searrow X_{i+1}$  o bien  $X_{i+1} \searrow X_i$ . Es decir, si puedo llegar de  $X$  a  $Y$  a partir de colapsos y expansiones. Notamos  $X \rightsquigarrow Y$ .

El siguiente lema nos permitirá ver que los colapsos preservan el tipo homotópico débil. Es decir, que dos espacios que tienen el mismo tipo homotópico simple, en particular tienen el mismo tipo homotópico débil.

**Lema 1.2.22.** Si  $x \in X$  es un weak point, entonces la inclusión  $i : X - x \hookrightarrow X$  es una equivalencia débil.

*Demostración.* Pasando por los opuestos podemos suponer sin pérdida de generalidad que  $x$  es un down weak point. Apliquemos el Quillen's Fiber Theorem 1.2.14. Si  $y \in X$  entonces  $i^{-1}(U_y) = U_y - x$  tiene como máximo a  $y$  si  $y \neq x$  y si  $y = x$  entonces  $U_y - x = \hat{U}_x$  es contráctil.  $\square$

Del lema anterior se deduce de que si  $X \searrow Y$  entonces la inclusión  $Y \hookrightarrow X$  es una equivalencia débil. Por lo tanto, si  $X \rightsquigarrow Y$ , pasando por los complejos asociados, vemos que  $X$  e  $Y$  tienen el mismo tipo homotópico débil.

Lo interesante de la homotopía simple de espacios finitos es que describe la clásica homotopía simple entre complejos simpliciales (ver [6, Theorem 4.2.11] y [8])

### El join de espacios finitos

Cuando trabajamos con espacios topológicos en general, tenemos la idea del join entre dos espacios  $X$  e  $Y$  el cual es el espacio que une a cada punto de  $X$  con uno de  $Y$  vía un segmento. Si repetimos esta construcción para espacios finitos perdemos la finitud. Por lo tanto, a continuación daremos una definición de join en espacios finitos que verifica propiedades análogas a la del join usual.

**Definición 1.2.23.** Si  $X$  e  $Y$  son dos espacios finitos  $T_0$ , el join no-Hausdorff es el espacio finito  $X * Y$  cuyo conjunto subyacente es  $X \coprod Y$  que mantiene el orden en  $X$  y el orden de  $Y$  y que además  $x < y$  si  $x \in X$  e  $y \in Y$ .

Básicamente, el join de espacios finitos  $T_0$  a nivel del diagrama de Hasse lo que hace es poner un diagrama arriba del otro, o sea, poner todo minimal de  $Y$  por encima de todo maximal de  $X$ .

**Definición 1.2.24.** Si  $X$  es un poset y  $x \in X$ , el star de  $x$  en  $X$  es el subespacio  $C_x = U_x \cup F_x$  y el link de  $x$  en  $X$  es el subespacio  $\text{Lk}(x) = \hat{U}_x * \hat{F}_x$ .

La siguiente proposición es de gran utilidad para estudiar la contractibilidad del join de espacios finitos.

**Proposición 1.2.25.** Si  $X$  e  $Y$  son dos espacios finitos  $T_0$  entonces  $X * Y$  es contráctil si y solo si  $X$  o  $Y$  es contráctil.

*Demostración.* Ver [6, Proposition 2.7.3].  $\square$

**Definición 1.2.26.** Si  $K$  y  $L$  son complejos simpliciales (disjuntos), el join de estos dos es el complejo  $K * L$  cuyos simplices son de la forma  $\sigma \cup \tau$  con  $\sigma \in K$  y  $\tau \in L$ , posiblemente alguno de los dos vacío (no ambos). Es decir,

$$K * L = K \cup L \cup \{\sigma \cup \tau : \sigma \in K, \tau \in L\}$$

A partir de las definiciones, es inmediato verificar lo siguiente:

**Proposición 1.2.27.** Si  $X$  e  $Y$  son espacios finitos, entonces  $\mathcal{K}(X * Y) = \mathcal{K}(X) * \mathcal{K}(Y)$ . Si  $K, L$  son complejos simpliciales finitos entonces  $\mathcal{X}(K * L) = \mathcal{X}(K) * \mathcal{X}(L)$

**Corolario 1.2.28.** Si  $x$  es un elemento de un poset  $x$  y  $K = \mathcal{K}(X)$ , entonces  $\text{Lk}_K(x) = \mathcal{K}(\text{Lk}(x))$  y  $\text{St}_K(x) = \mathcal{K}(C_x)$

## El cilindro no-Hausdorff

La noción de cilindro no-Hausdorff fue introducida por Barmak y Minian en [8] y es una herramienta muy útil a la hora de demostrar teoremas con espacios finitos.

**Definición 1.2.29.** Si  $f : X \rightarrow Y$  es un morfismo de posets, definimos el cilindro no-Hausdorff de  $f$  como el espacio finito  $B_f$  con conjunto subyacente  $X \coprod Y$  y cuyo orden es  $x \leq y$  si  $f(x) \leq y$  para  $x \in X$  e  $y \in Y$ , manteniendo el orden en  $X$  y en  $Y$ .

Veamos que esta construcción tiene propiedades análogas a las del cilindro clásico que conocemos de topología.

**Proposición 1.2.30.** Si  $f : X \rightarrow Y$  es un morfismo de posets, entonces  $Y \subset B_f$  es un retracto por deformación fuerte y  $f$  es una equivalencia homotópica si y solo si la inclusión  $i : X \hookrightarrow B_f$  es una equivalencia homotópica.

*Demostración.* Sean  $i : X \hookrightarrow B_f$  y  $j : Y \hookrightarrow B_f$  las inclusiones y sea  $r : B_f \rightarrow Y$  la función dada por  $r(x) = f(x)$  si  $x \in X$ . Entonces  $r$  es un morfismo de posets que es la identidad sobre  $Y$  y que además  $ri = f$ ,  $jr \leq \text{id}_{B_f}$  y  $rj = \text{id}_Y$ . Luego  $Y \subset B_f$  es un retracto por deformación fuerte y  $f$  es una equivalencia homotópica si y solo si  $i : X \hookrightarrow B_f$  lo es.  $\square$

## Retículos reducidos

Si  $X$  es un poset, decimos que  $x, y \in X$  poseen un supremo si  $F_x \cap F_y$  posee un mínimo (y en particular es no vacío). En tal caso, notamos  $x \vee y = \sup\{x, y\} = \min F_x \cap F_y$ . De manera análoga, decimos que existe el ínfimo entre  $x$  e  $y$  si  $U_x \cap U_y$  posee un máximo, y en tal caso notamos  $x \wedge y = \inf\{x, y\} = \max U_x \cap U_y$ .

**Definición 1.2.31.** Un retículo (reticulado, red o lattice) es un poset  $X$  tal que para todo par de elementos  $x, y \in X$  existen  $x \vee y$  e  $x \wedge y$ .

En particular, todo retículo posee un máximo y un mínimo: si  $x \in X$  es un elemento maximal, entonces para todo  $y \in X$  se debe tener que  $x \leq x \wedge y$ , y de la maximalidad  $x = x \wedge y \geq y$ . Análogamente se hace el mínimo. Por lo tanto, desde el punto de vista homotópico, los retículos no son muy interesantes puesto que son siempre contráctiles.

Lo que sí podemos hacer es estudiar aquellos posets que provienen de un retículo al que le sacamos el máximo y el mínimo. Esto es, los posets  $X$  tales que  $\{*\} * X * \{*\}$  es un retículo. La siguiente definición fue introducida por Barmak en [6].

**Definición 1.2.32.** Un retículo reducido es un poset  $X$  tal que  $\{*\} * X * \{*\}$  es un retículo.

Se pueden chequear las siguientes equivalencias.

**Proposición 1.2.33.** En un poset  $X$  son equivalentes:

1.  $X$  es un retículo reducido
2. Para todo par de elementos  $x, y \in X$  acotados superiormente, existe el supremo  $x \vee y \in X$
3. Para todo par de elementos  $x, y \in X$  acotados inferiormente, existe el ínfimo  $x \wedge y \in X$
4. Todo conjunto acotado inferiormente posee un ínfimo y todo conjunto acotado superiormente posee un supremo.

**Proposición 1.2.34.** Si  $X$  es un reticulado reducido e  $Y \subset X$  es un retracto por deformación fuerte, entonces  $Y$  es un reticulado reducido.

*Demostración.* Por inducción, basta ver el caso  $Y = X - x$  con  $x \in X$  un beat point. Tomando el poset opuesto, podemos suponer sin pérdida de generalidad que  $x$  es un down beat point. Sean  $y, z \in Y$  acotados superiormente en  $Y$ . Entonces existe  $w = y \vee z \in X$  el supremo por ser  $X$  un retículo reducido. Si  $w \neq x$  ya estamos. En caso contrario,  $x = y \vee z$ . Como  $x$  es un down beat point, existe un único  $x' \prec x$ . Luego  $y, z \leq x$  implica que  $y, z \leq x'$  y por lo tanto  $x = y \vee z \leq x'$ , una contradicción.  $\square$

Para un poset  $X$ , consideramos los conjuntos  $M(X) = \{x \in X : \text{maximal}\}$  y  $m(X) = \{x \in X : \text{minimal}\}$ .

**Definición 1.2.35.** Si  $X$  es un retículo reducido, definimos los subposets

$$i(X) = \{\inf(A) : A \subset M(X) \text{ acotado inferiormente}\}$$

$$s(X) = \{\sup(A) : A \subset m(X) \text{ acotado superiormente}\}$$

Sea  $X$  un poset y sea  $x \in X$ . Definimos  $M(x)$  como el subconjunto de maximales de  $X$  que están por encima de  $x$ , es decir,  $M(x) = M(F_x)$ . Análogamente, definimos  $m(x)$  como el subconjunto de minimales de  $X$  que están por debajo de  $x$ , es decir  $m(x) = m(U_x)$ .

La siguiente proposición fue demostrada por Stong en [32].

**Proposición 1.2.36.** (Stong) Si  $X$  es un retículo reducido, entonces  $i(X), \mathfrak{s}(X) \subset X$  son retracts por deformación fuertes.

*Demostración.* Si  $r_i : x \in X \mapsto \inf(M(x)) \in i(X)$  y  $r_s : x \in X \mapsto \sup(m(x)) \in \mathfrak{s}(X)$  y  $i_i : i(X) \hookrightarrow X$ ,  $i_s : \mathfrak{s}(X) \hookrightarrow X$  son las inclusiones, entonces

$$\begin{aligned} r_i i_i &= \text{id}_{i(X)} & i_i r_i &\geq \text{id}_X \\ r_s i_s &= \text{id}_{\mathfrak{s}(X)} & i_s r_s &\leq \text{id}_X \end{aligned}$$

□

**Observación 1.2.37.** Si  $X$  es un retículo reducido, entonces  $i(i(X)) = i(X)$ . De la misma manera,  $\mathfrak{s}(\mathfrak{s}(X)) = \mathfrak{s}(X)$ . Por lo tanto, tenemos dos sucesiones

$$\begin{aligned} X \supset i(X) \supset \mathfrak{s}(i(X)) \supset i(\mathfrak{s}(i(X))) \supset \dots \\ X \supset \mathfrak{s}(X) \supset i(\mathfrak{s}(X)) \supset \mathfrak{s}(i(\mathfrak{s}(X))) \supset \dots \end{aligned}$$

que en algún momento se estancan por finitud. Al  $(n+1)$ -ésimo término de la primera sucesión lo notamos  $X_n$ . Análogamente, notamos  $X^n$  al  $(n+1)$ -ésimo término de la segunda sucesión.

**Proposición 1.2.38.** Sea  $X$  un retículo reducido. Son equivalentes:

1.  $X$  es un espacio minimal
2.  $X = i(X) = \mathfrak{s}(X)$

*Demostración.* Si  $X$  es un espacio minimal, como  $i(X)$  y  $\mathfrak{s}(X)$  son retracts por deformación fuertes de  $X$ , debe ser que  $X = i(X) = \mathfrak{s}(X)$ .

Supongamos entonces que  $X = i(X) = \mathfrak{s}(X)$  y veamos que  $X$  es minimal. Si no fuese así, existe un beat point  $x \in X$ . Supongamos que  $x$  es un down beat point. Entonces existe un único  $y \prec x$ . Como  $x \in \mathfrak{s}(X)$ , existen minimales  $x_1, \dots, x_n \in X$  tales que  $x = \sup\{x_1, \dots, x_n\}$ . Pero entonces  $x_i \leq x$  implica que  $x_i \leq y$  para todo  $i$ , y de esta manera  $x = \sup\{x_1, \dots, x_n\} \leq y$ , una contradicción. Análogamente se hace el caso en que  $x$  es un up beat point. □

**Observación 1.2.39.** De la observación y proposición anterior deducimos que el subposet donde se estancan las sucesiones  $X_n$  y  $X^n$  son cores de  $X$ .

**Definición 1.2.40.** Un retículo reducido  $X$  se dice atómico si todo elemento de  $X$  es el supremo de un conjunto de minimales. Equivalentemente,  $X = \mathfrak{s}(X)$

Decimos que  $X$  es coatómico si  $X^{op}$  es atómico. Esto es, si todo elemento de  $X$  es el ínfimo de un conjunto de maximales. Equivalentemente,  $X = i(X)$ .

Con estos nombres podemos reescribir la proposición 1.2.38 de la siguiente manera:

**Proposición 1.2.41.** Un retículo reducido es un espacio minimal si y solo si es atómico y coatómico.

Existe otra caracterización para los puntos de  $i(X)$  y  $\mathfrak{s}(X)$ . La demostración de la siguiente proposición es simple y la evitaremos.

**Proposición 1.2.42.** Para un retículo reducido  $X$  se tiene que  $i(X) = \{x \in X : x = \inf(M(x))\}$  y análogamente  $\mathfrak{s}(X) = \{x \in X : x = \sup(m(x))\}$ .

También podemos describir cómo se obtiene  $i(X)$  a partir de  $X$  en término de beat points.

Si tenemos una serie de inclusiones del estilo  $A \subset Y \subset X$  con  $X, Y$  retículos reducidos y  $A$  un subconjunto acotado superiormente o inferiormente en  $Y$ , entonces  $\inf_Y(A)$  y  $\sup_Y(A)$  denotan el ínfimo y el supremo de  $A$  respectivamente visto dentro del poset  $Y$ .

**Proposición 1.2.43.** Sea  $X$  un retículo reducido. Entonces  $i(X)$  se obtiene de  $X$  removiendo up beat points. Análogamente,  $\mathfrak{s}(X)$  se obtiene de  $X$  removiendo down beat points. Además, si  $y \notin i(X)$  entonces  $i(X - y) = i(X)$ . Análogamente, si  $y \notin \mathfrak{s}(X)$  entonces  $\mathfrak{s}(X - y) = \mathfrak{s}(X)$ .

*Demostración.* Si  $y \in X - i(X)$ , utilizando la proposición 1.2.42 no es difícil verificar que  $i(X - y) = i(X)$ .

Si  $y$  un elemento maximal del poset  $X - i(X)$  entonces  $\inf(M(y)) = \min(\hat{F}_y)$ . Luego  $y$  es un up beat point de  $X$ .

Así, vemos que si elegimos  $y \in X - i(X)$  entonces  $i(X) = i(X - y)$ . Si además lo elegimos maximal, entonces  $y$  es un up beat point de  $X$ . Como  $X - y$  es un retículo reducido con menos puntos, inductivamente podemos llegar de  $X - y$  a  $i(X - y) = i(X)$  removiendo up beat points.

El caso de  $\mathfrak{s}(X)$  se obtiene tomando el poset opuesto y notando que  $i(X^{op}) = \mathfrak{s}(X)$ .  $\square$

**Proposición 1.2.44.** Todo retículo reducido atómico no posee down beat points, y todo coatómico no posee up beat points.

*Demostración.* Sea  $X$  un retículo reducido atómico. Sea  $x \in X$ . Como  $X = \mathfrak{s}(X)$ , vale que  $x = \sup(m(x))$ . Si  $x$  es un down beat point, entonces existe un único  $y \prec x$ . De esta manera, para todo  $z \in m(x)$  vale que  $z \leq y$ , y en consecuencia  $x = \sup(m(x)) \leq y$ . Esto es absurdo.

El caso de coatómico es análogo.  $\square$

### 1.3 $G$ -posets y tipos homotópicos equivariantes

En esta sección analizaremos brevemente los  $G$ -espacios y en particular los  $G$ -posets. Estos son espacios topológicos con una acción continua de un grupo finito  $G$ . En general vamos a seguir [6, Chapter 8]. Las ideas originales de estos resultados pueden encontrarse en [32].

Sea  $G$  un grupo finito. Un  $G$ -espacio es un espacio topológico  $X$  junto con una acción (a derecha) del grupo  $G$  de manera que si  $g \in G$  entonces la función  $x \in X \mapsto x^g \in X$  es continua. Una función continua  $f : X \rightarrow Y$  entre dos  $G$ -espacios  $X$  e  $Y$  se dice equivariante o  $G$ -equivariante si  $f(x^g) = f(x)^g$  para todo  $g \in G$  y para todo  $x \in X$ . Si  $f_0, f_1 : X \rightarrow Y$  son dos funciones equivariantes, una homotopía  $G$ -equivariante o  $G$ -homotopía entre  $f_0$  y  $f_1$  es una función continua  $H : X \times I \rightarrow Y$  tal que  $H(-, 0) = f_0$ ,  $H(-, 1) = f_1$  y para cada  $t \in I$ , la función  $H(-, t)$  es  $G$ -equivariante. En tal caso decimos que  $f_0$  y  $f_1$  son  $G$ -homotópicas y notamos  $f_0 \simeq_G f_1$ .

Un subespacio  $A$  de un  $G$ -espacio  $X$  se dice  $G$ -invariante, o invariante, si cada vez que  $a \in A$  y  $g \in G$ , entonces  $a^g \in A$ . Es decir, si  $A$  es cerrado para la acción de  $G$ .

Si  $f_0, f_1 : X \rightarrow X$ , decimos que  $f_0 \simeq_G f_1$  rel  $A$ , para un subespacio invariante  $A \subset X$  si existe una  $G$ -homotopía  $H : X \times I \rightarrow X$  entre  $f_0$  y  $f_1$  que induce la identidad en los elementos de  $A$ .

Un subespacio invariante  $A$  es un retracto por deformación fuerte equivariante si existe una función  $G$ -equivariante  $r : X \rightarrow A$  tal que  $ri = \text{id}_A$  e  $ir \simeq_G \text{id}_X$  rel  $A$ , donde  $i : A \rightarrow X$  es la inclusión.

Una función  $G$ -equivariante  $f : X \rightarrow Y$  entre dos  $G$ -espacios es una  $G$ -equivalencia si existe otra función  $G$ -equivariante  $g : Y \rightarrow X$  de manera que  $gf \simeq_G \text{id}_X$  y  $fg \simeq_G \text{id}_Y$ . En tal caso decimos que  $f$  es una  $G$ -equivalencia y que los espacios  $X$  e  $Y$  son  $G$ -equivalentes, y notamos  $X \simeq_G Y$ . También decimos que  $X$  e  $Y$  tienen el mismo tipo homotópico  $G$ -equivariante.

Un  $G$ -poset es un poset  $X$  que es un  $G$ -espacio cuando lo vemos como espacio finito. Esto equivale a decir que  $G$  actúa en el conjunto  $X$  y que la acción preserva el orden: cada vez que  $x < y$  y  $g \in G$ , se tiene que  $x^g < y^g$ . Una función  $G$ -equivariante entre dos  $G$ -posets es equivalente a tener un morfismo de posets que preserve la acción. También lo llamaremos  $G$ -morfismo o  $G$ -mapa.

Se pueden chequear las siguientes proposiciones.

**Proposición 1.3.1.** Sean  $f, g : X \rightarrow Y$  dos  $G$ -morfismos entre dos  $G$ -posets, y sea  $A \subset X$  un subespacio  $G$ -invariante. Entonces  $f \simeq_G g$  rel  $A$  si y solo si existen  $G$ -morfismos  $f_0, f_1, \dots, f_n : X \rightarrow Y$  tales que  $f_0 = f$ ,  $f_1 = g$ , y para cada  $i$  vale que  $f_i|_A = \text{id}_A$  y  $f_i, f_{i+1}$  son comparables.

**Proposición 1.3.2.** Si  $f : X \rightarrow Y$  y  $g : Y \rightarrow Z$  son  $G$ -equivalencias entre  $G$ -espacios, entonces  $fg$  es una  $G$ -equivalencia.

Recordemos que si  $X$  es un  $G$ -conjunto y  $x \in X$ , entonces  $\mathcal{O}_x = \{x^g : g \in G\}$  es la órbita de  $x$  por la acción de  $G$  y que  $X^G$  es el subconjunto de los puntos fijos de la acción.

A continuación damos algunos resultados básicos sobre  $G$ -posets.

**Lema 1.3.3.** Consideremos un poset  $X$ , un elemento  $x \in X$  y sea  $f : X \rightarrow X$  un automorfismo. Si  $x$  y  $f(x)$  son comparables, entonces  $f(x) = x$ . Más aún, si  $f_1, f_2 : X \rightarrow X$  son dos automorfismos con  $f_1(x)$  y  $f_2(x)$  comparables, entonces  $f_1(x) = f_2(x)$ .

*Demostración.* Tomando  $f = f_1 f_2^{-1}$ , basta con probar la primera parte del lema. Supongamos que  $x \leq f(x)$ , ya que en caso contrario repetimos la demostración pero con  $f^{-1}$ . Como  $f$  preserva el orden,

$$x \leq f(x) \leq f(f(x)) \leq f(f(f(x))) \leq \dots \leq f^n(x)$$

Por finitud, para algún  $n \geq 1$  tendremos que  $f^n(x) = f^{n+1}(x)$ . Como  $f^n$  es un automorfismo, deducimos que  $x = f(x)$ .  $\square$

**Lema 1.3.4.** Sea  $X$  un  $G$ -poset. Entonces existe un core de  $X$  que es  $G$ -invariante y es un retracto por deformación fuerte equivariante de  $X$ .

*Demostración.* Si  $X$  no es minimal, entonces existe  $x \in X$  que es un beat point. Supongamos por ejemplo que es un down beat point y sea  $y \in X$  el punto cubierto por  $x$ . Definimos  $r : X \rightarrow X - \mathcal{O}_x$  como  $r(x^g) = y^g$ . Debemos ver que  $r$  está bien definido y es continuo. Notemos que el mapa  $z \in X \mapsto z^g \in X$  es un automorfismo de  $X$  con inversa  $z \mapsto z^{g^{-1}}$ , para todo  $g \in G$ . Si  $y^g = x^h$  para alguna elección de  $h, g \in G$ , entonces  $y^{gh^{-1}} = x$ , por lo que  $y \leq x = y^{gh^{-1}}$ , y del lema anterior  $y = y^{gh^{-1}}$ . Así,  $y^h = y^g = x^h$ , contradiciendo que actuar por  $h$  es un automorfismo. Esto prueba que  $r$  está bien definida. Además es claro que preserva el orden y que si  $i : X - \mathcal{O}_x \rightarrow X$  es la inclusión, entonces  $ir \leq \text{id}_X$ . Como  $ri = \text{id}_{X - \mathcal{O}_x}$ , se tiene que  $ir \simeq_G \text{id}_X$  rel  $X - \mathcal{O}_x$  por la proposición 1.3.1.  $\square$

**Definición 1.3.5.** Un  $G$ -core de un  $G$ -poset es un core del poset que es  $G$ -invariante.

Del lema anterior, todo  $G$ -poset posee un  $G$ -core.

**Proposición 1.3.6.** Todo  $G$ -poset contráctil posee un punto fijo.

*Demostración.* Si  $X$  es un  $G$ -poset contráctil, entonces existe un  $G$ -core. Como todos los cores son isomorfos y  $X$  es contráctil, este core equivariante debe consistir de un solo punto, y tal punto tiene que ser un punto fijo de la acción.  $\square$

**Proposición 1.3.7.** Sean  $X$  e  $Y$  dos  $G$ -posets y sea  $f : X \rightarrow Y$  un  $G$ -morfismo. Si  $f$  es una equivalencia homotópica, entonces es una  $G$ -equivalencia.

*Demostración.* De la proposición anterior, existen  $X_c$  y  $Y_c$  dos  $G$ -cores de  $X$  e  $Y$  respectivamente. Sean  $i_X : X_c \rightarrow X$ ,  $i_Y : Y_c \rightarrow Y$  las inclusiones y  $r_X : X \rightarrow X_c$ ,  $r_Y : Y \rightarrow Y_c$  los retracto por deformación fuerte equivariantes. Entonces  $r_Y f i_X : X_c \rightarrow Y_c$  es un  $G$ -morfismo que es una equivalencia homotópica. Como son espacios minimales, es un isomorfismo y es  $G$ -equivariante. En particular, es una  $G$ -equivalencia. Luego  $f = i_Y (r_Y f i_X) r_X$  es composición de  $G$ -equivalencias y de la proposición 1.3.2, resulta una  $G$ -equivalencia.  $\square$

**Observación 1.3.8.** Notar que en la proposición anterior pedimos que  $f$  fuese un  $G$ -morfismo. En general, si  $X$  e  $Y$  son dos  $G$ -posets homotópicamente equivalentes, puede que no sean  $G$ -equivalentes. Ver por ejemplo [6, Remark 8.1.7].

**Definición 1.3.9.** Sea  $X$  un  $G$ -poset. Si  $x \in X$  es un beat point, decimos que hay  $G$ -colapso elemental fuerte de  $X$  a  $X - \mathcal{O}_x$  y notamos  $X \searrow^e X - \mathcal{O}_x$ . Decimos que  $X$   $G$ -colapsa fuertemente a un subespacio  $Y$  si existe una serie de  $G$ -colapsos elementales fuertes que comienzan en  $X$  y terminan en  $Y$ . En este caso notamos  $X \searrow^G Y$ .

**Proposición 1.3.10.** Sea  $X$  un  $G$ -poset y sea  $Y \subset X$  un subespacio  $G$ -equivariante. Son equivalentes:

1.  $X \searrow^G Y$
2.  $Y \subset X$  un retracto por deformación fuerte equivariante.
3.  $Y \subset X$  es un retracto por deformación fuerte.

*Demostración.* De la demostración del lema 1.3.4, todo  $G$ -colapso elemental fuerte induce un retracto por deformación fuerte equivariante. Luego si  $X \searrow^G Y$ , componiendo los colapsos elementales intermedios, llegamos a que  $Y$  es un retracto por deformación fuerte equivariante de  $X$ .

La tercera claramente es implicada por la segunda, por lo que solo resta probar que si  $Y \subset X$  es un retracto por deformación fuerte entonces  $X \searrow^G Y$ . Si  $x \in X - Y$  es un beat point, entonces  $\mathcal{O}_x \cap Y = \emptyset$  pues  $Y$  es  $G$ -invariante, por lo que  $X \searrow^e X - \mathcal{O}_x$  e  $Y \subset X - \mathcal{O}_x$ . Por inducción,  $X - \mathcal{O}_x \searrow^G Y$ , y por lo tanto  $X \searrow^G Y$ .  $\square$

Ahora veremos la noción de tipo homotópico simple equivariante para posets.

**Definición 1.3.11.** Sea  $X$  un  $G$ -poset. Si  $x \in X$  es un weak point, entonces  $x^g$  es un weak point para todo  $g \in G$ . Decimos entonces que hay un  $G$ -colapso elemental de  $X$  a  $X - \mathcal{O}_x$  y lo notamos  $X \searrow^{G^e} X - \mathcal{O}_x$ . Observemos que  $X - \mathcal{O}_x$  es  $G$ -invariante. Decimos que  $X$   $G$ -colapsa a un subespacio  $Y$  si existe una serie de  $G$ -colapsos elementales que comienzan en  $X$  y terminan en  $Y$ . Lo denotamos  $X \searrow^G Y$ , y en tal caso  $Y$  resulta  $G$ -invariante. Decimos que  $X$  es  $G$ -colapsable si  $X$   $G$ -colapsa a un punto. De manera análoga se definen  $G$ -expansiones elementales y  $G$ -expansiones. Decimos que  $X$  e  $Y$  son dos  $G$ -posets con el mismo tipo homotópico simple equivariante, y notamos  $X \simeq^G Y$ , si existe una serie de  $G$ -colapsos y  $G$ -expansiones que comienzan en  $X$  y terminan en  $Y$ .

**Observación 1.3.12.** Todo  $G$ -colapso fuerte es un  $G$ -colapso, y todo  $G$ -colapso es un colapso (en el sentido clásico de la definición para posets). De la proposición 1.3.10,  $X$  colapsa fuertemente a un subespacio  $G$ -invariante  $Y$  si y solo si  $Y \subset X$  es un retracto por deformación fuerte, si y solo si  $X$   $G$ -colapsa fuertemente a  $Y$ . En particular,  $X$  es contráctil si y solo si es fuertemente colapsable, si y solo si es  $G$ -fuertemente colapsable. Sin embargo, esto no vale en general para  $G$ -colapsos (ver [6, Example 8.3.3])

**Proposición 1.3.13.** Sea  $X$  un  $G$ -poset tal que  $X \searrow^G Y$  para un subespacio invariante  $Y$ . Entonces  $X/G \searrow Y/G$  y  $X^G \searrow Y^G$ . En particular, si  $X$  es contráctil entonces  $X/G$  y  $X^G$  lo son.

*Demostración.* Basta ver el caso en que  $Y = X - \mathcal{O}_x$ , con  $x \in X$  un beat point. Sin pérdida de generalidad, supongamos que  $x$  es un down beat point y sea  $y \in X$  el punto que está cubierto por  $x$ . Así, en el cociente,  $\bar{y} < \bar{x}$ , y si  $\bar{z} \leq \bar{x}$  entonces existe  $g \in G$  tal que  $z^g \leq x$ , por lo que  $\bar{z} = \overline{z^g} \leq \overline{y^g} = \bar{y}$ . En consecuencia,  $\bar{x}$  es un down beat point de  $X/G$  y tenemos un colapso fuerte de  $X/G$  a  $Y/G = X/G - \bar{x}$ .

Si  $x$  no queda fijo por  $G$ , entonces  $Y^G = X^G$  y no hay más nada que decir. En caso contrario,  $x \in X^G$  y afirmo que  $y \in X^G$ . Si  $g \in G$ , entonces  $y^g \leq x^g = x$  implica que  $y^g \leq y$ , y por el lema 1.3.3 deducimos que  $y^g = y$ . Luego  $x$  cubre a  $y$  en  $X^G$  y por lo tanto  $X^G$  colapsa fuertemente a  $X^G - x = Y^G$ .

La última parte sale de considerar  $Y = \{*\}$ . □

De lo anterior, podemos deducir algo un poco más general para los  $G$ -colapsos, pero solo para el poset de los puntos fijos. Para el cociente en general no será cierto.

**Proposición 1.3.14.** Si un  $G$ -poset  $X$   $G$ -colapsa a un subespacio  $Y$ , entonces  $X^G$  colapsa a  $Y^G$ . En particular, si  $X$  es  $G$ -colapsable entonces  $X^G$  es colapsable.

*Demostración.* Solo basta ver el caso en que  $Y = X - \mathcal{O}_x$  con  $x \in X$  un weak point. Por definición, su link  $\hat{C}_x^X$  es contráctil. Si  $x$  no es un punto fijo, entonces  $X^G = Y^G$  y listo. Supongamos entonces que  $x \in X^G$  es un punto fijo. Entonces  $\hat{C}_x^X$  es  $G$ -invariante y así  $\hat{C}_x^{X^G} = (\hat{C}_x^X)^G$ . Este último es contráctil por la proposición anterior, de lo que resulta que  $x \in X^G$  es un weak point. Por lo tanto  $X^G \searrow X^G - x = (X - x)^G = Y^G$ . □

Para el cociente no vale en general que si  $X \searrow^G Y$  entonces  $X/G \searrow Y/G$ . Para un contraejemplo ver [6, Example 8.3.16].

De todo lo anterior, obtenemos el siguiente corolario.

**Corolario 1.3.15.** Si  $X$  e  $Y$  son dos  $G$ -posets con el mismo tipo homotópico simple equivariante, entonces  $X^G$  e  $Y^G$  tienen el mismo tipo homotópico simple.

## Capítulo 2

# Los posets de $p$ -subgrupos de un grupo

Dado un grupo finito  $G$  y un primo  $p$ , el poset de  $p$ -subgrupos de  $G$  consiste de todos los  $p$ -subgrupos no triviales de  $G$ . Lo notaremos  $\mathcal{S}_p(G)$ . Si  $p$  divide al orden de  $G$ , de los teoremas de Sylow,  $\mathcal{S}_p(G)$  es no vacío y sus elementos maximales son los  $p$ -Sylows. En caso contrario será vacío y no tiene mucho interés. El complejo  $\mathcal{K}(\mathcal{S}_p(G))$  fue estudiado por primera vez por Brown en [15], donde prueba, entre otras cosas, que la característica de Euler del complejo asociado al poset es congruente a 1 módulo el orden de los  $p$ -Sylows. Es por eso que en la literatura del tema muchas veces se lo denomina complejo de Brown.

Más adelante, Quillen en [28] trabaja con el complejo de Brown y describe algunas de sus propiedades. Demuestra que  $\mathcal{K}(\mathcal{S}_p(G))$  es homotópicamente equivalente a otro complejo simplicial, que a menudo se lo llama complejo de Quillen, que es  $\mathcal{K}(\mathcal{A}_p(G))$ , donde  $\mathcal{A}_p(G)$  es el poset de los  $p$ -subgrupos elementales abelianos de  $G$ . Luego observa que si  $G$  tiene un  $p$ -subgrupo normal no trivial, entonces  $\mathcal{K}(\mathcal{S}_p(G))$  es contráctil, y conjetura que vale la recíproca. Esto dio lugar a la denominada conjetura de Quillen sobre el poset de los  $p$ -subgrupos. Hasta el momento, la conjetura sigue abierta. En [28], Quillen demuestra algunos casos particulares de la conjetura. Por ejemplo, si  $\mathcal{A}_p(G)$  es un poset de altura a lo sumo 1, entonces la conjetura es cierta. También prueba el caso que  $G$  es un grupo soluble y analiza algunos casos de grupos de tipo de Lie. Actualmente, el trabajo de Aschbacher y Smith [3] es el que más avanzó sobre la conjetura de Quillen, demostrando que es válida para  $p > 5$  y  $G$  sin componentes unitarias  $U_n(q)$  con  $q$  impar y  $q \equiv -1 \pmod{p}$ .

En este capítulo estudiaremos el tipo homotópico de  $\mathcal{S}_p(G)$  desde el punto de vista de la teoría de espacios finitos. Si bien hay propiedades homotópicas que se pueden estudiar en  $\mathcal{K}(\mathcal{S}_p(G))$ , obtendremos resultados más fuertes que los que dio Quillen en [28] si vemos a dicho poset como un espacio finito con la acción de  $G$ . Además, veremos qué otros posets de  $p$ -subgrupos se pueden formar a partir de  $G$  y cómo se relacionan con  $\mathcal{S}_p(G)$  desde el punto de vista homotópico. Comenzamos en la sección 2.1 con las definiciones y resultados básicos sobre los posets  $\mathcal{S}_p(G)$  y  $\mathcal{A}_p(G)$ , junto con un análisis de la conjetura de Quillen y los avances al respecto. En la sección 2.2 veremos la relación que existe entre  $\mathcal{S}_p(G_1 \times G_2)$  y  $\mathcal{S}_p(G_1) * \mathcal{S}_p(G_2)$ , para  $G_1, G_2$  grupos finitos, probando que en general no son homotópicos como espacios finitos. En la sección 2.3 estudiamos la conexión y simple

conexión de  $\mathcal{S}_p(G)$ . Para la conexión, Quillen demostró que es equivalente a la existencia de cierto subgrupo en  $G$ . Sin embargo, la simple conexión es mucho más compleja de abordar. Una descripción casi completa se debe a Aschbacher en [5], donde caracteriza los grupos con  $\mathcal{S}_p(G)$  simplemente conexo módulo una conjetura que está probada en casi todos los casos. En la sección 2.4 veremos qué otras construcciones podemos considerar en lo que respecta a posets y complejos de  $p$ -subgrupos. En esta sección veremos una demostración alternativa a la que dieron Thévenaz y Webb en [35] de que  $|\mathcal{K}(\mathcal{S}_p(G))|$  y  $|\mathcal{K}(\mathcal{A}_p(G))|$  son  $G$ -equivalentes, utilizando el concepto de  $G$ -colapsos simpliciales. En la sección 2.5 probamos el resultado de Brown sobre la característica de Euler de  $\mathcal{S}_p(G)$ . Finalmente, en la sección 2.6 analizamos los espacios de órbitas que surgen naturalmente de tener un  $G$ -poset  $X$  y lo relaciones con una conjetura de P. Webb.

## 2.1 La conjetura de Quillen

Recordemos que  $\mathcal{S}_p(G)$  denota al poset de  $p$ -subgrupos no triviales de un grupo  $G$ . A continuación definimos el ya mencionado poset  $\mathcal{A}_p(G)$ .

**Definición 2.1.1.** Sea  $G$  un grupo finito y sea  $p$  un primo. Un  $p$ -subgrupo no trivial de  $G$  se dice que es  $p$ -elemental abeliano (o un  $p$ -toro) si es abeliano y de exponente  $p$ . El poset de los  $p$ -toros de  $G$  se nota  $\mathcal{A}_p(G)$ .

**Observación 2.1.2.** Un  $p$ -toro es un grupo isomorfo a  $\mathbb{Z}_p^n$  para algún  $n \geq 1$ .

En la literatura, al poset  $\mathcal{A}_p(G)$  se lo denomina “poset de Quillen” y a  $\mathcal{K}(\mathcal{A}_p(G))$  “complejo de Quillen”.

Uno de los primeros resultado en el artículo [28] es que la inclusión de  $\mathcal{K}(\mathcal{A}_p(G))$  en  $\mathcal{K}(\mathcal{S}_p(G))$  induce una equivalencia homotópica. A nivel de espacios finitos a priori solo significa que la inclusión de  $\mathcal{A}_p(G)$  en  $\mathcal{S}_p(G)$  es una equivalencia débil. Más adelante veremos que en realidad hay una relación más fuerte entre estos dos posets.

**Proposición 2.1.3.** (Quillen) La inclusión  $i : \mathcal{A}_p(G) \rightarrow \mathcal{S}_p(G)$  es una equivalencia débil entre espacios finitos. En particular,  $\mathcal{K}(\mathcal{A}_p(G))$  y  $\mathcal{K}(\mathcal{S}_p(G))$  son homotópicamente equivalentes.

*Demostración.* La demostración consiste en utilizar el Quillen’s Fiber Theorem (ver [28, Proposition 1.6]) que acá lo enunciamos en el teorema 1.2.14.

Si  $B \in \mathcal{S}_p(G)$ , entonces

$$i^{-1}(U_B) = \{A \in \mathcal{A}_p(G) : A \leq B\} = \mathcal{A}_p(B)$$

La proposición siguiente muestra que  $\mathcal{A}_p(B)$  es contráctil. Luego  $i$  es una equivalencia débil.  $\square$

**Proposición 2.1.4.** Si  $P$  es un  $p$ -grupo no trivial, entonces  $\mathcal{A}_p(P)$  es contráctil.

*Demostración.* Como  $P$  es un  $p$ -grupo, su centro es no trivial (ver proposición 1.1.14) y por lo tanto este último tiene elementos de orden  $p$  (teorema de Cauchy 1.1.10). Consideremos  $N = \Omega_1(Z(P))$ . Como  $Z(P)$  es abeliano,  $N$  resulta un subgrupo abeliano no trivial de

$Z(P)$  generado por elementos de orden  $p$ . Esto nos dice que  $N$  tiene exponente  $p$ , y por lo tanto  $N \in \mathcal{A}_p(P)$ .

Por otro lado, si  $A \leq P$  es elemental abeliano, el producto  $AN$  es un  $p$ -subgrupo elemental abeliano de  $P$ . Luego tenemos un morfismo  $f : \mathcal{A}_p(P) \rightarrow \mathcal{A}_p(P)$  dado por  $f(A) = AN$ , que está bien definido y tal que  $\text{id}_{\mathcal{A}_p(P)} \leq f \geq \text{cte}_N$ . En consecuencia,  $\mathcal{A}_p(P)$  es contráctil.  $\square$

Observemos que el grupo  $G$  actúa en los  $p$ -subgrupos y en particular en los  $p$ -toros por conjugación. Esto define una  $G$ -acción en los posets  $\mathcal{A}_p(G)$  y  $\mathcal{S}_p(G)$ . En general, entenderemos por poset de  $p$ -subgrupos de  $G$  a un subposet  $G$ -invariante de  $\mathcal{S}_p(G)$ , como es el caso de  $\mathcal{A}_p(G)$ . De esta manera, podemos preguntarnos si por ejemplo dos posets de  $p$ -subgrupos son  $G$ -equivalentes o tienen el mismo tipo homotópico simple equivariante.

La siguiente proposición está motivada por lo que dice Barmak en [6, Corollary 8.4.1], aunque el resultado tal como lo enunciamos es más fuerte.

**Proposición 2.1.5.** El poset  $\mathcal{S}_p(G)$   $G$ -colapsa al poset  $\mathcal{A}_p(G)$ . En particular, estos posets poseen el mismo tipo homotópico simple equivariante.

*Demostración.* Para ello debemos ver que podemos obtener  $\mathcal{A}_p(G)$  de  $\mathcal{S}_p(G)$  extrayendo órbitas de weak points. Sea  $A_0 \in \mathcal{S}_p(G) - \mathcal{A}_p(G)$  de orden minimal. Entonces  $\hat{U}_{A_0}^{\mathcal{S}_p(G)} = \mathcal{A}_p(A_0)$  pues lo elegimos minimal. De la proposición 2.1.4, este poset es contráctil, y así el elemento  $A_0$  es un weak point. Luego  $\mathcal{S}_p(G) \setminus^{\mathcal{G}e} \mathcal{S}_p(G) - \mathcal{O}_{A_0}$ . Notemos que ningún elemento de  $\mathcal{O}_{A_0}$  es un  $p$ -toro, ya que son todos isomorfos a  $A_0$ . Sea  $S_1 = \mathcal{S}_p(G) - \mathcal{O}_{A_0}$ . Es claro que  $\mathcal{A}_p(G) \subset S_1$ . Si la inclusión es estricta tomamos  $A_1 \in S_1 - \mathcal{A}_p(G)$  de orden mínimo. De esta manera, si  $B \in S_1$  y  $B < A_1$ , entonces  $B$  es un  $p$ -toro ya que  $A_1$  era de orden minimal. Recíprocamente, si  $B < A_1$  es un  $p$ -toro, como  $A_0$  no era un  $p$ -toro, el subgrupo  $B$  no podría estar en la órbita de  $A_0$ , por lo que  $B \in S_1$ . Esto nos dice que  $\hat{U}_{A_1}^{S_1} = \mathcal{A}_p(A_1)$ , el cual es contráctil. Luego  $S_1 \setminus^{\mathcal{G}e} S_1 - \mathcal{O}_{A_1} = S_2$  y  $\mathcal{A}_p(G) \subset S_2$ . Podemos continuar este proceso inductivamente y, por finitud, para algún  $n$  tendremos que  $S_n = \mathcal{A}_p(G)$ . Luego  $\mathcal{S}_p(G) \setminus^{\mathcal{G}} \mathcal{A}_p(G)$ .  $\square$

Lo siguiente que remarca Quillen en su artículo [28], es que si  $G$  posee un  $p$ -subgrupo normal no trivial, entonces  $\mathcal{K}(\mathcal{S}_p(G))$  es contráctil. En realidad, vale algo mucho más fuerte: el poset  $\mathcal{S}_p(G)$  resulta contráctil. Esta observación fue hecha por Stong en [32].

**Proposición 2.1.6.** (Stong) Si  $G$  posee un  $p$ -subgrupo normal no trivial, entonces  $\mathcal{S}_p(G)$  es contráctil.

*Demostración.* Sea  $N \trianglelefteq G$  un  $p$ -subgrupo normal no trivial. Entonces si  $A$  es un  $p$ -subgrupo no trivial, tenemos que  $AN$  es un  $p$ -subgrupo no trivial. Luego la función  $f : \mathcal{S}_p(G) \rightarrow \mathcal{S}_p(G)$  definida por  $f(A) = AN$  es un morfismo de posets que verifica que  $\text{id}_{\mathcal{S}_p(G)} \leq f \geq \text{cte}_N$ . En consecuencia,  $\mathcal{S}_p(G)$  es contráctil.  $\square$

Como la intersección de todos los  $p$ -Sylows, que notamos  $\mathcal{O}_p(G)$ , es el  $p$ -subgrupo normal más grande en  $G$ , la hipótesis de la proposición anterior es equivalente a decir que  $\mathcal{O}_p(G) > 1$ . Por otro lado, los  $p$ -subgrupos normales no triviales son exactamente los puntos fijos del poset  $\mathcal{S}_p(G)$ , y todos ellos deben estar incluidos en  $\mathcal{O}_p(G)$  por maximalidad.

Es decir,  $G$  tiene un  $p$ -subgrupo normal no trivial si y solo si  $\mathcal{O}_p(G) > 1$ , si y solo si  $\mathcal{S}_p(G)^G$  es no vacío.

Recíprocamente, si  $\mathcal{S}_p(G)$  es contráctil, de la proposición 1.3.13,  $\mathcal{S}_p(G)^G$  es contráctil, y en particular no vacío. En definitiva, vale lo siguiente.

**Teorema 2.1.7.** (Stong) *El poset  $\mathcal{S}_p(G)$  es contráctil si y solo si  $\mathcal{O}_p(G) > 1$ .*

La demostración que dimos de este teorema fue hecha por Stong en [32].

Stong muestra en [32] que en general los posets  $\mathcal{A}_p(G)$  y  $\mathcal{S}_p(G)$  no son homotópicamente equivalentes. Esto lo veremos más adelante en la sección 3.7 del capítulo 3. Sin embargo, prueba que la contractibilidad del poset  $\mathcal{A}_p(G)$  implica la del  $\mathcal{S}_p(G)$ .

**Proposición 2.1.8.** (Stong) Si  $\mathcal{A}_p(G)$  es contráctil, entonces  $\mathcal{S}_p(G)$  es contráctil.

*Demostración.* Como  $\mathcal{A}_p(G)$  es contráctil, por la proposición 1.3.13,  $\mathcal{A}_p(G)^G$  es contráctil y en particular no vacío. Luego existe un  $p$ -subgrupo normal no trivial, es decir,  $\mathcal{O}_p(G) > 1$ .  $\square$

En realidad, lo que utilizamos en el teorema anterior es el hecho de que  $\mathcal{A}_p(G)^G$  es no vacío. Como  $\mathcal{S}_p(G)$   $G$ -colapsa a  $\mathcal{A}_p(G)$ , de la proposición 1.3.14, tenemos que  $\mathcal{S}_p(G)^G$  colapsa a  $\mathcal{A}_p(G)^G$ . En particular,  $\mathcal{S}_p(G)^G$  es no vacío si y solo si  $\mathcal{A}_p(G)^G$  es no vacío, y esto equivale a decir que  $\mathcal{S}_p(G)$  es contráctil. También hay un argumento algebraico para esta última equivalencia: si  $\mathcal{S}_p(G)^G$  es no vacío y tomamos  $N \leq G$  un  $p$ -subgrupo normal no trivial, podemos definir  $A = \Omega_1(Z(N)) \leq N$ , que es un  $p$ -subgrupo no trivial (por la proposición 1.1.14 y el teorema de Cauchy 1.1.10) y es normal en  $G$  (pues es característico en  $N$  y éste es normal en  $G$ ). Como  $A \in \mathcal{A}_p(G)$ , tenemos que  $A \in \mathcal{A}_p(G)^G$ . Como  $\mathcal{A}_p(G)^G \subset \mathcal{S}_p(G)^G$ , concluimos que  $\mathcal{A}_p(G)^G$  es no vacío si y solo si  $\mathcal{S}_p(G)^G$  es no vacío.

Con esto tenemos la siguiente proposición.

**Proposición 2.1.9.** Sea  $G$  un grupo finito y sea  $p$  un primo. Son equivalentes:

1.  $\mathcal{S}_p(G)$  es contráctil
2.  $G$  posee un  $p$ -subgrupo normal no trivial
3.  $\mathcal{O}_p(G) > 1$
4.  $\mathcal{S}_p(G)^G$  es no vacío
5.  $\mathcal{A}_p(G)^G$  es no vacío

**Observación 2.1.10.** Otra cosa que observamos es que tanto  $\mathcal{S}_p(G)$  como  $\mathcal{A}_p(G)$  son retículos reducidos. Esto es porque si dos elementos están acotados inferiormente, entonces existe el ínfimo y es la intersección. Más precisamente, si  $A, B \in \mathcal{S}_p(G)$  o  $A, B \in \mathcal{A}_p(G)$ , el ínfimo (si están acotados inferiormente) está dado por  $A \wedge B = A \cap B$  y el supremo (si están acotados superiormente) por  $A \vee B = \langle A, B \rangle$ .

Además,  $\mathcal{A}_p(G)$  es un retículo reducido atómico: todo elemento  $A \in \mathcal{A}_p(G)$  es el supremo de los minimales que están por debajo de éste, es decir,  $A = \sup\{H \leq A : |H| = p\}$  (ver proposición 1.2.42).

La formulación original de la conjetura de Quillen no utiliza la topología de los posets sino de los complejos simpliciales asociados. Por lo visto anteriormente, en términos de espacios finitos la conjetura de Quillen se puede reformular de la siguiente manera.

**Conjetura 2.1.11.** (Quillen) Si  $\mathcal{S}_p(G)$  es homotópicamente trivial, entonces es contráctil.

Esto es falso para espacios finitos en general. Ver [6, Example 4.2.1, “The Wallet”].

De las equivalencias de la proposición 2.1.9 y razonando por la contrarrecíproca, podemos reescribir la conjetura de la siguiente manera:

**Conjetura 2.1.12.** Si  $\mathcal{O}_p(G) = 1$  entonces  $\mathcal{S}_p(G)$  no es homotópicamente trivial.

En lo que sigue, comentaremos, sin mucho detalle, algunos casos particulares que se saben de la conjetura de Quillen 2.1.11. En general, en vista de 2.1.12, para probar algún caso de la conjetura se argumenta por la contrarrecíproca suponiendo que  $\mathcal{O}_p(G) = 1$  y viendo luego que alguna homología de  $\mathcal{S}_p(G)$  es no trivial. Esto a priori es más fuerte que la conjetura en sí, ya que estamos viendo que si  $\mathcal{S}_p(G)$  no es contráctil entonces no es homológicamente trivial.

En su artículo [28], Quillen demuestra primero que la conjetura vale si el poset  $\mathcal{A}_p(G)$  tiene altura a lo sumo 1. Nosotros daremos una demostración alternativa utilizando la teoría de espacios finitos.

**Proposición 2.1.13.** (Quillen) Si  $\mathcal{A}_p(G)$  tiene altura a lo sumo 1, entonces  $\mathcal{S}_p(G)$  verifica la conjetura.

*Demostración.* Como  $\mathcal{A}_p(G)$  contráctil implica  $\mathcal{S}_p(G)$  contráctil, basta con probar que si  $\mathcal{A}_p(G)$  tiene altura a lo sumo 1 y es homotópicamente trivial, entonces es contráctil. El resultado vale en general para un espacios finito  $X$  de altura a lo sumo 1. Supongamos entonces que  $X$  es un espacio finito de altura a lo sumo 1 y homotópicamente trivial. En tal caso, el espacio finito  $X$  al no tener ciclos y ser conexo, debe ser un árbol, y por lo tanto es contráctil.  $\square$

Si bien la conjetura de Quillen no está probada, en lo que sigue comentaremos algunos casos en los que sí está probada.

## El caso soluble

Quillen prueba en [28] que la conjetura es cierta para los grupos solubles. Daremos a continuación una demostración de este hecho, que sigue en general las ideas originales de Quillen, pero simplificando algunos de los pasos con demostraciones alternativas.

Para probar la conjetura para un grupo soluble  $G$ , suponemos que  $\mathcal{O}_p(G) = 1$  y vemos que la homología del poset  $\mathcal{A}_p(G)$  es no nula. Siguiendo a Quillen, lo que haremos es ver que si  $A \in \mathcal{A}_p(G)$  es un  $p$ -toro maximal de rango  $s$ , entonces  $H_{s-1}(\mathcal{A}_p(G)) \neq 0$ .

Para ello vamos a necesitar utilizar [28, Theorem 9.1], junto con algunas definiciones previas.

**Definición 2.1.14.** Un poset  $X$  se dice  $n$ -esférico, o esférico cuando el  $n$  está implícito, si tiene dimensión  $n$  y es  $(n - 1)$ -conexo.

**Teorema 2.1.15.** ([28, Theorem 9.1]) Sea  $f : X \rightarrow Y$  un morfismo de posets tal que  $Y$  es  $n$ -esférico,  $\hat{F}_y^Y$  es  $(n - h(y) - 1)$ -esférico y  $f^{-1}(U_y)$  es  $h(y)$ -esférico para todo  $y \in Y$ . Entonces  $X$  es  $n$ -esférico. Más aún, existe una filtración canónica

$$0 = F_{n+1} \subset F_n \subset \dots \subset F_{-1} = \tilde{H}_n(X)$$

e isomorfismos

$$F_{-1}/F_0 \simeq \tilde{H}_n(Y)$$

$$F_q/F_{q+1} \simeq \bigoplus_{y:h(y)=q} \tilde{H}_{n-q-1}(\hat{F}_y^Y) \otimes \tilde{H}_q(f^{-1}(U_y))$$

para  $0 \leq q \leq n$ .

Observemos que de la condición de esfericidad de los posets involucrados, todas las homología que aparecen son grupos abelianos libres (posiblemente triviales), y por lo tanto hay un isomorfismo (no canónico)

$$\tilde{H}_n(X) \simeq \tilde{H}_n(Y) \oplus \bigoplus_{y \in Y} \tilde{H}_{n-h(y)-q}(\hat{F}_y^Y) \otimes \tilde{H}_{h(y)}(f^{-1}(U_y)) \quad (2.1)$$

Para demostrar este teorema, Quillen utiliza cierta sucesión espectral y técnicas que recurren a sistemas locales. Aquí daremos una demostración alternativa de este teorema utilizando teoría de espacios finitos, pero sin exhibir la filtración: simplemente vemos el isomorfismo 2.1, que es todo lo que necesitaremos

Daremos algunos resultados previos siguiendo las ideas de Barmak en [7].

**Definición 2.1.16.** Un espacio topológico  $X$  se dice  $n$ -conexo, con  $n \geq -1$  si para cada  $x \in X$ , los grupos  $\pi_i(X, x)$  son triviales para todo  $0 \leq i \leq n$ .

**Observación 2.1.17.** Por convención,  $-1$ -conexo quiere decir que el espacio es no vacío. Por Hurewicz, si  $n \geq 1$ , un espacio  $X$  es  $n$ -conexo si y solo si es simplemente conexo y  $\tilde{H}_i(X) = 0$  para todo  $0 \leq i \leq n$ .

**Definición 2.1.18.** Un par topológico  $(X, A)$  es  $n$ -conexo si  $\pi_i(X, A) = 0$  para todo  $0 \leq i \leq n$ .

**Definición 2.1.19.** Una función continua entre espacios topológicos  $f : X \rightarrow Y$  se dice que es una  $n$ -equivalencia, con  $n \geq 0$ , si para todo  $x \in X$ , el morfismo inducido  $f_* : \pi_i(X, x) \rightarrow \pi_i(Y, f(x))$  es un isomorfismo para  $0 \leq i < n$  y un epimorfismo para  $i = n$ .

**Observación 2.1.20.** Notar que  $(X, A)$  es  $n$ -conexo si y solo si la inclusión  $i : A \hookrightarrow X$  es una  $n$ -equivalencia.

**Observación 2.1.21.** Podríamos definir de manera análoga una  $n$ -equivalencia homológica, y llamar  $n$ -equivalencia homotópica a la dada en la definición. Notar que por el teorema de Hurewicz para pares topológicos, una  $f : X \rightarrow Y$  es una  $n$ -equivalencia si y solo si el par  $(M_f, X)$  es  $n$ -conexo (donde  $M_f$  es el cilindro de  $f$ ). Lo mismo vale para el cilindro no-Hausdorff en espacios finitos.

**Lema 2.1.22.** Sean  $n$  y  $m$  dos enteros no negativos. Consideremos un poset finito  $X$  y un elemento  $x \in X$  tal que  $\hat{U}_x$  es  $(n-1)$ -conexo y  $\hat{F}_x$  es  $(m-1)$ -conexo. Entonces la inclusión  $X-x \hookrightarrow X$  es una  $(n+m+1)$ -equivalencia.

*Demostración.* Pasando por los complejos simpliciales asociados a cada espacio finito que aparece, podemos utilizar los teoremas clásicos de topología algebraica.

El link de  $x$ ,

$$\text{Lk}(x) = \hat{U}_x * \hat{F}_x$$

es  $(n+m+1-1) = (n+m)$ -conexo por [26, Lemma 2.3]. Así, el par  $(\text{St}(x), \text{Lk}(x))$  resulta  $(n+m+1)$ -conexo por la sucesión exacta larga de los grupos de homotopía.

Suponiendo sin pérdida de generalidad que  $X$  es conexo, el par  $(X-x, \text{Lk}(x))$  es 0-conexo. Es decir,  $\text{Lk}(x)$  interseca a todo componente de  $X-x$ . Para ver esto, tomemos  $y \in X-x$  y veamos que está conectado con algún vértice de  $\text{Lk}(x)$ . Como  $y$  está conectado con  $x$  en  $X$ , existen puntos  $x_0, x_1, \dots, x_n \in X$  tales que  $x_0 = y, x_n = x, x_i \neq x_{i+1}$  y son comprables para todo  $i$ , y  $x_i \neq x$  si  $i \neq n$ . En particular,  $x_{n-1} \in \text{Lk}(x)$  e  $y$  está conectado con  $x_{n-1}$  en  $X-x$ .

Aplicando escisión homotópica con  $X = \text{St}(x) \cup (X-x)$  y  $\text{St}(x) \cap (X-x) = \text{Lk}(x)$ , como  $(\text{St}(x), \text{Lk}(x))$  es  $(n+m+1)$ -conexo y  $(X-x, \text{Lk}(x))$  es 0-conexo, la inclusión  $i : (\text{St}(x), \text{Lk}(x)) \hookrightarrow (X, X-x)$  es una  $(n+m+1)$ -equivalencia (ver [18, Theorem 4.23]). Por lo tanto  $X-x \hookrightarrow X$  es una  $(n+m+1)$ -equivalencia.  $\square$

**Teorema 2.1.23.** Si  $f : X \rightarrow Y$  es un morfismo de posets de manera que para cierto  $n \geq 0$ , se tiene que  $\hat{F}_y^Y$  es  $(n-h(y)-1)$ -esférico y  $f^{-1}(U_y)$  es  $h(y)$ -esférico para cada  $y \in Y$ , entonces  $f$  es una  $n$ -equivalencia.

*Demostración.* Sea  $B(f)$  el cilindro no-Hausdorff de  $f$ . Sean  $i : X \hookrightarrow B(f)$  y  $j : Y \hookrightarrow B(f)$  las inclusiones. Sabemos que  $j$  es una equivalencia homotópica entre posets (ver [8], [6]) y que  $i \simeq jf$ . Luego para ver que  $f$  es una  $n$ -equivalencia, basta con probar que  $i$  lo es. Sea  $\{y_1, \dots, y_m\}$  una extensión lineal de  $Y$ . Es decir, si  $y_i \leq y_j$  entonces  $i \leq j$ . Para cada  $0 \leq r \leq m$ , consideremos el poset  $X_r = X \cup \{y_{r+1}, y_{r+2}, \dots, y_m\}$ . Así,  $X_0 = B(f)$  y  $X_m = X$ . Veamos que la inclusión  $X_{r+1} \hookrightarrow X_r$  es una  $n$ -equivalencia para todo  $r$ . Para ello notemos que

$$\begin{aligned} \hat{U}_{y_r}^{X_r} &= \{a \in X_r : a < y_r\} = f^{-1}(U_y) \\ \hat{F}_{y_r}^{X_r} &= \{a \in X_r : a > y_r\} = \hat{F}_{y_r}^Y \end{aligned}$$

Del lema anterior, la inclusión  $X_{r+1} \hookrightarrow X_r$  es una  $(n-h(y)-1+h(y)+1 = n)$ -equivalencia. Componiendo todas las inclusiones, deducimos que  $i : X \hookrightarrow B(f)$  es una  $n$ -equivalencia.  $\square$

**Observación 2.1.24.** De las hipótesis del teorema se deduce que tanto  $Y$  como  $X$  son posets de dimensión  $n$  y que todos sus elementos maximales tienen la misma altura.

Ahora veamos cómo probar el isomorfismo 2.1 utilizando la teoría de espacios finitos.

**Teorema 2.1.25.** En las condiciones del teorema 2.1.15, se tiene un isomorfismo (no canónico)

$$\tilde{H}_n(X) \simeq \tilde{H}_n(y) \bigoplus_{y \in Y} \tilde{H}_{n-h(y)-1}(\hat{F}_y^Y) \otimes \tilde{H}_{h(y)}(f^{-1}(U_y))$$

*Demostración.* Siguiendo la notación de la demostración del teorema 2.1.23, tomemos un  $y = y_r$ . Observemos que

$$\hat{F}_y * f^{-1}(U_y) = \text{Lk}_{X_{r-1}}(y)$$

Su dimensión es

$$\dim \text{Lk}_{X_{r-1}}(y) = \dim \hat{F}_y + \dim f^{-1}(U_y) + 1 = n - h(y) - 1 + h(y) + 1 = n$$

y de [26] tenemos una fórmula para la homología del join

$$\begin{aligned} \tilde{H}_n(\text{Lk}_{X_{r-1}}(y)) &= \tilde{H}_n(\hat{F}_y * f^{-1}(U_y)) \\ &= \sum_{i+j=n-1} \tilde{H}_i(\hat{F}_y) \otimes \tilde{H}_j(f^{-1}(U_y)) + \sum_{i+j=n-2} \text{Tor}(\tilde{H}_i(\hat{F}_y), \tilde{H}_j(f^{-1}(U_y))) \\ &= \tilde{H}_{n-h(y)-1}(\hat{F}_y) \otimes \tilde{H}_{h(y)}(f^{-1}(U_y)) \end{aligned}$$

La última igualdad proviene de la hipótesis de esfericidad de  $\hat{F}_y$  y de  $f^{-1}(U_y)$ . Esta condición también nos dice que  $\text{Lk}_{X_{r-1}}(y)$  es  $(n-1)$ -conexo (ver [26]), es decir, es esférico.

Por otro lado, notemos que  $\dim X_i = n+1$  para  $i < m$ . Esto es porque una cadena maximal en  $X_i$  es de la forma

$$x_0 < x_1 < \dots < x_r < y^0 < y^1 < \dots < y^k$$

donde  $y^k$  es un elemento maximal de  $Y$  y  $x_r$  es maximal en  $f^{-1}(U_{y^0})$ . Como este poset tienen dimensión  $h(y^0)$ , concluimos que  $r = h(y^0)$ . Por otro lado,  $y^0 < y^1 < \dots < y^k$  es una cadena maximal en  $F_{y^0}^Y$ , que tiene dimensión  $n - h(y^0)$ , por lo que  $k = n - h(y^0)$ . Luego esta cadena tiene longitud  $r + k + 1 = n + 1$ .

Escribamos  $L_r = \text{Lk}_{X_{r-1}}(y_r)$ . Utilizando Mayer-Vietoris para  $X_{r-1} = X_r \cup \text{St}_{X_{r-1}}(y)$  y observando que

$$L_r = \text{Lk}_{X_{r-1}}(y) = X_r \cap \text{St}_{X_{r-1}}(y)$$

obtenemos una sucesión exacta larga

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow \tilde{H}_{n+1}(X_r) \oplus \tilde{H}_{n+1}(\text{St}_{X_{r-1}}(y)) &\rightarrow \tilde{H}_{n+1}(X_{r-1}) \rightarrow \tilde{H}_n(L_r) \rightarrow \\ &\rightarrow \tilde{H}_n(X_r) \oplus \tilde{H}_n(\text{St}_{X_{r-1}}(y)) \rightarrow \tilde{H}_n(X_{r-1}) \rightarrow \tilde{H}_{n-1}(L_r) \rightarrow \\ &\rightarrow \tilde{H}_{n-1}(X_r) \oplus \tilde{H}_{n-1}(\text{St}_{X_{r-1}}(y)) \rightarrow \tilde{H}_{n-1}(X_{r-1}) \rightarrow \dots \end{aligned}$$

donde el primer cero es porque  $\dim L_r = n$ . Como este link es  $(n-1)$ -conexo y el star  $\text{St}_{X_{r-1}}(y)$  es contráctil, la cola de la sucesión nos queda

$$0 \rightarrow \tilde{H}_{n+1}(X_r) \rightarrow \tilde{H}_{n+1}(X_{r-1}) \rightarrow \tilde{H}_n(L_r) \rightarrow \tilde{H}_n(X_r) \rightarrow \tilde{H}_n(X_{r-1}) \rightarrow 0$$

Luego para todo  $r$  existen inclusiones  $\tilde{H}_{n+1}(X_r) \subset \tilde{H}_{n+1}(X_{r-1})$ . Tomando  $r = 1$  y componiendo estas inclusiones, tenemos que

$$\tilde{H}_{n+1}(X_i) \subset \tilde{H}_{n+1}(X_0) = \tilde{H}_{n+1}(B(f)) \simeq \tilde{H}_{n+1}(Y) = 0$$

para todo  $0 \leq i \leq r$ . Esto nos da una sucesión exacta corta (SEC):

$$0 \rightarrow \tilde{H}_n(L_r) \rightarrow \tilde{H}_n(X_r) \rightarrow \tilde{H}_n(X_{r-1}) \rightarrow 0$$

Para  $r = 1$  tenemos la sucesión

$$0 \rightarrow \tilde{H}_n(L_1) \rightarrow \tilde{H}_n(X_1) \rightarrow \tilde{H}_n(Y) \rightarrow 0$$

donde usamos que  $X_0 = B(f) \simeq Y$ . Como las puntas son libres, deducimos que  $\tilde{H}_n(X_1)$  es libre y que la SEC se parte. Suponiendo que  $\tilde{H}_n(X_{r-1})$  es libre, como  $\tilde{H}_n(L_r)$  es libre por ser  $L_r$  de dimensión  $n$ , vemos que  $\tilde{H}_n(X_r)$  es libre. Por lo tanto, todas las SEC se parten

$$\tilde{H}_n(X_r) \simeq \tilde{H}_n(L_r) \oplus \tilde{H}_n(X_{r-1})$$

e inductivamente llegamos a que

$$\tilde{H}_n(X) \simeq \tilde{H}_n(Y) \bigoplus_r \tilde{H}_n(L_r) \simeq \tilde{H}_n(y) \bigoplus_{y \in Y} \tilde{H}_{n-h(y)-1}(\hat{F}_y^Y) \otimes \tilde{H}_{h(y)}(f^{-1}(U_y))$$

□

En la demostración del caso soluble, Quillen se reduce a un producto semidirecto  $LA$ , donde  $L$  es un  $p'$ -grupo soluble y  $A$  es un  $p$ -toro que actúa fielmente en  $L$ . Como veremos a continuación, que la acción sea fiel es equivalente a que  $\mathcal{O}_p(LA) = 1$ . Recordemos que un  $p'$ -grupo es un grupo cuyo orden es coprimo con  $p$ .

**Lema 2.1.26.** Si  $A$  es un  $p$ -grupo y  $L$  es un  $p'$ -grupo de manera que  $A$  actúa por automorfismos en  $L$ , entonces  $C_A(L) = \mathcal{O}_p(LA)$ .

*Demostración.* Probemos las dos contenciones. Como  $C_A(L)$  es un  $p$ -subgrupo normal en  $A$  y está contenido en el normalizador de  $L$ , concluimos que es un  $p$ -subgrupo normal de  $LA$ . Luego  $C_A(L) \leq \mathcal{O}_p(LA)$ .

Recíprocamente, veamos que  $\mathcal{O}_p(LA) \leq C_A(L)$ . Como  $A$  es un  $p$ -Sylow de  $LA$ , tenemos que  $\mathcal{O}_p(LA) \leq A$ . Además,  $\mathcal{O}_p(LA)$  y  $L$  son dos subgrupos normales de  $LA$  de órdenes coprimos. En particular, su intersección es trivial, y esto nos dice que  $\mathcal{O}_p(LA) \leq C_{LA}(L)$ . Intersecando a ambos lados con  $A$ , deducimos que

$$\mathcal{O}_p(LA) = \mathcal{O}_p(LA) \cap A \leq C_{LA}(L) \cap A = C_A(L)$$

□

Nuestro objetivo ahora es probar el siguiente resultado.

**Teorema 2.1.27.** Supongamos que  $L$  es un  $p'$ -grupo soluble y que  $A$  es un  $p$ -toro de rango  $s \geq 0$  que actúa por automorfismos en  $L$ . Si la acción es fiel, entonces  $\tilde{H}_{s-1}(\mathcal{A}_p(LA)) \neq 0$ .

**Observación 2.1.28.** En el caso  $s = 0$  del teorema anterior tendríamos que  $A$  es el grupo trivial, y así  $\mathcal{A}_p(LA) = \emptyset$  y  $\tilde{H}_{-1}(\mathcal{A}_p(LA)) = \mathbb{Z}$ . Luego podemos suponer que  $s > 0$ .

Antes de probar este teorema, veamos cómo reducir la prueba de la conjetura de Quillen 2.1.11 para un grupo soluble  $G$  al caso de un grupo de la forma  $LA$  como indica el teorema 2.1.27. Seguimos las ideas de [28, Theorem 12.1].

**Teorema 2.1.29.** *Sea  $G$  un grupo soluble y  $p$  un primo. Si  $\mathcal{O}_p(G) = 1$  y  $A$  es un  $p$ -toro maximal de rango  $s$ , entonces  $\tilde{H}_{s-1}(\mathcal{A}_p(G)) \neq 0$ . En particular, la conjetura vale para grupos solubles.*

*Demostración.* En el caso de que  $p$  no divida al orden de  $G$  razonamos de la misma manera que en la observación 2.1.28. Luego podemos suponer que  $p$  divide al orden de  $G$ .

Sea  $A$  un  $p$ -toro maximal de rango  $s > 0$ . Sea  $L = \mathcal{O}_{p'}(G)$ . Como  $L$  es normal en  $G$ ,  $A$  actúa por conjugación en  $L$ . Aplicando el lema de Hall-Higman (ver teorema 1.1.28), tenemos que  $C_G(L) \leq L$ . Luego  $C_A(L) = A \cap C_G(L) \leq A \cap L = 1$  puesto que son grupos de órdenes coprimos. Esto nos dice que la acción de  $A$  en  $L$  es fiel, y por lo tanto el subgrupo  $LA \leq G$  está en las condiciones del teorema 2.1.27. Luego  $\tilde{H}_{s-1}(\mathcal{A}_p(LA)) \neq 0$ .

Para concluir con la demostración, veamos que  $\tilde{H}_{s-1}(\mathcal{A}_p(LA)) \subset \tilde{H}_{s-1}(\mathcal{A}_p(G))$ . Sean  $X = \mathcal{A}_p(G)$ ,  $Y = \mathcal{A}_p(LA)$  y  $Z$  el subposet de  $\mathcal{A}_p(G)$  de los  $p$ -toros que están contenidos en algún  $p$ -toro que no está en  $\mathcal{A}_p(LA)$ . Más precisamente, si

$$I = \{H \in \mathcal{A}_p(G) : \text{maximal y } H \notin \mathcal{A}_p(LA)\}$$

entonces

$$Z = \bigcup_{H \in I} \mathcal{A}_p(H)$$

En particular, tanto  $Y$  como  $Z$  son abiertos. Veamos que si  $B \in Y \cap Z$  entonces  $B$  tiene rango  $< s$ . Sea  $C$  un  $p$ -toro maximal que contiene a  $B$  y que no está en  $Y$ . Entonces  $B < C$ . Como  $A$  es un  $p$ -Sylow, existe  $x \in LA$  tal que  $x^{-1}Bx \leq A$ . Si fuese  $x^{-1}Bx = A$ , tendríamos que  $B$  es maximal, lo cual contradice  $B < C$ . Luego  $x^{-1}Bx < A$  y así  $r_p(B) < s$ . Esto nos dice que  $Y \cap Z$  tiene dimensión  $< s - 1$ . Utilizando Mayer-Vietoris para este cubrimiento, tenemos una sucesión exacta

$$\tilde{H}_{s-1}(Y \cap Z) \rightarrow \tilde{H}_{s-1}(Y) \oplus \tilde{H}_{s-1}(Z) \rightarrow \tilde{H}_{s-1}(X)$$

y como  $\tilde{H}_{s-1}(Y \cap Z) = 0$ , deducimos que  $\tilde{H}_{s-1}(Y) \subset \tilde{H}_{s-1}(X)$ , y en particular es no trivial.  $\square$

**Observación 2.1.30.** Otro argumento para probar que  $\tilde{H}_{s-1}(\mathcal{A}_p(LA)) \subset \tilde{H}_{s-1}(\mathcal{A}_p(G))$  puede encontrarse en [30] y es el siguiente. Como tenemos una inclusión  $\mathcal{A}_p(LA) \subset \mathcal{A}_p(G)$ , basta ver que un ciclo no trivial  $z$  en  $\tilde{H}_{s-1}(\mathcal{A}_p(LA))$  es no trivial en  $\tilde{H}_{s-1}(\mathcal{A}_p(G))$ . Por dimensión,  $z$  es la suma de cadenas de la forma  $A_0 < A_1 < \dots < A_s$ , donde  $A_s$  es conjugado de  $A$  en  $LA$ . Si fuese un borde, es decir, trivial en  $\tilde{H}_{s-1}(\mathcal{A}_p(G))$ , la cadena anterior  $A_0 < A_1 < \dots < A_s$  tendría que provenir de quitarle un elemento a otra cadena más grande. Pero de la maximalidad de  $A$  y como  $\dim A_s = s$ , se tiene que  $\dim A_i = i$  para todo  $i$  y no existe un  $B \in \mathcal{A}_p(G)$  tal que  $A_s < B$ .

Antes de probar el caso  $LA$ , necesitamos una definición.

**Definición 2.1.31.** Un poset finito  $X$  de dimensión  $n$  se dice que es Cohen-Macaulay (CM) si se satisfacen las siguientes condiciones:

- $X$  es  $n$ -esférico
- $\hat{U}_x$  y  $\hat{F}_x$  son  $(h(x) - 1)$ -esférico y  $(n - h(x) - 1)$ -esférico respectivamente para todo  $x \in X$
- $\hat{F}_{x'} \cap \hat{U}_x$  es  $(h(x) - h(x') - 2)$ -esférico para todo  $x' < x \in X$

**Proposición 2.1.32.** Sea  $f : X \rightarrow Y$  un morfismo de posets estrictamente creciente. Supongamos que  $Y$  es CM de dimensión  $n$  y que para cada  $y \in Y$ , los posets  $f^{-1}(U_y^Y)$  y  $\hat{F}_y^Y$  son CM de dimensión  $h(y)$  y  $(n - h(y) - 1)$  respectivamente. Entonces  $X$  es CM de dimensión  $n$ .

La demostración de esta proposición es bastante básica y utiliza repetidas veces el teorema 2.1.15, por lo que la omitiremos. El lector puede consultar [28, Corollary 9.7] para los detalles.

Por último, veamos un lema algebraico que nos será de gran utilidad en la demostración del teorema 2.1.27

**Lema 2.1.33.** Si  $A$  es un  $p$ -toro y  $L$  es un  $p'$ -grupo con una  $A$ -acción, entonces  $C_A(L) = \{x \in Z(LA) : x^p = 1\} = \Omega_1(Z(LA))$ .

*Demostración.* Veamos las dos inclusiones. Si  $x \in Z(LA)$  y  $x^p = 1$ , por ser  $A$  un  $p$ -Sylow de  $LA$ , existe un  $y \in LA$  tal que  $x^y \in A$ . Como  $x$  es central,  $x = x^y \in A$ . Además  $x$  conmuta con todos los elementos de  $L$ , por lo que  $x \in C_A(L)$ .

Recíprocamente, si  $x \in C_A(L)$  entonces  $x^p = 1$  y conmuta con todo elemento de  $L$ . Como además conmuta con todo elemento de  $A$ , concluimos que  $x \in Z(LA)$ .  $\square$

*Demostración del Teorema 2.1.27.* Siguiendo a Quillen, demostraremos que  $\mathcal{A}_p(LA)$  es un poset Cohen-Macaulay, independientemente si la acción es fiel o no. La idea de pasar por esta propiedad, es que podemos aplicar el teorema 2.1.15 a un cierto morfismo para deducir que  $\tilde{H}_{s-1}(\mathcal{A}_p(LA)) \neq 0$ .

Como  $L$  es un  $p'$ -grupo soluble, existe una cadena de subgrupos característicos

$$L = L_0 \supset L_1 \supset \dots \supset L_r = 1 \tag{2.2}$$

de manera que los cocientes sucesivos son abelianos. Procedemos a probar por inducción en el orden de  $LA$  (asumiendo el caso  $L$  abeliano) que  $\mathcal{A}_p(LA)$  es CM de dimensión  $n = s - 1$ , y que si además la acción es fiel, entonces  $\tilde{H}_{s-1}(\mathcal{A}_p(LA)) \neq 0$ .

Supongamos que  $L$  es un  $p'$ -grupo soluble no abeliano. De la descomposición 2.2, existe  $H$  un subgrupo propio no trivial característico en  $L$ . De esta manera,  $H$  es  $A$ -invariante. Es fácil chequear que la aplicación

$$\varphi: LA/H \rightarrow (L/H)A \tag{2.3}$$

$$\bar{l}a \longmapsto \bar{l}a \tag{2.4}$$

es un isomorfismo. Como  $(L/H)$  es un  $p'$ -grupo soluble de orden menor al de  $L$ , podemos aplicar la hipótesis inductiva.

Ahora notemos que la proyección al cociente  $\pi : LA \rightarrow LA/H \simeq (L/H)A$  induce un morfismo de posets  $\pi : \mathcal{A}_p(LA) \rightarrow \mathcal{A}_p(LA/H)$ . Más aún, si  $B \in \mathcal{A}_p(LA)$ , entonces

$$\pi(B) = B/H = HB/H \simeq B/H \cap B \simeq B$$

puesto que  $H$  y  $B$  son grupos de órdenes coprimos. Esto nos dice que  $\pi$  preserva la altura de los elementos del poset y en particular es estrictamente creciente.

Veamos que  $\mathcal{A}_p(LA)$  es CM. La idea es usar la proposición 2.1.32. De la hipótesis inductiva, el poset  $Y = \mathcal{A}_p(LA/H)$  es CM de dimensión  $n$ . Basta ver que  $\pi^{-1}(U_B^Y)$  es CM de dimensión  $h(B)$ . Observemos que

$$\pi^{-1}(U_B^Y) = \{C \in \mathcal{A}_p(LA) : \pi C \leq B\} = \mathcal{A}_p(\pi^{-1}(B))$$

Tenemos una sucesión exacta corta

$$1 \rightarrow H \rightarrow \pi^{-1}(B) \rightarrow B \rightarrow 1$$

y sabemos que  $H$  es un  $p'$ -grupo soluble y  $B$  es un  $p$ -toro. Podemos aplicar el teorema de Schur–Zassenhaus 1.1.26 para deducir que  $\pi^{-1}(B) = HC$  donde  $C$  es un complemento de  $H$ . Más aún,  $B = \pi^{-1}(B)/H \simeq C$ . Aplicando la hipótesis inductiva a este grupo, deducimos que  $\pi^{-1}(U_B^Y) = \mathcal{A}_p(\pi^{-1}(B))$  CM de dimensión  $h(B)$ . Por lo tanto  $\mathcal{A}_p(LA)$  es CM de dimensión  $n$ .

Asumiendo que la acción de  $A$  en  $L$  es fiel, es decir, que  $C_A(L) = 1$ , veamos que  $\tilde{H}_{s-1}(\mathcal{A}_p(LA)) \neq 0$ . Del lema 2.1.33,  $C_A(L) = \Omega_1(Z(LA))$  son los elementos centrales de orden 1 o  $p$ .

Sea  $B = \Omega_1(Z(LA/H))$  y sea  $m = h(B)$ . Veamos que

- a)  $\Omega_1(Z(\pi^{-1}(B))) = C_B(\pi^{-1}(B)) = 1$ , es decir, la acción de  $B$  en  $H$  es fiel.
- b)  $\tilde{H}_{n-m-1}(\hat{F}_B^{\mathcal{A}_p(LA/H)}) \neq 0$

Una vez probado esto, por hipótesis inductiva en  $\pi^{-1}(B)$  y por a) tendremos que  $\tilde{H}_m(\mathcal{A}_p(\pi^{-1}(B))) \neq 0$ . Del teorema 2.1.15, usando b), deducimos que  $\tilde{H}_n(\mathcal{A}_p(LA)) \neq 0$ .

- a) Escribamos  $\pi^{-1}(B) = HC$  con  $C \simeq \pi^{-1}(B)/H = B = \Omega_1(Z(LA/H))$ . Del lema 2.1.33,  $\Omega_1(Z(\pi^{-1}(B))) = C_C(H) \leq C$ . Sea  $b \in C_C(H)$ . Entonces  $\bar{b} \in \Omega_1(Z(LA/H)) \simeq C_A(L/H)$ , donde el iso es  $a \mapsto \bar{a}$ . Luego  $\bar{b} = \bar{a}$  para cierto  $a \in A$ . Existe  $h \in H$  tal que  $b = ha$ . Entonces  $a = h^{-1}b \in HC$  y en particular,  $[a, b] = 1$  por ser  $b$  central. Como  $h^p = (ba^{-1})^p = 1$ , vemos que  $h = 1$ . Esto prueba que  $\Omega_1(Z(\pi^{-1}(B))) \leq A$ .

Veamos ahora que  $\Omega_1(Z(\pi^{-1}(B))) \leq C_A(L)$ . Sean  $l \in L$  y  $b \in \Omega_1(Z(\pi^{-1}(B)))$  y probemos que  $[b, l] = 1$ . Como  $\bar{b} \in \Omega_1(Z(LA/H))$ ,

$$\overline{[b, l]} = [\bar{b}, \bar{l}] = \bar{1}$$

por lo que existe  $h \in H$  tal que  $h = [b, l] = b l b^{-1} l^{-1}$ . Sea  $c = l b^{-1} l^{-1}$ . Entonces  $c = b^{-1} h = h b^{-1}$  por ser  $b$  central. Como  $c$  es un conjugado de  $b^{-1}$ ,

$$1 = c^p = (b^{-1} h)^p = h^p$$

y así  $h = 1$ .

- b) Como  $B$  es un subgrupo característico de  $LA/H$ , en particular es normal y se tiene un isomorfismo entre posets

$$\hat{F}_B^{\mathcal{A}_p(LA/H)} = \{C \in \mathcal{A}_p(LA/H) : B < C\} = \mathcal{A}_p((LA/H)/B)$$

como consecuencia del teorema de correspondencia. Del isomorfismo 2.3,

$$(LA/H)/B \simeq ((L/H)A)/C_A(L/H) \simeq (L/H)(A/C_A(L/H)) = L'A'$$

donde  $L' = L/H$  es un  $p'$ -grupo con una acción fiel de  $A' = A/C_A(L/H)$ . Notar que  $|A'| = |A|/|C_A(L/H)| = p^{n+1}/p^{m+1} = p^{n-m}$ . Por hipótesis inductiva,

$$\tilde{H}_{n-m-1}(\hat{F}_B^{\mathcal{A}_p(LA/H)}) = \tilde{H}_{n-m-1}(\mathcal{A}_p(L'A')) \neq 0$$

Para el caso de  $L$  abeliano los argumentos son puramente algebraicos y repiten las ideas expuestas. El lector puede seguir esta parte de la demostración en [28, Theorem 11.2].  $\square$

### Otros casos demostrados por Quillen y el caso $p$ -soluble

Quillen en [28] demuestra otros casos de su conjetura 2.1.11 además del caso soluble. Entre ellos está el ya mencionado caso en que  $\mathcal{A}_p(G)$  tiene altura a lo sumo 1 (ver proposición 2.1.13). Los otros dos casos que prueba tienen que ver con grupos simples y requieren otras herramientas que no veremos aquí.

De la clasificación de grupos finitos simples, un grupo simple no abeliano puede ser un grupo alterno  $A_n$  ( $n \geq 5$ ), un grupo de tipo de Lie o uno de los 26 grupos esporádicos.

**Teorema 2.1.34.** ([28, Theorem 3.1]) *Si  $G$  es un grupo de tipo de Lie en (la misma) característica  $p$ , entonces vale la conjetura 2.1.11.*

Precisamente, lo que dice [28, Theorem 3.1] es que el complejo simplicial  $\mathcal{K}(\mathcal{A}_p(G))$  es homotópicamente equivalente al building  $T$  asociado a tal grupo (en el sentido de Tits, ver [34]). En consecuencia,  $\mathcal{K}(\mathcal{A}_p(G))$  tiene el mismo tipo homotópico que un wedge de esferas de dimensión  $l-1$ , donde  $l$  es cierto invariante del building  $T$ .

En general, el complejo simplicial  $T$  tiene dimensión más chica que  $\mathcal{K}(\mathcal{A}_p(G))$ , y por lo tanto, a diferencia del caso soluble, en general no sucede que la homología de grado  $r$ , con  $r = h(\mathcal{A}_p(G))$  sea no trivial. Los grupos  $G$  que verifica que  $H_r(\mathcal{A}_p(G)) \neq 0$  con  $r = h(\mathcal{A}_p(G))$  se dicen que satisfacen la Quillen Dimension Property para  $p$ , y se abrevia  $(QD)_p$  (definición introducida por Aschbacher y Smith). Por ejemplo, en el caso de  $G$  soluble vimos que  $G$  satisface  $(QD)_p$ . Es claro que  $(QD)_p$  implica la conjetura, pero no todos los grupos que satisfacen la conjetura verifican  $(QD)_p$ . Un ejemplo de esto son los grupos como en el teorema anterior.

El otro caso que demuestra Quillen es cuando  $G = \mathrm{GL}_n(q)$  con  $q \equiv 1 \pmod{p}$ . De hecho, la validez de la conjetura para estos grupos está implícita en la demostración del siguiente teorema.

**Teorema 2.1.35.** ([28, Theorem 12.4])  *$\mathcal{A}_p(\mathrm{GL}_n(q))$  es Cohen-Macaulay de dimensión  $n-1$ .*

El entendimiento de las demostraciones de estos dos teoremas requiere de un desarrollo básico sobre buildings y de grupos de tipo de Lie, lo cual escapa a los objetivos de este trabajo. El lector puede consultar los artículos [28] y [34] para obtener definiciones más precisas y ver las demostraciones correspondientes.

Por otro lado, en [28, Problem 12.3], Quillen propone ver que el teorema 2.1.27 es válido si suponemos solamente que  $L$  es un  $p'$ -grupo con una acción fiel de  $A$ . De esta manera, la demostración del teorema 2.1.29 sigue siendo válida si restringimos nuestras hipótesis a  $G$   $p$ -soluble, ya que se basa principalmente en la aplicación del lema de Hall-Higman (ver teorema 1.1.28) que vale para grupos  $p$ -solubles. Sin embargo, la demostración del caso  $LA$  para  $L$  un  $p'$ -grupo con la acción fiel de un  $p$ -toro  $A$ , no es tan simple. Las demostraciones que hemos encontrado al respecto (ver [30] o [16]) utilizan en un momento la CGSF para descartar casos.

La demostración del caso  $p$ -soluble que presenta Smith en [30] se puede resumir de la siguiente manera. Vía la reducción que propone Quillen, basta con probar el teorema 2.1.27 cuando  $L$  es solo un  $p'$ -grupo. Es decir, si  $A$  es un  $p$ -toro que actúa fielmente en  $L$  por automorfismos, entonces  $\tilde{H}_{s-1}(\mathcal{A}_p(LA)) \neq 0$ , donde  $s \geq 0$  es el rango de  $A$ . De esta manera, tomamos  $L$  que sea un  $p'$ -grupo minimal respecto a tener una  $A$ -acción fiel. Vía argumentos básicos de teoría de grupos, se puede deducir que  $L = F^*(L)$ , donde  $F^*(L)$  es el subgrupo de Fitting generalizado de  $L$ . A partir de esto, la idea es construirse un subgrupo  $L_0 \leq L$  que sea soluble y tal que  $A$  actúa en  $L_0$  de manera fiel. Por minimalidad de  $L$ , debe ser que  $L_0 = L$  y así se puede aplicar lo que ya está demostrado en el teorema 2.1.27. La construcción de tal subgrupo  $L_0$  se obtiene a partir del producto del subgrupo de Fitting  $F(L)$  con otros subgrupos  $T_i$  que verifican determinadas condiciones. Para probar que tal subgrupo  $L_0$  posee una  $A$ -acción fiel, Smith utiliza la clasificación de grupos simples finitos.

Smith en [30] presenta una demostración distinta del caso  $LA$  con  $L$  soluble. Se toma nuevamente un  $L$  que sea minimal respecto a tener una  $A$ -acción fiel y a partir de esto, realizando una serie de reducciones, se construye un producto central de  $s$ -subgrupos que representan 0-esferas. El producto central de grupos se traduce en el join de los complejos asociados. Como un join de  $s$  0-esferas pasa a ser una  $s - 1$ -esfera dentro de  $\mathcal{K}(\mathcal{A}_p(LA))$ , obtenemos un elemento no trivial de  $\tilde{H}_{s-1}(\mathcal{A}_p(LA))$ .

Estos argumentos que aparecen en [30] son debidos a Alperin, aunque no están publicados oficialmente.

Por otro lado, la demostración de Díaz Ramos en [16] del caso  $p$ -soluble, si bien utiliza la CGSF para descartar casos, se basa en las siguientes reducciones. Al igual que Alperin, se reduce al caso  $LA$  con  $L$  un  $p'$ -grupo con una  $A$ -acción fiel. Vía [16, Theorem 5.6], se reduce al caso en que  $K = B \times S$  es el producto directo de un  $p'$ -grupo abeliano  $B$  por un  $p'$ -grupo  $S$  que es el producto directo de grupos simples no abelianos. Luego utilizando [16, Theorem 5.3] y la CGSF, deduce [16, Theorem 5.2]. A partir de este resultado demuestra el caso  $LA$  con  $L$  un  $p'$ -grupo viendo que cierto subgrupo de la homología de grado  $s - 1$ , donde  $|A| = p^s$ , con coeficientes en un grupo cíclico  $\mathbb{Z}_d$ , es no trivial. Concluye así que  $\tilde{H}_{s-1}(\mathcal{A}_p(LA)) \neq 0$ .

Por último, remarcamos que tanto la demostración de Alperin como la de Díaz Ramos del caso  $p$ -soluble, se basan en probar  $(QD)_p$  para un grupo  $G$  es  $p$ -soluble con  $\mathcal{O}_p(G) = 1$ .

Otra demostración del caso  $p$ -soluble se puede encontrar en el artículo de Aschbacher

y Smith [3].

### El resultado más general de la conjetura

A partir del artículo [28], ha habido grandes avances sobre la conjetura 2.1.11. Además de los casos demostrados por Quillen y el caso  $p$ -soluble, en este apartado veremos qué otros resultados se obtuvieron.

En [19], Hawkes e Isaacs demostraron la siguiente equivalencia, con técnicas algebraicas y combinatorias.

**Teorema 2.1.36.** (Hawkes-Isaacs, [19, Theorem A]) *Si  $G$  es  $p$ -soluble con  $p$ -Sylows abelianos, entonces  $\mathcal{O}_p(G) > 1$  si y solo si  $\chi(\mathcal{S}_p(G)) = 1$ .*

Si  $\mathcal{O}_p(G) > 1$  entonces la característica de Euler es 1 porque el poset  $\mathcal{S}_p(G)$  es contráctil. Luego hay que ver que si  $\mathcal{O}_p(G) = 1$  entonces  $\chi(\mathcal{S}_p(G)) \neq 1$ . Lo primero que hacen Hawkes e Isaacs es reducirse al caso  $LA$  con  $L$  un  $p'$ -grupo y  $A$  abeliano. Supongamos que  $\mathcal{O}_p(G) = 1$  y sea  $L = \mathcal{O}_{p'}(G)$ . Si  $\overline{G} = G/L$  y  $\overline{A} = LA/L$ , entonces  $\mathcal{O}_p(\overline{G}) \leq \overline{A}$  por ser  $\overline{A}$  un  $p$ -Sylow de  $\overline{G}$ . Ahora,  $\overline{G}$  es  $p$ -soluble y  $\mathcal{O}_{p'}(\overline{G}) = 1$ , por lo que del lema de Hall-Higman (ver teorema 1.1.28) tenemos que  $C_{\overline{G}}(\mathcal{O}_p(\overline{G}))$ . Como  $\overline{A}$  es abeliano, en particular centraliza a  $\mathcal{O}_p(\overline{G})$  y por lo tanto tiene que ser que  $\mathcal{O}_p(\overline{G}) = \overline{A}$ . Esto nos dice que  $\overline{A}$  es normal en  $\overline{G}$ , y así  $LA$  es normal en  $G$ . Como  $A$  es un  $p$ -Sylow, obtenemos que  $\mathcal{S}_p(LA) = \mathcal{S}_p(G)$ . Además, de la condición  $\mathcal{O}_p(G) = 1$  se sigue que  $\mathcal{O}_p(LA) = 1$ . De hecho, lo que se puede hacer es suponer que  $A$  es elemental abeliano, ya que  $\mathcal{S}_p(LA) \underset{w}{\approx} \mathcal{A}_p(LA) = \mathcal{S}_p(L\Omega_1(A))$  y  $\mathcal{O}_p(L\Omega_1(A)) = 1$ . A partir de esto, trabajando con la función de Möbius de un poset, Hawkes e Isaacs demuestran que la característica de Euler es no trivial.

En [30], Smith presenta una demostración diferente de este teorema, recurriendo nuevamente a un argumento de Alperin que consiste en la reducción a un caso minimal y luego al caso soluble. Como lo que hay que probar aquí es que la característica de Euler es no trivial, no sirve con ver solamente que se satisface  $(QD)_p$ . Una vez reducido al caso  $LA$ , donde  $L$  es un  $p'$ -grupo,  $A$  es (elemental) abeliano y  $LA$  es  $p$ -soluble con  $\mathcal{O}_p(LA) = 1$ , lo que hace Alperin es construirse un subgrupo  $L_0 \leq L$  que sea soluble,  $A$ -invariante y tal que  $\chi(\mathcal{S}_p(LA)) = \chi(\mathcal{S}_p(L_0A))$ . De esta manera, del teorema 2.1.27, como  $\mathcal{A}_p(L_0A)$  es Cohen-Macaulay, su característica de Euler es no trivial.

Por otro lado, lo que Smith remarca en [30], es que, como ya vimos, al fin y al cabo si  $\mathcal{O}_p(G) = 1$  entonces  $G$  satisface  $(QD)_p$ , a excepción del caso de grupos de tipo de Lie en característica  $p$ . En particular, el caso de  $G = \mathrm{GL}_n(q)$  con  $q \equiv 1 \pmod p$  en [28, Theorem 12.4] que demuestra Quillen también satisface  $(QD)_p$ . Esta noción de  $(QD)_p$  fue introducida por Aschbacher y Smith en [3] y sirvió de motivación para el análisis de la conjetura en casos más generales. Lo que proponen en su análisis de la conjetura, es verificar si las componentes del subgrupo generalizado de Fitting  $F^*(G)$  verifican  $(QD)_p$ , y en tal caso utilizar argumento inductivos. Cuando hay componentes que no lo verifican, se deben recurrir a otros métodos no-inductivos. De esta manera, parte del gran trabajo de Aschbacher y Smith es probar para qué grupos simples se satisface  $(QD)_p$  y para cuáles no. En realidad, lo que consideran son grupos casi simples  $G$ : el subgrupo  $F^*(G)$  es simple. Luego analizan el caso minimal  $G = LA$  con  $L = F^*(G)$  simple y  $A \leq \mathrm{Out}(L)$   $p$ -elemental

abeliano. Bajo estas hipótesis, los grupos  $LA$  que no se sabe si satisfacen  $(QD)_p$  pueden encontrarse en [3, Theorem 3.1] o [30, Theorem 8.2.15]. La demostración de este teorema involucra un profundo estudio de los grupos simples y por lo tanto la utilización de la CGSF.

Lo que Smith remarca en [30], es que la mayoría de los grupos de la lista de excepciones de grupos  $LA$  que no se sabe si satisfacen  $(QD)_p$ , no causan problemas en el sentido que se puede demostrar la conjetura para tales grupos. Sin embargo, hay una clase de grupos en particular que parece evadir todo tipo de análisis y que es por ello que todavía no han podido probar la conjetura en el caso general. Estos son los grupos unitarios  $U_n(q)$  en característica  $q$  con  $q \equiv -1 \pmod p$  y con  $n \geq q(q-1)$ . Para Aschbacher y Smith, tales grupos deberían satisfacer  $(QD)_p$ .

**Conjetura 2.1.37.** ([3, Conjecture 4.1]) Supongamos que  $p$  es impar y que si  $p = 3$ , excluimos los casos  $q = 2, 8$ . Entonces  $(QD)_p$  debería satisfacerse en  $LA$  con  $L = U_n(q)$  y  $A$   $p$ -elemental abeliano.

En [3, 4.4(b)], se demuestra la conjetura anterior para el caso  $q(q-1) > n$ .

A continuación, citamos el teorema principal del artículo de Aschbacher y Smith [3].

**Teorema 2.1.38.** (Aschbacher-Smith, [3, Main Theorem]) Sea  $G$  un grupo finito y sea  $p > 5$  un primo tal que si  $G$  contiene componentes unitarias  $U_n(q)$  con  $q \equiv -1 \pmod p$  y  $q$  es impar, entonces vale  $(QD)_p$  para todas las  $p$ -extensiones de  $U_m(q^{p^e})$  con  $m \leq n$  y  $e \in \mathbb{Z}$ . Entonces  $G$  satisface la conjetura de Quillen 2.1.11 para  $p$ .

Una  $p$ -extensión de un grupo simple  $L$  es un producto semidirecto  $LB$  con  $B \leq \text{Out}(L)$  un  $p$ -toro.

Para finalizar esta sección, remarcamos que hay más casos probados de la conjetura, incluso en [3]. Por ejemplo, [2, Theorem 3] afirma que si  $F^*(G)$  es simple, entonces  $G$  satisface la conjetura de Quillen 2.1.11.

## 2.2 La relación entre $\mathcal{S}_p(G_1 \times G_2)$ y $\mathcal{S}_p(G_1) * \mathcal{S}_p(G_2)$

Un caso interesante que comenta Quillen en [28] es cuando  $G$  es el producto directo de dos grupos. Lo que él afirma es que si  $G \simeq G_1 \times G_2$ , entonces  $\mathcal{K}(\mathcal{S}_p(G_1 \times G_2))$  es homotópicamente equivalente a  $\mathcal{K}(\mathcal{S}_p(G_1) * \mathcal{S}_p(G_2))$ . Nosotros en este apartado veremos que este resultado no vale si los vemos como espacios finitos: en general  $\mathcal{S}_p(G_1 \times G_2)$  no es homotópicamente equivalente a  $\mathcal{S}_p(G_1) * \mathcal{S}_p(G_2)$ , donde consideramos el join de espacios finitos (ver definición 1.2.23).

Si  $X$  es un poset, notamos por  $C^+X$  al poset  $X * \{+\}$  que mantiene el orden entre los elementos de  $X$  y le agrega el elemento  $+$  en rol de máximo. Análogamente definimos  $C^-X = \{-\} * X$ .

**Proposición 2.2.1.** Si  $X$  e  $Y$  son dos posets, entonces  $C^+X \times C^-Y - \{(+, -)\} \simeq X * Y$

*Demostración.* Sea  $Z = C^+X \times C^-Y - \{(+, -)\}$  y sea  $W = X * Y$ . Tenemos una función  $g : Z \rightarrow W$  dada por

$$g(x, y) = \begin{cases} y & \text{si } y \neq - \\ x & \text{si } y = - \end{cases}$$

Es fácil chequear que  $g$  es un morfismo de posets. Por otro lado, tenemos una función  $f : W \rightarrow Z$  dada por

$$f(w) = \begin{cases} (x, -) & \text{si } w = x \in X \\ (+, y) & \text{si } w = y \in Y \end{cases}$$

Es inmediato ver que  $f$  es morfismo de posets. Veamos que  $f$  y  $g$  son inversas homotópicas una de otra:

$$gf(w) = \begin{cases} g(x, -) & w = x \in X \\ g(+, y) & w = y \in Y \end{cases} = \begin{cases} x & w = x \in X \\ y & w = y \in Y \end{cases} = w$$

$$fg(x, y) = \begin{cases} f(y) & x \neq - \\ f(x) & y = - \end{cases} = \begin{cases} (+, y) & y \neq - \\ (x, -) & y = - \end{cases} = \begin{cases} (+, y) & y \neq - \\ (x, y) & y = - \end{cases} \geq (x, y)$$

Por lo tanto  $gf = \text{id}_W$  y  $fg \geq \text{id}_Z$ , por lo que  $W = C^+X \times C^-Y - \{(+, -)\}$  y  $Z = X * Y$  son homotópicamente equivalentes.  $\square$

**Observación 2.2.2.** Notemos que si  $X$  e  $Y$  son  $G$ -posets, entonces los morfismos de la demostración anterior  $f$  y  $g$  son  $G$ -inversas, donde la acción de  $G$  en los elementos  $+$  y  $-$  la asumimos trivial. Es decir, los espacios  $C^+X \times C^-Y - \{(+, -)\}$  y  $X * Y$  son  $G$ -equivalentes.

Para los posets de  $p$ -subgrupos tenemos además otra equivalencia en relación al producto directo de grupos. Para un grupo finito  $G$  y un primo  $p$ , cuando hablemos del poset  $C^-S_p(G)$  podemos pensar que el elemento que agregamos  $-$  es el grupo trivial. Análogamente, en el poset  $C^+S_p(G)$ , el elemento  $+$  lo podemos pensar como todo el grupo  $G$ .

**Proposición 2.2.3.** Para dos grupos finitos  $G_1$  y  $G_2$ , sea  $G = G_1 \times G_2$ . Entonces el poset  $S_p(G_1 \times G_2)$  es  $G$ -equivalente al poset  $C^-S_p(G_1) \times C^-S_p(G_2) - \{(-, -)\}$ .

*Demostración.* Por un lado podemos definir

$$f : S_p(G_1 \times G_2) \longrightarrow C^-S_p(G_1) \times C^-S_p(G_2) - \{(-, -)\}$$

$$H \longmapsto p_1(H) \times p_2(H)$$

donde  $p_i : G_1 \times G_2 \rightarrow G_i$  es la proyección canónica. Identificamos al subgrupo trivial de  $G_i$  con el elemento  $- \in C^-S_p(G_i)$ . Es fácil chequear que  $f$  es un morfismo de posets bien definido. Por otro lado, tenemos

$$g : C^-S_p(G_1) \times C^-S_p(G_2) - \{(-, -)\} \longrightarrow S_p(G_1 \times G_2)$$

$$H_1 \times H_2 \longmapsto H_1 \times H_2$$

Es claro que  $g$  también es un morfismo de posets bien definido. Luego

$$gf(H) = p_1(H) \times p_2(H) \geq H$$

$$fg(H_1 \times H_2) = p_1(H_1 \times H_2) \times p_2(H_1 \times H_2) = H_1 \times H_2$$

Además, tanto  $f$  como  $g$  son morfismos  $G$ -equivariantes. Luego los posets  $C^-S_p(G_1) \times C^-S_p(G_2) - \{(-, -)\}$  y  $S_p(G_1 \times G_2)$  son  $G$ -equivalentes.  $\square$

En vista de las proposiciones anteriores, parece haber cierta relación homotópica entre los posets  $\mathcal{S}_p(G_1 \times G_2)$  y  $\mathcal{S}_p(G_1) * \mathcal{S}_p(G_2)$ . Pero si queremos pasar por los conos de los posets, nos encontramos con ciertas dificultades. De hecho, en general no vale que  $C^-X \times C^-Y - \{(-, -)\}$  sea homotópicamente equivalente a  $C^+X \times C^-Y - \{(+, -)\}$ .

**Ejemplo 2.2.4.** Tomemos  $X$  un espacio discreto de  $n$  puntos e  $Y$  un espacio discreto de  $m$  puntos, con  $1 < n < m$ . Entonces  $X * Y \not\cong Y * X$ . Para ver esto, primero notemos que ambos espacios son minimales. Si  $x \in X$ , como  $m > 2$ , hay al menos dos elementos  $y_1, y_2$  de  $Y$  que lo cubren en  $X * Y$ , donde  $x$  es minimal, y estos mismos dos están cubiertos por  $x$  en  $Y * X$ , donde  $x$  es maximal. Luego  $x$  no es beat point en  $X * Y$  ni en  $Y * X$ . De manera análoga, como  $n \geq 2$ , los elementos de  $Y$  no son beat points ni en  $X * Y$  ni en  $Y * X$ . Luego ambos espacios  $X * Y$  e  $Y * X$  son minimales. Como  $X * Y$  tiene  $n$  maximales y  $Y * X$  tiene  $m$  maximales, con  $n < m$ , concluimos que no son homeomorfos, y por lo tanto no son homotópicamente equivalentes.

El ejemplo anterior se extiende fácilmente a los casos de los  $\mathcal{S}_p(G)$ , puesto que podemos conseguir grupos  $G$  para los que  $\mathcal{S}_p(G)$  sea discreto con más de un punto.

**Ejemplo 2.2.5.** Para  $G = \mathbb{S}_4$  y  $p = 3$ ,  $\mathcal{S}_3(\mathbb{S}_4)$  es discreto con 4 puntos. Esto es porque:

1.  $|G| = 2^3 * 3$
2. La cantidad de 3-Sylows es 4 pues 2 y 8 no son congruentes a 1 módulo 3 y hay al menos 4 elementos distintos de orden 3:  $\{(1, 2, 3), (1, 3, 2), (1, 2, 4), (1, 4, 2)\}$
3. Los 3-Sylows son isomorfos a  $\mathbb{Z}_3$ .

De manera análoga se puede probar que  $\mathcal{S}_3(\mathbb{S}_5)$  es discreto con 10 puntos. Luego del ejemplo anterior,  $\mathcal{S}_3(\mathbb{S}_4) * \mathcal{S}_3(\mathbb{S}_5) \not\cong \mathcal{S}_3(\mathbb{S}_5) * \mathcal{S}_3(\mathbb{S}_4)$

Este último ejemplo prueba que en general  $\mathcal{S}_p(G_1) * \mathcal{S}_p(G_2)$  y  $\mathcal{S}_p(G_2) * \mathcal{S}_p(G_1)$  no son homotópicamente equivalentes.

Retomando a los conos, queremos analizar la conexión entre  $\mathcal{S}_p(G_1 \times G_2)$  y  $\mathcal{S}_p(G_1) * \mathcal{S}_p(G_2)$ . El ejemplo anterior muestra que no son homotópicamente equivalentes en general, ya que  $\mathcal{S}_p(G_1 \times G_2) \equiv \mathcal{S}_p(G_2 \times G_1)$ . Para dejar en claro esto último, veamos qué sucede con los diferentes espacios que podemos armarnos tomando el producto de dos conos y sacando sus vértices como hicimos en las dos proposiciones anteriores.

**Ejemplo 2.2.6.** Supongamos que  $X$  es un espacio discreto de  $n$  puntos y que  $Y$  es un espacio discreto de  $m$  puntos, con  $1 < n < m$ . Cambiemos un poco la notación y notemos por  $x$  e  $y$  a los puntos que agregamos a los espacios  $X$  e  $Y$  respectivamente cuando le tomamos algún cono. Supongamos que  $X = \{a_1, \dots, a_n\}$  y que  $Y = \{b_1, \dots, b_m\}$ .

1. Caso  $C^-X \times C^-Y - \{(x, y)\}$ : afirmo que es un espacio minimal con  $mn$  elementos maximales y  $m + n$  minimales. En efecto, si  $(a_i, b_j) \leq (a_{i'}, b_{j'})$ , entonces  $a_i = a_{i'}$  y  $b_j = b_{j'}$  por ser  $X$  e  $Y$  discretos. Además, un elemento maximal no puede ser de la forma  $(x, b)$  o  $(a, y)$  por ser  $x < a$  para todo  $a \in X$  e  $y < b$  para todo  $b \in Y$ . Esto mismo nos dice que el poset tiene altura 1 y que debajo de cada  $(a_i, b_j)$  solo pueden

estar los elementos  $(x, b_j)$  e  $(a_i, y)$ . Así, hay un total de  $mn$  maximales y ninguno es (down) beat point. Esto mismo que dijimos prueba que los minimales son todos de la forma  $(x, b_j)$  e  $(a_i, y)$ , por lo que hay un total de  $m + n$  minimales. Para cada  $i$ , sobre  $(a_i, y)$  tenemos a los maximales  $(a_i, b_k)$  para todo  $k = 1, \dots, m$ , los cuales son más de 1 pues  $m > 1$ . El mismo razonamiento aplica a los minimales  $(x, b_j)$ . Por lo tanto, los minimales no son (up) beat points.

2. Caso  $C^-X \times C^+Y - \{(x, y)\}$ : es homotópicamente equivalente al espacio  $Y * X$  por la proposición 2.2.1. En particular, su core tiene  $n$  maximales,  $m$  minimales, altura 1 y todo maximal cubre a todo minimal.
3. Caso  $C^+X \times C^-Y - \{(x, y)\}$ : es homotópicamente equivalente al espacio  $X * Y$  por la proposición 2.2.1. En particular, su core tiene  $m$  maximales,  $n$  minimales, altura 1 y todo maximal cubre a todo minimal.
4. Caso  $C^+X \times C^+Y - \{(x, y)\}$ : es el poset opuesto a  $C^-X \times C^-Y - \{(x, y)\}$ :

$$(C^-X \times C^-Y - \{(x, y)\})^{op} = C^+X \times C^+Y - \{(x, y)\}$$

Esto se verifica fácilmente observando que  $(C^-X)^{op} = C^+X$  si  $X$  es discreto. En particular, tenemos  $m + n$  maximales,  $mn$  minimales y es un espacio minimal de altura 1.

Aplicando lo que vimos en el ejemplo 2.2.4, deducimos que los espacios de los casos 2 y 3 no son homotópicamente equivalentes. Además, como  $n < m$ , se tiene que  $mn \geq m * 2 = m + m > m + n$ , y así 1 y 4 no pueden ser homotópicamente equivalentes: son espacios minimales con distinta cantidad de elementos maximales. Continuando con este tipo de razonamientos, podemos deducir que dos espacios distintos de los anteriores no son homotópicamente equivalentes.

Si tomamos  $X = \mathcal{S}_3(\mathbb{S}_4)$  e  $Y = \mathcal{S}_3(\mathbb{S}_5)$  tenemos estos mismos contraejemplos para los posets de la forma  $\mathcal{S}_p(G)$ .

Lo que sí vale en general, es lo siguiente:

**Proposición 2.2.7.** El poset  $\mathcal{S}_p(G_1 \times G_2)$  es contráctil si y solo si  $\mathcal{S}_p(G_1) * \mathcal{S}_p(G_2)$  es contráctil.

*Demostración.* Notemos por  $\text{inc}_i : G_i \rightarrow G_1 \times G_2$  a la inclusión canónica  $\text{inc}_i(g) = (g, 1)$  o  $(1, g)$  si  $i = 1$  o  $i = 2$  respectivamente.

Si  $\mathcal{S}_p(G_1) * \mathcal{S}_p(G_2)$  es contráctil, entonces para algún  $i$ ,  $\mathcal{S}_p(G_i)$  es contráctil (ver proposición 1.2.25). Luego existe  $H \leq G_i$  un  $p$ -subgrupo normal no trivial. Es inmediato verificar que  $\text{inc}_i(H)$  es un  $p$ -subgrupo normal no trivial de  $\mathcal{S}_p(G_1 \times G_2)$ .

Recíprocamente, si  $\mathcal{S}_p(G_1 \times G_2)$  es contráctil, existe  $H \leq G_1 \times G_2$  un  $p$ -subgrupo normal no trivial. Luego  $p_1(H) \leq G_1$  o bien  $p_2(H) \leq G_2$  es un  $p$ -subgrupo no trivial. Como  $H \trianglelefteq G_1 \times G_2$ , si  $g \in G_i$ , entonces  $p_i(H)^g = p_i(H^{\text{inc}_i(g)}) = p_i(H)$ . De esta manera,  $p_i(H) \trianglelefteq G_i$ , y como para algún  $i$  es no trivial, concluimos que para algún  $i$ ,  $\mathcal{S}_p(G_i)$  es contráctil. Por lo tanto el join  $\mathcal{S}_p(G_1) * \mathcal{S}_p(G_2)$  es contráctil.  $\square$

Hasta acá hemos visto que en general  $\mathcal{S}_p(G_1 \times G_2)$  no es homotópicamente equivalente a  $\mathcal{S}_p(G_1) * \mathcal{S}_p(G_2)$ , pero que si alguno de los dos es contráctil, entonces el otro lo es. Quillen lo que prueba en [28] es que sus complejos simpliciales asociados son homotópicamente equivalentes, lo que en términos de posets se traduce en decir que tienen el mismo tipo homotópico débil.

**Proposición 2.2.8.** Los posets  $\mathcal{S}_p(G_1 \times G_2)$  y  $\mathcal{S}_p(G_1) * \mathcal{S}_p(G_2)$  tienen el mismo tipo homotópico débil. Es decir, tienen los mismos grupos de homotopía.

*Demostración.* En vista de las proposiciones 2.2.3 y 2.2.1, basta ver que para dos posets  $X$  e  $Y$ , los espacios  $C^+X \times C^-Y - \{(+, -)\}$  y  $C^-X \times C^-Y - \{(-, -)\}$  tienen el mismo tipo homotópico débil. Esto es consecuencia de la proposición que viene a continuación, la cual muestra que las realizaciones geométricas de sus complejos asociados son homeomorfas. Por lo tanto ambos posets poseen los mismos grupos de homotopía.  $\square$

**Proposición 2.2.9.** Si  $X$  e  $Y$  son dos posets, entonces las realizaciones geométricas de los complejos  $\mathcal{K}(C^+X \times C^-Y - \{(+, -)\})$  y  $\mathcal{K}(C^-X \times C^-Y - \{(-, -)\})$  son homeomorfas. En particular,  $C^+X \times C^-Y - \{(+, -)\}$  y  $C^-X \times C^-Y - \{(-, -)\}$  tienen los mismos grupos de homotopía.

*Demostración.* En [6, Proposition 2.7.5], Barmak afirma que la función  $f : |\mathcal{K}(X \times Y)| \rightarrow |\mathcal{K}(X)| \times |\mathcal{K}(Y)|$  definida por

$$f\left(\sum_{i=0}^k t_i(x_i, y_i)\right) = \left(\sum_{i=0}^k t_i x_i, \sum_{i=0}^k t_i y_i\right)$$

para  $(x_0, y_0) < (x_1, y_1) < \dots < (x_k, y_k)$ , es un homeomorfismo para cualesquiera  $X$  e  $Y$  espacios finitos  $T_0$ . Recordemos que si  $x \in X$ , entonces  $\mathcal{K}(X - x) = \mathcal{K}(X) - x$ . Utilicemos este homeomorfismo para ver entonces que  $|\mathcal{K}(C^+X \times C^-Y) - \{(+, -)\}|$  y  $|\mathcal{K}(C^-X \times C^-Y) - \{(-, -)\}|$  son homeomorfos. En abuso de notación, vamos a notar siempre  $f$  a este homeomorfismo, aunque vayamos cambiando los espacios. Observemos que

$$\begin{aligned} |\mathcal{K}(C^+X \times C^-Y)| &\equiv |\mathcal{K}(C^+X)| \times |\mathcal{K}(C^-Y)| \\ &\equiv |\mathcal{K}(C^-X)| \times |\mathcal{K}(C^-Y)| \\ &\equiv |\mathcal{K}(C^-X \times C^-Y)| \end{aligned}$$

donde el homeomorfismo es  $(\sum_i t_i(x_i, y_i)) \mapsto f^{-1}(\sum_i t_i \hat{x}_i, \sum_i t_i y_i)$  y

$$\hat{x}_i = \begin{cases} x_i & \text{si } x_i \neq + \\ - & \text{si } x_i = + \end{cases}$$

Uno puede chequear que esta composición se restringe a un homeomorfismo entre los espacios  $|\mathcal{K}(C^+X \times C^-Y) - \{(+, -)\}|$  y  $|\mathcal{K}(C^-X \times C^-Y) - \{(-, -)\}|$ . Los detalles quedan a cargo del lector.

Para una explícita descripción de la inversa de  $f$  referimos al lector a la demostración de [6, Proposition 2.7.5].  $\square$

Si  $X$  e  $Y$  son dos posets y alguno de los dos es homotópicamente trivial, entonces su join  $X * Y$  lo es. Una forma inmediata de ver esto es pasando por los complejos simpliciales asociados y recordando que  $|\mathcal{K}(X * Y)| \cong |\mathcal{K}(X)| * |\mathcal{K}(Y)|$ , y este es el join clásico. Siendo alguno de los dos contráctil, el join de los espacios es contráctil (ver [26]). Sin embargo, en general no vale que si  $X * Y$  es homotópicamente trivial entonces alguno de los espacios lo es. Para un contraejemplo de esto, ver el comentario que hace Barmak luego de [6, Proposition 6.2.12].

Curiosamente, para los posets  $\mathcal{S}_p(G)$  debería ser cierto al menos si la conjetura de Quillen fuese cierta. Esto plantea una gran restricción al nivel de los grupos de homología que deberían tener los posets  $\mathcal{S}_p(G)$ .

**Proposición 2.2.10.** Si la conjetura de Quillen 2.1.11 es cierta y  $\mathcal{S}_p(G_1) * \mathcal{S}_p(G_2)$  es homotópicamente trivial, entonces  $\mathcal{S}_p(G_1)$  o  $\mathcal{S}_p(G_2)$  es homotópicamente trivial.

*Demostración.* Si  $\mathcal{S}_p(G_1) * \mathcal{S}_p(G_2)$  es homotópicamente trivial, de la proposición 2.2.8  $\mathcal{S}_p(G_1 \times G_2)$  es homotópicamente trivial. Si vale la conjetura de Quillen 2.1.11, esto implica que  $G_1 \times G_2$  posee un  $p$ -subgrupo normal no trivial (ver proposición 2.1.9), y de la proposición 2.2.7 resulta que alguno de los dos,  $\mathcal{S}_p(G_1)$  o  $\mathcal{S}_p(G_2)$ , es contráctil, y en particular homotópicamente trivial.  $\square$

**Observación 2.2.11.** Todos los resultados anteriores se pueden expresar en términos de  $\mathcal{A}_p(G)$ . Es decir,  $\mathcal{A}_p(G_1 \times G_2)$  y  $\mathcal{A}_p(G_1) * \mathcal{A}_p(G_2)$  tienen los mismos grupos de homotopía, no son homotópicos en general (el mismo contraejemplo que dimos sirve) y si vale la conjetura y  $\mathcal{A}_p(G_1) * \mathcal{A}_p(G_2)$  es homotópicamente trivial, entonces  $\mathcal{A}_p(G_1)$  o  $\mathcal{A}_p(G_2)$  lo es.

## 2.3 Conexión y simple conexión de $\mathcal{S}_p(G)$

En esta sección nos dedicaremos a estudiar la conexión del poset  $\mathcal{S}_p(G)$  y veremos los resultados de Aschbacher sobre la simple conexión del mismo.

La desconexión del poset  $\mathcal{S}_p(G)$  es equivalente a la existencia de un subgrupo de  $G$  con cierta propiedad. Esto fue hecho originalmente en [28], donde Quillen deduce esta propiedad de una serie de equivalencias que aquí no daremos. En cambio, haremos una demostración un poco más directa aunque siguiendo sus mismas ideas de fondo.

**Definición 2.3.1.** Si  $G$  es un grupo finito y  $p$  es un primo que divide al orden de  $G$ , un subgrupo  $M \leq G$  se dice fuertemente  $p$ -embebido si satisface las siguientes condiciones:

1.  $M < G$  y  $p \mid |M|$
2. Para todo  $g \in G - M$ ,  $M \cap M^g$  es un  $p'$ -grupo

El siguiente lema de carácter algebraico nos será útil para entender un poco qué significa tener un subgrupo fuertemente  $p$ -embebido.

**Lema 2.3.2.** Si  $M \leq G$  es fuertemente  $p$ -embebido, entonces  $|M|_p = |G|_p$ . Es decir, todo  $p$ -Sylow de  $M$  es un  $p$ -Sylow de  $G$ . Más aún, la cantidad de  $p$ -Sylows es estrictamente menor. O sea,  $\text{Syl}_p(M) \subsetneq \text{Syl}_p(G)$

*Demostración.* Supongamos que  $Q \in \text{Syl}_p(M)$  no es un  $p$ -Sylow de  $G$ . Entonces existe  $P \in \text{Syl}_p(G)$  tal que  $Q < P$ . Como  $Q < N_P(Q) \leq P$  y este es un  $p$ -grupo, se tiene que  $N_P(Q) \not\leq M$ . Sea  $x \in N_P(Q) - M$ . Entonces  $Q = Q \cap Q^x \subset M \cap M^x$  es un  $p'$ -grupo, lo cual es una contradicción.

Supongamos que  $\text{Syl}_p(M) = \text{Syl}_p(G)$ . Dados  $P, Q \in \text{Syl}_p(M)$  y  $x \in G$ , existen  $m, m' \in M$  tal que  $P^m = Q$  y  $P^{m'} = Q^x$ . De esta manera,

$$P = Q^{m^{-1}} = Q^{xx^{-1}m^{-1}} = P^{m'x^{-1}m^{-1}}$$

por lo que  $m'x^{-1}m^{-1} \in N_G(P)$ . Notemos que de la condición 2. de la definición y de que  $P$  es un  $p$ -grupo, deducimos que  $N_G(P) \subset M$ , y así  $m'x^{-1}m^{-1} \in M$ . En particular,  $x \in M$ . Como  $x \in G$  era arbitrario,  $M = G$ , lo cual es absurdo.  $\square$

**Observación 2.3.3.** Una componente conexa de  $\mathcal{S}_p(G)$  es una clase de equivalencia de la relación  $A \sim B$  si existen  $A_0, \dots, A_n \in \mathcal{S}_p(G)$  tales que  $A = A_0, B = B_n$  y  $A_i, A_{i+1}$  son comparables para todo  $i$ . Por otro lado, si  $A < B$  son dos  $p$ -subgrupos y  $g \in G$  entonces  $A^g < B^g$ . Esto nos permite definir una acción de  $G$  en estas clases de equivalencia, es decir, en  $\pi_0(\mathcal{S}_p(G))$ . Además, como todo  $p$ -subgrupo está contenido en un  $p$ -Sylow, tales clases de equivalencia están representadas por  $p$ -Sylows. Por esto mismo, la acción de  $G$  en  $\pi_0(\mathcal{S}_p(G))$  es transitiva.

Ahora estamos en condiciones de enunciar el teorema de Quillen que describe la conexión del poset  $\mathcal{S}_p(G)$ .

**Teorema 2.3.4.** (Quillen) *El poset  $\mathcal{S}_p(G)$  es desconexo si y solo si  $G$  tiene un subgrupo fuertemente  $p$ -embebido.*

*Demostración.* Supongamos que  $\mathcal{S}_p(G)$  es desconexo. Consideremos la acción de  $G$  en  $\pi_0(\mathcal{S}_p(G))$  y sea  $M$  el estabilizador de alguna de estas componentes conexas. Sea  $P \in \text{Syl}_p(G)$  un representante de dicha componente, que la notamos  $[P]$ . Como la acción es transitiva, la órbita de  $[P]$  es  $\pi_0(\mathcal{S}_p(G))$ , y al ser desconexo, tiene más de un elemento. Luego  $M < G$ . Veamos ahora que  $M$  es un subgrupo fuertemente  $p$ -embebido:

1.  $p \mid |M|$  pues  $P \subset N_G(P) \subset G_{[P]} = M$
2. Sea  $x \in G - M$  y veamos que  $M \cap M^x$  es un  $p'$ -grupo. Sea  $K \leq M \cap M^x$  un  $p$ -grupo. Como  $x \notin M = G_{[P]}$ , las componentes  $[P]$  y  $[P^x]$  son distintas. Sea  $Q = P^x$ . Como  $K \subset M, M^x$  es un  $p$ -grupo, existen  $m_1 \in M$  y  $m_2 \in M^x$  tal que  $K \subset P^{m_1}$  y  $K \subset (P^x)^{m_2} = Q^{m_2}$ . Observemos que  $m_1 \in M = G_{[P]}$ , por lo que  $P^{m_1} \in [P]$  y

$$G_{[Q]} = G_{[P^x]} = G_{[P]}^x = M^x$$

Luego  $Q^{m_2} \in [Q]$  y  $K \subset P^{m_1} \cap Q^{m_2}$ . Esto último a nivel componentes conexas se traduce en

$$K \in [P^{m_1}] \cap [Q^{m_2}] = [P] \cap [Q] = \emptyset$$

Esto es absurdo a no ser que  $K = 1$ .

Recíprocamente, veamos que si existe  $M < G$  fuertemente  $p$ -embebido, entonces  $\mathcal{S}_p(G)$  es desconexo. Sea  $P \in \text{Syl}_p(M)$  y sea  $\{P_1, \dots, P_n\}$  el conjunto de todos los  $p$ -Sylows que están en la misma componente de  $P$ . Es fácil verificar que entonces para todo  $i$ , existe  $j \neq i$  tal que  $P_i \cap P_j > 1$ . Supongamos que  $\mathcal{S}_p(G)$  es conexo. Del lema previo,  $\text{Syl}_p(M) \subsetneq \text{Syl}_p(G)$ , por lo que existen  $P, Q \in \text{Syl}_p(G)$  tales que  $Q \leq M$ ,  $P \not\leq M$  y  $P \cap Q > 1$ . Por otro lado,  $Q = P^y$  para un cierto  $y \in G$  y

$$yN_G(Q) = \{x \in G : Q = Q^{y^{-1}x}\} = \{x \in G : Q = P^x\} = \{x \in G : P = P^{xy^{-1}}\} = N_G(P)y$$

Como  $P \not\leq M$  y  $N_G(Q) \leq M$ , debe ser que  $y \notin M$ . Sea  $x \in P \cap Q \leq M$ . Luego  $xy \in N_G(P)y = yN_G(Q) \subset yM$ , por lo que  $x \in M \cap M^{y^{-1}}$ . Entonces  $1 < P \cap Q \leq M \cap M^{y^{-1}}$ , y así la intersección  $M \cap M^{y^{-1}}$  contiene un  $p$ -subgrupo no trivial. O sea,  $p$  divide al orden de la intersección. Ahora,  $y^{-1} \in G - M$  y de la propiedad 2.,  $M \cap M^{y^{-1}}$  es un  $p'$ -grupo. Esto último es absurdo.  $\square$

**Observación 2.3.5.** Si  $\mathcal{A}_p(G)$  tiene altura 0, entonces es discreto, y por lo tanto es conexo si y solo si es un punto. Es decir, es contráctil, o equivalentemente,  $\mathcal{O}_p(G) \neq 1$ .

Los grupos que poseen un subgrupo fuertemente  $p$ -embebido están completamente caracterizados. La descripción del caso  $p = 2$  fue dada por Bender en [11] y sirvió para la Clasificación de Grupos Simples Finitos, y ésta última dio lugar a la caracterización para primos  $p > 2$ . Esta se puede encontrar en los trabajos de Gorenstein-Lyons en [17] y de Aschbacher en [5]. En este último artículo, en la [5, Proposition 6.2] aparece la clasificación de los grupos  $G$  donde su  $\mathcal{S}_p(G)$  es conexo.

Sabemos que para estudiar los grupos de homotopía de  $\mathcal{S}_p(G)$  podemos hacerlo desde el poset  $\mathcal{A}_p(G)$ . Cuando  $\mathcal{A}_p(G)$  tiene altura 0, la simple conexión es equivalente a que sea contráctil. Es decir, que  $\mathcal{O}_p(G) \neq 1$ . En el caso de altura 1, el complejo simplicial asociado es un grafo, y por lo tanto es simplemente conexo si y solo si es un árbol. De nuevo, esto equivale a que sea contráctil, y como acá vale la conjetura, equivale a que  $\mathcal{O}_p(G) \neq 1$  (ver proposición 2.1.13). Por lo tanto, si  $\mathcal{A}_p(G)$  tiene altura 0 o 1, la simple conexión es equivalente a que  $\mathcal{O}_p(G) \neq 1$ . Recíprocamente, si  $\mathcal{O}_p(G) \neq 1$  entonces  $\mathcal{A}_p(G)$  es homotópicamente trivial y en particular simplemente conexo. En conclusión, para estudiar la simple conexión de  $\mathcal{A}_p(G)$  podemos suponer que  $\mathcal{A}_p(G)$  es conexo y que  $\mathcal{O}_p(G) = 1$ . Por el razonamiento anterior, este poset tendrá altura por lo menos 2.

En [5], Aschbacher da condiciones necesarias y suficientes en los grupos para que  $\mathcal{A}_p(G)$  sea simplemente conexo, módulo una conjetura que está probada en la gran mayoría de los casos.

**Teorema 2.3.6.** ([5, Theorem 2]) Sea  $G$  un grupo finito y sea  $p$  un primo que divide al orden del grupo. Supongamos que  $\mathcal{A}_p(G)$  es simplemente conexo y que  $\mathcal{O}_p(G) = 1$ . Entonces

1.  $\mathcal{A}_p(G)$  tiene altura al menos 2
2. Para cada minimal  $B \in \mathcal{A}_p(G)$ , su link  $\text{Lk}(B) = \hat{F}_B = \mathcal{A}_p(G)_{>B}$  es conexo.

Aschbacher muestra que estas condiciones son casi suficientes para la mayoría de los grupos. Primero establece una conjetura

**Conjetura 2.3.7.** Supongamos que  $G = F^*(G)A$  donde  $A$  es un  $p$ -subgrupo elemental abeliano de dimensión  $\geq 3$  y que  $F^*(G)$  es el producto directo de los  $A$ -conjugados de un  $p'$ -grupo simple  $K$ . Entonces  $\mathcal{A}_p(G)$  es simplemente conexo.

En [30], Smith menciona que la conjetura está probada salvo para ciertos grupos esporádicos  $K$ . En [5, Theorem 3], Aschbacher trata todos los casos excepto cuando  $K$  es esporádico o de tipo de Lie de rango 1. Este último caso fue cubierto casi por completo por Segev en [29]. La CGSF está detrás de todos estos trabajos.

**Teorema 2.3.8.** ([5, Theorem 1]) *Asumamos la conjetura 2.3.7. Si  $\mathcal{A}_p(G)_{>B}$  es conexo para todo  $B$  minimal, entonces  $\mathcal{A}_p(G)$  es simplemente conexo o bien se tienen alguno de estos dos casos para  $H = G/\mathcal{O}_{p'}(G)$ :*

1.  $F^*(H)$  es el producto directo de dos grupos simples donde cada uno contiene un subgrupo fuertemente  $p$ -embebido.
2.  $F^*(H)$  es un grupo simple.

La formulación original es un tanto diferente. La presentada aquí es la que da Smith en [30].

Para demostrar estas cosas, Aschbacher en su artículo [5] trabaja con el complejo de cliques  $C_p(G)$ , el cual veremos con un poco más de detalle en la siguiente sección. Este complejo se construye de la siguiente forma. Consideramos el grafo cuyos vértices son los minimales de  $\mathcal{A}_p(G)$  y donde dos vértices  $A, B$  están conectados por una arista si y solo si  $AB$  es un  $p$ -subgrupo elemental abeliano, o equivalentemente  $[A, B] = 1$ . Luego le tomamos el complejo de cliques a este grafo: los símlices son los conjuntos  $\{A_1, \dots, A_n\}$  de minimales de  $\mathcal{A}_p(G)$  que están conectados dos a dos en el grafo anterior. O sea, que  $[A_i, A_j] = 1$  para todo  $i, j$ .

La demostración que hace Aschbacher de estos dos teoremas requiere bastante teoría de grupos y de la CGSF.

Por último, no está demás nombrar a Rached Ksontini, que en sus artículos [22] y [23] estudia el grupo fundamental de  $\mathcal{S}_p(G)$  cuando  $G$  es un grupo simétrico. De hecho, caracteriza completamente a los grupos simétricos para los cuales su  $\mathcal{S}_p(G)$  es simplemente conexo.

**Teorema 2.3.9.** (Ksontini) *El espacio  $\mathcal{A}_p(\mathbb{S}_n)$  es simplemente conexo si y solo si valen algunas de las siguientes:*

1.  $p = 2$  y  $n = 4$  o  $n \geq 7$
2.  $p$  es impar y  $3p + 2 \leq n < p^2$  o  $n \geq p^2 + p$

Más aún, Ksontini calcula el grupo fundamental de  $\mathcal{A}_p(\mathbb{S}_n)$  en todos los casos excepto cuando  $p \geq 5$  y  $n = 3p$  o  $3p + 1$ , o bien  $p = 3$  y  $n = 10$ . Sus demostraciones son de carácter más combinatorio y utilizan resultados básicos de la teoría de grupos finitos, sin necesidad de acudir a la clasificación de grupos simples. Para probar estos resultados, utiliza otros posets que surgen de estudiar  $p$ -toros de  $\mathbb{S}_n$ : el poset  $\mathcal{D}_p(n)$  de todas las particiones de  $\{1, \dots, n\}$  cuyas partes tienen cardinal 1 o  $p$ , y el subposet  $\mathcal{J}_p(n)$  de  $\mathcal{A}_p(\mathbb{S}_n)$  que consiste de los  $p$ -toros generados por  $p$ -ciclos.

## 2.4 Otros posets de $p$ -subgrupos

En las secciones anteriores vimos que para estudiar el tipo homotópico débil del poset  $\mathcal{S}_p(G)$  a veces era conveniente utilizar otros posets de  $p$ -subgrupos o complejos simpliciales que tengan el mismo tipo homotópico débil. Por ejemplo, uno de ellos es el poset de Quillen  $\mathcal{A}_p(G)$  de los  $p$ -subgrupos elementales abelianos. En esta sección analizaremos la conexión entre algunos de los distintos posets y complejos simpliciales que aparecen en la literatura de los complejos de subgrupos.

### El complejo de Bouc y su idea de “sacar puntos”

Una de las herramientas que tenemos para describir los tipos homotópicos de espacios finitos es vía la extracción de puntos que cumplen ciertas condiciones (beat points, weak points). Bouc en [12] describe un método de extracción de puntos de un poset  $X$ . Los puntos que extraemos son aquellos  $x$  tales que  $\hat{F}_x$  es homotópicamente trivial. Cuando los extraemos de “abajo hacia arriba” nos permite utilizar un argumento inductivo y los subposets que vamos obteniendo tienen el mismo tipo homotópico débil. En ese momento Bouc no enunció sus resultados con el lenguaje de espacios finitos, y cuando hablaba de contractibilidad de un poset, sólo quería decir que era homotópicamente trivial ya que estaba pensando en su complejo asociado. A continuación describimos sus ideas pero con el lenguaje de espacios finitos.

**Definición 2.4.1.** Sea  $X$  un poset. Definimos los subposets

$$X_{**} = \{x \in X : \hat{U}_x \text{ no es contráctil}\}$$

$$X^{**} = \{x \in X : \hat{F}_x \text{ no es contráctil}\}$$

Es decir,  $X_{**}$  es el conjunto de los no down weak points y  $X^{**}$  el de los no up weak points. Para Bouc, los subposets anteriores estaban definidos en términos de que  $\hat{U}_x$  o  $\hat{F}_x$  no sean homotópicamente trivial. Con nuestra definición podremos llegar a resultados más fuertes. Igualmente veremos qué sucede en los dos casos.

**Proposición 2.4.2.** Si  $X^{**} \subset Y \subset X$ , entonces  $X \searrow Y$ . Análogamente, si  $X_{**} \subset Y \subset X$ , entonces  $X \searrow Y$ . Más aún, si  $X$  es un  $G$ -poset e  $Y$  es  $G$ -invariante, entonces  $X \searrow^G Y$ .

*Demostración.* Supongamos que  $X^{**} \subset Y \subset X$ . Si  $x \in X - Y$ , entonces  $x \notin X^{**}$ , por lo que  $\hat{F}_x$  es contráctil. Luego  $x$  es un up weak point y  $X \searrow^c X - x \supset Y$ . Tomemos  $x_0 \in X - Y$  minimal y colapsemos  $X \searrow^c X - x_0 = X_0 \subset Y$ . Ahora, si  $x \in X_0 - Y$ , entonces  $x_0 \notin \hat{F}_x$  ya que a  $x_0 \in X - Y$  lo elegimos minimal. De esta manera,  $\hat{F}_x^{X_0} = \hat{F}_x^X$  es contráctil. Esto nos dice que  $X_0^{**} \subset Y \subset X_0$ . Como  $X_0$  tiene menos puntos que  $X$ , podemos argumentar de manera inductiva y concluir que  $X \searrow Y$ .

Para ver que  $X$   $G$ -colapsa a  $Y$  cuando se trata de  $G$ -posets, observemos que el hecho de retirar primero los weak points minimales nos permite retirar la órbita entera sin que haya inconvenientes y así seguir la demostración de la misma manera.  $\square$

El resultado de Bouc es un tanto diferente. Él trabaja con los subposets

$$X_* = \{x \in X : \hat{U}_x \text{ no es homotópicamente trivial}\}$$

$$X^* = \{x \in X : \hat{F}_x \text{ no es homotópicamente trivial}\}$$

En particular,  $X_* \subset X_{**}$  y  $X^* \subset X^{**}$ .

Hay diferentes versiones de la siguiente proposición que pueden encontrarse en [21] y [12].

**Proposición 2.4.3.** (Kratzer-Thévenaz/Bouc) Si  $X^* \subset Y \subset X$ , entonces la inclusión  $Y \subset X$  es una equivalencia débil. Análogamente se tiene el resultado para  $X_* \subset Y \subset X$ .

La siguiente definición puede encontrarse en [9] o [6] y nos servirá para darle un enfoque distinto a la proposición anterior.

**Definición 2.4.4.** Si  $X$  es un espacio finito  $T_0$ , un punto  $x \in X$  es un  $\gamma$ -point si  $\hat{C}_x$  es homotópicamente trivial.

En particular, si  $x \notin X_*$  o  $x \notin X^*$ , entonces  $\hat{U}_x$  o  $\hat{F}_x$  es homotópicamente trivial, y por lo tanto  $\hat{C}_x = \hat{U}_x * \hat{F}_x$  es homotópicamente trivial.

**Proposición 2.4.5.** Si  $x \in X$  es un  $\gamma$ -point, entonces la inclusión  $X - x \hookrightarrow X$  es una equivalencia débil.

*Demostración.* Ver [9, Proposition 3.10] o [6, Proposition 6.2.2]. □

La demostración de la proposición 2.4.3 es análoga a la de la proposición 2.4.2 pero utilizando el resultado de proposición 2.4.5.

**Observación 2.4.6.** El teorema [6, Theorem 6.2.8] dice que si  $x \in X$  es un  $\gamma$ -point, entonces  $X - x \simeq X$ . Por lo tanto, en las hipótesis de la proposición 2.4.3 podemos concluir que la inclusión  $Y \hookrightarrow X$  es una equivalencia simple.

Como aplicación de lo que probamos, veamos otra demostración de que  $\mathcal{S}_p(G)$  colapsa a  $\mathcal{A}_p(G)$ , la cual está relacionada con las ideas de Bouc de ir sacando puntos y aparece en el libro de Smith [30].

**Definición 2.4.7.** Sea  $G$  un grupo finito. La intersección de todos los subgrupos maximales de  $G$  es el subgrupo de Frattini de  $G$  y se lo nota  $\Phi(G)$ .

**Lema 2.4.8.** Sea  $P$  un  $p$ -grupo. Entonces:

1. El cociente  $P/\Phi(P)$  es el  $p$ -toro más grande como cociente de  $P$ , por lo que  $\Phi(P) < P$  es un subgrupo propio.
2. Si  $Q < P$  entonces  $\Phi(P)Q < P$ .
3.  $P$  es elemental abeliano si y solo si  $\Phi(P) = 1$ .

*Demostración.* Ver [24], [4] o en general cualquier libro con teoría de grupos finitos que incluya  $p$ -grupos. □

**Proposición 2.4.9.** Sea  $P$  un  $p$ -grupo.

1. Si  $P$  no es elemental abeliano, entonces  $\hat{U}_P^{S_p(P)}$  es contráctil.
2. Si  $P$  es elemental abeliano, entonces  $\hat{U}_P^{S_p(P)}$  es un espacio minimal y no es homotópicamente trivial.

*Demostración.* 1. Por el ítem 2. del lema anterior, si  $Q \in \hat{U}_P^{S_p(P)}$  entonces  $\Phi(P)Q \in \hat{U}_P^{S_p(P)}$ , y así

$$Q \leq \Phi(P)Q \geq \Phi(P)$$

Luego  $\hat{U}_P^{S_p(P)}$  es contráctil.

2. Si  $P$  es elemental abeliano, entonces  $P \simeq \bigoplus_{i=1}^n \mathbb{Z}_p$  es un  $\mathbb{Z}_p$ -espacio vectorial de dimensión  $n \geq 1$ . Luego  $\hat{U}_P^{S_p(P)} = T(P)$  es el poset de subespacios propios no triviales de  $P$ . Si bien este poset es Cohen-Macaulay de dimensión  $n - 2$  (ver [28, Section 8] para una demostración sencilla), vamos a argumentar de otra manera para probar que no es homotópicamente trivial.

Si  $n = 1$ , entonces resulta vacío y en particular no es homotópicamente trivial. Para  $n = 2$  es discreto y no es homotópicamente trivial puesto que  $P \simeq \mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_p$  tiene más de un subespacio de dimensión 1. Supongamos que  $n \geq 2$  y sea  $\{v_1, \dots, v_n\}$  una base de  $P$ . Se puede chequear que el elemento

$$\sum_{i=1}^n (-1)^i \sum_{f: \{1, \dots, n-1\} \rightarrow \{1, \dots, \hat{i}, \dots, n\} \text{ biyectiva}} \text{Sg}(f) \{W(f, 1) \subset \dots \subset W(f, n-1)\}$$

es un elemento no trivial del grupo de homología  $\tilde{H}_{n-2}(T(P))$ , donde  $W(f, j) = \langle v_{f(1)}, \dots, v_{f(j)} \rangle$  y el signo de  $f$  quiere decir el signo respecto de la única permutación creciente  $i: \{1, \dots, n-1\} \rightarrow \{1, \dots, \hat{i}, \dots, n\}$ .

Vemos ahora que  $T(P)$  es un subespacio minimal. De hecho esto vale para el poset de subespacios propios no triviales de cualquier espacio vectorial  $V$  de dimensión finita  $n$ . Si  $n = 1$  o  $2$ , no hay mucho que decir. Supongamos que  $n \geq 3$  y sea  $1 < W < V$  un subespacio propio no trivial. Si  $W$  no es minimal, entonces  $W$  posee una base  $B = \{v_1, \dots, v_r\}$  con  $2 \leq r \leq n-1$ . Luego  $W_1 = \langle B - v_1 \rangle$  y  $W_2 = \langle B - v_2 \rangle$  son subespacios distintos de codimensión 1 en  $W$ , por lo que  $W$  no es down beat point. Si  $W$  no es maximal, entonces existe una base  $\{v_1, \dots, v_r, v_{r+1}, \dots, v_n\}$  de  $V$  tal que  $\{v_1, \dots, v_r\}$  es base de  $W$  y  $r+2 \leq n$ . Luego  $W_1 = \langle v_1, \dots, v_r, v_{r+1} \rangle$  y  $W_2 = \langle v_1, \dots, v_r, v_{r+2} \rangle$  son dos subespacios distintos y propios de  $V$  que contienen a  $W$  y tales que  $W$  tiene codimensión 1 en estos subespacios. Luego  $W$  no es up beat point. Finalmente como  $n \geq 2$ , todo punto que es maximal no es minimal, y todo aquel que es minimal no es maximal, por lo que tanto maximales como minimales no son beat points de lo anterior. Un subespacio que no sea ni maximal ni minimal tampoco es beat point. □

De todo esto podemos deducir de manera alternativa que  $\mathcal{S}_p(G)$   $G$ -colapsa a  $\mathcal{A}_p(G)$ .

**Corolario 2.4.10.** El poset  $\mathcal{S}_p(G)$   $G$ -colapsa al poset  $\mathcal{A}_p(G)$ . Más aún,

$$\mathcal{A}_p(G) = \mathcal{S}_p(G)_* = \mathcal{S}_p(G)_{**}$$

*Demostración.* Si  $P \in \mathcal{S}_p(G) - \mathcal{A}_p(G)$ , entonces  $\hat{U}_P^{\mathcal{S}_p(G)} = \hat{U}_P^{\mathcal{S}_p(P)}$  es contráctil por la proposición anterior. Por lo tanto  $\mathcal{S}_p(G)_{**} \subset \mathcal{A}_p(G)$ , y de la proposición 2.4.2 deducimos que  $\mathcal{S}_p(G) \searrow^G \mathcal{A}_p(G)$ . De hecho, de la proposición anterior, si  $P$  es elemental abeliano entonces  $\hat{U}_P^{\mathcal{S}_p(P)}$  no es homotópicamente trivial, por lo que  $P \in \mathcal{S}_p(G)_*$ . Luego  $\mathcal{A}_p(G) \subset \mathcal{S}_p(G)_* \subset \mathcal{S}_p(G)_{**}$ , y por lo tanto son todas igualdades.  $\square$

**Observación 2.4.11.** Sea  $Ab_p(G)$  el poset de  $p$ -subgrupos abelianos no triviales de  $G$ . Entonces  $\mathcal{A}_p(G) \subset Ab_p(G) \subset \mathcal{S}_p(G)$ . De la proposición 2.4.2 vemos que  $\mathcal{S}_p(G) \searrow^G Ab_p(G)$ . Además, la función  $r : Ab_p(G) \rightarrow \mathcal{A}_p(G)$  dada por  $r(A) = \Omega_1(A)$  nos da un retracto por deformación fuerte  $\mathcal{A}_p(G) \subset Ab_p(G)$ .

Así como a partir de  $\mathcal{S}_p(G)$  obtuvimos el poset  $\mathcal{A}_p(G) = \mathcal{S}_p(G)_* = \mathcal{S}_p(G)_{**}$ , podemos proceder de manera análoga y analizar qué subposet de  $\mathcal{S}_p(G)$  contiene a  $\mathcal{S}_p(G)^*$ . Ese es el motivo de la definición del poset de Bouc.

**Definición 2.4.12.** Si  $G$  es un grupo finito y  $p$  es un primo que divide al orden de  $G$ , definimos el poset

$$\mathcal{B}_p(G) = \{B \in \mathcal{S}_p(G) : \mathcal{O}_p(N_G(B)) = B\}$$

Un subgrupo  $B \leq G$  tal que  $\mathcal{O}_p(N_G(B)) = B$  se dice  $p$ -radical. Este poset se lo conoce como el poset de los subgrupos  $p$ -radicales no triviales de  $G$ . También se lo llama poset de Bouc.

Utilizando el método de Bouc podemos demostrar la siguiente proposición.

**Proposición 2.4.13.** (Bouc) La inclusión  $\mathcal{B}_p(G) \hookrightarrow \mathcal{S}_p(G)$  es una equivalencia débil.

Para ello necesitamos unos lemas previos.

**Lema 2.4.14.** Si  $P \leq G$  es un  $p$ -subgrupo no trivial, entonces

$$\mathcal{S}_p(G)_{>P} = \hat{F}_P^{\mathcal{S}_p(G)} \simeq \hat{F}_P^{\mathcal{S}_p(N_G(P))} \equiv \mathcal{S}_p(N_G(P)/P)$$

*Demostración.* Sea  $i : \hat{F}_P^{\mathcal{S}_p(N_G(P))} \hookrightarrow \hat{F}_P^{\mathcal{S}_p(G)}$  la inclusión canónica, y sea  $r : \hat{F}_P^{\mathcal{S}_p(G)} \rightarrow \hat{F}_P^{\mathcal{S}_p(N_G(P))}$  la función  $r(Q) = N_Q(P) = N_G(P) \cap Q$ . Veamos que  $r$  está bien definida. Si  $Q > P$ , por ser  $p$ -grupos,  $P < N_Q(P) = N_G(P) \cap Q$  (ver proposición 1.1.16). Es claro que  $r$  es un morfismo de posets y que  $ri = \text{id}_{\hat{F}_P^{\mathcal{S}_p(N_G(P))}}$  e  $ir \leq \text{id}_{\hat{F}_P^{\mathcal{S}_p(G)}}$ . Esto nos prueba que  $\hat{F}_P^{\mathcal{S}_p(G)} \simeq \hat{F}_P^{\mathcal{S}_p(N_G(P))}$ . Finalmente,  $\hat{F}_P^{\mathcal{S}_p(N_G(P))} \equiv \mathcal{S}_p(N_G(P)/P)$  por el teorema de correspondencia 1.1.7.  $\square$

**Lema 2.4.15.** Si  $P \in \mathcal{S}_p(G) - \mathcal{B}_p(G)$ , entonces  $\hat{F}_P^{\mathcal{S}_p(G)}$  es contráctil.

*Demostración.* Como  $P < \mathcal{O}_p(N_G(P)) \trianglelefteq N_G(P)$ , se tiene que

$$\hat{F}_P^{\mathcal{S}_p(G)} \simeq \mathcal{S}_p(N_G(P)/P) \simeq *$$

pues  $\mathcal{O}_p(N_G(P))/P \trianglelefteq N_G(P)/P$  es un  $p$ -subgrupo normal no trivial.  $\square$

*Demostración de la proposición 2.4.13.* Si  $P \in \mathcal{S}_p(G) - \mathcal{B}_p(G)$ , entonces  $P \notin \mathcal{S}_p(G)^{**}$  por el lema anterior. Esto nos dice que  $\mathcal{S}_p(G)^* \subset \mathcal{S}_p(G)^{**} \subset \mathcal{B}_p(G)$ . El resultado se sigue entonces de la proposición 2.4.3.  $\square$

En realidad, en términos de la proposición 2.4.2, hemos probado algo más fuerte.

**Proposición 2.4.16.** El poset  $\mathcal{S}_p(G)$   $G$ -colapsa al poset  $\mathcal{B}_p(G)$ .

**Observación 2.4.17.** En definitiva, vimos que

$$\mathcal{S}_p(G) \searrow^G \mathcal{A}_p(G) \quad \text{y} \quad \mathcal{S}_p(G) \searrow^G \mathcal{B}_p(G)$$

### $G$ -equivalencias homotópicas

En lo que sigue, nuestro objetivo será probar que las realizaciones geométricas de los complejos asociados a los posets  $\mathcal{S}_p(G)$ ,  $\mathcal{A}_p(G)$  y  $\mathcal{B}_p(G)$  son  $G$ -equivalentes.

El siguiente teorema es de gran utilidad a la hora de probar  $G$ -equivalencias homotópicas entre  $G$ -CW complejos.

**Teorema 2.4.18.** ([14, Chap. II, Corollary 5.5]) Si  $f : X \rightarrow Y$  es una función  $G$ -equivariante y celular entre dos CW-complejos, entonces  $f$  induce una  $G$ -equivalencia homotópica  $X \simeq_G Y$  si y solo si para todo  $H \leq G$ , la función  $f|_H : X^H \rightarrow Y^H$  induce una equivalencia homotópica  $X^H \simeq Y^H$ .

**Teorema 2.4.19.** (Quillen, Bouc, Thévenaz, Webb) Los espacios  $|\mathcal{K}(\mathcal{S}_p(G))|$ ,  $|\mathcal{K}(\mathcal{A}_p(G))|$  y  $|\mathcal{K}(\mathcal{B}_p(G))|$  son todos  $G$ -equivalentes.

Una demostración del teorema anterior puede encontrarse en [35, Theorem 2] y utiliza una versión modificada del Quillen's Fiber Theorem y del teorema de Bredon.

Sin embargo, podemos argumentar de otra manera analizando los  $G$ -colapsos entre complejos simpliciales. Para ello, necesitamos algunas definiciones previas.

Recordemos que un  $G$ -complejo es un complejo simplicial  $K$  junto con la acción de un grupo  $G$  en sus vértices que es simplicial. Esto es, si  $\{v_0, \dots, v_n\}$  es un símplex de  $K$ , entonces  $\{v_0^g, \dots, v_n^g\}$  es un símplex de  $K$ .

Si  $K$  es un  $G$ -complejo, un par  $\{\sigma, \tau\}$  se dice  $G$ -colapsable si  $\tau$  es una cara libre de  $\sigma$  y  $G_\tau = G_\sigma$ . En tal caso decimos que hay un  $G$ -colapso elemental de  $K$  al subcomplejo  $K - G(\{\sigma, \tau\})$  y notamos  $K \searrow^{G_e} K - G(\{\sigma, \tau\})$ . Un  $G$ -colapso de  $K$  a un subcomplejo invariante  $L$  es una serie de  $G$ -colapsos elementales que comienza en  $K$  y termina en  $L$ . Notamos  $K \searrow^G L$ . También decimos que  $L$  se  $G$ -expande a  $K$ . Es claro que  $L$  tiene que ser  $G$ -invariante. Por último, dos  $G$ -complejos  $K$  y  $L$  se dicen que tienen el mismo tipo homotópico simple equivariante si existen  $G$ -complejos  $K = K_0, K_1, \dots, K_n = L$  de

manera que para todo  $i$ ,  $K_i$  se  $G$ -expande o  $G$ -colapsa a  $K_{i+1}$ . En tal caso notamos  $K \mathcal{L} L$ .

Si  $K = \mathcal{K}(X)$  es el complejo asociado a un  $G$ -poset  $X$ , entonces  $K$  es un  $G$ -complejo y si  $X \searrow^G Y$  entonces  $\mathcal{K}(X) \searrow^G \mathcal{K}(Y)$  (ver [6, Theorem 8.3.11]).

**Teorema 2.4.20.** *Si  $K$  es un  $G$ -complejo que  $G$ -colapsa a un subcomplejo invariante  $L$ , entonces  $|L|$  es un  $G$ -retracto por deformación fuerte de  $|K|$ .*

*Demostración.* Basta ver el caso en que  $L = K - G(\{\sigma, \tau\})$  se obtiene de  $K$  vía un  $G$ -colapso elemental. Tenemos que definir entonces una  $G$ -homotopía  $H : I \times |K| \rightarrow |K|$  que sea relativa al subespacio  $|L|$  y tal que  $H(0, -) = \text{id}_K$  y  $H(1, |K|) \subset |L|$ . Como tiene que mantenerse la identidad sobre  $|L|$ , lo que debemos hacer es colapsar  $|\sigma|$  hacia su borde sin  $\tau$ , es decir, hacia  $|\dot{\sigma} - \tau|$ , y repetir esto mismo para cada  $\sigma'$  en la órbita de  $\sigma$ . La condición  $G_\sigma = G_\tau$  nos garantiza que si  $\tau^g \neq \tau$ , entonces  $\sigma^g \neq \sigma$ .

Para ello, proyectemos los puntos del interior de  $\sigma$  y los que están en  $\tau$  hacia el borde de  $\sigma$ , como muestra la siguiente figura.

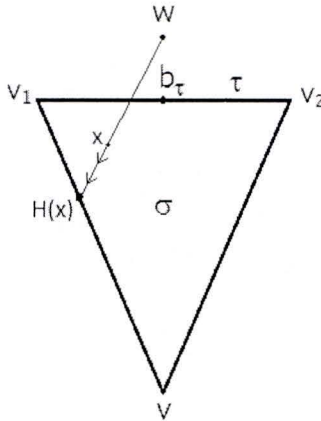


Figure 2.1: Retracto para el colapso de una cara libre

Supongamos que  $\sigma = \{v, v_1, \dots, v_n\}$  con  $\tau = \{v_1, \dots, v_n\}$ . De esta manera, si  $\sigma^g = \sigma$ , entonces  $v^g = v$  y  $\tau^g = \tau$ .

Sea  $w = -v + 2b_\tau$ , donde  $b_\tau = \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} v_i$  es el baricentro de  $\tau$ . Si  $x \in |\sigma|$ , queremos encontrar  $H(x)$ , el punto correspondiente a proyectar  $x$  hacia el borde de  $\sigma$  en la dirección de  $w$ . Escribamos  $x = t_0 v + \sum_{i=1}^n t_i v_i$ . Entonces  $x$  se va a proyectar a la cara (posiblemente un vértice) opuesta al  $v_i$  cuyo  $t_i$  sea mínimo. Por ejemplo, si todos los  $t_i$  son mínimos entonces  $x$  está en el segmento que une  $b_\tau$  con  $v$  y por lo tanto lo vamos a proyectar a  $v$ . De esta manera, para cada  $x$  buscamos un  $t \geq 1$  de manera que  $tx + (1-t)w$  esté en  $|\dot{\sigma} - \tau|$ .

Sea  $i$  tal que  $t_i = \min\{t_1, \dots, t_n\}$ . Entonces queremos que la coordenada  $i$ -ésima de

$tx + (1-t)w$  sea nula:

$$\begin{aligned} tx + (1-t)w &= t(t_0v + \sum_{j=1}^n t_j v_j) + (1-t)(-v + 2 \sum_{j=1}^n \frac{1}{n} v_j) \\ &= (tt_0 + t - 1)v + \sum_{j=1}^n \left( tt_j + \frac{2(1-t)}{n} \right) v_j \end{aligned}$$

Como buscamos anular la coordenada  $i$ -ésima, debemos plantear

$$tt_i + \frac{2(1-t)}{n} = 0$$

Despejando  $t$  obtenemos que

$$t = \frac{1}{1 - \frac{n}{2}t_i}$$

Veamos que tiene sentido, es decir, que  $t \geq 1$ . Para ello tenemos que verificar que  $0 < 1 - \frac{n}{2}t_i \leq 1$ . La desigualdad  $\leq 1$  es clara porque  $t_i \geq 0$ . Por otro lado, como  $t_i$  es mínimo, vale que  $1 \geq \sum_{j=1}^n t_j \geq nt_i$ , y así  $\frac{n}{2}t_i \leq \frac{1}{2} < 1$ .

Ahora, la función  $x \mapsto t(x) = \frac{1}{1 - \frac{n}{2} \min\{t_1, \dots, t_j\}}$  es continua dentro de  $|\sigma|$ . Por lo tanto, si  $x = t_0v + \sum_{j=1}^n t_j v_j$ , entonces la función

$$H(x) = (t(x)(1+t_0) - 1)v + \sum_{j=1}^n \left( \frac{2(1-t(x))}{n} + t(x)t_j \right) v_j$$

es continua dentro de  $|\sigma|$ . Notemos que si  $x \in |\dot{\sigma} - \tau|$  está en el borde de  $\sigma$  pero no en el interior de  $\tau$ , entonces para algún  $i$  vale que  $t_i = 0$ , y así  $t(x) = 1$  y  $H(x) = x$ . Además,  $H(x) \in |L|$  porque la coordenada  $i$  es nula.

Definimos la homotopía  $H : I \times |K| \rightarrow |K|$  de la siguiente manera:

$$H(t, x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in |L| \\ tx + (1-t)H(x) & \text{si } x \in |\sigma|^g \text{ para algún } g \in G \end{cases}$$

donde convenimos que  $H(x)$  está definida de manera análoga en cada simplex de la órbita de  $\sigma$ . Entonces  $H$  es continua porque lo es restringida a cada simplex de  $K$  y de lo que vimos antes, se restringe a la identidad en  $|L|$ . Además,  $H(1, x) = H(x) \in |L|$  si  $x \in |\sigma|^g$  para algún  $g$ . Basta ver entonces que  $H$  es  $G$ -equivariante. Si  $x \in |L|$ , no hay nada que decir, asique podemos suponer que  $x \notin |L|$ . Sea  $g \in G$ . Supongamos que  $x \in \sigma' = \{w, w_1, \dots, w_n\}$  y que  $\tau' = \{w_1, \dots, w_n\}$ , donde  $\tau^{h'} = \tau$  para algún  $h' \in G$  y  $w^{h'} = v$ . Si  $x^g \in |\sigma''|$  con  $\sigma'' = \{u, u_1, \dots, u_n\}$ , donde  $u$  es el vértice opuesto a la cara libre  $\tau'' = \{u_1, \dots, u_n\}$  que está en la misma órbita de  $\tau$ , tiene que ser que  $w^g = u$  y  $\tau'^g = \{w_1, \dots, w_n\}^g = \{u_1, \dots, u_n\} = \tau''$  puesto que  $\{\sigma', \tau'\}$  es un par  $G$ -colapsable. Además, esto mismo nos dice que  $t(x^g) = t(x)$  puesto que ambos valores que solo dependen

de las coordenadas de  $x$  y  $x^g$  en  $\tau'$  y  $\tau''$  respectivamente, y  $\tau'^g = \tau''$ . De todo esto, obtenemos

$$\begin{aligned} H(t, x^g) &= tx^g + (1-t)H(x^g) \\ &= tx^g + (1-t) \left( (t(x^g)(1+t_0) - 1)w^g + \sum_{j=1}^n \left( \frac{2(1-t(x^g))}{n} + t(x^g)t_j \right) w_j^g \right) \\ &= tx^g + (1-t) \left( (t(x) + (1+t_0) - 1)w + \sum_{j=1}^n \left( \frac{2(1-t(x))}{n} + t(x)t_j \right) w_j \right)^g \\ &= H(t, x)^g \end{aligned}$$

Por lo tanto,  $H$  es una  $G$ -homotopía relativa a  $|L|$  entre  $\text{id}_{|K|}$  y la función  $H(1, -) : |K| \rightarrow |K|$  que se correstringe a  $|L|$ , y en consecuencia  $|L| \hookrightarrow |K|$  es un  $G$ -retracto por deformación fuerte.  $\square$

Inmediatamente de este teorema deducimos que los  $G$ -colapsos entre complejos inducen  $G$ -equivalencias homotópicas en las realizaciones geométricas.

**Corolario 2.4.21.** Si  $K \mathcal{A}^G L$  entonces  $|K|$  y  $|L|$  tienen el mismo tipo homotópico  $G$ -equivariante, es decir,  $|K| \simeq_G |L|$ .

Como todo  $G$ -colapso entre  $G$ -posets induce un  $G$ -colapso en los complejos asociados, tenemos el siguiente corolario.

**Corolario 2.4.22.** Si  $X$  e  $Y$  son dos  $G$ -posets tales que  $X \searrow^G Y$ , entonces  $\mathcal{K}(X) \searrow^G \mathcal{K}(Y)$  y en particular  $|\mathcal{K}(X)| \sim_G |\mathcal{K}(Y)|$ . De esta manera, si  $X \mathcal{A}^G$  entonces  $\mathcal{K}(X) \mathcal{A}^G \mathcal{K}(Y)$  y así  $|\mathcal{K}(X)| \simeq_G |\mathcal{K}(Y)|$ .

**Corolario 2.4.23.** Los espacios  $|\mathcal{K}(\mathcal{S}_p(G))|$ ,  $|\mathcal{K}(\mathcal{A}_p(G))|$ ,  $|\mathcal{K}(\mathcal{A}b_p(G))|$  y  $|\mathcal{K}(\mathcal{B}_p(G))|$  son todos  $G$ -equivalentes.

*Demostración.* Se deduce de que  $\mathcal{S}_p(G) \searrow^G \mathcal{A}_p(G)$  y  $\mathcal{S}_p(G) \searrow^G \mathcal{B}_p(G)$ .  $\square$

Un complejo que es de gran utilidad, es el complejo  $\mathcal{R}_p(G)$  que consiste de los símplices  $\{P_0 < P_1 < \dots < P_n\} \in \mathcal{K}(\mathcal{S}_p(G))$  tales que  $P_i \leq P_n$  para todo  $i$ . Este complejo fue introducido por G. R. Robinson en su reformulación de la conjetura de Alperin (ver [20], [37]). Tal complejo aparece también en el artículo de P. Symonds [33] en su demostración de la conjetura de P. Webb 2.6.1.

En el artículo [35], Thévenaz y Webb demuestran que los  $G$ -espacios  $|\mathcal{K}(\mathcal{S}_p(G))|$ ,  $|\mathcal{K}(\mathcal{A}_p(G))|$ ,  $|\mathcal{K}(\mathcal{B}_p(G))|$  y  $|\mathcal{R}_p(G)|$  son todos  $G$ -equivalentes. Para ello, utilizan el teorema de Bredon y una variante del Quillen's Fiber Theorem:

**Teorema 2.4.24.** ([35, Theorem 1]) Si  $\phi : X \rightarrow Y$  es un  $G$ -morfismo de posets tales que  $|\mathcal{K}(\phi^{-1}(U_y))|$  es  $G_y$ -contráctil para todo  $y \in Y$  entonces  $\phi$  induce una  $G$ -equivalencia en las realizaciones de los complejos asociados. Se obtiene el mismo resultado tomando las preimágenes de los  $F_y$ .

Este es el teorema principal del artículo [35] y su demostración utiliza el teorema 2.4.18. A continuación de [35, Theorem 1], Thévenaz y Webb enuncian el siguiente teorema, cuya demostración se basa en la utilización del teorema anterior.

**Teorema 2.4.25.** ([35, Theorem 2])

1. Si  $X \subset \mathcal{S}_p(G)$  es un subposet tal que  $X \supset \mathcal{A}_p(G)$  o  $X \supset \mathcal{S}_p(G)$ , entonces la inclusión  $X \hookrightarrow \mathcal{S}_p(G)$  es una  $G$ -equivalencia.
2. El complejo  $\mathcal{R}_p(G)$  es  $G$ -equivalente a  $\mathcal{K}(\mathcal{S}_p(G))$ .

En particular,  $\mathcal{K}(\mathcal{A}_p(G)) \simeq_G \mathcal{K}(\mathcal{B}_p(G)) \simeq_G \mathcal{K}(\mathcal{S}_p(G)) \simeq_G \mathcal{R}_p(G)$ .

**Observación 2.4.26.** Siguiendo a Barmak en [6], un morfismo entre posets  $\phi : X \rightarrow Y$  se dice distinguido si  $\phi^{-1}(U_y)$  es contráctil para todo  $y \in Y$ . En [6, Theorem 4.4.4], Barmak demuestra que la existencia de un morfismo distinguido  $\phi : X \rightarrow Y$  implica que  $X \wedge Y$ . Luego observa en [6, Proposition 8.3.21] que si además  $\phi$  es  $G$ -invariante entonces  $X \wedge^G Y$ . Del corolario 2.4.22 deducimos que  $|\mathcal{K}(X)| \simeq_G |\mathcal{K}(Y)|$ .

Lo que acabamos de demostrar es más débil que el teorema 2.4.24 ya que partimos de una hipótesis más fuerte que es la contractibilidad de  $\phi^{-1}(U_y)$  para todo  $y$ : esto implica que es  $G_y$ -contráctil y, pasando a los complejos y sus realizaciones, que  $|\mathcal{K}(\phi^{-1}(U_y))|$  es  $G_y$ -contráctil para todo  $y \in Y$ .

Si bien nosotros no vamos a demostrar el teorema 2.4.24, utilizando la observación anterior veremos una demostración del teorema 2.4.25 sin pasar por el teorema de Bredon. La primera parte del teorema ya la hemos demostrado, ya que si  $X \supset \mathcal{B}_p(G)$  o  $X \supset \mathcal{A}_p(G)$  entonces  $\mathcal{S}_p(G) \searrow^G X$  (ya que  $\mathcal{S}_p(G)^{**} \subset \mathcal{B}_p(G)^{**}$  y  $\mathcal{S}_p(G)_{**} \subset \mathcal{A}_p(G)$  y así estamos en las hipótesis de la proposición 2.4.2) para aplicar el corolario 2.4.22.

Para la segunda parte, siguiendo la demostración de Thévenaz y Webb, veremos que existe un  $G$ -morfismo distinguido  $\phi : \mathcal{X}(\mathcal{R}_p(G)) \rightarrow \mathcal{A}b_p(G)^{op}$ . Una vez conseguido tal morfismo, aplicando la observación 2.4.26 tendremos que

$$\mathcal{S}_p(G)^{op} \searrow^G \mathcal{A}b_p(G)^{op} \wedge^G \mathcal{X}(\mathcal{R}_p(G))$$

y por lo tanto  $\mathcal{S}_p(G)^{op} \wedge^G \mathcal{X}(\mathcal{R}_p(G))$ . Utilizando el corolario 2.4.22 deducimos que

$$|\mathcal{K}(\mathcal{S}_p(G))| = |\mathcal{K}(\mathcal{S}_p(G)^{op})| \simeq_G |\mathcal{R}_p(G)'| \equiv_G |\mathcal{R}_p(G)|$$

*Demostración.* (Parte 2. del teorema 2.4.25) De lo discutido anteriormente, basta ver la existencia de tal  $G$ -morfismo distinguido  $\phi$ . Definimos la función  $\phi : \mathcal{X}(\mathcal{R}_p(G)) \rightarrow \mathcal{A}b_p(G)^{op}$  como  $\phi(P_0 < \dots < P_n) = \bigcap_{i=1}^n Z(P_i)$ . Claramente  $\phi$  preserva el orden, pero hay que ver que tal intersección es no trivial. Es fácil chequear que, gracias a la normalidad de todos los  $P_i$  en  $P_n$ , se tiene la igualdad  $\bigcap_{i=1}^n Z(P_i) = P_0 \cap Z(P_n)$ . Por lo tanto, de la proposición 1.1.14 se deduce que  $P_0 \cap Z(P_n)$  es un grupo abeliano no trivial. Por otro lado, si  $A \in \mathcal{A}b_p(G)$  entonces un elemento  $(P_0 < P_1 < \dots < P_n) \in \mathcal{X}(\mathcal{R}_p(G))$  verifica que  $\phi(P_0 < \dots < P_n) = P_0 \cap Z(P_n) \leq^{op} A$  si y solo si  $P_0 \cap Z(P_n) \geq A$ , si y solo si  $A \leq P_0$

y  $A \leq Z(P_n)$ , es decir,  $A \leq P_0$  y  $P_n \leq C_G(A)$ . De esta manera,  $A \trianglelefteq P_n$  y tenemos una cadena de desigualdades

$$(P_0 < P_1 \dots < P_n) \leq (A \leq P_0 < P_1 < \dots < P_n) \geq (A)$$

dentro de  $\phi^{-1}(U_A^{Ab_p(G)^{op}})$ . En consecuencia,  $\phi$  es un  $G$ -morfismo distinguido.  $\square$

### Los posets $\mathcal{S}_p(G)$ y $\mathcal{A}_p(G)$ como retículos reducidos

En esta sección analizamos los diferentes posets y complejos simpliciales que pueden aparecer cuando vemos a los posets  $\mathcal{S}_p(G)$  y  $\mathcal{A}_p(G)$  como retículos reducidos (ver observación 2.1.10).

Recordemos que si  $X$  es un retículo reducido, entonces  $i(X)$  es el poset que consiste de los ínfimos de los subconjuntos  $A \subset M(X)$ , siempre y cuando  $A$  esté acotado inferiormente. Análogamente,  $s(X)$  es el conjunto de los supremos  $\sup(A)$  con  $A \subset m(X)$  acotado superiormente.

**Observación 2.4.27.** En el poset de los  $p$ -subgrupos no triviales  $\mathcal{S}_p(G)$ , el subposet  $i(\mathcal{S}_p(G))$  consiste de las intersecciones no triviales de los  $p$ -Sylows. En consecuencia,  $\mathcal{S}_p(G)$  es contráctil si y solo si la intersección de todos los  $p$ -Sylows es no trivial, lo cual para el poset  $i(\mathcal{S}_p(G))$  se traduce en tener un mínimo.

Por otro lado, el poset  $i(\mathcal{A}_p(G))$  consiste de las intersecciones no triviales de los  $p$ -toros maximales. En la sección 3.1 del capítulo 3 veremos que  $i(\mathcal{A}_p(G))$  tiene un mínimo si y solo si  $\mathcal{A}_p(G)$  es contráctil en dos pasos, lo cual es más fuerte que ser contráctil (a secas).

Veamos algunos complejos simpliciales que aparecen con este tipo de construcciones.

Si  $X$  es un retículo reducido, podemos considerar  $\mathcal{L}(X)$  el complejo simplicial cuyos vértices son los elementos maximales de  $X$  y con símlices los conjuntos de elementos maximales acotados inferiormente. De manera análoga definimos  $\mathcal{L}^{op}(X) = \mathcal{L}(X^{op})$  en términos de elementos minimales. Así, podemos considerar el morfismo  $l : X^{op} \rightarrow \mathcal{X}(\mathcal{L}(X))$  dado por  $l(x) = \{m \in X : x \leq m\}$ . Es fácil ver que  $l$  está bien definido y que efectivamente es un morfismo de posets. Además, tenemos un morfismo para el otro lado  $k : \mathcal{X}(\mathcal{L}(X)) \rightarrow X^{op}$  dado por  $k(\sigma) = \inf(\sigma)$ , el cual también se puede chequear que está bien definido y es un morfismo. Entonces  $kl(x) = \inf(A_x) \geq x$  y  $lx(\sigma) \geq \sigma$ , por lo cual  $X^{op}$  y  $\mathcal{X}(\mathcal{L}(X))$  son homotópicamente equivalentes. En particular,  $X$  y  $\mathcal{X}(\mathcal{L}(X^{op})) = \mathcal{X}(\mathcal{L}^{op}(X))$  son homotópicamente equivalentes.

En términos del poset  $\mathcal{S}_p(G)$ , el complejo  $\mathcal{L}(\mathcal{S}_p(G))$  es un símplex si y solo si el conjunto de todos los  $p$ -Sylows es un símplex, si y solo si la intersección de todos los  $p$ -Sylows es no trivial, si y solo si  $\mathcal{S}_p(G)$  es contráctil.

**Proposición 2.4.28.**  $\mathcal{S}_p(G)$  es contráctil si y solo si  $\mathcal{L}(\mathcal{S}_p(G))$  es un símplex.

En cambio, para el poset  $\mathcal{A}_p(G)$  se tiene que  $\mathcal{L}(\mathcal{A}_p(G))$  es un símplex si y solo si la intersección de todos los maximales de  $\mathcal{A}_p(G)$  es no trivial.

**Proposición 2.4.29.**  $i(\mathcal{A}_p(G))$  tiene un mínimo si y solo si  $\mathcal{L}(\mathcal{A}_p(G))$  es un símplex.

Por otro lado, veamos qué sucede cuando trabajamos con  $\mathcal{L}^{op}(X)$  para  $X = \mathcal{S}_p(G)$  o  $\mathcal{A}_p(G)$ . En ambos casos  $\mathcal{L}^{op}(X)$  es un complejo simplicial cuyos vértices son los  $p$ -subgrupos minimales, es decir, los subgrupos de orden  $p$ . Si  $A_1, \dots, A_r$  son grupos de orden  $p$ , entonces  $\{A_1, \dots, A_r\}$  es un símplex de  $\mathcal{L}(X)$  si y solo si  $\langle A_1, \dots, A_r \rangle$  es un  $p$ -subgrupo si  $X = \mathcal{S}_p(G)$  o es un  $p$ -toro si  $X = \mathcal{A}_p(G)$ . En consecuencia,  $\mathcal{L}^{op}(\mathcal{S}_p(G))$  es un símplex si y solo si  $\Omega_1(G)$  es un  $p$ -grupo, si y solo si todo elemento de orden  $p$  está contenido en  $\mathcal{O}_p(G)$ . Del teorema de Cauchy, esto último implica que  $\mathcal{O}_p(G) > 1$  es no trivial, y en particular  $\mathcal{S}_p(G)$  es contráctil. En cambio para  $\mathcal{A}_p(G)$  se tiene que  $\mathcal{L}^{op}(\mathcal{A}_p(G))$  es un símplex si y solo si  $\Omega_1(G)$  es un  $p$ -toro, si y solo si todo par de elementos de orden  $p$  conmutan, si y solo si  $\mathcal{A}_p(G)$  posee un único elemento maximal, es decir, un máximo.

**Proposición 2.4.30.**  $\mathcal{L}(\mathcal{S}_p(G)^{op})$  es un símplex si y solo si  $\Omega_1(G)$  es un  $p$ -grupo. En cambio,  $\mathcal{L}(\mathcal{A}_p(G)^{op})$  es un símplex si y solo si  $\mathcal{A}_p(G)$  posee un máximo.

Una propiedad interesante del complejo  $\mathcal{L}(\mathcal{S}_p(G))$  es que es vertex-homogeneous. Esto quiere decir que para cualquier par de vértices del complejo simplicial, existe un isomorfismo simplicial que envía un vértice en el otro. En este caso, tal propiedad se desprende de los teoremas de Sylow, dado que los vértices de  $\mathcal{L}(\mathcal{S}_p(G))$  son los  $p$ -Sylows, dos  $p$ -Sylows son conjugados por un elemento de  $G$  y la conjugación induce un isomorfismo simplicial en este complejo.

Consideremos ahora  $\mathcal{G}$  el grafo cuyos vértices son el conjunto de grupos de orden  $p$  de  $G$  y con una arista entre dos grupos  $A, B$  si  $[A, B] = 1$ . Esto equivale a decir que  $\langle AB \rangle = AB$  es un  $p$ -toro de rango 2. Tal grafo se lo denomina *commuting graph* de  $G$  en  $p$ . Ahora consideremos  $C_p(G)$  el complejo de cliques del grafo  $\mathcal{G}$ , también denominado *commuting complex* de  $G$  en  $p$ . Esto es, tenemos un símplex  $\sigma = \{A_1, \dots, A_r\}$  si para cada  $i, j$  se tiene que  $[A_i, A_j] = 1$ . Esto es equivalente a que  $\langle A_1, \dots, A_r \rangle$  sea un  $p$ -toro. Si analizamos su espacio finito asociado  $Y = \mathcal{X}(C_p(G))$ , vemos que los puntos de  $Y$  son los conjuntos  $\sigma = \{A_1, \dots, A_r\}$  cuyo grupo generado es un  $p$ -toro. Si elegimos un generador  $x_i$  para cada  $A_i$ , podemos identificar al símplex  $\sigma$  con el conjunto  $\{x_1, \dots, x_r\}$ , y por lo tanto lo que tenemos es un conjunto de generadores de un  $p$ -toro. En definitiva, este poset  $Y$  es el poset de los conjuntos de generadores no triviales, módulo la relación  $x \sim y$  si  $\langle x \rangle = \langle y \rangle$ , de los  $p$ -toros de  $G$ . Veamos que es  $G$ -homotópicamente equivalente al poset  $\mathcal{A}_p(G)$ . Sea  $f : Y \rightarrow \mathcal{A}_p(G)$  la función  $f(\{A_1, \dots, A_r\}) = \langle A_1, \dots, A_r \rangle$ . Es claro que  $f$  está bien definida y es un  $G$ -morfismo. Recíprocamente, tenemos  $g : \mathcal{A}_p(G) \rightarrow Y$  dada por  $g(A) = \{\langle x \rangle : x \in A, x \neq 1\}$ , que está bien definida y es un  $G$ -morfismo de posets. Luego  $fg(A) = A$  y  $gf(\sigma) \geq \sigma$ . De hecho, como  $fg = \text{id}_{\mathcal{A}_p(G)}$ , vemos que  $\mathcal{A}_p(G) \subset Y$  es un  $G$ -retracto por deformación fuerte.

**Proposición 2.4.31.** Para el complejo de cliques  $C_p(G)$  vale que  $\mathcal{A}_p(G) \subset \mathcal{X}(C_p(G))$  es un  $G$ -retracto por deformación fuerte. Es decir,  $\mathcal{X}(C_p(G)) \searrow^G \mathcal{A}_p(G)$ .

En particular, esta proposición nos dice que  $\mathcal{X}(C_p(G)) \searrow^G \mathcal{A}_p(G)$  ya que todo  $G$ -colapso fuerte es un  $G$ -colapso. Así, deducimos que  $\mathcal{K}(\mathcal{X}(C_p(G))) \searrow^G \mathcal{K}(\mathcal{A}_p(G))$  y por lo tanto

$$|\mathcal{K}(\mathcal{A}_p(G))| \simeq_G |\mathcal{K}(\mathcal{X}(C_p(G)))| = |C_p(G)'| \equiv_G |C_p(G)|$$

El complejo de cliques que describimos recién es utilizado por Aschbacher en [5] para analizar la simple conexión del poset de  $p$ -subgrupos, lo cual hemos comentado en la sección 2.3 del presente capítulo.

Para finalizar esta sección, hacemos un sumario de todo lo que probamos:

$$\mathcal{S}_p(G) = \{H \leq G : p\text{-subgrupo no trivial}\}$$

$$\mathcal{A}b_p(G) = \{H \in \mathcal{S}_p(G) : \text{abeliano}\}$$

$$\mathcal{A}_p(G) = \{H \in \mathcal{S}_p(G) : p\text{-toro}\}$$

$$\mathcal{B}_p(G) = \{H \in \mathcal{S}_p(G) : p\text{-radical}\}$$

$$\mathcal{R}_p(G) = \{\{P_0 < P_1 < \dots < P_n\} \in \mathcal{K}(\mathcal{S}_p(G)) : P_i \trianglelefteq P_n \text{ para todo } i\}$$

$$C_p(G) = \text{Complejo de Cliques de } \mathcal{G} = \{(A, B) : A, B \in m(\mathcal{A}_p(G)), [A, B] = 1\}$$

**Teorema 2.4.32.** *Valen las siguientes:*

1.  $\mathcal{S}_p(G) \setminus^{\mathcal{G}} \mathcal{B}_p(G)$
2.  $\mathcal{S}_p(G) \setminus^{\mathcal{G}} \mathcal{A}b_p(G)$
3.  $\mathcal{A}b_p(G) \setminus^{\mathcal{G}} \mathcal{A}_p(G)$
4.  $\mathcal{X}(C_p(G)) \setminus^{\mathcal{G}} \mathcal{A}_p(G)$
5.  $\mathcal{X}(\mathcal{R}_p(G)) \setminus^{\mathcal{G}} \mathcal{A}b_p(G)^{op}$

y del corolario 2.4.22 tenemos que  $|\mathcal{K}(\mathcal{S}_p(G))|$ ,  $|\mathcal{K}(\mathcal{A}b_p(G))|$ ,  $|\mathcal{K}(\mathcal{A}_p(G))|$ ,  $|\mathcal{K}(\mathcal{B}_p(G))|$ ,  $|\mathcal{R}_p(G)|$  y  $|C_p(G)|$  son todos  $G$ -equivalentes.

## 2.5 Característica de Euler y posets de puntos fijos

En [15] K. Brown considera por primera vez el poset  $\mathcal{S}_p(G)$ , en donde prueba una generalización del teorema de Sylow. Concretamente, Brown muestra que  $\chi(\mathcal{S}_p(G)) \equiv 1 \pmod{|G|_p}$ . En [28] y en [6] se pueden encontrar demostraciones alternativas de este resultado. Aquí daremos una exposición breve del resultado.

**Teorema 2.5.1.** (Brown) *Si  $G$  es un grupo finito y  $p$  es un primo, entonces  $\chi(\mathcal{S}_p(G)) \equiv 1 \pmod{p}$ .*

**Observación 2.5.2.** Si  $p$  no divide al orden de  $G$ , entonces  $\mathcal{S}_p(G) = \emptyset$  es vacío. En consecuencia, su característica de Euler es  $-1$ . Por otro lado,  $|G|_p = 1$ , y así  $-1 \equiv 1 \pmod{1}$  es trivialmente cierto. Luego se puede suponer que  $p$  divide al orden de  $G$ .

Vamos a seguir la demostración de Barmak en [6].

Primero necesitamos el siguiente lema sobre cierto poset de puntos fijos. Recordemos que si  $H \leq G$  es un subgrupo y  $X$  es un  $G$ -conjunto entonces podemos restringir la acción y decir que  $X$  es un  $H$ -conjunto. Si  $X = \mathcal{S}_p(G)$ , entonces  $H$  actúa en  $X$  por conjugación. El siguiente lema se deduce de la demostración de Quillen de [28, Proposition 4.1].

**Lema 2.5.3.** Si  $H \leq G$  es un  $p$ -subgrupo no trivial, entonces el poset  $\mathcal{S}_p(G)^H$  es contráctil.

*Demostración.* Como  $H$  es un  $p$ -grupo y  $H \leq N_G(H)$ , se tiene que  $H \in \mathcal{S}_p(G)^H$ . Luego si  $A \in \mathcal{S}_p(G)^H$ , el conjunto  $AH$  es un  $p$ -subgrupo no trivial de  $G$  puesto que  $H$  normaliza  $A$  y ambos son  $p$ -grupos. De esta manera,  $A \leq AH \geq H$  y por lo tanto  $\mathcal{S}_p(G)^H$  es contráctil.  $\square$

Recordemos que si  $X$  es un espacio finito, la subdivisión baricéntrica de  $X$  es el espacio finito  $X' = \mathcal{X}(\mathcal{K}(X))$ .

Ahora fijemos un  $p$ -Sylow  $P$  de  $G$  y consideremos la acción por conjugación de  $P$  en  $\mathcal{S}_p(G)'$ . Si  $c = \{H_0 < H_1 < \dots < H_n\}$  es una cadena de  $p$ -subgrupos no triviales, el estabilizador de  $c$  por la acción de  $P$  es el conjunto

$$P_H = \{g \in P : c^g = c\} = \{g \in P : H_i^g = H_i \text{ para todo } i\} = \bigcap_{i=0}^n N_P(H_i)$$

Consideremos el subposet  $Y = \{c \in \mathcal{S}_p(G)' : P_c > 1\}$  y veamos que es homotópicamente trivial.

**Proposición 2.5.4.** El poset  $Y$  es homotópicamente trivial.

*Demostración.* Tomemos la función  $f : Y \rightarrow \mathcal{S}_p(P)^{op}$  dada por  $f(c) = P_c$ . Por definición de  $Y$ , esta función  $f$  está bien definida. Además,  $f$  es continua, ya que si  $c \leq c'$  son dos elementos de  $Y$ , entonces

$$P_{c'} = \bigcap_{H \in c'} N_P(H) \leq \bigcap_{H \in c} N_P(H) = P_c$$

Veamos que  $f$  es una equivalencia débil aplicando el Quillen's Fiber Theorem 1.2.14. Si  $H \in \mathcal{S}_p(P)^{op}$  entonces

$$f^{-1}(U_H) = \{c \in Y : H \leq P_c\} = \{c \in Y : H \leq N_P(K) \text{ para todo } K \in c\} = (\mathcal{S}_p(G)^H)'$$

Del lema anterior,  $\mathcal{S}_p(G)^H$  es contráctil, y por lo tanto su subdivisión  $(\mathcal{S}_p(G)^H)'$  es homotópicamente trivial (más aún, es contráctil. Ver [10, Corollary 4.18])

Luego  $f$  es una equivalencia débil, y como  $\mathcal{S}_p(P)^{op}$  es contráctil ( $P$  es un mínimo de este poset), concluimos que  $Y$  es homotópicamente trivial.  $\square$

**Proposición 2.5.5.**  $\chi(\mathcal{S}_p(G)', Y) \equiv 0 \pmod{(|P|)}$

*Demostración.* Sea  $C_i$  el conjunto de las cadenas de longitud  $i$  de  $\mathcal{S}_p(G)'$  que no son cadenas en  $Y$ . Luego  $\chi(\mathcal{S}_p(G)', Y) = \sum_{i \geq 0} (-1)^i \alpha_i$ , donde

$$\alpha_i = \#C_i = \#\{c_0 < \dots < c_i : \text{existe } j \text{ tal que } P_{c_j} = 1\}$$

Entonces  $P$  actúa sobre  $C_i$  y de la ecuación de clases (ver teorema 1.1.9) tenemos que

$$\alpha_i = \#C_i = |C_i^P| + \sum_{k=1}^r \mathcal{O}_{c_r}$$

Si  $c \in C_i$  entonces hay algún elemento  $H \in c$  para el cual  $P$  actúa trivialmente dado que  $c$  no es una cadena en  $Y$ . Así,  $C_i^P = \emptyset$  y  $P_c = 1$  para todo  $c \in C_i$ . Esto nos dice que todas las órbitas tienen  $|P|$  elementos, y por lo tanto  $\alpha_i = \sum_{k=1}^r |P| = r|P|$ .  $\square$

De esto obtenemos inmediatamente el resultado de Brown.

**Corolario 2.5.6.** (Brown) Si  $G$  es un grupo finito y  $p$  es un primo entonces  $\chi(\mathcal{S}_p(G)) \equiv 1 \pmod{(|P|)}$

*Demostración.* Basta observar que  $\chi(\mathcal{S}_p(G)) = \chi(\mathcal{S}_p(G)') = \chi(\mathcal{S}_p(G), Y) + \chi(Y) \equiv 1 \pmod{(|P|)}$  dado que  $Y$  es homotópicamente trivial.  $\square$

Para cerrar esta sección veamos algunos resultados más sobre los posets de puntos fijos.

**Proposición 2.5.7.** (Cf. [36, Theorem 1, (a)]) Si  $H \leq G$  es un subgrupo tal que  $\mathcal{O}_p(H) > 1$  entonces  $\mathcal{S}_p(G)^H \simeq *$ . En particular, si  $H \in \mathcal{S}_p(G)$  entonces  $\mathcal{S}_p(G)^H$  es contráctil.

*Demostración.* Siguiendo la misma idea de la demostración del lema 2.5.3, tenemos que  $X \leq X\mathcal{O}_p(H) \geq \mathcal{O}_p(H)$  en  $\mathcal{S}_p(G)^H$ .  $\square$

**Proposición 2.5.8.** ([28, Remark 4.4]) Si  $P \in \mathcal{S}_p(G)$  entonces  $\mathcal{A}_p(G)^P$  es contráctil.

*Demostración.* Sea  $Z = \Omega_1(Z(P))$ . Entonces  $P$  actúa trivialmente sobre  $Z$ , por lo que  $Z \in \mathcal{A}_p(G)^P$ . Por otro lado, si  $X \in \mathcal{A}_p(G)^P$  entonces

$$X \geq C_X(P) = \{x \in X : x^g = x \text{ para todo } g \in P\} \leq C_X(P)Z \geq Z$$

Las asignaciones  $X \mapsto C_X(P)$  y  $X \mapsto C_X(P)Z$  preservan el orden. Además estas cadenas de desigualdades están bien definidas dentro de  $\mathcal{A}_p(G)^P$ . Por lo tanto  $\mathcal{A}_p(G)^P$  es contráctil.  $\square$

## 2.6 Espacios de órbitas y una conjetura de P. Webb

Si  $X$  es un  $G$ -espacio, el espacio de órbitas es el espacio topológico  $X/G = X/\sim$ , donde  $\sim$  es la relación  $x \sim y$  si  $x^g = y$  para algún  $g \in G$ , y la topología es la cociente. Es decir,  $X/G = \{\mathcal{O}_x : x \in X\}$  es el conjunto de órbitas. Vamos a notar  $\pi : X \rightarrow X/G$  a la función cociente y  $\bar{x} = \pi(x)$  a los elementos del espacio de órbitas. Nuestro interés en esta sección es interpretar el espacio de órbitas de los posets de  $p$ -subgrupos y el de sus complejos simpliciales asociados.

Si  $K$  es un  $G$ -complejo podemos considerar el complejo de órbitas  $K/G$  cuyos vértices son las órbitas por la acción de  $G$  de los vértices de  $K$ , que notamos  $v^* = \mathcal{O}_v$  si  $v$  es un vértice de  $K$ , y cuyos símlices son los conjuntos de órbitas de vértices  $\{v_0^*, \dots, v_r^*\}$  tales que existen  $w_i \in v_i^*$  de manera que  $\{w_0, \dots, w_r\}$  es un símplex de  $K$ . Notar que es para alguna elección de  $w_i$ , lo cual no significa que cualquier conjunto de representantes de las órbitas  $v_i^* = \mathcal{O}_{v_i}$  vayan a formar un símplex en  $K$ . El símplex  $\{w_0, \dots, w_r\} \in K$  se dice que está por encima del símplex  $\{w_0^*, \dots, w_r^*\} \in K/G$ .

Recordemos que  $K'$  es la primera subdivisión baricéntrica de  $K$ . Esto es, el complejo simplicial cuyos vértices son los símlices de  $K$  y cuyos símlices son las cadenas de símlices de  $K$  ordenados por la inclusión. En términos de los funtores entre espacios finitos y complejos simpliciales, se tiene que  $K' = \mathcal{K}(\mathcal{X}(K))$ . Si  $K$  es un  $G$ -complejo, entonces tenemos una acción inducida en los símlices  $\sigma = \{v_0, \dots, v_n\} \in K \mapsto \sigma^g = \{v_0^g, \dots, v_n^g\} \in$

$K$  para  $g \in G$ . Esto nos dice que  $K'$  es una  $G$ -complejo. Además, la realización geométrica de  $K$ , que notamos por  $|K|$ , es un  $G$ -espacio con la acción  $(\sum_i t_i v_i)^g = \sum_i t_i v_i^g$ . Esto nos permite ver que el homeomorfismo canónico  $|K'| \rightarrow |K|$  que manda cada vértice de  $K'$ , es decir un simplex  $\sigma = \{v_0, \dots, v_n\}$  de  $K$ , a su baricentro  $\sum_i \frac{1}{n+1} v_i$ , es  $G$ -equivariante.

En [37] y [38], Peter Webb considera el espacio topológico  $|\mathcal{K}(\mathcal{S}_p(G))|/G$  y demuestra que es acíclico módulo  $p$ . Con esto en mente, establece la siguiente conjetura

**Conjetura 2.6.1.** (P. Webb) El espacio de órbitas  $|\mathcal{K}(\mathcal{S}_p(G))|/G$  es contráctil.

Años más tarde, Peter Symonds demuestra tal conjetura en [33]. Para ello considera el complejo de Robinson  $\mathcal{R}_p(G)$  que describimos en la sección 2.4 de este capítulo. Recordemos que tal complejo consiste de los símplices  $\{P_0 < P_1 < \dots < P_r\} \in \mathcal{K}(\mathcal{S}_p(G))$  donde  $P_i$  es normal en  $P_r$  para todo  $i$  y que resultaba  $G$ -homotópico a  $\mathcal{K}(\mathcal{S}_p(G))$  (ver teorema 2.4.32). La demostración de Symonds de la conjetura de Webb es bastante directa: primero demuestra que es simplemente conexo y luego que sus grupos de homología son triviales.

Veremos aquí qué relación hay entre los distintos espacios de órbitas que surgen de considerar un  $G$ -poset  $X$  y la conexión con la conjetura de Webb. Si bien no demostramos su conjetura, podremos reenunciarla utilizando diferentes espacios finitos.

Las siguientes definiciones y resultados del libro de Bredon [13, Chapter III] nos serán de bastante utilidad para entender la diferencia entre los distintos espacios de órbitas que aparezcan.

**Definición 2.6.2.** Para un  $G$ -complejo  $K$  podemos considerar las siguientes propiedades:

- (A) Si  $\sigma$  es un simplex de  $K$  y  $g \in G$ , entonces  $g$  fija a cada vértice de  $\sigma \cap \sigma^g$ .
- (B) Si  $g_0, \dots, g_n \in G$  y tanto  $(v_0, \dots, v_n)$  como  $(v_0^{g_0}, \dots, v_n^{g_n})$  forman símplices de  $K$ , entonces existe  $g \in G$  tal que  $v_i^{g_i} = v_i^g$  para todo  $i$ .

En la definición anterior, el elemento  $(v_0, \dots, v_n)$  es un simplex de  $K$  cuando vemos el conjunto  $\{v_0, \dots, v_n\}$ . En particular no estamos suponiendo que los  $v_i$  sean todos distintos.

**Observación 2.6.3.** La propiedad (A) es equivalente a esta otra:

- (A') Si  $v$  es un vértice de  $K$  y  $g \in G$  es tal que  $v$  y  $v^g$  están en un mismo simplex, entonces  $v = v^g$ .

Probemos esto:

- Supongamos que vale (A) y sean  $v \in K$  y  $g \in G$  tales que  $v$  y  $v^g$  están en un mismo simplex. Entonces  $\sigma = \{v, v^g\}$  es un simplex de  $K$ . Como vale (A), se tiene que  $g$  fija a los vértices de  $\sigma \cap \sigma^g \supset \{v\}$ . Es decir,  $v^g = v$ . Luego (A) implica (A').
- Supongamos que vale (A') y sean  $\sigma \in K$  un simplex y  $g \in G$ . Tomemos  $v \in \sigma \cap \sigma^g$ . Entonces  $v, v^g \in \sigma^g$  están en un mismo simplex. De la validez de (A') deducimos que  $v = v^g$  y así  $g$  fija cada vértice de  $\sigma \cap \sigma^g$ . Luego (A') implica (A).

**Observación 2.6.4.** Más aún, podemos ver que la propiedad (B) implica la propiedad (A), o equivalente, la propiedad (A'). En efecto, si  $v, v^g$  están en un mismo simplex, entonces  $(v, v)$  y  $(v, v^g)$  son simplices de  $K$ . Por (B), existe  $h \in G$  tal que  $v = v^h$  y  $v^g = v^h$ , y así  $v = v^g$ .

Si  $K$  es un  $G$ -complejo y  $H \leq G$  es un subgrupo, podemos restringir la acción a  $H$  y ver entonces a  $K$  como un  $H$ -complejo.

**Definición 2.6.5.** Un  $G$ -complejo  $K$  se dice regular si  $K$  satisface la propiedad (B) para cada subgrupo  $H \leq G$ .

La siguiente proposición nos dice que la condición de regularidad se puede obtener pasando a la segunda subdivisión baricéntrica de un  $G$ -complejo  $K$ , y que por lo tanto no es una condición muy restrictiva a la hora de estudiar la topología de  $|K|$ .

**Proposición 2.6.6.** Para cualquier  $G$ -complejo  $K$  se tiene que  $K'$  satisface la propiedad (A). Si  $K$  satisface la propiedad (A), entonces  $K'$  satisface la propiedad (B).

*Demostración.* Ver [13, Proposition 1.1] □

De esta manera, pasando por la segunda subdivisión baricéntrica podemos suponer que todo  $G$ -complejo es regular a la hora de estudiar sus propiedades topológicas.

Si  $K$  es un  $G$ -complejo regular y  $(v_0, \dots, v_n)$  y  $(w_0, \dots, w_n)$  son simplices por encima del simplex  $(v_0^*, \dots, v_n^*)$  de  $K/G$ , con  $w_i^* = v_i^*$ , entonces existen  $g_i \in G$  tales que  $v_i^{g_i} = w_i$ . Por regularidad, existe  $g \in G$  tal que  $w_i = v_i^{g_i} = v_i^g$  para todo  $i$ . Luego  $\{v_0, \dots, v_n\}^g = \{w_0, \dots, w_n\}$ . Es decir, los simplices que están arriba de  $\{v_0^*, \dots, v_n^*\}$  forman una órbita de la acción de  $G$  inducida en los simplices de  $K$ . Notemos  $q : K \rightarrow K/G$  al morfismo simplicial  $q(v) = v^*$ . Cuando  $K$  es regular tenemos que  $q^{-1}(\sigma^*) = \{\tau \in K : q(\tau) = \sigma\} = \mathcal{O}_\sigma$ .

En general,  $q$  induce una función continua  $|q| : |K| \rightarrow |K/G|$ , que es sobreyectiva y cociente (pues  $|K|$  es compacto y  $|K/G|$  es  $T_2$ ). Por otro lado, tenemos la función cociente  $\pi : |K| \rightarrow |K|/G$ . Como  $|q|$  es  $G$ -equivariante, tenemos una función continua inducida  $\varphi : |K|/G \rightarrow |K/G|$  que es sobreyectiva. Cuando  $K$  es un  $G$ -complejo regular, esta  $\varphi$  resulta ser inyectiva. Como  $|K/G|$  tiene la topología cociente, deducimos que en tal caso  $\varphi(\overline{\sum_i t_i v_i}) = \overline{\sum_i t_i v_i^*}$  es un homeomorfismo. Tenemos así la siguiente proposición.

**Proposición 2.6.7.** Si  $K$  es un  $G$ -complejo regular, entonces  $\varphi : |K|/G \rightarrow |K/G|$  definida por  $\varphi(\overline{\sum_i t_i v_i}) = \overline{\sum_i t_i v_i^*}$  es un homeomorfismo. En general, si  $K$  no es necesariamente regular,  $\varphi$  es una función continua y sobreyectiva.

Por último, notemos que si  $K$  es un  $G$ -complejo que verifica (A), entonces  $|K^G| = |K|^G$ , donde  $K^G$  es el subcomplejo pleno de  $K$  generado por los vértices que quedan fijos por la acción de  $G$ . La inclusión  $|K^G| \subset |K|^G$  es fácil de ver. Por otro lado, si  $x \in |K|^G$ , entonces  $x = \sum_{i=0}^n t_i v_i$ , con  $\sum_i t_i = 1$  y  $t_i > 0$  para todo  $i$ . Si  $g \in G$ , entonces  $\{v_0, \dots, v_n\} = \text{Supp}(x) = \text{Supp}(x^g) = \{v_0^g, \dots, v_n^g\}$  es un simplex de  $K$ . En particular,  $v_i$  y  $v_i^g$  están en un mismo simplex para todo  $i$ . Por (A'), que es equivalente a (A), debe ser que  $v_i = v_i^g$  para todo  $i$ .

Notemos  $h : |K'| \rightarrow |K|$  al homeomorfismo definido en los vértices como

$$h(\{v_0, \dots, v_n\}) = \sum_{i=0}^n \frac{1}{n+1} v_i$$

Es fácil chequear que  $h$  es  $G$ -equivariante y que por lo tanto tenemos un homeomorfismo inducido en los cocientes  $\hat{h} : |K'|/G \rightarrow |K|/G$ .

Recordemos que si  $X$  es un espacio finito  $T_0$  y  $K = \mathcal{K}(X)$  es su complejo asociado, entonces la función  $\mu_X : |K| \rightarrow X$  definida por  $\mu_X(\sum_{i=0}^n t_i x_i) = \min_i \{x_i\}$  es una equivalencia débil, es decir, induce isomorfismos en todos los grupos de homotopía. Además,  $\mu_X$  es  $G$ -equivariante ya que al formar una cadena los  $x_i$ , se tiene que  $\min_i \{x_i^g\} = (\min_i \{x_i\})^g$  para  $g \in G$ . Luego  $\mu_X$  induce una función continua  $\hat{\mu}_X : |K|/G \rightarrow X/G$  dada por  $\hat{\mu}_X(\sum_i t_i x_i) = \min_i \{x_i\}$ .

Antes de proseguir, veamos algunas proposiciones que nos serán de gran utilidad.

**Proposición 2.6.8.** Si  $X$  es  $G$ -poset, entonces  $\mathcal{K}(X)$  es un  $G$ -complejo que verifica la propiedad (A).

*Demostración.* Claramente  $\mathcal{K}(X)$  es un  $G$ -complejo. Si  $x, x^g \in V_K = X$  son dos vértices que están en un mismo simplex, entonces  $\{x, x^g\}$  es un simplex de  $\mathcal{K}(X)$ . Como los simplices de este complejo son las cadenas finitas de  $X$ , deducimos que  $x \leq x^g$  o bien que  $x^g \leq x$ . Del lema 1.3.3 concluimos que  $x = x^g$ . Por lo tanto  $\mathcal{K}(X)$  verifica (A'), que es equivalente a (A).  $\square$

El complejo  $\mathcal{K}(X/G)$  tiene como vértices a las órbitas de los puntos de  $X$ , y como simplices las cadenas de órbitas. Recordemos que para un  $G$ -poset, una órbita  $\mathcal{O}$  está contenida en una órbita  $\mathcal{O}'$  si para algún representante  $x \in \mathcal{O}$  y otro representante  $y \in \mathcal{O}'$  vale que  $x \leq y$ . Por otro lado, los vértices del complejo  $\mathcal{K}(X)/G$  son las órbitas de los puntos de  $X$  y los simplices son los conjuntos de órbitas  $\{\mathcal{O}_0, \dots, \mathcal{O}_n\}$  de manera que existen representantes  $x_i \in \mathcal{O}_i$  para los que  $\{x_0, \dots, x_n\}$  es un simplex de  $\mathcal{K}(X)$ . Reenumerando las órbitas, podemos suponer que  $x_0 < x_1 < \dots < x_n$ . De esta manera, las órbitas verifican que  $\mathcal{O}_0 < \mathcal{O}_1 < \dots < \mathcal{O}_n$  y así los simplices de  $\mathcal{K}(X)/G$  son las cadenas de órbitas de  $X$ . En consecuencia, estos dos complejos son iguales.

**Proposición 2.6.9.** Si  $X$  es un  $G$ -poset, entonces  $\mathcal{K}(X)/G = \mathcal{K}(X/G)$ . Más aún, se tiene el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} |\mathcal{K}(X)|/G & \xrightarrow{\hat{\mu}_X} & X/G \\ \downarrow \varphi_{\mathcal{K}(X)} & & \uparrow \mu_{X/G} \\ |\mathcal{K}(X)/G| & \equiv & |\mathcal{K}(X/G)| \end{array}$$

En particular, si  $\varphi_K$  es un homeomorfismo,  $\hat{\mu}_X$  es una equivalencia débil.

*Demostración.* Solo basta ver que el diagrama conmuta. Notemos  $\varphi = \varphi_{\mathcal{K}(X)}$  y  $K = \mathcal{K}(X)$ . Si  $x_0 < x_1 < \dots < x_n$  es una cadena en  $X$ , o equivalentemente un simplex de  $K$ ,

entonces

$$\mu_{X/G} \left( \varphi \left( \overline{\sum_i t_i x_i} \right) \right) = \mu_{X/G} \left( \sum_i t_i \bar{x}_i \right) = \bar{x}_0 = \hat{\mu}_X \left( \overline{\sum_i t_i x_i} \right)$$

□

Sea  $X$  un  $G$ -poset y notemos  $K = \mathcal{K}(X)$  a su complejo asociado. Al provenir de un  $G$ -poset, el  $G$ -complejo  $K$  verifica la propiedad (A). Luego  $K'$  es un  $G$ -complejo regular. De todo lo demostrado anteriormente, tenemos un homeomorfismo

$$|K|/G \xrightarrow{\hat{h}^{-1}} |K'|/G \xrightarrow{\varphi_{K'}} |K'/G|$$

De las proposiciones 2.6.7, 2.6.8 y 2.6.9, tenemos el siguiente diagrama donde todos los cuadrados conmutan.

$$\begin{array}{ccccccc}
 X' & \xleftarrow[\approx_w]{\mu_{X'}} & |K'| & \xrightarrow[\equiv]{h} & |K| & \xrightarrow[\approx_w]{\mu_X} & X \\
 \downarrow \pi & & \downarrow \pi & & \downarrow \pi & & \downarrow \pi \\
 X'/G & \xleftarrow[\approx_w]{\hat{\mu}_{X'}} & |K'|/G & \xrightarrow[\equiv]{\hat{h}} & |K|/G & \xrightarrow{\hat{\mu}_X} & X/G \\
 \uparrow \approx_w \mu_{X'/G} & & \downarrow \varphi_{K'} & & \downarrow \varphi_K & & \uparrow \approx_w \mu_{X/G} \\
 |K(X'/G)| & \equiv & |K'/G| & & |K/G| & \equiv & |K(X/G)| \\
 \alpha \curvearrowright & & & & & & \uparrow \equiv h \\
 (X/G)' & \xleftarrow[\approx_w]{\mu_{(X/G)'}} & |K((X/G)')| & \equiv & |K(X/G)'| & & 
 \end{array} \tag{2.5}$$

La función  $\alpha : X'/G \rightarrow (X/G)'$  está definida como

$$\alpha(\overline{x_0 < x_1 < \dots < x_n}) = \bar{x}_0 < \bar{x}_1 < \dots < \bar{x}_n$$

Es fácil verificar que  $\alpha$  es un morfismo de posets. Por otro lado, si  $\bar{x}_0 < \bar{x}_1 < \dots < \bar{x}_n$  es un elemento de  $(X/G)'$ , entonces existen  $g_i \in G$  tales que  $x_{i-1} < x_i^{g_i}$  para  $0 < i \leq n$ . De esta manera, si  $y_0 = x_0$  e  $y_i = x_i^{g_i g_{i-1} \dots g_1}$  para  $i > 0$ , entonces  $y_0 < y_1 < \dots < y_n$  y  $\overline{y_0 < y_1 < \dots < y_n} = \bar{x}_0 < \bar{x}_1 < \dots < \bar{x}_n$ . Esto prueba que  $\alpha$  es un morfismo sobreyectivo. Sin embargo, la inyectividad puede fallar.

**Lema 2.6.10.** El morfismo  $\alpha$  es inyectivo si y solo si  $\mathcal{K}(X)$  tiene la propiedad (B).

*Demostración.* Sean  $c = x_0 < x_1 < \dots < x_n$  y  $c' = y_0 < y_1 < \dots < y_m$  dos cadenas de  $X$ . Si  $\alpha(\bar{c}) = \alpha(\bar{c}')$ , entonces por longitud tiene que ser  $n = m$  y además  $\bar{x}_i = \bar{y}_i$  para todo  $i$ , por lo que existen  $g_i \in G$  tales que  $y_i = x_i^{g_i}$  para todo  $i$ . Luego  $\bar{c} = \bar{c}'$  si y solo si existe  $g \in G$  tal que  $c^g = c'$ , si y solo si para todo  $i$ ,  $x_i^{g_i} = y_i = x_i^g$ . Esto es exactamente la propiedad (B) para  $\mathcal{K}(X)$ . □

Veamos qué significa esta propiedad (B) cuando  $X = \mathcal{S}_p(G)$  es el poset de  $p$ -subgrupos y  $K = \mathcal{K}(\mathcal{S}_p(G))$ . Si  $(H_0, H_1, \dots, H_n)$  son  $p$ -subgrupos que forman un simplex de  $K$ , entonces sin pérdida de generalidad los puedo suponer ordenados  $H_0 \leq H_1 \leq \dots \leq H_n$ . Supongamos que existen  $g_i \in G$  tales que  $(H_0^{g_0}, H_1^{g_1}, \dots, H_n^{g_n})$  forman un simplex de  $K$ . Como conjugar preservar el orden, tiene que ser que  $H_0^{g_0} \leq H_1^{g_1} \leq \dots \leq H_n^{g_n}$ . Buscamos un  $g \in G$  tal que  $H_i^g = H_i^{g_i}$  para todo  $i$ . Es decir, un  $g$  tal que  $H_i = H_i^{gg_i^{-1}}$ . Esto significa que  $gg_i^{-1} \in N_G(H_i)$ , o equivalentemente, que  $g \in N_G(H_i)g_i$ . Por lo tanto, un tal  $g$  existe si y solo si la intersección de las coclases  $\bigcap_{i=0}^n N_G(H_i)g_i$  es no vacía.

Sin embargo, hay grupos que no verifican esta propiedad (B) como lo muestra el siguiente ejemplo que encontramos en el libro de Smith [30].

**Ejemplo 2.6.11.** Sea  $G = \mathbb{S}_4$  y notemos  $X = \mathcal{S}_2(G)$  al poset de 2-subgrupos no triviales y  $K$  a su complejo asociado. Entonces un 2-Sylow de  $G$  es  $D = \langle (13), (1234) \rangle \simeq D_8$ . Luego los elementos  $(13)(24)$  y  $(12)(34)$  están en  $D$  y son conjugados por  $(23) \in G$ . De esta manera, tenemos dos grupos distintos  $H_1 = \langle (13)(24) \rangle$  y  $H_2 = \langle (12), (34) \rangle$  que determinan el mismo punto en  $X/G$ .

Consideremos ahora las aristas  $\{H_1 \subset D\}$  y  $\{H_2 \subset D\}$ . Afirмо que están en diferentes órbitas: si  $\{H_1 \subset D\}^g = \{H_2 \subset D\}$ , entonces  $g \in N_G(D)$ , por lo que  $c_g : D \rightarrow D$  es un isomorfismo. En particular,  $c_g(Z(D)) = Z(D)$ . Es decir,  $g$  normaliza a  $Z(D)$ . Sin embargo, se puede probar que  $Z(D) = H_1$ , por lo que  $H_1^g = H_1 \neq H_2$ , en contradicción con nuestra hipótesis.

**Observación 2.6.12.** Cuando  $X = \mathcal{S}_p(G)$ , el espacio de órbitas  $\mathcal{S}_p(G)/G$  es contráctil. Esto es porque tiene un máximo que es la órbita de un  $p$ -Sylow.

La conjetura de P. Webb 2.6.1 afirma que  $|K|/G$  es contráctil cuando  $K = \mathcal{K}(\mathcal{S}_p(G))$ . En vista del diagrama 2.5 y de la observación anterior, como  $|K|/G$  es un CW-complejo, tenemos las siguientes equivalencias:

**Lema 2.6.13.** Las siguientes son equivalentes para  $K = \mathcal{K}(X)$ , donde  $X$  es un  $G$ -poset tal que  $X/G$  es homotópicamente trivial.

1.  $|K|/G$  es contráctil
2.  $|K'|/G$  es contráctil
3.  $X'/G$  es homotópicamente trivial
4.  $\hat{\mu}_X$  es una equivalencia débil
5. El morfismo  $\alpha : X'/G \rightarrow (X/G)'$  es una equivalencia débil

Esto nos da diferentes enfoques a la hora de querer probar la conjetura de P. Webb si elegimos un poset de  $p$ -subgrupos  $X$  que sea débilmente equivalente a  $\mathcal{S}_p(G)$  y tal que  $X/G$  sea homotópicamente trivial.

En general, si  $X/G$  es contráctil no implica que  $|\mathcal{K}(X)|/G$  lo sea, como el siguiente ejemplo lo muestra.

**Ejemplo 2.6.14.** Sea  $X$  el modelo minimal de  $\mathbb{S}^1$ . Esto es, el poset cuyo diagrama de Hasse es

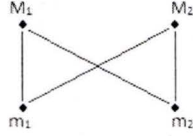


Figure 2.2: Modelo minimal de  $\mathbb{S}^1$

Consideremos la acción de  $\mathbb{Z}_2$  sobre  $X$  que permuta  $m_1$  con  $m_2$  y  $M_1$  con  $M_2$ . Entonces  $X/\mathbb{Z}_2$  es el poset lineal de dos puntos. En particular es contráctil.

Por otro lado,  $|\mathcal{K}(X)|$  es  $\mathbb{S}^1$  y la acción de  $\mathbb{Z}_2$  que teníamos en  $X$  acá se corresponde con la acción antipodal.

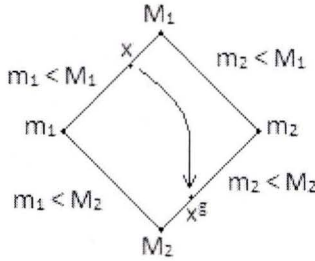


Figure 2.3: Acción antipodal en  $|\mathcal{K}(X)|$ , con  $g$  generador de  $\mathbb{Z}_2$

Por lo tanto, el espacio de órbitas  $|\mathcal{K}(X)|/\mathbb{Z}_2$  es la recta proyectiva  $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ , la cual es homeomorfa a  $\mathbb{S}^1$ . Luego  $|\mathcal{K}(X)|/\mathbb{Z}_2$  no es homotópicamente trivial.

Uno podría preguntarse entonces bajo qué hipótesis vale la conjetura de P. Webb. Sabemos que  $\mathcal{S}_p(G)$  es un retículo reducido (ver observación 2.1.10), cosa que el modelo minimal de  $\mathbb{S}^1$  no lo es. Esto podría ser entonces una obstrucción. Tampoco sabemos si vale la recíproca, es decir, si  $|\mathcal{K}(X)|/G$  es contráctil entonces  $X/G$  es homotópicamente trivial. Queda también abierta la pregunta de si  $\mathcal{A}_p(G)/G$  es homotópicamente trivial en general.

**Observación 2.6.15.** Vimos que el poset de caras del complejo de Robinson  $\mathcal{R}_p(G)$  tiene el mismo tipo homotópico simple equivariante que  $\mathcal{A}_p(G)^{op}$  (ver teorema 2.4.32). Si tomamos  $X = \mathcal{X}(\mathcal{R}_p(G))$  y  $K = \mathcal{K}(X) = \mathcal{R}_p(G)'$  en el diagrama 2.5, tendremos que  $|\mathcal{K}|/G \cong_{\varphi_K} |\mathcal{K}/G|$  por ser  $K$  regular y por lo tanto para probar la conjetura de Webb 2.6.1 basta ver que  $\mathcal{X}(\mathcal{R}_p(G))/G$  es un espacio finito homotópicamente trivial.

## Capítulo 3

# Tipo homotópico del poset $\mathcal{A}_p(G)$

En el artículo [32], Stong muestra con un ejemplo que en general los posets  $\mathcal{A}_p(G)$  y  $\mathcal{S}_p(G)$  no son homotópicamente equivalentes. Para ello considera el grupo  $G = \mathbb{S}_5$  con el primo  $p = 2$  y analiza las estructuras de ambos posets.

Por otro lado, prueba que la contractibilidad del poset  $\mathcal{S}_p(G)$  es equivalente a la existencia de un  $p$ -subgrupo normal no trivial. De esto deduce que la contractibilidad del poset  $\mathcal{A}_p(G)$  implica la del  $\mathcal{S}_p(G)$ . Sin embargo, deja abierta la pregunta de si vale la recíproca. En la sección 3.7 de este capítulo damos un contraejemplo de esto último. Es decir, la existencia de un  $p$ -subgrupo normal no trivial no implica que  $\mathcal{A}_p(G)$  sea un poset contráctil.

Uno podría preguntarse qué condiciones debe cumplir el grupo  $G$  para que el poset  $\mathcal{A}_p(G)$  sea contráctil. Esta pregunta parece requerir de mucha teoría de grupos y hasta el momento no hemos encontrado una respuesta general definitiva en términos de subgrupos de  $G$ .

En la sección 3.1 de este capítulo analizamos el concepto de contractibilidad en pasos y logramos describirlo complementemente en retículos reducidos atómicos. Con estos conceptos, podemos describir de manera combinatoria la contractibilidad de  $\mathcal{A}_p(G)$ . En las secciones siguientes damos algunos resultados parciales sobre cuándo los posets  $\mathcal{A}_p(G)$  y  $\mathcal{S}_p(G)$  son homotópicamente equivalentes. Analizamos el caso de  $G = D_n$  un grupo diedral y vemos que para  $p \neq 2$ , los posets  $\mathcal{A}_p(G)$  y  $\mathcal{S}_p(G)$  no son muy interesantes ya que poseen un orden lineal, mientras que si  $p = 2$  son homotópicamente equivalentes pero en general pueden no ser contráctiles. Probamos también que los grupos de orden  $p^\alpha q$ , con  $p, q$  primos distintos, verifican que  $\mathcal{S}_p(G) \simeq \mathcal{A}_p(G)$ . Finalmente cerramos el capítulo con una serie de ejemplos y contraejemplos que desafían nuestra intuición y nos ayudan a entender un poco más por qué los posets  $\mathcal{A}_p(G)$  y  $\mathcal{S}_p(G)$  no son homotópicos en general.

### 3.1 Contractibilidad en pasos

En esta sección, introducimos la noción de contractibilidad en pasos de un poset. Un poset  $X$  será contráctil en  $n$  pasos si existe una cadena de  $n$  desigualdades entre la identidad y una función constante. Es decir, si en el 1-esqueleto del complejo  $\mathcal{K}(X^X)$  la función identidad está a una distancia de a lo sumo  $n$  de una función constante. La contractibilidad en

pasos nos permitirá diferenciar entre distintos tipos de espacios contráctiles. Por ejemplo, probamos que cuando consideramos retículos reducidos atómicos, podemos decir exactamente la cantidad de pasos en que es contráctil mirando los subposets que se obtienen al tomar las intersecciones de maximales o los supremos de minimales de manera alternada y sucesiva.

La idea de contractibilidad en pasos se podría decir que tiene su origen en el artículo de Quillen [28]. Lo que nosotros denominamos contractibilidad en dos pasos es lo que Quillen denomina cónicamente contráctil. De esta manera, prueba que si  $\mathcal{O}_p(G) > 1$  entonces  $\mathcal{S}_p(G)$  es cónicamente contráctil y en particular homotópicamente trivial. Más adelante, Smith en [30] hace referencia a la contractibilidad en uno, dos (lo que Quillen llamó cónicamente contráctil) o más pasos. Nosotros damos una definición formal y trabajamos con esto para obtener una visión más general de lo que significa en lattices reducidas.

**Definición 3.1.1.** Sean  $X$  e  $Y$  dos posets. Dos morfismos  $f, g : X \rightarrow Y$  son homotópicos en  $n$  pasos, y notamos  $f \simeq_n g$ , si existen  $f_0, f_1, \dots, f_n : X \rightarrow Y$  tales que  $f_0 = f$ ,  $f_n = g$  y  $f_i, f_{i+1}$  son comparables para todo  $i$ .

Los espacios  $X$  e  $Y$  son homotópicamente equivalentes en  $n$  pasos, y notamos  $X \simeq_n Y$  si existen  $f : X \rightarrow Y$  y  $g : Y \rightarrow X$  tales que  $gf \simeq_n \text{id}_X$  y  $fg \simeq_n \text{id}_Y$ .

Decimos que  $X$  es contráctil en  $n$  pasos si  $X \simeq_n *$ .

**Observación 3.1.2.** De la definición es inmediato ver que  $X$  es contráctil en 0 pasos si y solo si es punto, y es contráctil en 1 paso si y solo si posee un máximo o un mínimo. Esto mismo nos dice que la contractibilidad en pasos no es un invariante homotópico. Es decir, si  $X \simeq Y$  y  $X \simeq_n *$  entonces esto no implica que  $Y \simeq_n *$ . Lo único que podemos decir es que si  $X \simeq_m Y$  entonces  $Y \simeq_{n+m} *$ . Por lo tanto, este invariante nos permite distinguir entre distintos tipos de espacios contráctiles.

En lo que sigue nos dedicaremos a estudiar la contractibilidad en pasos de retículos reducidos atómicos o coatómicos.

**Observación 3.1.3.** Si  $X$  es un retículo reducido atómico que tiene un mínimo, entonces  $X = \{*\}$  es solo punto, ya que todo elemento de  $X$  debe ser el supremo de los minimales que están por debajo de éste.

Esta observación nos conduce a la siguiente proposición cuya demostración es inmediata.

**Proposición 3.1.4.** Sea  $X$  un retículo reducido. Si  $X$  es atómico, entonces  $X \simeq_1 *$  si y solo si  $X$  posee un máximo. Análogamente, si  $X$  es coatómico, entonces  $X \simeq_1 *$  si y solo si  $X$  posee un mínimo.

**Proposición 3.1.5.** Si  $X$  es un retículo reducido, entonces  $X \simeq_1 i(X)$  y  $X \simeq_1 \mathfrak{s}(X)$ .

*Demostración.* Sea  $i : i(X) \hookrightarrow X$  la inclusión y sea  $r : X \rightarrow i(X)$  el retracts dado por  $r(x) = \inf(M(x))$ . Entonces  $ri = \text{id}_{i(X)}$  e  $ir \geq \text{id}_X$ . Es decir,  $ir \simeq_1 \text{id}_X$ .

Para  $\mathfrak{s}(X)$  es análogo. □

En general, ¿Qué significa ser contráctil en  $n$  pasos? Supongamos que  $X$  es un retículo reducido atómico contráctil en  $n$  pasos. Luego existen morfismos  $f_0, f_1, \dots, f_n : X \rightarrow X$  y un elemento  $x_0 \in X$  tales que  $f_0 = \text{id}_X$ ,  $f_n = \text{cte}_{x_0}$  y pasa alguna de las siguientes desigualdades:

$$\text{id}_X = f_0 \leq f_1 \geq f_2 \leq \dots \geq f_{n-1} \leq \text{cte}_{x_0} = f_n \text{ si } n \text{ es par} \quad (3.1)$$

$$\text{id}_X = f_0 \leq f_1 \geq f_2 \leq \dots \leq f_{n-1} \geq \text{cte}_{x_0} = f_n \text{ si } n \text{ es impar} \quad (3.2)$$

$$\text{id}_X = f_0 \geq f_1 \leq f_2 \geq \dots \leq f_{n-1} \geq \text{cte}_{x_0} = f_n \text{ si } n \text{ es par} \quad (3.3)$$

$$\text{id}_X = f_0 \geq f_1 \leq f_2 \geq \dots \geq f_{n-1} \leq \text{cte}_{x_0} = f_n \text{ si } n \text{ es impar} \quad (3.4)$$

A continuación veremos cómo ir cambiando estas cadenas de desigualdades entre la identidad y la función constante de manera que se mantengan la cantidad de pasos y que los morfismos por los que cambiemos los anteriores sean de alguna manera conocidos.

Para dos morfismos  $f, g : X \rightarrow X$ , notamos  $f \wedge g$  a la función wedge o ínfimo  $(f \wedge g)(x) = f(x) \wedge g(x)$ . Esta función resulta un morfismo bien definido en  $X$  siempre y cuando  $\{f(x), g(x)\}$  esté acotado inferiormente para todo  $x \in X$ . Si  $f_{i-1} \geq f_i \leq f_{i+1}$ , podemos intercambiar  $f_i$  por  $f_{i-1} \wedge f_{i+1}$  ya que  $\{f_{i-1}(x), f_{i+1}(x)\}$  está acotado inferiormente por  $f_i(x)$  para todo  $x \in X$ . Con esto obtenemos otra homotopía entre  $f_0$  y  $f_n$  con la misma cantidad de pasos de manera que los morfismos que están en medio de las desigualdades  $f_{i-1} \geq f_i \leq f_{i+1}$  resultan ser el ínfimo (o wedge) de los dos de la punta.

Con esta idea en mente, si  $f, g : X \rightarrow X$  son dos morfismos, podemos considerar la función supremo  $f \vee g : X \rightarrow X$  dada por  $(f \vee g)(x) = f(x) \vee g(x)$ , que está bien definida siempre y cuando  $\{f(x), g(x)\}$  esté acotado superiormente en  $X$ . Luego, si  $f_{i-1} \leq f_i \geq f_{i+1}$ , podemos intercambiar  $f_i$  por  $f_{i-1} \vee f_{i+1}$  para obtener otra homotopía entre  $f_0$  y  $f_n$  con la misma cantidad de pasos.

Ahora observemos lo siguiente. Supongamos que estamos en el caso (3.3) o (3.4) de las desigualdades donde  $f_0 \geq f_1 \leq f_2 \geq \dots$ . Sea  $x \in X$  y sea  $y \in m(x)$  un elemento minimal por debajo de  $x$ . Entonces  $y \geq f_1(y)$  implica que  $y = f_1(y) \leq f_2(y)$  por ser un elemento minimal. Como  $f_2$  es morfismo de posets,

$$y \leq f_2(y) \leq f_2(x)$$

Como  $y \in m(x)$  era arbitrario y  $X$  es atómico, deducimos que  $x = \sup(m(x)) \leq f_2(x)$ . Con esto, podemos intercambiar nuestra cadena original por esta otra

$$f_0 \leq f_2 \geq f_3 \leq \dots$$

Así, redujimos la cantidad de pasos de la homotopía y caímos en el caso (3.1) o (3.2) de las desigualdades anteriores.

El siguiente teorema resume lo que acabamos de ver.

**Teorema 3.1.6.** *Sea  $X$  un retículo reducido atómico. Si  $\text{id}_X \simeq g$ , entonces existe  $n \geq 0$  y morfismos de posets  $f_0, \dots, f_n : X \rightarrow X$  tales que*

$$\text{id}_X = f_0 \leq f_1 \geq f_2 \leq \dots \geq f_{n-1} \leq f_n = g, \text{ si } n \text{ es impar, o}$$

$$\text{id}_X = f_0 \leq f_1 \geq f_2 \leq \dots \leq f_{n-1} \geq f_n = g, \text{ si } n \text{ es par}$$

Más aún, podemos suponer que  $f_{2k} = f_{2k-1} \wedge f_{2k+1}$  para cada  $1 \leq k < n/2$  y que  $f_{2k+1} = f_{2k} \vee f_{2k+2}$  para todo  $0 \leq k < n/2$

La demostración se desprende de lo que ya comentamos.

**Observación 3.1.7.** Invirtiendo las desigualdades, se pueden obtener resultados análogos en el caso de retículos reducidos coatómicos.

La siguiente proposición nos dice que de alguna manera sabemos quién es el morfismo  $f_1$  de una cadena de desigualdades del estilo  $\text{id}_X \leq f_1 \geq f_2 \leq \dots$

**Proposición 3.1.8.** Si  $X$  es un retículo reducido atómico y  $\text{id}_X \leq f$ , entonces  $f(x) \leq \inf(M(x))$  para todo  $x \in X$ .

*Demostración.* Si  $y \in M(x)$ , entonces  $f(x) \leq f(y) = y$  por ser  $y$  maximal. Así,  $f(x) \leq y$  para todo  $y \in M(x)$  implica que  $f(x) \leq \inf(M(x))$ .  $\square$

Recordemos que para un retículo reducido tenemos las siguientes dos sucesiones

$$X \supset i(X) \supset \mathfrak{s}(i(X)) \supset i(\mathfrak{s}(i(X))) \supset \dots$$

$$X \supset \mathfrak{s}(X) \supset i(\mathfrak{s}(X)) \supset \mathfrak{s}(i(\mathfrak{s}(X))) \supset \dots$$

Al  $(n+1)$ -ésimo espacio de la primera sucesión lo notamos  $X_n$  y al  $(n+1)$ -ésimo espacio de la segunda sucesión lo notamos  $X_n$ .

Con estas herramientas podemos probar el siguiente teorema que nos da un método para calcular la contractibilidad en pasos de retículos reducidos atómicos o coatómicos.

**Teorema 3.1.9.** Sea  $X$  un retículo reducido atómico. Son equivalentes:

1.  $X \sim_n *$
2.  $i(X) \sim_{n-1} *$
3.  $X_i \sim_{n-i} *$  para todo  $i \geq 0$
4.  $X_n = *$

con la convención de que  $Y \sim_m *$  para  $m$  negativo es lo mismo que  $Y \sim_0 *$ . Análogamente, si  $X$  es coatómico entonces son equivalentes:

1.  $X \sim_n *$
2.  $\mathfrak{s}(X) \sim_{n-1} *$
3.  $X^i \sim_{n-i} *$  para todo  $i \geq 0$
4.  $X^n = *$

*Demostración.* El caso  $n = 0$  es tautológico, así que podemos suponer que  $n \geq 1$ .

Veamos que 1) implica 2). Supongamos que  $X$  es atómico y contráctil en  $n$  pasos. Por el teorema 3.1.6, existen morfismos  $f_0, \dots, f_n : X \rightarrow X$  tales que  $f_0 = \text{id}_X$ ,  $f_n = \text{cte}_{x_0}$ , se verifican las desigualdades

$$\text{id}_X = f_0 \leq f_1 \geq f_2 \leq f_3 \geq \dots$$

y  $f_{2i} = f_{2i-1} \wedge f_{2i+1}$  para todo  $i$ . Sea  $i : \mathfrak{i}(X) \hookrightarrow X$  la inclusión y sea  $r : X \rightarrow \mathfrak{i}(X)$  la retracción  $r(x) = \inf(M(x))$ . Para cada  $i \geq 1$ , tomemos  $\tilde{f}_{i-1} = r f_i i$ . Como  $i$  y  $r$  son morfismos de posets, vale que

$$\tilde{f}_0 \geq \tilde{f}_1 \leq \tilde{f}_2 \geq \dots$$

Ahora, de la proposición 3.1.8 tenemos que  $f_1 \leq ir$ , y así

$$\tilde{f}_0 = r f_1 i \leq r i r i = \text{id}_{\mathfrak{i}(X)}$$

Por lo tanto conseguimos una sucesión

$$\text{id}_{\mathfrak{i}(X)} = \tilde{f}_0 \geq \tilde{f}_1 \leq \tilde{f}_2 \geq \tilde{f}_3 \leq \dots$$

que termina en la función constante  $\tilde{f}_{n-1} = r f_n i = \text{cte}_{r(x_0)}$  y  $\tilde{f}_i : \mathfrak{i}(X) \rightarrow \mathfrak{i}(X)$  para todo  $i$ . Es decir,  $\mathfrak{i}(X)$  es contráctil en  $n - 1$  pasos.

Veamos que 2) implica 1). Si  $\mathfrak{i}(X) \sim_{n-1} *$ , de la proposición 3.1.5 y de la observación 3.1.2 obtenemos que  $X \sim_n *$ .

Si  $X$  es coatómico, entonces  $X \sim_n *$  si y solo si  $X^{op} \sim_n *$  si y solo si  $\mathfrak{i}(X^{op}) \sim_{n-1} *$ , si y solo si  $\mathfrak{s}(X) \sim_{n-1} *$ . Esto prueba la equivalencia de 1) y 2) para  $X$  coatómico.

Claramente 3) implica 2) y 4) tanto para  $X$  atómico como coatómico.

Veamos que 2) implica 3) para  $X$  atómico. Lo hacemos por inducción en  $i$ . Si  $i = 0, 1$  ya estamos. Supongamos que  $i \geq 2$ . Entonces  $X_{i-1} \sim_{n-i+1} *$  por hipótesis inductiva. Como 1) y 2) son equivalentes tanto para  $X$  atómico como para  $X$  coatómico, y  $X_{i-1}$  es atómico o coatómico por ser  $i \geq 2$ , vale que  $X_i = X_{i-1+1} \sim_{n-i} *$ . Para  $X$  coatómico es exactamente el mismo argumento.

Por último, veamos que 4) implica 1). De la proposición 3.1.5 tenemos que  $X_i \sim_1 X_{i-1}$  para todo  $i$ . Como  $X_n = *$ , es decir,  $X_n \sim_0 *$ , de la observación 3.1.2 deducimos que  $X_{n-1} \sim_1 *$ ,  $X_{n-2} \sim_2 *$  y así sucesivamente hasta que  $X = X_0 \sim_n *$ . Lo mismo vale para la sucesión  $X^i$  del caso coatómico.  $\square$

Este teorema resuelve el problema a encontrar la cantidad de pasos en que un retículo reducido atómico o coatómico es contráctil. De hecho, lo que tenemos que hacer es ir calculando los posets  $\mathfrak{i}$  y  $\mathfrak{s}$  alternadamente hasta llegar a tener un punto. Si por ejemplo  $X$  es atómico, entonces  $X \sim_n *$  si y solo si al aplicar alternadamente  $\mathfrak{i}$  y luego  $\mathfrak{s}$   $n$  veces llegamos a un punto.

Del tercer ítem de las equivalencias podemos deducir el siguiente corolario que enunciamos sólo para atómico pero que se puede traducir fácilmente al caso de coatómico.

**Corolario 3.1.10.** Sea  $X$  un retículo reducido atómico. Entonces  $X \sim_n *$  si y solo si  $X_{n-1}$  posee un máximo si  $n$  es impar o un mínimo si  $n$  es par.

*Demostración.* Del teorema anterior,  $X \sim_n *$  si y solo si  $X_{n-1} \sim_1 *$ . Como  $X = X_0$  es atómico, se tiene que  $X_{2i+1}$  es coatómico y  $X_{2i}$  es atómico para todo  $i \geq 0$ . Por lo tanto, si  $n$  es par,  $X_{n-1}$  es coatómico y si  $n$  es impar,  $X_{n-1}$  es atómico. De la proposición 3.1.4 deducimos que  $X_{n-1} \sim_1 *$  si y solo si posee un máximo si  $n$  es impar o si posee un mínimo si  $n$  es par.  $\square$

Sea  $X$  un retículo reducido atómico. Para cada  $n \geq 0$ , sea  $M_n$  el conjunto definido por

$$M_n = \begin{cases} m(X_n) & \text{si } n \text{ es par} \\ M(X_n) & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$$

Es decir,  $M_n$  es el conjunto de minimales de  $X_n$  si  $n$  es par y es el de los maximales si  $n$  es impar.

**Corolario 3.1.11.** Un retículo reducido atómico  $X$  es contráctil en  $n$  pasos si y solo si  $|M_n| = 1$ .

*Demostración.* El poset  $X$  es contráctil en  $n$  pasos si y solo si  $X_n$  consiste de un solo punto. Como  $X_n$  es atómico para  $n$  par y coatómico para  $n$  impar, esto equivale a decir que  $X_n$  posee un solo minimal cuando  $n$  es par o un solo maximal cuando  $n$  impar. O sea, que  $|M_n| = 1$ .  $\square$

Utilizando estos resultados podemos describir la contractibilidad de  $\mathcal{A}_p(G)$  ya que es un retículo reducido atómico. Sin embargo, tal descripción involucra el cálculo del poset  $\mathcal{A}_p(G)$  y no es directo como en el caso de  $\mathcal{S}_p(G)$ .

**Observación 3.1.12.** De la observación 3.1.2, el poset  $\mathcal{A}_p(G)$  es contráctil en 0 pasos si es solo un punto, lo cual equivale a decir que  $G$  posee un único subgrupo de orden  $p$ ; es contráctil en 1 paso si  $\mathcal{A}_p(G)$  posee máximo o mínimo. Notemos que si  $\mathcal{A}_p(G)$  tiene un mínimo, entonces es solo un punto, ya que dos puntos distintos nos dan al menos dos subgrupos distintos de orden  $p$ . Por otro lado,  $\mathcal{A}_p(G)$  tiene un máximo si y solo si todo par de elementos de orden  $p$  conmutan. Equivalente,  $\Omega_1(G) = \langle x \in G : x^p = 1 \rangle$  es un grupo abeliano, y por lo tanto es el máximo de  $\mathcal{A}_p(G)$ .

El siguiente teorema describe en general qué quiere decir la contractibilidad de  $\mathcal{A}_p(G)$  en término de subgrupos de  $G$ .

Para  $n$  par, definimos  $H_n$  como el subgrupo generado por  $M_n$ , y para  $n$  impar sea  $H_n$  la intersección de los subgrupos de  $M_n$ . Es decir,

$$H_n = \begin{cases} \langle M_n \rangle & \text{si } n \text{ es par} \\ \bigcap M_n & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$$

**Teorema 3.1.13.** El poset  $\mathcal{A}_p(G)$  es contráctil en  $n$  pasos si y solo si  $n = 0$  y  $\mathcal{A}_p(G) = \{*\}$ , o bien  $n \geq 1$  y  $H_{n-1} > 1$  si  $n$  es par o  $H_{n-1}$  es abeliano si  $n$  es impar.

*Demostración.* El caso  $n = 0$  ya lo discutimos en la observación 3.1.2. Podemos asumir entonces que  $n \geq 1$ . Supongamos que  $\mathcal{A}_p(G)$  es contráctil en  $n$  pasos.

- Caso  $n$  par: del corolario 3.1.10,  $\mathcal{A}_p(G)_{n-1}$  posee un mínimo. Como  $M_{n-1}$  es el conjunto de maximales de  $\mathcal{A}_p(G)_{n-1}$ , si  $A \in \mathcal{A}_p(G)$  es el mínimo de  $\mathcal{A}_p(G)_{n-1}$ , entonces  $A \leq B$  para todo  $B \in M_{n-1}$ . En particular,  $A$  es un subgrupo no trivial que está contenido en la intersección de los subgrupos de  $M_{n-1}$ . Luego la intersección  $H_{n-1} = \bigcap M_{n-1}$  es un  $p$ -toro.
- Caso  $n$  impar: del corolario 3.1.10,  $\mathcal{A}_p(G)_{n-1}$  posee un máximo. Como  $M_{n-1}$  es el conjunto de minimales de  $\mathcal{A}_p(G)_{n-1}$ , si  $A \in \mathcal{A}_p(G)$  es el máximo de  $\mathcal{A}_p(G)_{n-1}$ , entonces  $A \geq B$  para todo  $B \in M_{n-1}$ . Luego  $H_{n-1} = \langle M_{n-1} \rangle \leq A$  es un subgrupo abeliano.

Recíprocamente, supongamos que  $H_{n-1} > 1$  si  $n$  es par o bien  $H_{n-1}$  es abeliano si  $n$  es impar. En el primer caso,  $H_{n-1}$  es una cota inferior, dentro de  $\mathcal{A}_p(G)$ , para  $M_{n-1}$ . En el segundo caso, si  $H_{n-1}$  es abeliano, como está generado por  $p$ -toros, debe ser que  $H_{n-1}$  es un  $p$ -toro y en particular  $M_{n-1}$  está acotado superiormente en  $\mathcal{A}_p(G)$ .

Ahora,  $\mathcal{A}_p(G)$  es contráctil en  $n$  pasos si y solo si  $\mathcal{A}_p(G)_{n-1}$  posee un mínimo si  $n$  es par, o un máximo si  $n$  es impar (por el corolario 3.1.10). Como  $\mathcal{A}_p(G)_{n-1}$  es atómico para  $n$  par y coatómico para  $n$  impar, esto es lo mismo que decir que  $M_{n-1}$  es acotado superiormente en el primer caso e inferiormente en el segundo (dentro del poset  $\mathcal{A}_p(G)_{n-1}$ ). Lo que sabemos es que  $M_{n-1}$  es acotado superiormente si  $n$  es par e inferiormente si  $n$  es impar dentro de  $\mathcal{A}_p(G)$ . El siguiente lema, cuya demostración dejamos a cargo del lector, nos dice que en tal caso también lo es dentro de  $\mathcal{A}_p(G)_{n-1}$ , lo cual concluye la demostración del teorema.  $\square$

**Lema 3.1.14.** Sea  $X$  un retículo reducido y sea  $n \geq 0$ . Si  $A \subset X_n$  entonces  $A$  es acotado superior o inferiormente en  $X_n$  si y solo si lo es en  $X$ . Lo mismo vale para la sucesión  $X^n$ .

Inmediatamente del teorema anterior obtenemos el siguiente corolario.

**Corolario 3.1.15.** El poset  $\mathcal{A}_p(G)$  es contráctil en dos pasos si y solo si la intersección de todos los maximales de  $\mathcal{A}_p(G)$  es no trivial.

Consideremos  $L = \mathcal{L}(\mathcal{A}_p(G))$ , el complejo simplicial cuyos vértices son los  $p$ -toros maximales y cuyos símlices son los conjuntos de maximales  $\{A_0, \dots, A_n\}$  con intersección  $\bigcap_{i=0}^n A_i$  no trivial. De lo anterior deducimos que  $\mathcal{A}_p(G)$  es contráctil en dos pasos si y solo si  $L$  es un símplex.

**Corolario 3.1.16.** El poset  $\mathcal{A}_p(G)$  es contráctil en dos pasos si y solo si  $L$  es un símplex.

También podemos deducir qué quiere decir la contractibilidad en tres pasos de  $\mathcal{A}_p(G)$  en término de subgrupos.

**Proposición 3.1.17.** El poset  $\mathcal{A}_p(G)$  es contráctil en tres pasos si y solo si existe un elemento  $N \in \mathcal{A}_p(G)$  que interseca de manera no trivial a toda intersección no trivial de  $p$ -toros maximales.

*Demostración.* En vista del teorema 3.1.13, el poset  $\mathcal{A}_p(G)$  es contráctil en tres pasos si y solo si  $H_2 = \langle M_2 \rangle$  es abeliano. Como  $M_2$  son los minimales de  $\mathfrak{s}(i(\mathcal{A}_p))$ , que son los

mismos que los minimales de  $i(\mathcal{A}_p(G))$ , deducimos que  $H_2$  es abeliano. Luego  $H_2 = N$  interseca de manera no trivial a toda intersección no trivial de  $p$ -toros maximales.

Recíprocamente, si tenemos un tal  $N$  podemos definir

$$f(A) = \bigcap \{B \in \mathcal{A}_p(G) : A \leq B \text{ y } B \text{ maximal}\}$$

y tenemos que  $f(A) \cap N > 1$  por hipótesis. Así

$$A \leq f(A) \geq f(A) \cap N \leq N$$

Luego  $\mathcal{A}_p(G)$  es contráctil en tres pasos.  $\square$

Todavía no tenemos una caracterización precisa de qué significa que  $\mathcal{A}_p(G)$  sea contráctil en términos del grupo  $G$  sin necesidad de calcular el poset  $\mathcal{A}_p(G)$ .

Por último, dejemos en claro el siguiente resultado que ya ha aparecido en las secciones previas.

**Corolario 3.1.18.** Si  $G$  es un  $p$ -grupo, entonces  $\mathcal{A}_p(G)$  es contráctil en dos pasos.

*Demostración.* Ya vimos que  $N = \Omega_1(Z(G)) > 1$  es un  $p$ -subgrupo elemental abeliano y que  $AN \in \mathcal{A}_p(G)$  para todo  $A \in \mathcal{A}_p(G)$ . Luego  $A \leq AN \geq N$ , y así  $\mathcal{A}_p(G)$  es contráctil en dos pasos. Para más detalles ver la proposición 2.1.3.  $\square$

### 3.2 Casos para los que $\mathcal{A}_p(G) \simeq \mathcal{S}_p(G)$

En [32], Stong comenta que cuando  $\Omega_1(P)$  es abeliano para todo  $p$ -Sylow  $P$ , entonces  $\mathcal{A}_p(G)$  y  $\mathcal{S}_p(G)$  son homotópicamente equivalentes. En esta sección veremos algunos casos más para los que  $\mathcal{S}_p(G)$  y  $\mathcal{A}_p(G)$  son posets homotópicamente equivalentes y que si los  $p$ -toros maximales de  $\mathcal{A}_p(G)$  son todos conjugados, entonces  $\mathcal{S}_p(G)$  es contráctil si y solo si  $\mathcal{A}_p(G)$  lo es. Sin embargo, daremos un contraejemplo que muestra que si los  $p$ -toros maximales son todos conjugados pero  $\mathcal{S}_p(G)$  no es contráctil, entonces los espacios  $\mathcal{S}_p(G)$  y  $\mathcal{A}_p(G)$  no son homotópicos.

Comenzamos enunciando un resultado de Stong que aparece en [32].

**Proposición 3.2.1.** (Stong) Si  $G$  es un grupo finito,  $p$  es un primo que divide al orden de  $G$  y los  $p$ -Sylows son abelianos, entonces  $\mathcal{A}_p(G)$  y  $\mathcal{S}_p(G)$  son homotópicamente equivalentes.

*Demostración.* Por las hipótesis, todo  $p$ -subgrupo es abeliano. Sea  $f : \mathcal{S}_p(G) \rightarrow \mathcal{A}_p(G)$  el morfismo que a cada  $p$ -grupo  $H$  le asigna el subgrupo  $\Omega_1(H)$ . Como  $H$  es abeliano,  $\Omega_1(H)$  es un  $p$ -subgrupo elemental abeliano y así  $f$  es un morfismo de posets bien definido. Notemos por  $i : \mathcal{A}_p(G) \rightarrow \mathcal{S}_p(G)$  a la inclusión canónica. De esta manera,  $if \leq \text{id}_{\mathcal{S}_p(G)}$  y  $fi = \text{id}_{\mathcal{A}_p(G)}$ .  $\square$

**Observación 3.2.2.** Notar que de la demostración anterior se deduce algo más fuerte:  $\mathcal{A}_p(G) \subset \mathcal{S}_p(G)$  es un retracts por deformación fuerte.

**Corolario 3.2.3.** Si  $G$  es un grupo finito y  $p$  es un primo que divide al orden de  $G$  tal que  $m_p(G) \leq 2$ , entonces  $\mathcal{A}_p(G) \subset \mathcal{S}_p(G)$  es un retracts por deformación fuerte.

*Demostración.* Como  $m_p(G) \leq 2$ , todo  $p$ -Sylow tiene orden  $p$  o  $p^2$ , y en consecuencia es abeliano (ver proposición 1.1.17).  $\square$

De hecho, Stong observa que el resultado de la proposición anterior se puede generalizar un poco más pidiendo que cualesquiera dos elementos de orden  $p$  en un mismo  $p$ -Sylow, conmuten. Es decir, si  $\Omega_1(P)$  es abeliano para todo  $P \in \text{Syl}_p(G)$ .

Tratando de generalizar un poco más esta idea, observamos lo siguiente. Si cualesquiera dos elementos de orden  $p$  en un mismo  $p$ -Sylow  $P$  conmutan, entonces  $\mathcal{A}_p(P)$  posee un único  $p$ -toro maximal. Esto es porque  $\Omega_1(P) = \langle x \in P : x^p = 1 \rangle$  es un subgrupo abeliano de  $P$ , no trivial y de exponente  $p$ . Como todo elemento de orden  $p$  está contenido en  $\Omega_1(P)$  y los  $p$ -toros maximales están generados por este tipo de elementos, se sigue que  $\Omega_1(P)$  debe ser el único  $p$ -toro maximal de  $\mathcal{A}_p(P)$ . En particular, este  $p$ -toro maximal es característico en  $P$  y por lo tanto todos los  $p$ -toros maximales de  $\mathcal{A}_p(G)$  son conjugados. Podríamos preguntarnos entonces qué sucede si todos los  $p$ -toros maximales son conjugados. ¿Será que  $\mathcal{A}_p(G)$  y  $\mathcal{S}_p(G)$  son homotópicamente equivalentes?

**Proposición 3.2.4.** Supongamos que  $\mathcal{S}_p(G)$  es contráctil y que todos los  $p$ -toros maximales son conjugados. Entonces  $\mathcal{A}_p(G)$  es contráctil en dos pasos.

*Demostración.* Sea  $N = \Omega_1(Z(\mathcal{O}_p(G)))$ . Como  $\mathcal{O}_p(G) > 1$ ,  $N \in \mathcal{A}_p(G)$ . Este subgrupo es característico en  $\mathcal{O}_p(G)$  y por lo tanto lo es en  $G$  (ver observación 1.1.5). En particular,  $N$  es normal en  $G$ . Ahora,  $N$  está contenido en algún maximal de  $\mathcal{A}_p(G)$  y éstos son todos conjugados, por lo que  $N$  está contenido en la intersección de todos los maximales de  $\mathcal{A}_p(G)$ . En consecuencia, este poset es contráctil en dos pasos por el corolario 3.1.15.  $\square$

**Ejemplo 3.2.5.** Sea  $G = \text{GL}(2, \mathbb{F}_3)$  el grupo con id [48, 29] en la tabla de SmallGroups de GAP. Notemos que  $48 = 2^4 * 3$ . Con el primo  $p = 2$ , ambos posets  $\mathcal{S}_p(G)$  y  $\mathcal{A}_p(G)$  resultan contráctiles. La cantidad de 2-Sylows es 3, estos son isomorfos a  $QD_{16}$ , el grupo quasidiedral, la cantidad de 2-toros maximales es 6 y son todos conjugados. Este ejemplo no está en las condiciones que decía Stong y aún así los posets son homotópicamente equivalentes. De hecho son contráctiles.

**Ejemplo 3.2.6.** Sea  $G = \mathbb{Z}_2 \times D_{12}$  el grupo con id [48, 36] en la tabla de SmallGroups de GAP. Con el primo  $p = 2$ , ambos posets  $\mathcal{S}_p(G)$  y  $\mathcal{A}_p(G)$  resultan contráctiles. La cantidad de 2-Sylows es 3, estos son isomorfos a  $\mathbb{Z}_2 \times D_4$ , la cantidad de 2-toros maximales es 6 y no son todos conjugados. Este ejemplo no verifica que todos los 2-toros maximales sean conjugados, y aún así ambos posets son contráctiles.

Si  $\mathcal{S}_p(G)$  no es contráctil, aunque los  $p$ -toros maximales sean todos conjugados, puede no valer que ambos posets sean homotópicamente equivalentes, que es lo que muestra el ejemplo a continuación.

**Ejemplo 3.2.7.** Sea  $G = ((\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3) \rtimes \mathbb{Z}_8) \rtimes \mathbb{Z}_2$  el grupo con id [144, 182] en la tabla de SmallGroups de GAP. El orden es  $144 = 2^4 * 3^2$ . Con el primo  $p = 2$ , los cores de  $\mathcal{S}_p(G)$  y  $\mathcal{A}_p(G)$  tienen 21 y 39 elementos respectivamente, por lo que no son homotópicamente equivalentes. La cantidad de 2-Sylows es 9 y la de 2-toros maximales es 18, los cuales son todos conjugados. Más aún, cada 2-Sylow contiene exactamente dos maximales y estos son conjugados dentro del mismo Sylow. Notemos que del teorema de Burnside 1.1.24, el grupo  $G$  es soluble.

Por otro lado, la observación de Stong de pedir que dos elementos de orden  $p$  en un mismo  $p$ -Sylow conmuten caracteriza totalmente los casos para los que  $\mathcal{A}_p(G) \subset \mathcal{S}_p(G)$  es un retracto por deformación fuerte.

**Teorema 3.2.8.** *Si  $G$  es un grupo finito y  $p$  es un primo, entonces son equivalentes:*

1.  $\mathcal{A}_p(G) \subset \mathcal{S}_p(G)$  es un retracto por deformación fuerte
2.  $\mathcal{A}_p(G) \subset \mathcal{S}_p(G)$  es un retracto
3. Para  $B \in \mathcal{S}_p(G)$ ,  $\Omega_1(B)$  es abeliano
4. Si  $P \in \text{Syl}_p(G)$  entonces  $\Omega_1(P)$  es abeliano

*Demostración.* Que 1) implica 2) es claro. 3) si y solo si 4) también es claro ya que si  $B \leq P$  entonces  $\Omega_1(B) \leq \Omega_1(P)$ . 3) implica 1) se deduce de la observación de Stong. Luego lo único que debemos ver es que si  $r : \mathcal{S}_p(G) \rightarrow \mathcal{A}_p(G)$  es un retracto y  $P \in \text{Syl}_p(G)$  entonces  $\Omega_1(P)$  es abeliano. Si  $x \in P$  es de orden  $p$ , entonces  $\langle x \rangle \in \mathcal{A}_p(G)$  y así

$$x \in \langle x \rangle = r(\langle x \rangle) \leq r(P)$$

O sea,  $x \in r(P)$ . Como  $\Omega_1(P)$  está generado por los elementos de orden  $p$  de  $P$ , deducimos que  $\Omega_1(P) \leq r(P) \in \mathcal{A}_p(G)$ . En particular,  $\Omega_1(P)$  es abeliano.  $\square$

De la demostración se deduce cómo deben comportarse todos los retractos.

**Corolario 3.2.9.** Si  $r : \mathcal{S}_p(G) \rightarrow \mathcal{A}_p(G)$  es un retracto, entonces  $r(B) \geq \Omega_1(B)$  para todo  $B \in \mathcal{S}_p(G)$ .

También podemos deducir cómo se comporta la contractibilidad de  $\mathcal{A}_p(G)$  cuando es un retracto de  $\mathcal{S}_p(G)$ .

**Corolario 3.2.10.** Si  $\mathcal{A}_p(G) \subset \mathcal{S}_p(G)$  es un retracto y  $\mathcal{S}_p(G)$  es contráctil, entonces  $\mathcal{A}_p(G)$  es contráctil en dos pasos.

*Demostración.* Las hipótesis implican que  $\mathcal{O}_p(G) > 1$  y que existe un retracto  $r : \mathcal{S}_p(G) \rightarrow \mathcal{A}_p(G)$ . Sea  $N = r(\mathcal{O}_p(G))$ . Si  $A \in \mathcal{A}_p(G)$  es un maximal, entonces  $A\mathcal{O}_p(G) \in \mathcal{S}_p(G)$  y  $N = r(\mathcal{O}_p(G)) \leq r(A\mathcal{O}_p(G)) \geq r(A) = A$ . De la maximalidad de  $A$  concluimos que  $A = r(A\mathcal{O}_p(G))$ . Luego  $N \leq A$  para todo  $A \in \mathcal{A}_p(G)$  maximal. Del corolario 3.1.15,  $\mathcal{A}_p(G) \sim_2 *$ .  $\square$

**Ejemplo 3.2.11.** Hay muchísimas propiedades de grupos que seguramente nos permitan decidir si  $\mathcal{A}_p(G)$  y  $\mathcal{S}_p(G)$  son homotópicamente equivalentes, contráctiles o no. Un caso bastante particular es el de los grupos nilpotente. Un grupo  $G$  se dice nilpotente si es el producto directo de sus Sylows. Esto equivale a que todo  $p$ -Sylow sea normal (ver por ejemplo [24]). Luego los posets  $\mathcal{A}_p(G)$  y  $\mathcal{S}_p(G)$  son contráctiles para todo  $p$  primo que divida al orden de  $G$ .

Recordemos que todo grupo nilpotente es soluble. Sin embargo, los grupos solubles en general no verifican que  $\mathcal{A}_p(G) \simeq \mathcal{S}_p(G)$  ni mucho menos que alguno de los dos sea contráctil, como de hecho muestra el ejemplo 3.2.7.

Cuando la altura del poset  $\mathcal{A}_p(G)$  es baja, se pueden decir algunas cosas más como muestran las siguientes proposiciones.

**Proposición 3.2.12.** Si  $\mathcal{A}_p(G)$  es un poset de altura 0, entonces es homotópicamente equivalente a  $\mathcal{S}_p(G)$ . En particular,  $\mathcal{S}_p(G)$  tiene el tipo homotópico de un espacio discreto.

*Demostración.* Si  $P \in \text{Syl}_p(G)$ , entonces  $\mathcal{A}_p(P)$  es contráctil (ver corolario 3.1.18), y en particular es conexo. Como  $\mathcal{A}_p(P) \subset \mathcal{A}_p(G)$  y éste es discreto, debe ser que  $\mathcal{A}_p(P)$  consiste de un solo punto. Entonces  $\Omega_1(P) \simeq \mathbb{Z}_p$  es abeliano. Del teorema 3.2.8, la inclusión  $\mathcal{A}_p(G) \subset \mathcal{S}_p(G)$  es un retracto por deformación fuerte.  $\square$

**Proposición 3.2.13.** Si  $\mathcal{A}_p(G)$  tiene altura a lo sumo 1, entonces  $\mathcal{S}_p(G)$  es contráctil si y solo si  $\mathcal{A}_p(G)$  es contráctil.

*Demostración.* Ya sabemos que  $\mathcal{A}_p(G)$  contráctil implica que  $\mathcal{S}_p(G)$  sea contráctil. Recíprocamente, si  $\mathcal{S}_p(G)$  es contráctil, entonces  $\mathcal{A}_p(G)$  es homotópicamente trivial. Como  $\mathcal{A}_p(G)$  es un poset de altura a lo sumo 1, entonces por la proposición 2.1.13 es contráctil.  $\square$

**Corolario 3.2.14.** Si  $m_p(G) = 3$  y  $\mathcal{S}_p(G)$  es contráctil, entonces  $\mathcal{A}_p(G)$  es contráctil.

*Demostración.* El poset  $\mathcal{A}_p(G)$  tiene altura 0, 1 o 2. En los primeros dos casos, la contractibilidad de  $\mathcal{S}_p(G)$  es equivalente a la de  $\mathcal{A}_p(G)$  por la proposición anterior. Si la altura es 2, entonces  $\mathcal{S}_p(G) = \mathcal{A}_p(G)$  pues un  $p$ -toro maximal de  $\mathcal{A}_p(G)$  de rango 3 debe ser un  $p$ -Sylow de  $G$ , ya que por hipótesis  $m_p(G) = 3$ .  $\square$

### 3.3 El subgrupo de Fitting y una equivalencia para la contractibilidad de $\mathcal{S}_p(G)$

En esta sección veremos otra manera de saber si el grupo  $G$  posee un  $p$ -subgrupo normal no trivial, o lo que es equivalente, que  $\mathcal{S}_p(G)$  sea contráctil.

**Definición 3.3.1.** Si  $G$  es un grupo finito, el subgrupo de Fitting es el subgrupo normal nilpotente más grande de  $G$ , y se nota  $F(G)$ .

**Observación 3.3.2.** El centro de  $G$ ,  $Z(G)$  es un grupo abeliano, y en particular es nilpotente. Como es normal, se tiene que  $Z(G) \leq F(G)$ .

**Proposición 3.3.3.** El subgrupo  $F(G)$  es nilpotente y es el producto directo de los subgrupos  $\mathcal{O}_p(G)$  para  $p \mid |G|$  primos. En particular,  $G$  posee un  $p$ -subgrupo normal no trivial si y solo si  $p \mid |F(G)|$ .

*Demostración.* Ver [24].  $\square$

**Observación 3.3.4.** La proposición anterior nos dice que para ver si  $\mathcal{S}_p(G)$  es contráctil, basta con analizar el orden del subgrupo de Fitting.

**Proposición 3.3.5.** Para un grupo finito  $G$  se tiene que  $F(G/Z(G)) = F(G)/Z(G)$

*Demostración.* Ver [24].  $\square$

Sea  $p$  un primo que divide al orden de  $G$ . Entonces  $G$  tiene un  $p$ -subgrupo normal no trivial si y solo si  $p \mid |F(G)|$ . Sean  $Z_0 = 1$ ,  $G_0 = G$ , y para  $n \geq 1$ ,  $Z_n \trianglelefteq G$  tal que  $Z_n/Z_{n-1} = Z(G/Z_{n-1})$  con  $Z_{n-1} \leq Z_n$  (es decir,  $1 = Z_0 \trianglelefteq Z_1 \trianglelefteq Z_2 \trianglelefteq \dots$  es la serie central ascendente de  $G$ ) y  $G_n = G/Z_n$ . Notar que

$$\begin{aligned} G_n &= G/Z_n \simeq (G/Z_{n-1})/(Z_n/Z_{n-1}) = G_{n-1}/Z(G_{n-1}) \\ Z(G_n) &= Z(G/Z_n) = Z_{n+1}/Z_n \end{aligned}$$

De la proposición anterior,

$$F(G_n) = F(G_{n-1}/Z(G_{n-1})) = F(G_{n-1})/Z(G_{n-1})$$

Por lo tanto,  $|F(G)| = |Z(G)||F(G) : Z(G)|$  y

$$\begin{aligned} |F(G_n)| &= |Z(G_n)||F(G_n) : Z(G_n)| \\ &= |Z_{n+1} : Z_n||F(G_n)/Z(G_n)| \\ &= |Z_{n+1}|/|Z_n||F(G_{n+1})| \end{aligned}$$

y así vemos que  $|F(G_n)||Z_n| = |Z_{n+1}||F(G_{n+1})|$  para todo  $n \geq 0$ .

Sea  $m \geq 1$  tal que  $Z_m = Z_{m+1}$ . Entonces  $Z(G_m) = 1$  y si  $m' \geq m$ , inductivamente se llega a que  $Z_{m'} = Z_m$ . Luego

$$F(G_{m+1}) = F(G_m)/Z(G_m) = F(G_m)$$

e inductivamente  $F(G_{m'}) = F(G_m)$  para todo  $m' \geq m$ .

De la fórmula anterior para el orden de  $F(G_n)$ , deducimos que

$$\begin{aligned} |F(G)| &= |Z_1|/|Z_0||F(G_1)| \\ &= |Z_1||Z_2|/|Z_1||F(G_2)| \\ &= |Z_2||Z_3|/|Z_2||F(G_3)| \\ &= \dots \\ &= |Z_{m-1}||Z_m|/|Z_{m-1}||F(G_m)| \\ &= |Z_m||F(G_m)| \end{aligned}$$

donde  $m$  es el mínimo tal que  $Z_m = Z_{m+1}$ . Así,  $Z(G_m) = Z_{m+1}/Z_m = 1$ .

**Lema 3.3.6.** Con la notación anterior,  $|F(G)| = |Z_m||F(G_m)|$  con  $G_m = G/Z_m$  tal que  $Z(G_m) = 1$ .

De este lema obtenemos más equivalencias para probar la contractibilidad de  $\mathcal{S}_p(G)$ .

**Proposición 3.3.7.** Sea  $G$  un grupo finito y sea

$$1 = Z_0 \leq Z(G) = Z_1 \leq Z_2 \leq \dots \leq Z_m$$

la cadena central ascendente de  $G$  donde  $m = \min\{i \geq 0 : Z_i = Z_{i+1}\}$ . Entonces son equivalentes:

1.  $\mathcal{S}_p(G) \simeq *$
2.  $\mathcal{O}_p(G) > 1$
3.  $p \mid |F(G)|$
4.  $p \mid |Z_m| \circ p \mid |F(G_m)|$ , con  $G_m = G/Z_m$  y  $Z(G_m) = 1$

En particular, esta proposición nos dice que si sabemos que  $p \nmid |Z_m|$ , para saber si el poset  $\mathcal{S}_p(G)$  es contráctil basta con estudiar el poset  $\mathcal{S}_p(G_m)$ , el cual corresponde a un grupo sin centro.

### 3.4 Una reducción para el poset $\mathcal{A}_p(G)$

A la hora de estudiar el poset  $\mathcal{A}_p(G)$ , notamos que solo necesitamos conocer los elementos de orden  $p$  de  $G$  y cómo conmutan entre sí. Esto nos dice que si queremos estudiar el tipo homotópico y/o contractibilidad del poset  $\mathcal{A}_p(G)$ , solo necesitamos conocer el subgrupo  $\Omega_1(G)$ . La siguiente proposición deja en claro esto.

**Proposición 3.4.1.** Sea  $G$  un grupo finito y consideremos  $H = \langle x \in G : x^p = 1 \rangle = \Omega_1(G)$ . Entonces valen las siguientes:

1.  $H \text{ char } G$
2.  $\{x \in H : x^p = 1\} = \{x \in G : x^p = 1\}$
3.  $\mathcal{A}_p(H) = \mathcal{A}_p(G)$ . En particular, que  $\mathcal{A}_p(G)$  sea contráctil en  $n$  pasos solo depende de  $H$ .
4.  $\mathcal{S}_p(H) \subset \mathcal{S}_p(G)$  es un retracto por deformación fuerte equivariante. En particular,  $\mathcal{S}_p(H) \simeq *$  si y solo si  $\mathcal{S}_p(G) \simeq *$ .
5.  $\mathcal{O}_p(H) \leq \mathcal{O}_p(G)$ .

*Demostración.* 1. Todo automorfismo de  $G$  manda elementos de orden  $p$  en elementos de orden  $p$ , y por lo tanto manda los generadores de  $H$  en los generadores de  $H$ .

2. La inclusión  $\subset$  es clara. Si  $x \in G$  tiene orden  $p$ , entonces  $x \in \Omega_1(G) = H$ .

3. Tomemos  $A \in \mathcal{A}_p(G)$  y veamos que  $A \leq H$ . Como  $A$  es un  $p$ -grupo elemental abeliano, podemos escribirlo como  $A = \langle x_1, \dots, x_n \rangle$  donde  $x_i^p = 1$ . Así,  $x_i \in \Omega_1(G) = H$  para todo  $i$ , por lo que  $A = \langle x_i : 1 \leq i \leq n \rangle \leq H$ .

4. Como  $H$  es característico en  $G$ , tenemos una acción por conjugación de  $G$  en los subgrupos de  $H$ . Luego si  $i : \mathcal{S}_p(H) \hookrightarrow \mathcal{S}_p(G)$  es la inclusión, entonces  $i$  es  $G$ -equivariante. Sea  $r : \mathcal{S}_p(G) \rightarrow \mathcal{S}_p(H)$  la función  $r(B) = B \cap H$ . Veamos que  $r$  está bien definida. Si  $B \in \mathcal{S}_p(G)$ , entonces existe  $x \in B$  de orden  $p$ . Luego  $x \in B \cap H$  y así  $1 < B \cap H \leq B$ ,  $H$  es un  $p$ -subgrupo no trivial de  $H$ . Es claro que  $r$  es un morfismo de posets  $G$ -equivariante y que  $ri = \text{id}_{\mathcal{S}_p(H)}$  e  $ir \leq \text{id}_{\mathcal{S}_p(G)}$ . En consecuencia,  $\mathcal{S}_p(H) \subset \mathcal{S}_p(G)$  es un retracto por deformación fuerte equivariante.

5. Del primer ítem tenemos que  $H \text{ char } G$ . Como también  $\mathcal{O}_p(H) \text{ char } H$ , se sigue que  $\mathcal{O}_p(H) \text{ char } G$ . Así,  $\mathcal{O}_p(H)$  resulta un  $p$ -subgrupo normal en  $G$  y por lo tanto  $\mathcal{O}_p(H) \leq \mathcal{O}_p(G)$ . □

Esta proposición nos dice que si queremos estudiar el poset  $\mathcal{A}_p(G)$  podemos suponer que  $G = \langle x \in G : x^p = 1 \rangle$  está generado por elementos de orden  $p$ .

**Definición 3.4.2.** Si  $G$  es un grupo y  $p$  es un primo, decimos que  $G$  es  $p$ -generado si  $G = \Omega_1(G)$ .

**Observación 3.4.3.** Si  $p$  no divide al orden de  $G$ , entonces es  $p$ -generado si y solo si  $G = 1$  por el teorema de Cauchy 1.1.10.

Si  $G$  es abeliano, entonces es  $p$ -generado si y solo si es  $p$ -elemental abeliano.

Con esto en mente, analicemos un poco la contractibilidad de  $\mathcal{A}_p(G)$ .

**Proposición 3.4.4.** Supongamos que  $G$  es un grupo  $p$ -generado no trivial. Entonces vale lo siguiente:

1.  $\mathcal{A}_p(G)$  es contráctil en 0 pasos si y solo si  $G \simeq \mathbb{Z}_p$
2.  $\mathcal{A}_p(G)$  es contráctil en 1 paso si y solo si  $G$  es  $p$ -elemental abeliano, o equivalentemente,  $G$  es abeliano.
3.  $\mathcal{A}_p(G)$  es contráctil en 2 pasos si y solo si  $p \mid |Z(G)|$

*Demostración.* 1. De la observación 3.1.12,  $\mathcal{A}_p(G)$  es contráctil en 0 pasos si y solo si posee un único subgrupo de orden  $p$ . Entonces  $G$  posee exactamente  $p - 1$  elementos de orden  $p$ , y todos conmutan entre sí. Es decir,  $\{x \in G : x^p = 1\}$  posee  $p$  elementos y forma un subgrupo de  $G$ . Luego  $G = \Omega_1(G) \simeq \mathbb{Z}_p$ . La recíproca es inmediata.

2. De la observación 3.1.12,  $\mathcal{A}_p(G)$  es contráctil en 1 paso si y solo si posee un máximo o un mínimo. En cualquier caso equivale a decir que posee un único  $p$ -toro maximal. Esto implica que si  $A$  es tal  $p$ -toro maximal, entonces todo elemento de orden  $p$  está en  $A$ . En particular,  $\Omega_1(G) \subset A$  y así,  $G = A$  es  $p$ -elemental abeliano. Por la observación anterior, esto equivale a decir que  $G$  es abeliano. La recíproca es clara.

3. Del corolario 3.1.15,  $\mathcal{A}_p(G)$  es contráctil en 2 pasos si y solo si la intersección de todos los  $p$ -toros maximales de  $\mathcal{A}_p(G)$  es no trivial. Esto equivale a decir que existe un elemento  $x \in G$  de orden  $p$  que está en todos los  $p$ -toros maximales. Para que suceda esto, es necesario y suficiente que tal  $x$  conmute con todo elemento de orden  $p$  de  $G$ , ya que los  $p$ -toros maximales están generados por elementos de orden  $p$ . Es decir, tal  $x$  existe si y solo si  $\Omega_1(G) \subset C_G(x)$ . Como  $G$  es  $p$ -generado, esto equivale a decir que  $G = C_G(x)$ , o sea, que  $x \in Z(G)$ . Luego la intersección de todos los  $p$ -toros maximales es no trivial si y solo existe  $x$  de orden  $p$  en  $Z(G)$ , si y solo si, por el teorema de Cauchy 1.1.10,  $p \mid |Z(G)|$ . □

**Corolario 3.4.5.** Sea  $G$  un grupo finito y sea  $p$  un primo. Entonces  $\mathcal{A}_p(G)$  es contráctil en dos pasos si y solo si  $p \mid |C_G(\Omega_1(G))|$ .

*Demostración.* De la proposición anterior,  $\mathcal{A}_p(G)$  es contráctil en dos pasos si y solo si  $p \mid |Z(\Omega_1(G))| = |\Omega_1(G) \cap C_G(\Omega_1(G))|$ . Luego  $p \mid |C_G(\Omega_1(G))|$  si  $\mathcal{A}_p(G) \sim_2 *$ . Recíprocamente, si  $p \mid |C_G(\Omega_1(G))|$ , entonces por el teorema de Cauchy, existe  $x \in G$  de orden  $p$  tal que  $x \in C_G(\Omega_1(G))$ . En particular,  $x \in \Omega_1(G)$  y así  $x \in \Omega_1(G) \cap C_G(\Omega_1(G)) = Z(\Omega_1(G))$ , por lo que  $p \mid |Z(\Omega_1(G))|$ .  $\square$

### 3.5 El grupo diedral $D_n$

En esta sección haremos un análisis de los posets  $\mathcal{S}_p(G)$  y  $\mathcal{A}_p(G)$  cuando  $G = D_n$  es un grupo diedral, con  $n \geq 1$ . Recordemos que  $D_n$  está presentado como

$$\langle s, t \mid s^2, t^n, stst \rangle$$

Estos grupos poseen las siguientes propiedades:

- Los grupos diedrales quedan caracterizados por ser los grupos no triviales que están generados por dos elementos que al cuadrado son 1. Es decir,  $D_n = \langle s, st \rangle$  y si  $H = \langle a, b \rangle \neq 1$  con  $a^2 = 1 = b^2$ , entonces  $H \simeq D_n$  para un cierto  $n \geq 1$ . En particular, los diedrales son 2-generados.
- $D_n$  es abeliano si y solo si  $n = 1$  o  $2$ .
- Todo subgrupo de un diedral es un diedral o es cíclico. Más aún, todo subgrupo es exactamente uno de los siguientes:
  1.  $\langle t^d \rangle$  con  $d \mid n$  y de índice  $2d$ .
  2.  $\langle t^d, t^i s \rangle$  con  $d \mid n$  y  $0 \leq i \leq d - 1$  de índice  $d$ .

En particular, no hay repetidos en la lista anterior.

- Todo cociente de un diedral es un diedral.

Con estas propiedades, analicemos las estructuras de  $\mathcal{A}_p(D_n)$  y  $\mathcal{S}_p(D_n)$  para  $p$  un primo que divide  $2n = |D_n|$ .

Supongamos que  $p$  es un primo impar. Consideremos  $H = \langle t \rangle$ . Entonces  $H$  es cíclico de orden  $n$  y es normal en  $D_n$ . Como  $p$  es impar, se tiene que  $p \mid n$  y así,  $\text{Syl}_p(D_n) = \text{Syl}_p(H) = \{P\}$  por ser cíclico. De esta manera,  $P \leq H$  es cíclico y es el único  $p$ -Sylow de  $G$ . Luego el poset  $\mathcal{S}_p(D_n)$  es totalmente ordenado de la forma  $\mathbb{Z}_p \leq \mathbb{Z}_{p^2} \leq \dots \leq \mathbb{Z}_{p^r} = P$  y  $\mathcal{A}_p(D_n) = \{\mathbb{Z}_p\}$  consiste de un solo punto. En particular, ambos posets son contráctiles y homotópicamente equivalentes.

Veamos ahora el caso de  $p = 2$ . Tenemos dos situaciones. Si  $n$  es impar, entonces  $m_2(D_n) = 2$  y sus 2-Sylows son isomorfos a  $\mathbb{Z}_2$ . Calculemos la cantidad de 2-Sylows que hay. Todo 2-Sylow debe ser un conjugado del grupo  $\{1, s\}$ , y como  $s$  es el generador,

concluimos que todo 2-Sylow es de la forma  $\{1, gsg^{-1}\}$ , con  $g \in D_n$ . Ahora, todo elemento de  $D_n$  se puede escribir de forma única como  $t^i s^j$  donde  $i = 0, \dots, n-1$  y  $j = 0, 1$ . Luego

$$(t^i s^j) s (t^i s^j)^{-1} = t^i s^j s s^{-j} t^{-i} = t^i s t^{-i} = t^i t^i s = t^{2i} s$$

Por lo tanto, los 2-Sylows son de la forma  $\{1, t^{2i} s\}$  con  $i = 0, \dots, n-1$ . Supongamos que  $0 \leq i, j \leq n-1$  y que  $t^{2i} s = t^{2j} s$ . Entonces  $t^{2(i-j)} = 1$  y por lo tanto  $n \mid 2(i-j)$ . Como  $n$  es impar, deducimos que  $n \mid i-j$ , y como  $-(n-1) \leq i-j \leq (n-1)$ , debe ser que  $i = j$ . Por lo tanto, la cantidad de 2-Sylows es  $n$  y  $\mathcal{A}_2(D_n) = \mathcal{S}_2(D_n)$  es el espacio discretos de  $n$  puntos.

Ahora veamos el caso en que  $n$  es par. Notemos primero lo siguiente. Si  $A \in \mathcal{A}_2(D_n)$ , al ser un subgrupo de un diedral, debe ser cíclico o diedral. En el primer caso debe ser que  $A \simeq \mathbb{Z}_2$ . En el segundo caso, como  $A$  es abeliano y es un diedral, tiene que ser  $A \simeq D_1 \simeq \mathbb{Z}_2$  o  $A \simeq D_2 \simeq \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ . Por lo tanto, el poset  $\mathcal{A}_2(D_n)$  tiene altura a lo sumo 1. De la proposición 3.2.13, el poset  $\mathcal{A}_2(D_n)$  es contráctil si y solo si  $\mathcal{S}_2(D_n)$  es contráctil, si y solo si  $D_n$  posee un 2-subgrupo normal no trivial.

Veamos qué estructura tienen los 2-Sylows en este caso. Como  $n$  es par, un 2-Sylow no puede ser cíclico de la forma  $\langle t^d \rangle$  con  $d \mid n$ , ya que su índice sería  $2d$ , contradiciendo la maximalidad. Luego un 2-Sylow es de la forma  $P = \langle t^d, t^i s \rangle$  con  $d \mid n$  y  $0 \leq i \leq d-1$ , de índice  $d$ . Supongamos que  $n = 2^k m$ , con  $m$  impar y  $k > 0$ . Entonces  $d = m$ . Sea  $r = t^m$  y sea  $s' = t^i s$ . Como  $|t| = 2^k m$ , el orden de  $r$  es  $|r| = 2^k$ . Además  $s'^2 = t^i s t^i s = t^i t^{-i} s s = 1$  y  $s' \neq 1$ . Con esta notación,  $P = \langle r, s' \rangle$  con  $|r| = 2^k$  y  $|s'| = 2$ . Afirmando que  $P \simeq D_{2^k}$ . Como tienen el mismo orden, basta ver que  $s' r s' = r^{-1}$ . En efecto,

$$s' r s' = t^i s t^m t^i s = s t^{-i} t^m t^i s = s t^m s = t^{-m} = r^{-1}$$

Ya tenemos caracterizados todos los 2-Sylows. Como la lista de subgrupos del diedral no contiene repetidos, tenemos un 2-Sylow para cada  $0 \leq i \leq m-1$ . Es decir, la cantidad de 2-Sylows es  $m = n/2^k = |D_n|_{2'}$ .

Tomemos un 2-Sylow  $P = \langle r, s' \rangle$  con  $|r| = 2^k$  y  $|s'| = 2$ . Si  $k = 1$ , entonces  $P \simeq D_2 \simeq \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ . En este caso,  $\mathcal{A}_2(D_n) = \mathcal{S}_2(D_n)$ . Supongamos entonces que  $k > 1$  y sea  $A = \langle r^d, s' \rangle$  con  $d = 2^{k-2}$ . Este grupo tiene índice  $2^{k-2}$  en  $P$  y es cíclico o diedral. Luego  $A \simeq \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ . En cualquier caso,  $\mathcal{A}_2(D_n)$  tiene altura exactamente 1.

Por último, calculemos la intersección de todos los 2-Sylows cuando  $n$  es par. Como antes, escribamos  $n = 2^k m$  con  $m$  impar y  $k > 0$ . Buscamos entonces un 2-subgrupo normal maximal. Sea  $N = \langle t^m \rangle$ . Este grupo cíclico tiene orden  $2^k$  y es normal en  $D_n$ . Además, como los 2-Sylows tienen orden  $2^{k+1}$ , se sigue que o bien hay un único 2-Sylow, y en tal caso  $m = 1$ , o bien hay al menos dos distintos y  $N$  es el 2-subgrupo normal más grande.

En resumen, hemos probado el siguiente teorema:

**Teorema 3.5.1.** *El grupo diedral  $D_n = \langle t, s | t^n, s^2, stst \rangle$ , con  $n \geq 1$ , cumple lo siguiente:*

1. *Para  $p$  primo impar, los  $p$ -Sylows son normales y cíclicos de la forma  $\langle t^{n/p} \rangle$ , por lo que  $\mathcal{S}_p(D_n)$  posee un orden lineal,  $\mathcal{A}_p(D_n)$  consiste de un solo un punto y ambos posets son contráctiles. En particular, son homotópicamente equivalentes.*

2. Para  $p = 2$ , si  $n = 2^k m$  con  $m$  impar y  $k \geq 0$ , la cantidad de 2-Sylows es  $m$  y son isomorfos a  $D_{2^k}$ .

3. Si  $n = 2^k m$  con  $m$  impar y  $k \geq 0$ , entonces

$$\mathcal{O}_2(D_n) = \begin{cases} \{1, s\} \simeq \mathbb{Z}_2 & m = 1, k = 0 \\ D_n = D_{2^k} & m = 1, k > 0 \\ \langle t^m \rangle \simeq \mathbb{Z}_{2^k} & m \neq 1, k > 0 \\ 1 & m \neq 1, k = 0 \end{cases}$$

4.  $\mathcal{A}_2(D_n)$  tiene altura 0 si  $n$  es impar y altura 1 si  $n$  es par.

5.  $\mathcal{A}_2(D_n) = \mathcal{S}_2(D_n)$  si y solo si  $n = 2^k m$ , con  $m$  impar y  $k = 0, 1$ .

6. Si  $n$  es impar,  $\mathcal{S}_2(D_n)$  es el espacio discreto de  $n$  puntos.

7.  $\mathcal{A}_2(D_n)$  es contráctil si y solo si  $\mathcal{S}_2(D_n)$  es contráctil, si y solo si  $n$  es par o 1

De lo anterior, se deduce fácilmente que  $\mathcal{A}_2(D_n)$  y  $\mathcal{S}_2(D_n)$  son homotópicamente equivalentes: si  $n$  es par ambos son contráctiles por el ítem 6, y si  $n$  es impar los posets son iguales por el ítem 5.

**Corolario 3.5.2.** Para los grupos diedrales  $D_n$ , los posets  $\mathcal{A}_p(D_n)$  y  $\mathcal{S}_p(D_n)$  son homotópicamente equivalentes para todo  $p$  primo. Más aún,  $\mathcal{S}_p(D_n)$  es contráctil si y solo si  $p$  es impar o  $p = 2$  y  $n$  es par o 1, y en tal caso vale que:

- Si  $p$  es impar o  $p = 2$  y  $n = 1$  entonces  $\mathcal{A}_p(D_n) \sim_0 *$
- Si  $p = 2$  y  $n$  es par entonces  $\mathcal{A}_p(D_n) \sim_2 *$

*Demostración.* Si  $p$  es impar, entonces  $\mathcal{A}_p(D_n) = \{*\}$  consiste de un solo punto y es contráctil en 0 pasos. Si  $p = 2$ , entonces  $n$  es par o es 1. Si  $n = 1$ , entonces  $D_n = \mathbb{Z}_2$  y  $\mathcal{A}_2(\mathbb{Z}_2) = \{*\}$  es contráctil en 0 pasos. Si  $n$  es par entonces  $t^{n/2} \in Z(D_n)$  es un elemento central de orden 2. De la proposición 3.4.4,  $\mathcal{A}_2(D_n)$  es contráctil en dos pasos.  $\square$

La clave en este ejemplo para poder decir que  $\mathcal{A}_p(D_n)$  es contráctil si y solo si  $\mathcal{S}_p(D_n)$  es contráctil para cualquier primo  $p$  que divide a  $|D_n|$ , es que teníamos una caracterización precisa de los subgrupos. Esto último puede probarse con herramientas básicas de álgebra.

El contraejemplo dado por Stong para probar que en general  $\mathcal{A}_p(G)$  y  $\mathcal{S}_p(G)$  no son homotópicamente equivalentes también se basa en la descripción de los 2-subgrupos (que resultan ser subgrupos de diedrales) del grupo  $G$  que considera.

Para grupos generales, no podemos hacer esto siempre, y caracterizar los subgrupos para poder decidir sobre el tipo homotópico de los posets de subgrupos no parece ser la manera más efectiva. Sin embargo, los trabajos de M. Aschbacher y S. Smith sobre la conjetura (ver por ejemplo [3]), se basan principalmente en la clasificación de grupos simples finitos. Mediante una serie de reducciones logran llegar a determinados grupos simples de los cuales sí conocen su estructura. Por lo tanto, en el fondo, parece que esta complicación es ineludible. Destacamos que el artículo [3] de Aschbacher y Smith es el trabajo que más avanzó sobre la conjetura original de Quillen.

### 3.6 Grupos de orden $p^\alpha q$

Un caso curioso que surge de buscar contraejemplos de órdenes bajos para los que  $\mathcal{S}_p(G)$  y  $\mathcal{A}_p(G)$  no son homotópicamente equivalentes, es cuando el orden del grupo es de la forma  $p^\alpha q$ , donde  $p$  y  $q$  son primos distintos. En esta sección nos dedicaremos a analizar qué sucede con el tipo homotópico de estos dos posets cuando el orden del grupo es de esta forma.

Sea  $G$  un grupo finito de orden  $p^\alpha q$  donde  $p$  y  $q$  son primos distintos. La cantidad  $n_p$  de  $p$ -Sylows de  $G$  verifica que  $p \mid n_p - 1$  y  $n_p \mid q$ . Luego  $n_p = 1$  o  $q$ . Si  $n_p = 1$ , entonces  $G$  posee un único  $p$ -Sylow  $P$  y los posets  $\mathcal{A}_p(G) = \mathcal{A}_p(P)$ ,  $\mathcal{S}_p(G) = \mathcal{S}_p(P)$  son contráctiles. Supongamos entonces que  $n_p = q$ . Si la intersección de cualesquiera dos  $p$ -Sylows distintos es trivial y  $\{P_1, \dots, P_q\} = \text{Syl}_p(G)$ , entonces

$$\mathcal{S}_p(G) = \prod_{i=1}^q \mathcal{S}_p(P_i) \simeq \prod_{i=1}^q * \simeq \prod_{i=1}^q \mathcal{A}_p(P_i) = \mathcal{A}_p(G)$$

Si existen dos  $p$ -Sylows distintos con intersección no trivial, siguiendo las ideas de la demostración de [24, Theorem 1.36], si tomamos  $D = P_i \cap P_j$ , con  $i \neq j$  de orden maximal, entonces  $D = \mathcal{O}_p(G)$ . Además, si  $P$  y  $P'$  son dos  $p$ -Sylows distintos cualesquiera, entonces  $D = \mathcal{O}_p(G) \leq \bigcap_{i=1}^q P_i \leq P \cap P'$ , y como  $D$  lo tomamos de orden maximal, vale que  $D = P \cap P'$ . Por hipótesis,  $\mathcal{O}_p(G) > 1$ , y por lo tanto  $\mathcal{S}_p(G)$  es contráctil.

En definitiva, para grupos  $|G| = p^\alpha q$  se tiene que  $\mathcal{S}_p(G)$  es homotópicamente equivalente a un espacio discreto.

Veamos que  $\mathcal{S}_p(G) \simeq \mathcal{A}_p(G)$ . Del análisis anterior, basta ver el caso en que  $\mathcal{O}_p(G) = P \cap P' > 1$  es la intersección no trivial de dos  $p$ -Sylows distintos. Sea  $H = \Omega_1(G)$ . De la proposición 3.4.1,  $\mathcal{A}_p(G) = \mathcal{A}_p(H)$  y  $\mathcal{O}_p(H) > 1$ . Notemos que  $|H| = p^\beta q^i$ , con  $1 \leq \beta \leq \alpha$  y  $0 \leq i \leq 1$ . Si la cantidad de  $p$ -Sylows en  $H$  es 1, entonces  $\mathcal{A}_p(G) = \mathcal{A}_p(H)$  es contráctil en dos pasos (ver corolario 3.1.18). En caso contrario, el orden de  $H$  tiene que ser  $p^\beta q$  y la cantidad de  $p$ -Sylows debe ser exactamente  $q$ . Luego  $H$  es un grupo de orden  $p^\beta q$ , con  $\mathcal{O}_p(H) > 1$  y con más de un  $p$ -Sylow. Esto nos permite suponer que  $G = \Omega_1(G)$  es  $p$ -generado.

Supongamos que  $\mathcal{A}_p(G)$  no es contráctil, con  $\mathcal{O}_p(G) > 1$  y  $G = \Omega_1(G)$ .

Fijemos  $Q \leq G$  un  $q$ -subgrupo de Sylow de  $G$ . Entonces  $Q \simeq \mathbb{Z}_q$  es cíclico de orden  $q$ .

Recordemos que los  $p$ -Sylows no son normales en  $G$  ya que estamos suponiendo que  $n_p = q > 1$ .

Como estamos suponiendo que  $\mathcal{A}_p(G)$  no es contráctil, en particular no es contráctil en dos pasos. De la proposición 3.4.4, deducimos que  $p \nmid |Z(G)|$ . Luego  $|Z(G)| = 1$  o  $q$ .

Veamos que  $Q$  no puede ser normal en  $G$ . En caso contrario,  $G = PQ$  es el producto semidirecto de  $Q$  por  $P$ . Como  $\mathcal{O}_p(G) > 1$ , tomemos  $1 < N \leq G$  un  $p$ -subgrupo normal minimal. Afirmando que  $N \leq Z(G)$ :

- $Q \leq C_G(N)$ : pues  $Q$  y  $N$  tienen órdenes coprimos y ambos son normales.
- $N \leq P$  es un subgrupo normal minimal: como  $N$  es normal en  $G$ , está contenido en todo  $p$ -Sylow, y así  $N \leq P$ . Veamos que es normal minimal en  $P$ . Si  $1 < L \leq N$  y  $L$  es normal en  $P$ , veamos que  $L$  es normal en  $G$ . Si  $g \in G$ , entonces  $g = g_1 g_2$  con

$g_1 \in P$  y  $g_2 \in Q$ . Luego  $L^g = L^{g_1 g_2} = (L^{g_1})^{g_2} = L^{g_2}$  por ser  $g_1 \in P = N_P(L)$ . Como  $Q \leq C_G(N) \leq C_G(L) \leq N_G(L)$ , concluimos que  $L^{g_2} = L$ . Luego  $L \trianglelefteq PQ = G$ . De la minimalidad de  $N$  debe ser que  $L = N$ .

- De la proposición 1.1.14,  $N \leq Z(P)$ , o equivalente,  $P \leq C_G(N)$ .
- $N \leq Z(G)$ : como  $Q, P \leq C_G(N)$ , su producto  $G = PQ \leq C_G(N)$ . Es decir, todo elemento de  $N$  conmuta con todo elemento de  $G$ . Luego  $N \leq Z(G)$ .

Esto último es absurdo ya que  $1 < N \leq Z(G)$  es un  $p$ -grupo y asumimos que  $p \nmid |Z(G)|$ .

Por lo tanto  $Q$  no es normal en  $G$ , y así  $\mathcal{O}_{p'}(G) = 1$ . Estamos en las hipótesis del lema de Hall-Higman (ver teorema 1.1.28), y entonces  $\mathcal{O}_p(G) \supset C_G(\mathcal{O}_p(G))$ . Es decir,  $\mathcal{O}_p(G)$  es auto-centralizante.

Sea  $\mathcal{P} = \{\bigcap_{i=1}^s A_i : A_i \in \mathcal{A}_p(G) \text{ maximales con } \bigcap_{i=1}^s A_i > 1\}$ . Sea  $r : \mathcal{A}_p(G) \rightarrow \mathcal{P}$  el morfismo definido por

$$r(A) = \bigcap \{B \in \mathcal{A}_p(G) : B \text{ maximal tal que } A \leq B\}$$

Recordemos que  $r(A) \geq A$  para todo  $A \in \mathcal{A}_p(G)$ . Veamos que para cada  $A \in \mathcal{P}$ , el subgrupo  $A \cap \mathcal{O}_p(G)$  es no trivial. Si  $A \in \mathcal{P}$ , entonces existen maximales  $A_1, \dots, A_s \in \mathcal{A}_p(G)$  tales que  $A = \bigcap_{i=1}^s A_i$ . Si existen dos índices  $1 \leq i, j \leq s$ , no necesariamente distintos, tales que  $A_i \subset P_1$  y  $A_j \subset P_2$ , donde  $P_1$  y  $P_2$  son dos  $p$ -Sylows distintos, entonces  $A = \bigcap_k A_k \leq A_i \cap A_j \leq P_1 \cap P_2 = \mathcal{O}_p(G)$ . Luego  $A \cap \mathcal{O}_p(G) = A > 1$ . Queda por ver entonces el caso en que existe un  $p$ -Sylow  $P$  tal que  $A_i \leq P$  para todo  $i$ . En tal situación, como  $A$  es intersección de algunos maximales de  $\mathcal{A}_p(P)$ , si llamamos  $B$  a la intersección de todos los maximales de  $\mathcal{A}_p(P)$  entonces  $B > 1$  (ver corolario 3.1.18) y  $B \leq A$ . Esto nos dice que es necesario y suficiente ver que  $B \cap \mathcal{O}_p(G) > 1$ . Ahora, si  $g \in Z(P)$  es un elemento de orden  $p$ , entonces  $g$  conmuta con todo elemento de  $P$ . Como  $\mathcal{O}_p(G) \leq P$ , en particular  $g$  conmuta con todo elemento de  $\mathcal{O}_p(G)$ , es decir,  $g \in C_G(\mathcal{O}_p(G))$ . Por lo que vimos antes,  $\mathcal{O}_p(G)$  se auto-centraliza, o sea,  $C_G(\mathcal{O}_p(G)) \leq \mathcal{O}_p(G)$ , y así  $g \in \mathcal{O}_p(G)$ . Esto nos dice que todo elemento de orden  $p$  de  $Z(P)$  está contenido en  $\mathcal{O}_p(G)$ . Por último, como  $P$  es un  $p$ -grupo, se tiene que

$$1 < \Omega_1(Z(P)) \leq B \cap \mathcal{O}_p(G)$$

ya que  $\Omega_1(Z(P))$  está contenido en todos los maximales de  $\mathcal{A}_p(P)$  (ver demostración de la proposición 2.1.3).

Hemos probado entonces que si  $A$  es una intersección no trivial de maximales de  $\mathcal{A}_p(G)$  entonces  $A \cap \mathcal{O}_p(G) > 1$ . En particular,  $A \cap \mathcal{O}_p(G) \in \mathcal{A}_p(\mathcal{O}_p(G))$ . Consideremos ahora la función  $f : \mathcal{A}_p(G) \rightarrow \mathcal{A}_p(\mathcal{O}_p(G))$  definida por  $f(A) = r(A) \cap \mathcal{O}_p(G)$ . Por lo que demostramos recién,  $f$  está bien definida. Además, como  $r$  es un morfismo de posets, esta función  $f$  es un morfismo de posets. Sea  $i : \mathcal{A}_p(\mathcal{O}_p(G)) \hookrightarrow \mathcal{A}_p(G)$  la inclusión. Entonces

$$ir(A) = r(A) \cap \mathcal{O}_p(G) \leq r(A) \geq A$$

$$ri(A) = r(A) \cap \mathcal{O}_p(G) \geq A \cap \mathcal{O}_p(G) = A$$

Luego  $r$  es una equivalencia homotópica. Como  $\mathcal{A}_p(\mathcal{O}_p(G))$  es contráctil al ser  $\mathcal{O}_p(G)$  un  $p$ -grupo no trivial, concluimos que  $\mathcal{A}_p(G)$  es contráctil. Esto es absurdo.

En conclusión, vimos que  $\mathcal{A}_p(G)$  y  $\mathcal{S}_p(G)$  son homotópicamente equivalentes y que son homotópicos a espacios discretos.

**Teorema 3.6.1.** *Sea  $G$  un grupo de orden  $p^\alpha q$ , donde  $p$  y  $q$  son primos distintos. Entonces*

1. *La cantidad de  $p$ -Sylows es 1 o  $q$ .*
2. *Los posets  $\mathcal{S}_p(G)$  y  $\mathcal{A}_p(G)$  son homotópicamente equivalentes.*
3. *El poset  $\mathcal{S}_p(G)$  es contráctil si y solo si  $G$  posee un único  $p$ -Sylow o bien existen dos  $p$ -Sylows distintos que se intersecan de manera no trivial.*
4. *Si  $G$  posee un único  $q$ -Sylow  $Q$ , entonces  $G \simeq Q \rtimes P$ , con  $P$  un  $p$ -Sylow de  $G$  y, o bien  $\mathcal{S}_p(G)$  no es contráctil, o  $\mathcal{A}_p(G)$  es contráctil en dos pasos.*
5. *Si la cantidad de  $p$ -Sylows es  $q$  y  $\mathcal{S}_p(G)$  no es contráctil, entonces  $p^\alpha \mid q - 1$ . Más aún,  $\mathcal{S}_p(G)$  es homotópico a un poset discreto y la cantidad de  $q$ -Sylows es 1.*

*Demostración.* Lo único que falta demostrar es el último ítem, ya que el resto se deduce del razonamiento anterior.

Vimos que  $\mathcal{S}_p(G)$  no es contráctil si y solo si la cantidad de  $p$ -Sylows es  $q$  y dos distintos se intersecan de manera trivial. En tal caso,  $\mathcal{S}_p(G) = \coprod_{i=1}^q \mathcal{S}_p(P_i)$  es la unión disjunta de posets contráctiles, por lo que  $\mathcal{S}_p(G)$  es homotópico a un espacio discreto. Además, como la cantidad de  $p$ -Sylows es  $q$  y dos de ellos se intersecan de manera trivial, la cantidad de elementos no triviales de  $p$ -torsión de  $G$  es  $(p^\alpha - 1)q = p^\alpha q - q$ , lo cual nos deja lugar a solo  $q$  elementos más que no sean de  $p$ -torsión en  $G$ . Como hay al menos un  $q$ -Sylow, este me aporta  $q$  elementos, y por cantidad, no puede haber más elementos. Por lo tanto hay exactamente un  $q$ -Sylow en  $G$ . Es decir, si  $\mathcal{S}_p(G)$  no es contráctil, entonces  $G$  posee un único  $q$ -Sylow.

De [24, Theorem 1.16], tenemos que  $n_p \equiv 1 \pmod{|S : S \cap T|}$ , donde  $S, T$  son dos  $p$ -Sylows distintos tales que  $|S \cap T|$  es maximal. Como estamos suponiendo que dos  $p$ -Sylows distintos se intersecan siempre de manera trivial, si  $S \neq T$  son dos  $p$ -Sylows, entonces  $|S : S \cap T| = |S : 1| = |S| = p^\alpha$ . Luego  $q = n_p \equiv 1 \pmod{p^\alpha}$ . Es decir,  $p^\alpha \mid q - 1$ . Esto nos dice que si queremos encontrar un grupo de orden  $p^\alpha q$  con  $\mathcal{S}_p(G)$  no contráctil, debemos pedir al menos que  $p^\alpha \mid q - 1$ .  $\square$

La proposición a continuación nos asegura la existencia de grupos  $G$  de orden  $p^\alpha q$  para los cuales  $\mathcal{S}_p(G)$  no es contráctil. Del teorema anterior, una condición necesaria es que  $p^\alpha$  divida a  $q - 1$ . Veamos que esto también es suficiente.

**Proposición 3.6.2.** *Consideremos el número  $n = p^\alpha q$ , donde  $p$  y  $q$  son primos distintos y  $p^\alpha$  divide a  $q - 1$ . Entonces existe un único producto semidirecto, salvo isomorfismos,  $G = \mathbb{Z}_q \rtimes \mathbb{Z}_{p^\alpha}$  tal que  $\mathcal{S}_p(G)$  no es contráctil.*

*Demostración.* Supongamos que  $G = \mathbb{Z}_q \rtimes \mathbb{Z}_{p^\alpha}$  es un producto semidirecto con  $\mathcal{S}_p(G)$  no contráctil. Veamos que la acción de  $\mathbb{Z}_{p^\alpha}$  en  $\mathbb{Z}_q$  debe ser fiel. Como los  $p$ -Sylows son

abelianos, si  $g \in \mathbb{Z}_{p^\alpha}$  actúa trivialmente en  $\mathbb{Z}_q$ , entonces  $g$  conmuta con todo elemento de  $\mathbb{Z}_{p^\alpha}$  y con todo elemento de  $\mathbb{Z}_q$ . En particular,  $g \in Z(G) \leq C_G(\Omega_1(G))$ . Del teorema anterior,  $\mathcal{A}_p(G)$  no es contráctil, y del corolario 3.4.5 debe ser que  $g = 1$ . Así,  $C_{\mathbb{Z}_{p^\alpha}}(\mathbb{Z}_q) = 1$ . Esto nos dice que la acción es fiel. Ahora, la acción está representada por un morfismo de grupos  $\varphi : \mathbb{Z}_{p^\alpha} \rightarrow \text{Aut}(\mathbb{Z}_q) \simeq \mathbb{Z}_q^*$ , donde el isomorfismo con el grupo de unidades consiste en enviar un automorfismo  $\phi$  a  $\phi(b)$ , con  $b$  un generador del grupo cíclico  $\mathbb{Z}_q$ . Como la acción es fiel, el morfismo  $\varphi$  debe ser un monomorfismo. Además,  $\text{Aut}(\mathbb{Z}_q) \simeq \mathbb{Z}_{q-1}$  es cíclico de orden  $q-1$ , por lo que posee un único subgrupo de orden  $p^\alpha$ . De esta manera se puede probar que todos los productos semidirectos de  $\mathbb{Z}_q$  por  $\mathbb{Z}_{p^\alpha}$  que provienen de una acción fiel son isomorfos, lo cual nos da exactamente 1 grupo, salvo isomorfismo, con esta propiedad.

Finalmente, veamos que efectivamente dos  $p$ -Sylows distintos de  $G$  se intersecan trivialmente. Sea  $A = \mathbb{Z}_{p^\alpha}$  y sea  $B = \mathbb{Z}_q$ . Supongamos que  $A = \langle a \rangle$  y que  $B = \langle b \rangle$ . Basta ver que  $A^b \cap A = 1$  ya que todo  $p$ -Sylow distinto de  $A$  es de la forma  $A^{b^i}$ , y cambiando  $b$  por una potencia  $b^i$  con  $0 < i < q$  nos da otro generador de  $B$ . Si  $x \in A^b \cap A$ , entonces  $x = b^{-1}(a^i)b = a^j$ , con  $0 \leq i, j < p^\alpha$ . Sin pérdida de generalidad supongamos que  $j \geq i$ . Entonces  $b^{-1}a^i b a^{-i} = a^{j-i} \in A$ . Como  $B$  es normal en  $G$ ,  $a^{j-i} = b^{-1}(a^i b a^{-i}) \in B$ . Es decir,  $a^{j-i} \in A \cap B$ . Como  $A \cap B = 1$  por ser de órdenes coprimos, deducimos que  $a^{j-i} = 1$ , y así  $j = i$ . Entonces  $(a^i)^b = a^i$ . Esto nos dice que  $a^i$  conmuta con  $b$ , y como  $b$  es un generador de  $B$ ,  $a^i$  conmuta con todo elemento de  $B$ . En consecuencia, como la acción de  $A$  en  $B$  es fiel, debe ser que  $a^i = 1$ , y por lo tanto  $x = 1$ .  $\square$

**Ejemplo 3.6.3.** El grupo  $G = \mathbb{Z}_{17} \rtimes \mathbb{Z}_{16}$  con id [272,50] en la tabla de SmallGroups de GAP es el único grupo de orden  $272 = 2^4 * 17 = 16 * 17$  tal que  $\mathcal{S}_2(G)$  no es contráctil.

**Observación 3.6.4.** Veamos un poco qué sucede cuando  $q-1 = p^\alpha$ . Esta condición nos dice que  $p < q$  y que  $p$  es par y  $q$  es impar. Luego los ejemplos  $q-1 = p^\alpha$ , como el anterior, tienen que ser de la forma  $2^\alpha(2^\alpha + 1)$ , con  $2^\alpha + 1$  un número primo. Esto está relacionado con los denominados primos de Fermat, que son números primos de la forma  $2^{2^\alpha} + 1$ . De hecho, se puede demostrar que si  $2^\alpha + 1$ , con  $\alpha > 0$ , es un número primo, entonces  $\alpha$  es una potencia de 2.

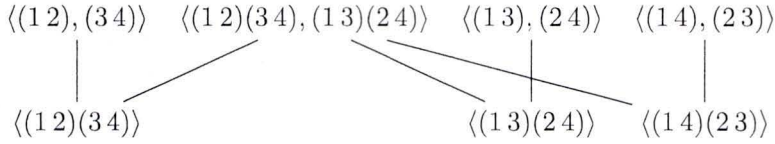
Veamos un ejemplo de  $|G| = p^\alpha q$  donde  $\mathcal{S}_p(G)$  no es contráctil y  $p$  no es par.

**Ejemplo 3.6.5.** El grupo  $G = \mathbb{Z}_{109} \rtimes \mathbb{Z}_{27}$  con id [2943,16] en la tabla de SmallGroups de GAP, es el único grupo de orden  $2943 = 3^3 * 109 = 27 * (108 + 1) = 27 * (4 * 27 + 1)$  tal que  $\mathcal{S}_3(G)$  no es contráctil.

**Observación 3.6.6.** En la demostración del teorema 3.6.1 en un momento supusimos que el grupo  $G$  era  $p$ -generado y que  $\mathcal{A}_p(G)$  no era contráctil en dos pasos. Es decir, que  $p \nmid |Z(G)|$ . Uno podría preguntarse si esto en realidad sucede. A continuación damos varios ejemplos de grupos de órdenes  $p^\alpha q$  donde  $G = \Omega_1(G)$  y  $\mathcal{A}_p(G)$  es contráctil en más de dos pasos.

**Ejemplo 3.6.7.** El grupo  $G = \mathbb{S}_4$  de orden  $24 = 2^3 * 3$ , con id [24,12] en la tabla de SmallGroups de GAP con el primo  $p = 2$  posee  $\mathcal{A}_p(G)$  contráctil en más de dos pasos y de altura 1. Como  $G$  es un grupo simétrico, está generado por transposiciones. Es decir,

$G$  es 2-generado. De hecho, el poset  $\mathcal{A}_2(\mathbb{S}_4)$  se puede describir explícitamente y ver que el subgrupo  $N = \{(1\ 2)(3\ 4), (1\ 3)(2\ 4), (1\ 4)(2\ 3), 1\}$  nos da la contractibilidad en tres pasos según la proposición 3.1.17. Esto es porque el poset de las intersecciones no triviales de los maximales de  $\mathcal{A}_2(\mathbb{S}_4)$  es



### 3.7 Algunos contraejemplos

**Ejemplo 3.7.1.** El grupo  $G = \mathbb{S}_3 \wr \mathbb{Z}_2$  de orden  $72 = 2^3 * 3^2$ , con id [72, 40] en la tabla de SmallGroups de GAP con el primo  $p = 2$ , es el primer grupo tal que  $\mathcal{S}_p(G)$  y  $\mathcal{A}_p(G)$  no son homotópicos. Se tiene que  $|core(\mathcal{S}_p(G))| = 21$  y  $|core(\mathcal{A}_p(G))| = 39$ . Este grupo es el producto wreath de  $\mathbb{S}_3$  con  $\mathbb{Z}_2$ , donde  $\mathbb{Z}_2$  actúa sobre sí mismo con la acción regular. En otras palabras,  $G = (\mathbb{S}_3 \times \mathbb{S}_3) \rtimes \mathbb{Z}_2$  donde la acción de  $\mathbb{Z}_2$  es permutar las coordenadas. Los  $p$ -Sylows son de orden 8 y uno de ellos es de la forma

$$\langle\langle(1\ 2)\rangle\rangle \times \langle(1\ 2)\rangle \times \mathbb{Z}_2 \simeq (\mathbb{Z}_2 \otimes \mathbb{Z}_2) \times \mathbb{Z}_2 \simeq D_4$$

Es fácil ver que la cantidad de 2-Sylows es 9, y que la cantidad de 2-toros maximales es 18. Además, estos no son todos conjugados entre sí.

El siguiente grupo tal que  $\mathcal{S}_p(G) \not\simeq \mathcal{A}_p(G)$  es  $\mathbb{S}_5$ , que es el contraejemplo que dio Stong. En este caso, para  $p = 2$ , se tiene que  $|core(\mathcal{S}_p(G))| = 30$  y  $|core(\mathcal{A}_p(G))| = 45$ .

Veamos cómo aplicar la teoría desarrollada en las secciones anteriores para demostrar de forma analítica que no existe un grupo de orden menor a 72 tal que su  $\mathcal{A}_p(G)$  y  $\mathcal{S}_p(G)$  no sean homotópicamente equivalentes.

**Proposición 3.7.2.** Si  $G$  es un grupo de orden  $1 \leq n < 72$  y  $p$  es un primo, entonces  $\mathcal{A}_p(G)$  y  $\mathcal{S}_p(G)$  son homotópicamente equivalentes.

*Demostración.* Básicamente lo que tenemos que hacer es descartar casos. Sea  $1 \leq n < 72$  y sea  $G$  un grupo de orden  $n$ . Tenemos que ver que  $\mathcal{A}_p(G)$  y  $\mathcal{S}_p(G)$  son homotópicamente equivalentes, para  $p$  un primo. Si  $p$  no divide a  $n$ , ambos posets resultan vacíos y no hay nada más que decir. Supongamos que  $n = p^\alpha m$ , con  $p$  y  $m$  coprimos y  $\alpha \geq 1$ . Si  $\alpha = 1$  o  $2$ , los  $p$ -Sylows tienen orden  $p$  o  $p^2$ . En ambos casos resultan abelianos, y por lo tanto de la proposición 3.2.1, los posets son homotópicamente equivalentes. Si  $\alpha \geq 3$ , entonces  $2^3 * 3^2 = 72 > n = p^\alpha * m \geq 2^3 * m$  implica que  $1 \leq m < 9$ . Es decir,  $m \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ . Si  $m = 1$  entonces  $n = p^\alpha$  es un  $p$ -grupo y no hay nada más que decir. Si  $m$  es primo, como  $p$  y  $m$  son coprimos, del caso  $p^\alpha q$  deducimos que  $\mathcal{A}_p(G)$  y  $\mathcal{S}_p(G)$  son homotópicamente equivalentes. Resta ver entonces los casos  $m = 4, 6, 8$ . Si  $m = 4$  u  $8$ , como  $p$  es coprimo con  $m$ , debe ser que  $p \geq 3$ , y así

$$n = p^\alpha m \geq p^3 m \geq 3^3 m = 27m \geq 27 * 4 = 108 > 72$$

Esto es absurdo, asique  $m$  no es ni 4 ni 8. Análogamente  $m$  no puede ser 6. □

Sabemos que la contractibilidad de  $\mathcal{A}_p(G)$  implica la de  $\mathcal{S}_p(G)$ . Esto lo prueba Stong en [32]. Luego se pregunta si valdrá la vuelta. A continuación, damos un contraejemplo de la recíproca que encontramos con el programa SageMath.

**Ejemplo 3.7.3.** Sea  $G$  el subgrupo de  $\mathbb{S}_8$  generado por las permutaciones  $(1\ 2\ 8\ 3)(4\ 7)$  y  $(1\ 6\ 3\ 7\ 8\ 5)(2\ 4)$ . El orden de este subgrupo es  $576 = 64 * 9 = 2^6 * 3^2$ . Utilizando SageMath, obtuvimos las siguientes propiedades:

- Su id en la tabla de SmallGroups de GAP es [576, 8654] y es isomorfo a

$$((\mathbb{A}_4 \times \mathbb{A}_4) \rtimes \mathbb{Z}_2) \rtimes \mathbb{Z}_2$$

- La cantidad de 2-Sylows es 9 y  $\mathcal{O}_2(G)$  es un subgrupo de orden 16, por lo que  $\mathcal{S}_2(G)$  es contráctil.
- Es un grupo 2-generado.
- El poset  $\mathcal{A}_2(G)$  posee 297 elementos maximales. El orden de la intersección de todos los 2-toros maximales es 1, contiene un 2-toro maximal que es normal en  $G$  pero su core tiene 100 elementos, por lo cual no es contráctil.
- Siendo  $|G| = p^a q^b$  para  $p, q$  primos distintos, del teorema de Burnside,  $G$  es un grupo soluble.
- El grupo  $G$  no es un subgrupo de  $\mathbb{S}_7$  pues  $2^6$  no divide a  $7! = 2^4 * 3^2 * 5 * 7$ .
- Todo subgrupo de  $\mathbb{S}_7$  verifica la recíproca (usando SageMath). Luego  $\mathbb{S}_8$  es el grupo simétrico más chico que contiene un contraejemplo.
- Todo subgrupo propio de  $G$  verifica la recíproca.
- No es nilpotente (ver ejemplo 3.2.11)
- $F(G) = \langle (4, 5)(6, 7), (4, 7)(5, 6), (1, 2)(3, 8), (1, 3)(2, 8) \rangle$  es de orden 16. Es decir,  $F(G) = \mathcal{O}_2(G)$ , por lo que  $\mathcal{O}_{2'}(G) = 1$ . Como  $G$  es soluble,  $C_G(F(G)) \leq F(G)$ , es decir, el subgrupo de Fitting se auto-centraliza (ver [24]). En este caso,  $\mathcal{O}_2(G)$  se auto-centraliza.
- Del ítem anterior deducimos que  $Z(G) = 1$  pues  $Z(G) \leq F(G)$  debe ser un  $2'$ -grupo.
- Presentación finita de  $G$ :

$$\langle a, b \mid a^4, b^6, a^2 b a^{-1} b^{-1} a^{-2} b a b^{-1}, a^{-1} b a^{-2} b^3 a^{-1} b^{-2}, a^{-1} b (a b a)^2 b a^{-1}, \\ b (b a^{-1})^2 b^{-2} a b^{-1} a^{-1}, b (a b^{-1})^2 (a b)^2 a^{-1} b a^{-1} \rangle$$

Es curioso el método que utilizamos en un principio para encontrar dicho contraejemplo. Con SageMath, hicimos un programa que recorría de manera aleatoria subgrupos de  $\mathbb{S}_8$  y se preguntaba si para el primo  $p = 2$ , tal subgrupo verificaba que  $\mathcal{S}_p(G)$  y  $\mathcal{A}_p(G)$  fuesen contráctiles. Para ello hicimos un programa que repetía los siguientes pasos una cantidad arbitraria de veces:

1. Tomamos de manera aleatoria dos o tres elementos de  $\mathbb{S}_8$  de órdenes menores a 50.
2. Consideramos el subgrupo  $G$  generado por estos elementos.
3. Si el orden de  $G$  es mayor a 1000 o no es par, volvemos al paso 1.
4. Nos preguntamos si  $\mathcal{S}_p(G)$  es contráctil buscando un  $p$ -subgrupo normal no trivial. De no ser así, volvemos al paso 1.
5. Calculamos todos los subgrupos de  $G$  y luego filtramos esta lista para quedarnos con los que son  $p$ -elementales abelianos.
6. Construimos el poset  $\mathcal{A}_p(G)$  y luego le calculamos su core. Si da no trivial, mostramos en pantalla los datos del grupo: generadores y orden.
7. Volvemos al paso 1.

Luego de unos días de correr este programa, dimos con el contraejemplo.

Más adelante, quisimos probar que este grupo era efectivamente el de orden más chico que cumplía que  $\mathcal{S}_p(G)$  fuese contráctil y  $\mathcal{A}_p(G)$  no. Sin embargo, calcular los posets  $\mathcal{A}_p(G)$  de todos los grupos de órdenes más chicos requería de varios días, ya que calcular el poset  $\mathcal{A}_p(G)$  en SageMath es algo que en general lleva mucho tiempo de procesamiento. Con la teoría que fuimos desarrollando, pudimos ir limitando la cantidad de grupos.

Primero nos preguntamos qué primos debemos analizar. Como estamos estudiando contractibilidad, si  $m_p(G) \leq 3$  entonces del corolario 3.2.14 vemos que  $\mathcal{A}_p(G)$  es contráctil si y solo si  $\mathcal{S}_p(G)$  es contráctil. Es decir, debemos ver potencias de primos que sean al menos 4. Como  $5^4 = 625 > 576$ , esto nos reduce a probar solamente los primos 2 y 3.

Una vez que tenemos la lista de los primos que debemos analizar, filtramos los órdenes. Creamos una lista  $L$  con los órdenes  $o$  tales que  $1 \leq o \leq 576$ ,  $2^4 \mid o$  o bien  $3^4 \mid o$ , y tal que  $o$  no es una potencia de 2 o de 3. Además, filtramos los órdenes de la forma  $p^\alpha q$  por el teorema 3.6.1.

Con esta lista, mediante un for recorremos uno por uno los órdenes  $o$  de  $L$ . Para cada  $o$ , seteamos la variable  $x$  con la cantidad de grupos de orden  $o$ , salvo isomorfismos, que tiene GAP en su base de datos. Luego recorremos la lista de números entre 1 y  $x$  vía un iterador que llamamos *id*. Ahora accedemos al  $G$  grupo de *id*  $[o, id]$  de la tabla de SmallGroups de GAP y para cada primo  $p \in \{2, 3\}$ , nos preguntamos las siguientes cosas (en el orden en que aparecen) sobre el grupo, descartándolo inmediatamente y pasando al siguiente grupo o primo cuando no cumple alguna:

1.  $\mathcal{O}_p(G) > 1$ ?
2. Los  $p$ -Sylows son no-normales?
3. Los  $p$ -Sylows son no-abelianos? (ver proposición 3.2.1)
4. Vale que  $G = \Omega_1(G)$ ? (ver proposición 3.4.1)
5. Vale que  $p \nmid |Z(G)|$ ? (ver proposición 3.4.4)

La mayoría de las instrucciones para aplicar estos filtros ya están programadas en GAP y por lo tanto poseen una gran velocidad de ejecución. Si el grupo  $G$  falla en la condición  $i$ -ésima de la tabla anterior, automáticamente se lo descarta y se pasa al siguiente primo o grupo según corresponda. Si no, nos guardamos el id y el orden del grupo.

De esta manera, para  $p = 2$  obtuvimos tan solo 28 grupos de orden a lo sumo 576 que verificaban estas condiciones. Para el primo  $p = 3$ , había tan solo 1. Por lo tanto, solo teníamos que analizar la contractibilidad del poset  $\mathcal{A}_p(G)$  para 29 grupos. Esto la computadora lo puede procesar en unas pocas horas. Finalmente pudimos probar que efectivamente el grupo que dimos al principio era el de orden más bajo y el único entre los de orden 576 que servía de contraejemplo.



# Bibliografía

- [1] P.S. Alexandroff. Diskrete Räume. Mat. Sb. (N.S.) 2 (1937), 501–518.
- [2] M. Aschbacher, P. B. Kleidman. On a conjecture of Quillen and a lemma of Robinson. Arch. Math. (Basel) 55 (1990), no. 3, 209-217.
- [3] M. Aschbacher, S. D. Smith. On Quillen’s conjecture for the p-groups complex. Ann. of Math. (2) 137 (1993), no. 3, 473-529.
- [4] M. Aschbacher. Finite group theory, second ed. Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 10. Cambridge University Press, Cambridge, 2000, xii+304.
- [5] M. Aschbacher. Simple connectivity of p-group complexes. Israel J. Math. 82 (1993), no. 1-3, 1-43.
- [6] J. Barmak. Algebraic Topology of Finite Topological Spaces and Applications. Lecture Notes in Math. 2032, Springer, 2011, xviii+170.
- [7] J. Barmak. On Quillen’s Theorem A for posets. J. Combin. Theory, Ser. A, 118 (2011), 2445-2453.
- [8] J. Barmak, G. Minian. Simple homotopy types and finite spaces. Adv. Math. 218 (2008), Issue 1, 87-104.
- [9] J. Barmak, G. Minian. One-point reductions of finite spaces, h-regular CW-complexes and collapsibility. Algebr. Geom. Topol. 8 (2008), 1763–1780.
- [10] J. Barmak, G. Minian. Strong homotopy types, nerves, and collapses. Discrete Comput. Geom. 47 (2012), Issue 2, 301-328.
- [11] H. Bender. Transitive Gruppen gerader Ordnung, in denen jede Involution genau einen Punkt festläßt. J. Algebra 17 (1971), 527-554.
- [12] S. Bouc. Homologie de certains ensembles ordonnés. C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 299 (1984), no. 2, 49–52.
- [13] G. E. Bredon. Introduction to compact transformation groups. Pure and Applied Mathematics, vol. 46. Academic Press, San Diego (1972), xiii+459.
- [14] G. E. Bredon. Equivariant cohomology theories. Lecture Notes in Math. 34, Springer-Verlag, Berlin, 1967, 68.

- [15] K. Brown. Euler characteristics of groups: The  $p$ -fractional part. *Invent. Math.* 29 (1975), no. 1, 1-5.
- [16] Antonio Díaz Ramos. On Quillen's conjecture for  $p$ -solvable groups. Preprint (2016)
- [17] D. Gorenstein, R. Lyons. The local structure of finite groups of characteristic 2 type. *Mem. Amer. Math. Soc.* 42 (1983), no. 276, vii+731.
- [18] A. Hatcher. Algebraic topology. Cambridge University Press, Cambridge, 2002, xii+544.
- [19] T. Hawkes, I. Martin Isaacs. On the poset of  $p$ -subgroups of a  $p$ -solvable group. *J. Lond. Math. Soc.* (2) 38 (1988), no. 1, 77-86.
- [20] R. Knörr, G. R. Robinson. Some remarks on a conjecture of Alperin. *J. Lond. Math. Soc.* (2) 39 (1989), no. 1, 48-60.
- [21] C. Kratzer, J. Thévenaz. Type  $d$ 'homotopie des treillis et treillis des sous-groupes d'un groupe fini. *Comment. Math. Helv.* 60 (1985), no. 1, 85–106.
- [22] R. Ksontini. Simple connectivity of the Quillen complex of the symmetric group. *J. Combin. Theory, Ser. A*, 103 (2003), 257-279.
- [23] R. Ksontini. The fundamental group of the Quillen complex of the symmetric group. *J. Algebra* 282 (2004), no. 1, 33-57.
- [24] I. Martin Isaacs. Finite group theory. *Grad. Stud. Math.*, vol. 92, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2008, xi+350.
- [25] M.C. McCord. Singular homology groups and homotopy groups of finite topological spaces. *Duke Math. J.* 33 (1966), 465–474.
- [26] J. Milnor. Construction of universal bundles, II. *Ann. of Math.* 63 (1956), 430–436.
- [27] D. Quillen. Higher algebraic K-theory I. *Lecture Notes in Math.* 341, Springer-Verlag, New York, 1973, 85–147.
- [28] D. Quillen. Homotopy properties of the poset of nontrivial  $p$ -subgroups of a group. *Adv. Math.* 28 (1978), 101–128.
- [29] Y. Segev. Simply connected coset complexes for rank 1 groups of Lie type. *Math. Z.* 217 (1994), no. 2, 199–214.
- [30] S. D. Smith. Subgroup complexes. *Mathematical Surveys and Monographs*, 179. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2011, xii+364.
- [31] R. E. Stong. Finite topological spaces. *Trans. Amer. Math. Soc.* 123 (1966), 325-340.
- [32] R. E. Stong. Group actions on finite spaces. *Discrete Math.* 49 (1984), 95-100.
- [33] P. Symonds. The orbit space of the  $p$ -subgroup complex is contractible. *Comment. Math. Helv.* 73 (1998), no. 3, 400–405.

- [34] J. Tits. On buildings and their applications. Proc. Int. Congress of Mathematicians (Vancouver, B. C., 1974), Vol. 1 (1975), 209-220.
- [35] J. Thévenaz and P. J. Webb. Homotopy equivalence of poset with a group action. J. Combin. Theory Ser. A 56 (1991), no. 2, 173-181.
- [36] P. J. Webb. A local method in group cohomology. Comment. Math. Helv. 62 (1987), no. 1, 135-167.
- [37] P. J. Webb. Subgroup complexes. The Arcata Conference on Representations of Finite Groups (Arcata, Calif., 1986), Proc. Sympos. Pure Math., vol. 47, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1987, 349-365.
- [38] P. J. Webb. A split exact sequence of Mackey functors. Comment. Math. Helv. 66 (1991), no. 1, 34-69.