

TFL MAT
000944

UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales

Departamento de Matemática

Invariantes en Teoría de Nudos

Tesis de Licenciatura

Alumno: Martín Miguel Merener

Director: Dr. Matías Graña

Julio de 2005

9327 1

BIBLIOTECA
"JULIO REY PASTOR"
Dpto. DE MATEMÁTICA

Índice general

Índice general	I
Agradecimientos	III
Introducción	V
1. Conceptos básicos de Teoría de Nudos	1
1.1. Nudos, Enlaces e Isotopía.	1
1.2. Proyecciones y Diagramas de Enlaces.	4
1.3. Teorema de Reidemeister.	7
1.4. Invariantes: Definiciones y Ejemplos.	13
1.5. Unknotting Number.	14
1.6. El Género y la Suma Conexa de Nudos.	16
1.7. Linking Number.	17
2. Coloreos	21
2.1. 3-Coloreos: Definición, Invarianza y Propiedades.	21
2.2. Q-Coloreos.	26
2.2.1. Quandles: Axiomas y Ejemplos.	26
2.2.2. Invarianza de γ_Q y Necesidad de los Axiomas.	28
2.3. Quandle Cocycle Invariant.	31
3. Polinomios y Aplicaciones	35
3.1. Corchete de Kauffman: Definición Axiomática.	35
3.2. Existencia y Unicidad del Corchete: Forma Explícita.	36
3.3. El Corchete de Kauffman y los R -movimientos.	40
3.4. El Polinomio de Jones y sus Propiedades.	41
3.5. Complejidad de un Enlace, Caracterización de V_L y Otras Propie- dades.	44
3.6. Una Generalización del Polinomio de Jones: el HOMFLY.	48
3.7. Enlaces Alternados y Reducidos.	51
3.8. Conjetura de Tait.	59
3.9. Enlaces y Diagramas Orientados no Isotópicos a su Imagen.	59
3.9.1. Caso General.	60
3.9.2. Caso Alternado y Reducido.	61

Agradecimientos.

A las personas que en todos estos años despertaron y fortalecieron una y otra vez mi admiración por la matemática: Eduardo Dubuc, Gabriel Minian y Carlos Sánchez, entre otros.

Y especialmente a Matías Graña por su enorme apoyo y dedicación.

Introducción.

Un nudo, en matemática, representa formalmente a un objeto concreto y palpable que se puede construir con un trozo de cuerda. Tomamos una cuerda, le hacemos un nudo y unimos las dos puntas que quedaron sueltas. Diremos que dos nudos son iguales si uno puede obtenerse del otro haciendo cualquier tipo de manipulación que excluya cortes.

Dados dos nudos nos interesa saber si son o no el mismo, si es posible transformar uno en el otro de la manera mencionada. Para poder responder este tipo de preguntas desde la matemática, es necesario primero formular definiciones precisas de lo que es un nudo y de lo que significa que dos nudos sean iguales.

Una primera definición, aunque provisoria, es que un *nudo* es una curva cerrada y simple¹ en el espacio \mathbb{R}^3 . Dos nudos son *equivalentes*² si al tomar uno de ellos y deformarlo, enroscarlo, estirarlo o encogerlo se puede hacer que coincida exactamente con el otro. No se permite cortar y volver a pegar.

Los nudos son objetos en el espacio de tres dimensiones y la teoría de nudos está relacionada con la topología de ese espacio. Sin embargo, resulta sumamente útil representar a los nudos mediante diagramas en el plano, que capturan toda la información topológica relevante. Los siguientes son diagramas posibles para el *trébol (derecho)* y para el *nudo trivial*:



Trébol derecho y nudo trivial

Si dados dos nudos exhibimos cómo es posible transformar uno en el otro, entonces habremos demostrado que son iguales. Pero el hecho de que no logremos hacerlo no garantiza que no sean en realidad iguales. ¿Cómo se demuestra entonces que dos nudos son diferentes, en caso de que lo sean? Para esto se utilizan los *invariantes*, sobre los que en parte trata este trabajo. Un invariante de nudos es una asignación de cierto objeto (número, polinomio, grupo, etc.) a cada nudo, con la propiedad de que a dos nudos equivalentes se les asigna el mismo objeto. De modo que el método comúnmente utilizado para determinar que dos nudos dados son no equivalentes consiste en hallar un invariante que les asigne a dichos nudos objetos distintos.

¹No se interseca consigo misma.

²Al referirnos a nudos, consideramos que *equivalencia*, *igualdad* y (más adelante) *isotopía* son sinónimos.

Es importante aclarar que el hecho de que un invariante le asigne el mismo objeto a dos nudos no garantiza que dichos nudos sean iguales. Lo más frecuente es que al trabajar con un invariante en particular existan muchos nudos realmente diferentes, a los que el invariante no “diferencia”, es decir, les asigna el mismo objeto. En cualquier caso, los invariantes permiten transformar una pregunta hecha en un contexto topológico a una pregunta en un contexto algebraico³. Hallar una solución algebraica del problema nos puede dar una respuesta o información relevante sobre el problema original.

Los nudos fueron estudiados en primer lugar por Gauss alrededor del 1800, y luego por James Maxwell y Peter Tait en 1870. Este último, como así también Kirkman y Little, compilaron tablas de nudos y establecieron algunas de las definiciones y propiedades conocidas hoy. Más tarde, gracias a la formalización de la topología hecha por Poincaré alrededor del 1900, fue posible realizar significativos progresos, como los de Alexander (1920) y Reidemeister (1930). Reidemeister caracterizó los pares de nudos equivalentes mediante la condición de que los diagramas asociados cumplan cierta relación de equivalencia. De esta forma estableció una correspondencia biunívoca entre clases de equivalencia de nudos y clases de equivalencia de diagramas. Alexander, por su parte, definió como invariante un polinomio que lleva su nombre. Estudiaremos una generalización de este polinomio, hecha por Vaughan Jones en 1984, y veremos cómo permitió resolver problemas abiertos planteados más de un siglo antes de su descubrimiento.

Dentro de la teoría de nudos hay básicamente tres vías para definir invariantes que permitan estudiarlos y clasificarlos:

1. Topología algebraica. Se define *el* π_1 *del complemento de un nudo*, que resulta ser un invariante [Zie00]. Esta estructura algebraica se generaliza a otras, como por ejemplo el *quandle*, que estudiaremos más adelante, no a raíz del π_1 , sino como un elemento necesario en la generalización de otro invariante llamado *cantidad de 3-coloreos*.

2. Geometría algebraica. Todo nudo es el borde de una superficie (con borde). Esto permite definir *el género de un nudo* como el mínimo entre los géneros de todas las superficies que tienen al nudo dado como borde [Lic91].

El género, además de ser un invariante, sirve por ejemplo para demostrar que todo nudo se factoriza como suma conexa de nudos primos. La suma conexa es una operación binaria y asociativa definida sobre los nudos, que le da al conjunto de clases de equivalencia de nudos una estructura similar a la que tienen los números naturales con el producto: es un monoide; esto es: existe elemento neutro, pero no hay inverso, salvo para el neutro.

3. Algebra y combinatoria. Esta es la vía utilizada para definir los invariantes clásicos y también algunos más modernos como el polinomio de Jones.

En este trabajo, si bien estudiaremos cuestiones relacionadas con las primeras dos áreas, nos concentraremos principalmente en invariantes relacionados con la última.

³Generalmente los objetos asociados a través de los invariantes son de naturaleza algebraica.

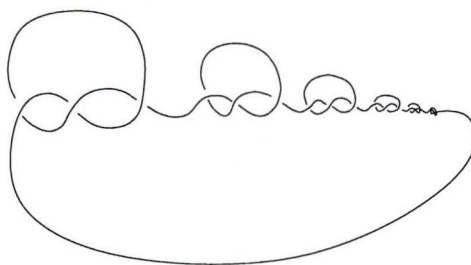
Capítulo 1

Conceptos básicos de Teoría de Nudos

1.1. Nudos, Enlaces e Isotopía.

Al momento de tener que establecer las definiciones de nudo y de equivalencia entre nudos, puede ser atractivo pensar en lazos en el espacio y en homotopías (no punteadas). Más precisamente: consideramos que un nudo es una función continua e inyectiva $f : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$ y decimos que dos nudos f_0 y f_1 son equivalentes si existe una función continua e inyectiva en la primera coordenada¹ $F : S^1 \times I \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que las restricciones de F a $S^1 \times 0$ y a $S^1 \times 1$ son precisamente f_0 y f_1 .

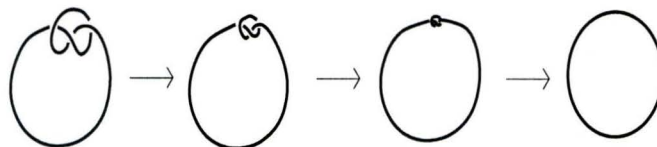
Estas definiciones de nudo y de equivalencia tienen dos problemas. En primer lugar permiten la existencia de los llamados *nudos salvajes*, caracterizados por tener infinitas “anudaciones” que se acumulan en un punto del nudo. Esto es un inconveniente pues queremos dejar a los nudos salvajes fuera de la teoría, ya que no son lo que intuitivamente consideramos como nudos “reales”, son más bien casos particulares que aparecen en el intento por llegar a la noción acabada del concepto de nudo.



Nudo salvaje

Otro inconveniente, más grave, de la definición, es que en realidad con ella todo nudo resulta equivalente al nudo trivial [Rob99]. Digamos que “tirando de la cuerda en sentidos opuestos” todo nudo desaparece.

¹Esto significa que al fijar cualquier $t \in I$, $F : S^1 \times t \rightarrow \mathbb{R}^3$ es inyectiva.

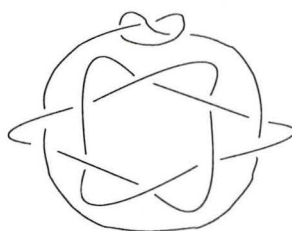


Todo nudo se transforma en el nudo trivial vía una homotopía

Una manera de evitar este último problema es considerar que los nudos son subconjuntos de \mathbb{R}^3 homeomorfos a S^1 y que dos nudos son *isotópicos*² si existe un homeomorfismo $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ que preserva la orientación y que manda un nudo en el otro [Zie00]. Definiendo clases de equivalencia con esta nueva noción, no todos los nudos son triviales, pero se sigue teniendo dentro de los nudos posibles a los salvajes.

Para excluir a los nudos salvajes lo mejor es considerar que los nudos son poligonales cerradas con finitos segmentos. Aun así, podemos seguir pensando a los nudos como curvas suaves, dado que toda curva suave (no salvaje) es aproximable por una curva poligonal con finitos segmentos, que resulta isotópica a la curva original [Rob99].

Para estudiar a los nudos, se los ve a éstos como un caso particular de una noción más general. En lugar de pensar que tomamos una cuerda, le hacemos un nudo y unimos los dos extremos libres, vamos a contemplar la posibilidad de tomar varias cuerdas, digamos n , obteniendo lo que se denomina *enlace*³ de n componentes. Cabe aclarar que las componentes, pudiendo ser algunas de ellas triviales al observarlas por sí solas como nudos, pueden estar “enganchadas” o no entre sí.



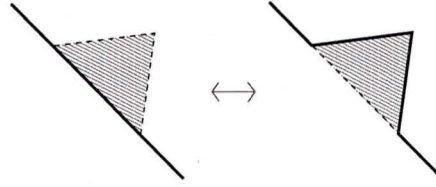
Enlace de 3 componentes

Definición 1.1.1. Un *enlace de n componentes* o *n -enlace* es un subconjunto de \mathbb{R}^3 homeomorfo a $n > 0$ copias de S^1 y expresable como unión disjunta de finitos puntos (vértices) y finitos segmentos abiertos. Un *nudo* es un enlace de una sola componente.

Definición 1.1.2. Sea T un triángulo (incluyendo su cápsula convexa) que tiene uno de sus lados completamente contenido en un enlace L y no lo interseca más que con dicho lado. Se define entonces un nuevo enlace L' a partir de reemplazar la intersección entre T y L por los otros dos lados de T , como se muestra en la siguiente figura. Esta transformación, o su inversa, se denomina Δ – *movimiento*.

²Este es el nombre que se le da a la relación de equivalencia que determina la noción de “igualdad” entre nudos.

³En inglés, *link*.



Delta movimiento

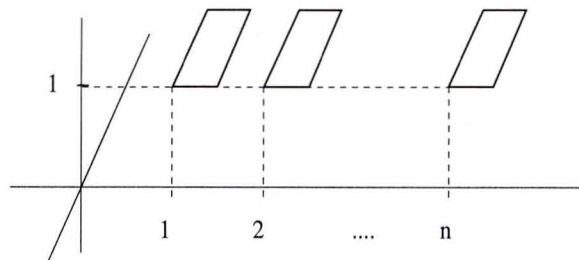
Observación 1.1.3. El lado del triángulo T que interseca al enlace, tiene vértices que no necesariamente son vértices del enlace. Si lo son, es porque un segmento del enlace está contenido en dicho lado de T , mientras que si no lo son es porque se da la inclusión en sentido opuesto. En cualquier caso, al reemplazarlo por los otros dos lados de T , sí ocurre que los vértices del triángulo pasan a ser vértices del enlace.

Definición 1.1.4. Dos enlaces L y L' son *isotópicos* si existe una secuencia de enlaces $L = L_0, \dots, L_n = L'$ tal que para cada i entre 1 y n , cada par L_{i-1}, L_i está relacionado por un Δ -movimiento.

Esta definición es equivalente a la del homeomorfismo de \mathbb{R}^3 en sí mismo que preserva la orientación y que manda un enlace en el otro [Zie00].

Es inmediato de la definición que la relación de isotopía es una relación de equivalencia entre enlaces. En lo que sigue, siempre denotaremos con \sim a las relaciones de equivalencia. Generalmente denotaremos a los nudos con la letra K , a los enlaces con L y a los diagramas con D .

Definición 1.1.5. Para cada $j \in \mathbb{N}$ sea K_j el nudo con vértices $v_{1,j} = (j, 0, 1)$, $v_{2,j} = (j + \frac{1}{2}, 0, 1)$, $v_{3,j} = (j + \frac{1}{2}, 1, 1)$ y $v_{4,j} = (j, 1, 1)$, y segmentos $\overline{v_{1,j}v_{2,j}}$, $\overline{v_{2,j}v_{3,j}}$, $\overline{v_{3,j}v_{4,j}}$ y $\overline{v_{4,j}v_{1,j}}$. Diremos que un enlace L es *trivial* si es isotópico a $\bigcup_{j=1}^n K_j$ para algún $n \in \mathbb{N}$, en cuyo caso lo llamamos *enlace trivial de n componentes* o *n -enlace trivial*. En el caso $n = 1$ lo llamamos *nudo trivial*.

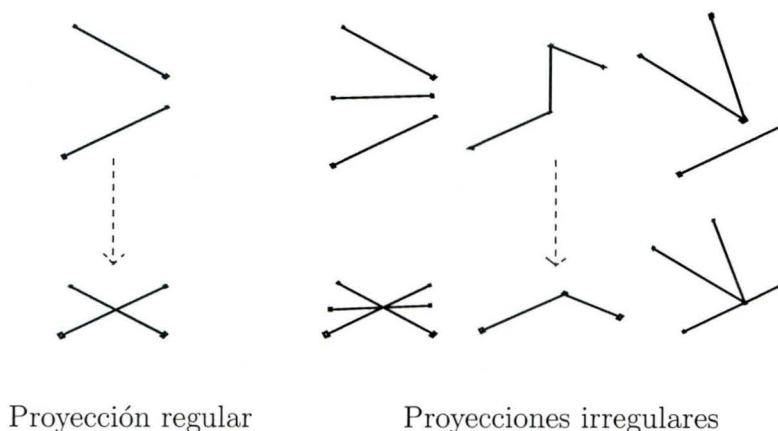


Enlace trivial de n componentes

Observación 1.1.6. En general nos vamos a referir “al” enlace trivial de n -componentes, aunque en realidad hay infinitos, todos en la misma clase de equivalencia. Sin embargo en algunos casos nos vamos a referir al nudo o al enlace *de la definición 1.1.5* y estaremos queriendo decir que importa que sea ése en particular y no cualquier otro equivalente.

1.2. Proyecciones y Diagramas de Enlaces.

Definición 1.2.1. Dado un enlace L , que suponemos incluido en el semiespacio $z \geq 0$ de \mathbb{R}^3 , diremos que su proyección $\pi(L)$ al plano $z = 0$ es *regular* si la preimagen de cada punto de $\pi(L)$ consiste en un único punto de L , o en dos puntos, en cuyo caso ninguno de los dos es un vértice.



Dicho de otro modo, una proyección de un enlace es *irregular* si se da alguno de los siguientes casos:

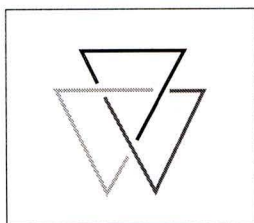
1. Hay tres o más puntos del enlace en una misma recta vertical
2. Hay un vértice encima o debajo de otro punto del enlace

Definición 1.2.2. Dado un enlace con proyección regular, los puntos que tienen dos preimágenes se denominan *cruces* de la proyección.

Gracias a que los enlaces son poligonales y que ningún vértice tiene la misma proyección que otro punto del enlace, sucede que ningún segmento del enlace está alineado y encima de otro. Por esto, los puntos de la proyección con dos preimágenes son realmente cruces, en el sentido de que todos sus entornos (suficientemente chicos) son homeomorfos a \times , mientras que todos los entornos suficientemente pequeños de los demás puntos de la proyección son homeomorfos al intervalo $(0, 1)$.

Definición 1.2.3. Dado un enlace L con proyección regular, su *diagrama* D se obtiene redefiniendo lo que ocurre en cada cruce de la proyección. Por ser regular, la preimagen de cada cruce consiste en dos puntos del enlace, uno más cerca que el otro del plano $z = 0$. La proyección del segmento del enlace que contiene al punto más alejado se la deja como está, mientras que a la proyección del otro segmento se le quita un entorno (pequeño) del cruce, de manera tal de evitar la intersección entre las proyecciones de los dos segmentos en cuestión.

Definición 1.2.4. Llamaremos *arco* a cada componente conexa de un diagrama.



El trébol y sus arcos

Observación 1.2.5. Por comodidad (y con cierto abuso de los nombres) nos vamos a referir al punto donde en la proyección se ubicaba el cruce, como *cruce del diagrama* o *cruce entre arcos*, aunque sabemos que por definición, ni el diagrama tiene cruces ni los arcos se cruzan. Notar además que en cada *cruce* del diagrama intervienen siempre tres arcos.

El diagrama representa la manera en que se ve el enlace al situar el punto de vista por encima de él y con el plano⁴ $z = 0$ como fondo. El diagrama permite reconstruir el enlace módulo isotopía.

Definición 1.2.6. Dados un enlace L y un $\epsilon > 0$, se dice que el enlace L' es una ϵ -perturbación de L si se obtiene desplazando cada vértice de L una distancia menor a ϵ y reconectando los segmentos de la misma forma en que estaban en L .

Si ϵ es suficientemente chico⁵, L' está correctamente definido, en el sentido de que los segmentos no se intersecan (los vértices tampoco), y lo más importante: L' resulta isotópico a L .

Además, se dan los siguientes hechos [Rob99]:

- Si L tiene proyección irregular: $\forall \epsilon > 0 \exists L'$ ϵ -perturbación de L , isotópico a éste y con proyección regular.
- Si L tiene proyección regular: $\exists \epsilon > 0 / \forall L'$ ϵ -perturbación de L , L' tiene proyección regular y es isotópico a L .

Observación 1.2.7.

- Por lo recién expuesto, podemos suponer sin pérdida de generalidad, que todo enlace tiene proyección regular al plano $z = 0$ y por lo tanto diagrama, pues en caso de que la proyección sea irregular, se reemplaza el enlace por uno isotópico y con proyección regular. Si bien para este reemplazo hay infinitas alternativas, pues los vértices pueden perturbarse más o menos, suponemos que entre todas las elecciones posibles nos quedamos con una en particular.

⁴Tomar la proyección a este plano no es la única opción. Mientras que las proyecciones que resulten sean regulares, puede usarse cualquier otro plano, en cuyo caso la información topológica que los distintos diagramas capturan es esencialmente la misma: se trata de diagramas *equivalentes* (definiremos esto enseguida).

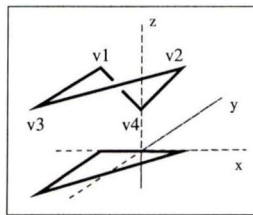
⁵Se puede tomar $\epsilon = \frac{1}{3} \min\{d(x, y)\}$ con x e y o bien en segmentos distintos que no tienen vértices en común o bien uno siendo un vértice y el otro un punto de un segmento que no tiene a dicho vértice como uno de sus extremos (este ϵ es positivo). Con esto se garantiza por un lado que los distintos vértices y segmentos del enlace perturbado no se toquen entre sí y por otro lado permite definir una serie de Δ -movimientos que lleven cada segmento y vértice perturbado a su posición original.

- Si bien en la definición 1.1.1 decimos que un enlace es una unión de finitos vértices y segmentos abiertos, en su diagrama solemos representar a los segmentos y no a los vértices. Es claro que cada vértice del diagrama corresponde a un vértice del enlace, pero puede haber otros vértices en el enlace que “no se ven” en el diagrama (ver ejemplo 1.2.8).

Aceptaremos entonces que los enlaces pueden tener vértices que no sean vértices en los diagramas, siempre y cuando al ser proyectados, estos vértices no coincidan con la proyección de otro punto del enlace, pues en ese caso sería una proyección irregular. Aclarado esto, en lo que sigue no nos preocuparemos por ver si un determinado diagrama es o no es una representación de un enlace “posible” en el espacio. Damos por hecho que si no lo llegara a ser, bastaría con agregar algunos vértices en forma adecuada (ver ejemplo 1.2.9).

Ejemplo 1.2.8. Consideremos el nudo trivial de la siguiente figura, que se puede expresar como:

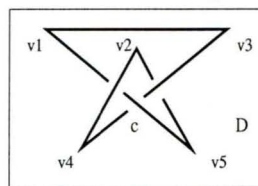
$$\{(t, 0, t + 1)\} \cup \{(t - 1, 0, -t + 2)\} \cup \{(-1, 2t - 2, 2)\} \cup \{(2t - 1, 2t - 2, 2)\} \text{ para } 0 < t < 1, \text{ con vértices } (0, 0, 1), (1, 0, 2), (-1, 0, 2), (-1, -2, 2).$$



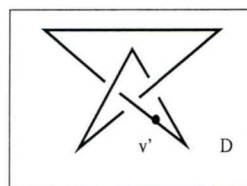
En el diagrama, v_4 no aparece

Este nudo tiene proyección regular y sin embargo su diagrama no denota la existencia del vértice $v_4 = (0, 0, 1)$.

Ejemplo 1.2.9. Veamos ahora el caso del siguiente trébol.



Trébol imposible



Trébol posible, v' era invisible en D

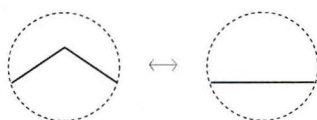
Con cinco segmentos rectos (de cualquier longitud), es imposible construir un nudo como el de la figura. Si consideramos que el triángulo $v_2\hat{v}_4v_5$ está contenido en el plano π , e ignoramos por un momento el cruce c entre los segmentos $s = \overline{v_3v_4}$ y $s' = \overline{v_1v_5}$, es claro que s pasa por delante de π mientras que s' pasa por detrás. Sin embargo esto es contradictorio con el hecho de que en el cruce c , s' pasa por delante de s . En definitiva, este diagrama no puede ser el de un nudo real, a no ser que permitamos la existencia de vértices invisibles en algún punto intermedio de los arcos del diagrama. De hecho, si en s' hubiera un vértice v' , este trébol sí sería posible en el espacio.

1.3. Teorema de Reidemeister.

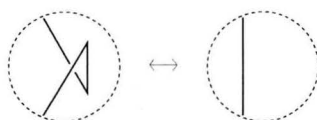
Llegamos a un punto en el que tenemos definidas las nociones de enlace y de isotopía entre enlaces, que es la relación que determina las clases de equivalencia que interesan en la teoría de nudos. Además definimos el diagrama de un enlace y sabemos que éste captura toda la información topológica esencial del enlace. Lo que viene a continuación es establecer cómo se traduce la noción de isotopía entre enlaces al contexto de diagramas.

Teorema 1.3.1. (Reidemeister) *Dos enlaces L y L' con diagramas D y D' , son equivalentes si y solo si existe una secuencia finita de diagramas $D = D_0, \dots, D_n = D'$ tal que para cada i entre 1 y n , cada par D_{i-1}, D_i está relacionado por algún movimiento de diagramas, definido en los siguientes esquemas:*

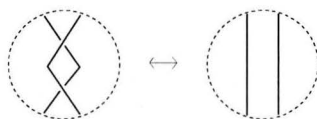
- R_0 :



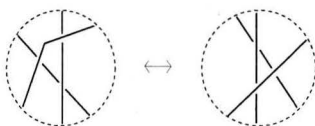
- R_1 :



- R_2 :



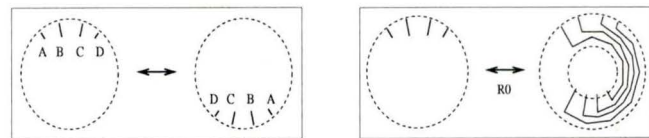
- R_3 :



Antes de exponer la idea de la demostración hacemos algunas aclaraciones:

1. Los movimientos se denominan *movimientos de Reidemeister*, que abreviaremos R – *movimientos*, y definen una relación de equivalencia en el conjunto de diagramas de enlaces. Observar la similitud que hay entre la definición de isotopía de enlaces y lo que dice el teorema: la clave de la demostración es que cada Δ -movimiento, al ser llevado al diagrama, es alguno de los R -movimientos (en realidad una secuencia de éstos).

2. En los esquemas dados, los dos diagramas con borde punteado que están conectados por la flecha \leftrightarrow , representan a dos diagramas más amplios que lo que muestra el esquema y que son idénticos salvo en la región expuesta.
3. Lo mismo vale para ciertos casos que veremos más adelante, en los que mediante una ecuación se relacionan ciertas partes de dos o más diagramas: se supone que lo que no se muestra es porque es coincidente para todos los diagramas de una misma ecuación.
4. En cualquier relación entre diagramas, ya sea con R -movimientos o con ecuaciones, ésta seguirá siendo válida si *todos* los diagramas presentes son rotados en un mismo ángulo. Asimismo, los ángulos entre los segmentos de un mismo arco pueden variar, siempre que esto no modifique la cantidad de cruces.
5. Cuando en una ecuación o a través de una flecha \leftrightarrow se relacionan diagramas, las intersecciones de los arcos con la línea punteada no tienen necesariamente que conservar la misma posición absoluta en todos los diagramas. Basta con que se mantenga el orden relativo. Ver el siguiente ejemplo:



Las intersecciones de los arcos con la línea punteada cambian de lugar, pero el orden relativo es el mismo, con lo cual los dos diagramas de la izquierda son efectivamente equivalentes (mediante $R0$), como se muestra en el esquema de la derecha.

6. Con el movimiento $R0$, no solo los arcos pueden deformarse, sino que combinándolo con $R2$, también los cruces pueden cambiar su posición en el plano:



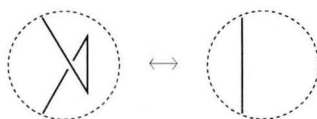
Se logra de esta manera tener *isotopía planar*, es decir, deformar a los diagramas sin alterar la estructura de la proyección subyacente. En algunos enfoques de teoría de nudos, se define directamente la equivalencia de diagramas con los movimientos $R1$, $R2$ y $R3$ más la isotopía planar [Kau87].



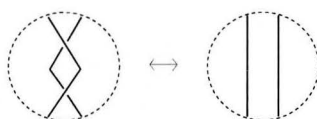
Isotopía planar

7. De los cuatro R -movimientos establecidos, pueden deducirse otros similares:

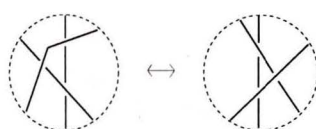
▪ $R1'$:



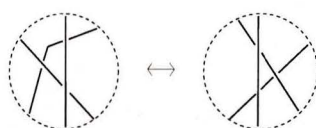
▪ $R2'$:



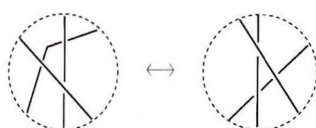
▪ $R3'a$:



▪ $R3'b$:



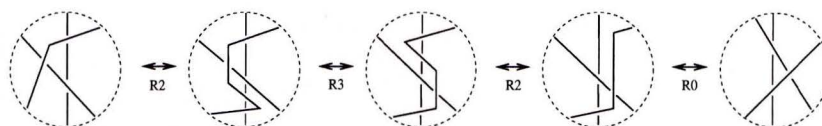
▪ $R3'c$:



Veamos en cada caso cómo se deducen. En cada paso decimos qué movimientos usamos; generalmente se usa $R0$, por lo que no lo mencionamos explícitamente salvo que sea el único utilizado.

▪ $R2'$ es $R2$ rotado 180° .

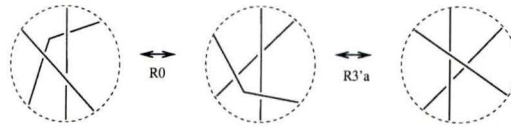
▪ $R3'a$:



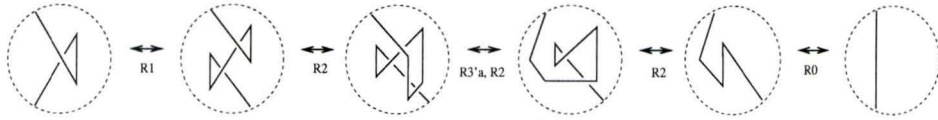
▪ $R3'b$:



■ $R3'c$:



■ $R1'$:



Es evidente que la elección de cuáles movimientos son R y cuáles son R' es arbitraria. Fijando unos se deducen los otros. Usaremos por lo tanto indistintamente cualquiera de los dos $R1$, de los dos $R2$ y de los cuatro $R3$.

8. A partir de este teorema podría llegar a parecer que el problema de demostrar si dos diagramas representan el mismo nudo es fácil de resolver desde un punto de vista computacional: habría que chequear si existe o no una secuencia de R -movimientos que transforma un diagrama en el otro. Efectivamente eso sería todo, con el inconveniente de que no hay un límite en la cantidad de R -movimientos que podrían ser necesarios. Aunque podamos probar que con todas las combinaciones posibles de 1.000.000 de R -movimientos no es posible transformar un diagrama en el otro, nada impide que los diagramas sean realmente equivalentes y la cantidad necesaria fuera 1.000.003. Además de esta dificultad temporal, hay otra dificultad en cuanto al tamaño de los nudos intermedios: si los dos diagramas tienen diez cruces cada uno, podría suceder que los diagramas en la secuencia que transforman uno en el otro tuvieran (necesariamente) mil cruces. Dados dos diagramas equivalentes, no existen en general cotas en función del par de diagramas (input) para la cantidad de R -movimientos necesarios o para la cantidad de cruces que tienen los diagramas intermedios [Rob99].

Demostración. (Esquema)

(\Leftarrow) Dar un R -movimiento entre D_{i-1} y D_i , siendo D_{i-1} el diagrama del enlace L_{i-1} , determina⁶ uno o varios Δ -movimientos que aplicados a L_{i-1} lo transforman en un enlace L_i con diagrama D_i . Contando entonces con datos iniciales (L, D) y (L', D') , dar una secuencia $D = D_0, \dots, D_n = D'$ tal que D_{i-1} y D_i están relacionados por algún R -movimiento, implica tener una secuencia de enlaces $L = L_0, \dots, L_n$ todos isotópicos entre sí (pues lo son de a pares) y tal que L_n tiene como diagrama a $D_n = D'$. Luego, $L \sim L_n \sim L'$.

(\Rightarrow) El Δ -movimiento que transforma a L_{i-1} en L_i está definido por un triángulo en \mathbb{R}^3 , que al ser proyectado al plano $z = 0$ también es un triángulo⁷ que puede contener en su parte interna otras partes proyectadas de L_{i-1} . Podemos subdividir al triángulo proyectado en triángulos pequeños y descomponer a su vez el

⁶Notar que esta determinación no es única; hay infinitas elecciones posibles que por supuesto definen enlaces isotópicos.

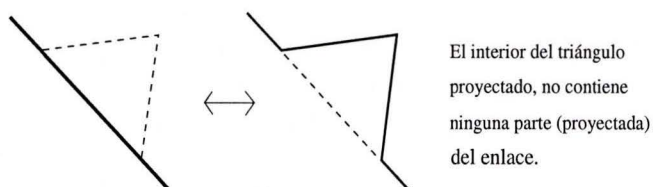
⁷Recordar que podemos suponer que todos los enlaces intermedios tienen proyección regular al plano $z = 0$ (obs. 1.2.7).

Δ -movimiento en una secuencia de Δ -movimientos en forma consistente con la subdivisión, como se muestra en la siguiente figura:

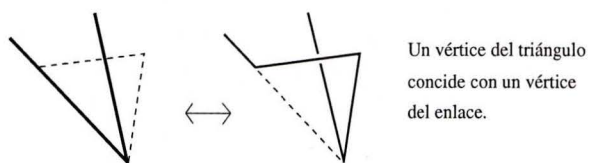


Estos triángulos pueden tomarse lo suficientemente pequeños como para que en el interior de sus proyecciones, haya o bien un cruce, un arco (con o sin vértices) o nada. La proyección de cada Δ -movimiento (de los triángulos pequeños) será esencialmente alguno de los siguientes casos, que se corresponden con los R -movimientos:

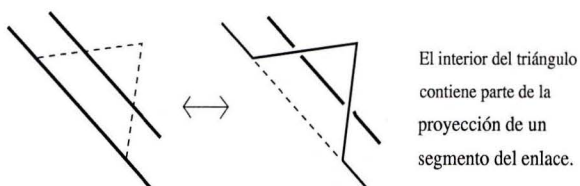
▪ R_0 :



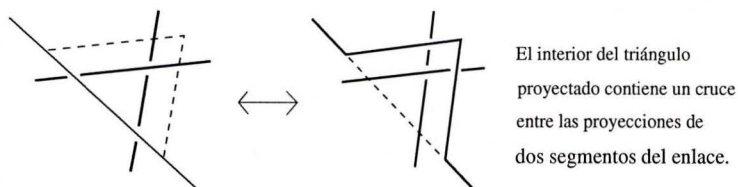
▪ R_1 :



▪ R_2 :



▪ R_3 :



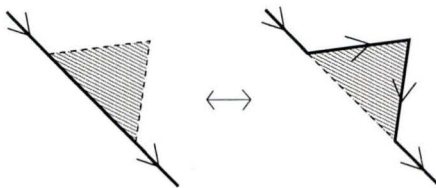
Cada Δ -movimiento implica entonces una secuencia de R -movimientos, y por lo tanto la isotopía entre los enlaces L y L' implica la existencia de una secuencia de R -movimientos que transforma el diagrama D en el diagrama D' . □

Tenemos así una correspondencia entre enlaces y diagramas que es uno a uno si consideramos a los enlaces módulo isotopía y a los diagramas módulo la relación de equivalencia inducida por los R -movimientos.

Esta biyección nos permite realizar el estudio de los enlaces concentrándonos en los diagramas. En muchos casos definiremos funciones sobre enlaces a partir de definirlos sobre sus diagramas. Estas funciones, que serán los invariantes, deben su nombre a que permanecen constantes sobre todos los diagramas de una misma clase de equivalencia, o lo que es lo mismo, gracias al teorema de Reidemeister, permanecen constantes sobre todos los enlaces de una misma clase de isotopía. En los casos en que definamos los invariantes como funciones computables a partir de los diagramas, probaremos que son invariantes de enlaces al probar que sobre cada diagrama toman el mismo valor antes y después de cualquiera de los cuatro R -movimientos.

Hasta ahora solo hemos considerado enlaces no orientados, pero todo lo dicho es válido (o adaptable) para enlaces orientados. Un *enlace orientado* es un enlace en el que las copias homeomorfas a S^1 heredan (vía el homeomorfismo) alguna de las dos orientaciones posibles de S^1 .

Los Δ -movimientos también se definen para el caso orientado e inducen clases de isotopía de enlaces orientados.



Delta movimiento orientado

Similarmente al caso no orientado, para los enlaces orientados con proyección regular, se definen los diagramas orientados a partir de los cuales es posible reconstruir el enlace módulo isotopía (orientada). El teorema de Reidemeister sigue siendo válido con la salvedad de que deben considerarse los movimientos con todas⁸ sus posibles orientaciones. Se obtiene también una correspondencia uno a uno entre clases de isotopía de enlaces orientados y clases de equivalencia de diagramas orientados. Un enlace de n componentes tiene 2^n orientaciones posibles, aunque no necesariamente definen 2^n clases de isotopía orientada diferentes. Veremos más adelante, por ejemplo, que las 2^n orientaciones del n -enlace trivial son todas isotópicas entre sí.

⁸Mientras que $R0$ y $R1$ tienen dos posibles orientaciones cada uno, $R2$ y $R3$ tienen cuatro y ocho respectivamente. No obstante, no es necesario considerar todas las orientaciones en los axiomas, pues en algunos casos unas orientaciones pueden deducirse de otras [Tur88].

1.4. Invariantes: Definiciones y Ejemplos.

Definición 1.4.1. Si denotamos con \mathcal{L} al conjunto de enlaces (orientados o no), diremos que un *invariante de enlaces* es una función $i : \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{A}$ tal que $L \sim L' \Rightarrow i(L) = i(L')$.

Notación: denotamos con \mathcal{L}_o al conjunto de enlaces orientados y con \mathcal{L}_{no} al conjunto de enlaces no orientados.

Esto significa que si para algún invariante, dos enlaces tienen asignados elementos de \mathcal{A} diferentes entre sí, entonces dichos enlaces no son isotópicos. Como hemos observado anteriormente, el hecho de que a dos enlaces, un invariante en particular les asigne el mismo elemento de \mathcal{A} , no implica que dichos enlaces sean isotópicos. En este sentido, además de dar información topológica sobre los enlaces, la finalidad de los invariantes es distinguir más que identificar clases de isotopía.

Denotemos con o a la función que a cada enlace orientado le asigna el enlace subyacente (sin la orientación). Si dos enlaces orientados L y L' son isotópicos entonces $o(L)$ y $o(L')$ también son isotópicos como enlaces no orientados. Además, todo invariante i de enlaces no orientados se puede definir para enlaces orientados: $\bar{i} = io$, efectivamente resulta ser un invariante:

$$L \sim L' \text{ (orientados)} \Rightarrow o(L) \sim o(L') \text{ (no orientados)} \Rightarrow$$

$$i(o(L)) = i(o(L')) \Rightarrow \bar{i}(L) = \bar{i}(L').$$

Como consecuencia de esto, cuando trabajemos con invariantes de enlaces no orientados diremos simplemente que se trata de un invariante de enlaces (o de nudos). En cambio cuando el invariante dependa realmente de que exista orientación, lo explicitaremos. En general, cuando nos reframamos simplemente a enlaces o diagramas, será porque lo que estamos diciendo es válido para orientados y no orientados.

Pasamos ahora a establecer una serie de definiciones y conceptos básicos.

Definición 1.4.2. El *número de cruces* $c(L)$ de un enlace L es el mínimo número de cruces entre todos los diagramas equivalentes al de L .

Dado que el mínimo se toma entre todos los diagramas equivalentes al de L , el número de cruces es, por definición, un invariante de enlaces.

Definición 1.4.3. Dado un cruce c de un diagrama D se define un nuevo diagrama D' *invirtiendo* c , esto es: el arco que pasa por arriba se lo hace pasar por debajo y viceversa.

Definición 1.4.4. La *imagen (especular)* de L es el enlace \bar{L} cuyo diagrama se obtiene a partir del diagrama de L invirtiendo todos los cruces. En el caso de los enlaces orientados, la orientación permanece inalterable.

Definida así, la imagen es el enlace reflejado en un espejo contenido en el plano $z = 0$. Esta no es la única opción, de hecho el plano con respecto al que se toma la imagen puede ser cualquiera, aunque con todos ellos se obtienen imágenes isotópicas entre sí.

Definición 1.4.5. El *reverso* de un enlace orientado es el que se obtiene invirtiendo la orientación en todas sus componentes.

Definición 1.4.6. El *inverso* de un enlace orientado es el reverso de su imagen.

Definición 1.4.7. El *número de componentes* $\mu(L)$ de un enlace L es el número de copias de S^1 a las que L es homeomorfo.

Dado que los Δ -movimientos no unen ni separan componentes, $\mu(L)$ es un invariante de enlaces.

Definición 1.4.8. El *número de componentes desenganchadas* de un enlace L es, entre todos los enlaces isotópicos a L , el máximo número de componentes conexas que tiene la proyección al plano $z = 0$.

Definición 1.4.9. El *stick number* de L es el mínimo número de segmentos rectos requerido para construir en \mathbb{R}^3 un enlace isotópico a L .

1.5. Unknotting Number.

Para definir este invariante debemos antes establecer un lema que además usaremos más adelante.

Lema 1.5.1. *En todo diagrama de un nudo K es posible elegir ciertos cruces que al ser invertidos definen un diagrama equivalente al del nudo trivial.*

Demostración. Sea K un nudo con diagrama D . Como K es una unión de segmentos y vértices, la cápsula convexa de D resulta ser un polígono. Si p es un extremo de este polígono, entonces $p \in D$ y además existe una recta L que pasa por p y que define un semiespacio cerrado que contiene completamente a D .

Consideramos una parametrización de K que comienza y termina en p , $t \mapsto (x(t), y(t), z(t))$ con $t \in [0, 1]$. Sea \tilde{K} dado por $t \mapsto (x(t), y(t), t)$ y uniendo $(x(0), y(0), 0)$ con $(x(1), y(1), 1)$ por un segmento. \tilde{K} tiene proyección irregular pero sabemos que es isotópico a otro nudo K' con proyección regular y diagrama D' ⁹.

De esta forma tenemos los pares (K, D) y (K', D') , siendo D' equivalente¹⁰ a un diagrama obtenido a partir de invertir algunos cruces de D .

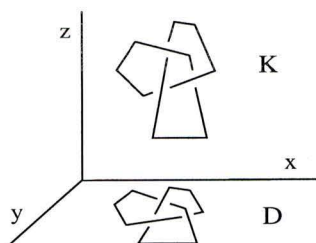
Lo que resta por ver es que K' es isotópico al nudo trivial. Por cómo se eligió el punto p y dado que la parametrización de K' es estrictamente creciente en $t \in [0, 1]$ con respecto z , resulta que la proyección de K' al plano normal a L es regular¹¹.

⁹De hecho K' se obtiene con solo mover a $(x(0), y(0), 0)$ una distancia pequeña en una dirección apropiada; por ejemplo, en dirección normal a L y hacia el exterior de la cápsula convexa de D .

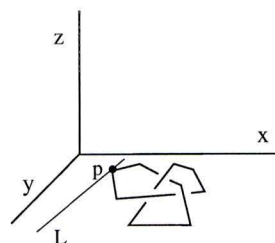
¹⁰Mediante algunos $R0$ movimientos, producto del reemplazo de \tilde{K} por K' .

¹¹La def. 1.2.1 se puede adaptar a la proyección de cualquier otro plano diferente del $z = 0$.

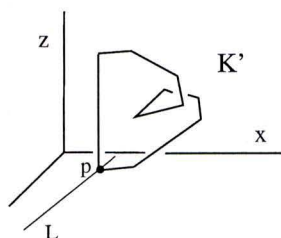
y es una poligonal cerrada y simple. Finalmente usamos el hecho de que todo nudo, cuya proyección (regular) a algún plano es una poligonal cerrada y simple, es isotópico al nudo trivial [Rob99].



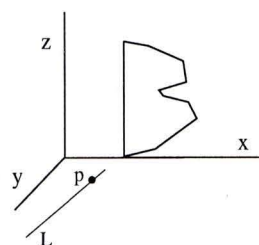
Nudo K con diagrama D



L intersecta a D en p



K' tiene diagrama D'



La proyección de K' al plano normal a L es trivial

□

Definición 1.5.2. El *unknotting number* $u(K)$ de un nudo K es, entre todos los diagramas equivalentes al de K , la mínima cantidad de cruces que son necesarios invertir para transformar el diagrama en el del nudo trivial.

Por el lema anterior sabemos que u está bien definido y por la definición misma es un invariante de nudos. Una manera más intuitiva de convencerse de la validez del lema anterior es pensar que se recorre el diagrama, y al pasar por primera vez por cada cruce se lo invierte en caso de que se deba pasar por debajo o se lo deja igual en caso de que se deba pasar por arriba. Al cerrar el circuito, el nuevo diagrama obtenido será el del nudo trivial. Análogamente se obtiene el diagrama del nudo trivial si cada cruce se invierte en caso de que se deba pasar por arriba y se deja igual en caso de pasar por debajo. Con esta idea en mente es fácil convencerse de que $u(D) \leq \frac{c(D)}{2}$ para cualquier diagrama, de donde resulta que $u(K) \leq \frac{c(K)}{2}$ para todo nudo.

Observación 1.5.3. El unknotting number de un nudo no se realiza necesariamente en una representación minimal del mismo. Esto es: existe un ejemplo (de hecho, infinitos ejemplos) de un nudo K , para el cual todo diagrama de $c(K)$ cruces, requiere invertir más de $u(K)$ cruces para transformarlo en trivial, mientras que hay un diagrama particular que tiene más de $c(K)$ cruces y que se transforma en trivial con solo invertir $u(K)$ cruces [Ber94].

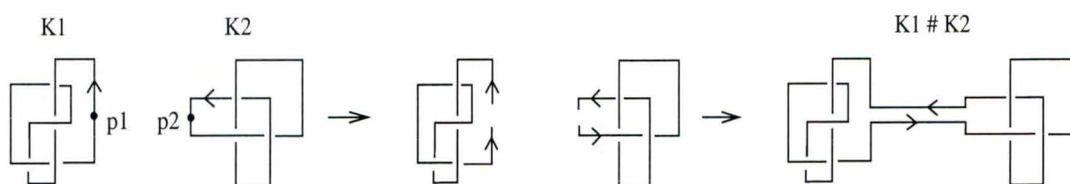
1.6. El Género y la Suma Conexa de Nudos.

Definición 1.6.1. Dados dos nudos orientados K_1 y K_2 , se define un nuevo nudo orientado de la siguiente manera: se toman puntos p_1 y p_2 en los correspondientes diagramas D_1 y D_2 (puntos que no estén ubicados en cruces). Se introducen cortes en dichos puntos, quedando un par de extremos sueltos en cada diagrama. Los dos extremos sueltos de D_1 se unen con los de D_2 de dos formas posibles, pero solo una es compatible con la orientación. El diagrama orientado que resulta, $D_1 \# D_2$, es el del nudo que estamos definiendo, que notaremos $K_1 \# K_2$ y que llamaremos *suma conexa* de K_1 y K_2 .

La suma conexa de nudos es un caso particular de la suma conexa de variedades orientadas de dimensión fija [Mas67]. Por ejemplo, la suma conexa entre dos esferas consiste en quitarle a cada una un disco abierto de radio pequeño y luego pegar lo que queda de ambas superficies por el nuevo borde que tienen como producto de haberles quitado los discos. La misma idea aplicada a dimensión uno nos da que a cada nudo le quitamos un intervalo y lo que queda de ambos nudos lo pegamos por los extremos que quedaron sueltos.

Nos conformaremos con esta definición intuitiva y poco formal, pero cabe aclarar que ésta puede darse con rigurosidad, demostrando además que la clase de equivalencia de $D_1 \# D_2$ no depende particularmente de D_1 y D_2 , sino que depende de sus clases de equivalencia¹² (tampoco depende de los puntos p_1 y p_2 elegidos en cada diagrama). Si no se consideraran las orientaciones, habría dos maneras de definir $K_1 \# K_2$, de las cuales no resultarían necesariamente nudos isotópicos. Siempre que utilicemos el operador $\#$ estaremos asumiendo que los nudos son orientados.

Ejemplo 1.6.2.



Suma conexa del ocho y el trébol

Por no depender de los nudos, sino de sus clases de equivalencia, la suma conexa es una operación binaria, asociativa y conmutativa, bien definida sobre las clases de isotopía de nudos orientados, que tiene como elemento neutro a la clase del nudo trivial.¹³

Definición 1.6.3. Si denotamos con \mathcal{K} al conjunto de nudos orientados, diremos que un invariante $i : \mathcal{K} \rightarrow \mathbb{N}_0$ es *aditivo*¹⁴ si $i(K_1 \# K_2) = i(K_1) + i(K_2) \forall K_1, K_2 \in \mathcal{K}$.

¹²Esto es: para que $(D_1 \# D_2) \sim (D'_1 \# D'_2)$ basta con que $D_1 \sim D'_1$ y $D_2 \sim D'_2$.

¹³Las clases de isotopía de nudos orientados, junto con la suma conexa, forman un monoide.

¹⁴Por ser aditivo e invariante, se trata en realidad de un morfismo de monoides entre \mathcal{K} y \mathbb{N}_0 .

Proposición 1.6.4. (Sin demostración) Existe un invariante¹⁵ de nudos orientados $g(K)$ que es aditivo y tal que $g(K) = 0 \Leftrightarrow K$ es trivial.

Definición 1.6.5. Se dice que un nudo K es *compuesto* si existen nudos no triviales K_1 y K_2 tales que $K \sim (K_1 \# K_2)$. Si K no es trivial ni compuesto se dice que es *primo*.

Proposición 1.6.6. Dado un nudo K no trivial:

1. K tiene factorización¹⁶ prima, es decir: existen $r \geq 1$ nudos primos K_1, \dots, K_r tales que $K \sim (K_1 \# K_2 \# \dots \# K_r)$.
2. K no tiene inverso con respecto a la suma conexa, en otras palabras: para cualquier nudo J , $K \# J$ no es isotópico al nudo trivial.

Demostración.

1. Si K es primo no hay nada por demostrar. Si no, por definición, K es compuesto: $K \sim (K_1 \# K_2)$ con K_1 y K_2 no triviales. Repetimos el mismo argumento para K_1 y K_2 hasta que todos los nudos de la factorización sean primos. Para ver es que este proceso termina en algún momento, notamos que un nudo K con $g(K) = r$ no puede factorizarse en más de r nudos no triviales: $K \sim (K_1 \# K_2 \# \dots \# K_s) \Rightarrow r = g(K) = g(K_1) + \dots + g(K_s) \geq s$.
2. $g(K \# J) = g(K) + g(J) \geq g(K) \geq 1 \Rightarrow K \# J$ es no trivial.

□

1.7. Linking Number.

Algunos de los invariantes mencionados hasta ahora, como $c(L)$, $u(K)$, *stick number* y el *número de componentes desenganchadas*, son ejemplos de invariantes que se definen a partir de la clase de isotopía del enlace o a partir de la clase de equivalencia de su diagrama. Son invariantes por definición. Su significado topológico es claro, pero su cómputo en casos concretos puede ser muy difícil. Por ejemplo, no es sencillo demostrar que el *stick number* del trébol es seis [ea97], pues hay que demostrar en primer lugar que es posible construir un trébol con seis segmentos (esto es lo más fácil), luego hay que demostrar que todo nudo hecho con menos de seis segmentos es isotópico al nudo trivial, y por último hay que demostrar que el trébol no es isotópico al nudo trivial (esto último lo haremos más adelante utilizando otro invariante).

Por otro lado hay invariantes que se definen directamente a partir del diagrama del enlace dado, se computan con más facilidad, pero su significado topológico o geométrico muchas veces no es tan claro, y además, dado que se definen a partir de un diagrama en particular, es necesario demostrar que realmente son invariantes. A continuación veremos un ejemplo de esta última clase de invariantes, el *linking number*.

¹⁵Nos referimos al *género* [Lic91].

¹⁶De hecho la factorización es única: si $K \sim (K_1 \# K_2 \# \dots \# K_r)$ y $K \sim (K'_1 \# K'_2 \# \dots \# K'_s)$ con K_i, K'_i primos, entonces $r = s$ y $K_i \sim K'_i \forall i$ (posiblemente luego de un reordenamiento) [Rob99].

Definición 1.7.1. Un *autocruce* en un diagrama es un cruce en el que los dos arcos que se cruzan provienen de una misma componente del enlace.

Definición 1.7.2. Un cruce en un diagrama orientado se dice:

$$\begin{cases} \textit{Positivo} & \text{si es del tipo } \begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \end{array} \\ \textit{Negativo} & \text{si es del tipo } \begin{array}{c} \diagdown \\ \diagup \end{array} \end{cases}$$

Definición 1.7.3.

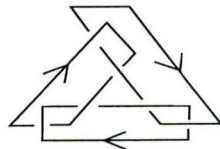
1. Dado un diagrama orientado D , se define el *linking number de D* como:

$$Lk(D) = \frac{1}{2} \sum_{\text{cruces}} l(c)$$

$$l(c) = \begin{cases} 0 & \text{si } c \text{ es autocruce} \\ 1 & \text{si } c \text{ no es autocruce y es positivo} \\ -1 & \text{si } c \text{ no es autocruce y es negativo} \end{cases}$$

2. Dado un enlace orientado L con diagrama D , se define el *linking number de L* como $Lk(L) = Lk(D)$.

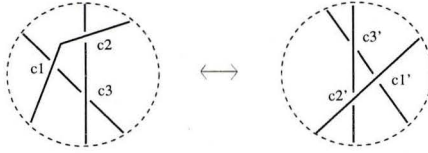
Ejemplo 1.7.4. Tomemos a D como el diagrama de la siguiente figura, en el que ningún cruce es autocruce pues cada componente es trivial. Según el criterio de la definición, en todos los casos $l(c) = 1$ y por lo tanto $Lk(D) = 3$.



Proposición 1.7.5. Lk es un invariante de enlaces orientados.

Demostración. Gracias al teorema de Reidemeister, basta con mostrar que si D y D' son diagramas equivalentes entonces $Lk(D) = Lk(D')$, lo cual se reduce al caso en que D' se obtiene de D luego de aplicar alguno de los cuatro R -movimientos.

- $R0$: Este movimiento no agrega ni quita cruces.
- $R1$: El cruce es un autocruce que aporta cero a la sumatoria que define al linking number.
- $R2$: O ambos cruces son autocruces o ninguno de los dos lo es. En el primer caso ambos cruces aportan cero, mientras que en el segundo caso un cruce aporta $+1$ y el otro -1 , independientemente de cuál sea la orientación.
- $R3$: Numerando los cruces de la siguiente manera:



podemos ver que independientemente de la orientación que se elija (hay ocho posibles) y de cuáles cruces sean autocruces y cuáles no, se tiene $l(c_i) = l(c'_i) \forall i = 1, 2, 3$. De manera que antes y después del movimiento se obtiene el mismo linking number.

□

A partir de la definición 1.7.3 se puede definir, para un enlace de n componentes, otro invariante:

Definición 1.7.6. Sea L un n -enlace orientado y sean L_1, \dots, L_n sus componentes. Se define $M_{Lk}(L)$ como la matriz simétrica que en el lugar i, j ($i \neq j$) tiene a $Lk(L_{i,j})$, siendo $L_{i,j}$ el link formado únicamente por las componentes L_i y L_j . Para el caso $i = j$ se toma $Lk(L_{i,j}) = 0$.

Por la proposición 1.7.5 sabemos que M_{Lk} es un invariante, y además para cualquier enlace L se tiene que $Lk(L)$ es la mitad de la suma de todos los valores de la matriz $M_{Lk}(L)$.

Lema 1.7.7. Sea D un diagrama orientado y sea c_0 un cruce cualquiera en D . Si D' se obtiene invirtiendo c_0 y tiene las mismas orientaciones que D , entonces $Lk(D') = Lk(D) - l(c_0)$.

Demostración. Denotando con c_0 al cruce en D y con c'_0 al mismo cruce (pero invertido) en D' , y teniendo en cuenta que $l(c'_0) = -l(c_0)$, tenemos:

$$Lk(D') = \frac{1}{2}(l(c'_0) + \sum_{c \neq c'_0, D'} l(c)) = \frac{1}{2}(l(c'_0) - l(c_0) + l(c_0) + \sum_{c \neq c'_0, D'} l(c)) = \frac{1}{2}(l(c'_0) - l(c_0)) + \frac{1}{2}(l(c_0) + \sum_{c \neq c_0, D} l(c)) = \frac{1}{2}(l(c'_0) - l(c_0)) + Lk(D) = Lk(D) - l(c_0)$$

□

El resultado establecido en el lema 1.5.1 se puede generalizar a enlaces: dado un diagrama (orientado o no) existen ciertos cruces que al ser invertidos dan como resultado un diagrama equivalente al del enlace trivial. Esto se logra numerando primero las componentes L_1, \dots, L_n y aplicando el lema 1.5.1 sobre cada una pero parametrizando la componente j con $z = t + 2j$ en lugar de $z = t$ (ver la demostración del lema 1.5.1).

Esto permite por un lado extender la definición de unknotting number a enlaces, que hasta ahora era solo para nudos, y por otro lado, junto con el lema anterior, obtener los siguientes corolarios.

Corolario 1.7.8. Para cualquier enlace orientado L , $Lk(L)$ es un número entero.

Demostración. Vemos la demostración para cualquier diagrama orientado D . Sean c_1, \dots, c_r cruces en D que al invertirlos dan como resultado D' , un diagrama equivalente al del enlace trivial. Luego:

$$0 = Lk(D') = Lk(D) - \sum_{j=1}^r l(c_j) \Rightarrow Lk(D) = \sum_{j=1}^r l(c_j) \in \mathbb{Z}$$

□

Corolario 1.7.9. *Para cualquier link orientado L , $|Lk(L)| \leq u(L)$.*

Demostración. Sea L un enlace y sea D un diagrama equivalente al de L en el que se realiza el mínimo de la definición del unknotting number. Sean $c_1, \dots, c_{u(L)}$ cruces del diagrama D que al invertirse dan como resultado un diagrama equivalente al del enlace trivial. Luego, por lo visto en la demostración del corolario anterior, se tiene que: $Lk(L) = Lk(D) = \sum_{j=1}^{u(L)} l(c_j)$, de lo cual $|Lk(L)| \leq \sum_{j=1}^{u(L)} |l(c_j)| \leq u(L)$, pues $|l(c_j)| \leq 1$. □

Capítulo 2

Coloreos

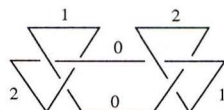
2.1. 3-Coloreos: Definición, Invarianza y Propiedades.

Consideremos tres colores con los que pintar cada uno de los arcos de un diagrama D . Si D tiene k arcos, entre las 3^k formas distintas que hay de hacerlo, nos restringimos a aquéllas que cumplen que en cada cruce los tres arcos que participan tienen los tres colores iguales o los tres diferentes. Veremos que la cantidad de formas distintas de hacer esto es un invariante, es decir, no cambia al aplicarle al diagrama cualquiera de los R -movimientos.

Si representamos a los colores con los elementos de \mathbb{Z}_3 , la condición de que en cada cruce los colores x, y, z sean todos iguales o todos distintos se traduce en la condición $x + y + z \equiv 0 \pmod{3}$:

- Si los tres colores son iguales, $x = y = z \Rightarrow x + y + z \equiv 3x \equiv 0 \pmod{3}$
- Si los tres son distintos, entonces $x + y + z \equiv 0 + 1 + 2 \equiv 0 \pmod{3}$
- Si $x + y + z \equiv 0 \pmod{3}$, o bien son los tres distintos, o bien hay dos iguales, luego $0 \equiv x + y + z \equiv 2v + w \equiv -v + w \pmod{3} \Rightarrow v \equiv w \pmod{3} \Rightarrow x \equiv y \equiv z \pmod{3}$.

Ejemplo 2.1.1.



Un colorado posible

Notación: al conjunto de arcos de un diagrama D lo denotamos $A(D)$.

Definición 2.1.2. Dado un enlace L con diagrama D :

1. Un 3-colorado sobre D es una función $A(D) \rightarrow \mathbb{Z}_3$ tal que para cada cruce vale $x + y + z \equiv 0 \pmod{3}$, siendo x, y, z los colores de los arcos correspondientes a dicho cruce.

2. El conjunto de los 3-coloreos posibles es $T_3(D) = \{(x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{Z}_3^k / x_{i_d} + x_{j_d} + x_{l_d} \equiv 0 \pmod{3} \forall d = 1, \dots, c\}$, siendo c y k el número de cruces y arcos de D respectivamente, y $x_{i_d}, x_{j_d}, x_{l_d}$ los colores de los arcos del cruce d .

3. La cantidad de 3-coloreos de D es $\gamma_3(D) = |T_3(D)|$.¹

4. La cantidad de 3-coloreos de L es $\gamma_3(L) = \gamma_3(D)$.

Como hemos dicho al principio, la cantidad de 3-coloreos de un diagrama con k arcos es menor o igual a 3^k .

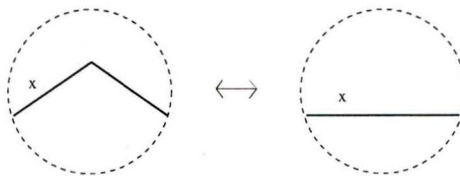
La condición de que los tres colores x, y, z verifiquen $x + y + z \equiv 0$ dice que los colores x, y de dos arcos determinan el color del tercer arco como $-x - y$.

Observar que si le asignamos colores a los arcos, para el primero hay 3 opciones y para cada una de ellas, la cantidad de posibles 3-coloreos de los arcos restantes es la misma en los tres casos. Luego $\gamma_3(D)$ es múltiplo de 3. Veremos más adelante que en realidad $\gamma_3(D)$ es una potencia de 3.

Proposición 2.1.3. γ_3 es un invariante de enlaces.

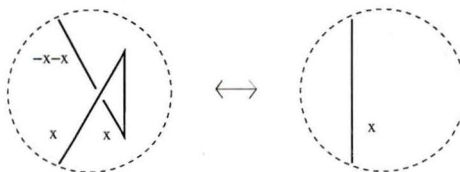
Demostración. Debemos ver que existe una biyección $\Gamma : T_3(D) \rightarrow T_3(D')$, siendo D y D' dos diagramas consecutivos luego de un R -movimiento. A continuación exhibimos esquemas que definen a Γ para cada uno de los cuatro R -movimientos. Sobre los arcos que no se dibujan, Γ actúa como la función identidad y es claro (luego de probar que está bien definida) que se trata de una biyección pues está definida en ambas direcciones y la composición de la ida con la vuelta (y viceversa) es igual a la identidad. Como por definición los coloreos permanecen idénticos sobre la parte no dibujada del diagrama, todo lo que hay que chequear es que los colores de los arcos que intersecan la línea punteada son iguales a uno y otro lado de la flecha \leftrightarrow .

■ $R0$:



Nada que probar.

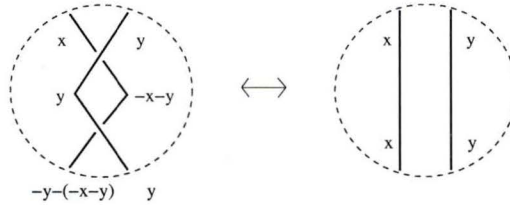
■ $R1$:



En este caso debe darse $-x - x = x$, lo cual es válido en \mathbb{Z}_3 .

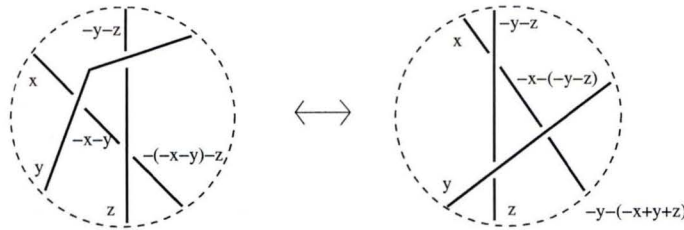
¹Utilizamos las dos barras verticales para denotar el cardinal de un conjunto.

▪ R2:



Aquí tenemos que debe cumplirse $-y - (-x - y) = x$, lo cual es evidente.

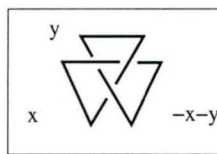
▪ R3:



En este caso se debe satisfacer $-(-x - y) - z = -y - (-x + y + z)$. Pero esto es lo mismo que $x + y - z = -y + x - y - z$, o bien $y = -y - y$, que como ya dijimos, es válido en \mathbb{Z}_3 . \square

Corolario 2.1.4. *El trébol es un nudo no trivial.*

Demostración. Si K_1 es el nudo trivial y K_2 es el trébol, por el teorema anterior basta ver que ambos nudos tienen diferente cantidad de 3-coloreos. Claramente $\gamma_3(K_1) = 3$ y para K_2 , si tomamos dos arcos cualesquiera en D_2 (su diagrama) les podemos asignar libremente cualquiera de los tres colores (incluso repitiendo), quedando determinado el color del tercer arco. Tenemos entonces que $\gamma_3(K_2) = 3^2 = 9$.



\square

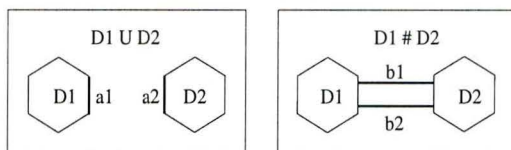
Proposición 2.1.5. *Dados nudos orientados K_1 y K_2 se satisfacen²:*

1. $\gamma_3(K_1 \cup K_2) = \gamma_3(K_1) \cdot \gamma_3(K_2)$
2. $\gamma_3(K_1 \# K_2) = \frac{1}{3} \cdot \gamma_3(K_1) \cdot \gamma_3(K_2)$
3. *Existen infinitos nudos no isotópicos.*

²Por unión de enlaces o nudos nos referimos a una unión desenganchada; es decir que el número de componentes desenganchadas de la unión es igual a la suma de los números de componentes desenganchadas de cada uno (definición 1.4.8).

Demostración.

1. Es inmediato dado que podemos suponer que los arcos del diagrama de K_1 no se cruzan con los del diagrama de K_2 .
2. Sean D_1, D_2 los diagramas de K_1, K_2 , respectivamente. Llamemos a_1 y a_2 a los arcos de D_1 y D_2 por los que se pegan los diagramas y b_1, b_2 los arcos ya unidos en $D_1 \# D_2$:

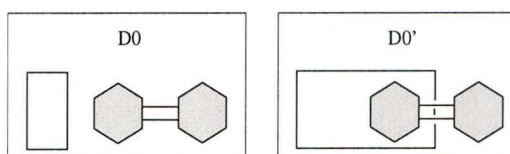


Sea T_U el conjunto de los 3-coloreos sobre $D_1 \cup D_2$ que a los arcos a_1 y a_2 les asignan el mismo color y sea $T_{\#}$ el conjunto de los 3-coloreos sobre $D_1 \# D_2$ que a los arcos b_1 y b_2 les asignan el mismo color.

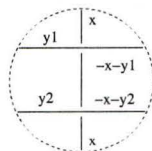
Veamos primero que existe $\rho : T_U \rightarrow T_{\#}$ biyectiva. Dado un elemento de T_U , consideramos el 3-coloreo sobre $T_{\#}$ que a b_1 y b_2 les asigna el mismo color que tiene a_1 en T_U , y que a los demás arcos los deja con el mismo color que tienen en T_U . Es claro que la función definida en sentido contrario reemplazando b donde dice a es precisamente ρ^{-1} .

Tenemos entonces que $|T_{\#}| = |T_U| = \frac{1}{3} \gamma_3(D_1) \cdot \gamma_3(D_2)$. La última igualdad surge de combinar lo que dice el ítem 1 con el hecho de que hay dos arcos (a_1 y a_2) que deben tener el mismo color. Resta ver que $|T_{\#}| = \gamma_3(D_1 \# D_2)$.

Sean D_0 y D'_0 los siguientes diagramas equivalentes, en donde los hexágonos unidos por los arcos horizontales forman $D_1 \# D_2$ y el rectángulo es el nudo trivial:



La configuración de los arcos en D'_0 hace que el nudo trivial pueda tener cualquier color y los arcos b_1 y b_2 deban tener el mismo color entre sí, pues



$-x - y_1 = -x - y_2 \Rightarrow y_1 = y_2$. Luego $3\gamma_3(D_1 \# D_2) = \gamma_3(D_0) = \gamma_3(D'_0) = 3|T_{\#}|$, de donde obtenemos lo que queríamos.

3. Gracias a 2, para un nudo cualquiera K tenemos $\gamma_3(\#^n K) = \frac{1}{3^{n-1}} \cdot \gamma_3(K)^n$. Tomando K igual al trébol resulta que $\gamma_3(\#^n K) = \frac{9^n}{3^{n-1}} = 3^{n+1}$, de lo cual se deduce que para cada n , $\#^n K$ es un nudo diferente (no hay dos isotópicos).³

□

La siguiente proposición da un método para computar $\gamma_3(D)$.

Proposición 2.1.6. Sea $B(D)$ la matriz del sistema $x_{i_d} + x_{j_d} + x_{l_d} = 0$ (con d entre 1 y c), proveniente de la definición de $T_3(D)$ en 2.1.2; esto es:

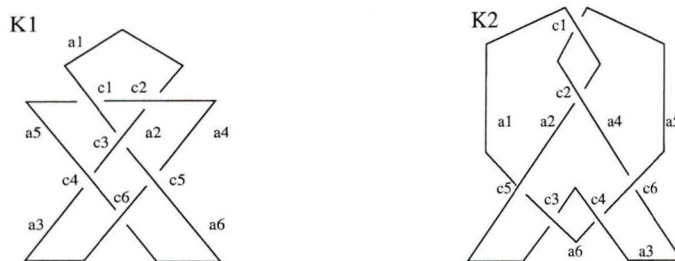
$$b_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si el arco } j \text{ incide en el cruce } i \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

$$\text{Luego } \gamma_3(D) = 3^{\dim(\text{Ker } B(D))}.$$

Demostración. $\gamma_3(D) = |T_3(D)| = |\{(x_1, \dots, x_k) : x_{i_d} + x_{j_d} + x_{l_d} \equiv 0 \pmod{3} \forall d\}| = |\text{Ker}(B(D))| = 3^{\dim(\text{Ker } B(D))}$, dado que en general, si V es un k -espacio vectorial, entonces $|V| = |k|^{\dim V}$ (en este caso $k = \mathbb{Z}_3$). □

Este mismo resultado, con igual demostración, puede aplicarse a los \mathbb{Z}_p -coloreos (p primo), que veremos más adelante en el ejemplo 2.2.2.

Ejemplo 2.1.7. Consideremos los nudos K_1 y K_2 correspondientes a los siguientes diagramas (denotamos a los arcos con a_j y a los cruces con c_j):



Las matrices resultan ser:

$$B(D_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B(D_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Cuyos núcleos tienen dimensión 1 y 2 respectivamente, de lo que resulta que K_1 y K_2 son no isotópicos pues tienen distinta cantidad de 3-coloreos. Observar que la proposición anterior también está diciendo que la dimensión del núcleo de $B(D)$ es un invariante.

³A esta misma conclusión, la de que existen infinitos nudos no isotópicos, se puede llegar en forma análoga usando el género, gracias a su aditividad.

2.2. Q-Coloreos.

2.2.1. Quandles: Axiomas y Ejemplos.

Hemos definido los 3-coloreos y demostrado que la cantidad de 3-coloreos que tiene un diagrama es un invariante. A continuación daremos una noción más general, la de Q -coloreo de un enlace, y veremos que también la cantidad de Q -coloreos resulta ser un invariante.

Si bien el 3-coloreo lo definimos para un enlace no necesariamente orientado, los Q -coloreos se aplican en general a enlaces orientados, y en algunos casos, como el del 3-coloreo, la orientación se puede ignorar.

Hemos dicho que un 3-coloreo es una asignación de elementos de \mathbb{Z}_3 a los arcos del diagrama de manera tal que si x e y fueron asignados a dos de los arcos que intervienen en un cruce, el restante debe ser $-x - y$. Usando solamente esta propiedad demostramos que la cantidad de 3-coloreos es un invariante.

Además se puede verificar fácilmente que con la notación $x * y = -x - y$, la operación $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3 \xrightarrow{*} \mathbb{Z}_3$ cumple:

1. $x * x = x \quad \forall x \in \mathbb{Z}_3$.
2. $x \mapsto x * y$ es una biyección de \mathbb{Z}_3 en sí mismo $\forall y \in \mathbb{Z}_3$.
3. $(x * y) * z = (x * z) * (y * z) \quad \forall x, y, z \in \mathbb{Z}_3$.

Generalizando esto tenemos:

Definición 2.2.1. Un *quandle* Q es un conjunto con una operación binaria denotada con $*$ que cumple los siguientes axiomas:

1. $x * x = x \quad \forall x \in Q$.
2. $x \mapsto x * y$ es una biyección de Q en sí mismo $\forall y \in Q$.
3. $(x * y) * z = (x * z) * (y * z) \quad \forall x, y, z \in Q$.

Notación: Para cada $y \in Q$, $Q \xrightarrow{^{-*y}} Q$ tiene inversa, que evaluada en un x denotamos $x *' y$. Tenemos entonces que: $(x *' y) * y = x$; $(x * y) *' y = x \quad \forall x, y \in Q$.

Ejemplos 2.2.2. Los tres primeros son casos particulares del cuarto.

1. $Q = \mathbb{Z}_3$, $x * y = -x - y$.
2. $Q = \mathbb{Z}_5$, $x * y = -x + 2y$.
3. $Q = \mathbb{Z}_n$, con $g \in \mathcal{U}(\mathbb{Z}_n)$, $x * y = gx + (1 - g)y$.
4. $Q = (G, +)$ grupo abeliano, con $g \in \text{Aut}(G)$, $x * y = g(x) + (Id - g)(y)$:
 - $x * x = g(x) + (Id - g)(x) = g(x) + Id(x) - g(x) = x \quad \forall x \in G$.
 - Para un $y \in G$ fijo, $x \mapsto g(x) + (Id - g)(y)$ es una biyección pues g lo es: $\forall z \exists! x / g(x) + (Id - g)(y) = z$, de hecho $x = g^{-1}(z - (Id - g)(y))$.

- Tenemos, $\forall x, y, z \in G$:

$$\begin{aligned}
(x * y) * z &= (g(x) + (Id - g)(y)) * z = \\
&= g(g(x) + (Id - g)(y)) + (Id - g)(z) = \\
&= g^2(x) + g(y) - g^2(y) + z - g(z) = \\
&= g^2(x) + g(z) - g^2(z) + g(y) - g^2(y) + z - 2g(z) + g^2(z) = \\
&= g(g(x) + (Id - g)(z)) + (Id - g)(g(y)) + (Id - g)^2(z) = \\
&= g(g(x) + (Id - g)(z)) + (Id - g)(g(y) + (Id - g)(z)) = \\
&= (g(x) + (Id - g)(z)) * (g(y) + (Id - g)(z)) = \\
&= (x * z) * (y * z)
\end{aligned}$$

5. $Q = (G, \cdot)$ grupo, $x * y = y^{-1}xy$:

- $x * x = x^{-1}xx = x \forall x \in G$.
- Para un $y \in G$ fijo, $x \mapsto y^{-1}xy$ es una biyección: $\forall z \exists! x / y^{-1}xy = z$, de hecho $x = yzy^{-1}$.
- Tenemos, $\forall x, y, z \in G$:

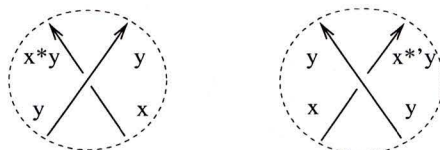
$$\begin{aligned}
(x * y) * z &= (y^{-1}xy) * z = z^{-1}y^{-1}xyz = z^{-1}y^{-1}zz^{-1}xzz^{-1}yz = \\
&= (z^{-1}yz)^{-1}(z^{-1}xz)(z^{-1}yz) = (z^{-1}xz) * (z^{-1}yz) = \\
&= (x * z) * (y * z)
\end{aligned}$$

6. $Q = (G, \cdot)$ grupo, $x * y = yx^{-1}y$:

- $x * x = xx^{-1}x = x \forall x \in G$.
- Para un $y \in G$ fijo, $x \mapsto yx^{-1}y$ es una biyección: $\forall z \exists! x / yx^{-1}y = z$, de hecho $x = yz^{-1}y$.
- Tenemos, $\forall x, y, z \in G$:

$$\begin{aligned}
(x * y) * z &= (yx^{-1}y) * z = z(yx^{-1}y)^{-1}z = zy^{-1}xy^{-1}z = \\
&= zy^{-1}zz^{-1}xz^{-1}zy^{-1}z = (zy^{-1}z)(z^{-1}xz^{-1})(zy^{-1}z) = \\
&= (zy^{-1}z)(zx^{-1}z)^{-1}(zy^{-1}z) = (zx^{-1}z) * (zy^{-1}z) = \\
&= (x * z) * (y * z)
\end{aligned}$$

Definición 2.2.3. Fijado un quandle $(Q, *)$, un Q -coloreo sobre un diagrama D orientado es una función $A(D) \xrightarrow{\mathcal{C}} Q$ tal que en cada cruce del diagrama se tiene alguna de las dos situaciones:



A los elementos de Q los llamamos *colores*.

Al solo efecto de que la cantidad de Q -coloreos sea un número finito, supondremos de ahora en adelante que los quandles considerados son finitos.

Definición 2.2.4.

1. Dado un diagrama orientado, la *cantidad de Q -coloreos de D* es $\gamma_Q(D) = |T_Q(D)|$, siendo $T_Q(D)$ el conjunto de todos los Q -coloreos posibles para D .
2. Dado un enlace L orientado con diagrama D , la *cantidad de Q -coloreos de L* es $\gamma_Q(L) = \gamma_Q(D)$.

Al igual que para los 3-coloreos, $\gamma_Q(D) \leq |Q|^{|A(D)|}$.

2.2.2. Invarianza de γ_Q y Necesidad de los Axiomas.

Observar que al margen de que se trate de un invariante, no hemos dicho porqué se definieron a los 3-coloreos como aquellos que cumplen que en cada cruce los tres colores son iguales o los tres colores son distintos. Simplemente impusimos esta condición, vimos que era equivalente a decir que si dos colores eran x e y entonces el tercero debía ser $-x - y$, luego probamos la invarianza de la cantidad de 3-coloreos y por último generalizamos tres propiedades que cumplía la regla $(x, y) \mapsto -x - y$.

Vale la pena, no obstante, remarcar que los axiomas elegidos son razonables, pues no solo implicarán la invarianza de la cantidad de Q -coloreos, sino que además son casi⁴ necesarios para que esta invarianza ocurra.

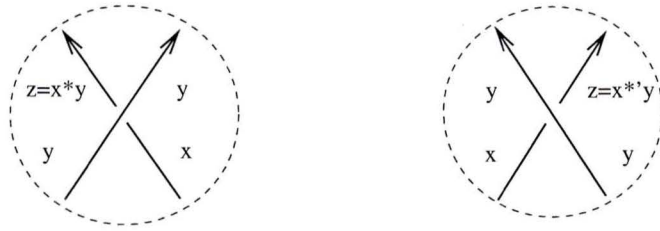
Ignoremos por un momento las definiciones 2.2.1, 2.2.3, 2.2.4 y comencemos por tomar un conjunto finito cualquiera Q y decir que un Q -coloreo es simplemente una asignación $A(D) \xrightarrow{\mathcal{C}} Q$, denotando con T_Q al conjunto de coloreos posibles y con γ_Q a su cardinal.

Si pretendemos que la cantidad de Q -coloreos posibles sobre los arcos de un diagrama sea un invariante, debemos buscar una restricción a los coloreos admisibles pues es evidente que colorear independiente y arbitrariamente los arcos de un diagrama no resulta de interés, dado que esencialmente⁵ es contar los arcos del diagrama, que además no es un invariante.

Decir que los colores sobre los arcos no deben ser arbitrarios es como decir que deben cumplir ciertas relaciones, y es natural que éstas se impongan localmente sobre los arcos de un mismo cruce. Como en cada cruce participan siempre tres arcos, también es natural pedir que el color de un arco dependa del color de los otros dos; lo que se traduce en una ecuación que relaciona los tres colores asociados a cada cruce. Debido a que hay dos tipos de cruces, se debe trabajar simultáneamente con los dos casos:

⁴Ver lo que se dice enseguida acerca de la función Γ .

⁵Si no pusiéramos ninguna restricción a la forma de colorear, la cantidad de distintos coloreos sería $|Q|^{|A(D)|}$, que no dice más que cuánto es $|A(D)|$ (asumiendo que Q es dato).



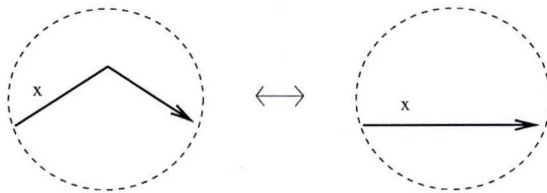
A priori las funciones $Q \times Q \xrightarrow{*} Q$ y $Q \times Q \xrightarrow{*' } Q$ son independientes entre sí, y al pretender que la cantidad de coloreos sea un invariante, irán surgiendo condiciones sobre ellas.

Para que la cantidad de coloreos sea un invariante, queremos que exista una biyección $\Gamma : T_Q(D_1) \rightarrow T_Q(D_2)$, entre los Q -coloreos de dos diagramas D_1 y D_2 relacionados por un R -movimiento. Dado que estos diagramas son por definición idénticos salvo localmente (dentro del círculo punteado), es posible definir a $\Gamma = Id$ para los arcos fuera del círculo y para los arcos internos que intersecan al círculo.⁶ En los cuatro R -movimientos esta condición define totalmente a Γ sobre todo el diagrama y por cómo se define en los esquemas es una biyección.

Veremos a continuación cómo la exigencia de que Γ esté bien definida, en el sentido de que los colores sean consistentes con las operaciones $*$ y $'$, determinará los axiomas de la definición 2.2.1. Al estar bien definida, resultará automáticamente una biyección y por ende γ_Q será un invariante.

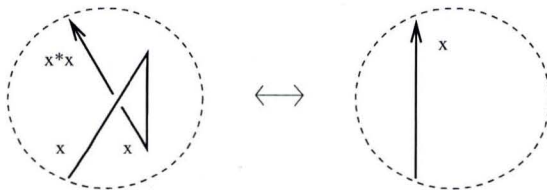
En los esquemas no denotamos a Γ pero suponemos siempre que es la flecha de izquierda a derecha.

- $R0$:



La invarianza de γ_Q bajo este movimiento (y su opuesto en orientación) es independiente de qué axiomas cumplan $*$ y $'$, por lo tanto no implica ni depende de ningún axioma.

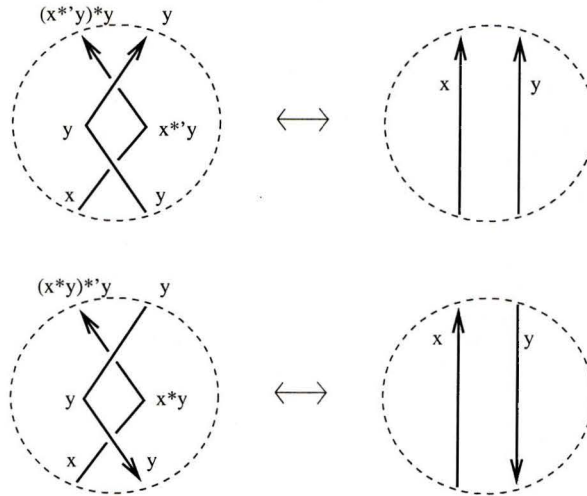
- $R1$:



La invarianza de γ_Q bajo $R1$ (y el opuesto) es equivalente a $x * x = x \forall x \in Q$, que es exactamente el axioma 1.

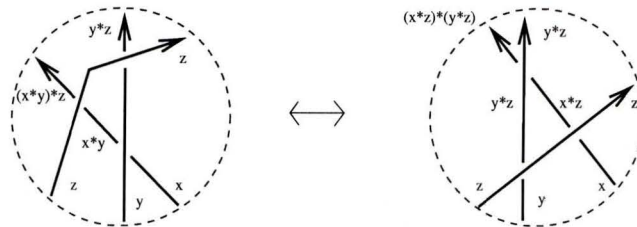
⁶En principio, si no pusiéramos esta restricción sobre Γ , podrían surgir axiomas para $*$ y $'$ distintos de los que obtendremos, con los que también la cantidad de Q -coloreos fuera invariante.

- $R2$: De dos⁷ de las cuatro orientaciones posibles:



resulta que γ_Q es invariante bajo $R2$ si y solo si $(x *' y) * y = (x * y) *' y = x$ $\forall x, y \in Q$, lo cual es equivalente a que $\forall y \in Q$, $Q \xrightarrow{-*y} Q$ y $Q \xrightarrow{-*'y} Q$ sean funciones mutuamente inversas, que es precisamente el axioma 2.

- $R3$: Considerando una de las ocho orientaciones posibles:



resulta que γ_Q es invariante bajo $R3$ si y solo si $(x * y) * z = (x * z) * (y * z)$ $\forall x, y, z \in Q$, que es el axioma 3.

Observar que si bien usamos solo algunas de las orientaciones posibles para mostrar que los axiomas son necesarios y suficientes, es evidente que también son suficientes para demostrar la invarianza bajo los R -movimientos con las orientaciones no utilizadas.

Ahora sí entonces, con las definiciones 2.2.1, 2.2.3 y 2.2.4, hemos probado la siguiente proposición.

Proposición 2.2.5. γ_Q es un invariante de enlaces orientados.

Veamos ahora porqué el 3-coloreo puede aplicarse a un diagrama no orientado siendo que es un caso particular de Q -coloreo y que éste se define en base a la orientación del diagrama.

Recordemos que los colores sobre los arcos del diagrama deben cumplir que si:

⁷Las otras dos orientaciones no aportan más información.



entonces $z = x * y$, $y z = x *' y$, respectivamente.

Supongamos que $*$ fuera conmutativa e igual a su inversa: $y * x = x * y = x *' y$ $\forall x, y \in Q$. Tendríamos, a partir del diagrama anterior, que $z = x * y = y * x$, $y = x * z = z * x$, $x = y * z = z * y$ $\forall x, y, z \in Q$; en otras palabras si dos arcos cualesquiera tuvieran colores x e y , el tercer color sería $x * y$.

Esto es lo que ocurre con los 3-coloreos, pues así lo definimos y además $*$ es conmutativa e igual a su inversa cuando $x * y = -x - y$.

O viéndolo más en general:

Lema 2.2.6. *Para el caso $Q = (G, +)$, $x * y = g(x) + (Id - g)(y)$, con $g \in Aut(G)$ tal que $g^2 = Id = g \circ 2Id$, se tiene que la cantidad de Q -coloreos es un invariante de enlaces no orientados.*

Demostración. Veamos que la operación $*$ es conmutativa y que coincide con su inversa:

- $x * y = y * x \forall x, y \Leftrightarrow g(x) + (Id - g)(y) = g(y) + (Id - g)(x) \forall x, y \Leftrightarrow g(x) - g(y) = x - g(x) - y + g(y) \forall x, y \Leftrightarrow g(2(x - y)) = x - y \forall x, y \Leftrightarrow g(2x) = x \forall x \Leftrightarrow g \circ 2Id = Id.$
- $x * y = x *' y \forall x, y \Leftrightarrow g(x) + (Id - g)(y) = g^{-1}(x - (Id - g)(y)) \forall x, y \Leftrightarrow g^2(x) + g(y) - g^2(y) = x - y + g(y) \forall x, y \Leftrightarrow g^2(x) - x = g^2(y) - y \forall x, y \Leftrightarrow g^2(x) - x = 0 \forall x \Leftrightarrow g^2 = Id.$

□

En el caso de $Q = \mathbb{Z}_n$, con $x * y = gx + (1 - g)y$, y $g \in \mathcal{U}(\mathbb{Z}_n)$, la condición del lema es precisamente $g^2 \equiv 2g \equiv 1 (n)$, válida únicamente⁸ para $n = 3$ y $g = 2$, que es el caso de los 3-coloreos.

2.3. Quandle Cocycle Invariant.

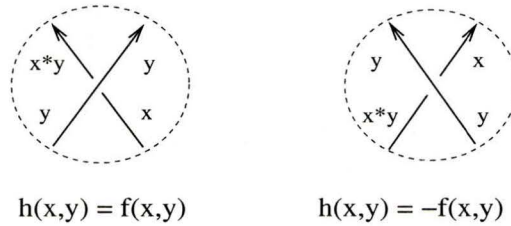
Daremos ahora la definición de un invariante llamado *quandle cocycle* que además de dar la cantidad de Q -coloreos, los separa a éstos en clases.

Fijamos (Q, G, f) , siendo Q un quandle (finito), G un grupo abeliano y $f : Q \times Q \rightarrow G$, sin por el momento ninguna restricción. Dado un diagrama orientado D y un Q -coloreo \mathcal{C} sobre D , consideramos la asignación:

$$A(D) \xrightarrow{\mathcal{C}} Q \mapsto \Sigma_{D, \mathcal{C}} = \sum_{\text{cruces } D} h(x, y) \in G$$

⁸Tenemos $2g \equiv 1 (n) \Rightarrow 4g^2 \equiv 2g (n) \Rightarrow 4 \equiv 1 (n)$ (pues $g^2 \equiv 1 (n)$) $\Rightarrow n = 3$, y luego $g = 2$.

definiendo $h(x, y)$ a partir de f como se muestra en la siguiente figura⁹:

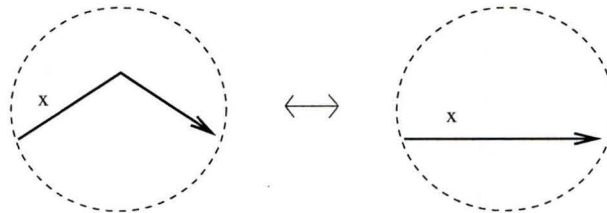


En lugar de contar la cantidad total de Q -coloreos posibles sobre D , lo que contamos es, para cada elemento $\alpha \in G$, a cuántos Q -coloreos se les asigna α . Sumando luego sobre todos los elementos de G la cantidad de Q -coloreos asignados a cada uno, tendremos la cantidad total de Q -coloreos.

Ya sabemos que dados dos diagramas orientados relacionados por un R -movimiento, los Q -coloreos están en correspondencia por una biyección Γ . Ahora debemos ver que la cantidad de Q -coloreos asociada a cada α es un invariante. Esto lo haremos mostrando que a los coloreos \mathcal{C} y $\Gamma(\mathcal{C})$, de un diagrama y su equivalente (por un R -movimiento) se les asigna el mismo $\alpha \in G$. Para que esto suceda, sin embargo, habrá que establecer ciertas condiciones sobre f .

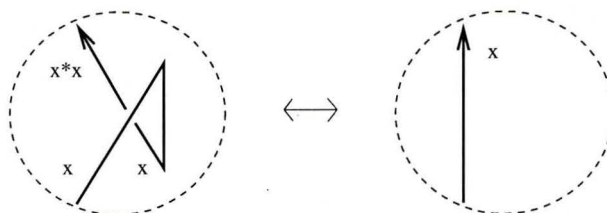
Más concisamente, dados $D_1 \sim D_2$ (mediante algún R -movimiento), queremos ver que $\Sigma_{D_1, \mathcal{C}} = \Sigma_{D_2, \Gamma(\mathcal{C})}$.

- $R0$:



Claramente $\Sigma_{D_1, \mathcal{C}} = \Sigma_{D_2, \Gamma(\mathcal{C})}$ sin pedir ninguna restricción sobre f .

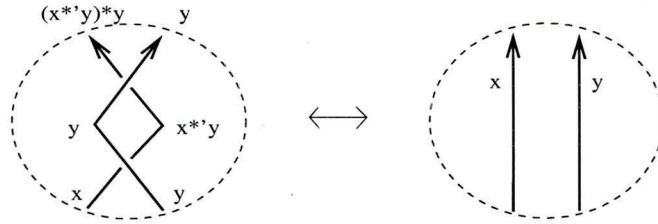
- $R1$:



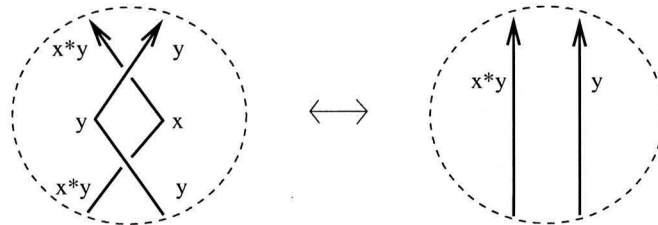
En este caso $\Sigma_{D_1, \mathcal{C}} = \Sigma_{D_2, \Gamma(\mathcal{C})} + h(x, x)$, por lo que la condición debe ser $h(x, x) = 0 \forall x \in Q$, o sea $f(x, x) = 0 \forall x \in Q$.

⁹Observar que lo que dicen estos diagramas es equivalente a lo que dicen los de la def. 2.2.3.

■ R2: Para

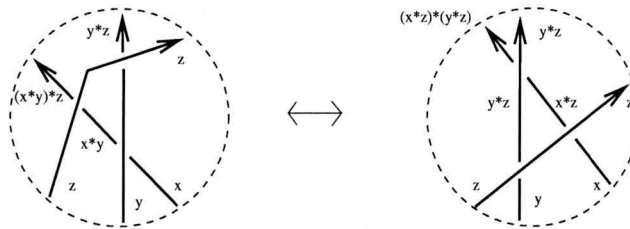


hacemos el cambio de variables $z = x *' y$, despejamos $x = z * y$, y renombrando a z como x tenemos:



de donde $\Sigma_{D_1, \mathcal{E}} = \Sigma_{D_2, \Gamma(\mathcal{E})} - f(y, x) + f(y, x) \forall x, y \in Q$, por lo cual no se requiere nada especial sobre f .

■ R3:



Aquí tenemos:

$$\Sigma_{D_1, \mathcal{E}} - \Sigma_{D_2, \Gamma(\mathcal{E})} = f(x, y) + f(x * y, z) + f(y, z) - [f(x, z) + f(y, z) + f(x * z, y * z)]$$

de lo que resulta la condición $f(x, y) + f(x * y, z) = f(x, z) + f(x * z, y * z) \forall x, y, z \in Q$.

Establecemos ahora las definiciones y resultados obtenidos.

Definición 2.3.1. Dado un quandle Q y un grupo abeliano G , una función $f : Q \times Q \rightarrow G$ es un 2-cociclo si:

1. $f(x, x) = 0 \forall x, y \in Q$.
2. $f(x, y) + f(x * y, z) = f(x, z) + f(x * z, y * z) \forall x, y, z \in Q$.

Definición 2.3.2. Dado un quandle finito Q , un grupo abeliano G y un 2-cociclo $f : Q \times Q \rightarrow G$, y dado un diagrama orientado D , definimos la función $\Sigma_D : T_Q(D) \rightarrow G$, dada por $\Sigma_D(\mathcal{C}) = \Sigma_{D,\mathcal{C}}$. Luego:

1. El *quandle cocycle invariant* de D es $\sigma(D) = \{|\Sigma_D^{-1}(\alpha)|\}_{\alpha \in G}$.
2. Para un enlace orientado L con diagrama D , el *quandle cocycle invariant* de L es $\sigma(L) = \sigma(D)$.

Observación 2.3.3. Si bien Σ_D y σ dependen de la terna (Q, G, f) dada inicialmente, no lo explicitamos para no recargar la notación.

Proposición 2.3.4. $\sigma(L)$ es un invariante de enlaces orientados.

Observar que solo hemos demostrado la invarianza de σ para una sola orientación en cada R -movimiento. Los casos restantes son análogos a los hechos.

Como ya hemos mencionado, σ incluye la información γ_Q ya que $\gamma_Q(D) = \sum_{\alpha \in G} |\Sigma_D^{-1}(\alpha)|$; y cuando se toma $f \equiv 0$, la información es la misma. Los Q -coloreos se separan en clases de equivalencia dadas por las preimágenes vía Σ_D de los α de G .

Observación 2.3.5. Generalmente, el invariante que definimos como $\sigma(D) = \{|\Sigma_D^{-1}(\alpha)|\}_{\alpha \in G}$, se lo suele definir como $\sigma(D) = \sum_{\alpha \in G} g_\alpha \alpha$, siendo $g_\alpha = |\Sigma_D^{-1}(\alpha)|$.

Si bien ambas formas tienen a priori la misma información, la última es más conveniente ya que significa que σ es una función $\mathcal{L}_o \rightarrow \mathbb{Z}(G)$ y por lo tanto ciertas propiedades en el contexto de enlaces pueden tener un correlato dentro del álgebra $\mathbb{Z}[G]$.

Además, se puede definir la noción de 2-coborde y verificar que el invariante σ asociado a f no depende de la deformación de f por cobordes.

Capítulo 3

Polinomios y Aplicaciones

Estudiaremos ahora un invariante para enlaces orientados conocido como polinomio de Jones. Es un polinomio de una variable con coeficientes enteros que se asocia a cada enlace. Se define a partir de otro polinomio llamado *corchete de Kauffman* y a su vez se generaliza a un polinomio de dos variables llamado HOMFLY.

Estudiaremos algunas de las propiedades de estos polinomios y veremos cómo se utilizaron para demostrar resultados relevantes dentro de la teoría de nudos, como por ejemplo la conjetura de Tait referida a diagramas alternados y reducidos, o condiciones que garantizan la no isotopía de un enlace con su imagen.

3.1. Corchete de Kauffman: Definición Axiomática.

Definición 3.1.1. Dado un diagrama D se define el *corchete de Kauffman* $\langle D \rangle \in \mathbb{Z}[A^{\pm 1}]$ mediante cuatro axiomas (O es el diagrama del nudo trivial de la def. 1.1.5):

- AXIOMA 0

$$\langle \text{Diagrama con un cruce} \rangle = \langle \text{Diagrama con una línea horizontal} \rangle$$

- AXIOMA 1

$$\langle \text{Diagrama con un cruce} \rangle = A \langle \text{Diagrama con una línea vertical} \rangle + A^{-1} \langle \text{Diagrama con una línea horizontal} \rangle$$

- AXIOMA 2

$$\langle D \cup O \rangle = (-A^2 - A^{-2}) \langle D \rangle$$

- AXIOMA 3

$$\langle O \rangle = 1$$

Observación 3.1.2.

- El axioma 1 es válido para todo cruce del diagrama D . A pesar de lo establecido en la observación 1.1.6, el axioma 0 implica que en los axiomas 2 y 3 de lo mismo que se tome en diagrama del nudo trivial de la definición 1.1.5 o cualquier otro isotópico planar a él. Lo importante es que sea el diagrama de un nudo sin cruces.
- Rotando noventa grados los diagramas del axioma 1 se obtiene el axioma 1'.

$$\langle \text{Cruce} \rangle = A \langle \text{Diagrama 1} \rangle + A^{-1} \langle \text{Diagrama 2} \rangle$$

- En algunos trabajos [Kau88], se presenta, antes que el corchete de Kauffman, otro polinomio llamado simplemente *corchete* que se define para todo diagrama. Se pide: que $[D] \in \mathbb{Z}[A, B, d]$, siendo A, B, d variables que conmutan, que $[]$ sea invariante bajo $R0$, y que además valgan los siguientes axiomas:

1. $[\diagup] = A[||] + B[=]; [\diagdown] = A[=] + B[||], \forall$ cruce en D .
2. $[D \cup O] = d[D]$.
3. $[O] = d$.

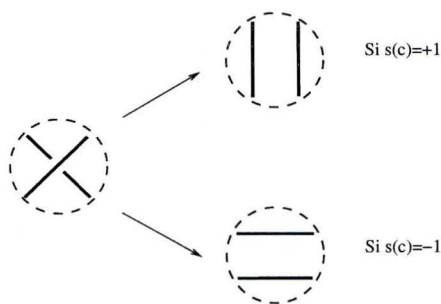
Como se quiere que $[]$ sea un invariante de diagramas, se buscan condiciones sobre A, B y d para que $[]$ resulte invariante bajo los cuatro R -movimientos. Se ve fácilmente que la invarianza de $[]$ bajo $R2$ implica invarianza bajo $R3$, y que si se satisfacen las ecuaciones $AB = 1, ABd + A^2 + B^2 = 0$ entonces se tiene invarianza bajo $R2$. Se propone entonces como solución, $B = A^{-1}$ y $d = -A^2 - A^{-2}$. Definiendo luego $\langle D \rangle = d^{-1}[D]$, se tiene que $\langle D \rangle$ satisface los axiomas de la definición 3.1.1.

3.2. Existencia y Unicidad del Corchete: Forma Explícita.

Veremos a continuación que los cuatro axiomas establecidos determinan únicamente al corchete de Kauffman, en el sentido de que existe una única función $\langle \rangle : \mathcal{L}_{no} \rightarrow \mathbb{Z}[A^{\pm 1}]$ que los satisface para todo diagrama. La demostración se sustenta en el teorema 3.2.6 que da además una fórmula explícita para $\langle D \rangle$.

Definición 3.2.1.

1. Dado un diagrama D , un *estado* s sobre D es una función que a cada cruce le asigna un elemento de $\{1, -1\}$. Denotamos con S_D al conjunto de todos los estados posibles de D .
2. Dados un diagrama D y un estado s definimos el diagrama sD obtenido a partir de anular en D todos los cruces según el siguiente criterio:



Observación 3.2.2. Como por definición sD no tiene cruces, sus componentes conexas son isotópicas (en el plano) a S^1 . Notar que sD es el diagrama de un enlace trivial.

Definición 3.2.3.

1. Denotamos con $|sD|$ a la cantidad de componentes en sD y con $\sum s$ a la suma de los valores de s .
2. \bar{s} es opuesto a s si \forall cruce c : $s(c) = 1 \Leftrightarrow \bar{s}(c) = -1$.

Observación 3.2.4. Si D no tiene cruces (el conjunto de cruces de D es vacío) entonces hay un único¹ estado posible sobre D . Denotamos con s_ϕ a este único estado y con S_ϕ al conjunto $\{s_\phi\}$. Tenemos además que $s_\phi D = D$ y $\sum s_\phi = 0$.

Lema 3.2.5. $\langle D \rangle = (-A^2 - A^{-2})^{n-1}$, si D es el diagrama del n -enlace trivial de la definición 1.1.5 o alguno isotópico planar a él.

Demostración. Inducción en n . Para $n = 1$ tenemos $\langle D \rangle = 1 = (-A^2 - A^{-2})^{n-1}$, por el axioma 3. Si $n > 1$, $D = D' \cup O$, siendo D' el diagrama del enlace trivial de $n - 1$ componentes y O el nudo trivial. Por el axioma 2 y la h.i., tenemos $\langle D \rangle = (-A^2 - A^{-2}) \langle D' \rangle = (-A^2 - A^{-2})^{n-1}$. \square

Teorema 3.2.6. Dado un diagrama D , se tiene que $\langle D \rangle = \sum_{s \in S_D} \langle D|_s \rangle$ siendo $\langle D|_s \rangle = A^{\sum s} \cdot (-A^2 - A^{-2})^{|sD|-1}$.

Demostración. Hacemos inducción en la cantidad de cruces de D . Si esta cantidad es cero, entonces D es isotópico planar al diagrama del n -enlace trivial de la definición 1.1.5, para algún $n \in \mathbb{N}$. Por el lema anterior:

$$\langle D \rangle = (-A^2 - A^{-2})^{n-1} = A^{\sum s_\phi} (-A^2 - A^{-2})^{|s_\phi D|-1} = \sum_{s \in S_\phi} A^{\sum s} (-A^2 - A^{-2})^{|sD|-1}$$

Supongamos ahora que D sí tiene cruces. Sea $c_0 = \times$ uno de ellos y sean D_+ , D_- los diagramas que se obtienen al reemplazar c_0 por $||$ y $==$, respectivamente. Por el axioma 1 y por la h.i., tenemos entonces que:

¹En general, si $A = \phi$, el conjunto de funciones de A en B tiene un solo elemento para todo conjunto B no vacío.

$$\begin{aligned} \langle D \rangle &= A \langle D_+ \rangle + A^{-1} \langle D_- \rangle = \\ &= \sum_{s \in S_{D_+}} A^{1+\Sigma s} \cdot (-A^2 - A^{-2})^{|sD_+|-1} + \sum_{s \in S_{D_-}} A^{-1+\Sigma s} \cdot (-A^2 - A^{-2})^{|sD_-|-1} \end{aligned}$$

Pero notar que los dos sumandos a la derecha de la última igualdad son respectivamente:

$$\begin{aligned} \sum_{s \in S_{D_+}} A^{1+\Sigma s} \cdot (-A^2 - A^{-2})^{|sD_+|-1} &= \sum_{s \in S_{D/s(c_0)=+1}} A^{\Sigma s} \cdot (-A^2 - A^{-2})^{|sD|-1} \\ \sum_{s \in S_{D_-}} A^{-1+\Sigma s} \cdot (-A^2 - A^{-2})^{|sD_-|-1} &= \sum_{s \in S_{D/s(c_0)=-1}} A^{\Sigma s} \cdot (-A^2 - A^{-2})^{|sD|-1} \end{aligned}$$

De lo cual se concluye:

$$\langle D \rangle = \sum_{s \in S_{D/s(c_0)=+1}} \{\dots\} + \sum_{s \in S_{D/s(c_0)=-1}} \{\dots\} = \sum_{s \in S_D} A^{\Sigma s} \cdot (-A^2 - A^{-2})^{|sD|-1} \quad \square$$

Corolario 3.2.7. *Existe una única función $\langle \rangle : \mathcal{L}_{no} \rightarrow \mathbb{Z}[A^{\pm 1}]$ que satisface los axiomas de la definición 3.1.1.*

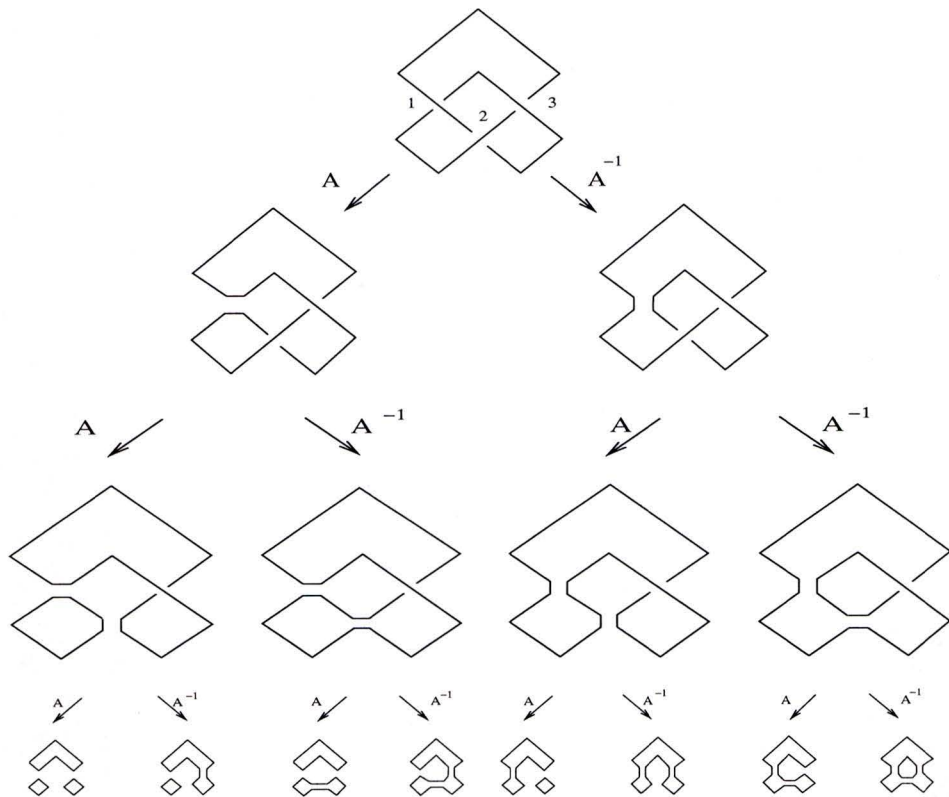
Demostración. El teorema anterior establece la unicidad de $\langle \rangle$, e induce la demostración de la existencia, que consiste en verificar que $\langle D \rangle = \sum_{s \in S_D} A^{\Sigma s} \cdot (-A^2 - A^{-2})^{|sD|-1}$ (ahora con una definición explícita) cumple los axiomas 0 a 3. El axioma 0 se cumple pues el movimiento $R0$ no introduce cruces y por lo tanto no altera la expresión $\sum_{s \in S_D} A^{\Sigma s} \cdot (-A^2 - A^{-2})^{|sD|-1}$. La verificación de los demás axiomas es inmediata haciendo cuentas similares a las hechas en la demostración del teorema anterior. \square

Observación 3.2.8. El enfoque que hemos hecho hasta ahora es el comúnmente utilizado: se establecen primero los axiomas, ya sea empezando por el corchete $[]$ o directamente por el corchete de Kauffman, y luego se demuestra que estos axiomas definen unívocamente un polinomio para cada diagrama. Se puede sin embargo, hacer el camino inverso: definir el corchete de Kauffman con la expresión del teorema 3.2.6 y luego probar que éste cumple los cuatro axiomas (y eventualmente que es el único que las cumple) [Kau].

Al margen de la demostración hecha en el teorema 3.2.6, debe quedar claro que la expresión que da este teorema para $\langle D \rangle$ es el resultado natural al que se llega al computar el corchete de Kauffman aplicando los axiomas que lo definen.

El hecho fundamental es que el axioma 1 dice que el corchete evaluado en un diagrama con c cruces es igual a una combinación lineal de dos corchetes evaluados en sendos diagramas con $c - 1$ cruces cada uno. Al iterar este axioma sobre cada nuevo diagrama se tiene en cada paso el doble de sumandos que en el paso anterior. El proceso se detiene luego de c iteraciones, cuando los diagramas ya no tienen cruces y se tienen entonces 2^c sumandos, que están en correspondencia con los estados posibles del diagrama original. El factor $A^{\Sigma s}$ se debe a que en cada paso, se multiplica el corchete por A^{+1} o A^{-1} y por lo tanto el efecto acumulado es multiplicar, para un cierto estado s con k 1's, por $A^{k \cdot 1 + (c-k) \cdot (-1)} = A^{\Sigma s}$. Finalmente, se calcula el corchete para $|sD|$ componentes triviales, lo que aporta el factor $(-A^2 - A^{-2})^{|sD|-1}$.

Ejemplo 3.2.9. A modo de ilustración calculamos el corchete de Kauffman del trébol (izquierdo) usando los axiomas y viendo cómo aparece la forma explícita del teorema 3.2.6.



Al representar el cálculo del polinomio con este árbol (invertido), resulta que los términos $\langle D|_s \rangle = A^{\sum s} (-A^2 - A^{-2})^{|sD|-1}$ se corresponden con los caminos que van desde la raíz (vértice superior) hasta cada una de las ocho hojas (vértices inferiores). $A^{\sum s}$ se obtiene multiplicando el valor de cada rama del camino y $|sD|$ es la cantidad de componentes que hay en el diagrama correspondiente a cada hoja. Tenemos entonces que:

$$\begin{aligned}
 \langle D \rangle &= A^3(-A^2 - A^{-2})^2 + A^1(-A^2 - A^{-2})^1 + A^1(-A^2 - A^{-2})^1 + A^{-1}(-A^2 - A^{-2})^0 + \\
 &+ A^1(-A^2 - A^{-2})^1 + A^{-1}(-A^2 - A^{-2})^0 + A^{-1}(-A^2 - A^{-2})^0 + A^{-3}(-A^2 - A^{-2})^1 = \\
 &= A^3(A^4 + A^{-4} + 2) + A(-A^2 - A^{-2}) + A(-A^2 - A^{-2}) + A^{-1} + A(-A^2 - A^{-2}) + \\
 &+ A^{-1} + A^{-1} + A^{-3}(-A^2 - A^{-2}) = A^7 + A^{-1} + 2A^3 - A^3 - A^{-1} - A^3 - A^{-1} + A^{-1} + \\
 &- A^3 - A^{-1} + A^{-1} + A^{-1} - A^{-1} - A^{-5} = A^7 - A^3 - A^{-5}.
 \end{aligned}$$

3.3. El Corchete de Kauffman y los R -movimientos.

A continuación analizamos la invarianza de $\langle \rangle$ con respecto a los R -movimientos.

Lema 3.3.1. *Valen las siguientes igualdades:*

1.

$$\langle \text{Diagram 1} \rangle = -A^3 \langle \text{Diagram 2} \rangle$$

2.

$$\langle \text{Diagram 3} \rangle = -A^{-3} \langle \text{Diagram 4} \rangle$$

Demostración.

1. Usando los axiomas 0, 1 y 2:

$$\begin{aligned} \langle \text{Diagram 1} \rangle &= A \langle \text{Diagram 5} \rangle + A^{-1} \langle \text{Diagram 6} \rangle = \\ &= A(-A^2 - A^2) \langle \text{Diagram 2} \rangle + A^{-1} \langle \text{Diagram 2} \rangle = -A^3 \langle \text{Diagram 2} \rangle \end{aligned}$$

2. Análogo al caso anterior.

□

De lo anterior se deduce que $\langle \rangle$ no es un invariante pues no lo es bajo $R1$. Sin embargo sí es invariante bajo los restantes R -movimientos.

Proposición 3.3.2. *El corchete de Kauffman es un invariante bajo $R0$, $R2$ y $R3$.*

Demostración.

- $R0$: es por definición de $\langle \rangle$
- $R2$:

$$\begin{aligned} \langle \text{Diagram 7} \rangle &= A \langle \text{Diagram 8} \rangle + A^{-1} \langle \text{Diagram 9} \rangle = \\ &= -A^2 \langle \text{Diagram 10} \rangle + A^{-1}(A \langle \text{Diagram 11} \rangle + A^{-1} \langle \text{Diagram 12} \rangle) = \langle \text{Diagram 11} \rangle \end{aligned}$$

- $R3$:

$$\langle \text{Diagram 1} \rangle = A \langle \text{Diagram 2} \rangle + A^{-1} \langle \text{Diagram 3} \rangle = A \langle \text{Diagram 4} \rangle + A^{-1} \langle \text{Diagram 5} \rangle$$

La expresión a la derecha de la última igualdad es invariante bajo una rotación de 180° , de lo que resulta la invarianza del corchete de Kauffman bajo $R3$:

$$\langle \text{Diagram 1} \rangle = \langle \text{Diagram 2} \rangle$$

□

Tenemos entonces que el corchete $\langle \rangle$ es invariante bajo $R0$, $R2$, $R3$ y además valen las ecuaciones del lema 3.3.1. Para que el corchete sea realmente un invariante, debemos agregarle algo de manera tal que se anulen los términos $-A^{\pm 3}$ y resulte invariante bajo $R1$, pero manteniendo la invarianza bajo los demás R -movimientos.

3.4. El Polinomio de Jones y sus Propiedades.

Definición 3.4.1. Dado un diagrama D de enlace orientado, definimos la *torsión* de D como $w(D) = \sum_c w(c)$, siendo:

$$w(c) = \begin{cases} 1 & \text{si } c \text{ es positivo} \\ -1 & \text{si } c \text{ es negativo} \end{cases}$$

Lema 3.4.2. La torsión es un invariante de diagramas orientados bajo $R0$, $R2$, $R3$ y además valen, independientemente de cuál de las dos posibles orientaciones se trate, las siguientes ecuaciones:

1.

$$w(\text{Diagram 1}) = w(\text{Diagram 2}) + 1$$

2.

$$w(\text{Diagram 1}) = w(\text{Diagram 2}) - 1$$

Demostración. Mientras que las ecuaciones se deducen fácilmente de la definición misma de torsión, la invarianza bajo los mencionados R -movimientos se demuestra de manera similar a como se demostró que el linking number es un invariante (proposición 1.7.5). □

Teorema 3.4.3. Definiendo $f_D(A) = (-A^3)^{-w(D)} \langle D \rangle$ para cada diagrama orientado D , resulta que f_D es invariante bajo los cuatro R -movimientos.

Demostración. Dado que w y $\langle \rangle$ son ambos invariantes bajo $R0$, $R2$ y $R3$ resulta que también f_D lo es para esos movimientos. Con respecto a $R1$:

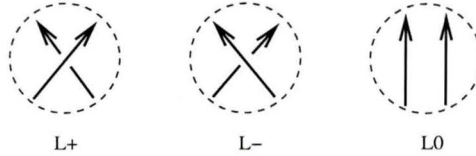
$$\begin{aligned} f_{\text{cruce}}(\mathbf{A}) &= (-\mathbf{A}^3)^{-w(\text{cruce})} \langle \text{cruce} \rangle = (-\mathbf{A}^3)^{-w(\text{cruce})+1} (-\mathbf{A}^{-3}) \langle \text{cruce} \rangle = \\ &= (-\mathbf{A}^3)^{-w(\text{cruce})} \langle \text{cruce} \rangle = f_{\text{cruce}}(\mathbf{A}) \end{aligned}$$

□

Definición 3.4.4. Dado un enlace orientado L , se define su *polinomio de Jones* V_L como $V_L(t) = f_D(t^{-\frac{1}{4}})$, siendo D el diagrama de L .

Observar que la torsión depende de la orientación salvo para los nudos, mientras que el corchete de Kauffman no depende de la orientación en ningún caso. Como consecuencia, el polinomio de Jones es un invariante definido tanto para enlaces orientados como para nudos no orientados². En lo que sigue, cuando enunciemos una propiedad del polinomio de Jones, diremos que se aplica a enlaces orientados, dando por supuesto que está claro que también se aplica a nudos no orientados.

Definición 3.4.5. Dado un enlace orientado L y un cruce c en su diagrama D , definimos tres diagramas orientados, que son iguales a D excepto (eventualmente) en c . Los enlaces que determinan estos diagramas los llamamos L_+ , L_- y L_0 :



Notación: si bien L_+ , L_- y L_0 dependen del cruce elegido en D , no haremos mención explícita a c en su notación.

Lema 3.4.6. Sea D un diagrama con c cruces. Luego:

1. $\sum s$, que está entre $-c$ y c , tiene la misma paridad que c .
2. Si D es orientado, lo mismo vale para $w(D)$, la torsión.
3. Si s y t son dos estados sobre D que difieren en el valor correspondiente a un solo cruce, entonces $|sD| = |tD| \pm 1$.

Demostración.

1. $\sum s = k \cdot 1 + (c - k) \cdot (-1) = 2k - c$, para algún $k \in \mathbb{N}_0$, luego $\sum s$ tiene la misma paridad que c .
2. Igual al ítem anterior.

²Para computar el polinomio de Jones sobre un nudo basta con darle a éste una orientación cualquiera; sabemos que el resultado no dependerá de la orientación elegida.

3. Aplicando el criterio de la definición 3.2.1 a todos los cruces del diagrama sobre los que s y t coinciden, obtenemos una cierta cantidad de componentes y sobre el cruce pendiente tendremos algo de la forma:



Al aplicar nuevamente el criterio mencionado para este cruce obtenemos un diagrama para sD y otro para tD :



Es decir que en un caso hay una componente más que en el otro.

□

Teorema 3.4.7. *El polinomio de Jones satisface:*

1. $V_L \in \mathbb{Z}[t^{\pm\frac{1}{2}}] \forall L \in \mathcal{L}_o$ y es un invariante de enlaces orientados.
2. Evaluado en el nudo trivial es el polinomio constante igual a 1.
3. $t^{-1}V_{L_+} - tV_{L_-} = (t^{\frac{1}{2}} - t^{-\frac{1}{2}})V_{L_0}, \forall$ cruce, $\forall L \in \mathcal{L}_o$.

Demostración.

1. Sabemos que V_L es un invariante de enlaces orientados, pues f_D lo es para diagramas. Además,

$$\begin{aligned} V_L(t) &= f_D(t^{-\frac{1}{4}}) = (-t^{-\frac{1}{4}})^{3w(D)} \cdot \langle D \rangle \Big|_{t^{-\frac{1}{4}}} = \\ &= (-1)^{w(D)} \cdot (t^{\frac{1}{4}})^{3w(D)} \cdot \sum_s (t^{-\frac{1}{4}})^{\sum s} (-t^{\frac{1}{2}} - t^{-\frac{1}{2}})^{|sD|-1} = \\ &= (-1)^{w(D)} \cdot \sum_s (t^{\frac{1}{4}})^{3w(D) - \sum s} (-t^{\frac{1}{2}} - t^{-\frac{1}{2}})^{|sD|-1} \end{aligned}$$

Con lo cual basta ver que $3w(D) - \sum s$ es par, hecho que se deduce de que $w(D)$ y $\sum s$ tienen igual paridad (lema anterior).

2. Dado que el polinomio de Jones es un invariante, evaluado en cualquier nudo trivial toma el mismo valor que en el nudo de la definición 1.1.5, que tiene torsión nula y corchete de Kauffman constante igual a uno, y por lo tanto su polinomio de Jones es constante e igual a 1.
3. Multiplicando los axiomas 1 y 1' del corchete de Kauffman por A y A^{-1} respectivamente, obtenemos:

$$A \langle \textcircled{\times} \rangle = A^2 \langle \textcircled{\parallel} \rangle + \langle \textcircled{=} \rangle$$

$$A^{-1} \langle \textcircled{\times} \rangle = \langle \textcircled{=} \rangle + A^{-2} \langle \textcircled{\parallel} \rangle$$

Restando:

$$A \langle \textcircled{\times} \rangle - A^{-1} \langle \textcircled{\times} \rangle = (A^2 - A^{-2}) \langle \textcircled{\parallel} \rangle$$

Por otro lado tenemos que $\langle D \rangle = (-A^3)^{w(D)} f_D(A)$, que combinándolo con la igualdad anterior da:

$$A(-A^3)^{w(\textcircled{\times})} f_{\textcircled{\times}}(A) - A^{-1}(-A^3)^{w(\textcircled{\times})} f_{\textcircled{\times}}(A) =$$

$$= (A^2 - A^{-2})(-A^3)^{w(\textcircled{\parallel})} f_{\textcircled{\parallel}}(A)$$

Observemos que:

$$w(\textcircled{\uparrow\uparrow}) = r \Rightarrow w(\textcircled{\times}) = r + 1; w(\textcircled{\times}) = r - 1.$$

Multiplicando por $(-A^3)^{-r}$ en ambos lados de la igualdad previa llegamos a:

$$-A^4 f_{\textcircled{\times}}(A) + A^{-4} f_{\textcircled{\times}}(A) = (A^2 - A^{-2}) f_{\textcircled{\uparrow\uparrow}}(A)$$

Finalmente, multiplicando por -1 esta igualdad y evaluándola en $A = t^{-\frac{1}{4}}$ se obtiene el ítem 3 del teorema. □

Veremos enseguida, luego de una definición y de un lema, que existe un único polinomio que satisface las propiedades 1, 2 y 3 del teorema anterior.

3.5. Complejidad de un Enlace, Caracterización de V_L y Otras Propiedades.

Definición 3.5.1.

1. Dado un diagrama D (orientado o no), se define la *complejidad de D* como el par (c, m) siendo c el número de cruces del diagrama y m el mínimo número de cruces que es necesario invertir para transformar el diagrama en el del enlace trivial.

2. Las complejidades están ordenadas lexicográficamente, lo que permite definir la complejidad de un enlace L con diagrama D , como el mínimo entre todas las complejidades de los diagramas equivalentes a D .

Por definición, la complejidad es un invariante de enlaces.

Observación 3.5.2. Si (c, m) es la complejidad de un enlace L entonces:

- c coincide con $c(L)$, el número de cruces de L (definición 1.4.2).
- m es mayor o igual que $u(L)$, el unknotting number de L (definición 1.5.2). El ejemplo mencionado en la observación 1.5.3 muestra que no necesariamente vale $m = u(L)$.

Lema 3.5.3. *Dado un enlace orientado y no trivial L , existe un diagrama D' con un cruce c' , tal que siendo L'_+ , L'_- y L'_0 los enlaces asociados al diagrama D' y al cruce c' , resulta que L es isotópico a alguno de los dos enlaces L'_+ o L'_- , y el restante, junto con L'_0 , tienen ambos complejidad menor que la de L .*

Demostración. Tomemos a D' como un diagrama en el que se realiza la complejidad de L : la cantidad de cruces de D' es entonces $c(L)$ y entre todos los diagramas equivalentes al de L y también con $c(L)$ cruces, D' es uno (no necesariamente el único) que requiere la menor cantidad de inversiones de cruces para transformarlo en trivial. Sea r esta mínima cantidad de inversiones y tomemos a c' como un cruce cualquiera en un subconjunto de r cruces que realiza el mínimo ($r > 0$ pues L es no trivial). Según sea c' positivo o negativo, tendremos $L \sim L'_+$ o $L \sim L'_-$, respectivamente.

Supongamos que $L \sim L'_+$ (el caso $L \sim L'_-$ es análogo). Claramente L'_0 tiene menor complejidad que L pues su diagrama tiene $c(L) - 1$ cruces. Por otro lado, como el diagrama de L'_- tiene la misma cantidad de cruces que D' , que precisamente es $c(L)$, entonces $c(L'_-) \leq c(L)$. Si vale el $<$ entonces la complejidad de L'_- es menor que la de L . Si es igual, por cómo elegimos al cruce c' , en el diagrama de L'_- se necesita invertir exactamente $r - 1$ cruces para transformarlo en trivial, de lo cual también obtenemos que la complejidad de L'_- es menor que la de L . \square

Notar que toda complejidad (c, m) es un elemento del conjunto bien ordenado³ $J = \{(a, b) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 / a \geq b\}$ (con el orden lexicográfico).

El lema anterior permite, como veremos a continuación, demostrar propiedades del polinomio de Jones haciendo inducción en la complejidad de los enlaces en los que se evalúa el polinomio, mediante la ecuación $t^{-1}V_{L_+} - tV_{L_-} = (t^{\frac{1}{2}} - t^{-\frac{1}{2}})V_{L_0}$.

Como hemos dicho anteriormente, las propiedades que se enuncian en el teorema 3.4.7 caracterizan al polinomio de Jones. Más precisamente:

Teorema 3.5.4. *Sea $i : \mathcal{L}_o \rightarrow \mathbb{Z}[t^{\pm\frac{1}{2}}]$ que satisfice:*

1. *Es un invariante de enlaces orientados.*

³De hecho J tiene el ordinal de \mathbb{N}_0 ; un isomorfismo es $(x, y) \mapsto y + \sum_{j=0}^x j$, que consiste en "poner horizontalmente" y en forma consecutiva sobre \mathbb{N}_0 los conjuntos $\{x\} \times \{0, 1, \dots, x\} \subset J$.

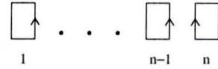
2. Evaluado en el nudo trivial es el polinomio constante igual a 1.

3. $t^{-1}i(L_+) - ti(L_-) = (t^{\frac{1}{2}} - t^{-\frac{1}{2}})i(L_0)$, \forall cruce, $\forall L \in \mathcal{L}_0$.

Entonces $i(L) = V_L \forall L \in \mathcal{L}_0$.

Demostración. Hacemos inducción en la complejidad de L . Probar el caso correspondiente al mínimo elemento de J , el $(0, 0)$, es analizar el caso del enlace trivial. Nuevamente hacemos inducción pero ahora en la cantidad de componentes de L . Si $n = 1$, entonces L es el nudo trivial, para el que sabemos que $i(L) = 1 = V_L$.

Si $n > 1$, tomamos $L_0 = L$, con diagrama⁴:



Y por lo tanto L_+ y L_- son respectivamente:



Despejamos $i(L_0)$ del ítem 3:

$$i(L) = i(L_0) = (t^{\frac{1}{2}} - t^{-\frac{1}{2}})^{-1}(t^{-1}i(L_+) - ti(L_-))$$

Y análogamente para V (por el ítem 3 del teorema 3.4.7):

$$V_L = V_{L_0} = (t^{\frac{1}{2}} - t^{-\frac{1}{2}})^{-1}(t^{-1}V_{L_+} - tV_{L_-})$$

Como L_+ y L_- son ambos enlaces triviales de $n - 1$ componentes, podemos aplicar la h.i., resultando iguales los términos de la derecha de las dos ecuaciones anteriores, con lo que finalmente obtenemos $V_L = i(L)$ para todo enlace trivial.

Sea L de complejidad mayor a $(0, 0)$ y supongamos, aplicando el lema previo, que $L \sim L'_+$ para algún cruce c' (el otro caso es análogo). A raíz de la invarianza tanto de i como de V , tenemos las ecuaciones:

$$t^{-1}i(L) - ti(L'_-) = t^{-1}i(L'_+) - ti(L'_-) = (t^{\frac{1}{2}} - t^{-\frac{1}{2}})i(L'_0)$$

$$t^{-1}V_L - tV_{L'_-} = t^{-1}V_{L'_+} - tV_{L'_-} = (t^{\frac{1}{2}} - t^{-\frac{1}{2}})V_{L'_0}$$

De las que despejamos:

$$i(L) = t[ti(L'_-) + (t^{\frac{1}{2}} - t^{-\frac{1}{2}})i(L'_0)] \quad y \quad V_L = t[tV_{L'_-} + (t^{\frac{1}{2}} - t^{-\frac{1}{2}})V_{L'_0}]$$

Como L'_- y L'_0 tienen complejidad menor que L (lema previo), resulta que $i(L'_-) = V_{L'_-}$ e $i(L'_0) = V_{L'_0}$ (h.i.). Finalmente, de las dos ecuaciones despejadas previamente se llega a que $i(L) = V_L$. \square

⁴Notar que las dos orientaciones del nudo trivial son isotópicas: aplicando dos veces $R1$, se obtiene el reverso (definición 1.4.5). Por lo tanto, al computar un invariante en el n -enlace trivial orientado, las orientaciones se pueden tomar de manera arbitraria, dado que las 2^n orientaciones posibles dan todas enlaces isotópicos.

Lema 3.5.5. Si L es el n -enlace trivial, entonces $V_L(t) = (-t^{\frac{1}{2}} - t^{-\frac{1}{2}})^{n-1}$.

Demostración. Tomamos a D como el diagrama del n -enlace trivial de la definición 1.1.5, y por el lema 3.2.5 tenemos $\langle D \rangle = (-A^2 - A^{-2})^{n-1}$. Como D tiene torsión nula, entonces $V_L(t) = f_D(t^{-\frac{1}{4}}) = \langle D \rangle|_{t^{-\frac{1}{4}}} = (-t^{\frac{1}{2}} - t^{-\frac{1}{2}})^{n-1}$. Además V_L es un invariante, por lo que el resultado se aplica a cualquier n -enlace trivial.

Observar que este mismo resultado está implícito en la demostración del teorema anterior. Cuando analizamos el caso en que L era el n -enlace trivial, llegamos a que $V_L = (t^{\frac{1}{2}} - t^{-\frac{1}{2}})^{-1}(t^{-1}V_{L_+} - tV_{L_-})$, siendo L_+ y L_- los $(n-1)$ -enlaces triviales. Aplicando la h.i. en esta ecuación también se llega al resultado que buscamos. \square

Lema 3.5.6. Si L_+ tiene n componentes, entonces L_- también y en cambio L_0 tiene $n \pm 1$.

Demostración. Es evidente, por cómo se definen L_+ y L_- , que ambos tienen la misma cantidad de componentes que L . Además, los enlaces L_+ , L_- y L_0 tienen dos situaciones posibles:



Los números denotan un posible orden en que se pasa por los distintos puntos del enlace a medida que se lo recorre comenzando desde el 1.

En el primer caso es claro que mientras que en L_+ y L_- , los dos arcos que se cruzan pertenecen a una misma componente, en L_0 los dos arcos paralelos pertenecen a distintas componentes. En este caso L_0 tiene $n + 1$ componentes.

En el segundo caso, los arcos que se cruzan en L_+ y L_- pertenecen a distintas componentes y los arcos paralelos en L_0 pertenecen a la misma, de lo cual L_0 tiene $n - 1$ componentes. \square

Proposición 3.5.7. Dado un n -enlace orientado L se tiene que:

1. Si n es impar V_L solo tiene potencias enteras de t .
2. Si n es par V_L solo tiene potencias semi-enteras⁵ de t .

Demostración. Hacemos inducción en la complejidad de L . El caso de mínima complejidad es cuando L es el enlace trivial de n componentes. Por el lema 3.5.5 y usando el binomio de Newton se tiene:

$$V_L(t) = (-t^{\frac{1}{2}} - t^{-\frac{1}{2}})^{n-1} = (-1)^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} (t^{\frac{1}{2}})^{2k-n+1}.$$

de donde sigue el resultado buscado.

Si L tiene complejidad mayor que $(0, 0)$, análogamente a la demostración del teorema 3.5.4, suponemos $L \sim L'_+$, de lo cual $V_L = t[tV_{L'_-} + (t^{\frac{1}{2}} - t^{-\frac{1}{2}})V_{L'_0}]$, con L'_- y L'_0 de menor complejidad que L , por lo que se les aplica la h.i. Además, como L'_+ tiene n componentes (pues es equivalente al n -enlace L), entonces L'_- tiene n y L'_0 tiene $n \pm 1$ componentes (lema anterior).

De forma tal que:

⁵Los números semi-enteros son de la forma $\frac{1}{2} + k$ con $k \in \mathbb{Z}$.

1. Si n es impar, entonces L'_- tiene una cantidad impar de componentes y L'_0 una cantidad par. Por h.i. $V_{L'_-}$ solo tiene potencias enteras de t mientras que $V_{L'_0}$ solo tiene potencias semi-enteras de t . De lo que resulta que $V_L = t[V_{L'_-} + (t^{\frac{1}{2}} - t^{-\frac{1}{2}})V_{L'_0}]$ tiene solamente potencias enteras de t .
2. Si n es par, por un razonamiento similar al del ítem anterior se llega a que V_L tiene solamente potencias semi-enteras de t .

□

3.6. Una Generalización del Polinomio de Jones: el HOMFLY.

Definición 3.6.1. Dado un enlace orientado L se define el polinomio *HOMFLY* $P_L \in \mathbb{Z}[x^{\pm 1}, z^{\pm 1}]$ mediante los siguientes axiomas:

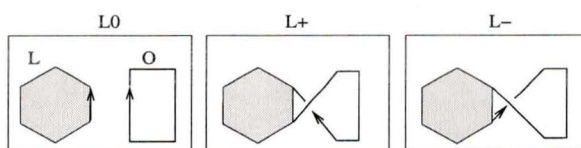
1. $P : \mathcal{L}_o \rightarrow \mathbb{Z}[x^{\pm 1}, z^{\pm 1}]$ es un invariante de enlaces orientados.
2. Si L es el nudo trivial entonces $P_L = 1$.
3. $x^{-1}P_{L_+} - xP_{L_-} = zP_{L_0}, \forall$ cruce, $\forall L \in \mathcal{L}_o$.

La demostración de que estos tres axiomas definen para cada enlace orientado un único polinomio se hace por inducción en la complejidad, usando las mismas ideas que las de la demostración del teorema 3.5.4. Esto es, dado un enlace L , se toman los enlaces L'_+ , L'_- y L'_0 del lema 3.5.3 y suponiendo que $L \sim L'_+$, se tiene que $P_L = x(xP_{L'_-} + zP_{L'_0})$, con el agregado de que L'_- y L'_0 tienen menor complejidad que L , hecho que permite aplicar la h.i. correspondiente a la unicidad.

Este mismo “truco” se emplea también para computar el HOMFLY en un determinado nudo o enlace (existencia), pues al tener L'_- y L'_0 complejidades menores que la de L , están más próximos del enlace trivial, y por lo tanto al repetir el axioma 3 de la definición anterior una cantidad finita de veces, se termina calculando el HOMFLY para enlaces triviales. A su vez, sobre los enlaces triviales, el HOMFLY se calcula usando una idea similar a la de la demostración del teorema 3.5.4 para el caso de enlaces triviales.

Lema 3.6.2. Si O es el nudo trivial, entonces $P_{LUO} = (x^{-1} - x)z^{-1}P_L$, para todo enlace orientado L .

Demostración. ⁶ Tomando $L_0 = LUO$ resulta que tanto L_+ como L_- son isotópicos a L (en términos de diagramas basta con un movimiento R1).



⁶La demostración se puede hacer para el nudo trivial de la figura y generalizarla luego a cualquier nudo trivial gracias a la invarianza de P . Lo mismo vale para el siguiente corolario.

Usando entonces el axioma 3 y la invarianza de P tenemos que:

$$P_{L \cup O} = P_{L_0} = (x^{-1}P_{L_+} - xP_{L_-})z^{-1} = (x^{-1}P_L - xP_L)z^{-1} = (x^{-1} - x)z^{-1}P_L. \quad \square$$

Corolario 3.6.3. Si O_n es el enlace trivial de n -componentes, entonces:

1. $P_{L \cup O_n} = ((x^{-1} - x)z^{-1})^n P_L$ para todo enlace orientado L .
2. $P_{O_n} = ((x^{-1} - x)z^{-1})^{n-1}$.

Demostración. Inducción en n . El caso $n = 1$ vale tanto para el ítem 1 (lema anterior) como para el ítem 2 (axioma 2 del HOMFLY). Para $n > 1$:

1. $P_{L \cup O_n} = P_{L \cup O_1 \cup O_{n-1}} = ((x^{-1} - x)z^{-1})^{n-1} P_{L \cup O_1} = ((x^{-1} - x)z^{-1})^n P_L$.
2. Es el ítem 1 para O_{n-1} y $L = O_1$.

□

Lema 3.6.4. Dados enlaces orientados L_1 y L_2 , $P_{L_1 \cup L_2} = (x^{-1} - x)z^{-1}P_{L_1}P_{L_2}$.

Demostración. Hacemos inducción en la complejidad de L_2 . El primer caso, en el que $L_2 = O_n$ para algún n natural, tenemos por el corolario anterior, que $P_{L_1 \cup L_2} = ((x^{-1} - x)z^{-1})^n P_{L_1} = (x^{-1} - x)z^{-1}P_{L_1}((x^{-1} - x)z^{-1})^{n-1} = (x^{-1} - x)z^{-1}P_{L_1}P_{L_2}$.

Sea ahora L_2 con mayor complejidad que la trivial y sean $L'_{2,+}$, $L'_{2,-}$ y $L'_{2,0}$ los enlaces del lema 3.5.3. Tenemos entonces que $L_2 \sim L'_{2,+}$ (o $L_2 \sim L'_{2,-}$) con $L'_{2,-}$ y $L'_{2,0}$ de menor complejidad que L_2 .

Si definimos $L_+ = L_1 \cup L'_{2,+}$, entonces resulta:

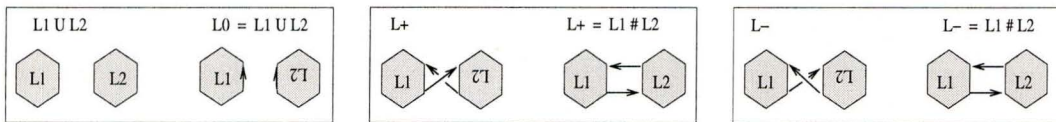
- $L_+ \sim L_1 \cup L_2$
- $L_- = L_1 \cup L'_{2,-}$
- $L_0 = L_1 \cup L'_{2,0}$

Y como sobre L_- y L_0 podemos aplicar la h.i., tenemos:

$$\begin{aligned} P_{L_1 \cup L_2} &= P_{L_+} = x(zP_{L_0} + xP_{L_-}) = x(zP_{L_1 \cup L'_{2,0}} + xP_{L_1 \cup L'_{2,-}}) = \\ &= x(z(x^{-1} - x)z^{-1}P_{L_1}P_{L'_{2,0}} + x(x^{-1} - x)z^{-1}P_{L_1}P_{L'_{2,-}}) = \\ &= (x^{-1} - x)z^{-1}P_{L_1}x(zP_{L'_{2,0}} + xP_{L'_{2,-}}) = (x^{-1} - x)z^{-1}P_{L_1}P_{L'_{2,+}} = (x^{-1} - x)z^{-1}P_{L_1}P_{L_2}. \end{aligned} \quad \square$$

Corolario 3.6.5. Dados enlaces orientados L_1 y L_2 , se tiene $P_{L_1 \# L_2} = P_{L_1}P_{L_2}$.

Demostración. Observar que tomando $L_0 = L_1 \cup L_2$, resulta que tanto L_+ como L_- son isotópicos a $L_1 \# L_2$:



De donde:

$$\begin{aligned}
 x^{-1}P_{L_+} - xP_{L_-} &= zP_{L_0} \Rightarrow x^{-1}P_{L_1 \# L_2} - xP_{L_1 \# L_2} = zP_{L_1 \cup L_2} \Rightarrow \\
 &\Rightarrow (x^{-1} - x)P_{L_1 \# L_2} = z(x^{-1} - x)z^{-1}P_{L_1}P_{L_2} \Rightarrow P_{L_1 \# L_2} = P_{L_1}P_{L_2}.
 \end{aligned}$$

□

Corolario 3.6.6. *Dados enlaces orientados L_1, \dots, L_r :*

1. $P_{\cup_{j=1}^r L_j} = ((x^{-1} - x)z^{-1})^{r-1} \prod_{j=1}^r P_{L_j}$.
2. $P_{\#_{j=1}^r L_j} = \prod_{j=1}^r P_{L_j}$.

Demostración. Inducción en r .

□

Corolario 3.6.7. *Dados enlaces orientados L_1, \dots, L_r :*

1. $V_{\cup_{j=1}^r L_j} = (-x^{-\frac{1}{2}} - x^{\frac{1}{2}})^{r-1} \prod_{j=1}^r V_{L_j}$.
2. $V_{\#_{j=1}^r L_j} = \prod_{j=1}^r V_{L_j}$.

Demostración. Resulta de la siguiente proposición y de especializar $z = x^{\frac{1}{2}} - x^{-\frac{1}{2}}$ en las igualdades del corolario anterior.

□

Proposición 3.6.8. *Al evaluar el HOMFLY en $z = x^{\frac{1}{2}} - x^{-\frac{1}{2}}$, se obtiene el polinomio de Jones.*

Demostración. Debemos ver que el polinomio de una variable que se obtiene al evaluar el HOMFLY de esa manera satisface las propiedades que caracterizan al polinomio de Jones (teorema 3.5.4). Las propiedades 1 y 2 se cumplen pues al ser satisfechas por el HOMFLY, entonces automáticamente las satisface cualquier especialización de sus variables. Por otro lado, la propiedad 3 del HOMFLY, $x^{-1}P_{L_+}(x, z) - xP_{L_-}(x, z) = zP_{L_0}(x, z)$, al ser evaluada en $z = (x^{\frac{1}{2}} - x^{-\frac{1}{2}})$ se transforma en la propiedad 3 del teorema 3.5.4.

□

De manera que el HOMFLY es una generalización del polinomio de Jones, así como de otros polinomios (lógicamente también invariantes de enlaces) conocidos con anterioridad. Al evaluar el HOMFLY en $x = 1$ se obtiene el *polinomio de Conway*, que a su vez al evaluarse en $z = t^{\frac{1}{2}} - t^{-\frac{1}{2}}$ es un polinomio conocido como *polinomio de Alexander* [Rob99], [Zie00].

3.7. Enlaces Alternados y Reducidos.

Estudiaremos ahora ciertas propiedades del corchete de Kauffman que aplicaremos más adelante en la demostración del hecho de que si un enlace tiene diagrama alternado y reducido D , entonces la cantidad de cruces que tiene es la mínima cantidad que puede tener cualquier diagrama equivalente a D . En otras palabras, para computar el invariante $c(L)$ (def. 1.4.2) basta con contar cuántos cruces tiene cualquier diagrama reducido, alternado y equivalente al de L , si es que para ese enlace existe tal diagrama (hay ejemplos de nudos tales que ningún diagrama equivalente al suyo es alternado [Ada00]).

Observación 3.7.1. Dado que para cualquier enlace L existe $L' \sim L$ tal que L' tiene proyección conexa, de ahora en más vamos a suponer siempre que $\pi(L)$ es conexo para todo enlace L .

Notar que esto implica que un diagrama sin cruces corresponde al del nudo trivial, pues al no haber cruces podría tratarse de un n -enlace trivial, pero como su diagrama debe ser conexo se tiene $n = 1$.

Además, gracias al siguiente lema, es equivalente que $\pi(L)$ sea conexo a que sea arco-conexo. Por lo tanto, cuando hagamos referencia a esta hipótesis (que $\pi(L)$ es conexo), usaremos indistintamente que es conexo o que es arco-conexo.

Lema 3.7.2. *Dado un enlace L , $\pi(L)$ es conexo si y solo si es arco-conexo.*

Demostración. Dado que \Leftarrow vale en general [Mun75], debemos ver \Rightarrow .

Tenemos que $\pi(L) = \cup_{i=1}^n \pi(L_j)$, siendo L_j la j -ésima componente de L , y además $\pi(L_j)$ es arco-conexo pues L_j lo es. Tomamos $A_j = \pi(L_j)$, que es cerrado y no vacío, y consideramos la mínima relación de equivalencia generada por: $A_j \sim A_i \Leftrightarrow A_j \cap A_i \neq \emptyset$.

Dado que A es conexo, se tiene que existe una única clase de equivalencia. Pues como $A = \cup_{A_i \sim A_1} A_i \cup \cup_{A_i \not\sim A_1} A_i$ es una partición en cerrados disjuntos y el primero es no vacío, por la conexión de A , el segundo sí lo es, de donde resulta que: $\# A_i / A_i \approx A_1$.

Usando que hay una única clase de equivalencia llegamos a que $A = \cup_{i=1}^n A_j$ es arco-conexo. En efecto, sean $a, a' \in A$. Luego existen $A_{j_0}, \dots, A_{j_r}, a_1, \dots, a_r$ tales que $a \in A_{j_0}$, $a' \in A_{j_r}$ y $a_i \in A_{j_{i-1}} \cap A_{j_i} \forall i = 1, \dots, r$. De la arco-conexión de cada A_{j_i} se deduce que existe un camino en A desde a hasta a' . □

Definición 3.7.3. Dado un diagrama D de un n -enlace L , el homeomorfismo $\sqcup_{j=1}^n S^1 \rightarrow L$ (def. 1.1.1) determina⁷ n secuencias finitas de cruces del diagrama. Diremos que D es *alternado* si en cada una de estas secuencias los cruces se alternan “por arriba” y “por abajo”. Diremos que L es *alternado* si algún diagrama equivalente a D es alternado.

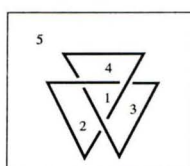
⁷Dado L , tenemos un homeomorfismo $\eta : \sqcup_{j=1}^n S^1 \rightarrow L$. Consideramos $[0, 1] \xrightarrow{\theta} S^1 \xrightarrow{\eta_j} L \xrightarrow{\pi} \mathbb{R}^2$, siendo $\theta(t) = (\cos(t), \sin(t))$, η_j la restricción de η a la j -ésima copia de S^1 y π la proyección al plano $z = 0$. El orden en $[0, 1]$ determina un orden en los cruces de la proyección de la componente j de L y al considerar todas las η_j quedan definidas n secuencias de cruces en el diagrama de L .

Observación 3.7.4. Hemos dicho ya, al comienzo de la sección 1.2, que en la proyección regular de un enlace, los cruces son dobles: \times . Podemos interpretar entonces a la proyección de un enlace como un multigrafo planar 4-regular ⁸, en el que los vértices son los cruces de la proyección.

Para un multigrafo planar, si se denota con n_v , n_e y n_f a la cantidad de vértices, ramas y regiones⁹, se tiene la ecuación¹⁰ $n_v - n_e + n_f = 1$ si se excluye a la región no acotada del plano, y $n_v - n_e + n_f = 2$ si se la incluye.

Para cualquier multigrafo se tiene, haciendo inducción en n_e , que $n_e = \sum_{v \in V} \frac{\text{deg}(v)}{2}$. Luego, en cualquier multigrafo 4-regular vale $n_e = \sum_{v \in V} \frac{4}{2} = 2n_v$. Si además es un multigrafo planar entonces la cantidad total de regiones es $n_f = 2 - n_v + n_e = 2 + n_v$, y por ende un diagrama con c cruces determina $c + 2$ regiones en el plano, incluyendo la región no acotada.

Ejemplo 3.7.5. Para el trébol, tenemos las siguientes cinco regiones:

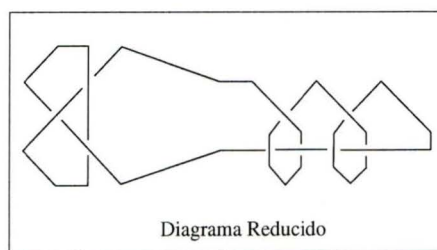
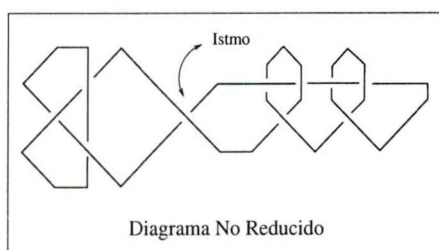


El trébol y sus regiones

Definición 3.7.6.

1. Un *istmo* en un diagrama es un cruce en el que inciden menos de cuatro regiones.
2. Un diagrama es *reducido* si no posee ningún istmo.

Ejemplo 3.7.7.



⁸Un *multigrafo* es una terna $G = (V, E, \delta)$, siendo V y E los conjuntos de *vértices* y *ramas*, respectivamente (finitos y V no vacío) y $\delta : E \rightarrow \mathcal{P}_{\leq 2}(V)$, siendo $\mathcal{P}_{\leq 2}(V)$ los subconjuntos no vacíos de V de cardinal menor o igual a dos. Se dice que $e \in E$ *incide* o *tiene como extremos* a los elementos de $\delta(e)$; se dice también que dos vértices son *adyacentes* si existe un e tal que $\delta(e)$ los contiene. Generalmente se representa a los grafos (de pocos vértices) en el plano mediante puntos para los vértices y arcos para las ramas. El *grado* de un vértice, $\text{deg}(v)$, es la cantidad de ramas que inciden en él, contando a cada rama con su multiplicidad (cuando $\delta(e) = \{v\}$, e se cuenta dos veces en $\text{deg}(v)$ pues se considera que incide dos veces). Un grafo es: *planar* si puede representarse en el plano sin que ningún par de ramas se intercepte y *4-regular* si todos sus vértices tienen grado cuatro. Se define entre los vértices la relación de equivalencia generada por la relación de adyacencia; las *componentes conexas* son las clases de equivalencia y se dice que el grafo es *conexo* si hay una sola componente.

⁹Nos referimos a las regiones del plano que quedan determinadas por las ramas.

¹⁰Característica de Euler.

Lo que ocurre en el ejemplo anterior es un hecho general: todo diagrama alternado y no reducido con r istmos se reduce a un diagrama con r cruces menos y también alternado [Rob99].

Definición 3.7.8. Dado un polinomio de una variable, su *span* es la diferencia entre la mayor y la menor potencia.

Notación: Denotamos con s_j a un estado tal que $s(d) = -1$ para j cruces y $s(d) = 1$ para el resto de los cruces (con d denotamos a los cruces).

Lema 3.7.9. Sea L un enlace con diagrama D alternado, reducido y con al menos un cruce. Luego $|s_0 D| > |s_1 D|$.¹¹

Demostración. Dividimos la demostración en cuatro pasos:

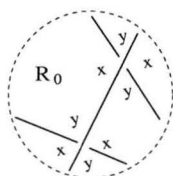
1. Le asignamos un elemento de $\{x, y\}$ a cada una de las cuatro regiones que inciden en cada cruce del diagrama, según el siguiente criterio:



Debemos verificar que en las regiones que se asignan más de una¹² letra todas éstas coinciden.

Supongamos que una región R_0 tiene asignadas una x y una y correspondientes a dos cruces c_0 y c'_0 en los que dicha región incide. Por la observación 3.7.1 la frontera de R_0 es conexa y por lo tanto homeomorfa a S^1 . Recorriéndola en una de sus dos posibles orientaciones comenzando desde c_0 , obtenemos una secuencia de cruces en los que también incide R_0 . Si bien c_0 y c'_0 no tienen necesariamente que ser consecutivos en esta secuencia, seguro que hay dos cruces consecutivos c_1 y c'_1 que también tienen asignados elementos distintos de $\{x, y\}$.¹³

Tenemos entonces dos cruces consecutivos en la frontera de R_0 a los que les corresponden distintas letras. Esto implica, como se ve en el siguiente esquema, que D no es alternado.



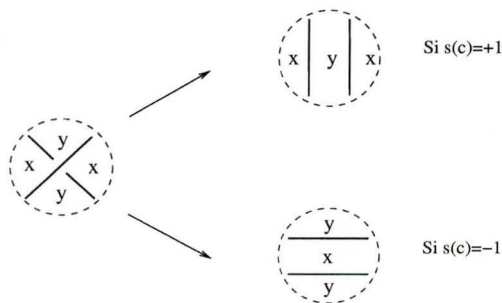
¹¹Notar que hay un único estado s_0 pero hay c estados s_1 , siendo c el número de cruces de D .

¹²De hecho en todas las regiones hay asignada más de una letra dado que toda región incide en más de un cruce: no puede no incidir en algún cruce por la observación 3.7.1 y por la hipótesis de que D tiene al menos un cruce; y no puede incidir en un solo cruce pues éste sería un istmo.

¹³Este argumento es del tipo: en toda sucesión de ceros y unos, o bien todos los términos son iguales o bien hay dos términos consecutivos que son distintos entre sí.

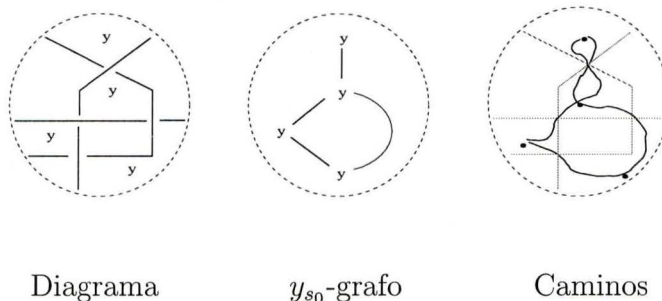
Por la contradicción, todas las letras asignadas a cada región son coincidentes. Si denotamos con \mathcal{R} al conjunto de todas las regiones que determina el diagrama tenemos entonces una asignación $\mathcal{R} \rightarrow \{x, y\}$, que a dos regiones opuestas por un cruce les asigna el mismo valor y a dos regiones adyacentes por un arco les asigna valores distintos.

A las regiones que toman uno y otro valor las llamamos x -regiones e y -regiones. Dado un estado s sobre D , cada cruce se transforma en:

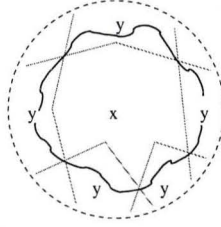


2. Dado un estado s consideramos el grafo cuyos vértices son las y -regiones de D y en el que hay una rama entre dos y -regiones si y solo si éstas tienen un cruce c en común y además $s(c) = +1$. Lo denominamos y_s -grafo y afirmamos que cuando $s = s_0$ es un grafo conexo. Más aún, al quitarle cualquier rama sigue siendo conexo.

Demostrar que es conexo es equivalente a demostrar que entre dos puntos cualesquiera situados en dos y -regiones, existe un camino que va de uno a otro y que solamente pasa por vértices del diagrama y por y -regiones.



Dados dos puntos en sendas y -regiones existe un camino que los une y que eventualmente pasa por alguna (o varias) x -región R_0 , cuya frontera está formada por cruces y arcos que la separan de y -regiones. El tramo del camino que pasa por R_0 puede reemplazarse por un tramo que solo pase por cruces y por y -regiones (ver la siguiente figura). Más aún, dado que hay dos maneras de recorrer la frontera de R_0 , hay dos caminos posibles, lo cual implica que al sacar una rama cualquiera del y_{s_0} -grafo, éste siga siendo conexo.



Dos caminos alternativos para evitar la x -región R_0

3. En el diagrama de s_0D hay $|s_0D|$ componentes, que son curvas disjuntas homeomorfas a S^1 y por lo tanto determinan $|s_0D| + 1$ regiones en el plano. Como $s_0(d) = 1 \forall$ cruce d , las únicas regiones que se unen en s_0D son las y -regiones, de lo que resulta que s_0D tiene tantas y -regiones como componentes conexas tiene el y_{s_0} -grafo. Por el ítem anterior, s_0D tiene una sola y -región y por lo tanto tiene $|s_0D|$ x -regiones.

Además, como ningún par de x -regiones se une, en s_0D y en D hay la misma cantidad de x -regiones. Luego: $|s_0D|$ es igual a la cantidad de x -regiones en D .

4. En el caso de s_1 , hay un par de x -regiones (distintas, por ser D reducido) que se unen, lo que implica que s_1D tiene una x -región menos que D . Por lo obtenido en el ítem anterior, la cantidad de x -regiones de s_1D es $|s_0D| - 1$.

Análogamente al caso anterior, en s_1D hay $|s_1D|$ componentes que determinan $|s_1D| + 1$ regiones. El hecho de que haya dos x -regiones que se unen, significa que el y_{s_1} -grafo resulta de quitarle una rama al y_{s_0} -grafo. Por el ítem 2 sabemos entonces que el y_{s_1} -grafo es conexo y por lo tanto s_1D tiene una sola y -región, de donde resulta que s_1D tiene $|s_1D|$ x -regiones.

Luego $|s_1D| = |s_0D| - 1$, que era lo que queríamos probar.

□

Observación 3.7.10.

1. Ya sabíamos por el lema 3.4.6 que $|s_1D| = |s_0D| \pm 1$. Lo que hemos demostrado con las hipótesis del lema anterior es que la igualdad vale con -1 .
2. Así como en el ítem 3 del lema anterior llegamos a que $|s_0D|$ es igual a la cantidad de x -regiones en D , también se puede ver que $|s_cD|$ es igual a la cantidad de y -regiones en D . Además, a pesar de haber supuesto que $c > 0$, para el caso $c = 0$ (que consiste en el nudo trivial) lo que dice dicho ítem también es válido: el nudo trivial determina dos regiones, una x -región, una y -región y se tiene $|s_0D| = |s_cD| = |s_\phi D| = |D| = 1$ (obs. 3.2.4).

Lema 3.7.11. *Supongamos que s_{j+1} se obtiene de s_j cambiando un $+1$ por un -1 . Denotando¹⁴ $MaxDeg$ a la mayor potencia de un polinomio, tenemos entonces $MaxDeg \langle D|_{s_{j+1}} \rangle \leq MaxDeg \langle D|_{s_j} \rangle$, para cualquier diagrama.*

¹⁴Usamos $MaxDeg$ (y no simplemente Deg) para diferenciarlo de $MinDeg$, con lo que denotaremos a la menor potencia del polinomio.

Demostración. Denotando con c al número de cruces de D , tenemos:

$$\begin{aligned} \langle D|_{s_j} \rangle &= A^{(c-j)(1)+j(-1)}(-A^2 - A^{-2})^{|s_j D|-1} = A^{c-2j}(-A^2 - A^{-2})^{|s_j D|-1} \\ &\Rightarrow \text{MaxDeg} \langle D|_{s_j} \rangle = c - 2j + 2(|s_j D| - 1) \end{aligned} \quad (3.1)$$

$$\Rightarrow \text{MaxDeg} \langle D|_{s_{j+1}} \rangle = c - 2(j+1) + 2(|s_{j+1} D| - 1)$$

Luego:

$$\begin{aligned} \text{MaxDeg} \langle D|_{s_{j+1}} \rangle \leq \text{MaxDeg} \langle D|_{s_j} \rangle &\Leftrightarrow -2 + 2(|s_{j+1} D| - 1) \leq 2(|s_j D| - 1) \\ &\Leftrightarrow 2(|s_{j+1} D| - |s_j D|) \leq 2 \Leftrightarrow |s_{j+1} D| - |s_j D| \leq 1 \end{aligned}$$

Lo cual es cierto pues, por el lema 3.4.6, $|s_j D| = |s_{j+1} D| \pm 1$. \square

Corolario 3.7.12. *Si D es un diagrama alternado y reducido con c cruces, entonces:*

1. $\text{MaxDeg} \langle D \rangle = c + 2(|s_0 D| - 1)$
2. $\text{MinDeg} \langle D \rangle = -c - 2(|s_c D| - 1)$

Demostración.

1. Si $c = 0$ entonces $\langle D \rangle = 1$, de donde el resultado es inmediato (ver observaciones 3.2.4 y 3.7.1). Si $c > 0$, por la ecuación 3.1 de la demostración anterior y por la desigualdad del lema 3.7.9 vale que:

$$\text{MaxDeg} \langle D|_{s_0} \rangle = c + 2(|s_0 D| - 1) > c + 2(|s_1 D| - 1) = \text{MaxDeg} \langle D|_{s_1} \rangle.$$

Dado s_j , existe una sucesión s_1, \dots, s_j tal que cada estado se obtiene del anterior cambiando un $+1$ por un -1 . Entonces, por el lema 3.7.11:

$$\text{MaxDeg} \langle D|_{s_1} \rangle \geq \text{MaxDeg} \langle D|_{s_j} \rangle \quad \forall j \geq 1.$$

Luego $\text{MaxDeg} \langle D|_{s_0} \rangle > \text{MaxDeg} \langle D|_{s_j} \rangle \quad \forall j$. Y como $\langle D \rangle = \sum_{s \in S_D} \langle D|_s \rangle$,

resulta que $\text{MaxDeg} \langle D \rangle = \text{MaxDeg} \langle D|_{s_0} \rangle = c + 2(|s_0 D| - 1)$.

2. $MinDeg \langle D \rangle = -MaxDeg \langle D \rangle |_{A^{-1}} = -MaxDeg \langle \bar{D} \rangle = -(c + 2(|s_c D| - 1))$, la primera igualdad vale en general para polinomios, la segunda sale del teorema 3.9.1 (que a pesar de presentarse más adelante no depende de los resultados que estamos demostrando ahora) y la última es el ítem anterior combinado con que $s_0 \bar{D} = s_c D$.

□

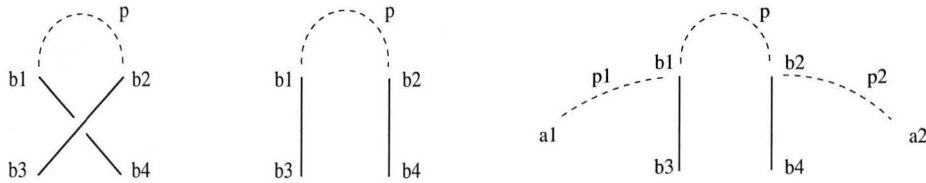
En forma similar al corolario anterior (sin usar el lema 3.7.9) tenemos el siguiente corolario:

Corolario 3.7.13. Si D es un diagrama con c cruces, entonces:

1. $MaxDeg \langle D \rangle \leq c + 2(|s_0 D| - 1)$
2. $MinDeg \langle D \rangle \geq -c - 2(|s_c D| - 1)$

Lema 3.7.14. Sea L un enlace y D su diagrama, con al menos un cruce c_0 , y consideremos los diagramas obtenidos a partir de reemplazar c_0 por \parallel y \equiv . Entonces al menos uno de estos dos nuevos diagramas corresponde a un enlace L' con proyección conexa (recordar que suponemos que L tiene proyección conexa).

Demostración. Siendo c_0 el cruce de la siguiente figura, notar que si recorremos el diagrama desde el punto b_1 en dirección opuesta al cruce, en algún momento, sin pasar por c_0 , llegaremos a alguno de los otros tres puntos b_2 , b_3 o b_4 . Supongamos que llegamos a b_2 (los otros casos son análogos).



Sea E el diagrama correspondiente al reemplazo $c_0 \rightarrow \parallel$ y sea L' un enlace que tiene a E como diagrama. Veamos que L' tiene proyección conexa. Sean a_0 y a_1 dos puntos cualesquiera de la proyección. Debemos ver que hay un camino en $\pi(L')$ que los une. Llamemos p al camino $b_1 \xrightarrow{p} b_2$ que por hipótesis está en $\pi(L')$. Como $\pi(L)$ es conexo, tenemos caminos $a_1 \xrightarrow{p_1} b_1$ y $b_2 \xrightarrow{p_2} a_2$. Podría pasar que alguno de estos dos caminos pasara por c_0 , en cuyo caso los corregimos usando p y los arcos \parallel de forma tal que p_1 y p_2 sean caminos en $\pi(L')$. La concatenación¹⁵ $(p_1 * p) * p_2$ es entonces un camino en $\pi(L')$ desde a_1 hasta a_2 . □

Lema 3.7.15. Siendo c el número de cruces de D y \bar{s} el estado opuesto a s , resulta que $|sD| + |\bar{s}D| \leq c + 2$.

¹⁵Si p_1 y p_2 son caminos tales que $p_1(1) = p_2(0)$ entonces $p_1 * p_2$ es el camino dado por $p_1(2t)$ para $t \in [0, \frac{1}{2}]$ y $p_2(2t - 1)$ para $t \in [\frac{1}{2}, 1]$.

Demostración. Hacemos inducción en c . Para $c = 0$ tenemos $s = s_\phi$, $s = \bar{s}$ y $s_\phi D = D$ (obs. 3.2.4), luego $|sD| + |\bar{s}D| = 2$, pues $|D| = 1$ (obs. 3.7.1).

Supongamos que D tiene $c > 0$ cruces. Sea c_0 un cruce y E el diagrama que resulta del lema anterior. Supongamos E se obtuvo aplicando $s(c_0)$ sobre c_0 (si no es porque se obtuvo con \bar{s} y la demostración es análoga). Siendo t la restricción de s a E , tenemos que $tE = sD$. Además, como excepto en c_0 , \bar{t} y \bar{s} son iguales, tenemos por un razonamiento similar al del lema 3.4.6 que $|\bar{t}E| = |\bar{s}D| \pm 1$. Aplicando la h.i. (E tiene $c - 1$ cruces y proviene de un enlace con proyección conexa) obtenemos $|tE| + |\bar{t}E| \leq c + 1$, y luego $|sD| + |\bar{s}D| \pm 1 \leq c + 1$, de donde se llega al resultado buscado. □

Teorema 3.7.16. *Dado un diagrama D con c cruces:*

1. $span \langle D \rangle \leq 4c$.
2. Si además D es alternado y reducido, entonces $span \langle D \rangle = 4c$.

Demostración.

1. Por el corolario 3.7.13 $span \langle D \rangle = MaxDeg \langle D \rangle - MinDeg \langle D \rangle \leq c + 2(|s_0D| - 1) + c + 2(|s_cD| - 1) = 2c + 2(|s_0D| + |s_cD| - 2)$. Por el lema 3.7.15 se llega al resultado buscado (notar que $s_0 = \bar{s}_c$).
2. Análogamente al ítem anterior, pero usando el corolario 3.7.12, tenemos $span \langle D \rangle = 2c + 2(|s_0D| + |s_cD| - 2)$. Al ser D alternado y reducido, $|s_0D|$ es la cantidad de x -regiones de D y $|s_cD|$ es la cantidad de y -regiones de D (ítem 3, dem. del lema 3.7.9). Luego $|s_0D| + |s_cD|$, que es la cantidad total de regiones de D , es igual a $c + 2$ (obs. 3.7.4), de donde sigue el resultado. □

Proposición 3.7.17. $span \langle \rangle$ es un invariante de diagramas.

Demostración. La proposición 3.3.2 dice que $\langle \rangle$ es invariante bajo los movimientos $R0$, $R2$ y $R3$. Luego, $span \langle \rangle = MaxDeg \langle \rangle - MinDeg \langle \rangle$ también lo es.

Por otro lado, si $D \sim D'$ mediante un movimiento $R1$, el lema 3.3.1 dice que $\langle D \rangle = -A^{\pm 3} \langle D' \rangle$, de donde:

$$\begin{aligned}
 span \langle D \rangle &= MaxDeg \langle D \rangle - MinDeg \langle D \rangle = \\
 &= MaxDeg(-A^{\pm 3} \langle D' \rangle) - MinDeg(-A^{\pm 3} \langle D' \rangle) = \\
 &= \pm 3 + MaxDeg \langle D' \rangle - (\pm 3 + MinDeg \langle D' \rangle) = \\
 &= MaxDeg \langle D' \rangle - MinDeg \langle D' \rangle = span \langle D' \rangle.
 \end{aligned}$$

$span \langle \rangle$ es entonces invariante bajo los cuatro R -movimientos. □

3.8. Conjetura de Tait.

El siguiente resultado fue conjeturado por Tait a fines del siglo *XIX* y demostrado por Kauffman, Murasugi y Thistlethwaite en 1987.

Corolario 3.8.1. *Todo diagrama alternado y reducido es minimal, en el sentido de que no es equivalente a ningún otro diagrama con menor cantidad de cruces.*

Demostración. Sea D alternado y reducido con c cruces y sea D' equivalente a D con c' cruces (D' no necesariamente alternado y reducido). Por la invarianza de $\text{span} \langle \rangle$ y por el lema 3.7.16 tenemos: $4c' \geq \text{span} \langle D' \rangle = \text{span} \langle D \rangle = 4c$, de donde $c' \geq c$. \square

Corolario 3.8.2. *Sea L un enlace con diagrama D . Si D' es un diagrama alternado, reducido, equivalente a D y con c' cruces, entonces $c(L) = c'$.*

Demostración. De la definición 1.4.2 tenemos que $c(L) \leq c'$, y por el corolario anterior $c(L) \geq c'$. \square

Corolario 3.8.3. *Todos los diagramas alternados, reducidos y equivalentes tienen el mismo número de cruces.*

Demostración. Tomamos un par de diagramas D_1, D_2 , alternados, reducidos y equivalentes entre sí. Sea L un enlace que tiene a D_1 como diagrama. Por el corolario anterior $c(L)$ coincide con la cantidad de cruces de D_1 y con la cantidad de cruces de D_2 . \square

Observación 3.8.4. A partir de la definición 1.4.2, es inmediato que $c(K_1 \# K_2) \leq c(K_1) + c(K_2)$. Sin embargo, es aun un problema abierto demostrar que vale la igualdad (o no) en general. No obstante, como veremos a continuación, la igualdad es válida en el caso en que $K_1 \# K_2$ es alternado.

Corolario 3.8.5. *Si K_1 y K_2 son nudos tales que $K_1 \# K_2$ es alternado, entonces $c(K_1 \# K_2) = c(K_1) + c(K_2)$.*

Demostración. Sean D_1 y D_2 los diagramas de K_1 y K_2 . Es un hecho cierto [Ada00], que si $K_1 \# K_2$ es alternado, entonces existen diagramas D'_1, D'_2 alternados y reducidos tales que $D_1 \sim D'_1, D_2 \sim D'_2, D'_1 \# D'_2$ es alternado, reducido y equivalente a $D_1 \# D_2$.

Denotamos con c'_1 y c'_2 a la cantidad de cruces de los diagramas D'_1 y D'_2 y por lo tanto $c'_1 + c'_2$ es la cantidad de cruces de $D'_1 \# D'_2$. Luego tenemos $c(K_1 \# K_2) = c'_1 + c'_2 = c(K_1) + c(K_2)$, usando para ambas igualdades el corolario 3.8.2. \square

3.9. Enlaces y Diagramas Orientados no Isotópicos a su Imagen.

Usaremos ahora el polinomio de Jones y el corchete de Kauffman para determinar ciertas condiciones que son necesarias para que un enlace sea isotópico a su imagen.

3.9.1. Caso General.

Teorema 3.9.1. *Dado un enlace orientado L se tiene $V_{\bar{L}}(t) = V_L(t^{-1})$, siendo \bar{L} la imagen de L .*

Demostración. Debemos ver que $f_{\bar{D}}(A) = f_D(A^{-1})$, es decir:

$$(-A^3)^{-w(\bar{D})} \cdot \langle \bar{D} \rangle |_A = (-A^{-3})^{-w(D)} \cdot \langle D \rangle |_{A^{-1}}$$

lo cual es consecuencia de:

$$\begin{cases} w(\bar{D}) = -w(D) \\ \langle \bar{D} \rangle |_A = \langle D \rangle |_{A^{-1}} \end{cases}$$

Mientras que la primera igualdad es inmediata a partir de las definiciones de torsión e imagen de un diagrama, la segunda se explica por:

$$\begin{aligned} \langle \bar{D} \rangle |_A &= \sum_s \langle \bar{D} |_s \rangle |_A = \sum_s \langle \bar{D} |_{\bar{s}} \rangle |_A = \sum_s A^{\sum \bar{s}} \cdot (-A^2 - A^{-2})^{|\bar{s}\bar{D}|-1} = \\ &= \sum_s (A^{-1})^{\sum s} \cdot (-(A^{-1})^2 - (A^{-1})^{-2})^{|sD|-1} = \langle D \rangle |_{A^{-1}} \end{aligned}$$

Pues siendo \bar{s} el estado opuesto a s , valen $\sum \bar{s} = -\sum s$ y $|\bar{s}\bar{D}| = |sD|$. \square

Corolario 3.9.2. *Dado un enlace orientado L : $V_L(t) \neq V_L(t^{-1}) \Rightarrow L \not\approx \bar{L}$.*

Demostración. $V_L(t) \neq V_L(t^{-1}) \Rightarrow V_L \neq V_{\bar{L}} \Rightarrow L \not\approx \bar{L}$. \square

Corolario 3.9.3. *El trébol no es isotópico a su imagen.*

Demostración. Ya calculamos, en el ejemplo 3.2.9, el corchete de Kauffman para el diagrama del trébol izquierdo, $\langle D \rangle = A^7 - A^3 - A^{-5}$. Dándole una orientación cualquiera (recordar el comentario luego de la definición 3.4.4), obtenemos su torsión $w(D) = -3$. Luego:

$$\begin{aligned} f_D(A) &= (-A^3)^{-w(D)} \langle D \rangle |_A = (-A^9)(A^7 - A^3 - A^{-5}) = -A^{16} + A^{12} + A^4 \\ \Rightarrow V_{trebol\ izq}(t) &= f_D(t^{-\frac{1}{4}}) = -t^{-4} + t^{-3} + t^{-1} \end{aligned}$$

Como $V_{trebol\ izq}(t) \neq V_{trebol\ izq}(t^{-1})$, se tiene que el trébol izquierdo y su imagen (el trébol derecho) son no isotópicos. \square

3.9.2. Caso Alternado y Reducido.

Observación 3.9.4. Recordemos que:

1. Por el corolario 3.7.12, un diagrama alternado y reducido satisface:

- $MaxDeg \langle D \rangle = c + 2(|s_0D| - 1)$
- $MinDeg \langle D \rangle = -c - 2(|s_cD| - 1)$

2. Por el ítem 3 de la demostración del lema 3.7.9 $|s_0D|$ es la cantidad de x -regiones en D , $|s_cD|$ es la cantidad de y -regiones en D y por lo tanto $|s_0D| + |s_cD| = c + 2$.

3. De la demostración del teorema 3.9.1 tenemos que $f_D(A) = f_D(A^{-1})$ es necesario para que D sea equivalente a su imagen.

Corolario 3.9.5. Si D es un diagrama orientado, alternado, reducido y equivalente a su imagen, entonces $w(D) = \frac{|s_0D| - |s_cD|}{3}$.

Demostración. Combinando los hechos mencionados en la observación anterior tenemos que:

$$\begin{aligned} MaxDeg(f_D(A)) &= MaxDeg(f_D(A^{-1})) \Rightarrow MaxDeg(f_D(A)) = -MinDeg(f_D(A)) \\ \Rightarrow MaxDeg((-A^3)^{-w(D)} \langle D \rangle) &= -MinDeg((-A^3)^{-w(D)} \langle D \rangle) \\ \Rightarrow -3w(D) + c + 2(|s_0D| - 1) &= 3w(D) + c + 2(|s_cD| - 1) \\ \Rightarrow 2(|s_0D| - |s_cD|) &= 6w(D) \Rightarrow w(D) = \frac{|s_0D| - |s_cD|}{3} \end{aligned}$$

□

Corolario 3.9.6. Si D es un diagrama (no trivial) orientado, alternado y reducido que tiene c cruces, entonces: $|w(D)| \geq \frac{c}{3} \Rightarrow D$ no es equivalente a su imagen.

Demostración. Veremos $|w(D)| \geq \frac{c}{3} \Rightarrow |w(D)| \neq \frac{|s_0D| - |s_cD|}{3}$

$$\text{O lo que es lo mismo: } w(D) = \frac{|s_0D| - |s_cD|}{3} \Rightarrow |w(D)| < \frac{c}{3}.$$

$$\text{Esto último ocurre si y solo si } ||s_0D| - |s_cD|| < c \Leftrightarrow -c < |s_0D| - |s_cD| < c$$

$$\Leftrightarrow -|s_0D| - |s_cD| + 2 < |s_0D| - |s_cD| < |s_0D| + |s_cD| - 2$$

$\Leftrightarrow 1 < |s_0D|$ y $1 < |s_cD|$. Dado que el diagrama es no trivial, entonces existe al menos un cruce en el que inciden, por ser D reducido, dos x -regiones distintas y dos y -regiones distintas, de donde se deducen las dos últimas desigualdades (ver ítem 2 de la observación 3.9.4).

□



Bibliografía

- [Ada00] Colin C. Adams. *The Knot Book*. AMS, 2000.
- [Ber94] J. Bernhard. Unknotting Numbers and Minimal Knot Diagrams. *Journal of Knot Theory and its Ramifications*, 1994.
- [ea97] Colin C. Adams et al. Stick Numbers and Composite of Knots and Links. *Journal of Knot Theory and its Ramifications*, 1997.
- [Kau] Louis H. Kauffman. Combinatorics and topology. <http://www2.math.uic.edu/kauffman/>.
- [Kau87] Louis H. Kauffman. New Invariants in the Theory of Knots. *American Mathematical Monthly*, 1987.
- [Kau88] Louis H. Kauffman. Statistical Mechanics and the Jones Polynomial. AMS, 1988.
- [Lic91] Raymond W.B. Lickorish. *An Introduction to Knot Theory*. Springer, 1991.
- [Mas67] W.S. Massey. *Algebraic Topology: An Introduction*. Springer-Verlag, 1967.
- [Mun75] J. R. Munkres. *Topology, a First Course*. Prentice-Hall, 1975.
- [Rob99] Justin Roberts. Knots Knots. <http://math.ucsd.edu/justin>, 1999.
- [Tur88] Vladimir Turaev. The Yang-Baxter Equation and Invariants of Links. *Invent Math*, 1988.
- [Zie00] Gerhard Burde, Heiner Zieschang. *Knots*. WdeG, 2000.